

Determinación del tipo de superficie y área de la bóveda del Salón Elíptico del Palacio Federal Legislativo* en Caracas, Venezuela

Determination of the type of surface and area of the vault of the elliptical hall of Palacio Federal Legislativo of Caracas (Venezuela)

MSc. Lic. Roberto Linares Santiago

<https://orcid.org/0009-0001-0376-6146>

Correo-e: rolinsa_55@hotmail.com

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Caracas-Venezuela

DOI: <https://doi.org/10.37883/TyC.2026.38.1.01>

Recibido: Julio 14/2025 | Aprobado agosto 29 / 2025 |

Aceptado noviembre, 06/ 2025



*Edificio conocido como Capitolio Federal, fue inaugurado en 1877 por el presidente Antonio Guzmán Blanco e históricamente fue la sede del Congreso que pasó a llamarse Asamblea Nacional en el año 2000.

Resumen

La medición de la superficie de la bóveda del Salón Elíptico, se basó en una técnica no tradicional. Para ello se utilizaron simultáneamente dos láseres de baja potencia, tanto para el vértice cupulina de la bóveda, como para el tipo de superficie y las longitudes de los semiejes principales de la misma, y se procedió de la siguiente manera: en primer lugar fueron determinados los ángulos de elevación de los puntos correspondientes a la cupulina del salón para conocer las longitudes de los semiejes; el semieje vertical b midió 6,57 m; y los semiejes horizontales a y c midieron 6,92 m y 13,05 m respectivamente, mientras que la altura h a la que se encuentra la cupulina fue calculada en, aproximadamente, 15,92 m. A continuación, con los valores anteriores se procedió a determinar si el tipo de superficie correspondía en realidad a un elipsoide de revolución cuyo eje principal es horizontal y luego, para calcular el área, se empleó la ecuación exacta de la superficie del semi-elipsoide y su resultado se contrastó con el obtenido por integración numérica por el método de Romberg para calcular el área por la forma integral, cuyo valor fue, aproximadamente, de 476,76 m².

Descriptores

Cálculos de la superficie de la bóveda del Salón Elíptico; matemática aplicada.

Abstract

The measurement of the surface of the vault of the Elliptical Hall was based on a non-traditional technique. To this end, two low-power lasers were used simultaneously, both for the cupola vertex of the vault, as well as the type of surface and the lengths of the main semi-axes of the same, and we proceeded as follows: first, the elevation angles of the points corresponding to the dome of the room were determined to know the lengths of the semi-axes; the semi-vertical axis b measured 6.57 m; and the horizontal semi-axis a and c measured 6.92 m and 13.05 m respectively, while the height h at which the cupola is located was approximately 15.92 m, second: with the above values it was determined if the type of surface actually corresponded to an ellipsoid of revolution whose main axis is horizontal; and third: to calculate the area, the exact equation of the surface of the semi-ellipsoid was used, and its result was contrasted with that obtained by numerical integration by the Romberg method to calculate the area by the integral form, whose value was approximately 476.76 m².

Descriptors

Dome Surface calculations of Elliptical Hall; applied mathematics.

Nota de presentación

La incorporación de este trabajo al acervo de la revista *Tecnología y Construcción* tiene una curiosa historia. Presentado por primera vez para su publicación en 1994, hubo que enfrentar un conjunto de dificultades –algunas técnicas, por no disponer de una infraestructura que facilitara las herramientas adecuadas para el procesamiento digital de la información aquí contenida–, y otras que obedecieron a compromisos contraídos por el autor.

La pintura de la Batalla de Carabobo, de Martín Tovar y Tovar, fue realizada en París sobre grandes lienzos rectangulares que luego –como en un rompecabezas– se adosó a la bóveda del espacio conocido como Salón Elíptico.

El origen de esta investigación se encuentra en una solicitud recibida por el autor de parte de los profesionales que se iban a encargar de la restauración de la pintura, Eduardo Remolina T. y María T. Moreno de Remolina, conocidos por su experiencia como restauradores en el Museo del Prado de Madrid, quienes antes de comprometerse con el trabajo requerían conocer la dimensión exacta de la superficie a restaurar, información que no aparece en los planos originales de la edificación, que datan de la época de la presidencia de Antonio Guzmán Blanco, entre los años 1884 y 1888. Por ese motivo, los restauradores se vieron en la necesidad de recurrir a diferentes especialistas del campo de la ingeniería y la arquitectura para contrastar distintas mediciones realizadas con técnicas diferentes. Así, cuando en agosto de 1990 fueron presentados al Congreso los resultados obtenidos por los distintos especialistas, éste fue seleccionado como el de mejor nivel técnico.

Más tarde, una vez conocidos los cálculos, sugirieron al autor hacer diligencias para viajar a Madrid y presentarlo ante la Cámara de Aparejadores de Madrid. Después recibiría también la invitación para hacer la presentación correspondiente en el Colegio Oficial de Arquitectos

de Madrid y en la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.

El tiempo transcurrió con el material guardado en archivo hasta que a finales de 2025 el autor nos visitó de nuevo aportando una nueva revisión y toda la información digitalizada, que aquí presentamos.

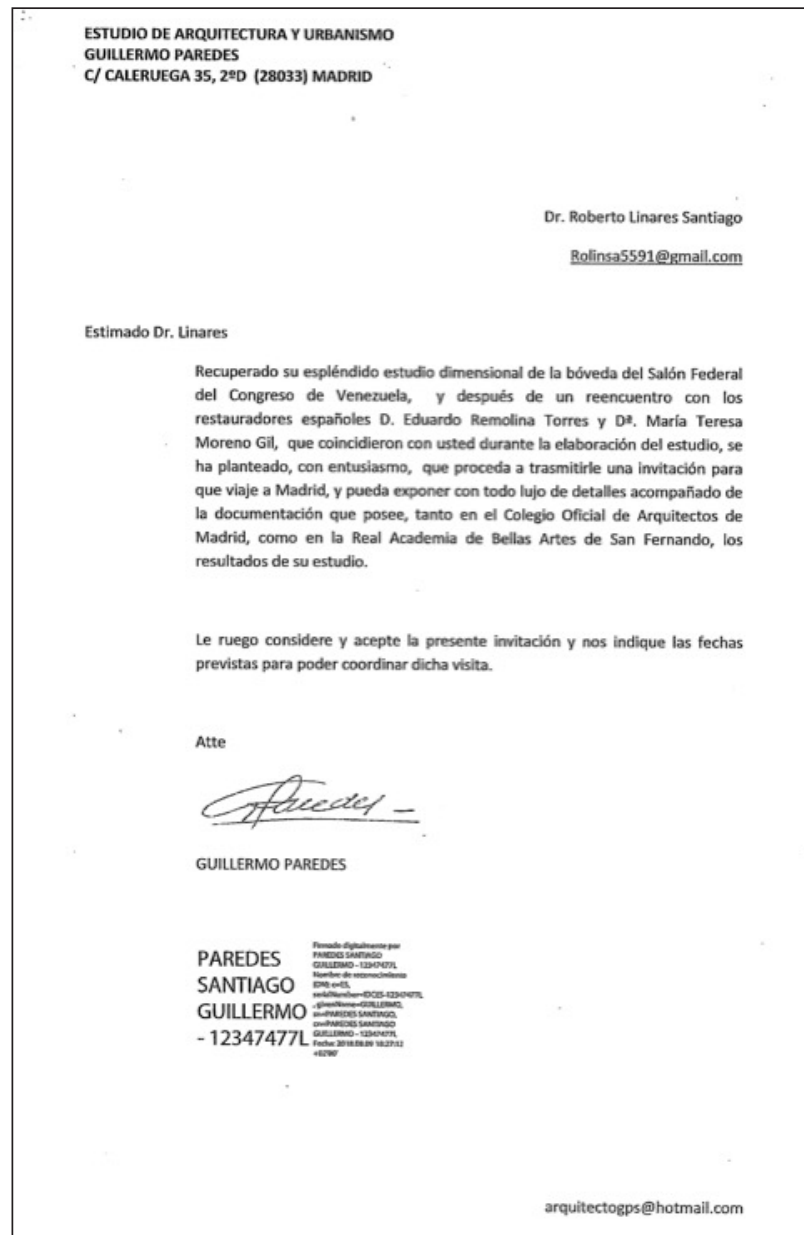
Revista ***Tecnología y Construcción***

Batalla de Carabobo, pintura al óleo de Martín Tovar y Tovar (realizada en París entre 1885-1887). El montaje de la obra se hizo bajo la supervisión del artista en el Salón Elíptico del Capitolio, inaugurado el 28 de octubre de 1888.



Fuente: <https://culturizando.com/pintura-batalla-de-carabobo/>

Invitación para la presentación del estudio dimensional en Madrid



El primer problema que se planteó al abordar el trabajo fue el de precisar si la bóveda del Salón tenía *forma elipsoidal o no*; y de ser así, cómo calcular su área, pues dadas las características y condiciones físicas de la pintura conocida como *Batalla de Carabobo*, no se permitía sobre el óleo hacer marcas que pudieran alterar o deteriorar la forma original de los lienzos que datan de 1888. En consecuencia, se recurrió a la marcación luminosa usando luz lá-

ser de baja potencia. No obstante, cabe destacar que los restauradores Eduardo Remolina T. y María T. Moreno de Remolina, ya previamente –entre los años 1987 y 1990–, después de investigaciones en diferentes organismos del Estado venezolano para conocer las dimensiones de la pintura mural *Batalla de Carabobo* del Salón Elíptico del Congreso pudieron constatar que, en los documentos y planos de la edificación no aparecían las dimensiones de dicha superfi-

cie. En tal sentido, se vieron en la necesidad de recurrir a diferentes especialistas del campo de la ingeniería y la arquitectura para contrastar las distintas mediciones realizadas con técnicas diversas, para determinar la superficie de la bóveda del Salón Elíptico donde se encuentra la pintura que Martín Tovar y Tovar.

Como información anecdótica vale la pena señalar que esa pintura fue realizada en París sobre grandes lienzos rectangulares que fueron luego adosados a la bóveda en forma de rompecabezas entre los años 1884 y 1888. Su costo fue de 400.000 bolívares, cantidad que representó, aproximadamente, el 1,5% del presupuesto del Estado venezolano de aquel entonces. La pintura original tiene una superficie aproximada de $476 \pm 9\%$ m² y, según los restauradores, esta dimensión haría de ella una de las pinturas murales en óleo sobre bóveda de mayor superficie en el mundo.

Para su cálculo se utilizó, por primera vez, una técnica no tradicional pues fueron empleados simultáneamente dos láseres de baja potencia, tanto para determinar el *vértice capulina* del Salón como el tipo de superficie y las longitudes de sus semiejes principales. Para ello, se determinaron los ángulos de elevación de los puntos correspondientes a los semiejes y a la *cupulina* del salón; el *semieje horizontal menor a* mide $6,92 \pm 5,8\%$ m, el *semieje horizontal mayor c* mide 13,05 m, el *semieje vertical b* mide $6,57 \pm 9,1\%$ m, y la *altura h* a la que está la *capulina* es, aproximadamente, de $15,92 \pm 0,6\%$ m. Luego, con los valores anteriores se procedió a determinar si el tipo de superficie correspondía en realidad a un elipsoide de revolución cuyo eje principal es horizontal. Para ello se realizaron las mediciones correspondientes, con las que deberían estudiarse las condiciones de la *cónica* y para lo cual fue necesario hacer, a escala, una reconstrucción tomando tres puntos adicionales del plano longitudinal que pasa por la *cupulina*, corroborándose, de esta manera, que la bóveda es un elipsoide casi perfecto. A continuación, para calcular el área, se empleó la ecuación exacta de la superficie del

semi-elipsoide, y su resultado se contrastó con el obtenido por integración numérica, por el método de Romberg. La descripción del tratamiento teórico, la metodología y los resultados a los que se arribó con esta técnica se presenta a continuación.

Tratamiento teórico

La elipse es una figura de importantes propiedades geométricas y físicas tanto en el universo como en la arquitectura dadas sus manifestaciones en las órbitas de los planetas y las múltiples aplicaciones tecnológicas y arquitectónicas. En esta última aplicación es en la que se basa nuestro estudio, pues en la arquitectura se habla de *"galerías del murmullo"*. Al respecto Protter y Morrey (1980) señalan que *"las galerías del murmullo son de forma elipsoidal; donde una señal, bien sea de luz, sonido u otro tipo de onda que tenga su frente en uno de los focos de la elipse, todas las ondas reflejadas en su superficie interna pasarán por el otro foco"* (pp.776-777). Y, en efecto, éste es el caso del Salón Elíptico en el Salón Federal del Congreso de Venezuela. Al respecto, y a título de información teórica se hará una descripción de los elementos geométricos a corroborar en la investigación.

Definición 1.

Elipse. Según Lehmann (1984) "elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de las distancias a dos puntos fijos del mismo plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancias entre los dos puntos. Los dos puntos fijos F y F' se llaman *"focos de la elipse"* (p. 172). Según Marín (1965), "la elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos del mismo plano, F y F', denominados focos, es constante, y siendo M(x, y) un punto del lugar, donde 2a es la suma constante y 2c es la *distancia focal*; donde las coordenadas cartesianas de los *radios vectores r y p* del punto M(x,y) (p. 159) son, respectivamente":

$$r^2 = \overline{F'M}^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad (\text{Ec. 1})$$

$$\rho^2 = \overline{FM}^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad (\text{Ec.1a})$$

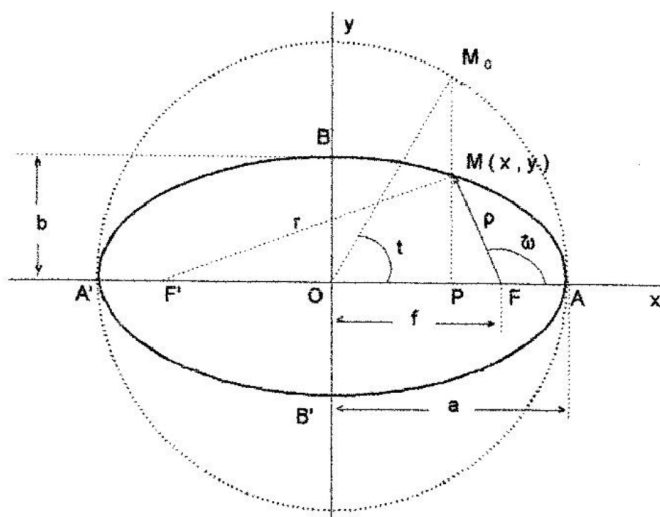
Ahora bien: la elipse pertenece a la familia de las cónicas expresadas en forma general por la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega} \quad (\text{Ec. 2})$$

Donde ρ es el *radio areolar*, p es el *parámetro de la cónica*, e la *excentricidad* y ω el *ángulo areolar*.

Particularmente, para el problema que nos ocupa, que es el de la elipse y su derivado cuerpo de revolución, es decir, el elipsoide, donde ρ y p toman los valores $p=b^2/a$ y $p=a-ex$, respectivamente, mientras que la excentricidad $e=f/a$, nos da el *grado de achatamiento* de la elipse, y en el caso de que e sea muy próximo a 1 la elipse tiende a una circunferencia; pero si es menor que 1, entonces la elipse tiende a achatarse. En el gráfico 1 se muestra una elipse en el plano de proyección XY.

Gráfico 1. Elipse en el plano de proyección XY mostrando los radios vectores r y p



En primera instancia, en una elipse, la suma de los radios vectores r y ρ es constante y está dada por:

$$r + \rho = 2a \quad (\text{Ec. 3})$$

La distancia focal está dada por:

$$FF' = 2f \quad (\text{Ec. 4})$$

La *excentricidad* de la elipse, respecto al círculo externo de radio a , está definida por:

$$e = \frac{f}{a} \quad (\text{Ec. 5})$$

mientras que un segundo parámetro identificado por t , denominado *anomalía excéntrica*, permite probar que la elipse es una *curva unicursal*, es decir, según Marín (1965, pp. 160 y 150), las coordenadas cartesianas de cualquiera de sus puntos se pueden expresar como funciones racionales de cierto parámetro, que en el caso de la elipse está dado por:

$$\lambda = tg \left(\frac{t}{2} \right) \quad (\text{Ec. 6})$$

Ahora bien, en Proter y Morrey (1980, p. 263) se demuestra que los radio vectores $r = \overline{OM}$ y $\rho = \overline{FM}$, se pueden expresar a partir de sus coordenadas cartesianas (Ec. 1) por las siguientes ecuaciones:

$$r = a + ex \quad \rho = a - ex \quad (\text{Ec. 7})$$

En particular, cuando es $x = f$, ρ es perpendicular al *eje focal* y toma el valor $a-ef$, y se hace igual al parámetro p de la elipse, por consiguiente:

$$p = a - ef = a - \frac{f^2}{a} \frac{a^2 - f^2}{a} = \frac{b^2}{a} \quad (\text{Ec.8})$$

Por cuanto de la Ec. 8 resulta que la expresión para la *semi-longitud focal* f , puede expresarse por:

$$f^2 = a^2 - b^2 \quad (\text{Ec. 9})$$

donde **b** es el *eje menor de la elipse* o radio de la circunferencia interior de la elipse. Pero dado que la excentricidad está definida por $e = f/a$, entonces:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{Ec. 10}$$

De esta forma se conoce la excentricidad dadas las distancias de los semiejes **a** y **b** y así se podrá saber qué tan achatada puede ser la elipse generadora del elipsoide. Por último, obtendremos la ecuación de la elipse, que es una ecuación de segundo grado. Para tal fin son diversos los procedimientos geométricos y algebraicos que se pueden seguir. Para los efectos y propósitos del trabajo tomaremos la vía de las *ecuaciones paramétricas*, como puede verse en Lehmann (1984, p. 271) (gráfico 2).

La elipse en el plano de proyección **XY** con circunferencias de radios **a** y **b** es recorrida por el punto **M (x, y)**, el cual se mueve de acuerdo con la rotación de la recta **l** en torno al centro **O** de la elipse y tomaremos como parámetro al ángulo **t**. Ahora bien: de los triángulos rectángulos **OM₀P** y **OBD**, resultan las coordenadas para **x** y **y** como se dan en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OP} = \overline{OM}_0 = \cos t = a \text{ sen } t \\ y &= \overline{PM} = \overline{DB} = \overline{OB} = \text{sen } t = b \text{ sen } t \end{aligned} \tag{Ec. 10a}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del punto **M (x, y)** son:

$$x = a \cos t ; y = b \text{ sen } t \tag{Ec. 11}$$

Eliminando el *ángulo excéntrico t* de la Ec.11 se obtiene la ecuación rectangular:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{Ec. 12}$$

De manera similar, una elipse en el plano **YZ** tendrá excentricidad:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{c^2} \tag{Ec. 13}$$

En nuestro caso particular hemos tomado en el eje **Z** el *semieje mayor c*, y en el eje **Y** el *semieje vertical b* como se muestra en el gráfico 3. En este caso particular, la *semi longitud focal* está dada por:

Gráfico 2. Elipse en el plano de proyección XY con circunferencias de radios a y b

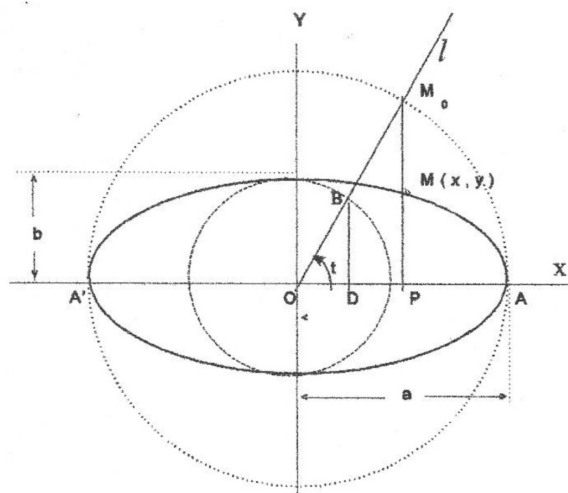
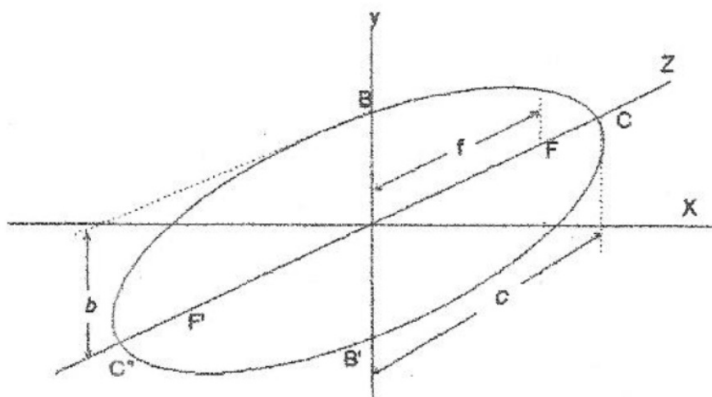


Gráfico 3. Elipse en el plano de proyección ZY



$$f^2 = c^2 - b^2 \tag{Ec. 14}$$

Y cuya ecuación paramétrica o ecuación reducida en coordenadas cartesianas, estará dada por:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{Ec.15}$$

Definición 2.

Elipsoide de revolución. Se conoce por *elipsoide de revolución* al sólido cónico que tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{Ec.16}$$

donde **a, b y c** son tres constantes (Marín, 1965, p.297; Lehmann,1984, p. 428). Ahora bien: si en la forma *canónica* dada por Ec. 16, la terna de parámetros **a, b, y c** son diferentes, el elipsoide se denomina *escaleno* y las *ecuaciones paramétricas* de la superficie serán:

$$r = a (\text{sen } u \text{ cos } v), y = b (\text{sen } u \text{ sen } v), z = c \text{ cos } u \tag{Ec. 17}$$

Según Marín (1965), se cumplen tres condiciones:

1) si **a = b**, el *elipsoide es de revolución* respecto del eje **z**. en cuyo caso la ecuación canónica es:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{Ec.18}$$

2) cuando **a > c**, el *elipsoide es achatado* o *esferoide* con excentricidad:

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \tag{Ec.19}$$

3) cuando **a < c**, el *elipsoide es alargado* con excentricidad:

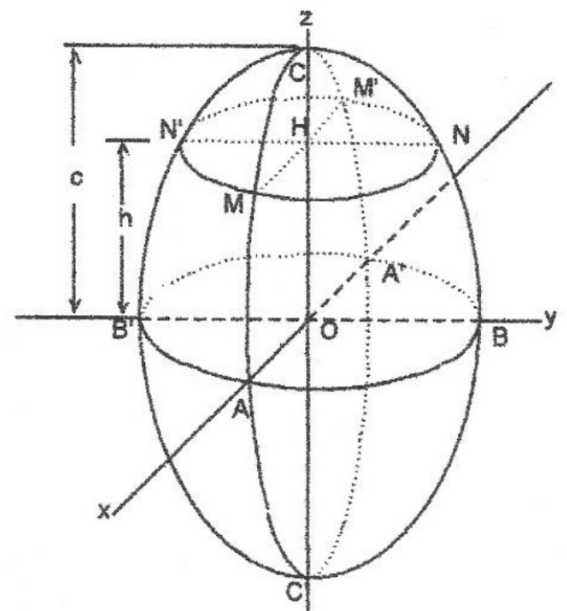
$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} \tag{Ec.20}$$

y, en ambos casos, el elipsoide está engendrado por la elipse meridiana (Marín, pp. 298-299 y p. 628).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{Ec.21}$$

En el contexto del problema que nos ocupa, los elementos geométricos necesarios son los siguientes: los planos de coordenadas, los ejes coordenados y el origen o centro del sólido de revolución. En el gráfico 4 se muestra un *elipsoide alargado* en la dirección **Z**.

Gráfico 4. Elipsoide alargado de revolución en torno al eje Z



En el *elipsoide alargado de revolución* en tomo al eje Z las intersecciones de la superficie con los planos principales **XOZ, YOZ y XOY**

que reciben el nombre de *secciones principales* y son, respectivamente, las siguientes elipses: **ABA'B'**, **BCB'C'** y **CAC'A'** de ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{Ec. 22})$$

La primera sección corta al eje OX en los puntos A (**a**, 0, 0) y A'(-**a**,0,0) y al eje OY en los puntos B (0, **b**,0) y B'(0, -**b**,0); la segunda corta al eje OY en los puntos B y B' anteriores y al eje OZ en los puntos C (0,0, **c**) y C'(0,0,-**c**). Y, por último, la tercera corta al eje OX en los puntos A y A' y al eje OZ en los puntos C y C'. Estos seis puntos se llaman *vértices del elipsoide*. Los segmentos **AA'**, **BB'** y **CC'** se llaman ejes principales y miden, respectivamente, **2a**, **2b** y **2c**; sus mitades OA=**a**, OB=**b** y OC=**c** son los *semiejes principales*. Las coordenadas de cualquier punto del elipsoide deben satisfacer las condiciones siguientes:

$$x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2, z^2 \leq c^2 \quad (\text{Ec. 23})$$

pues, en caso contrario, el primer miembro de la ecuación canónica (Ec.16) sería mayor que la unidad, y la superficie es interior al ortoedro determinado por los seis planos siguientes:

$$x = \pm a; y = \pm b; z = \pm c \quad (\text{Ec. 24})$$

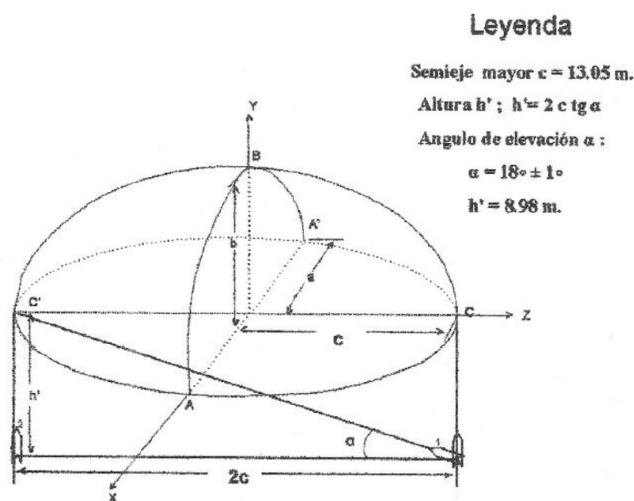
teniendo en común con ellos los seis vértices (Marín 1965, p. 297).

Método de cálculo

1. Para determinar el *semieje mayor c* se proyectaron los extremos del eje mayor sobre el piso del Salón de la siguiente manera: se hicieron incidir ortogonalmente los láseres en los extremos del eje, y una vez conocidos ambos extremos se procedió a medir por *triangulación*, la altura **h'** a la que se encuentra el plano

XZ, usando, para ello, el láser como se muestra en el gráfico 5.

Gráfico 5. Determinación de la altura **h'** del elipsoide horizontal principal de la bóveda*



* En la leyenda se indica para la altura **h'** del plano principal vertical del elipsoide un valor de 8,98 m.

2.. En el gráfico 6 se muestra cómo se procedió para determinar la *cupulina* de la bóveda elipsoidal horizontal.

A tal efecto, primero se obtuvo el centro del *eje mayor c*, y con la ayuda de los láseres se localizó el vértice de la siguiente manera:

2.1. Desde el centro del *eje mayor*, se hizo incidir ortogonalmente el punto de luz con el láser, identificado con **1** para el punto más alto del elipsoide o *cupulina*.

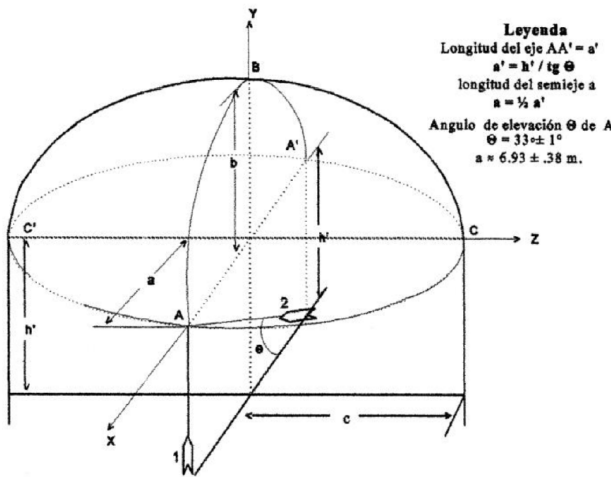
2.2. Con el segundo láser identificado con **2**, se obtuvo el ángulo β para la determinación, por triangulación, de la altura **h** a la que encuentra la *cupulina*.

2.3. Desplazando ortogonalmente el láser **1** sobre el mismo eje, tanto a la derecha como a la izquierda del centro del eje, distancias de **0,10 m**; **0,20 m** y **0,40 m** se midieron los ángulos que forman la lámpara de rayo láser **2** al incidir sobre el punto de luz del *rayo 1* y se determinó que la *altura mayor* correspondía al punto de

luz que incidía desde el centro del eje, cuyo valor fue de $h = (15,92 \pm ,10)$ metros y, de acuerdo, a este resultado se determinó la longitud del *semieje vertical* de la siguiente manera:

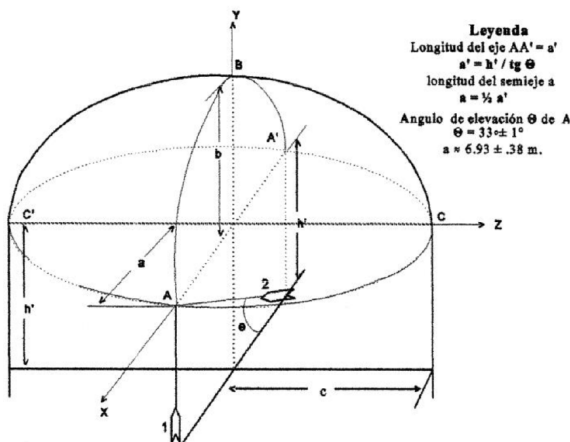
$$b = h - h' = (6,57 \pm 0,61) \text{ m}$$

Gráfico 6. Determinación de la altura h o distancia a la *cupulina* del elipsoide y la longitud del semi eje vertical b de la bóveda



3. Para la determinación del *semi eje mayor horizontal* a , se localizaron los puntos A y A' sobre la elipse, usando el láser en la forma indicada en el gráfico 7. Seguidamente, una vez

Gráfico 7. Determinación de la longitud del *semi eje horizontal* a de la bóveda



hecha la incidencia sobre el punto A, se determinaron los puntos referenciales de sus proyecciones y se midió el ángulo θ que formaba el rayo del láser 2 y según los valores obtenidos para diferentes ángulos, la longitud del semi eje menor fue:

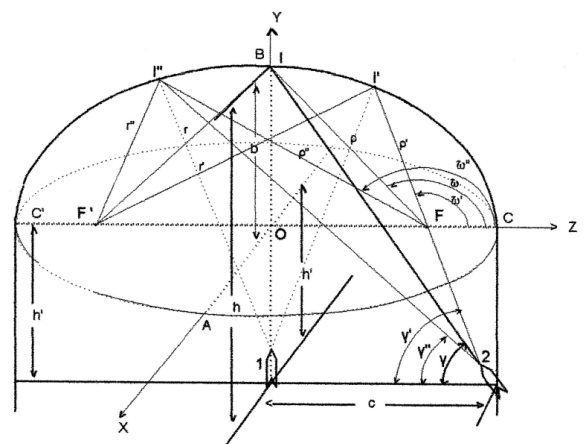
$$a = (6,93 \pm 0,39) \text{ metros}$$

Determinación del tipo de superficie de la bóveda

Para la determinación del tipo de superficie se tomaron tres puntos de la *semi-elipse meridiana vertical* CBC' cuya curva pasa por la *cupulina* B como se indica en el gráfico 8.

Para este fin se tomaron los ángulos γ, γ' y γ'' correspondientes a los puntos I, I' e I'' de la curva. Y haciendo una reconstrucción a escala 1:100 se obtuvieron los *ángulos areolares* ω, ω' y ω'' para los *radios vectores* ρ, ρ' y ρ'' de la cónica correspondiente, resultando así –como se observa en el gráfico 8– las distancias r y ρ que permiten conocer la condición de la elipse dada por la Ec. 3. Así pues, la *elipse meridiana vertical*, resultante de los valores mostrados en el gráfico 8, tiene según la Ec. 13 una excentricidad igual a:

Gráfico 8. Muestra el procedimiento seguido para determinar I, I' e I''



$$e = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} = 0,85 \pm 0,02$$

y el valor del parámetro de cónica según la Ec. 8 es el siguiente:

$$p = \frac{b^2}{c} = 3.669 \pm 0.03$$

Por cuanto ahora, en virtud de los ángulos areolares ω y los valores de e y p , se pueden contrastar los valores empíricos de p con los valores teóricos de p , obtenidos mediante la ecuación Ec. 2, tal quo para dichos valores se comprueba que se cumple la condición de la elipse dada por la Ec. 3. Además, con los valores de e y p se corrobora que la elipse meridiana es poco achatada, y las curvas de las secciones transversales son, consecuentemente, semi-circunferencias ya que $a \cong b$.

En consecuencia, como $c > a$, $c > b$ y $a \cong b$, se puede inferir que la bóveda del Salón Elíptico es un elipsoide de revolución alargado, donde sus dos ejes menores son, aproximadamente, iguales y la cónica meridiana es una elipse, con su eje mayor, colineal al eje OZ.

Ecuaciones para el cálculo del área

Dado que $a \cong b$, las variables x , z e y de la meridiana horizontal expresadas en término de las ecuaciones paramétricas estarán dadas (según Marín, 1965, p. 628) por:

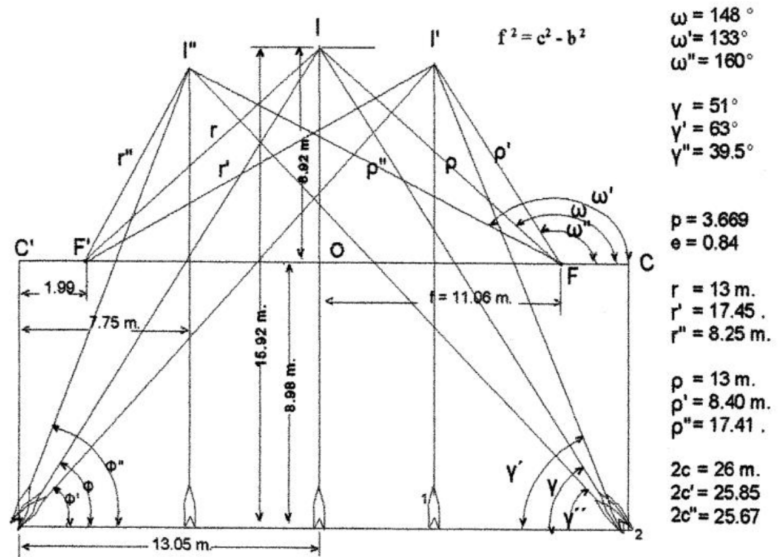
$$x = a \cos u, y = 0, z = c \cos u \quad (\text{Ec. 25})$$

pero sabiendo que $a < b$, entonces:

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2} \quad (\text{Ec. 26})$$

Y la *superficie* del *semi-elipsoide* estará expresada por la siguiente integral:

Gráfico 9. Reconstrucción de las medidas de la elipse en el plano meridional vertical



$$S'(a) = 2\pi a c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1 - (e \operatorname{sen} u)^2} du = 2\pi a c I_1 \quad (\text{Ec. 27})$$

donde $\pi a c$ es la superficie plana de la *elipse meridiana*, mientras que I_1 es la *integral elíptica* de segunda especie.

Haciendo, ahora el cambio de variable después de ciertas operaciones algebraicas se obtiene la ecuación exacta para la superficie del elipsoide de revolución dada por:

$$S(a) = \frac{\pi a c \times \arcsen e}{e} + \pi a^2 \quad (\text{Ec. 28})$$

Expresión que da el valor exacto de la superficie del *semi-elipsoide* como puede verse también en Granville et al. (1978, pp. 294 y 341) y Brand (1966, p. 463). Estos dos últimos autores difieren de Marín en la orientación de los ejes coordenados y, por consiguiente, en la Ec. 27, el factor $\cos u$ lo cambian por $\operatorname{sen} u$.

Ecuación para el cálculo del perímetro

Por último, la longitud del *arco total o perímetro* de la *elipse meridiana* estará dada según Marín (1965, p. 178) por la siguiente expresión:

$$P = c \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (e \operatorname{sen} u)^2} du \quad (\text{Ec. 29})$$

donde el integrando es una *integral elíptica de segunda especie* (Marín, p. 178).

Resultados

Inicialmente los cálculos matemáticos y estadísticos fueron realizados con los módulos de matemáticas y estadísticas de la calculadora 41CV, pero posteriormente corroborados con los paquetes de Mathcad 7.0 y SPSS 7.5. Así, para el cálculo del área de la bóveda se utilizó la Ec.

28, y para contrastar los resultados obtenidos por dicha ecuación con los de la integral elíptica dada por la Ec. 27 se utilizó la integración numérica de Romberg.

Los resultados a los que se arribó son el producto de un exhaustivo estudio de las mediciones con sus respectivos errores sistemáticos provenientes de la dificultad que presentó el decorado que bordea la línea de la elipse meridiana horizontal.

En lo referente a los ángulos medidos con transportadores de precisión, se consideró un error de un grado (1°) en todas las mediciones en las que se utilizaron los láseres.

Para calcular el área del elipsoide se recurrió en primera instancia, a la expresión exacta dada por la Ec. 28, con la que se obtuvieron cada uno de los valores asentados en el cuadro 1 y de todos ellos resultó el siguiente valor:

$$S (476,76 \pm 9\%) \text{ m}^2$$

Cuadro 1. Se muestran los valores de los ángulos α , β y θ para los semiejes a, b y c con los correspondientes valores de las superficies

		$\beta_1=49$			$\beta_2=50$			$\beta_3=51$		
		$\theta_1=32$	$\theta_2=33$	$\theta_3=34$	$\theta_1=32$	$\theta_2=33$	$\theta_3=34$	$\theta_1=32$	$\theta_2=33$	$\theta_3=34$
Eje b	$\alpha_1=18$	$b_1=6.53$	$b_2=6.53$	$b_3=6.53$	$b_4=7.07$	$b_5=7.07$	$b_6=7.07$	$b_7=7.64$	$b_8=7.64$	$b_9=7.64$
	$\alpha_2=19$	$b_{10}=6.03$	$b_{11}=6.03$	$b_{12}=6.03$	$b_{13}=6.57$	$b_{14}=6.57$	$b_{15}=6.57$	$b_{16}=7.13$	$b_{17}=7.13$	$b_{18}=7.13$
	$\alpha_3=20$	$b_{19}=5.51$	$b_{20}=5.51$	$b_{21}=5.51$	$b_{22}=6.05$	$b_{23}=6.05$	$b_{24}=6.05$	$b_{25}=6.62$	$b_{26}=6.62$	$b_{27}=6.62$
eje a	$\alpha_1=18$	$a_1=6.79$	$a_2=6.53$	$a_3=6.29$	$a_4=6.79$	$a_5=6.53$	$a_6=6.29$	$a_7=6.79$	$a_8=6.53$	$a_9=6.29$
	$\alpha_2=19$	$a_{10}=7.19$	$a_{11}=6.92$	$a_{12}=6.66$	$a_{13}=7.19$	$a_{14}=6.92$	$a_{15}=6.66$	$a_{16}=7.19$	$a_{17}=6.92$	$a_{18}=6.66$
	$\alpha_3=20$	$a_{19}=7.60$	$a_{20}=7.31$	$a_{21}=7.04$	$a_{22}=7.60$	$a_{23}=7.31$	$a_{24}=7.04$	$a_{25}=7.60$	$a_{26}=7.31$	$a_{27}=7.04$
Superficie $S(b)$		$S_1=478.5$	$S_2=457.6$	$S_3=438.6$	$S_4=478.5$	$S_5=457.6$	$S_6=438.6$	$S_7=478.5$	$S_8=457.6$	$S_9=438.6$
		$S_{10}=511.1$	$S_{11}=489.0$	$S_{12}=468.0$	$S_{13}=511.1$	$S_{14}=489.0$	$S_{15}=468.0$	$S_{16}=511.1$	$S_{17}=489.0$	$S_{18}=468.0$
		$S_{19}=545.3$	$S_{20}=521.1$	$S_{21}=498.8$	$S_{22}=545.3$	$S_{23}=521.0$	$S_{24}=498.8$	$S_{25}=545.3$	$S_{26}=521.0$	$S_{27}=498.8$
Superficie $S(a)$		$S_1=475.6$	$S_2=475.6$	$S_3=475.6$	$S_4=501.3$	$S_5=501.3$	$S_6=501.3$	$S_7=548.6$	$S_8=547.6$	$S_9=548.6$
		$S_{10}=418.2$	$S_{11}=418.2$	$S_{12}=418.2$	$S_{13}=460.8$	$S_{14}=460.8$	$S_{15}=460.8$	$S_{16}=506.2$	$S_{17}=506.2$	$S_{18}=506.2$
		$S_{19}=378.2$	$S_{20}=378.2$	$S_{21}=378.2$	$S_{22}=419.8$	$S_{23}=419.8$	$S_{24}=419.8$	$S_{25}=464.8$	$S_{26}=464.8$	$S_{27}=464.8$

Fuente: elaboración propia.

En segundo lugar, el área se determinó por integración numérica según el método de Romberg (Mathcad Plus 5.0, p. 225; véase también Mathcad 8, p.164) para los mismos valores de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , y se obtuvieron los mismos resultados como se puede apreciar en los cuadros 2 y 3.

Ahora bien: si consideramos la media como el valor más probable estadísticamente, entonces el área de la bóveda podría estar alrededor de los 477 m², resultado que los restauradores consideraron razonable. El cuadro 1 de doble entrada compuesta que se muestra a continuación, contiene los ángulos a partir de los cuales se obtienen las medidas de los semiejes principales; en el cálculo del *semieje vertical b* intervienen los errores cometidos en la medición de los ángulos α y β , mientras que para el cálculo del *semieje menor horizontal a* intervienen los errores cometidos en el ángulo α y θ ,

dada la dificultad de medir directamente sobre su proyección en el piso del salón, además de la propagación de cierto error debido al hecho de que el eje \mathbf{a} se calculó en función de los 54 valores de la superficie \mathbf{S} dados en el cuadro 1, se contrastaron con los 54 valores obtenidos de 6 cuadros del mismo tipo de los cuadros 2 y 3 de doble entrada compuesta.

Para el cálculo del área de la superficie por integración numérica se usó la Ec. 27. Es de hacer notar que, para simplificar el cálculo, se observó que las matrices 3x3 del eje \mathbf{b} correspondientes a los ángulos son iguales columna a columna, pero diferentes matriz a matriz, y por esta razón se construyeron los cuadros iguales al cuadro 2. En cambio, para el eje \mathbf{a} las matrices 3x3 son iguales para β y por esta razón se construyeron cuadros iguales al cuadro 3. En este caso particular se muestran los cálculos

Cuadro 2. Muestra los valores de los ejes b y c, la excentricidad e2, la integral Ii y las superficies S'(b)

c	b									
	e ²	6.53	6.03	5.51	7.07	6.57	6.05	7.64	7.13	6.62
13.05	I _i									
		.75	.79	.82	.71	.75	.76	.66	.70	.74
		.85	.85	.84	.87	.86	.85	.88	.87	.86
	2π b.c.I _i	457.53	418.21	378.2	501.28	460.82	419.77	548.62	506.2	464.82

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 3. Muestra los valores de los ejes a y c, la excentricidad e2, la integral Ii y las superficies S'(a)

c	a									
	e ²	6.79	6.53	6.29	7.19	6.92	6.66	7.60	7.31	7.04
13.05	I _i									
		.72	.75	.77	.70	.72	.74	.66	.69	.71
		.86	.86	.85	.87	.86	.86	.87	.87	.86
	2π a.c.I _i	478.50	457.63	438.59	511.14	489.04	468.03	545.26	521.05	498.82

Fuente: elaboración propia.

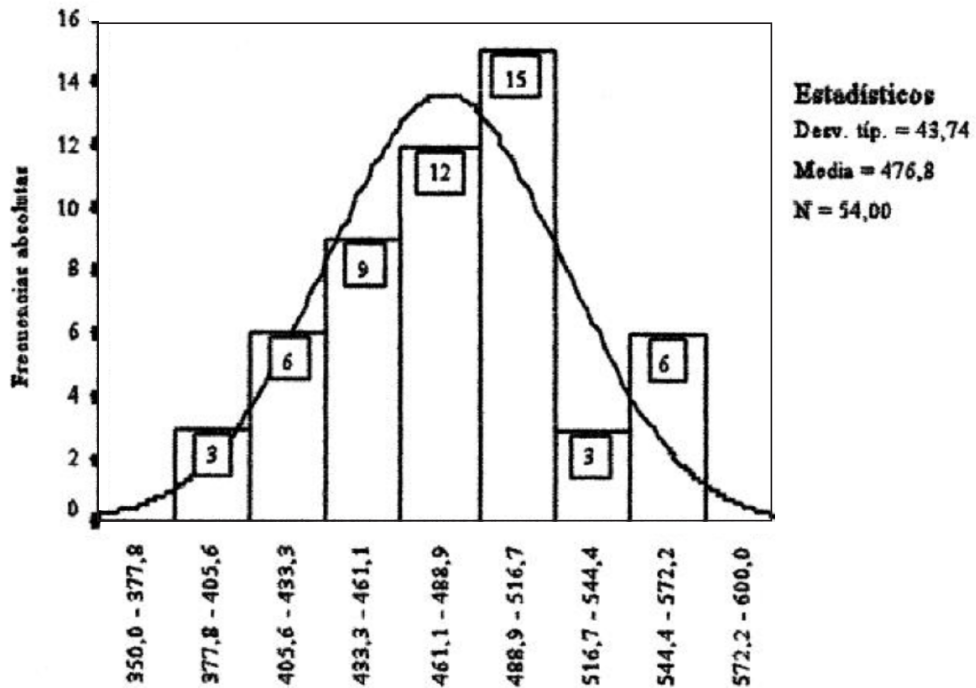
de S' para los valores de b y a del cuadro 1 en virtud de las ternas $(\alpha_p, \theta_p, \beta_1)$; $(\alpha_2, \theta_p, \beta_1)$ y $(\alpha_3, \theta_p, \beta_1)$. Las tres ternas siguientes serían las correspondientes a $(\alpha_p, \theta_p, \beta_2)$, $(\alpha_2, \theta_p, \beta_2)$ y $(\alpha_3, \theta_p, \beta_2)$ y después las ternas $(\alpha_p, \theta_p, \beta_3)$, $(\alpha_2, \theta_p, \beta_3)$ y $(\alpha_3, \theta_p, \beta_3)$, y así sucesivamente se obtienen las restantes ternas. Al respecto, resultan 3 cuadros iguales al cuadro 2, y procediendo similarmente para los valores del eje a resultan 3 cuadros más como el cuadro 3. En dichos cuadros se muestran tanto los valores de c , b , e^2 , los valores del integrando I_i y los de la superficie S' . Inicialmente, los cálculos se realizaron con la calculadora HP 41CV creando subrutinas para el integrando de la Ec. 27 acoplables al módulo de matemáticas; pero posteriormente se comprobaron con el paquete Mathcad 7 0, con el que la parte entera resultó ser igual para todos, pero

la parte decimal difirió en algunos casos, dada la exactitud del método de Romberg.

El tratamiento estadístico fue realizado con el programa SPSS 6. 1 y 7.5, y para efecto de la contrastación, se utilizó el modelo normal para contrastar la distribución empírica (histograma) de los 54 valores de la superficie $S(a)$ y $S(b) = 2\pi \cdot a \cdot c \cdot I_i$, asentados en el cuadro 1, con el modelo probabilístico normal o gaussiano (campana de Gauss) como se puede apreciar en el gráfico 10.

Para probar el ajuste entre los valores empíricos y los predichos por el modelo normal, se utilizó el modelo χ^2 (chi cuadrado) que, en nuestro caso particular, se tomó para $\alpha = 0.05 = (5\%)$ y el número de grados de libertad ($r = k-m-1$) se tomó igual a 6, ya que, el número de intervalos (k) en consideración es 9, y el número

Gráfico 10. Contrastación teórico empírica contrastada. Histograma y gaussiana.



ro de parámetros (\mathbf{m}) es 2 (*la media* y la *desviación típica*).

Para determinar las *frecuencias absolutas* teóricas \mathbf{v}_i predichas por el modelo gaussiano se procedió según Linares (1994, pp. 35-40), y resultaron ser para 9 clases los siguientes valores 1, 2, 7, 13, 16, 14, 8, 3, y 1 respectivamente, con los valores teóricos \mathbf{v}_i y los empíricos \mathbf{n}_i —mostrados en las etiquetas del histograma—, el χ^2 empírico, según la expresión de Pearson dada por:

$$\chi^2_{emp.} = \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{n}_i - \mathbf{v}_i)^2}{\mathbf{v}_i}$$

resulta, en virtud de los valores antes mencionados, igual a $\chi^2 = 12,57$, mientras que para 5% y $r = 9$ dio un valor de 12,59, con lo cual:

$$\chi^2_{emp.} < \chi^2_{teó.}$$

y, por tanto, puede afirmarse que la distribución empírica se ajusta al modelo normal, luego los estadísticos de dicha muestra son razonablemente aceptables. Como complemento de confirmación de esta aseveración se exploraron los valores de la muestra con el modelo de cajas de Tukey para conocer los valores atípicos y la homogeneidad de la muestra \mathbf{S} y, a su vez, compararlos con los de muestra \mathbf{S}' . Es conveniente aclarar que el diagrama de cajas de Tukey, aunque se considera una representación semigráfica para mostrar y señalar los posibles datos atípicos, es también útil para conocer algunas características de la distribución. Este modelo está basado en el primer grupo de la familia de los centiles posicionales o percentiles o sea el grupo de los cuartiles, que dividen la muestra en cuatro partes aproximadamente iguales, donde el primer cuartil ($X_{.25}$) es, por definición, el percentil de posición a partir del cual el 25% de los valores de la muestra son menores o iguales que él; el segundo cuartil es la media-

na ($X_{.50}$) y el tercero ($X_{.75}$), a partir del cual el 75% de los valores son menores o iguales que él. Estas medidas son conocidas como las *bisagras de Tukey*. Toda la familia de los centiles, se basan en los datos ordenados para construir medidas de dispersión, como es el caso de la *amplitud intercuartílica o recorrido intercuartílico* (Δ), que es la diferencia, $X_{.75} - X_{.25} = \Delta$. Especialmente para el modelo de cajas, los límites admisibles superior e inferior, se calculan por las siguientes relaciones:

$$l_s = X_{.75} + 1.5 \Delta$$

$$l_i = X_{.25} - 1.5 \Delta$$

Así pues, toda observación ubicada fuera de estos límites o del intervalo definido por estos límites es considerada atípica. Una razón de peso para utilizar las *medidas de posición* es que la *mediana* $X_{.50}$ como *medida de centralización* y el *recorrido intercuartílico* Δ como *medida de dispersión*, al depender del orden de los datos y no de su magnitud, influyen poco en los valores que resulten atípicos. Por ejemplo, una circunstancia frecuente está en la transcripción de los datos y en este caso, al cometer dos o tres errores de transcripción, la *media* y la *desviación típica* pueden llegar a cambiar mucho, pero su influencia sobre la *mediana* y los *cuartiles* sería pequeña. Por consiguiente, si hay una pequeña fracción de valores atípicos en la muestra, los *cuartiles* variarán poco y pueden ayudarnos para identificar cuáles son los valores extremos, en cambio, si llegasen a presentarse muchos valores atípicos, entonces la *media* se alejará de la *mediana*, pero en la dirección de estos valores extremos. El caso nuestro, como puede verse en el gráfico 11, sólo presenta tres valores atípicos menores que el *extremo inferior* l_i , que son el 19, 20 y 21 del cuadro I, y todos son iguales a 378,2 m². El resto de los valores están dentro los límites establecidos por el modelo, donde la *media* y la *mediana* están próximas entre sí, como pue-

de verse en el gráfico 11 por esto la muestra se puede considerar bastante homogénea como se puede apreciar en el gráfico 12.

Para los valores de la **muestra S'**, iguales a los de los cuadros 2 y 3, el caso es exactamente el mismo que el de la **muestra S** como se puede apreciar en el gráfico 12.

También se utilizaron otras pruebas exploratorias de normalidad, como por ejemplo la **prueba de normalidad** Q-Q, donde se puede apreciar la linealidad entre los valores de la muestra y la **línea de normalidad** Q-Q, tal cual se muestra en el gráfico 12.

Gráfico 11. Contrastación de los valores S y S' con el modelo de Tukey

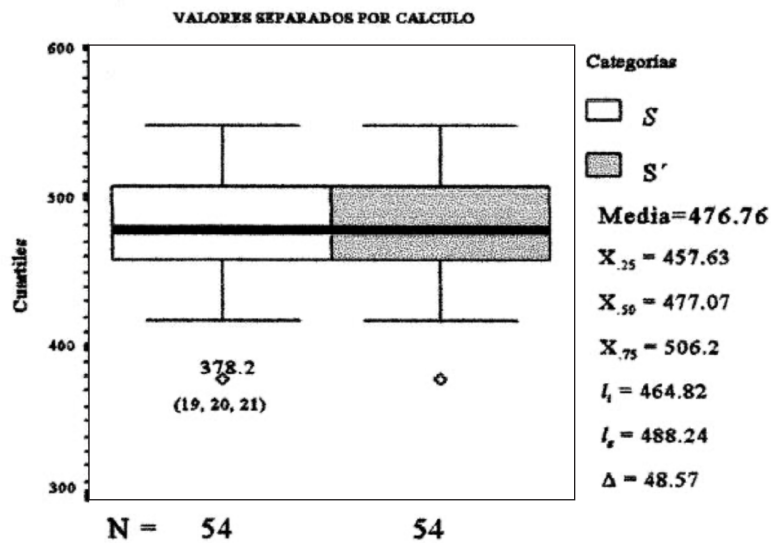
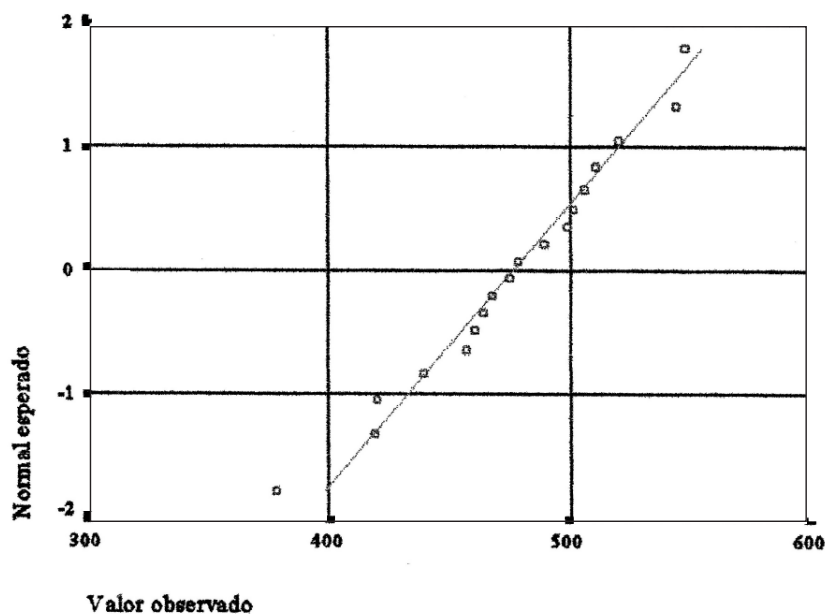


Gráfico 12. Muestra el ajuste lineal en la prueba de normalidad Q-Q para $S \cong S'$



Finalmente se consideró el intervalo de confianza para la media al 95% y dio el siguiente valor:

$$(464,82; 488,7) \text{ m}^2$$

por lo cual, la *media recortada* al 5% fue de **478,24 m²** que resulta de eliminar el 5% de los valores por encima y por debajo de los extremos del *intervalo de confianza*, valor que es mayor en una unidad que el sugerido de **476,76 m²**.

Discusión de los resultados

Las limitaciones para obtener una mejor aproximación al valor real de la superficie estuvo, sin lugar a dudas, en el decorado que cubre las lámparas de iluminación de la pintura, pues cuando se apuntaba con el haz rasante al borde

del decorado, se cometía un error hacia arriba de un grado; en cambio cuando se apuntaba a la parte inferior del decorado no se podía ver donde comenzaba la pintura y, por consiguiente, se consideraba un error hacia abajo de un grado respecto al ángulo de elevación del láser, por estas razones es que se tomaron variaciones de un grado en los *ángulos de elevación*. Luego, si la *perimetral de la elipse*, dada por la ecuación Ec. 29, mide aproximadamente 64 metros, entonces una franja de 28 cm de ancho tendría unos 18 m² de superficie, resultado que se obtiene al cambiar en la Ec. 27 el límite $\pi/2$ por $\pi/100 = 2^\circ$, de ahí que el error estándar no haya sido inferior a 9%, pues de haber podido precisar con mayor exactitud los límites del decorado, nuestros resultados hubiesen tenido una distribución posiblemente más *leptocúrtica*.

Referencias bibliográficas

- Brand, L. (1966). *Cálculo avanzado*. 2ª ed. Ed. Continental. México.
- Granville, W.A.; Smith, P. y Longley, R. (1978). *Cálculo diferencial e integral*. UTEHA, Barcelona.
- Lehmann, Ch. (1984). *Geometría analítica*. 6ª ed. Ed. Limusa. México.
- Linares S., R. (1994). *Prácticas de Laboratorio de física. Guía de referencia*. Ed. Imprenta IPC, Caracas.
- Marín T., J.A. (1965). *Ampliación de matemáticas para técnicos*. 7ª ed. Ed. SAETA, Madrid.
- Mathcad Plus 5. *User's guide Mathsoft*. Massachusetts. USA.
- Mathsoft Mathcad 8 (1999). *Manual del usuario*. Ed. ANAYA. Madrid.
- Peña, D. (1995). *Estadística. Modelos y métodos*. 1 fundamentos. 2ª ed. Ed. Alianza Universidad Textos. Madrid.
- Protter, M., y Morrey, C. (1980). *Cálculo con geometría analítica*. 2ª Ed. Fondo Educativo Interamericano. México.
- Snedecor, G. W and Cochran, W. G. (1967). *Statistical Methods*. The Iowa State University Press.
- Visauta V., B. (1997). *Análisis estadístico con SPSS para Windows*. McGraw Hill, Madrid.