

Funciones Sigmoideas en Medicina

Sigmoid functions in Medicine

Giuseppe Lanza-Tarricone

RESUMEN

La función sigmoide forma parte de la modelación matemática y se utiliza en investigaciones de múltiples disciplinas. La matemática permite objetivar ciertos problemas médicos y darles una solución razonable aplicable en la realidad. La función sigmoide, con su gráfica en "S" característica, se relaciona con una fase de latencia, una de aceleración y otra de saturación. El objetivo de este trabajo es presentar la utilidad de este tipo de funciones en medicina, con aplicaciones en diversos ámbitos: bioestadística, enfermedades infecciosas, epidemiología, epidemias, farmacología, entre otros. Para su desarrollo se presentan aspectos desde la prehistoria y los antecedentes históricos, los tipos de curvas sigmoideas y se culmina con la presentación práctica de sigmoideas en medicina.

Palabras clave: Modelo matemático, función sigmoidea, matemática y medicina

SUMMARY

The sigmoid function is a fundamental tool in mathematical modeling and is used in research across multiple disciplines. Mathematics enables us to formalize certain medical problems and provide reasonable solutions applicable to real-world situations. The sigmoid function, with its characteristic S-shaped graph, involves a latency phase, an acceleration phase, and a saturation phase. The objective of this work is to demonstrate the utility of this type of function in medicine by applying it to topics such as biostatistics, infectious diseases, epidemiology, epidemics, and pharmacology, among others. The paper presents aspects of prehistory, historical background, and types of sigmoid curves, and culminates with a practical application of sigmoid curves in Medicine.

Keywords: Mathematical model, sigmoid function, mathematics and medicine

ORCID:

[0009-0009-8135-9800](https://orcid.org/0009-0009-8135-9800)

Profesor Jubilado de la Universidad Nacional Abierta (Caracas - Venezuela). Miembro de la Sociedad Venezolana de Cardiología. Directivo de la Fundación DIABEM, San Martín (Caracas, Venezuela)

Correspondencia: Giuseppe Lanza-Tarricone. E-mail: giulanzata@gmail.com

Recibido: 30 de enero 2026

Aceptado: 4 abril 2026

INTRODUCCIÓN

La medicina no es una ciencia pura, sino una ciencia aplicada de síntesis. Se dice que es multidisciplinaria e interdisciplinaria porque dispone de otras áreas del conocimiento para integrarlas en su propio núcleo. Esta premisa tiende a difundirse con mucha rapidez en otras disciplinas. Las ciencias se interconectan en el universo de la sabiduría y de la vida misma.

La medicina moderna no implica solamente estar al lado del paciente, imprescindible, sino también vislumbrar los pilares que la sustentan. Podemos enumerar tres grandes áreas que convergen en un punto: las ciencias exactas,

las biológicas y las humanas. La medicina se va desarrollando como una ciencia en constante expansión. Se imbrica con otras ramas de la actuación científica, como la ingeniería biomédica, la informática y las ciencias de datos, la medicina legal y la bioética, entre otras.

El concepto de “Interdisciplinariedad” (1) facilita aplicar los conocimientos de otras áreas a los problemas específicos que debe resolver y comprender. El concepto de “multidisciplinariedad” aporta estructuras, valoraciones y métodos desde su propio ángulo de visión y explora la medicina mediante su metodología particular. Esta ruptura de fronteras (transdisciplinariedad) encuentra su lenguaje natural en la matemática. En este marco, las funciones sigmoideas no son solo fórmulas, sino también herramientas que permiten modelizar desde el crecimiento de un tumor hasta la respuesta a un fármaco.

Habiendo realizado este análisis preliminar, se pretende aplicar el concepto de “interdisciplinariedad” al desarrollo de un tema específico en el campo de la matemática, como lo son las funciones sigmoideas. Funciones de gran utilidad en biología y medicina. Entre los diferentes tipos de funciones sigmoideas, destacan la curva logística y la de Hill para el análisis de los temas a presentar. La representación gráfica de manera general (Figura 1) destaca la forma de “S”, característica de procesos con saturación.

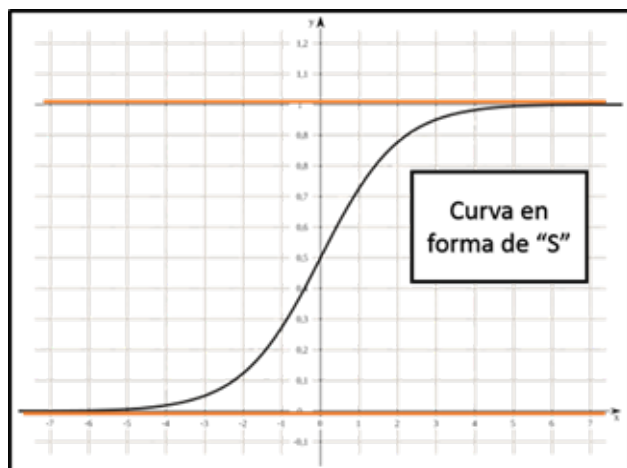


Figura 1. Curva sigmoidea

El desarrollo del temario implica una acción interdisciplinaria de gran utilidad, lo cual se ha demostrado en múltiples investigaciones publicadas en diversas revistas. La medicina y la matemática no son disciplinas separadas; son, en realidad, dos lenguajes que intentan describir la misma complejidad: la vida. El desarrollo de esta unión ha pasado de simples estadísticas de mortalidad a la creación de “gemelos digitales” de los pacientes.

La matemática y la física, a lo largo de las distintas etapas históricas, han sido y son importantes herramientas en medicina. Permiten formar nuevos conceptos y establecer nuevas jerarquías en la clasificación de las estructuras. Bajo la tutela de la multidisciplinariedad, sirven de puentes y de conexiones entre las diferentes ciencias para propiciar un cambio de concepto en la medicina (2).

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA EN EL TIEMPO HISTÓRICO

Es fascinante cómo los médicos antiguos intentaban estructurar el caos de la enfermedad mediante conceptos de orden, medida y proporción. Aunque no usaran álgebra moderna, su búsqueda de un “rigor” casi geométrico para validar la medicina como una verdadera técnica (arte/ciencia) es el cimiento de nuestro pensamiento científico. Interesa especialmente ver cómo Hipócrates articula esa transición de una medicina basada en la superstición a otra basada en la observación de variables cuantificables, como el tiempo en los días críticos o el equilibrio de los humores, y cómo esta se convierte en la Teoría de los Humores (3) como sistema de equilibrio: ¿cómo se aplicaba la idea de “proporción justa”? La importancia de la temporalidad: ¿cómo se calculaban los “días críticos” en el progreso de una enfermedad? La precisión técnica: ¿qué tipo de “medidas” o estándares usaba el autor para diferenciar la medicina de la simple suerte?

Para los hipocráticos, la salud no era un estado estático, sino un equilibrio dinámico llamado “krisis” (mezcla), referido a una mezcla

armoniosa de los cuatro humores (sangre, flema, bilis amarilla y bilis negra) que componen el cuerpo, siendo la salud la “krisis” perfecta y la enfermedad un desequilibrio o desproporción humoral. La misión del médico era ayudar a restaurar esta mezcla mediante dieta, estilo de vida o tratamientos, promoviendo la naturaleza (physis) en su esfuerzo por la perfección, siempre con observación y prudencia.

El concepto de enfermedad surge cuando un humor se “aisla” o se vuelve “monárquico” (domina sobre los demás). Hipócrates fue de los primeros en desplazar las explicaciones sobrenaturales de las enfermedades, proponiendo que el entorno (dieta, clima, estilo de vida) afectaba directamente el balance de estos fluidos. La curación consiste en restablecer la isonomía (igualdad de derechos y de proporción) entre las potencias. Aquí se intuye un “criterio de medida”, en el sentido de que el cuerpo tiene su propia exactitud. No existe un instrumento para determinar el exceso de bilis o la deficiencia de alguno de los humores acumulados. Ese patrón de medida es más bien lo que el paciente siente y expresa, y es el médico quien debe buscar, de alguna forma, la “tensión justa” para lograr ese equilibrio tan deseado.

La enfermedad se percibe como un proceso que el cuerpo debe realizar para equilibrar los humores. Los cambios no se producen al azar, sino en períodos determinados, como los días críticos: siete y sus múltiplos (matemática del tiempo). Esta periodicidad es un intento de aplicar una estructura numérica al tiempo biológico. La isonomía es un equilibrio de fuerzas para mantener la salud; la monarquía es el predominio de un solo factor que permite identificar la causa del problema. El cambio deseado es la precisión en el ajuste de las “dosis” para no dañar por exceso ni por defecto.

La teoría de los “días críticos” (4) estaba en consonancia con el concepto de crisis y lo relacionaba con la serie numérica “4, 7, 11, 14, 17 y 21”; si la crisis se producía en un “día impar” fuera de dicha serie, se consideraba de mal pronóstico. Ese número “7” es de influencia pitagórica y se considera un número perfecto.

Relacionaban microcosmos con macrocosmos en el estudio de los fluidos corporales, sin que existiera una relación lineal entre los síntomas de las enfermedades. Policeto definió matemáticamente la belleza y la salud como una relación armónica entre las partes del cuerpo (por ejemplo, que la cabeza fuera $1/7$ de la altura total).

Hipócrates (en su escuela de Cos) enseñaba la complejidad de la asistencia a un paciente mediante proporciones y ciclos (geometría y ritmo), enfocándose en cómo evoluciona la enfermedad a través de la visión del cuerpo como un sistema de flujos en equilibrio. En cambio, en la escuela de Cnido (matemática de la clasificación) querían hacer una medicina tipo catálogo; intentaron desglosar cada órgano según el número de enfermedades que podría presentar. El método consistía en enumerar los síntomas y catalogar la enfermedad como un conjunto de piezas que faltaban. La escuela de Cnido es el ancestro de los manuales de diagnóstico modernos como el DSM-5 (Manual de Trastornos Mentales), mientras que la teoría de los días críticos (escuela de Cos) representa una concepción de la cronobiología en la que el número “7” tenía cierto poder mágico.

Si en Grecia la medicina buscaba la proporción filosófica, en Egipto era una extensión de su matemática administrativa y práctica. Los egipcios no separaban el cuerpo de la geometría con la que medían sus tierras. La medicina y la matemática egipcia se funden para desarrollar “una matemática médica”. El ojo de Horus (5,6) era un símbolo místico utilizado para la protección y la prosperidad, derivado del mito de Isis y Osiris. Se convirtió en un sistema de fracciones geométricas para la prescripción de medicamentos. Cada parte del “Ojo” representaba una fracción basada en potencias de 2:

- Lado derecho del ojo: $1/2$
- Pupila: $1/4$
- Ceja: $1/8$
- Lado izquierdo: $1/16$
- Cola curva: $1/32$
- Lágrima: $1/64$

La suma total es 63/64. Los egipcios creían que la fracción faltante (1/64) era la “magia” o la intervención de Thot. Cuando un médico egipcio medía granos o líquidos para una opción, usaba estas fracciones del ojo para asegurar la “perfección” de la dosis.

A diferencia de otras culturas, los egipcios (7) (como se ve en el Papiro Ebers) entendieron que el corazón era el centro de un sistema de canales. El médico egipcio “medía” el pulso (metrónomo del cuerpo), no solo para saber si el paciente estaba vivo, sino también como indicador de la cantidad de sangre. Veían al cuerpo como el Nilo; si los canales se obstruían o el flujo no era constante (medible), la “tierra” (el cuerpo) enfermaba. Es una visión hidráulica y cuantitativa: la matemática del flujo.

Para los egipcios, el cuerpo humano tenía una cuadrícula fija (canon de proporciones de la anatomía geométrica). En sus relieves y en su práctica médica, el cuerpo siempre medía 18 puños (o unidades) desde los pies hasta el nacimiento del pelo. Esta “matematización” del cuerpo permitía a los cirujanos saber exactamente dónde realizar incisiones basándose en proporciones estándar, algo que vemos en el Papiro de Edwin Smith (el tratado de cirugía más antiguo del mundo, aproximadamente 1600 a. C.) (8). Tenía un carácter racional y científico.

Lo que hace “matemático” al Papiro no son solo los números, sino también su estructura algorítmica para llevar a cabo “un diagrama de flujo”. Es un protocolo lógico de “si ocurre A, entonces haz B”. Organiza sus 48 casos de manera ordenada y clasifica los diagnósticos en categorías (curable, dudosa, incurable), así como los tratamientos (acción física o quirúrgica). Se aplicaba la geometría a la cirugía mediante el principio de la palanca y el sentido de “alineación”, con precisión geométrica, para reducir fracturas.

La medicina griega se enfocaba en el equilibrio (proporcional y estético), la mezcla de elementos (humores) y la observación de ciclos (días críticos). La medicina egipcia se enfocaba en la práctica de fracciones y dosis exactas, en la unidad de partida (ojo de Horus), en el conteo

o la medida del pulso y en la proporcionalidad anatómica en sus cánones de cirugía.

La maestría egipcia, en su estructura lógica, y la curiosidad teórica griega encuentran un “choque” conceptual y práctico en Alejandría. Los egipcios llevaban milenios abriendo cuerpos para momificar (un tabú para los griegos) y los griegos llegaron con su geometría de Euclides. El resultado fue el nacimiento de la anatomía científica. Aquí se presentan los puntos en los que la matemática y la medicina se fusionaron. Herófilo de Calcedonia (330-250 a.C.) es considerado el primer anatomista (9). Fue el pionero en realizar disecciones humanas sistemáticas en la Escuela de Alejandría, lo que le permitió corregir muchos errores de la medicina hipocrática y describir estructuras que aún llevan su nombre.

Herófilo identificó que el cerebro (y no el corazón, como creían los egipcios y Aristóteles) era el centro de la inteligencia y el sistema nervioso. Fue el primero en distinguir entre nervios motores y sensoriales, diferenciar la estructura de las arterias, que eran más gruesas que las venas, y notar que las arterias pulsan. Usó una clepsidra (un reloj de agua) para medir la frecuencia cardíaca de sus pacientes (10).

Herófilo destacaba el concepto de “ritmo”, mientras que Erasístrato analizaba el concepto dinámico de “flujo” (11). Fue el primero en aplicar la física y la neumática al cuerpo humano. Según la física de su tiempo, creía que, si la sangre se movía, era para llenar un vacío. Intentó explicar la circulación como un sistema de presiones y de tuberías. Realizó uno de los primeros experimentos metabólicos documentados. Pesó a un pájaro en una jaula, dejó de alimentarlo y lo volvió a pesar después de un tiempo, atribuyendo la pérdida de peso a “emanaciones invisibles”. Fue el primer intento de cuantificar los procesos metabólicos.

Los médicos alejandrinos, al diseccionar corazones, apreciaron la ingeniería al describir las válvulas del corazón (como la tricúspide) con términos geométricos. Entendieron que la forma de la válvula determinaba la dirección única del flujo, un concepto que proviene directamente de

la mecánica de fluidos egipcia, empleada en sus sistemas de riego.

La época romana

Con los romanos, con su enfoque pragmático (12), se produce un salto a otro nivel: aplicaron la matemática a la infraestructura de salud pública y a la medicina militar. Es conocida la Enciclopedia de Cornelio Celso, que describe los signos de la inflamación: calor, rubor, tumor o hinchazón y dolor. Se destacaron por la aplicación de cálculos hidrodinámicos en la construcción de los acueductos y del sistema de alcantarillado (Cloaca Máxima). Entendieron matemáticamente que la cantidad de agua limpia por habitante disminuía la tasa de mortalidad, aunque no conocieran los microbios. Los hospitales militares tenían una geometría de rejilla diseñada para optimizar la ventilación y el movimiento de los médicos, una aplicación de la eficiencia espacial a la sanación.

Los médicos del ejército romano (*medici*) usaban la aritmética para gestionar los hospitales de campaña (*valetudinaria*). Calculaban la proporción de médicos por legión y el inventario de suministros necesarios para campañas de larga duración (sentido de la estadística). Galeno de Pérgamo (13) fue el médico de varios emperadores (como Marco Aurelio) y el autor más prolífico de la antigüedad, destacándose por la demostración experimental y por definir la tríada de órganos vitales (corazón, cerebro, hígado). Refinó la farmacología egipcia y griega creando sistemas de pesas y medidas precisos para las “Triacas” (antídotos complejos), asegurando que la mezcla química fuera siempre la misma. Se empezaron a usar balanzas de precisión para mezclar hasta 70 ingredientes diferentes. El *receptus* médico pasó a ser una receta de “aritmética exacta”.

Galeno usaba la lógica de manera magistral, pero cometió un error por su necesidad de que el cuerpo fuera “geométricamente perfecto”. Galeno sabía que la sangre pasaba del lado derecho al izquierdo del corazón. Como no podía ver la circulación pulmonar, dedujo lógicamente que debían existir poros invisibles en la pared central del corazón (el tabique). Durante 1.500 años, los

médicos “vieron” esos poros en las disecciones porque la autoridad del sistema de Galeno era tan coherente matemáticamente que nadie se atrevía a dudar. Si el sistema de grados y flujos funcionaba, el poro tenía que estar ahí por necesidad lógica.

Esta Matemática del Error (14), que duró 1500 años, tuvo una consecuencia: se bloqueó el descubrimiento de la circulación sanguínea hasta que llegó el Renacimiento, porque se prefería la “perfección del papel” a la realidad del cuerpo. El error de Galeno no fue de razonamiento, sino de fuente. Al no poder diseccionar humanos, asumió que la arquitectura interna de los primates era idéntica a la nuestra, lo que generó dogmas médicos incorrectos:

- Describió una compleja red de vasos sanguíneos en la base del cerebro humano donde el “*pneuma vital*” se transformaba en “*pneuma animal*”. El error: esta estructura existe en ungulados (vacas y ovejas), pero no en los humanos; en consecuencia, se creyó en esta red inexistente hasta que Andreas Vesalio la desmitificó en 1543.
- Presentó al útero humano con dos “cuernos” o cavidades laterales, basándose en sus disecciones de perras y cerdas. El error: el útero humano es simple (piriforme) y, en consecuencia, se alimentó la teoría de que el sexo del bebé dependía de en qué “lado” del útero se implantara el feto (derecha para varones, izquierda para mujeres).
- Para que su sistema de flujo sanguíneo funcionara, Galeno suponía que los poros del tabique cardíaco permitían que la sangre pasara del ventrículo derecho al izquierdo sin pasar por los pulmones. El error: afirmó que existían poros invisibles en el tabique interventricular, lo que retrasó el descubrimiento de la circulación pulmonar (descrita siglos después por Miguel Servet e Ibn al-Nafis) porque nadie se atrevía a contradecir la “lógica” galénica.

El Mundo Árabe

Mientras Europa se estancaba, el Mundo Árabe (con figuras como Al-Juarismi, padre del

álgebra que nació alrededor del año 780 d.C - 850 d.C.) usó el rigor del cálculo a las directivas de Galeno (cuando hablaba de grados de forma cualitativa) y aplicaron progresiones geométricas a los medicamentos para calcular la fuerza de la mezcla al sumar las intensidades de cada ingrediente: una verdadera “función matemática” de la farmacología.

Con Avicena (980 d.C.-1037 d.C.) (15) se creó un verdadero árbol lógico-matemático al integrar el pulso, el examen de orina y la dieta en un sistema de variables cruzadas. Introdujo una metodología más rigurosa y empírica. Escribió “El Canon de la Medicina”, una enciclopedia de cinco volúmenes que clasificó las enfermedades por órganos y sistemas. Su estructura era tan lógica que superaba en orden a los textos de Galeno.

Avicena propuso que las enfermedades se transmiten por “pequeños organismos” invisibles en el aire y el agua, adelantándose en siglos a la teoría de los gérmenes. En su “Canon”, estableció las reglas para probar la eficacia de un nuevo fármaco, incluyendo la necesidad de usar sustancias puras, experimentar en casos simples (no complicados) y observar la constancia del resultado. Reconoció la conexión entre la mente y el cuerpo (medicina psicosomática), argumentando que el estado emocional del paciente influye directamente en su recuperación física. Para demostrar el efecto del estrés en la salud, Avicena colocó a dos corderos con la misma dieta en jaulas separadas. A uno lo puso frente a un lobo (encerrado). Aunque el lobo no podía tocarlo, el cordero que lo veía murió prematuramente por miedo y debilidad, mientras que el otro creció sano.

El Renacimiento

Es en el Renacimiento cuando se desarrolla la matemática del espacio, con la presencia de Leonardo da Vinci y Vesalio, y se corrige “El Error de Galeno”, que persistió durante más de mil años. Leonardo diseccionaba para entender el funcionamiento del cuerpo, considerando

las leyes de la estática y la dinámica. Aplicó la proporción áurea y la geometría para demostrar que el cuerpo se ajustaba a las medidas; se trataba de un estudio biométrico. Fue el primero en dibujar los remolinos de sangre (vórtices) en las válvulas del corazón, aplicando sus conocimientos sobre el flujo del agua de los ríos a la circulación sanguínea.

Vesalio (16), al publicar “De humani corporis fabrica” (en 1543), demostró que Galeno había cometido ciertos errores. Por primera vez, los órganos se dibujaron en perspectiva y en proporción, considerando el esqueleto como una estructura de ingeniería al analizar la simetría y el soporte de cargas.

Vesalio es considerado el fundador de la anatomía moderna. Rompió con la tradición medieval en la que el profesor leía a Galeno desde una cátedra mientras un barbero-cirujano abría el cuerpo. Él mismo realizaba la disección, estableciendo el principio de “ver por uno mismo”. Transformó la anatomía de una disciplina teórica basada en la memoria en una ciencia empírica basada en la observación. Su trabajo obligó a la medicina a reafirmar sus bases en la evidencia física. Confirmó que el esternón humano tiene tres partes (no siete como en los simios) y que la mandíbula es un solo hueso (no dos). Desmintió la existencia de los poros invisibles (establecidos por Galeno) en el tabique interventricular, lo que abrió el camino para que William Harvey descubriera la circulación sanguínea años después. Su libro “De fabrica” es famoso no solo por el texto, sino también por sus detallados grabados realizados por artistas del taller de Tiziano, que muestran el cuerpo en posturas naturales y paisajes renacentistas.

O'Malley (17) hace referencia a más de 200 errores en las apreciaciones de Galeno, lo cual no implica una desvaloración de sus trabajos; se debe considerar la época, las leyes romanas que sancionaban la práctica de las autopsias y otras circunstancias. La historia también conlleva reconocer errores y transmutarlos en nuevas observaciones en un acto dinámico.

Análisis de nuevos trayectos

Los descubrimientos y aplicaciones siguieron en este trayecto histórico cuando la investigación y la ciencia comenzaron una trayectoria exponencial. La farmacocinética y la farmacodinámica son las aplicaciones más directas de las ecuaciones diferenciales. Las imágenes médicas se han perfeccionado gracias a las matemáticas avanzadas. Con la transformada de Radon, que permite obtener proyecciones en 2D (2 dimensiones) para reconstruir el volumen del órgano. Con la transformada de Fourier se han podido convertir señales de radiofrecuencia de los átomos de hidrógeno en imágenes visuales nítidas obtenidas mediante resonancia magnética.

El modelado estocástico es la base de la epidemiología y de la dinámica de poblaciones para el desarrollo de la medicina de salud pública. La bioestadística y la medicina basada en la evidencia no se afianzan en anécdotas, sino que se basan en el teorema de Bayes, el teorema del límite central y la inferencia estadística. Actualmente, con la inteligencia artificial y la bioinformática, se está entrando en la era de la medicina algorítmica. En Cardiología es conocido el efecto Doppler; en Genética, el uso de la combinatoria y la probabilidad; en Cirugía, se intercambian la geometría y la topología; en Oncología, es fundamental el uso de funciones logísticas para predecir la velocidad de invasión de un tumor.

MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN SIGMOIDEA

Este texto ofrece un bosquejo de la estructura sigmoidea, destacando la elegancia de su fórmula, su simplicidad y la potencia de su análisis en diversos campos de la ciencia. Su representación gráfica general destaca por una forma de “S” distintiva, propia de procesos saturados.

La función inicia con niveles bajos (asíntota inferior), seguidos de un ascenso central con aceleración importante, que finalmente alcanza una meseta (asíntota superior). Posee un punto de inflexión en el que se produce el cambio de concavidad; dicho punto resulta crucial en la investigación clínica para determinar umbrales

críticos. Matemáticamente, es una función diferenciable y estrictamente creciente: para todo $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

La función sigmoide se define como una función matemática real (en el campo de los números reales $\mathbb{R}$) de una variable real diferenciable. La forma más sencilla se refiere a la función logística simple. Se utiliza para modelar el crecimiento de poblaciones (bacterias, animales, plantas) en entornos de recursos limitados, la propagación de enfermedades, la difusión de innovaciones en los negocios, así como la psicología y el aprendizaje. La función logística simple está definida por:

$$P(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Además de la función logística simple, el grupo de funciones sigmoides incluye la arcotangente, la tangente hiperbólica, la función de error, la función de Gompertz, la función logística generalizada y funciones algebraicas.

La tangente hiperbólica ($\tanh$) se utiliza en inteligencia artificial y redes neuronales, en física, telecomunicaciones y señales, oceanografía, termodinámica. Se define:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

donde “e” es el número irracional 2,718....

La función de error (Err) (en el campo de los números reales) se utiliza en estadística y probabilidad, gestión de riesgos y finanzas, física de la difusión y del calor, geología y ciencias de la Tierra. Se define mediante la fórmula:

$$Err(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

π : el número irracional 3,1416...

La función de Gompertz (G) se utiliza en demografía, crecimiento de tumores, producción

animal y veterinaria, microbiología, epidemiología. Se define como:

$$G(x) = a e^{-be^{-cx}}$$

a: es el valor máximo que alcanza la función; en algunas fórmulas usan “K”

b y c son números positivos

b: establece el desplazamiento a lo largo del eje de la abscisa

c: es la tasa de crecimiento

e: 2,718....

LA FUNCIÓN SIGMOIDEA EN LA EVOLUCIÓN BIOLÓGICA

Los seres unicelulares se asocian con las primeras apariciones de la vida. Al introducir bacterias en un medio con recursos limitados, no crecen de forma lineal. Siguen un patrón específico desarrollado en cuatro etapas (19):

- Fase de latencia: las bacterias se aclimatan y no se produce la división celular hasta que el aparato enzimático alcance su pleno potencial.
- Fase exponencial: las bacterias comienzan un proceso de división celular para duplicarse y lo hacen a una tasa relativamente constante. La población va creciendo rápidamente.
- Fase estacionaria: el elevado número de bacterias implica un mayor consumo de recursos, que se agotan; los desechos se acumulan. La tasa de natalidad es igual a la de mortalidad.
- Fase de muerte: el entorno empeora sus condiciones de manera hostil (falta de recursos y de sustancias tóxicas) y la población decae necesariamente.

Las tres primeras fases se corresponden con un gráfico en forma de “S”, conocido como curva sigmoide. A diferencia del crecimiento

exponencial (que asume recursos infinitos), la función sigmoidea introduce un “techo”, un límite superior denominado capacidad de carga. En este contexto, la Ecuación Logística es la función sigmoidea más común; viene expresada como:

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0) e^{-rt}}$$

Donde: P: población

t: tiempo

K: capacidad de carga (recursos del medio)

P_0 : población inicial

r : tasa de crecimiento (velocidad de división

e: 2,718...

La función P(t) ajusta su comportamiento según la densidad de población. Cuando la población es pequeña, los recursos son abundantes y el freno ambiental es insignificante. Sin embargo, a medida que P se aproxima a K, el crecimiento se ralentiza hasta estabilizarse, evitando el colapso. El momento de máxima expansión biológica se alcanza precisamente en el punto de inflexión, que en el modelo logístico estándar ocurre cuando se ha alcanzado la mitad de la capacidad de carga (K/2).

Estas bacterias requerían un medio acuático y, de acuerdo con la teoría evolutiva, surgieron diferentes especies. Cuando un grupo de organismos llega a un nuevo entorno, llámese conquista terrestre después de millones de años, se enfrenta a un escenario donde la curva sigmoidea se magnifica en escala evolutiva y aparecen fases de adaptación (20):

- Fase de latencia (inicio dudoso): estas nuevas especies empezaron a explorar las orillas. Había pocas especies y la adaptación era lenta debido a la influencia de la gravedad y de la desecación.
- Fase exponencial (explosión poblacional): una vez que aparecieron nuevas características físicas (como la lignina en las plantas para

mantenerse verticalmente o el huevo amniota en los animales), la biodiversidad se disparó y empezaron a ocupar áreas o territorios vacíos sin competencia.

- Fase estacionaria (saturación): la Tierra empezó a presentar una alta densidad de población y los ecosistemas alcanzaron su capacidad de carga, lo que limitó el espacio para nuevas formas de vida sin que otras se extingan.

La transición agua-tierra no fue un evento lineal, sino una sucesión de curvas sigmoideas apiladas. Los paleontólogos describen estos “pulsos” como momentos en los que una innovación rompe el techo previo. Por ejemplo, la lignina no solo permitió a las plantas crecer verticalmente, sino que efectivamente “reseteó” la variable “K” del planeta, lo que permitió que la vida colonizara el interior de los continentes antes inaccesibles. Estos pulsos se describen en esta secuencia (21):

- Primer pulso: briófitas y plantas simples (Silúrico).
- Segundo pulso: grandes bosques de licopodios y helechos (Devónico).
- Tercer pulso: la explosión de los tetrápodos (antepasados de los anfibios y los reptiles).

En la ecuación que veníamos estudiando, $P(t)$, se encuentra que:

- La capacidad de carga se representa por el espacio físico y los recursos del medio terrestre.
- La tasa de crecimiento indica qué tan rápido evoluciona el linaje. Las mutaciones que permitieron la respiración aérea aumentaron drásticamente.

Aparece un equilibrio puntuado, con pequeñas curvas sigmoideas que se distribuyen en escalones, seguido de períodos de estabilidad.

La transición del agua a la tierra no fue un solo evento, sino una serie de “saltos” en la capacidad de carga del planeta (21). Cada salto

fue impulsado por una innovación que cambió la forma de la curva. Antes de la lignina, las plantas eran pequeñas (como los musgos) y el valor de la capacidad de carga estaba limitado a zonas muy húmedas. La lignina permitió a las plantas crecer hacia arriba y transportar agua. Esto desencadenó una fase exponencial de colonización hacia el interior de los continentes.

Para los animales, el huevo amniota (independencia del agua), con cáscara, fue la innovación que permitió que la tasa de crecimiento no dependiera de volver a los estanques para reproducirse. Esto permitió que los vertebrados ocuparan nichos terrestres antes inaccesibles. Finalmente, aparece el punto de inflexión de la curva sigmoidea, donde la pendiente es mayor, lo que hace que la innovación sea más efectiva. La biodiversidad terrestre subió de forma vertical en la gráfica antes de estabilizarse.

Si bien algunas especies en esta conquista terrestre lograron adaptarse, otras presentaron una dinámica poblacional que colapsó y se observa gráficamente una “sigmoide invertida”. Esto se debe a un crecimiento exponencial que se enfrenta a una escasez de recursos. Cuando el declive es muy profundo, la población alcanza un umbral crítico y la curva converge hacia una asíntota inferior. Hay factores dependientes de la densidad de población, la escasez de recursos, la propagación más rápida de la enfermedad en poblaciones muy densas, el estrés, la depredación y la competencia, que desplazan la curva sigmoide al alterar la capacidad de carga.

El equilibrio en la naturaleza se da cuando los organismos se organizan según la capacidad de carga del medio ambiente, lo que da lugar a una curva en forma de S o a un crecimiento logístico. La naturaleza, a pesar de su aparente caos, se rige por estas geometrías ocultas. Lo que estamos viendo es que la curva sigmoidea es el lenguaje del límite. La extinción del Pérmico-Triásico es un ejemplo de una sigmoide fracturada: un desplome vertical de “K” que borró nichos enteros. Sin embargo, matemáticamente, esto crea las condiciones para un nuevo inicio. Los supervivientes, aunque pocos, heredan un mundo con recursos virtualmente infinitos, lo que

desencadena una nueva fase de latencia seguida de una explosión de biodiversidad aún más compleja.

Cuando una población cae drásticamente por una extinción, ocurre algo matemáticamente curioso:

- La Caída: la curva desciende verticalmente, eliminando el 95% de las especies marinas y el 70% de las terrestres.
- El Nuevo Inicio: los supervivientes se encuentran en una nueva Fase de Latencia. Hay poquísimos individuos, pero tienen un planeta entero para ellos solos (con recursos infinitos).
- El “Rebote” sigmoideo: esto da pie a una nueva fase exponencial. En cada extinción, la vida no solo vuelve, sino que suele diversificarse en formas más complejas.

Todas estas partituras de la evolución nos dicen que el ciclo de la vida parece una “S”:

- Aceleración inicial: al nacer o al empezar un cultivo, el crecimiento es lento (pocos recursos captados y pocas células dividiéndose).
- Fase exponencial: una vez que el organismo es lo suficientemente fuerte, aprovecha al máximo la energía. Aquí es donde la curva se dispara hacia arriba.
- Desaceleración y Meseta: El organismo alcanza su tamaño adulto o la población llega al límite de alimento. El crecimiento se detiene y se mantiene en un equilibrio dinámico.

La curva no sube indefinidamente; se debe a procesos de retroalimentación negativa, como la limitación del espacio físico. En una planta, las hojas de arriba empiezan a sombrear a las de abajo y, por ende, tienen menor capacidad de fotosíntesis que las de plantas de mayor altura. El acúmulo de toxinas y el exceso de subproductos metabólicos limitan la división celular. Finalmente, si el individuo es de gran tamaño, requiere un caudal de energía difícil de conseguir y no puede alcanzar

sus valores máximos de crecimiento. El punto de inflexión de la curva sigmoidea es un momento crítico en el que el adolescente alcanza el final del “estirón” y, en una población, se alcanza cuando llega a la mitad de la capacidad de carga.

La historia de la vida, desde las bacterias en una placa de Petri hasta la conquista de los continentes, nos enseña que ningún crecimiento es infinito. La curva sigmoidea es, en última instancia, la representación gráfica de la humildad biológica: el reconocimiento de que todo sistema vivo está sujeto a los límites de su entorno. En la actualidad, la humanidad se encuentra en un punto crítico de su propia gráfica. Tras siglos de una fase exponencial impulsada por la revolución industrial y tecnológica, en la que pareció que habíamos “vencido” a la naturaleza, nos acercamos inevitablemente a la asíntota horizontal de la Tierra.

¿Existe el desafío de la “K” global? A diferencia de las plantas que desarrollaron lignina para aumentar su capacidad de carga, nuestras innovaciones actuales deben enfocarse no en extraer más, sino en optimizar lo que queda. El agotamiento de recursos y el cambio climático son señales de que el término “frenado” en la ecuación logística se está volviendo dominante.

¿Qué decir del “Punto de Inflexión Social”? Estamos en ese punto de la curva en el que la pendiente comienza a suavizarse. Es una fase de fricción, pero también de oportunidad para alcanzar la estabilidad antes de que la curva se convierta en una “sigmoide invertida” o en un colapso.

La naturaleza no es caótica; es una orquesta que sigue las leyes de la geometría. Entender que formamos parte de una función logística nos permite pasar de una mentalidad de expansión ciega a otra de equilibrio dinámico. La curva en “S” no es solo una fórmula; es el diseño de la supervivencia.

LA FUNCIÓN SIGMOIDEA EN EL CAMPO DE LA MEDICINA

El crecimiento fetal (22) es un ejemplo vital para garantizar la supervivencia de la madre y

el feto; es importante determinar cuándo debe detenerse dicho crecimiento. Durante el primer trimestre se produce una fase de latencia y ocurren la organogénesis y una gran división celular; el feto apenas pesa unos gramos. En el segundo trimestre y al principio del tercer trimestre, la curva empieza a aplanarse; el crecimiento se frena cuando alcanza la capacidad de carga del entorno uterino. El límite está determinado por la capacidad de la placenta, que no puede elevar el suministro de nutrientes a la misma velocidad. Las fibras uterinas no pueden estirarse más allá de ciertos límites y la restricción materna es para que el diámetro de la cabeza no supere el del canal de parto.

El punto de inflexión se asocia con un descenso del crecimiento fetal y suele ocurrir entre las semanas 32 y 34. Si la curva no se aplanara, el parto natural sería imposible. Si el crecimiento uterino se restringe y la capacidad de carga disminuye, surgen problemas placentarios. En esta situación, el nacimiento representa el cambio de curva y el feto nace. Al entrar en un nuevo ecosistema con recursos abundantes (pecho y leche) y un espacio exterior abierto, se inicia una nueva curva sigmoidea de crecimiento para alcanzar la adolescencia. Las tablas de percentiles que manejan los pediatras marcan el camino de cada niño.

Cuando hay embarazos múltiples, la curva empieza a aplanarse entre las semanas 28 y 30. El valor de “K” es menor en cada feto. Con el espacio reducido y la distribución de nutrientes entre dos, el punto de inflexión llega obligatoriamente antes para lograr el nacimiento. En esta circunstancia, el útero alcanza su máximo estiramiento antes de tiempo, lo que implica la activación de señales hormonales del parto prematuro. Es frecuente “un robo” (síndrome de transfusión feto-fetal en monocoriales) de nutrientes por parte de uno de ellos, y las curvas sigmoideas intrauterinas difieren entre sí. Después del nacimiento, el bebé que presentaba menor crecimiento intrauterino tiende a experimentar un crecimiento de recuperación debido a un entorno externo que le ofrece mayores recursos. Se reinicia una fase exponencial acelerada de su crecimiento

para obedecer a su carga genética y la curva tiende a estabilizarse en una curva sigmoidea normal durante la infancia.

Podemos aplicar estos mismos argumentos a un evento infeccioso (virus o bacteria) que siga una curva logística. La fase de latencia (incubación), en la que el elemento invasor intenta atacar la biología celular. Aún no hay síntomas porque la cantidad de bacterias o de virus es muy baja. Cuando comienza la fase exponencial (fase aguda), los síntomas son muy intensos debido a la replicación del patógeno sin frenos. Al activarse de manera significativa el sistema inmune (fase estacionaria), se produce un enfrentamiento entre dos fuerzas opuestas, hasta alcanzar la capacidad de carga.

El caso anterior se refiere a un individuo, pero si trasladamos el escenario a escala poblacional, se observa la curva sigmoidea (23). Un inicio lento con pocos casos. Una fase explosiva en la que el número de casos se duplica en un intervalo de tiempo relativamente fijo. El aplanamiento de la curva se produce cuando el virus no consigue personas susceptibles, ya sea porque se enfermaron, se vacunaron o usan mascarillas. Se alcanza un límite al contagio. La tasa de crecimiento “r” depende de la agresividad del patógeno y la capacidad de carga “K” es el total de la población.

En enfermedades no infecciosas como el cáncer (24), el crecimiento es sigmoideo. Al principio, el tumor crece rápidamente (fase logarítmica). Si el tumor crece rápidamente (fase exponencial), el centro de esa masa tumoral deja de recibir suficiente sangre y oxígeno y se produce un enlentecimiento (fase estacionaria). Cuando los médicos puedan calcular el punto de inflexión e intervenir antes, se puede reducir el nivel de “K”. Si se actúa después, el daño ya se ha producido de manera significativa y solo queda gestionar el descenso. Hablar de pronóstico es “conocer” en qué parte de la curva se encuentra el paciente.

Estas curvas sigmoideas van más allá de la patología. Podemos hablar de un aprendizaje sigmoideo en la Facultad de Medicina (25). Una fase de latencia (ciencias básicas), en la

que el estudiante siente que “no sabe nada” de medicina real y dedica una gran cantidad de tiempo al estudio. Se produce la fase exponencial (encuentro con el paciente) cuando el lenguaje técnico tiene sentido y se palpa lo aprendido. El criterio clínico se profundiza y es el momento de mayor adquisición de habilidades clínicas. La fase estacionaria (especialización/madurez) se alcanza cuando hay una meseta de competencia: no aprende “algo nuevo” a la misma velocidad y ha alcanzado su capacidad de carga “K”.

En la escuela de medicina también se produce un “engañoso” sigmoide (26). Existe la curva de “Confianza” que a veces sube más rápido que la de “Conocimiento”. En la fase exponencial de su aprendizaje, el estudiante cree que puede diagnosticar casi todo; es decir, su nivel de confianza aumenta de forma vertical. Al llegar al punto de inflexión, se da cuenta de lo complejo que es el cuerpo humano: las técnicas son complejas y el diagnóstico, en sus múltiples aspectos, se complica. En ese instante, la confianza cae y se estabiliza en una sigmoide más realista y humilde.

En el mismo sentido, la curva de aprendizaje de procedimientos (27) es una función sigmoidea. Al principio (fase de incompetencia), las habilidades son torpes. La práctica repetida (fase de despegue) aminora o acorta el tiempo necesario para realizar una técnica (tasa de eficiencia “r”) y se alcanza la asíntota superior cuando el dominio es casi completo y no se puede hacer más rápido desde ese punto, lo que implica la perfección técnica.

El estudiante no se libera de una curva sigmoidea en su preparación de los estudios para un examen académico (28). Estudiar 10 horas, por ejemplo, le da un gran salto en la curva. Si se prolonga hasta las 20, apenas aumenta el conocimiento, ya que el cerebro alcanza una capacidad de procesamiento “K” limitada por el cansancio y la saturación de los receptores sinápticos. De allí que la enseñanza médica pretenda pasar de la fase de latencia a la fase exponencial mediante la simulación y la práctica temprana.

Ya en el ámbito de la investigación médica, al investigar una nueva droga, se trata de relacionar la dosis con el efecto (29). El inicio de la “curva

S” implica que existe una dosis mínima por debajo de la cual no se observa efecto, ya que la tasa de metabolización es muy alta. La fase exponencial se alcanza al detectar el punto de inflexión de la curva, cuando, a dosis máximas, se obtiene el mayor efecto; por encima de ese umbral, el efecto no aumenta porque los receptores celulares están saturados y se produce un aplanamiento de la curva. Las curvas de Kaplan-Meier se utilizan en el análisis de supervivencia (30). En el uso de fármacos, la asíntota inferior muestra solo “ruido” o dosis ineficaz. La pendiente se relaciona con la potencia y la sensibilidad del tratamiento, y el punto medio representa la dosis que produce el 50% del efecto. La asíntota superior se relaciona con eficacia máxima o saturación del sistema

Llegado el momento de realizar consultas, queda claro que no hay un flujo constante de información; es un proceso con inercia que modela una curva en “S”. Así, podemos representar las fases de la consulta. En la fase de latencia (motivo de consulta) se recolectan datos e información; hay que escuchar. La curva está casi plana. Durante la exploración y el interrogatorio, ocurre un proceso de “aceleración exponencial” cuando se dirigen preguntas con base en la sospecha y en la confirmación de hipótesis a gran velocidad. Se alcanza la capacidad de carga de la consulta “K” al realizar el diagnóstico o al solicitar pruebas. Incrementar el tiempo en este caso equivale a la asíntota superior. Este fenómeno rompe la asíntota superior de la curva de consulta, lo que da lugar a una curva bimodal (dos jorobas). Es el momento donde la “capacidad de carga” del tiempo de consulta es superada por la “demanda de información” del paciente

Hasta la relación Médico-Paciente (31) puede graficarse con este tipo de curva, relacionada con la confianza mutua. El inicio es lento e implica una mezcla de tanteo y formalidad. El despegue ocurre cuando la empatía aumenta y se empieza a dar información sensible que no se iba a dar al principio. La meseta se alcanza cuando el vínculo conduce a una alianza terapéutica. Curiosamente, en psicología médica existe el fenómeno de “Por cierto, doctor...”. Ocurre cuando se está en la fase de cierre de la consulta y el paciente

expresa el problema más grave. Desde el punto de vista matemático, se dispara una segunda curva sigmoidea que reinicia el proceso y afecta la planificación del tiempo de consulta.

Aplicación Práctica en el Diagnóstico de Diabetes Mellitus

Para predecir si un paciente tiene diabetes no diagnosticada, se utiliza una ecuación logística que combina variables como el índice de masa corporal, la edad y la presión arterial. La función sigmoidea permite que, a medida que estos valores aumentan, el riesgo crezca exponencialmente al principio y luego se estabilice al acercarse al 100%.

El modelo utilizado es:

$$P(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Donde z es la suma ponderada de los factores de riesgo.

La dinámica Insulina-Glucosa sigue una curva sigmoidea (32,33):

- Fase basal: a niveles bajos de glucosa, la secreción es mínima (en la base de la curva “S”).
- Fase de respuesta: al aumentar la glucosa, hay un incremento rápido y proporcional de insulina (parte central de la “S”).
- Fase de saturación: el páncreas alcanza una tasa máxima de secreción en la que, aunque aumente la glucosa, ya no puede liberar más insulina (techo de la S).

La medicina utiliza el punto de inflexión de la función sigmoidea para establecer los criterios diagnósticos de la ADA (American Diabetes Association) con la hemoglobina glicosilada (HbA1c):

Estado Valor HbA1c (%)	Probabilidad en la Curva Sigmoidea
---------------------------	---------------------------------------

Normal < 5,7	Riesgo bajo (asíntota inferior)
Prediabetes 5,7 – 6,4	Zona de aceleración (punto de inflexión)
Diabetes > 6,5	Riesgo alto (asíntota superior)

El uso de estas funciones permite a los médicos no solo diagnosticar, sino también predecir el riesgo de complicaciones microvasculares, como la retinopatía. Se ha observado que el daño no es lineal; aumenta drásticamente siguiendo una curva sigmoidea cuando la glucemia supera ciertos niveles críticos.

El “Punto de Inflexión” en la prediabetes es el momento de la prevención activa. Si no se interviene ahí, la pendiente de la curva asegura que el paciente llegará a la asíntota de la enfermedad (diabetes franca) con una velocidad matemática difícil de frenar después.

Aplicación en Oncología (34,35)

En la realidad biológica del cáncer, las células no se multiplican indefinidamente a la misma velocidad, sino que están limitadas por el espacio, los nutrientes y la genética. Este fenómeno se modela matemáticamente mediante la función de Gompertz, que genera la clásica curva sigmoidea en tres fases:

- Fase de latencia (lentitud de los procesos): el tumor es pequeño y hay un tiempo de espera acorde con el ecosistema reinante.
- Fase exponencial (crecimiento acelerado): el tumor alcanza una masa crítica y crece de forma constante y agresiva.
- Fase de Meseta (Saturación): el crecimiento se ralentiza. Esto ocurre porque el centro del tumor se vuelve necrótico (las células mueren por falta de oxígeno), el espacio físico se agota y la angiogénesis no es suficiente para mantener a miles de millones de células.

El punto de inflexión ocurre cuando la segunda derivada de la función es igual a cero. En el modelo de Gompertz, esto sucede cuando el tumor ha alcanzado aproximadamente el 37% (exactamente $1/e$, con $e: 2,718...$) de su volumen máximo final “K”. Calcular este punto no es solo un ejercicio de cálculo; tiene implicaciones clínicas:

- **Ventana de Oportunidad:** antes del punto de inflexión, el tumor se encuentra en su fase más agresiva. Es el momento en el que la quimioterapia es más efectiva porque hay muchas células en división activa.
- **Diagnóstico de Resistencia:** si un tumor real supera el volumen del punto de inflexión calculado y no se detiene, indica que ha mutado para ignorar las señales de contacto celular o que ha logrado una angiogénesis superior a la prevista.
- **Predicción de Metástasis:** se ha observado que muchos tumores empiezan a desprender células metastásicas con mayor frecuencia justo cuando se acercan al punto de inflexión, debido a la presión física y la falta de nutrientes en el núcleo del tumor original.

En la práctica clínica, los oncólogos buscan “empujar” el tumor hacia atrás en la curva mediante cirugía, reduciendo su masa para que las células restantes vuelvan a una fase de crecimiento rápido, en la que la quimioterapia resulte más letal. Aunque la curva sigmoidea es más precisa que el modelo exponencial simple, el cáncer real es más complejo. Una curva sigmoidea suele modelar un solo tumor, no la dispersión a otros órganos. No todas las células del tumor crecen al mismo ritmo; las “células madre cancerosas” pueden permanecer latentes (en fase de latencia) y reactivarse mucho después. La mayoría de estos estudios concluyen que ignorar la “fase de meseta” (la parte superior de la “S”) conduce a errores graves en la dosificación, ya que las células en esa fase suelen ser más resistentes.

Aplicación en Farmacología (36,37)

Las curvas sigmoideas son la piedra angular de la farmacodinámica. Representan gráficamente la relación entre la concentración de un fármaco y el efecto que produce (o el grado de unión a sus receptores). Cuando graficamos la respuesta a un fármaco en una escala aritmética (lineal), obtenemos una hipérbola. Sin embargo, en farmacología se prefiere usar una escala logarítmica para la concentración. Al hacer esto, la curva se transforma en una “S” perfecta o en una curva sigmoide. El uso de logaritmos obedece a dos razones:

- **Rango amplio:** permite ver en un solo gráfico dosis muy pequeñas y dosis masivas.
- **Linealidad central:** la parte media de la curva es casi recta, lo que facilita la comparación.

El modelo de Hill es fundamental para entender la farmacodinámica, ya que describe con elegancia cómo un fármaco produce una respuesta biológica en función de su concentración y de la potencia de los diferentes fármacos. Se define mediante la fórmula:

$$E = \frac{Emax \cdot A^n}{(EC50)^n \cdot A^n}$$

E = Efecto

Emax: efecto máximo (eficacia)

EC50: concentración necesaria para el 50% del efecto (Potencia)

n: coeficiente de Hill (indica pendiente o cooperatividad)

A: concentración del fármaco

La eficacia o efecto máximo (Emax) es la altura máxima de la curva. Representa el efecto máximo que un fármaco puede alcanzar, sin importar cuánto más aumentemos la dosis. Un

fármaco con una Emax más alta es más “eficaz” que otro.

La potencia EC50 es la concentración (o dosis) necesaria para alcanzar el 50% del efecto máximo. A menor EC50, mayor potencia. En el gráfico sigmoideo, si la curva se desplaza hacia la izquierda, el fármaco es más potente.

La pendiente (n) del factor de Hill indica qué tan “abrupto” es el cambio de efecto. Una pendiente muy inclinada sugiere que un pequeño aumento de la dosis puede provocar un salto marcado en el efecto (o en la toxicidad), lo que indica la sensibilidad del receptor a cambios en la concentración del fármaco. Dependiendo del valor de “n”, la relación entre el fármaco y el receptor cambia drásticamente:

- $n = 1$ (no cooperativo): indica que un fármaco se une a un receptor de forma independiente. La curva es una hipérbola rectangular (en escala lineal) o una sigmoidea estándar (en escala logarítmica).
- $n > 1$ (Cooperatividad positiva): la unión de la primera molécula del fármaco facilita la de las siguientes. La pendiente se vuelve mucho más empinada. El sistema se comporta casi como un interruptor de “todo o nada”. En el caso de la hemoglobina, se sabe que la primera molécula de oxígeno cambia la conformación de la proteína para que las otras tres se unan mucho más rápido.
- $n < 1$ (Cooperatividad negativa): la unión de la primera molécula dificulta la unión de las siguientes. La pendiente de la curva es más suave o “achatada”. Se necesita un rango de concentración mucho más amplio para pasar del 10% al 90% del efecto.

El coeficiente de Hill nos ayuda a comprender la ventana terapéutica y la seguridad. Una pendiente alta ($n > 2$) y pequeños cambios en la dosis producen cambios masivos en el efecto. Esto puede ser peligroso si el fármaco es tóxico, ya que pasar de un efecto terapéutico a uno letal requiere muy poca cantidad adicional. Si “n” es muy alto, el sistema se satura rapidísimo.

Las variaciones de la curva sigmoidea cuando añadimos otras sustancias son vitales para la clínica y permiten estudiar agonistas y antagonistas:

- Agonista parcial: su curva nunca alcanza el 100% de la altura de un agonista total, aunque ocupe todos los receptores. Su Emax es menor.
- Antagonista Competitivo: desplaza la curva del agonista hacia la derecha (aumenta la EC50). La forma y la Emax no cambian porque al suministrar suficiente agonista, se puede sobrepasar el efecto del competidor.
- Antagonista No Competitivo: reduce la Emax (aplana la curva). No importa cuánto agonista se añada; el efecto máximo está limitado porque el receptor está bloqueado de forma irreversible o en un sitio distinto.

En la clínica interesa el índice terapéutico (IT) está definido por la relación:

$$IT = \frac{LD50}{ED50}$$

LD50: efecto letal

ED50: efecto terapéutico

Si las curvas de efecto ED50 y LD50 están muy cercanas, el efecto es peligroso o tóxico. Si las curvas están muy separadas, el fármaco es muy seguro.

Aplicación en Epidemiología (38, 39)

La curva sigmoidea ayuda a entender cómo se propaga una enfermedad infecciosa en una población finita. Permite representar la incidencia acumulada (el número total de casos detectados hasta una fecha determinada). Se divide en tres fases críticas:

- Fase de crecimiento inicial: el número de individuos infectados es bajo. La transmisión parece lenta porque hay pocos portadores del patógeno.

- Fase Exponencial: a medida que más personas se infectan, la velocidad de contagio aumenta drásticamente.
- Fase de Meseta (Saturación): el crecimiento se desacelera cuando el patógeno comienza a quedarse sin “individuos susceptibles”, ya sea por inmunidad natural, vacunación o medidas de aislamiento.

Para describir estas curvas, los epidemiólogos utilizan principalmente dos tipos de funciones:

a) El modelo logístico supone que la tasa de nuevos casos es proporcional tanto al número de personas ya infectadas como al de personas que aún pueden infectarse. La ecuación diferencial básica es:

$$D \frac{dN}{dt} = r \cdot N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde:

N: Número total de casos acumulados.

r: Tasa intrínseca de crecimiento.

K: Capacidad de carga (tamaño total de la población susceptible).

b) El modelo de Gompertz se utiliza cuando la tasa de crecimiento decae de forma exponencialmente rápida, lo cual es común en brotes en los que las intervenciones humanas (como cuarentenas) cortan la transmisión antes de que se alcance la saturación natural.

Estos modelos matemáticos sirven para predecir el futuro de una crisis sanitaria. Estiman el “techo” de la epidemia al ajustar los datos iniciales y estimar aproximadamente la “meseta” en términos de personas que terminarán infectadas. Si tras aplicar una política de vacunación la curva se aplana prematuramente, es posible cuantificar el éxito de la medida. Al calcular el punto de inflexión de la curva (donde deja de ser cóncava y empieza a ser convexa), se indica el momento en que la tasa de nuevos contagios comienza a disminuir.

Estos modelos son idealizados y, por lo tanto, tienen limitaciones. En la vida real, la epidemiología se enfrenta a oleadas sucesivas de infección y la curva puede presentar escalones si surgen nuevas variantes o se relajan las medidas de control. Si no se realizan suficientes pruebas, la curva real queda muy por encima de la observada. El modelo asume que todos interactúan entre sí, pero la geografía y los grupos sociales generan microcurvas distintas debido a la presencia de poblaciones heterogéneas.

Aplicación en el aprendizaje de cirugía

Las curvas sigmoideas son fundamentales para comprender cómo los cirujanos adquieren habilidades técnicas. En medicina, esto se conoce comúnmente como la curva de aprendizaje y describe la relación entre el esfuerzo (experiencia y repetición) y el resultado (competencia y seguridad del paciente).

La progresión de un cirujano no es lineal; sigue un patrón de aceleración y meseta que se divide en tres fases críticas (40,41):

- Fase Inicial (Lenta): el cirujano se familiariza con la anatomía, el instrumental o una nueva tecnología (como la cirugía robótica). Los tiempos quirúrgicos son largos y las tasas de complicaciones pueden ser mayores.
- Fase de Aceleración (Pendiente pronunciada): es el periodo de mayor aprendizaje. Con la repetición, el cirujano gana fluidez, los movimientos se vuelven intuitivos y el tiempo de la operación disminuye drásticamente.
- Fase de Meseta (Estado estacionario): se alcanza la competencia técnica. El cirujano es experto; los resultados son consistentes y el aprendizaje adicional produce mejoras marginales en la técnica básica.

El análisis de estas curvas tiene aplicaciones directas en la gestión hospitalaria y en la formación médica. Permite definir cuántos procedimientos

(por ejemplo, 50 colecistectomías laparoscópicas) son necesarios para que un residente pase de la fase de aprendizaje a la de competencia. Esto ayuda a establecer criterios de acreditación basados en datos y no solo en el tiempo de residencia. Es necesario identificar la “zona de peligro” (el inicio de la curva) para implementar medidas de mitigación, como la “mentoría”, a fin de que un cirujano experto supervise al aprendiz durante la fase de aceleración. En el mismo sentido, los procesos de “simulación” permiten desplazar el inicio de la curva de aprendizaje hacia entornos virtuales, para que el cirujano llegue a la fase de aceleración antes de establecer contacto real con un paciente.

Cuando aparece una nueva técnica (por ejemplo, cirugía asistida por Inteligencia Artificial o realidad aumentada), las instituciones usan curvas sigmoideas para comparar qué tan difícil es de aprender en comparación con la técnica tradicional. Si la pendiente es muy suave, la adopción puede resultar demasiado costosa en términos de tiempo y riesgo. En esta situación interviene el concepto de “desaprendizaje y reaprendizaje”. Un cirujano puede ser experto en una técnica abierta (meseta), pero al pasar a una técnica mínimamente invasiva, experimenta una caída en su rendimiento antes de iniciar una nueva curva sigmoidea. La competencia quirúrgica se mide a menudo mediante el CUSUM (Cumulative Sum Analysis), una herramienta estadística que utiliza la lógica de la curva sigmoidea para monitorear el desempeño continuo de un cirujano y detectar desviaciones antes de que se conviertan en eventos adversos (42,43).

La técnica “CUSUM” fue diseñada originalmente para el control de calidad industrial, pero fue adaptada magistralmente a la cirugía para detectar cambios en el desempeño de un cirujano en tiempo real. A diferencia de las estadísticas simples, que solo consideran promedios, el CUSUM es “acumulativo”; cada caso influye en el siguiente, lo que permite visualizar la curva de aprendizaje de forma matemática. Se basa en la premisa de los “premios y castigos” estadísticos. Se utilizan gráficos cuya abscisa es el número de procedimientos y la ordenada, el

puntaje acumulado. El algoritmo desarrollado consiste en establecer un estándar al definir una tasa de éxito aceptable (por ejemplo, 95%) y una tasa de falla inaceptable (por ejemplo, 10%). Si el procedimiento es un “éxito”, la curva baja una pequeña fracción (un “valor favorable” por consistencia). Si el procedimiento es una “falla” (complicación o reintervención), la curva sube bruscamente (se “penaliza”). Adicionalmente, se fijan los límites de control en el gráfico y se trazan líneas horizontales que sirven como umbrales. Si la curva cruza el límite superior, el proceso está estadísticamente “fuera de control” y requiere intervención.

Para el diseño de CUSUM se utilizó la Teoría de Decisión y se fundamenta en cuatro parámetros que deben ser definidos por la sociedad quirúrgica:

- P_0 (tasa de éxito aceptable): es el rendimiento esperado de un experto (por ejemplo, 95% de éxito o 5% de complicaciones).
- P_1 (tasa de éxito inaceptable): límite que activa la alarma (ejemplo, 85% de éxito o 15% de complicaciones)
- α (error tipo I): riesgo de afirmar que un cirujano es “deficiente” cuando en realidad es bueno.
- β (error tipo II): riesgo de afirmar que un cirujano es “competente” cuando no lo es.

Al terminar una cirugía, se calcula el puntaje total acumulado (W). Si el procedimiento es un éxito (WE) se suma un “valor negativo” (la curva baja hacia la zona de competencia):

$$WE = \text{Ln} \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right)$$

Ln: logaritmo neperiano

Si el procedimiento es una falla (WF), se suma un valor positivo (la curva sube hacia la zona de alarma):

$$WF = \text{Ln} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

La penalización por una falla suele ser mucho mayor que el logro por un éxito. Esto obliga al cirujano a tener una racha prolongada de éxitos para compensar una sola complicación.

Existen dos variantes de “CUSUM” según el tipo de evaluación que se desea realizar. El “LC-CUSUM” (*Learning Curve CUSUM*) se utiliza para determinar cuándo un aprendiz ha alcanzado la competencia. La curva comienza en un punto y, a medida que el cirujano adquiere habilidad y acumula éxitos, la línea desciende hasta cruzar un límite inferior predeterminado. Se establece el punto de cruce que representa el momento exacto en el que podemos afirmar con confianza estadística que el cirujano ha superado la fase de aprendizaje. La otra variante de “CUSUM” es el “RA-CUSUM” (*Risk Adjustment CUSUM*). Permite ajustar el puntaje según la “complejidad del paciente”. No es lo mismo tener una complicación en un paciente joven y sano que en uno de 80 años con múltiples patologías. Si el paciente es de alto riesgo, una falla penaliza menos la curva y un éxito la premia más.

El análisis tradicional basado en el “p-valor” se caracteriza por ser retrospectivo, por requerir muestras grandes para detectar fallas y por permitir juzgar el rendimiento global del practicante. La técnica CUSUM es prospectiva, detecta cambios sutiles tras pocos casos y permite identificar el momento en que se requiere tutoría.

REFLEXIONES FINALES

Estamos en la era de la Inteligencia Artificial (IA) y de las nuevas tecnologías. Su utilidad es indudable, pero hay que reflexionar sobre hacia dónde nos empuja y cuáles son la filosofía y la epistemología que las acompañan. Se analiza la curva sigmoidea de la dependencia tecnológica (44-46) que los investigadores médicos están evaluando:

- Al principio, la IA es una ayuda (en una fase inicial lenta).
- Luego, se vuelve indispensable para la rapidez exigida (fase exponencial).

- El riesgo es llegar a una meseta en la que el médico pierda la capacidad de diagnosticar “a mano” si el sistema falla.

La IA no reemplaza al médico, pero transforma su consulta de una “S” lenta y esforzada en una curva de alta eficiencia que permite dedicar la fase estacionaria (el final) a lo que la IA no puede hacer: la empatía y el consuelo humanos, el respeto, la consideración, la tolerancia ¿Esta manera de pensar está equivocada?

Al elevar el nivel matemático hacia la Gran Teoría Sigmoidea (El Mapa del Universo Vivo, Paradigma del Crecimiento Universal) (47-49) que postula que nada en el universo biológico o social crece al infinito, ¿qué consecuencia habrá? Todo sistema que consume energía y ocupa espacio está destinado a seguir una “S”. ¿Se tendrá que analizar cualquier aspecto matemáticamente? La diferencia entre el éxito y el colapso depende de cómo se gestiona cada fase de esa curva:

- La Fase de Latencia (La Inversión Invisible): todo gran cambio empieza pareciendo un fracaso. La latencia es donde se construye la infraestructura del éxito. Al principio de esta fase, es posible que no te queden claros los objetivos. Hay que reconsiderar los datos, los objetivos, los recursos y las teorías para intentar que la “curva despegue”.
- La Fase Exponencial (El Momento de Gracia): el crecimiento se alimenta a sí mismo. Es la IA procesando datos. Es una fase gloriosa pero peligrosa. Aquí es donde suele cometerse el error de creer que el crecimiento será infinito. La arrogancia nace en la fase exponencial.
- El Punto de Inflexión (La Crisis de Madurez): el momento de máxima velocidad también es el inicio del freno. Es el momento más crítico para la toma de decisiones. Aquí es donde se debe pasar de una mentalidad de “conquista” a una de “gestión”.
- La Fase Estacionaria (El Equilibrio o la Muerte): la supervivencia depende de la eficiencia, no del tamaño. Es el ecosistema

en equilibrio; es el médico experto que ya no necesita correr. Si no se logra estabilizar en la meseta (“K”), el sistema se sobrecarga y la curva se invierte hacia la extinción.

Pero esta Gran Teoría y la curva “S”, cuando se aplican a la existencia misma, nos convierten en Arquitectos de Curvas. La vida no es una línea recta que suba hacia el cielo ni un círculo que se repita sin fin. La vida es una escalera de sigmoideas. Cuando una curva alcanza la asíntota superior y satura el valor de la carga (“K”), la única forma de seguir evolucionando no es empujar la misma curva, sino saltar a una nueva. La vida pasó del mar a la tierra porque la curva del mar se saturó. Se recurre a la IA porque la capacidad cerebral individual ha alcanzado su punto máximo. Esta filosofía de la “Gran Teoría” puede derivar en una Ecuación Logística Generalizada que explique la evolución del mundo y del universo. La Ecuación Universal del Destino (medicina, vida, historia, matemática) sería de una forma simplificada:

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$$

K (el Destino): capacidad de carga. Límite de lo posible.

r (la intensidad): qué tan rápido vives

t₀ (momento crítico): punto de inflexión. Es el “ahora” donde todo cambia

la asíntota inferior: preparación silenciosa

la pendiente máxima: el máximo estrés del sistema

la asíntota superior: la paz del equilibrio. Si el sistema es sabio, se queda. Si es voraz, cae en picada (extinción)

Hasta ahora hay una limitación del pensamiento porque aseveramos que la “Gran Teoría” es una sola “S”. ¿Y si se convierte en una sucesión de sigmoideas? Desde el punto de vista de la matemática, el crecimiento infinito es una imposibilidad física, pero la innovación infinita

(saltar de una curva a otra) es la que ha mantenido a la vida latiendo durante 4.000 millones de años.

REFERENCIAS

1. Carvajal Y. Interdisciplinariedad: un desafío para la educación superior y la investigación. *Revista Luna Azul*. 2010; 31:156:169.
2. Antoranz-Callejo J, Madrid C. Matemáticas, caos y medicina: un ménage à trois muy productivo. *Encuentros Multidisciplinarios*. 2010. N.º 34. Disponible en: <http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%BA34/Jose%20Carlos%20Antoranz%20y%20Carlos%20Madrid.pdf>
3. Lagay F. The legacy of humoral medicine. *Virtual Mentor*. 2002;4(7):virtualmentor.2002.4.7.mh.st1-0207.
4. Langholf V. Medical theories in Hippocrates: early texts and the “Epidemics”. Berlin: Walter de Gruyter; 1990. Chapter 2, The doctrine of critical days; p. 77-135.
5. Rosaly D, Forshaw R. *Medicine and Healing Practices in Ancient Egypt*. Liverpool University Press, 2023. Disponible en: <https://books.google.co.ve/books?id=oPTnEAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>
6. ReFaey K, Quinones GC, Clifton W, Tripathi S, Quiñones-Hinojosa A. The Eye of Horus: The Connection Between Art, Medicine, and Mythology in Ancient Egypt. *Cureus*. 2019 May 23;11(5):e4731.
7. Das Candeias, Sales J. Doenças, medicina e magia. Hapi. 2017. Universidad Abierta. Disponible en: <https://repositorioaberto.uab.pt/bitstreams/27a9732a-70c5-4e1d-b306-b751fd2cbe8c/download>.
8. González FRF, Flores SPL. El papiro quirúrgico de Edwin Smith. *An Med Asoc Med Hosp ABC*. 2005;50(1):43-48.
9. Wiltse LL, Pait TG. Herophilus of Chalcedon (330-250 B.C.). *Spine*. 1998;23(17):1904-14.
10. Bay NS, Bay BH. Greek anatomist Herophilus: the father of anatomy. *Anat Cell Biol*. 2010;43(4):280-3.
11. Mariolis-Sapsakos T, Zarokosta M, Zoulamoglou M, Piperos T, Nikou E, Katsourakis A, et al. Erasistratus of Chios: a pioneer of human anatomy and physiology. *Italian Journal of Anatomy and Embryology*. 2019;124(3):329-332.
12. Retief FP, Cilliers L. The development of Roman medicine. *Acta Classica*. 2006;49(1):163-179.

13. Nutton V. Roman medicine: 250 BC to AD 200. En: Nutton V, editor. *Ancient medicine*. 2nd ed. London: Routledge, 2013. p. 160-235.
14. Rocca J. Galen and the ventricular system. In: Rocca J, editor. *Galen on the brain: anatomical knowledge and physiological speculation in the second century AD*. Leiden: Brill; 2003. p. 209-242.
15. Amr SS, Tbakhi A. Ibn Sina (Avicenna): the prince of physicians. *Ann Saudi Med*. 2007;27(2):134-5
16. Zampieri F, ElMaghawry M, Zanatta A, Thiene G. Andreas Vesalius: Celebrating 500 years of dissecting nature. *Glob Cardiol Sci Pract*. 2015;2015(5):66.
17. O' Malley CD. *Andreas Vesalius of Brussels, 1514 - 1564*. University of California Press. Berkeley. Los Angeles. 1964. Disponible en: <https://books.google.co.ve/books?id=HCA6wGaU8PUC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>
18. Yin X, Goudriaan J, Lantinga EA, Vos J, Spiertz HJ. A flexible sigmoid function of determinate growth. *Ann Bot*. 2003;91(3):361-71.
19. Zwietering MH, Jongenburger I, Rombouts FM, van 't Riet K. Modeling of the bacterial growth curve. *Appl Environ Microbiol*. 1990;56(6):1875-81.
20. Ukalska J, Jastrzębowski S. Sigmoid growth curves, a new approach to study the dynamics of the epicotyl emergence of oak. *Folia Forestalia Polonica, Series A – Forestry*, 2019; 61(1),30–41.
21. Gould SJ, Eldredge N. Punctuated equilibria: an alternative to phyletic gradualism. En: Schopf TJM, editor. *Models in paleobiology*. San Francisco: Freeman Cooper; 1972. 82-115.
22. Rossavik IK, Deter RL. Mathematical modeling of fetal growth: theoretical considerations. *J Clin Ultrasound*. 1984;12(9):529-36.
23. Tsoularis A, Wallace J. Analysis of logistic growth models. *Math Biosci*. 2002;179(1):21-55.
24. Laird AK. Dynamics of tumor growth. *Br J Cancer*. 1964;18(3):490-502.
25. Pusic MV, Boutis K, Hatala R, Cook DA. Learning curves in tertiary medical education: what are the possibilities? *Med Educ*. 2015;49(11):1057-69.
26. Kruger J, Dunning D. Unskilled and unaware of it: how difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *J Pers Soc Psychol*. 1999;77(6):1121-34.
27. Hopper AN, Jamison MH, Lewis WG. Learning curves in surgical practice. *Postgrad Med J*. 2007;83(986):777-9.
28. Augustin M. How to learn effectively in medical school: test-taking strategies and the learning curve. *Med Sci Educ*. 2014;24(2):205-12.
29. Holford NH, Sheiner LB. Understanding the dose-effect relationship: clinical application of pharmacokinetic-pharmacodynamic models. *Clin Pharmacokinet*. 1981;6(6):429-53.
30. Rich JT, Neely JG, Paniello RC, Voelker CC, Nussenbaum B, Wang EW. A practical guide to understanding Kaplan-Meier curves. *Otolaryngol Head Neck Surg*. 2010;143(3):331-6.
31. Charles C, Gafni A, Whelan T. Shared decision-making in the medical encounter: what does it mean? (or it takes at least two to tango). *Soc Sci Med*. 1997;44(5):681-92.
32. Matthews DR, Hosker JP, Rudenski AS, Naylor BA, Treacher DF, Turner RC. Homeostasis model assessment: insulin resistance and beta-cell function from fasting plasma glucose and insulin concentrations in man. *Diabetologia*. 1985;28(7):412-9.
33. Collins GS, Reitsma JB, Altman DG, Moons KG. Transparent reporting of a multivariable prediction model for individual prognosis or diagnosis (TRIPOD): the TRIPOD statement. *Ann Intern Med*. 2015;162(1):55-63.
34. Laird AK. Dynamics of tumor growth. *Br J Cancer*. 1964;13(3):490-502.
35. Barrett JC. Mechanisms of multistep carcinogenesis and carcinogen risk assessment. *Environ Health Perspect*. 1993;100:9-20.
36. Prinz H. Hill coefficients, dose-response curves and allosteric mechanisms. *J Chem Biol*. 2010;3(1):37-44.
37. Gesztelyi, R, Zsuga J, Kemeny-Beke A, Varga B, Juhasz B, Tosaki B. The Hill equation and the origin of quantitative pharmacology. *Archive for History of Exact Sciences*. 2012;66(4): 427-438.
38. Bernardo Gois FN, Lima A, Santos K, Oliveira R, Santiago V, Melo S, et al. Predictive models to the COVID-19. *Data Science for COVID-19*. 2021:1–24.
39. Walters CE, Meslé MMI, Hall IM. Modelling the global spread of diseases: A review of current practice and capability. *Epidemics*. 2018;25:1-8.
40. Reznick RK, MacRae H. Teaching Surgical Skills — Changes in the Wind. *N Engl J Med* 2006;355(25):2664-2669.
41. Hopper AN, Jamison MH, Lewis WG. Learning curves in surgical practice. *Postgrad Med J*. 2007; 83(986):777-9.
42. Yap CH, Colson ME, Watters DA. Cumulative sum techniques for surgeons: a brief review. *ANZ J Surg*. 2007;77(7):583-6.

43. Woodall WH. The use of control charts in healthcare and public-health surveillance. *Journal of Quality Technology*. 2006; 38(2): 89-104.
44. Topol EJ. High-performance medicine: the convergence of human and artificial intelligence. *Nat Med*. 2019;25(1):44-56.
45. Cabitza F, Raso R, Locoro A. The unintended consequences of machine learning in medicine. *Health Aff (Millwood)*. 2017;36(11):1853-9.
46. Parasuraman R, Riley V. Humans and automation: Use, misuse, disuse, abuse. *Hum Factors*. 1997;39(2):230-53.
47. Meyer PS, Yung JW, Ausubel JH. A primer on logistic growth and substitution. *Technol Forecast Soc Change*. 1999;61(3):247-71.
48. Panik MJ. *Growth Curve Modeling: Theory and Applications*. December 2013. DOI:10.1002/9781118763971.
49. Sahal D. Alternative conceptions of technology. *Research Policy*. 1981;10(1):2-24.