

Tomás de La Barra

Arquitecto y Urbanista  
Profesor del Instituto de Urbanismo  
FAU/UCV

---

## TEORÍA MICRO-ECONÓMICA E INTERACCIÓN ESPACIAL

---

*En este artículo se propone y discute un marco general para la integración entre modelos micro-económicos del uso del suelo y los modelos de interacción espacial. Primeramente, ambos enfoques son presentados sintéticamente para desembocar en una discusión acerca de sus similitudes y diferencias, comparación que abarca tanto los aspectos teóricos como matemáticos. Desde el punto de vista matemático, se identifica a la micro-economía con la tradición continua y las ecuaciones diferenciales, mientras que los modelos de interacción espaciales se identifican, más bien, con la matemática más moderna de las funciones discretas y los algoritmos. De esta manera se crea la base para el proceso de integración, el cual comienza por la re-interpretación de los elementos de una función de interacción espacial típica en términos micro-económicos. Luego los modelos micro-económicos más conocidos son expresados como modelos discretos, introduciendo en su estructura modelos de interacción espacial como única manera de superar los números supuestos simplificativos presentes en los modelos neoclásicos. El proceso de integración continúa luego con la introducción de un modelo tipo Lowry a las versiones discretas de los modelos de Wingo y Alonso, para llegar finalmente a la proposición de un modelo general de uso del suelo y renta inmobiliaria, en el cual se combina un procedimiento de localización de actividades básicas, de servicio por tipo y población por niveles socio-económicos con dos mecanismos de mercado simultáneos: tierra y edificaciones.*

### 1. INTRODUCCIÓN:

En las últimas décadas se ha intensificado la discusión en torno a la metodología de investigación científica en todos los campos, discusión que se ha visto impulsada en gran medida por la creciente importancia que ha ido adquiriendo la experimentación. Hoy en día existe un verdadero consenso en abandonar esquemas clásicos de investigación que se basaban en la capacidad deductiva individual del científico mismo, reemplazándolos por métodos que se basen más bien en la utilización de la evidencia empírica para corroborar o refutar hipótesis. Este cambio de enfoque metodológico se ha debido, entre otras, a dos causas fundamentales. Por una parte los problemas que se han ido enfrentando son cada vez más complejos, lo cual implica también que los experimentos que es necesario realizar crezcan también en complejidad. Hace varios siglos, los resultados de un experimento podían ser bastantes evidentes, por lo cual muchas veces no era necesario realizarlos; es así como varias teorías de importancia fueron deducidas a partir de evidencias cotidianas, como la teoría gravitacional, el heliocentrismo y otros. A medida que la complejidad de los experimentos aumenta, los resultados dejan de ser obvios y la intuición y experiencia del investigador no pueden ya evitarlos. Hoy en día la mayoría de las ciencias no pueden desarrollarse sin la actividad empírica.

El segundo elemento que ha incentivado la experimentación es el abandono de las teorías permanentes. El avance científico de los últimos tiempos ha roto con muchas teorías que se creían de validez absoluta, reemplazándolas por otras nuevas que vuelven a ser cambiadas. Este proceso de sustitución de teorías, que antes tardaba siglos, se ha acelerado notoriamente, de tal manera que hoy en día una teoría tiene sólo una validez temporal limitada. Es precisamente la experimentación el mecanismo que está al alcance del investigador para refutar una teoría y poder así reemplazarla por una que por el momento sea mejor.

Si bien las teorías deben ser constantemente revisadas a través de la experimentación, en las ciencias físicas al menos se considera que el objeto de la investigación permanece relativamente invariable. En las ciencias sociales, en cambio, el objeto de investigación está en un proceso de cambio continuo, lo cual hace que las teorías tengan una validez aun más efímera. De hecho, los científicos sociales habían perdido la fe en las grandes teorías permanentes y absolutas hacía bastante tiempo, y es así como Marx resaltaba la necesidad de crear teorías sociales para cada período histórico.

En ciencias sociales, es necesario someter a las teorías a una revisión y modificación constantes, de tal manera que la experimentación se hace aun más necesaria. En ciencias sociales, al igual que en muchas otras ciencias físicas, la realidad no es reproducible en laboratorio, de tal manera que la evidencia empírica se debe realizar fundamentalmente a través de la observación, que en el caso de la ciencia urbana consiste en un proceso de recolección y actualización de información. La importancia que se le asigna a la experimentación en la investigación urbana constituye el punto de partida para analizar algunas teorías generales en este artículo. Las teorías que se estudian son analizadas por su flexibilidad y capacidad de adaptarse a realidades y momentos históricos diversos, y las proposiciones que se presentan tratan de eliminar aquellos elementos rígidos y supuestamente permanentes. Ésta es una crítica especialmente válida para la teoría micro-económica del uso del espacio.

Por mucho tiempo fue la teoría micro-económica la que sirvió de base para el desarrollo de modelos de la distribución de actividades en el espacio, girando en torno a dos problemas fundamentales: cuál es la racionalidad del proceso que regula la localización de las actividades en el espacio, y cuál es el mecanismo que permite la generación de renta y, en especial, de renta de la tierra. Desde un comienzo se consideró a la tierra como un bien escaso y con características diferenciales con respecto a fertilidad y localización.

Para simplificar el análisis, sin embargo, la mayoría de los autores adoptaron el supuesto de que la tierra era homogénea con respecto a sus

características principales, excepto su localización o accesibilidad, generalmente a un solo centro de empleo. La distancia entre las unidades productivas y los mercados, constituye un elemento fundamental en la teoría de la localización de Von Thünen (1826), para explicar la influencia del costo de transporte en la producción agrícola y en la generación de renta de la tierra. Dicha influencia fue también analizada por Weber (1914), Friederich (1929), Hoover (1948) y Chistaller (1933) para explicar la localización de actividades y alcanzar eficiencia económica. Igualmente Wingo (1961) y Alonso (1964), analizaron en detalle los problemas de localización y renta de la tierra en el caso urbano.

Esta línea de investigación neo-clásica tuvo en la mayoría de los casos un carácter puramente abstracto, por cuanto no se relacionó con casos específicos y sólo podían derivarse de ellos lieneamientos muy generales para planificación práctica. En cambio, cuando se requería de modelos más operativos que, más que dar una sólida interpretación de los fenómenos evaluaran rápidamente los efectos probables de políticas alternativas, los modelos gravitacionales, tales como los de Stewart (1948), Zipf (1949), Hansen (1959), Isard (1960), y Lowry (1964), adquirieron gran popularidad y constituyeron un impulso a la investigación. Entre las contribuciones importantes que se desarrollaron *a posteriori*, cabe mencionar los trabajos de Willson (1970, 1974), Garin (1966), Echenique (1969), Batty (1976) y otros.

Ambos enfoques —micro-económico y gravitacional— han sido objeto de numerosas críticas. Los modelos micro-económicos no sólo han sido criticados desde el punto de vista de la teoría urbana, sino que además han tenido que enfrentar todo el cuerpo crítico, bien documentado y consistente, que se ha acumulado sobre la teoría micro-económica en general. Por otra parte, los modelos de interacción espacial han sido criticados por la debilidad de sus fundamentos teóricos y el uso de una analogía con una ley física. Una discusión más detallada acerca de las características de cada uno de estos dos enfoques se incluye en las secciones siguientes de este artículo. La idea fundamental que se pretende demostrar es que, si bien la mayoría de las críticas son necesarias y justificadas, ello no significa que ambos enfoques sean completamente inútiles y por tanto deban ser desechados. Existen en ambos numerosos aspectos positivos que profundizan en la explicación de los fenómenos urbanos regionales que pueden ser aprovechados, debiendo enfocarse la investigación, en consecuencia, hacia la superación de aquellos aspectos que aparecen como incorrectos. Más aun, en este artículo se pretende demostrar que ambos enfoques, que se han desarrollado en mutuo aislamiento y aparente incompatibilidad, pueden combinarse exitosamente. Es precisamente esta complementariedad la que permite superar muchas de las dificultades, para llegar así a un nuevo enfoque o modelo de la estructura urbana que

sirva como marco de referencia para futuras investigaciones y aplicaciones.

Antes de entrar en materia, es necesario mencionar que en el pasado se han realizado integraciones entre el enfoque neo-clásico e interacción espacial. Es así como investigadores del Instituto de Urbanismo de la Universidad Central de Venezuela, colaboraron en la construcción de un modelo integrado aplicado a Caracas con el Dr. Echenique (1973), quien ha continuado con esta línea de investigación (1977).

Este artículo comienza, entonces, con una síntesis de los trabajos de Von Thünen, Weber, Wingo y Alonso, como ejemplos representativos del enfoque neo-clásico. En forma similar, se resumen los fundamentos de la teoría de interacción espacial, con lo cual es posible entrar en una discusión comparativa de ambos enfoques. Luego se comienza con el proceso de integración, al reinterpretar los elementos de una distribución gravitacional típica en términos económicos. Luego se presentan los modelos clásicos a través de formulaciones discretas e integrándolas cada vez más con funciones de distribución espacial. Finalmente, se propone y desarrolla un modelo integrado que pretende ser mucho más general que los anteriores en su interpretación del fenómeno urbano-regional y que intenta superar gran cantidad de deficiencias de los dos enfoques en que ha sido basado.

Es necesario señalar, sin embargo, que éste es sólo un primer paso en la integración entre la teoría de interacción espacial y la teoría económica. Otra área de investigación importante que ha emergido, es la integración con la teoría macro-económica, y en particular con los modelos de insumo-producto. Otras formas de integración ya han sido iniciadas, como con la teoría regional dinámica y con la investigación en transporte.

## **2. MODELOS MICRO ECONÓMICOS DE LOCALIZACIÓN Y RENTA.**

### **2.1. El Estado aislado de Von Thünen.**

Von Thünen (1826) es uno de los primeros autores en considerar la accesibilidad como factor determinante en la localización de actividades (en este caso de actividades agrícolas), y en el proceso de generación de renta de la tierra. Su modelo intenta una explicación de las relaciones existentes entre productores, mercados y terratenientes, para lo cual se basa en un cierto número de supuestos restrictivos:

- el sistema analizado se considera como cerrado (estado aislado) en el sentido de que, una vez alcanzado un equilibrio a largo plazo, ningún actor abandona el sistema o se une a él.

- la tierra es absolutamente homogénea con respecto a fertilidad, productividad y costos de transporte (el costo de transporte por unidad de distancia se considera constante en todas las direcciones).
- existe un solo mercado donde se venden los productos.
- en el sistema actúa un gran número de productores y terratenientes que tratan de maximizar sus beneficios y su renta respectivamente.
- La mayoría de los elementos del modelo clásico de competencia perfecta están aquí presentes. Ya que existe un gran número de terratenientes, ninguno en particular podrá controlar el precio de la tierra, así como ninguno de los productores podrá controlar el precio de los productos. Todo actor posee información perfecta y puede entrar o salir del sistema sin costo. No se consideran economías de escala.

En estas condiciones, dos mecanismos de mercado deben ser considerados: el mercado de productos agrícolas, y el mercado de la tierra. Como todos los otros elementos del sistema son iguales para cualquier localización, el excedente de los productores depende exclusivamente de los costos de transporte, considerados como una función lineal de la distancia entre productor y el mercado.

Entonces:

$$S_i^m = Q_i^m(p^m - c^m - k^m d_i), \quad (1)$$

en donde:

$S_i^m$  = excedente del productor localizado en  $i$  produciendo el producto  $m$ .

$Q_i^m$  = número de unidades tipo  $m$  producidas en  $i$ .

$p^m$  = precio unitario de  $m$  en el mercado.

$c^m$  = costo unitario de producción de  $m$  (incluyendo una ganancia mínima).

$k^m d_i$  = costo de transporte por unidad de distancia para el producto  $m$ , multiplicado por la distancia entre el mercado y el productor en  $i$ .

La ecuación (1) equivale a una función lineal que decae desde un máximo cuando la distancia al mercado es cero ( $S_i^m = Q_i^m(p^m - c^m)$ , si  $d_i = 0$ ), hasta un mínimo cuando  $S_i^m = 0$ . Más allá de este margen los productores abandonan el sistema (véase Figura 1.a). Si la oferta de un bien en particular es mayor que la demanda por dicho bien en el mercado, su precio disminuirá, desplazando la recta de  $A B$  a la recta  $A' B'$  en la Figura 1. Por el contrario, si la demanda es mayor que la oferta, los precios subirán, desplazando la recta hacia la derecha y hacia arriba.

La hipótesis fundamental de Von Thünen, en este punto, es que cualquier excedente captado por los productores es transferido a los terratenientes en forma de renta. En el margen (punto  $B$ ),  $S_i^m = 0$ , de tal manera que no es posible transferir ningún tipo de renta. En cualquier otro punto entre  $A$  y  $B$ , sin embargo, el productor estará dispuesto a pagar por renta hasta un máximo de  $S_i^m$  y los terratenientes no podrán incrementar su renta más allá de este valor ya que los productores preferirán abandonar el sistema antes que afrontar pérdidas.

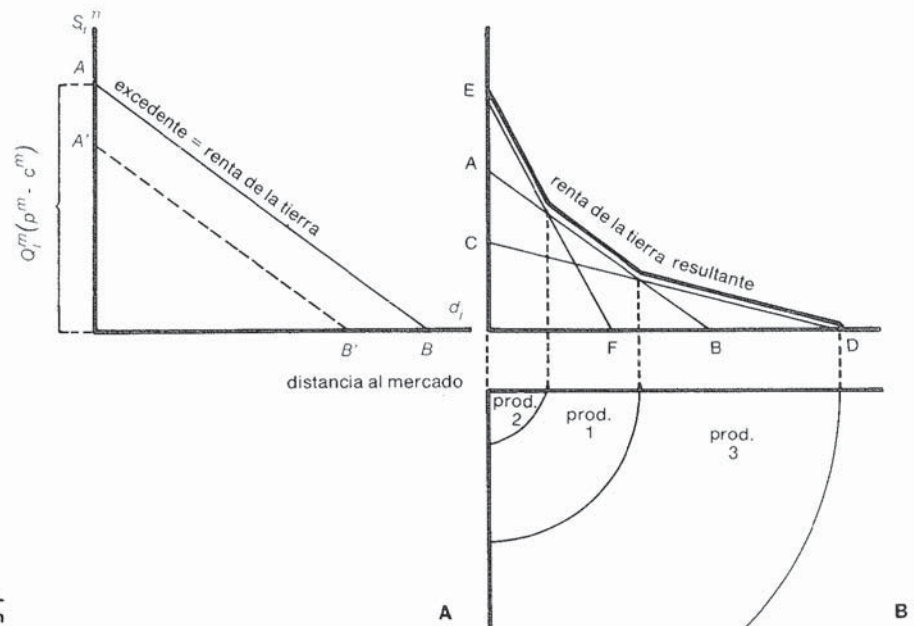


Figura 1: Representación gráfica del modelo de Von Thünen

En la Figura 1.a. se ha descrito la situación del sistema considerando sólo un producto. Si, en cambio, consideramos que varios productos pueden darse simultáneamente, los terratenientes podrán elegir al mejor postor, es decir, a aquel productor que en una determinada localización logre captar un excedente mayor. En la Figura 1.b. se han considerado tres productos diferentes ( $m = 1, 2, 3$ ), dando lugar a tres rectas características. Aquellos productos que son más sensibles a los costos de transporte darán lugar a rectas más empinadas ( $EF$ ), y como en cada punto el terrateniente asignará su tierra al mejor postor, los valores resultantes de renta estarán representados por la envolvente  $ED$ , y el uso de la tierra se conformará a anillos concéntricos.

En consecuencia, la renta en cualquier punto puede ser calculada como:

$$R_i = \max_{m=1}^M Q_i^m (p^m - c^m - k^m d_i). \quad (2)$$

Ésta es, en apretado resumen, la argumentación de Von Thünen. Su innegable claridad y consistencia, a pesar de su excesiva simplicidad, le hicieron tener influencia en las investigaciones posteriores; de hecho, se constituyó en la base teórica fundamental de Weber casi un siglo después, y de los trabajos de Wingo y Alonso.

## 2.2. La Teoría de la Localización Industrial de Weber

Weber (1964) analizó el problema de la localización de una industria con respecto a la localización de materias primas y los mercados consumidores de sus productos. Si suponemos que todos los otros elementos son homogéneos se tratará fundamentalmente de un problema de optimización del costo de transporte. En primer lugar, considérese un caso simple en que hay una sola fuente de materias primas en un punto  $r$ , y un solo mercado consumidor localizando en  $m$ . El costo total de una industria localizada en  $i$ ,  $c_i$ , será:

$$c_i^* = Q^R (k^R d_{ir}) + Q^M (k^M d_{im}). \quad (3)$$

en donde  $Q^R$  y  $Q^M$  representan las cantidades de materias primas y de

productos elaborados respectivamente que deben ser transportados hacia y desde la industria;  $k^R$  y  $k^M$  representan los costos unitarios de transporte; y  $d_{ir}$  y  $d_{im}$  representan las respectivas distancias.

Si  $Q^R (k^R d_{ir}) > Q^M (k^M d_{im})$ , entonces  $c_i^*$  tenderá a aumentar a medida que la industria se localiza cerca del mercado de consumo, y viceversa. Ahora bien, si introducimos al análisis varias fuentes de materias primas y varios mercados consumidores, la ecuación (3) se transformará en:

$$c_i^* = \sum_r Q_{ir}^R (k^R d_{ir}) + \sum_m Q_{im}^M (k^M d_{im}), \tag{4}$$

en donde  $Q_{ir}^R$  representa ahora la cantidad de materia prima que deberá ser transportada desde una determinada fuente localizada en  $r$  hacia la industria en  $i$ . Similarmente se define  $Q_{im}^M$ .

Para determinar finalmente cuál es el punto que minimiza los costos de transporte, los puntos  $i$ ,  $r$ , y  $m$  deben ser expresados en términos de coordenadas  $x$  y  $y$ , si es que se desea una solución analítica. Sin embargo,  $c_i^*$  es mínimo cuando tanto  $\partial c_i^* / \partial x = 0$  y  $\partial c_i^* / \partial y = 0$ , que son ecuaciones no lineales y para las cuales no existe una solución inmediata.

Ante esta dificultad, se recurre normalmente a resolver el problema en forma gráfica, trazando curvas de iso-costo de transporte alrededor de cada fuente de materias primas y de cada mercado de consumo; luego se suman estas curvas para obtener un tercer juego de curvas de iso-costo total. La localización más recomendable será aquella en la cual las curvas sugieran la existencia de un mínimo.

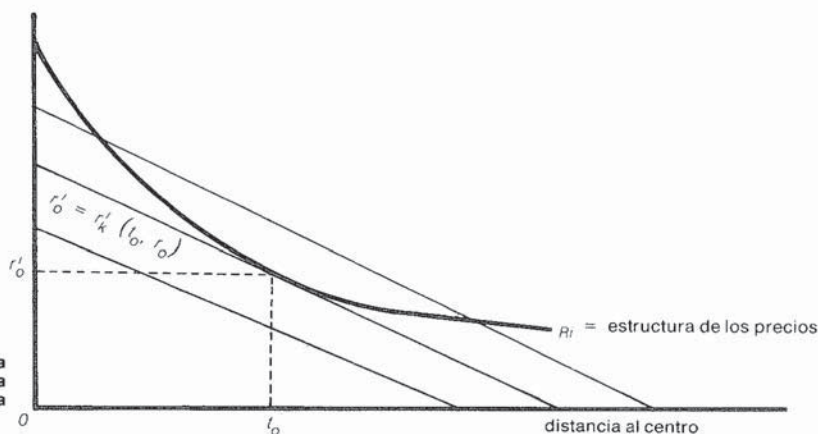


Figura 2: Equilibrio entre la estructura de precios y las curvas "bid price" para un determinado individuo o firma

### 2.3. El modelo de transporte y uso del suelo de Wingo.

El modelo desarrollado por Wingo (1961) se centra principalmente en torno al fenómeno urbano, y en particular en torno a la relación entre el costo de transporte, la localización de actividades, y la renta de la tierra. Para ello se basa en el principio de complementariedad entre el costo de transporte y la renta de la tierra, sujeto a la restricción presupuestaria del usuario individual, quien tratará de optimizar su gasto. Se supone, por simplificación, que existe un solo centro de empleo; todos los usuarios tienen el mismo ingreso y las mismas preferencias; los precios de todos los bienes, excepto la tierra, son iguales en todas partes; la tierra posee una utilidad positiva (es preferible consumir más que menos); y los costos de transporte son una función directa de la distancia al centro único de empleo.

Sea  $i$  la localización del centro de empleo,  $j$  la localización de una unidad residencial cualquiera, y  $m$  la localización en el margen; sea  $c_{ij}$  el costo de transporte entre una localización  $j$  y el centro de empleo. La renta de la tierra en cualquier punto  $R_j$  estará definida simplemente como el producto entre el precio por unidad de tierra,  $r_j$ , y la cantidad de tierra consumida,  $l_j$ .

$$R_j = r_j l_j. \quad (5)$$

La hipótesis de complementariedad entre renta y transporte implica que, en cualquier localización, la unidad residencial gastará una cantidad constante  $k$ , en ambos ítems. Es decir:

$$k = R_j + c_{ij}, \quad \forall j. \quad (6)$$

En el centro, el costo de transporte será mínimo ( $c_{ii} = 0$ ), y por lo tanto, la renta será máxima ( $R_i = k$ ). En el margen, el costo de transporte será máximo ( $c_{im} = k$ ) y por lo tanto, la renta será mínima ( $R_m = 0$ ). Al igual que en Von Thünen, cualquier ahorro en transporte con respecto a la localización en el margen será transferida al terrateniente como renta.

La renta de la tierra, en consecuencia, puede definirse como el costo de transporte ahorrado:

$$R_j = c_{im} - c_{ij}. \quad (7)$$

Ya que, por definición, la tierra tiene una utilidad positiva, es posible establecer una función de consumo en la cual, a medida que el precio de la tierra aumenta, los usuarios consumen menos tierra:

$$l_j = (\lambda / r_j)^\alpha \quad (8)$$

en donde  $\lambda$  y  $\alpha$  son parámetros,  $\alpha > 0$ . La densidad en cualquier punto será el valor inverso de la cantidad de tierra consumida:

$$D_j = (l_j)^{-1} = (r_j / \lambda)^\alpha \quad (9)$$

En cualquier punto  $j$ , entonces, las ecuaciones (5) y (7), determinarán la cantidad de dinero a ser utilizada en renta, y la ecuación (8) determinará la cantidad de tierra a ser consumida en dicha localización. Si suponemos que la región es homogénea y de forma circular, la cantidad total de tierra disponible en un punto  $j$ ,  $L_j$ , será  $\pi (d_{ij})^2$ , y la disponibilidad total de tierra en la región será  $L = \pi (d_{im})^2$ . En consecuencia, se puede establecer una condición de equilibrio en la cual la población total de la ciudad,  $P$ , debe ser igual a la integral de la densidad sobre toda el área urbana:

$$P = 2 \pi \int_0^{d_{im}} D_j (l_j)^{-1} d d_{ij} \quad (10)$$

Todos los elementos de esta ecuación son conocidos, excepto el límite superior de la integral,  $d_{im}$ , que corresponde a la distancia entre el centro y el margen. Si se resuelven simultáneamente las ecuaciones (5), (7), (8) y (10), es posible determinar la cantidad de tierra consumida por los usuarios en cada localización,  $l_j$ , y la distancia entre el centro y la periferia de la ciudad.

#### 2.4. El modelo de localización y uso del suelo de Alonso.

El análisis de Alonso (1964), al igual que el de Wingo se centra en torno al fenómeno urbano y todas las simplificaciones que se consideraron en este último, deberán estar presentes aquí también, excepto que se permiten usuarios con varios niveles de ingreso. El mecanismo por el cual se calcula la renta, es también diferente, y la restricción presupuestaria de los usuarios considera tres elementos en lugar de dos: renta de la tierra, costo de transporte, y un bien compuesto que representa todos los otros bienes y servicios consumidos por la unidad residencial. La ecuación de restricción presupuestaria adopta, entonces, la siguiente forma:

$$y = l_j r_j + c_{ij} + P_z z, \quad (11)$$

en donde:

$y$  = ingreso de la unidad residencial.

$l_j r_j$  = cantidad de tierra consumida por el precio de la tierra en  $j$ .

$P_z z$  = precio unitario del bien compuesto por la cantidad consumida.

Los elementos de la ecuación (11) pueden ser combinados de muchas maneras diversas; como se trata de tres elementos, cada uno de los cuales corresponde a un eje de coordenadas, dicha ecuación da lugar a una superficie curva denominada "locus de oportunidades", a lo largo de la cual cada usuario se desplazaría para tratar de maximizar su utilidad. En consecuencia, la utilidad de cada usuario puede ser expresada como una función de tres variables: tierra, tiempo de viaje y el bien compuesto:

$$u = u (l, t, z) \quad (12)$$

Esta función será máxima cuando:

$$du = 0 = u_l dz + u_t dt + u_z dz. \quad (13)$$

En estado de equilibrio, la tasa marginal de sustitución entre dos bienes, de acuerdo a la teoría micro-económica, será igual al cociente entre sus costos marginales, de tal manera que:

$$u_l / u_z = r_l / P_z, \quad (14)$$

y

$$u_l / u_z = (l dr / dt + dc / dt) / P_z. \quad (15)$$

Tanto  $u_l / u_z$  como  $u_t / u_z$  representan tasas marginales de sustitución, y los elementos a la derecha de las ecuaciones representan relación entre costos. En la ecuación (14),  $r_l / p_z$  es el cociente entre el precio de la tierra y el del bien compuesto. En la ecuación (15), el término  $(l dr / dt + dc / dt)$  representa el costo marginal de alejarse del centro, es decir, la forma como varía el costo para el usuario cuando éste se aleja ligeramente desde el centro; el término  $(l dr / dt)$  representa la forma como varía su costo en tierra, y el término  $(dc / dt)$ , representa el incremento en el costo de transporte. Si se resuelven las ecuaciones (13), (15) simultáneamente con la ecuación de balance presupuestario (11), se obtendrán las combinaciones óptimas de tierra ( $l$ ), transporte ( $t$ ) y bien compuesto ( $z$ ).

En este punto se puede introducir el análisis una curva "bid price", que Alonso utiliza para describir el precio que un usuario (unidad familiar o firma) está dispuesto a pagar en cada localización para obtener un determinado nivel de satisfacción. Se trata de una especie de curva de precios de demanda a utilidad constante. En la Figura 2, se muestra un conjunto de estas curvas, cada una referida a un determinado nivel de utilidad. Si designamos como  $u_o$  el nivel de utilidad logrado por una curva determinada, dicha curva puede ser denominada como  $r'_o = r'_k(u_o)$ . Un precio de demanda  $r'$  no es necesariamente igual al precio final de equilibrio en el mercado,  $R$ , ya que los precios ofrecidos por los postores individuales no necesariamente serán exitosos.

En resumen, las características de las curvas "bid price" serán:

- i) para cada localización tendrán un solo valor o precio.

- ii) las curvas que se encuentran más abajo y cerca del origen implicarán un mayor grado de satisfacción.
- iii) dos curvas jamás se cortarán para el mismo usuario.
- iv) tienen pendientes negativas.

Como las curvas no se cortan y poseen un solo valor para cada localización, una nomenclatura alternativa para identificarlas será  $r'_o = r'_k(t_o, r_o)$ , en donde  $(t_o, r_o)$ , es un punto cualquiera de la curva. Por otra parte la pendiente de cada curva será:

$$\frac{d r'_k}{dt} = \frac{p_z}{1} \frac{u_t}{u_z} - \frac{1}{l} \frac{dc}{dt}, \quad (16)$$

en donde ambos elementos de la derecha son negativos (con lo cual se demuestra que la curva tiene pendiente negativa).

En la Figura 2, se muestra también una curva de la estructura de precios, que representa la relación existente entre los precios de la tierra y el costo de transporte. En una situación de equilibrio, la curva de la estructura de precios debe ser tangente a una determinada curva "bid price", ya que si la cortase, ello significaría que la estructura de los precios estaría entrando en contacto con alguna curva "bid price" inferior, que por definición sería preferible. En equilibrio, entonces la pendiente de ambas curvas deberá ser igual, es decir:

$$dr / dt = dr'_k / dt \quad (17)$$

Para poder llegar a la solución del equilibrio del mercado se deberá combinar las diferentes curvas "bid price", ya que el precio final estará determinado, para cada usuario, por el mejor postor, y en consecuencia la curva final de precios de la tierra corresponderá a la envolvente de todas las curvas "bid price", al igual que en Von Thünen. Las condiciones de equilibrio del mercado serán, entonces las siguientes:

- i) la curva "bid price" de cada usuario deberá tocar a la curva de la estructura de precios al menos en un punto.

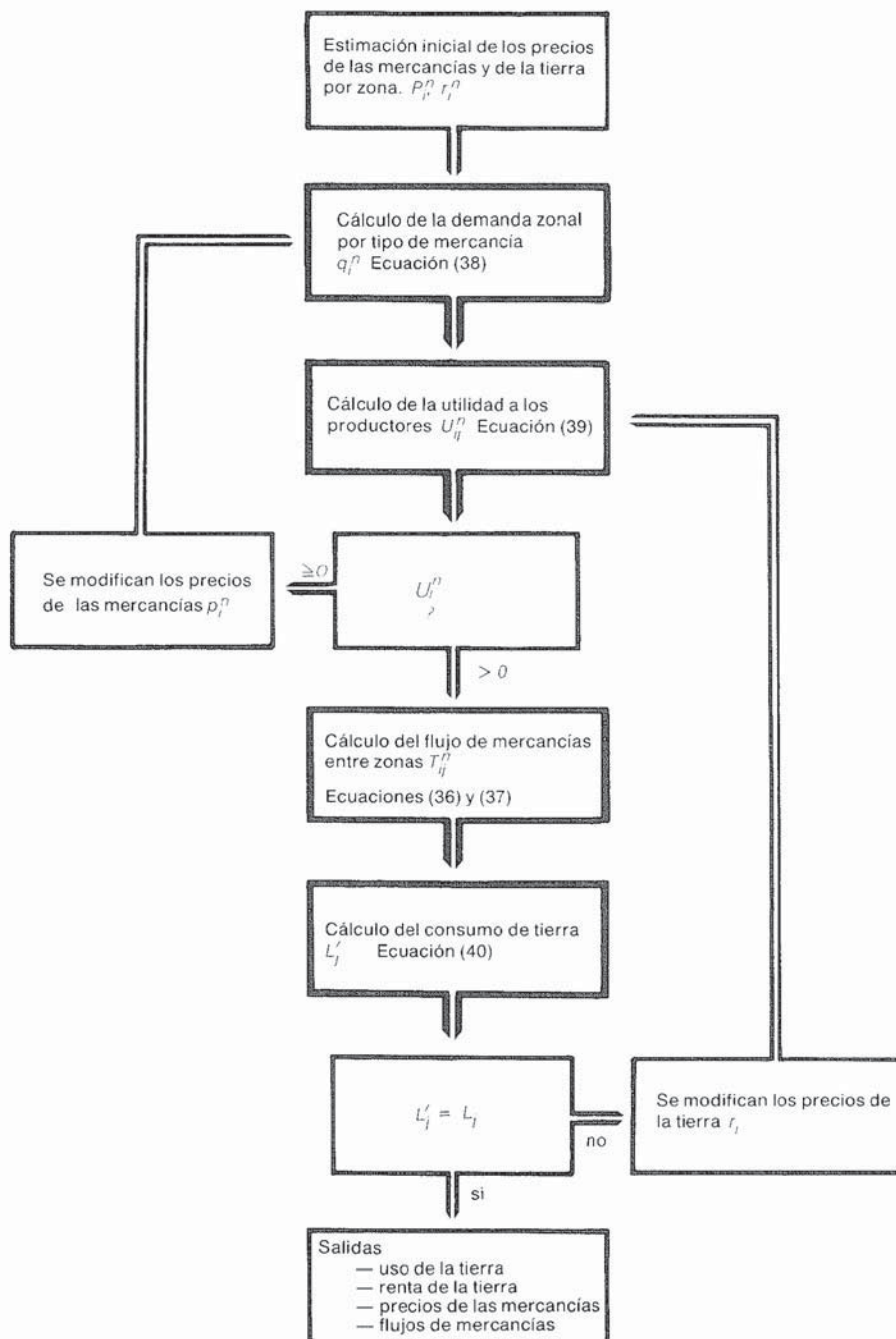


Figura 3: Interpretación discreta del modelo de Von Thünen

- ii) la demanda de tierra deberá ser igual a la oferta; en otras palabras, toda la tierra hasta el margen deberá ser consumida (no más), sin dejar vacíos entremedios.
- iii) en equilibrio, ningún usuario podrá incrementar su satisfacción cambiándose de localización o consumiendo una cantidad diferente de tierra. A la inversa, ningún terrateniente podrá aumentar su renta cambiando el precio de la tierra.
- iv) mientras más inclinada sea la curva "bid price" de un usuario, más cerca del centro tenderá a localizarse.
- v) el precio marginal de un usuario corresponde al precio de equilibrio del usuario inmediatamente a continuación. A la inversa, el precio de equilibrio de un usuario corresponderá el precio marginal del siguiente usuario más cercano del centro.

Todas las curvas, entonces, podrán ordenarse de acuerdo a su pendiente, conformando una cadena. La curva más periférica será:

$$R_m = r'_m (t_{m+1}, r_{m+1}), \text{ siguiéndole luego } R_{m-1} = r'_{m-1} (t_m, r_m) \dots$$

$$R_j = r'_j (t_{j+1}, r_{j+1}) \dots \text{ hasta } R_1 = r'_1 (t_1^2, r_2) \text{ en el centro.}$$

Supongamos que la función  $L(t_j)$  representa la cantidad total de tierra disponible en un círculo de radio  $t_j$  (si se trata de un plano absolutamente homogéneo, la función sería  $L(t_j) = \pi (t_j)^2$ , pero puede adoptar otras formas de acuerdo a las condiciones locales). En estas circunstancias, la solución del mecanismo de mercado puede comenzar por la posición más céntrica,  $t_1$ , en donde  $L(t_1) = 0$ , y en donde se localiza el usuario cuya curva "bid price" es la más empinada. El próximo usuario tomará la localización siguiente,  $t_2$ , que es aquella que viene inmediatamente a continuación, una vez que se han satisfecho los requerimientos de tierra del primer usuario, es decir  $l_1$ . Para poder estimar el consumo de tierra del primer usuario, se deberá hacer un supuesto inicial acerca del precio de la tierra más céntrica,  $r_1$ , y luego aplicar la ecuación (11). La segunda localización puede calcularse, entonces, resolviendo  $t_2$  en:

$$L(t_2) = l_1, \tag{18}$$

Ya que el precio de mercado para el usuario 2 es el precio marginal del usuario 1, entonces:

$$R_2 = r'_1 (t_1, r_1). \quad (19)$$

En general, será posible determinar la localización de cualquier usuario  $j$  resolviendo  $t_j$  en:

$$L (t_j) = \sum_{k=1}^{j-1} l_k, \quad (20)$$

y

$$R_j = r'_{j-1} (t_{j-1}, r_{j-1}). \quad (21)$$

La situación en el margen será:

$$L (t_{m+1}) = \sum_{k=1}^n l_k \quad (n = \text{n}^\circ \text{ total de usuarios}). \quad (22)$$

y

$$R_{m+1} = r'_m (t_m, r_m). \quad (23)$$

Sin embargo, es posible obtener una estimación independiente del precio de la tierra en el margen  $R_{m+1}$  (si se han incluido las firmas agrícolas,  $R_{m+1} = 0$ ; si no se han incluido  $R_{m+1} =$  valor de la tierra agrícola). Este valor real de  $R_{m+1}$  puede ser comparado con el que se calculó en la ecuación (23), y si coincidieron significaría que la estimación inicial del precio de la tierra en el centro,  $r_1$ , fue correcta. Sin embargo, si hubiere una diferencia significativa (+ ó —) se deberá corregir la estimación inicial de  $r_1$ , volviéndose a calcular la cadena nuevamente. Este proceso iterativo deberá repetirse una y otra vez hasta que se converge en el precio de la tierra marginal correcto.

De esta manera se han cumplido las condiciones del mercado, ya que la ecuación (20) asegura que la oferta de tierra es igual a la demanda, y la ecuación:

$$i_j = L(t_{j+1}) - L(t_j), \quad (24)$$

asegura que cada usuario esté consumiendo toda la tierra disponible entre sus dos vecinos, sin dejar vacíos.

La relación que aquí se ha hecho acerca de los trabajos de Von Thünen, Weber, Wingo y Alonso, es, sin duda, muy resumida y no los honra en un sinnúmero de aspectos que aquí se han dejado fuera por razones de espacio y claridad de la exposición. El lector es referido, entonces, a las obras originales.

Tampoco se ha incluido aquí una revisión crítica de los principales supuestos, hipótesis y teorías en que se sustentan dichos trabajos, así como su base ideológica, aspectos que se encuentran ampliamente divulgados en la literatura. Aquí se ha optado por su simple exposición con el objeto de ser comparados con su enfoque alternativo, cual es el de los modelos de interacción espacial. Luego que ambos hayan sido expuestos, en las secciones siguientes, se entrará en una discusión crítica de ambos.

### 3. MODELOS DE INTERACCIÓN ESPACIAL.

Al igual que los anteriores, este grupo de modelos ha sido ampliamente divulgado; sin embargo, los supuestos en que se basan son notablemente diferentes en muchos aspectos. En primer lugar, la tierra disponible para el desarrollo de las actividades humanas es concebida como unidades espaciales agregadas que contienen cantidades finitas de empleo, población, servicios, espacios recreacionales y otros. Estos "agregados espaciales" o zonas interactúan entre sí, generando flujos de diversos tipos, los cuales pueden ser de naturaleza concreta (viajes, movimientos migratorios, intercambios comerciales, etc.) o de naturaleza más bien abstracta (tal como dependencia, difusiones, oportunidades, tensiones, etc.). Los agregados espaciales o zonas se relacionan entre ellas a través de infraestructuras que dependerán del tipo de flujos. El análisis se centra, entonces, sobre el problema de la localización de las actividades en cada zona y en la magnitud de los flujos que generan entre ellos, dejando generalmente a un lado las consideraciones relativas a los

mecanismos de mercado, y, más concretamente, al mercado de la tierra. El enfoque metodológico que adopta este tipo de modelos es, por lo general, de un carácter fuertemente empírico, haciéndose énfasis en la simulación de casos reales, más que en la construcción de formalismos teóricos abstractos. Es quizás esta última característica, es decir, la capacidad de estos modelos de adaptarse a realidades concretas, lo que explica la existencia de una amplia gama de aplicaciones en comparación con el enfoque anterior, a lo cual debe agregarse el hecho de que han coincidido armónicamente con la mayoría de los datos y metodologías empleadas en planificación de transporte.

Los primeros modelos emergieron en base a una analogía con la ley newtoniana de la gravitación universal, de tal manera que se sostenía que la interacción entre dos agregados espaciales era proporcional a la magnitud de los agregados (masas) involucrados, e inversamente proporcional a la distancia o costo de viaje que los separa. Desde el primer momento se criticó el uso de una analogía con la física en un problema social, pero es necesario aclarar que la analogía empleada es más bien superficial y no fue llevada más allá, ya que en su mayoría las características del fenómeno gravitacional no fueron adoptadas por la ciencia urbana, tales como los conceptos de impacto, traslación y rotación de las masas, ondas gravitatorias y otros. Así mismo es necesario reconocer que esta analogía simple sirvió de punto de partida para un importante cuerpo de teoría social. Más adelante Wilson (1970, 1974) introdujo al campo técnicas de análisis basadas en la maximización de la entropía, mecánica estadística, teoría de la información, probabilidades y análisis combinatorio, con lo cual se dotó a los modelos de interacción espacial con nuevas herramientas para explicar el fenómeno urbano-regional.

Fue precisamente Wilson quien dio la visión más general del problema de interacción espacial, especificando cuatro tipos de modelos fundamentales, de acuerdo con la información disponible. Si consideramos que en todo flujo habrá zonas de origen y zonas de destino, los cuatro tipos de modelos pueden ser descritos de la siguiente manera:

- a) Modelo de interacción espacial doblemente restringido. Corresponde al caso de máxima información, en que tanto el número de flujos originados en cada zona,  $O_i$ , como el número de destinos o flujos atraídos por cada zona,  $D_j$ , son conocidos. En este caso, el modelo calcula la distribución más probable de los flujos entre zonas, sujeto a determinadas restricciones.

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j f(c_{ij}), \quad (25)$$

en donde  $T_{ij}$  es la magnitud de los flujos entre las zonas de origen  $i$  y las de destino  $j$ ,  $f(c_{ij})$  representan una función de costo de viaje, y  $A_i$  y  $B_j$  son términos normalizadores definidos como:

$$A_i = [\sum_j B_j D_j f(c_{ij})]^{-1}, \quad (26)$$

y

$$B_j = [\sum_i A_i O_i f(c_{ij})]^{-1}, \quad (27)$$

El término  $A_i$  garantiza que el número total de orígenes es consistente, es decir:

$$\sum_j T_{ij} = O_i, \quad (28)$$

y similarmente el término  $B_j$  garantiza que:

$$\sum_i T_{ij} = D_j. \quad (29)$$

Las ecuaciones (28) y (29) representan las restricciones principales del sistema.

- b) Modelo restringido en el origen. En este caso sólo se conocen los orígenes de los flujos,  $O_i$ , no existiendo una estimación independiente de los destinos, de tal manera que sólo la restricción (28) es válida. El término  $D_j$  de la ecuación (26) debe ser reemplazado, en consecuencia, por una hipótesis acerca de cuáles son las características de la zona de destino que atraen los flujos. Si denominamos como  $W_j$  a este atractor, entonces:

$$T_{ij} = A_i O_i (W_j)^\alpha f(c_{ij}), \quad (30)$$

y donde:

$$A_i = [\sum_j (W_j)^\alpha f(c_{ij})]^{-1}, \quad (31)$$

y en donde  $\alpha$  es un parámetro ( $\geq 1$ ) representativo de posibles condiciones de aglomeración atribuibles al atractor.

c) Modelo restringido en el destino. Similar al anterior:

$$T_{ij} = B_j (W_i)^\alpha D_j f(c_{ij}), \quad (32)$$

considerando como restricción a la ecuación (29).

d) Modelo a-restringido. Corresponde a la situación de mínima información en que no existen estimaciones independientes ni de los orígenes,  $O_i$ , ni de los destinos  $D_j$ . Ambos términos deben ser reemplazados, en consecuencia, por una hipótesis atractora, de tal forma que la ecuación de flujos adopta la forma:

$$T_{ij} = K (W_i^O)^{\alpha_1} (W_j^D)^{\alpha_2} f(c_{ij}). \quad (33)$$

Ninguna de las dos ecuaciones de restricción es válida en este caso, de tal manera que se requiere de una constante o factor de escala  $k$  para llegar a los valores correctos de  $T_{ij}$ .

Si el objetivo de la simulación se refiere a los flujos, el valor de  $T_{ij}$  será suficiente. Si, en cambio, se desea utilizar el modelo para simular la localización de determinadas actividades en el espacio, será necesario sumar los flujos con respecto a uno de los sub-índices zonales y multiplicar por una constante ( $\sum_j T_{ij} \cdot n$ ).

Existen numerosas aplicaciones importantes de este tipo de modelos. Entre las primeras cabe destacar las de Reilly (1931), Converse (1949), y Huff (1962). Hansen (1959) propuso un modelo de este tipo para explicar la localización de la población residencial en un área urbana, basándose

en índices de accesibilidad derivados de la formulación gravitacional. El trabajo de Lowry (1964), que combinó un sub-modelo residencial con un sub-modelo de localización del empleo de servicio generando un efecto multiplicador, representa un verdadero hito en el desarrollo de la teoría urbana. Posteriormente el modelo de Lowry fue reformulado por Garin (1966), y fue mejorado sustancialmente por los trabajos de Wilson en base a técnicas de maximización de entropía. Lakshamanan y Hansen (1965) propusieron un modelo de localización y flujos comerciales que desde entonces ha sido casi estándar. Echenique (1968), introdujo un sub-modelo de localización de superficie construida al modelo original de Lowry, en un intento por incorporar algunos aspectos de la oferta en la simulación de la estructura urbana. El propio Wilson (1970) propuso un modelo de distribución y separación modal de viajes, utilizando una formulación doblemente restringida, el cual ha sido ampliamente utilizado desde entonces en estudios de transporte.

Las posibilidades de aplicar modelos de interacción espacial a casos reales han sido notablemente mejoradas por el desarrollo de técnicas de calibración de los diversos parámetros que intervienen en su formulación, y en este campo se destacan los trabajos de Angel y Hyman (1971), Baxter y Williams (1975) y Batty (1976). Las posibilidades de desagregación de los diversos modelos han sido objeto de constante preocupación por parte de los investigadores; así, por ejemplo, Baxter y Williams (1973) exploraron la posibilidad de desagregar el sub-modelo residencial en una estructura tipo Lowry, posibilidad que también fue explorada por Wilson (1974) en gran detalle. Echenique *et al.* (1973) propusieron y aplicaron un modelo desagregado de la estructura urbana al caso de Caracas. Indudablemente una descripción somera de estos distintos esfuerzos y otros de importancia, resultaría demasiado extensa para su inclusión en este artículo, de tal manera que sólo se hará referencia a ellos cuando sea necesario.

#### **4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MODELOS MICRO-ECONÓMICOS Y DE INTERACCIÓN ESPACIAL.**

Llegado a este punto es conveniente hacer un resumen acerca de las principales similitudes y diferencias existentes entre los modelos micro-económicos y los de interacción espacial. Esta discusión puede dividirse entre aspectos teóricos y aspectos matemáticos y operativos.

##### **4.1. Aspectos teóricos:**

Los modelos micro-económicos del uso del espacio, como se ha mencionado, centran su análisis en torno a usuarios individuales, intentando dar una explicación acerca de sus motivaciones y reacciones probables ante los diversos mecanismos de mercado (principalmente

tierra y transporte). En este sentido los individuos son considerados ya sea como consumidores (unidades familiares o firmas) o proveedores (terratenedores, centros de empleo). Los consumidores tratarán de maximizar su utilidad y los proveedores tratarán de maximizar sus beneficios. Una vez que el cuadro está perfectamente claro a nivel individual, los actores se enfrentan mutuamente en el mercado y compiten por un bien escaso: tierra. Al final del proceso de competencia perfecta, toda la tierra ha sido asignada a los usuarios, los consumidores han efectivamente maximizado su utilidad, restringidos sólo por su disponibilidad presupuestaria, y los terratenientes han maximizado su renta. Más aun, un recurso escaso como la tierra ha sido asignado con máxima racionalidad y eficiencia económica. En otras palabras, todas las hipótesis básicas del modelo de competencia perfecta neo-clásico y los mecanismos del análisis marginalista han sido aplicados al caso urbano en forma consistente.

Este enfoque ha sido criticado de muy diversas maneras. El modelo básico ha sido tajantemente descrito como irrealista, haciendo ver que las fuertes imperfecciones existentes en la realidad distorsionan completamente el equilibrio en el mercado. En este sentido, la demostración de Hotelling de que el equilibrio económico puede conducir a fuertes ineficiencias o la elocuente argumentación de Joan Robinson en el sentido de que el modelo a largo plazo no es consistente con sólidas evidencias históricas, constituyen en realidad críticas demolidoras. Sin embargo, el modelo parece haber sobrevivido de alguna manera a estas numerosas y bien fundadas críticas, ejerciendo hoy en día una renovada y poderosa influencia sobre el proceso de toma de decisiones. Una de las razones que explican esta influencia está en el hecho de que un conjunto de proposiciones fuertemente estructuradas y consistentes resultan siempre atractivas desde el punto de vista intelectual, además del hecho de que pueden ser utilizadas ideológicamente para perpetuar el sistema existente. Por otra parte es innegable que proveen una explicación útil y relevante acerca de los numerosos mecanismos de mercado que se deben afrontar en la práctica de la planificación.

Los modelos de interacción espacial poseen, en cambio, una estructuración teórica mucho más débil. De hecho comenzaron su vida operativa en base a hipótesis muy rudimentarias y han ido "acumulando" teoría a lo largo del camino. Estos dos procedimientos alternativos sugieren una discusión mucho más amplia y fundamental. Así, se puede decir que los modelos micro-económicos comienzan por definir una construcción de hipótesis altamente abstracta, procediendo luego en forma deductiva a acercarse poco a poco a la realidad. Los modelos de interacción espacial, en cambio, han adoptado un enfoque más empírico, comenzando por construcciones mucho más simples y primitivas que son inmediatamente sometidas a prueba con datos reales, las más

posibles. Si las pruebas tienen éxito, algunas de las hipótesis pueden considerarse como confiables (al menos por el momento), introduciendo nuevas hipótesis, ya sea para enriquecer el modelo primitivo o para corregir las fallas que hayan surgido en las primeras pruebas. Más aun, como las experiencias empíricas siempre proveen elementos sorprendidos, el nuevo modelo contendrá hipótesis que intenten explicar aquellos resultados inesperados. El nuevo modelo será sometido, entonces, a nuevas pruebas, ya sea en numerosas realidades diferentes, si se intenta construir un modelo relativamente general, o a una sola realidad en particular si es que se desea un modelo específicamente adaptado a ella. En otras palabras, se puede decir que el enfoque micro-económico sigue un método más bien deductivo tradicional, que permanecerá perfectamente consistente mientras se desplace en el terreno sin las dificultades de la abstracción, pero que comenzará a desintegrarse al irse acercando a situaciones más concretas. Los modelos de interacción espacial poseen, en su estructura, un grado de flexibilidad mucho mayor que les permite adoptar diversas formas y momentos históricos diferentes, pudiendo absorber a la vez diversos grados de imperfecciones e inconsistencias al ser validados con datos reales.

Estas consideraciones adquieren aun más relevancia cuando se considera otro aspecto importante de la comparación: el problema del equilibrio. Se dijo que los modelos micro-económicos están orientados fundamentalmente hacia la simulación de situaciones de mercado, en que, a través del proceso de competencia perfecta, todos los actores optimizan sus objetivos y el sistema total alcanza máxima eficiencia económica cuando se llega a las condiciones particulares de equilibrio, el cual es concebido como un estado permanente del sistema que se mantendrá inalterado mientras se mantengan las condiciones exógenas del sistema. Dicha situación no se da en los modelos de interacción espacial, en que solamente se buscan algunas condiciones de equilibrio matemático para realizar ciertos cálculos, como en el caso del modelo de Lowry. En estos modelos no existe ninguna garantía estructural de que, por ejemplo, la oferta de edificaciones sea igual a la demanda, o que la demanda por ciertos servicios sea adecuadamente atendida por las facilidades existentes, así como tampoco existe ningún conjunto de proposiciones que explique la formación de precios o renta de ninguno de los bienes que se trancen. Más aun, los modelos de interacción espacial podrán simular sin problemas situaciones con fuertes desequilibrios entre oferta y demanda, en especial si tal es el caso en la situación real que se está modelando, lo cual sería imposible en modelos como el de Von Thünen, Wingo o Alonso.

Éste es un punto que amerita una discusión mucho más amplia, pero por ahora basta con señalar que se trata tanto de una característica positiva como negativa de los modelos de interacción espacial; es positiva por

cuanto permitirá simular adecuadamente casos reales en los que se dan situaciones de desequilibrio, incluso si se llega a casos (bastante frecuentes) en que los mercados no están activos; es negativa por cuanto en la mayoría de los casos reales existe una cierta cantidad de mecanismos de mercado activos, los cuales deben ser explicitados en los modelos, por muy fuertes que sean las imperfecciones. Si es que se piensa utilizar modelos de interacción espacial como herramientas de simulación de los efectos probables de políticas alternativas de planificación sobre la estructura urbana o regional de una determinada área de estudio real, es obvio que no bastará con simular solamente los flujos y la localización de actividades. Si no se cuenta con un cierto conocimiento acerca de la forma como estas actividades y flujos afectan los mercados de la tierra, edificaciones y transporte, será muy difícil estimar el efecto económico de los planes alternativos sobre los distintos grupos sociales de la comunidad.

La discusión comparativa de los aspectos teóricos puede ir mucho más allá de lo que aquí se ha presentado, pero se ha optado por restringirla a aquellos aspectos que son más relevantes para la integración entre ambos enfoques.

#### **4.2. Aspectos matemáticos y operativos.**

Los modelos micro-económicos y los de interacción espacial se han basado también en tradiciones matemáticas diferentes, lo cual es un hecho que ha tenido un efecto importante en el desarrollo de ambos enfoques. Ésta es una discusión que adquiere cada vez más importancia en el plano del análisis de sistemas en que ambas tradiciones son referidas como continuas y discretas. En este sentido Barto (1978) señala que la tradición ligada a la ciencia física clásica, y por tanto muy ligada a los continuos, los cambios infinitesimales y las ecuaciones diferenciales, se ha desarrollado en un cierto aislamiento de aquéllos cuya intuición se relaciona más con las técnicas de la computación digital, y que por tanto "se sienten más cómodos al pensar en términos de algoritmos, estructuras de datos y autómatas".

Barto también señala que "aunque el objeto de la ciencia del análisis numérico se centra fundamentalmente en torno a la relación existente entre los métodos continuos y discretos, la perspectiva que ofrece cae nítidamente dentro del campo de la primera". El análisis numérico, entonces, actúa como una especie de traducción de las formulaciones teóricas continuas al lenguaje discreto, a través de la interpretación del comportamiento del modelo original. En lugar de este procedimiento "indirecto" se debería optar por la interpretación "directa" del sistema real que se desea modelar, evitando así la formulación continua. Este procedimiento directo hace énfasis en la relación existente entre el

modelo y el sistema real percibido, más que en la exactitud con que se ha interpretado un modelo continuo. Van Valkenburg (1974), señala que no sólo se debe evitar la interpretación de ecuaciones diferenciales; en efecto, "dada la creciente disponibilidad de computadores, el uso en general de ecuaciones debe ser evitado, ya que todos los principios e hipótesis pueden ser representados directamente en forma algorítmica".

En muchas otras disciplinas se están adoptando modelos discretos para la representación de sistemas que han sido modelados tradicionalmente con ecuaciones diferenciales, con lo cual no sólo se ha facilitado su implementación en computadoras, sino que se ha logrado mantener toda la riqueza teórica de los modelos clásicos. Como lo señala Barto, esta nueva tendencia no sólo permite hacer operativos los modelos clásicos que antes sólo permanecían como formulaciones teóricas, sino que se abre el campo para la exploración de clases de modelos enteramente nuevas. De acuerdo a Sutherland (1975), uno de los objetivos que debería perseguir el análisis de sistemas es precisamente el lograr que sean las propiedades mismas del problema que se esté analizando las que determinen el procedimiento analítico a seguir, en vez de prejuicios metodológicos a priori, que en definitiva pueden llegar a determinar cuáles son los problemas que debemos someter al análisis.

Dado que en el pasado el análisis numérico se ha dedicado en gran parte a la construcción de interpretaciones discretas de modelos continuos clásicos, los principales indicadores de eficiencia que ha utilizado se relacionan con el grado de proximidad entre ambos modelos, en lugar de medir el grado en que el modelo discreto se aproxima a las propiedades del sistema real. Es así como los márgenes de error o el grado de aproximación alcanzado con respecto al modelo original a medida que el nivel de resolución converge a cero, dominan la evaluación del modelo discreto. En cambio, cuando el enfoque directo se aplica desde un comienzo, este tipo de problemas no llega a surgir, o si lo hace, se relaciona más bien con el nivel de desagregación de los datos disponibles o con el grado de detalle requerido por el analista o por el problema mismo. A pesar del hecho de que al final un modelo directo resulte similar a un modelo discreto diseñado para aproximarse a una formulación continua, el hecho de que haya sido derivado directamente deja, según Barto, "a una gran parte del análisis numérico como irrelevante". Toda la magnitud y complejidad del problema acerca de cómo han sido aproximados los resultados de una ecuación diferencial han sido obviados, dejando solamente el problema crucial de la validez del modelo en relación con un conjunto de datos reales.

En suma, esta concepción emergente de la simulación y de la validez de los modelos sostiene que éstos sólo pueden ser discutidos con respecto a un conjunto particular de atributos reales (base de datos) que son de interés para el analista (problema), y que constituyen su marco

experimental. En este sentido se puede decir que un modelo es válido con respecto a un marco experimental determinado, pero no respecto a otros. También es necesario destacar que el carácter discreto de los modelos no implica necesariamente que el sistema analizado posea también características discretas. Así, por ejemplo, si un modelo trata la variable tiempo como discreta, no quiere decir que el tiempo posea un carácter discreto, de la misma manera que un modelo que trata a dicha variable como continua no necesariamente implica que el tiempo sea continuo. Lo que se sugiere aquí es que ambos modelos corresponden a interpretaciones intelectuales de la naturaleza del tiempo, y que el analista deberá elegir aquélla que mejor sirva a sus intereses o la que mejor se acerque al conjunto de datos observados de la realidad.

Toda esta discusión tiene una relevancia especial para las ciencias sociales y la ciencia urbano-regional en particular, ya que los diferentes modelos que han sido presentados en las secciones anteriores siguen una u otra de las tradiciones matemáticas antes señaladas. Básicamente los modelos de tipo micro-económico pueden identificarse con la tradición continua, particularmente por la forma en que tratan el espacio, ingreso, densidad y otras variables (tratándose de modelos estáticos, sin embargo, consideran implícitamente a la variable tiempo como discreta). Es generalmente por esta razón que en la mayoría de los casos recurren a ecuaciones diferenciales para sus procesos de cálculo. Por otra parte, los modelos de interacción espacial consideran al espacio y a la mayoría de las otras variables como discretas, lo cual les facilita su comprobación empírica. Las facilidades operativas que estos modelos proveen no sólo derivan del hecho de que sea posible su inmediata implementación en computador, sino que también influye la relativa congruencia existente entre su estructura matemática y las bases de datos de que generalmente se dispone.

Esto no quiere decir, sin embargo, que los modelos basados en micro-economía no son útiles porque no son comprobables empíricamente. De hecho no existe ninguna razón para dudar que la mayoría de las hipótesis implícitas o explícitas en que están basados puedan ser puestas a prueba para corroborarlas o refutarlas, siempre que se expresen en forma algorítmica. Para que ello sea posible debe actuarse con suficiente flexibilidad para eludir las formulaciones clásicas continuas, y para que las pruebas empíricas puedan realizarse, será necesario también evitar el gran número de supuestos simplificativos a los que se recurrió en las versiones originales. Incluso, como se pondrá en evidencia más adelante, será necesario combinar las versiones discretas de los modelos clásicos con formulaciones de interacción espacial.

La estrategia que se sigue aquí es la que se describe a continuación: primeramente se examina una versión típica de un modelo de interacción

espacial desde el punto de vista económico, con el objeto de facilitar su uso posterior en modelos integrados. Luego los modelos de Von Thünen, Wingo y Alonso, son tomados como ejemplos para demostrar cómo puede llevarse a cabo la re-interpretación de los modelos clásicos en lenguaje discreto. Al hacer esto, se verá cómo los supuestos en que se basan son perfectamente comparables con las representaciones de tipo discreto y, más aun, cómo pueden enriquecerse y generalizarse substancialmente. Pero la re-interpretación de los modelos neo-clásicos no constituye un objetivo en sí mismo, ya que se trata de un paso necesario para crear las bases para su integración con el enfoque alternativo de interacción espacial, lo cual permite llegar a una nueva clase de modelos mucho más general.

## 5. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS ELEMENTOS DE UN MODELO DE INTERACCIÓN ESPACIAL.

El objetivo de esta sección es el de trazar algunas analogías entre los términos que componen una distribución de interacción espacial y determinados conceptos económicos. Éste es un tema que ha sido tratado anteriormente por otros autores aunque en forma diferente, de tal manera que se hace referencia a los trabajos de Wilson (1970), Cochrane (1975), Daly y Zachary (1978). También es importante mencionar el trabajo pionero de Huff (1963), que, aunque referido a formulaciones gravitacionales más primitivas, resulta de especial importancia.

Considérese, como ejemplo, el modelo restringido en el origen propuesto por Wilson representado en las Ecuaciones (30) y (31), que se repite aquí con algunas modificaciones:

$$T_{ij}^n = Y_i^n W_j^n (U_{ij}^n)^{\alpha n} A_p^n \quad (34)$$

y

$$A_i^n = [\sum_j W_j^n (U_{ij}^n)^{\alpha n}]^{-1} \quad (35)$$

Cada uno de los términos de estas dos ecuaciones pueden interpretarse desde el punto de vista económico de la siguiente manera:

$T_{ij}^n$  puede interpretarse como el flujo de un determinado bien  $n$  que es demandado en la zona  $i$  y producido en la zona  $j$ , es decir, representa

un flujo de bienes entre zonas de oferta a zonas de demanda. Así, por ejemplo, en un modelo residencial se puede considerar un flujo, entre zonas que representan una demanda de fuerza de trabajo (zonas de empleo), a zonas que la proveen (zonas residenciales). Se dice que la magnitud del flujo es proporcional al resto de los elementos incluidos en la ecuación (33), y si se suma con respecto a todas las zonas de oferta ( $\sum_j T_{ij}^n$ ) se obtendrá el flujo total del bien correspondiente hacia la zona  $i$ . La ecuación (34) garantiza que el flujo total de bienes hacia una zona determinada sea igual a su respectiva demanda.

$Y_i^n$  la demanda total por el bien  $n$  en la zona  $i$ . Como  $\sum_j T_{ij}^n = Y_i^n$  las unidades en que se mida la demanda deben corresponder a las del flujo; de lo contrario se requerirá un escalar.

$W_j^n$  representa una probabilidad *a priori*. Este término permite incluir cualquier elemento que se haya estimado en forma independiente y que se sepa que afecta a la distribución. Generalmente se incluye aquí el tamaño de las zonas, si es que no son todas iguales, o la cantidad de tierra disponible para el desarrollo, pero se puede incluir también aspectos más específicos tales como el espacio construido residencial para un modelo residencial, las facilidades comerciales para un modelo de flujos comerciales, la matrícula disponible para los flujos de escolares, etc.

$(U_{ij}^n)^{\alpha n}$  representa una función de utilidad para la zona de oferta. Esto significa que, si todas las otras condiciones son iguales, una zona determinada  $j$  va a proveer una mayor cantidad de la mercancía  $n$  a la zona  $i$  si es que los proveedores de esa zona logran en la transacción una utilidad mayor que otros proveedores alternativos. De esta manera se expresa la tendencia del sistema hacia una eficiencia económica. Esto no significa, sin embargo, que la utilidad sea máxima para todos los proveedores como en el modelo de competencia perfecta. De hecho el valor del parámetro  $\alpha n$  representa el nivel de utilidad que alcanzan; si  $\alpha n$  tiende a cero,

la función de utilidad no jugará ningún papel en la distribución de los flujos, no existiendo así ninguna evidencia de que haya productores maximizando su utilidad individual; si  $\alpha n$  tiende a infinito, todos los productores estarán maximizando su utilidad, con lo cual se llegaría a un caso similar al de los modelos de programación lineal. Como el valor de  $\alpha n$  dependerá del proceso de calibración en el cual se trata de acercar los valores simulados por el modelo a los valores reales de  $T_{ij}^n$ , se supone entonces que  $\alpha n$  reflejará el grado de maximización de la utilidad de

los productores existente en la realidad. Nótese que el término de utilidad aquí ha sido representado con sub-índices zonales  $i$  y  $j$ , ya que el nivel de utilidad de los productores no dependerá sólo de sus propias características, sino que también de su situación con respecto a la zona de demanda. Aquí se pueden considerar tanto utilidades positivas como negativas. El tipo de utilidad más frecuentemente incluida en este término refleja, generalmente la utilidad negativa del tiempo o costo de viaje, pero se puede incluir una combinación de distintas variables que se sepa afectan la utilidad de los productores, tales como clima, costos locacionales, proximidad a otras actividades deseables, etc.

En términos más generales, y como las ecuaciones (34) y (35) representan un modelo restringido en el origen, se puede decir que la demanda ha sido considerada como fija o conocida; por esta razón se ha incluido una utilidad relacionada con la oferta. Una interpretación similar a la que se ha presentado aquí, puede hacerse para los demás tipos de modelos de interacción espacial. Un modelo restringido en el destino correspondería a un caso en que la oferta es considerada como fija, por lo cual deberá incluirse una función de utilidad relacionada con la demanda, junto con una probabilidad *a priori*  $W_i^d$ . Un modelo a-restringido sería un caso en que ambos términos serían desconocidos, por lo cual sería necesario incluir ambos tipos de utilidad y, en lo posible, dos probabilidades *a priori*.

Un modelo doblemente restringido es, más bien, un caso especial, ya que tanto la oferta como la demanda son consideradas como fijas e incorporadas directamente a la formulación y, por tanto, ninguna función de utilidad puede ser relacionada ni con la oferta ni con la demanda. Como el interés del modelo está en la simulación de los flujos más probables, la función de utilidad debe relacionarse con los flujos mismos. Así, por ejemplo, en un modelo de distribución y separación modal de viajes, la utilidad debe relacionarse con los viajes (o, más bien, con los viajeros) ante cada par de zonas, lo cual debe expresarse en términos de costo de viaje por modo (una desutilidad).

## **6. ALGUNOS MODELOS MICRO-ECONÓMICOS DE USO DEL ESPACIO EXPRESADOS COMO MODELOS DISCRETOS.**

Lo que se intenta en esta sección es la reinterpretación de algunos de los modelos clásicos micro-económicos, utilizando expresiones discretas. No se intenta una versión discreta que se acerque lo más posible a los modelos originales, sino que éstos son solamente

considerados como una forma particular de expresar un conjunto de hipótesis, con lo cual se pueden construir modelos enteramente nuevos. El utilizar expresiones discretas permite abandonar la mayoría de los supuestos simplificativos presentes en las versiones originales, en particular la que se refiere al centro de empleo o mercado único. Sin embargo, cuando potencialmente todas las zonas del sistema pueden contener empleo o mercados es decir, cuando potencialmente todas las zonas constituyen una demanda, entonces se requiere de una distribución de dicha demanda a las zonas de oferta, lo cual se hace posible al introducir modelos de interacción espacial. Por lo tanto, este ejercicio constituye un primer nivel de integración entre ambos enfoques.

### 6.1. Localización y renta de Von Thünen.

En este modelo, que fue descrito en secciones anteriores, la demanda estaba representada por un mercado único en donde se transaban las mercancías agrícolas. En una versión discreta es necesario considerar todas las zonas como mercados de consumo potenciales. Igualmente, el costo de transporte por unidad de distancia no necesita ser considerado como homogéneo; ya que el espacio se encuentra agregado en zonas, las características del sistema de transporte pueden representarse en una matriz de distancias o de costos de transporte por tipo de mercancías con alto grado de realismo. Más aun, si la matriz de costos de transporte se calcula con un modelo de transporte, se pueden incluir elementos tales como diferentes tipos de red, modos de transporte, capacidades, congestión, costos de combustible, almacenamiento y otras variables influyentes.

Al considerar múltiples mercados, se requiere de un modelo de interacción espacial para simular los flujos probables,  $T_{ij}^n$  de mercancías  $n$  entre los productores en una zona de origen  $i$  a los consumidores en la zona  $j$ .

$$T_{ij}^n = P_i q_i^n (U_{ij}^n)^{\alpha n} A_j^n \quad (36)$$

en donde:

$$A_j^n = [\sum_i (U_{ij}^n)^{\alpha n}]^{-1} . \quad (37)$$

El término,  $P_i q_i^n$  representa la demanda por la mercancía  $n$  en la zona  $i$ ,

en términos de la población en la zona  $P_i$ , y del consumo *per capita* de la mercancía en esa zona,  $q_i^n$ . El consumo *per capita*, a su vez, será función del ingreso de la población en esa zona,  $I_i$ , del precio de la mercancía obtenido en el mercado,  $p_i^n$ , y de un parámetro que representa la elasticidad de la demanda con respecto al precio de esa mercancía,  $\epsilon^n$  ( $< 0$ , es decir: a mayor precio, menor consumo).

$$q_i^n = q_i^n (I_i, p_i^n, \epsilon^n). \quad (38)$$

El término  $(U_{ij}^n)^{\alpha^n}$  representa la utilidad para los productores para la mercancía  $n$ , similar al concepto de excedente del productor utilizado por Von Thünen, para cada par de zonas  $i, j$ . La utilidad puede ser evaluada como:

$$U_{ij}^n = p_i^n - c_{ij}^n - I_i^n r_j - k_j^n \quad (39)$$

en donde:

$p_i^n$  = precio unitario de la mercancía  $n$  en el mercado  $i$

$c_{ij}^n$  = costo unitario de transporte entre  $i$  y  $j$  para la mercancía  $n$ .

$I_i^n r_j$  = costo unitario por concepto de renta de la tierra, calculado como el producto entre la cantidad de tierra necesaria para producir una unidad de la mercancía  $n$  en la zona  $j$  y el precio unitario de la tierra en esa zona.

$k_j^n$  = costo unitario de producción de la mercancía  $n$  en  $j$ , incluyendo una ganancia mínima promedio para el productor.

El término  $A_i^n$  garantiza que la demanda sea satisfecha por la oferta, ya que garantiza que  $\sum_i T_{ij}^n = P_i q_i^n$ . De esta forma es necesario equilibrar dos mercados diferentes para determinar el precio de cada tipo de mercancía en cada mercado de consumo, y el precio de la tierra en las zonas de producción. Para esto se puede utilizar un algoritmo similar al de Alonso, pero incorporando a ambos mercados. Sin embargo, la diferencia principal entre esta situación y el caso urbano de Alonso

es que aquí el consumo de tierra se considera fijo por unidad de mercancía, a diferencia del caso urbano en que el consumo dependía del precio de la tierra. En consecuencia, el algoritmo deberá partir de precios mínimos y proceder incrementalmente, de tal forma que la secuencia de etapas sería:

- a) Estimaciones iniciales de los precios mínimos de las mercancías en cada zona, así como de los precios de la tierra. Los mínimos más adecuados serán:  $p_i^n = k_i^n + c_{ij}^n$  y  $r_j = 0$ .
- b) Con la ecuación (38) se calcula la demanda de cada mercancía en cada zona.
- c) Con la ecuación (39) se calcula la utilidad de los productores para cada par de zonas y mercancía,  $U_{ij}^n$ . Dados los valores iniciales escogidos para los precios de las mercancías y tierra, la mayoría de los valores de la matriz  $U$  serán  $= 0$ , excepto la diagonal que será  $= 1$ .
- d) Si por lo menos un valor de cada fila de la matriz  $U$  es mayor que cero, el cálculo sigue adelante; de lo contrario, se deberá modificar el precio de la mercancía correspondiente en dicha zona. Los valores iniciales adoptados para  $p_i^n$  y  $r_j$  garantizan que esta condición se cumpla en la primera iteración, pero no en las demás.
- e) Con las ecuaciones (36) y (37) se calcula el flujo de mercancías.
- f) Se calcula el consumo de tierra en cada zona,  $L'_j$ :

$$L'_j = \sum_i \sum_n T_{ij}^n I_i^n \quad (40)$$

- g) Si el consumo de tierra no es igual a la tierra disponible ( $L'_j \neq L_j$ ), se deberá modificar el precio de la tierra en esa zona ( $r_j$ ), volviendo el cálculo a la etapa c).

La Figura 3 representa a esta secuencia de cálculo. En la primera iteración, gracias a los precios iniciales adoptados, la demanda será asignada fundamentalmente dentro de cada zona de origen (ya que  $U_{ij}^n = 0$  si  $i \neq j$ ;  $= 1$  si  $i = j$ ). Esto resultará en precios mínimos para las mercancías, y por tanto de la demanda será máxima. Pero luego, cuando se

calcula la demanda de tierra en cada zona, aquéllas que posean niveles de demanda muy altos probablemente excederán su propia disponibilidad de tierra, incrementando su precio (que era originalmente = 0). Al subir los precios de la tierra, la utilidad deberá ser recalculada; esta vez, sin embargo, la mayoría de los valores de  $U$  serán  $< 0$ , por lo cual subirán los precios de las mercancías y bajará la demanda por ellos. Esta última secuencia deberá repetirse hasta que por lo menos un valor de cada fila de la matriz  $U$  sea mayor que 0, aunque la distribución de valores positivos será más amplia en cada iteración. Los flujos también deberán ser recalculados y su distribución será también cada vez más amplia. El proceso de cálculo termina cuando  $L'_j = L_j$ .

Una vez alcanzado el doble equilibrio, el modelo habrá estimado los precios de todas las mercancías en cada zona, así como los precios de la tierra. La cantidad de tierra destinada a cada uso también habrá sido calculada, al igual que los flujos de mercancías dentro de la región.

Como podrá notarse, el mecanismo mediante el cual se genera la renta es diferente al utilizado originalmente por Von Thünen, pero equivalente desde el punto de vista conceptual: si en alguna iteración se genera una utilidad positiva, ésta es automáticamente transferida al terrateniente en forma de renta. En cambio, aquí ya no se trata de un "estado aislado", ya que se puede considerar a las importaciones desde otras regiones utilizando zonas ficticias y precios fijos, excepto por los costos de transporte involucrados en la distribución (las zonas ficticias representarían depósitos).

La sensibilidad de este modelo a políticas alternativas puede ser bastante considerable. Distintos patrones de consumo pueden ser manipulados a través del parámetro de elasticidad  $\varepsilon^p$ , e incluso es posible desarrollar un algoritmo de sustitución entre los diversos productos. El conjunto de valores de  $l_i^p$  representa la productividad por unidad de tierra, que es una variable tecnológica exógena, y que puede ser modificada de preverse ciertos cambios en la tecnología productiva (probablemente un cambio tecnológico afecte también el costo de producción  $k_i^p$ ). También será posible simular pruebas de cambio de uso del suelo de agrícola a otros, evaluando la forma en que éstos afectan los precios de los productos y de la tierra y reacomodan el uso del suelo. Finalmente, si se complementa este modelo con uno de transporte, será posible evaluar su efecto sobre la producción agrícola; igualmente el

aumento de flujos en determinadas áreas puede dar lugar a congestamientos, afectando los costos y los precios.

## 6.2. El problema de la localización industrial de Weber.

Al presentar el modelo continuo se señaló que no existía una solución analítica para determinar la localización óptima de una industria, es decir, aquella localización que minimice los costos de transporte. Aquí se propone una solución algorítmica, utilizando espacio discreto y considerando múltiples fuentes de materias primas y de mercados consumidores. El área en estudio puede dividirse en un cierto número finito de zonas, de tal manera que la accesibilidad de cada una a las materias primas puede evaluarse a través de un índice de accesibilidad a los insumos, y en forma similar se puede definir un índice de accesibilidad a los mercados. La localización óptima de una industria corresponderá a aquella zona que obtenga el valor más alto para un índice combinado.

El flujo de materias primas tipo  $n$ ,  $T_{ij}^n$ , desde una fuente localizada en  $i$  a una industria localizada en  $j$ , puede estimarse de la siguiente manera:

$$T_{ij}^n = W_i^n D_j^n \exp(-\beta^n c_{ij}^n) B_j^n, \quad (41)$$

en donde:

$$B_j^n = [\sum_i W_i^n \exp(-\beta^n c_{ij}^n)]^{-1}. \quad (42)$$

$D_j^n$  representa la demanda de insumos tipo  $n$  de la industria localizada en  $j$ , la cual es distribuida a todas las fuentes posibles de acuerdo a sus respectivas atracciones,  $W_i^n$ , y a los costos de transporte,  $c_{ij}^n$ , expresados a través de una función exponencial. El parámetro  $\beta^n$  representará la elasticidad de la demanda con respecto al costo de transporte para el insumo tipo  $n$ . La atracción de la fuente de insumo,  $W_i^n$ , puede estar expresada en términos de la magnitud de la fuente,  $Q_i^n$ , y del costo unitario de producirla en esa zona,  $k_i^n$ :

$$W_i^n = (Q_i^n k_i^n)^{\alpha^n}, \quad (44)$$

en donde  $\alpha^n$  es un parámetro que regula la importancia de las economías de aglomeración y en donde  $Q_i^n$  y  $K_i^n$  son variables exógenas. El índice final de accesibilidad a los insumos,  $X_i^I$ , puede calcularse entonces como:

$$X_i^I = \sum_j \sum_n T_{ij}^n c_{ij}^n \quad (44)$$

Similarmente, la relación producción/demanda para una industria localizada en  $i$  y un mercado potencial en  $j$ ,  $T_{ij}^m$ , puede evaluarse de la siguiente manera:

$$T_{ij}^m = O_i^m (W_j^m)^\alpha \exp(-\beta^m c_{ij}^m) A_j^m \quad (45)$$

en donde:

$$A_j^m = [\sum_i (W_i^m)^\alpha \exp(-\beta^m c_{ij}^m)]^{-1} \quad (46)$$

$O_i^m$  representa el volumen de producción tipo  $m$  de la industria localizada en  $i$ . El término  $(W_j^m)^\alpha$  representa la atracción de la zona de destino en términos de la magnitud de la demanda por el producto  $m$  en la zona  $j$ , y del precio obtenido por la mercancía  $m$  en la zona  $j$  (exógenos), similar a la ecuación (43). El índice de accesibilidad al mercado  $X_i^O$  puede calcularse, entonces, como:

$$X_i^O = \sum_j \sum_m T_{ij}^m c_{ij}^m \quad (47)$$

Finalmente, el índice de accesibilidad compuesto se puede calcular como:

$$X_i = X_i^I + X_i^O + X_i^L \quad (48)$$

en donde  $X_i^L$  representa los costos de localización de la firma en  $i$ , incluyendo los costos derivados de la edificación, infraestructura, equipamiento social y otros. Una vez que se ha calculado  $X_i$  para todas las zonas, la localización óptima de la industria corresponderá a aquella que presente el índice más bajo. Nótese que la fuerza de trabajo y la accesibilidad a ella puede estar incorporada en el primer índice. Tanto las ecuaciones (41) como (45) representan modelos de interacción de restricción simple, ya que se ha considerado un caso de una industria dentro de un sector amplio. Esto implica que probablemente  $\sum_i T_{ij}^m$  sea menor que la demanda total por  $m$  en la zona  $j$ , y que  $\sum_i T_{ij}^n$  sea menor que la oferta total de materias primas tipo  $n$ . Se supone, entonces, que varias industrias, además de la que estamos considerando, se abastecen de las mismas fuentes de materia prima, y que a su vez varias industrias abastecen a los mismos mercados. Sin embargo, si la industria considerada fuera la única en el mercado (caso monopólico), la ecuación (45) puede reemplazarse por un modelo de doble restricción para garantizar que  $\sum_i T_{ij}^m =$  demanda total.

### 6.3. El modelo de uso del suelo y transporte de Wingo.

En esta re-interpretación del modelo de Wingo se considerará una multiplicidad de centros de empleo, así como diversos niveles de ingreso de la población. Igualmente la tierra será considerada como un elemento finito y agregado en zonas. Al considerar que todas las zonas pueden contener empleo, el concepto de gasto en transporte que utiliza el modelo original se torna difuso. En la versión de Wingo sólo se muestra una solución diagramática para explicar lo que ocurre con la densidad cuando se consideran varios centros de empleo. Como ahora la tierra es finita y puede adoptar cualquier forma irregular, el concepto de localización en el margen a una determinada distancia constante al centro, también se torna difuso.

Resulta muy simple probar que la solución continua original no puede resolver el problema de la multiplicidad de centros, lo cual se muestra en la Figura 4. En el modelo original la renta de la tierra se calculaba como el ahorro en costo de transporte con respecto a la localización en el margen (ecuación (7)). En la figura 4 se han considerado dos centros de empleo,  $E1$  y  $E2$ , y se analiza la situación de una localización residencial cualquiera en  $j$ . En estas circunstancias existen dos distancias entre el empleo y el margen ( $c_{1j}$  y  $c_{2j}$ ), y cuatro distancias entre el empleo y el margen ( $c_{1m}$ ,  $c_{1m'}$ ,  $c_{2m}$ ,  $c_{2m'}$ ). Evidentemente, no

existe ningún criterio para definir cuál de estas distancias utilizar para resolver la ecuación (7).

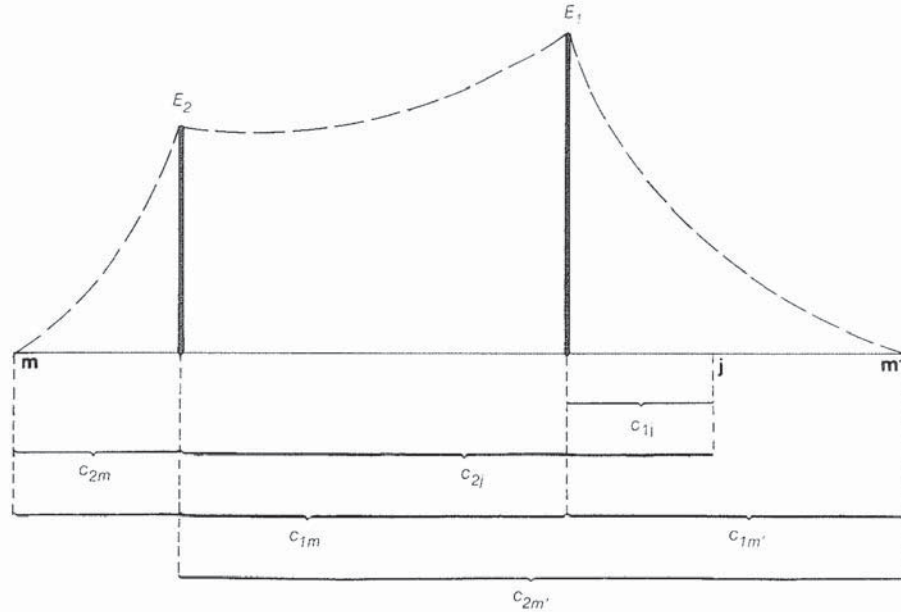


Figura 4: Relaciones espaciales entre empleo, residencia y el margen en el modelo de Wingo, considerando dos centros de empleo

Sin embargo, el problema puede ser resuelto en la solución discreta mediante la introducción de una distribución que asigne residentes a lugares de empleo, para luego generar la renta en forma similar a la utilizada en la versión discreta del modelo de Von Thünen. La función de distribución puede expresarse como un modelo de interacción restringido en el origen:

$$T_{ij}^o = E_i V^o L_j W_j \exp(-\beta^o c_{ij}) \exp(-\delta^o l_j^o r_j) A_i^o,$$

(49)

en donde:

$$A_i = [\sum_j L_j W_j \exp(-\beta^o c_{ij}) \exp(-\delta^o l_j^o r_j)]^{-1},$$

y donde  $T_{ij}^o =$  número de unidades residenciales de nivel  $o$  que trabajan en  $i$  y viven en  $j$ .

$E_i =$  empleo en la zona  $i$ .

$v^o =$  tasa de empleados por unidad residencial ( $n^o$  total de unidades residenciales en el grupo  $o$ / empleo total).

$L_j =$  tierra disponible en la zona  $j$ .

$W_i =$  término atractor, definido probablemente como el inverso de la densidad, suponiendo que si todos los otros elementos fueran iguales, los residentes prefieren aquellas zonas que brindan más espacio.

$\exp(-\beta^o c_{ij}) =$  función de costo de transporte, en donde  $\beta^o$  representa la elasticidad de la demanda tipo  $o$  con respecto al costo de transporte.

$\exp(-\delta^o l_j^o r_j) =$  función de costo de localización, en donde  $l_j^o$  es la cantidad de tierra consumida por el grupo  $o$  en  $j$ , y  $r_j$  es el precio unitario de la tierra en esa zona. El parámetro  $\delta^o$  representa la elasticidad de la demanda del grupo  $o$  con respecto al costo de la localización.

Nótese que en las ecuaciones (49) y (50) la cantidad de tierra disponible en cada zona,  $L_j$ , representa la probabilidad *a priori*, y que el atractor y las dos funciones exponenciales representan la utilidad para los residentes. Por otra parte, el consumo de tierra por unidad residencial tipo  $o$  en  $j$  puede estimarse con una función de demanda del siguiente tipo:

$$l_j^o = (\lambda^o / r_j) \quad (51)$$

en donde  $\lambda^o$  y  $\alpha^o$  son parámetros a estimar independientemente.

El algoritmo para establecer la generación de renta puede establecerse entonces, de la siguiente manera:

a) Estimación inicial de los precios de la tierra,  $r_j$ .

- b) En cada localización, determinación del consumo de tierra de cada grupo de ingreso  $o$ , utilizando la ecuación (51).
- c) Localización de los residentes desde los lugares de empleo, utilizando las ecuaciones (49) y (50).
- d) Comprobación de la cantidad total de tierra consumida en cada zona para asegurarse que no es mayor que el total disponible.

$$L_j = \sum_o I_j^o \left( \sum_i T_{ij}^o \right), \quad (52)$$

en donde  $\sum_i T_{ij}^o$  es la población del grupo  $o$  en la zona  $j$ . Si la ecuación (52) no fuera válida en algunas zonas, las estimaciones iniciales del precio de la tierra,  $r_j$ , deberán ser revisadas y el proceso de cálculo vuelve a la etapa b). Si todas las zonas cumplen con la igualdad (52), entonces el proceso de cálculo termina.

Este algoritmo se presenta diagramáticamente en la Fig. 5. En este punto resulta conveniente destacar algunas de las diferencias entre esta proposición y el modelo original de Wingo. La primera de las diferencias se deriva del hecho de que se han considerado varios lugares de empleo, lo cual ha sido discutido en los párrafos anteriores. Luego, el hecho de que se han considerado varios niveles de ingreso hace que el mecanismo de generación de la renta sea sustancialmente diferente al utilizado en la versión original, en la que el único grupo de ingreso era asignado al espacio de acuerdo a una simple ecuación de densidad (9), mecanismo que ha sido reemplazado en el algoritmo por las ecuaciones (49) y (50). Los elementos de estas ecuaciones pueden ser interpretados de la siguiente manera: cada zona contiene una cierta demanda de empleo, la cual es distribuida a los lugares de residencia (sector oferta), de acuerdo a dos probabilidades; la primera es la probabilidad *a priori* establecida por la cantidad de tierra disponible en cada zona y la segunda es la probabilidad establecida por la función compleja de utilidad, compuesta por el atractor (que puede contener diversas características zonales, pero que fundamentalmente representa la preferencia positiva por el espacio), una utilidad negativa que representa los costos de transporte y una utilidad negativa que presenta los costos de localización. De esta manera la densidad residencial va a variar *como consecuencia* del proceso de localización en

lugar de utilizar una función directa de poca validez en las predicciones futuras. Aquellos grupos que son altamente sensibles a los costos de transporte tenderán a localizarse en zonas de alta accesibilidad, consumiendo pequeñas cantidades de tierra (alta densidad) de alto costo. En cambio, aquellos grupos menos afectados por el costo de transporte tenderán a localizarse en zonas de baja accesibilidad, consumiendo más tierra pero de bajo costo.

#### 6.4. Localización y uso del suelo de Alonso.

Se ha señalado anteriormente que existen numerosas similitudes entre los trabajos de Wingo y Alonso. Más aun, cuando se intenta una versión discreta del primero, tal como se ha hecho en la sección anterior, los dos modelos tienden hacia una misma solución. Así, por ejemplo, el mecanismo de generación de renta utilizado en la versión discreta del modelo de Wingo ha sido precisamente tomada de Alonso, y si consideramos que se introdujeron, además, múltiples niveles de ingreso —lo cual es algo que se puede extender fácilmente a las firmas o tipos de empleo—, la convergencia se hace aun más estrecha. Si luego agregamos a esto el hecho de que la ecuación de restricción presupuestaria de Alonso puede reducirse de tres elementos a dos (transporte y tierra), sin modificar sustancialmente el modelo, sólo permanecen diferencias secundarias.

Por otra parte, Alonso clasifica a los usuarios de acuerdo a la pendiente de sus respectivas curvas “*bid price*”, definidas como el incremento marginal del precio de demanda del usuario sobre un incremento marginal en la distancia (un valor negativo); este mismo procedimiento queda implícito en la proposición de la sección anterior, ya que en las ecuaciones (49) y (50) aquellos grupos de usuarios cuyas curvas de precio de demanda sean más empinadas, es decir, que tengan valores más altos de  $\beta$ , tenderán a localizarse en zonas con mejor accesibilidad a los centros de empleo. Por último, Alonso (1964) en su libro señala que las principales diferencias entre su trabajo y el de Wingo es que este último considera la preferencia por espacio y por accesibilidad “en compartimientos diferentes”. Como ambas preferencias han sido consideradas simultáneamente en las ecuaciones (49) y (50), esta diferencia tampoco es válida. En suma, si se intenta una versión discreta del modelo de Alonso, se obtendría un producto muy similar al representado en la Figura 5.

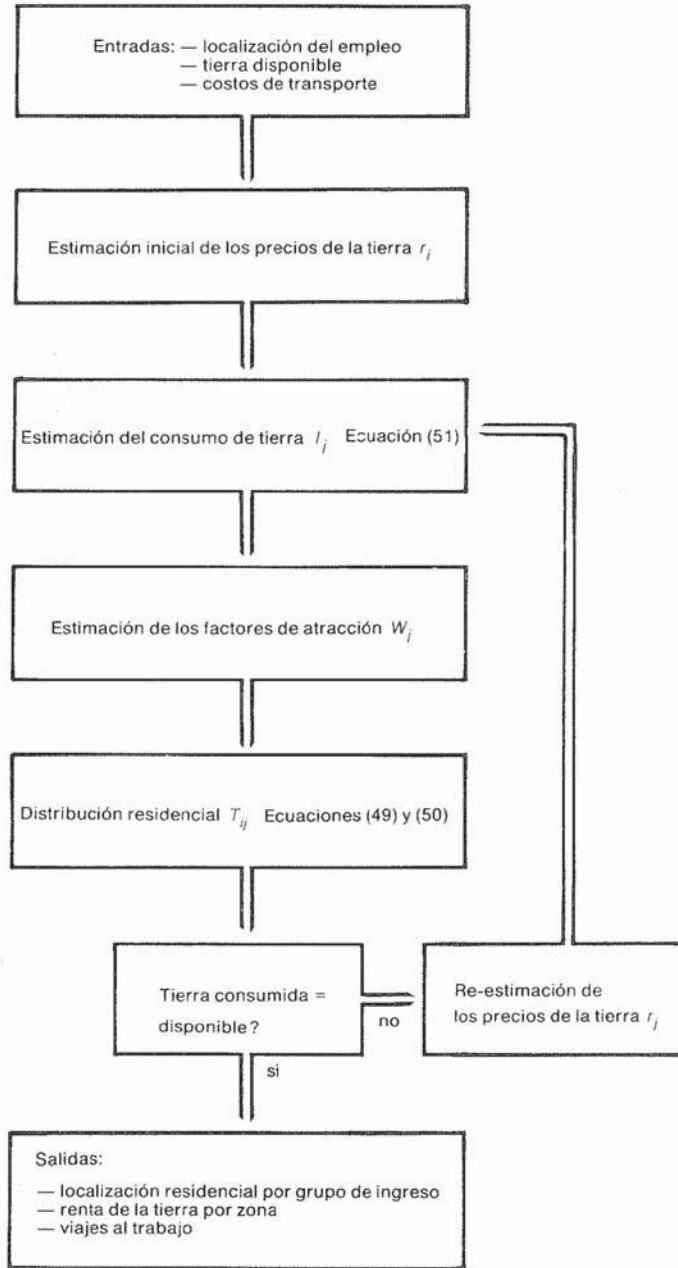


Figura 5: Interpretación discreta del modelo de Wingo, considerando múltiples centros de ingreso.

## 7. INTEGRACIÓN DE UN PROCEDIMIENTO DE LOCALIZACIÓN TIPO LOWRY Y DE UN MERCADO DE EDIFICACIONES

Se ha demostrado en las secciones anteriores que para reinterpretar algunos de los modelos neo-clásicos en términos discretos, se requiere del uso de ecuaciones de interacción espacial, sobre todo si se consideran múltiples centros de demanda. Hasta ahora, sin embargo, sólo se ha utilizado una sola de estas distribuciones, en particular, la distribución de la demanda de empleo a los lugares de residencia. En este sentido no cabe duda de que sería ventajoso el distinguir entre empleo básico y empleo de servicio en forma similar a la utilizada por Lowry, estableciendo dos distribuciones o sub-modelos: localización residencial y localización de empleo de servicio. De esta manera el empleo de servicio estará influido por la localización de la población residencial.

La población residencial constituirá ahora una demanda por servicios de distintos tipos  $s$ , de tal manera que su distribución a zonas de oferta,  $T_{ij}^s$ , puede calcularse de la siguiente forma:

$$T_{ij}^s = \sum_o P_i^o w^o (W_j^s)^{\alpha^s} \exp(-\beta^s c_{ij}) \exp(-\delta^s I_j^s r_j) A_i^s, \quad (53)$$

donde:

$$A_i^s = [\sum_j (W_j^s)^{\alpha^s} \exp(-\beta^s c_{ij}) \exp(-\delta^s I_j^s r_j)]^{-1} \quad (54)$$

y en donde  $P_i^o$  representa la población de nivel  $o$  en la zona  $i$  calculada en la ecuación (49) ( $\sum_j T_{ij}^o$ ), y en que  $w^o$  es un peso calculado como función del ingreso (tal que  $\sum_o w^o = 1$ ). El término atractor,  $W_j^s$  puede expresar diversas características de la oferta en la zona de destino; aquí se sugiere que incluya tanto una medida de la cantidad de empleo básico existente en la zona de destino, como una medida de la variedad de empleo de servicio que se ofrece en la misma zona. Como es necesario establecer un proceso iterativo entre los diversos sub-modelos, se tratará del empleo de servicio localizado en la iteración anterior. El atractor puede cambiarse, entonces, de la siguiente manera:

$$W_j^s = \sum_b E_j^b + \sum_s E_j^s \quad (55)$$

en donde  $E_j^b$  es el empleo básico tipo  $b$  localizado en la zona  $j$ , y en donde  $E_j^s = 0$  para todo  $s$  y todo  $j$  en la primera iteración.

La función  $\exp(-\beta^s c_{ij})$  expresa la forma en que el costo de transporte afecta a la localización de servicio. Aquellos tipos de servicio que mantienen una relación estrecha con los usuarios (escuelas primarias, locales comerciales, etc.) tendrán una baja elasticidad de la demanda con respecto al costo de transporte, y por lo tanto, un valor relativamente alto de  $\beta$ . Por otra parte la función  $\exp(-\delta^s l_j^s r_j)$ , en donde  $l_j^s$  representa la cantidad de tierra consumida por unidad de empleo de servicio tipo  $s$  (calculada de manera similar a la ecuación (51)), explican el que altos costos de la tierra sean menos preferibles para la localización de cada tipo de empleo de servicio.

Antes de establecer la forma del algoritmo, se puede introducir otro elemento más a la función de costo de localización: en lugar de considerar sólo el costo de la tierra, se puede incluir también el costo de las edificaciones, estableciendo así un mercado simultáneo de tierra y edificaciones (como se hace en Echenique *et al.* (1977)). Ya se había establecido anteriormente que la tierra era un bien escaso, razón por la cual se puede generar renta absoluta, además de la renta diferencial. Esta hipótesis, generalmente aceptada, ha sido utilizada invariablemente por la mayoría de los modelos señalados anteriormente, pero, sin embargo, nunca se plantea una situación similar para el caso de las edificaciones. Existen numerosas razones para sostener que las edificaciones deben ser consideradas también como un bien escaso: en primer lugar, los períodos de construcción relativamente largos hacen que al corto plazo la oferta no pueda surgir indefinidamente; luego, está la variable tecnológica de restringe la altura de las edificaciones haciéndolas cada vez más costosas de construir; por último, generalmente existen disposiciones legales que restringen la cantidad de construcciones en cada zona. Por estas razones se puede dar el caso de que la demanda por espacio construido aumente notoriamente en un área por diversas razones, sin que la oferta pueda responder a ella. Esto, naturalmente, afectará los precios. En consecuencia la función de costo de localización en las ecuaciones (49) y (50) puede adoptar la siguiente forma:

$$\exp(-\delta^o (l_j^o r_j^l + b_j^o r_j^b)) \quad (56)$$

en donde  $l_j^o$  es la cantidad de tierra consumida por una unidad residencial del grupo  $o$  localizada en  $j$ ,  $r_j^L$  es el costo unitario de la tierra en esa zona,  $b_j^o$  es la cantidad de superficie construida consumida por una unidad residencial tipo  $o$  en  $j$ , y  $r_j^B$  es el costo unitario de la edificación en la zona  $j$ . Una función similar puede establecerse para el sub-modelo de localización del empleo de servicio. Nótese que a medida que aumenta la densidad de edificaciones en una zona determinada, el costo unitario de ellas irá aumentando, con lo cual se afecta negativamente la utilidad de los usuarios en la iteración siguiente.

Es necesario definir ahora dos funciones de demanda: una para tierra y otra para edificaciones. Si utilizamos un sub-índice  $g$ , tal que  $g = \{o, s, b\}$ , para representar tipo de actividad ( $o$  = nivel de ingreso,  $s$  = tipo de servicio;  $b$  = tipo de empleo básico), la función de demanda por tierra sería:

$$l_j^g = (\lambda^{Lg} / r_j^L) \alpha^{Lg}, \quad (57)$$

y la función de demanda para las edificaciones sería:

$$b_j^g = (\lambda^{Bg} / r_j^B) \alpha^{Bg}. \quad (58)$$

La solución algorítmica deberá incorporar a ambos mercados simultáneamente, por lo cual es necesario definir los siguientes pasos:

- a) Estimación de los valores iniciales para el precio de la tierra y de las edificaciones en cada zona.
- b) Cálculo de la demanda de tierra y superficie construida para cada tipo de empleo básico, nivel de ingreso y tipo de servicio, utilizando las ecuaciones (57) y (58).
- c) Cálculo del empleo total mediante la suma de todos los tipos de de empleo básico, más los posibles tipos de empleo de servicio que se hayan generado en las iteraciones anteriores:

$$E_j = \sum_b E_j^b + \sum_s E_j^s \quad (59)$$

- d) Distribución de los residentes desde los lugares de empleo, utilizando las ecuaciones (49) y (50) modificadas por la (56). Luego se calcula la población total por zona y por grupo ( $P_j^o = \sum_i T_{ij}^o$ ).
- e) Distribución de los empleos de servicio desde los lugares de residencia con las ecuaciones (53) y (54) modificadas por la (56). Luego se calcula el empleo de servicio total por tipo en cada zona:

$$E_j^s = \sum_i T_{ij}^s u^s, \quad (60)$$

en donde  $u^s$  es un coeficiente que expresa la cantidad de empleo que genera cada residente ( $u^s = \text{población total}/\text{empleo de servicio total tipo } s$ ). Nótese que los distintos niveles de ingreso han sido balanceados previamente en la ecuación (53).

- f) Comprobación de la convergencia del sistema. En cada iteración se agregan nuevos residentes y empleos de servicio. Gracias a que  $u^s$  es siempre menor que 1, las nuevas cantidades son cada vez menores; se considera que el sistema ha convergido cuando estas cantidades se hacen poco significativas. En caso contrario, el proceso de cálculo vuelve a la etapa c).
- g) Comprobación de que la cantidad de tierra consumida en cada zona es igual a la disponible:

$$L_j = \sum_b E_j^b l_j^b + \sum_o P_j^o l_j^o + \sum_s E_j^s l_j^s \quad \forall j. \quad (61)$$

Si no se cumple la condición (61), significa que las estimaciones iniciales del precio de la tierra deben ser corregidas, y el proceso de cálculo vuelve a la etapa b).

- h) Comprobación de que el consumo de superficie construida no excede un máximo definido exógenamente,  $B_j^*$ :

$$B_j^* \geq \sum_b E_j^b b_j^b + \sum_o P_j^o b_j^o + \sum_s E_j^s b_j^s \quad \forall j. \quad (62)$$

Si no se cumple la condición (62) significa que las estimaciones iniciales de los precios de la edificación deben ser corregidos, y el proceso de cálculo vuelve a la etapa b).

Este algoritmo se expresa diagramáticamente en la Figura 6. Como podrá notarse, al calcular la demanda de tierra y superficie construida, todas las actividades (empleo básico, servicios y población) han sido consideradas simultáneamente. Se han considerado varios tipos de empleo básico para reflejar el hecho de que cada tipo posee distintos niveles de consumo de tierra y superficie construida, así como elasticidades diferentes con respecto a los precios. Las elasticidades serán más altas para algunas actividades con respecto a otras, lo cual puede explicar por qué en algunas áreas más céntricas el suelo y el techo disponibles son utilizados principalmente por el empleo, generando densidades residenciales relativamente bajas. También debe destacarse que la comprobación de la tierra disponible (61) puede permitir, en principio, densidades bastantes altas, las cuales sin embargo son restringidas por dos elementos: el incremento en el costo de la edificación a medida que la densidad aumenta (factor tecnológico) y la restricción máxima (62). Es por esto que la tierra es considerada siempre como un recurso escaso, con una oferta límite en cada zona; en cambio, la oferta de superficie construida puede aumentar sin restricciones hasta que se alcanzan los máximos permisibles, momento en que se transforma en un bien escaso.

## 8. CONCLUSIONES Y DIRECTRICES FUTURAS

El modelo integrado que se ha propuesto en la sección anterior constituye un intento de integración entre dos áreas de investigación que hasta ahora se han desarrollado en un cierto aislamiento: los modelos de localización y renta de la tierra basados en teoría micro-económica y los modelos de interacción espacial. Primeramente se examinaron los fundamentos del análisis micro-económico de la renta de la tierra así como los elementos de los modelos de interacción espacial. Cuando ambos enfoques fueron comparados, se llegó a la conclusión de que cada uno cubría determinadas áreas propias (renta de la tierra vs. interacción), pero que a la vez compartían un área importante: el problema de la localización. También se señaló que ambos enfoques estaban basados en principios teóricos y estilos diferentes, y que pertenecían también a tradiciones matemáticas diferentes. Se relacionó a los modelos micro-económicos con la tradición clásica de las funciones continuas y las ecuaciones diferenciales, a diferencia de los modelos de interacción espacial que se relacionan más bien con funciones discretas y el uso de algoritmos. Como conclusión se optó por el enfoque discreto, sobre todo si se toman en cuenta ciertas consideraciones empíricas.

Sin embargo, esto no quería decir que toda el área de renta de la tierra

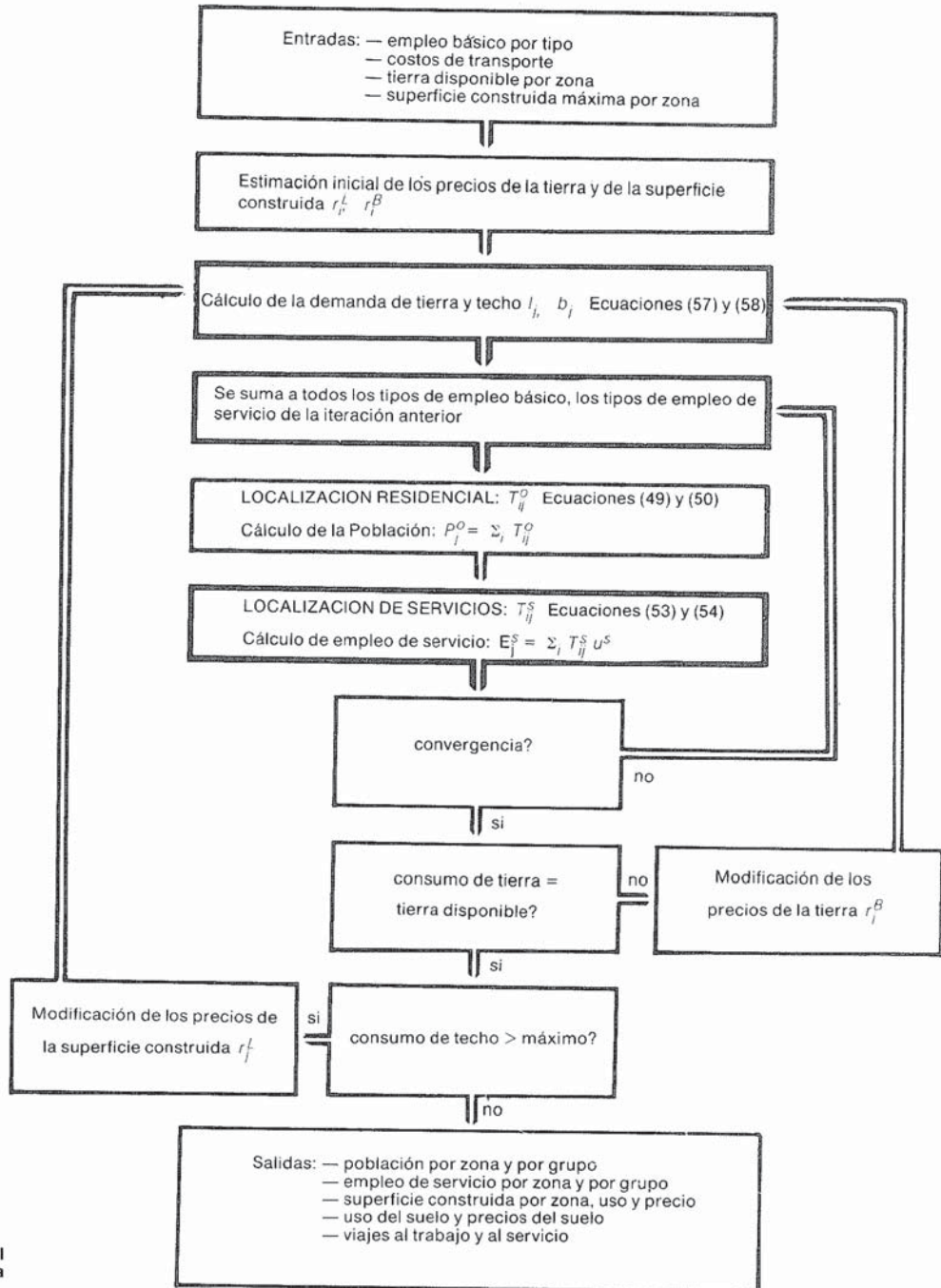


Figura 6: Modelo integrado de uso del suelo y renta inmobiliaria

era irrelevante o que muchos de los métodos y teorías no fueran útiles. Por el contrario, se sostuvo que los modelos clásicos podían ser re-interpretados en lenguaje discreto, creando así las bases para la integración entre los dos enfoques y para la construcción de un nuevo modelo más general. Luego se demostró que el uso de modelos de interacción espacial, los cuales habían sido previamente interpretados en términos económicos, era necesario para poder considerar múltiples centros de demanda en los modelos clásicos. La reinterpretación de los modelos de Von Thünen, Weber, Wingo y Alonso en términos discretos, proveen una base para su comprobación empírica. Por último, la integración fue llevada un paso más allá al incorporar al modelo resultante una estructura iterativa tipo Lowry, lo cual permitió desagregar el empleo en básico y de servicio y éstos por tipo. Igualmente se le incorporó al sistema un segundo mecanismo de mercado: de la superficie construida, con lo cual se propuso el modelo de la Figura 6.

Como podrá notarse, ambas áreas se han visto beneficiadas con la integración. Por una parte, los conceptos sobre renta de la tierra han sido complementados con los de renta de techo o de superficie construida. La mayoría de los supuestos simplificativos presentes en los modelos clásicos han sido abandonados, con lo cual se ha ganado acceso a la comprobación empírica. Por otra parte, la consistencia entre los dos enfoques permite a los modelos de interacción espacial el cubrir una nueva área de investigación, cual es la de la renta, así como les permite también basar sus proposiciones sobre bases teóricas más sólidas. El desarrollo de modelos integrados de interacción espacial y renta es un área de investigación muy reciente pero de importancia creciente. De hecho, la proposición que se ha hecho aquí incorpora elementos de otras investigaciones en curso a las cuales se ha hecho referencia. Esto ha favorecido la apertura de una amplia área de investigación teórica y empírica, pero abre el camino también a la integración con otros enfoques. Así, por ejemplo, la integración entre uso del suelo y transporte ha sido objeto de análisis y desarrollo por algún tiempo, pero aún quedan numerosos vacíos por llenar. Igualmente la integración entre interacción espacial y macro-economía es un área que sólo está comenzando y de la cual se podrán obtener, sin duda, nuevas y valiosas interpretaciones del fenómeno urbano, permitiendo a la vez, el desarrollo de nuevas técnicas de análisis. Finalmente, no hay que olvidar que todas estas proposiciones deben estar referidas a un marco dinámico que en este artículo no se ha tocado y que constituye una de las áreas de investigación más importantes en el futuro. ■

## RECONOCIMIENTO

Agradezco a mis compañeros del Instituto de urbanismo de la U.C.V. y los del Martin Centre de la U. de Cambridge, por su apoyo y valioso aporte. En particular a M. Echenique, Ian Williams y Marta Vallmitjana.

- ALONSO, W. (1964). *Location and Land Use*. Cambridge, EUA: Harvard University Press.
- ANGEL, S. y HYMAN, G. M. (1971). *Urban Spatial Interaction*. CES WP 69. Londres: Centre for Environmental Studies.
- BARTO, A. G. (1978). "Discrete and Continuous Models". *International Journal of General Systems*, 4, 3, 163-177.
- BATTY, M. (1976). *Urban Modelling. Algorithms, Calibrations, Predictions*. Cambridge University Press.
- BAXTER, R. y WILLIAMS, I. (1975). *The Third Stage in Disaggregating the Residential Model*. WP 66. Cambridge: Centre for Land Use and Built Form Studies.
- BAXTER, R. y WILLIAMS, I. (1975). "An Automatically Calibrated Urban Model". *Environment and Planning A*, 7, 3-20.
- CHRISTALLER, W. (1933). *Die Zentrales Orte un Suddeutschland*. Jena. Traducción inglesa de C. W. Baskin (1966): *Central Places in Southern Germany*. Nueva Jersey: Prentice Hall.
- COCHRANE, R. A. (1975). "A Possible Economic Basis for the Gravity Model". En *Journal of Transport Economic and Policy*, 5, 1.
- CONVERSE, P. (1949). "New Laws of Retail Gravitation". *Journal of Marketing*, 14, 279-304.
- DALY, J. A. y ZACHARY, S. (1978). "Improved Multiple choice Models". En *Determinants of Travel Choice*, editado por D. A. Hensher y Q. Dalvy. Saxon House.
- ECHENIQUE, M. (1968) *Urban Systems: Towards an Explorative Model*. WP 7. Cambridge: Centre for Land Use and Built Form Studies.
- ECHENIQUE, M., CROWTHER, D. y LINDSAY, W. (1969). *Development of a Model of a Town*. WP 26. Cambridge: Centre for Land Use and Built Form Studies.
- ECHENIQUE, M., FEO, A., HERRERA, R. y RIQUEZES, J. (1973). *Un modelo desagregado de la estructura espacial urbana: marco teórico*. PT 2. Caracas: Instituto de Urbanismo, UCV.
- ECHENIQUE, M., GERALDES, P. y WILLIAMS, I. (1977). *Desarrollo de un modelo de uso del suelo y transportes*. Informe N° 2 para la Corporación Administrativa del Gran Bilbao. Applied Research of Cambridge.
- GARIN, G. A. (1966). "A Matrix Formulation of the Lowry Model for Intrametropolitan Activity Location". En *Journal of the American Institute of Planners*, 32, 361-364.
- HANSEN, W. G. (1959). "How Accessibility Shapes Land Use". En *Journal of the American Institute of Planners*, 25, 73-76.
- HOOVER, G. A. (1948). *The Location of Economic Activity*. Nueva York: MacGraw Hill.
- HUFF, D. L. (1962). "A Note of the Limitations of the Intraurban Gravity Model". *Land Economics*, 38, 64-66; 39, 81-89.
- HUFF, D. L. (1963). "A Probabilistic Analysis of Shopping Centre Trade Areas". En *Land Economics*, 39, 81-90.
- ISARD, W. (1960). *Methods of Regional Analysis*. MIT Press. EUA.
- LAKSHMANAN, T. R. y HANSEN, W. G. (1965) A Retail Market Potential Model. *Journal of the American Institute of Planners*, 31, 134-143.
- LOWRY, I. S. (1964). *Model of Metropolis*. Santa Mónica, California, EUA: Rand Corporation.
- REILLY, W. J. (1931). *The Law of Retail Gravitation*. Nueva York: Putman and Sons.
- STEWART, J. (1948). "Demographic Gravitation: Evidence and Applications". *Sociometry*, 11, Feb-Mayo.
- SUTHERLAND, J. W. (1975). *Systems: Analysis, Administration and Architecture*. Nueva York Van Nostrand Reinhold.
- VAN VALKENBURG, M. E. (1974). Prefacio de *An Introduction to Discrete Systems*, por K. Steiglitz. Nueva York: John Wiley.
- WEBER, A. (1914). "Industrielle Standortslehre". *Grundriss der Sozialökonomik*, 4. Traducción Inglesa de C. J. Friederich (1929): *Alfred Weber's Theory of the Location of Industries*. Chicago: University of Chicago Press.
- WILSON, A. G. (1970). *Entropy in Urban and Regional Modelling*. Monographs in Spatial and Environmental System Analysis. Londres: Pion Ltd.
- WILSON, A. G. (1974). *Urban and Regional Models in Geography and Planning*. Londres: John Wiley & Sons.
- WINGO, L. (1961). *Transportation and Urban Land*. Washington: Resources for the Future.
- ZIPF, G. K. (1949). *Human Nature and the Principle of Least Effort*. Cambridge, EUA.