Revista de la Facultad de Ingeniería UCV
Vol. 41, No. 1, pp. 23 – 38, enero – junio, 2026
e-ISSN 2443-4477 / Depósito Legal: ppi. 200502DC4603

EdIT EDITORIAL INNOVACIÓN TECNOLÓGICA

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN / RESEARCH PAPER

Análisis cualitativo de estabilidad, bifurcaciones y soluciones exactas tipo solitón para el modelo de FitzHugh-Nagumo

Qualitative analysis of stability, bifurcations, and exact soliton-type solutions for the FitzHugh-Nagumo model

Historial del Artículo / Article History
Recibido / Received: 18-09-2025
Revisado / Revised: 02-10-2025
Aceptado / Accepted: 06-02-2026
publicado en línea / Published online: 13-03-2026

Franklin Martínez [1,*]

[1] *Departamento de Comunicaciones, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela (UCV), Caracas, Venezuela*

[*] ✉ *Autor de la Correspondencia / corresponding author: fmartq@gmail.com*

Resumen

En este trabajo se presenta un desarrollo algebraico-cualitativo de la ecuación de FitzHug-Nagumo, cuya importancia fundamental estriba en que dicha ecuación permite una descripción cualitativa de procesos neuronales y también se adapta a otros procesos de índole no-lineal. Este trabajo está conformado en dos resultados principales. La primera se enfoca al análisis dinámico sin variación espacial para el caso en que al sistema descrito se le aplica una excitación constante y posea un solo punto de estabilidad; adicionalmente, se muestran simulaciones numéricas para excitación tipo pulso de duración finita. La segunda contempla un análisis del comportamiento ondulatorio para la ecuación reducida. Por el carácter de escalamiento de las ecuaciones que si bien representan magnitudes físicas las unidades asociadas a las mismas son arbitrarias. En conclusión, el modelo simplificado de FitzHugh-Nagumo permite una comprensión rigurosa del fenómeno de excitabilidad. El análisis dinámico confirma que el potencial de reposo actúa como un atractor asintóticamente estable, mientras que bajo excitación constante el sistema exhibe ciclos límite asociados a bifurcaciones de Andronov-Hopf. Finalmente, el estudio ondulatorio demuestra que la topología del frente de onda depende críticamente de su velocidad de propagación, posibilitando la deducción de soluciones analíticas exactas de tipo solitón mediante la superposición no lineal de sub-frentes intrínsecos.

Palabras clave: Ecuación FitzHugh-Nagumo; Bifurcaciones; Ciclo límite; teoría cualitativa; Onda viajera.

Abstract

The purpose of this research is to present an algebraic-qualitative development of the FitzHugh-Nagumo equation, whose fundamental importance lies in the fact that this equation allows for a qualitative description of neuronal processes and is also adaptable to other nonlinear processes. This work consists of two main results. The first focuses on the dynamic analysis without spatial variation for the case in which the described system is subjected to constant excitation and has a single point of stability; additionally, numerical simulations for pulse excitation of finite duration are shown. The second includes an analysis of the wave-like behavior of the reduced equation. Due to the scaling nature of the equations, although they represent physical magnitudes, the units associated with them are arbitrary. In conclusion, the simplified FitzHugh-Nagumo model allows for a rigorous understanding of the excitability phenomenon. Dynamic analysis confirms that the rest potential acts as an asymptotically stable attractor, while under constant excitation the system exhibits limit cycles associated with Andronov-Hopf bifurcations. Finally, wave study demonstrates that the wavefront topology depends critically on its propagation speed, enabling the derivation of exact soliton-type analytical solutions through the nonlinear superposition of intrinsic sub-fronts.

Keywords: FitzHugh-Nagumo equation; Bifurcations; Limit cycle; Qualitative theory; Traveling wave.

OPEN ACCESS CC BY-NC-ND 4.0
© 2026 por el(los) autor(es). Publicado por la *Revista de la Facultad de Ingeniería UCV* en nombre de la Editorial Innovación Tecnológica (EdIT)
© 2026 by Author(s). Published by *Revista de la Facultad de Ingeniería UCV* on behalf of Editorial Innovación Tecnológica (EdIT).
Este artículo es de acceso abiero bajo los términos de la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.
This article is open access under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.
Disponible en el repositorio Institucional Saber UCV / Available in the Saber UCV institutional repository: https://saber.ucv.ve/ojs/index.php/rev_fiucv/

1. Introducción

El estudio de los procesos eléctricos desempeña un papel fundamental en la fisiología de las células nerviosas. Este conocimiento data desde el siglo XIX, cuando los trabajos pioneros del médico, fisiólogo y físico italiano Luigi Galvani sentaron las bases para la conceptualización de la corriente eléctrica en sistemas biológicos (Bresadola, 1998; Focaccia & Simili, 2007 Piccolino, 2008), posteriormente han habido avances lentos en la biología en lo que a la descripción algebraica de los procesos eléctricos en el sistema nervioso en egeneral. Es a mediados del siglo XX en que realmente hubo un avance importante, basado en una serie de experimentos propuesto por los fisiólogos y biofísicos británicos Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley estudiaron el comportamiento de las corrientes iónicas de Sodio (Na^+) y Potasio (K^+) en el axón gigante de la neurona de una especie de calamar al ser estimulada con una corriente externa. Finalmente, en 1952, estos investigadores propusieron un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, conocido como el modelo de Hodgkin y Huxley, este modelo describe la dinámica del potencial de membrana de una neurona ante la acción de una corriente aplicada (Huxley y Hodgkin, 1952).

Sus estudios revelaron que el voltaje observado se debe a la permeabilidad iónica, selectiva y dependiente, a su vez, del mismo voltaje, a través de la membrana de la célula nerviosa. El modelo en cuestión es muy satisfactorio en el sentido de que reproduce la mayoría de las propiedades electrofisiológicas del axón gigante del calamar. Sin embargo, por la dimensión y la no linealidad del sistema, se dificulta su análisis tanto cualitativo como cuantitativo. Por lo indicado, los estudios que se han efectuado con el modelo se apoyaron solamente en simulaciones computacionales, basadas en soluciones numéricas.

No obstante, con el fin de entender y comprender mejor el fenómeno neuroeléctrico, se han construido modelos de orden inferior tal que presentan una estructura algebraica más simple y que aún mantengan la esencia de la descripción de algunos de los procesos involucrados en la dinámica de una neurona. El trabajo de Richard FitzHugh (Fitzhugh, 1961), en el Laboratorio de Biofísica de los National Institutes of Health, USA, constituyó un gran avance en esta dirección. Basado en el trabajo previo de Balthazar van der Pol (van der Pol, 1926), propuso una simplificación considerable del modelo de Hodgkin y Huxley. Su modelo consta de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, una lineal y la otra cúbica. Siendo las mismas suceptibles de un análisis bastante completo, este sistema permite una comprensión cualitativa del fenómeno de excitabilidad.

Simultánea e independientemente del trabajo de FitzHugh, el ingeniero japonés Jin-ichi Nagumo propuso, como análogo neuronal, un circuito eléctrico no lineal (Naguno, et al., 1962), gobernado por un sistema de dos ecuaciones también semejantes a las de van der Pol. Actualmente, el análogo simplificado propuesto por estos autores, se le conoce como modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN).

Es imperativo destacar que, desde la década de 1970, la literatura en torno a este modelo ha crecido de manera exponencial, consolidándose en una vasta bibliografía que abarca numerosas publicaciones académicas (Scott, 1975; Casten et al., 1975; Lakshmanan, 1981; Rajagopal, 1984) y textos fundamentales (Volkenshtein, 1985; Tuckwell, 2009). Esta producción científica aborda enfoques teóricos, numéricos y cualitativos (Schiesser y Griffiths 2012), tanto para el estudio de sistemas dinámicos con enclavamiento espacial como para el análisis ondulatorio en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales no lineales (Flores, 2003; Cheng, 1998; Elagan et al. 2011). Dada la amplitud de las investigaciones existentes, resulta inalcanzable realizar una revisión exhaustiva de todas las fuentes en esta sección.

En la actualidad, la relevancia del modelo de FitzHugh-Nagumo trasciende las fronteras de la biofísica para consolidarse en diversas áreas de las ciencias. Su versatilidad ha permitido el estudio de una amplia gama de fenómenos, tales como:

En *Neurociencia* para estudiar la dinámica compleja de las neuronas y las redes neuronales (Sherwood 2022; Al Beattie et al. 2024).

En *Cardiología* para estudiar los miocitos (Keener, 1988; Glass y Josephson 1995; Nagai et al. 2000).

En *Biología* para sistemas neuronales y cardíacos, (Murray 2001; Gelens et al. 2014; Di Talia y Vergassola 2022);

En *Sistemas electrónicos y ópticos* para emular células neuronales utilizando circuitos electrónicos (Linares-Barranco et al. 1991; Takembo et al. 2019; Li et al. 2021).

En *matemáticas y física* se utiliza para comprender los comportamientos dinámicos exhibidos por los sistemas excitables a través del análisis de sistemas dinámicos (Rocsoreanu et al. 2012; Lei y Yang 2021; Brandibur y Kaslik 2022).

En fisicoquímica para estudiar la dinámica de las reacciones química (Kuramoto et al. 1998; Lin et al. 2004).

En ciencias de la computación para el desarrollo y análisis de algoritmos computacionales (Dehghan y Narimani 2018; Fuselier y Wright 2013; Rogers y McCulloch 1994).

Finalmente este trabajo está estructurado en dos bloques principales. La primera se enfoca al análisis dinámico sin variación espacial para el caso en que al sistema descrito se le aplica una excitación constante y posea un solo punto de estabilidad; adicionalmente, se muestran simulaciones numéricas para excitación tipo pulso de duración finita. El segundo parte contempla un análisis del comportamiento ondulatorio para la ecuación reducida tanto para un frente de onda de un solo pedestal, como la construcción de una solución tipo solitón con un frente de onda con dos pedestales.

2. Ecuación de Fitzhugh-Nagumo

Las ecuación de Fitzhug-Nagumo (FHN) unidimensional espacial en su forma general adimensional está conformado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de carácter no-lineal (Fitzhugh, 1961; Naguno et al., 1962; Tuckwell, 2009):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) - w + I(x,t) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= b(v - \gamma w) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f(v)$ es un polinomio de tercer grado de la siguiente forma:

$$f(v) = v(1-v)(v-a); \qquad 0 < a < \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

la función $v(x,t)$ está asociada a una tensión eléctrica de la membrana neuronal (referida a una tensión de referencia de polarización) y la función $w(x,t)$ está asociada a las concentraciones de Sodio-Potasio y se considera como una variable de restauración del sistema. Los parámetros b y γ son constantes positivas. El término $I(x,t)$ representa una corriente externa aplicada para efectos de excitación.

En algunos casos de estudio, a γ y al término $I(x,t)$ se le asignan con valor 0, en tales casos el conjunto de ecuaciones se les denomina ecuaciones de Fitzhug-Nagumo simplificadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= bv \end{aligned} \tag{3}$$

Adicionalmente, si se escoge $b = 0$, se obtiene la ecuación de Fitzhug-Nagumo reducida.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) \tag{4}$$

La ecuación anterior es la más simplificada en la que se puede efectuar análisis del tipo ondulatorio donde aparece el comportamiento de perturbaciones del tipo solitón. En lo sucesivo, las ecuaciones a analizar serán el sistema (1) para un análisis dinámico con enclavamiento espacias, y el sistema (4) para el análisis ondulatorio.

3. Análisis de fase de la ecuación FitzHugh-Nagumo

En esta sección, el análisis se enfoca en el comportamiento del sistema FitzHugh-Nagumo con un enclavamiento espacial ($\partial/\partial x = 0$) y excitación con corriente constante $I(x,t) = I = cte$, por lo que de (1) el sistema a tratar será el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= f(v) - w + I \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= b(v - \gamma w) \end{aligned} \tag{5}$$

Desde el punto de vista del análisis de sistemas lineales convencional, el Jacobiano del sistema (5) es el siguiente:

$$J(v,w)\Big|_{v_c,w_c} = \begin{pmatrix} f'(v) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix}_{v_c,w_c} \tag{6}$$

los autovalores $\lambda_{1,2}$ de (6) son:

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}T \mp \tfrac{1}{2}\left[T^2 - 4D\right]^{1/2} \tag{7}$$

donde T es la traza de J y D es la determinante de J

$$T = f'(v_c) - b\gamma \tag{8}$$

$$D = b - b\gamma f'(v_c) \tag{9}$$

Estas relaciones precedentes, permiten establecer las características de estabilidad de los puntos críticos de forma global y la corriente de excitación I. De la teoría de sistemas lineales las características de la estabilidad de los puntos críticos se resumen en un gráfico del plano (T, D) mostrado en la Figura 1, donde se muestra las regiones con el respectivo tipo de estabilidad.

Los resultados experimentales de Hodgkin y Huxley (1952) indican que las neuronas presentan un solo estado de equilibrio correspondiente al potencial de reposo de la membrana. Para analizar esta situación en el modelo matemático, se debe considerar que los parámetros del sistema FHN tienen valores tales que garantizan la existencia de un único punto de equilibrio estático. Para ello, se examinan dos casos: el caso autónomo no-excitado, cuando la estimulación externa es cero ($I = 0$) y el caso autónomo excitado, cuando a la célula se aplica, externamente, una corriente continua ($I \neq 0$).

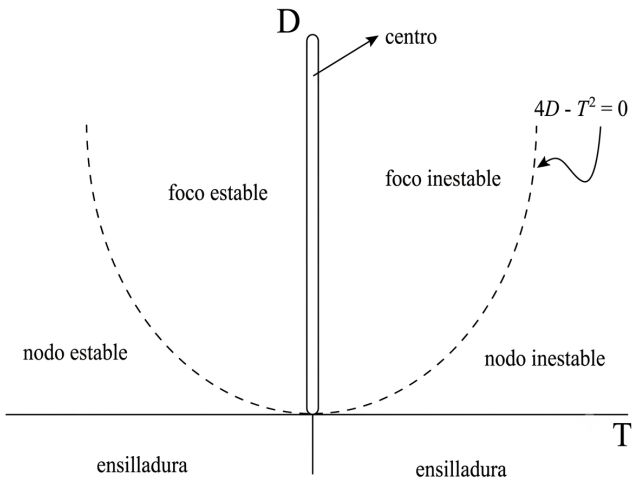


Figura 1. *Esquema de estabilidad de puntos críticos del sistema* (5).

3.1. Caso autónomo no-excitado ($I = 0$)

Analizando primero el caso en el que $I = 0$, esto significa que a la membrana neuronal no se le aplica corriente alguna. Bajo estas condiciones, los experimentos muestran que el potencial de reposo se comporta como un atractor, es decir, si el potencial de la membrana es perturbado (con un pulso de corriente),

este espontáneamente se recupera regresando a su valor inicial (potencial de reposo).

En el modelo matemático, cuando $I = 0$, el punto $(v_c, w_c) = (0, 0)$, es el único estado de equilibrio del sistema FHN: las ceroclinas de este sistema se intersectan en el origen del espacio de fase. Para determinar si este estado de equilibrio del modelo es estable, como debe corresponder a la realidad biológica observada, de (7) para $(v_c, w_c) = (0, 0)$ los autovalores son los siguientes:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a + b\gamma}{2} \mp \frac{\sqrt{(a - b\gamma)^2 - 4b}}{2} \tag{10}$$

Aquí se generan dos casos: los autovalores son reales ó los autovalores son complejos:

- **Caso real.** Este se produce cuando $(a - b\gamma)^2 > 4b$, y para que los autovalores sean menores que cero, se tiene que cumplir que $a + b\gamma > \sqrt{(a - b\gamma)^2 - 4b}$, lo cual implica que $\gamma a > -1$; ésto se cumple siempre puesto que en el plantemiento del modelo FHN se ha supuesto que $a, b > 0$ y $\gamma = 0$.
- **Caso complejo.** Si $(a - b\gamma)^2 < 4b$, la parte real de los autovalores es menor que cero si $a + b\gamma > 0$. Esto también se cumplirá siempre, ya que $a, b > 0$ y $\gamma \geq 0$.

Por lo antes expuesto, se puede establecer que, si en el sistema de FHN existe un solo punto crítico y está en ausencia de estimulación externa (cuando $I = 0$), para todo valor de los parámetros $a, b > 0$ y $\gamma > 0$, el estado de equilibrio $(v_c, w_c) = (0, 0)$ es siempre asintóticamente estable.

3.2. Caso autónomo excitado ($I \neq 0$)

La existencia de puntos críticos en el sistema (5) depende de los valores de a, I, γ, b, las cuales pueden variar de un punto crítico a tres puntos críticos. En las Figuras 2 a 5, se muestran en forma esquemática los diferentes casos para los puntos críticos posibles del sistema.

- Casos para sistema (5) con un solo punto crítico

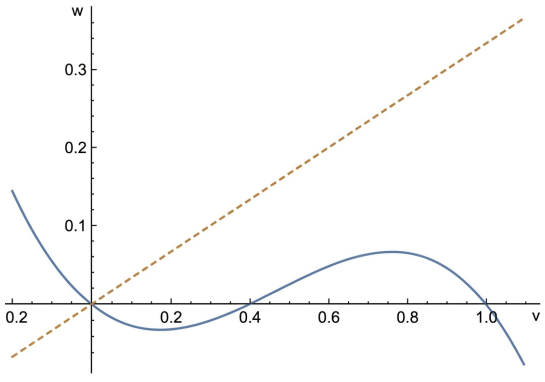


Figura 2. *Ceroclinas del sistema con un solo punto crítico caso 1.*

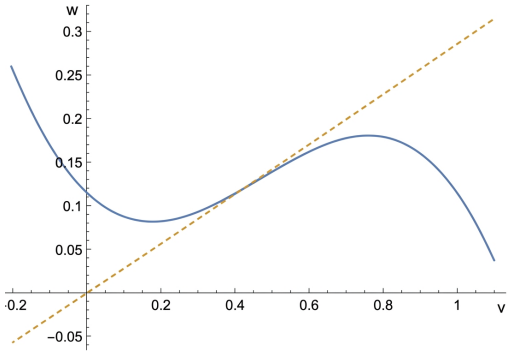


Figura 3. *Ceroclinas del sistema con un solo punto crítico, caso 2.*

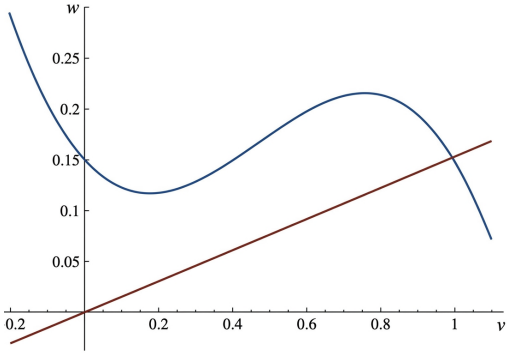
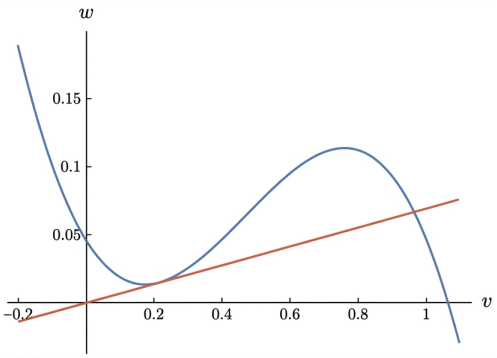
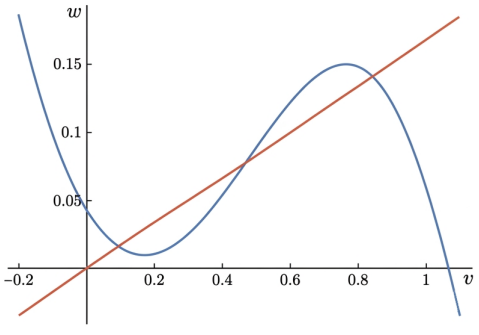


Figura 4. *Ceroclinas del sistema con un solo punto crítico, caso 3.*

- Casos para sistema (5) con más de un punto crítico.



(a) Ceroclinas del sistema con dos puntos críticos



(b) Ceroclinas del sistema con tres puntos críticos

Figura 5. *Casos para sistema (5) con dos y tres puntos críticos*

En términos algebraicos es más útil analizar las condiciones y las propiedades de los puntos críticos, que el valor del punto crítico (v_c, w_c) como tal; de (5) se puede definir la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} h(v) &= f(v) - v/\gamma + I \\ &= -v^3 + (1+a)v^2 - (a + 1/\gamma)v + I \end{aligned} \tag{11}$$

donde un punto crítico (v_c, w_c) satisface la ecuación $h(v_c) = 0$; sean v_1 y v_2 las raíces de $h'(v)$, donde:

$$v_1 = \tfrac{1}{3}(1+a) - \tfrac{1}{3}\sqrt{\Delta} \tag{12}$$
$$v_2 = \tfrac{1}{3}(1+a) + \tfrac{1}{3}\sqrt{\Delta} \tag{13}$$
$$\Delta = (1+a)^2 - 3(a + 1/\gamma) \tag{14}$$

con estos datos se pueden deducir las condiciones de los puntos críticos respecto a Δ e I:

- Si $\Delta < 0$, existe un solo punto crítico $\forall I$.
- Si $\Delta = 0$, existe un solo punto crítico $\forall I$.

Para $\Delta > 0$, el análisis es más elaborado; analizando el comportamiento de $h'(v)$ y $h''(v)$ para $v_{1,2}$ se obtiene que para v_1, la función $h(v)$ es un mínimo local y para v_2, la función $h(v)$ es un máximo local; definiendo los parámetros auxiliares:

$$I_{inf} = f(v) - v/\gamma\Big|_{v=v_1} \tag{15}$$
$$I_{sup} = f(v) - v/\gamma\Big|_{v=v_2} \tag{16}$$

las condiciones son:

- Si $I > I_{sup}$ ó $I < I_{inf}$, existe un solo punto crítico.
- Si $I = I_{sup}$ ó $I = I_{inf}$, existen dos puntos críticos.
- Si $I_{inf} < I < I_{sup}$, existen tres puntos críticos.

en la Figura 6, se esquematiza en forma global las condiciones, las regiones y las fronteras para la cantidad de puntos críticos del sistema (5).

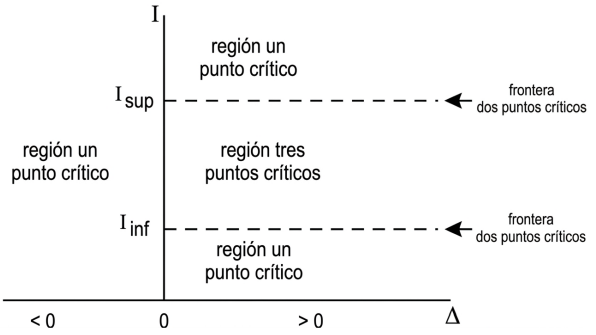


Figura 6. *Esquema de las condiciones y regiones de puntos críticos sistema* (5)

El trabajo se enfocará principalmente en dos premisas las condiciones donde existe un solo punto crítico ya que dicha condición es la que se evidencia en forma experimental, que desde el punto de vista algebraico corresponde al caso en que $\Delta \leq 0$. El caso correspondiente $\Delta > 0$ no se analizará en este trabajo, ya que implica un desarrollo sobre la teoría de estabilidad de Liapunov para determinar el comportamiento en la estabilidad de los puntos críticos involucrados, el cual va mas allá del propósito original de este trabajo. Sin embargo, lo que se puede inferir de la Figura 6, es la existencia de bifurcaciones para la situación $\Delta > 0$ ya que existen zonas con transiciones abruptas en la cantidad de puntos críticos inclusive fronteras donde ellas mismas de por si son transiciones abruptas.

- caso $\Delta < 0$

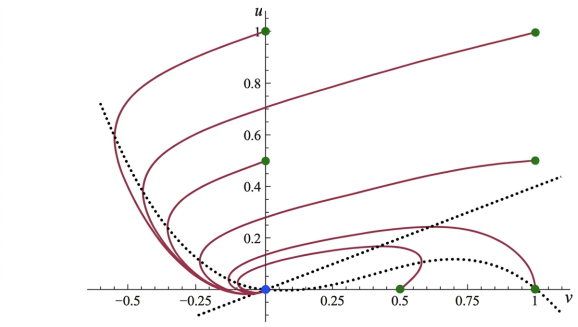


Figura 7. *Retrato de fase sistema* (5), $a = 0,15$; $b = 0,14$; $\gamma = 2,5$; $I = 0,0$.

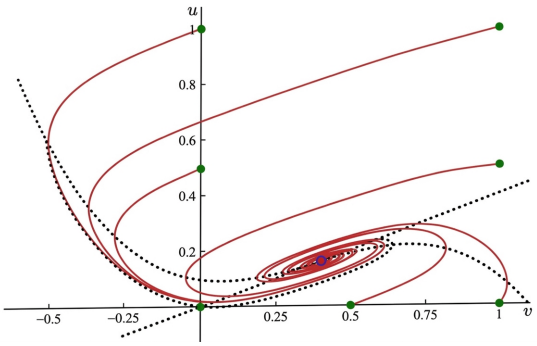


Figura 8. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15; b = 0,14;$ $\gamma = 2,5; I = 0,1$.

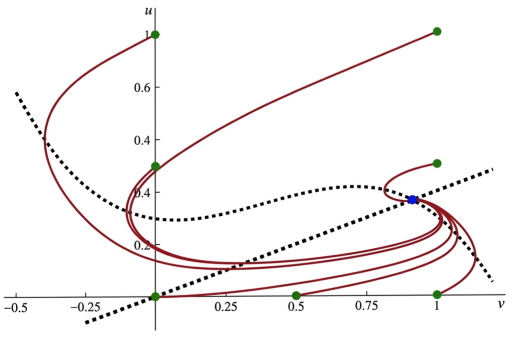


Figura 9. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15; b = 0,14;$ $\gamma = 2,5; I = 0,3$.

- Caso $\Delta < 0$

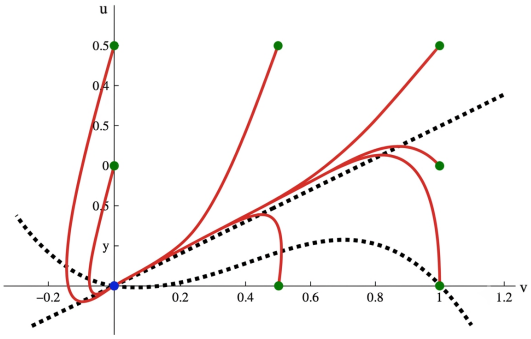


Figura 10. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 1,14;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,0.$

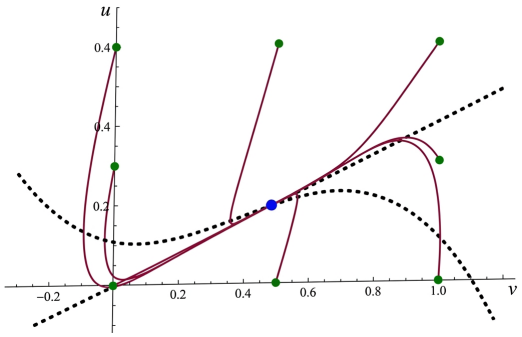


Figura 11. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 1,14;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,11.$

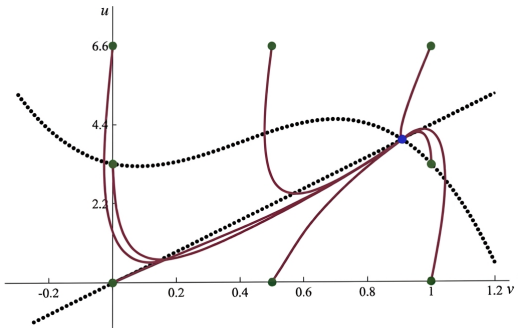


Figura 12. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 1,14;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,3.$

- Caso $\Delta = 0$

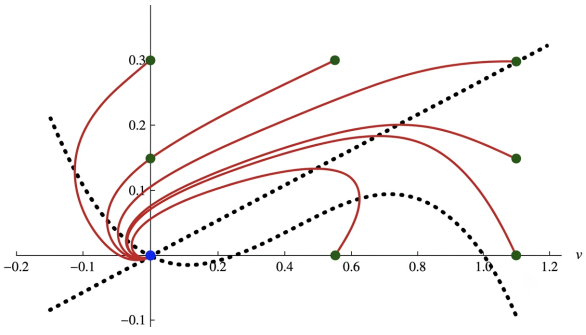


Figura 13. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,1;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,0.$

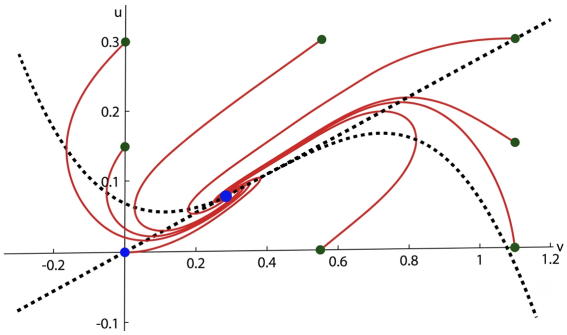


Figura 14. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,1;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,07.$

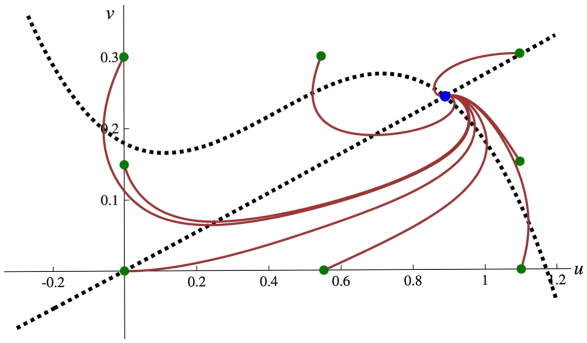


Figura 15. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,1;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,18.$

- Caso $\Delta = 0$

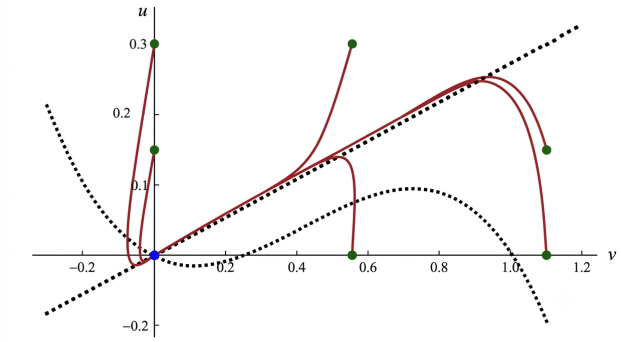


Figura 16. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,8;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,0.$

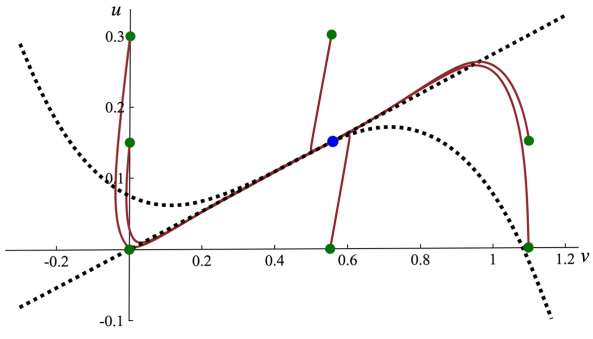


Figura 17. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,8;$ $\gamma = 2,5;\ I = 0,075.$

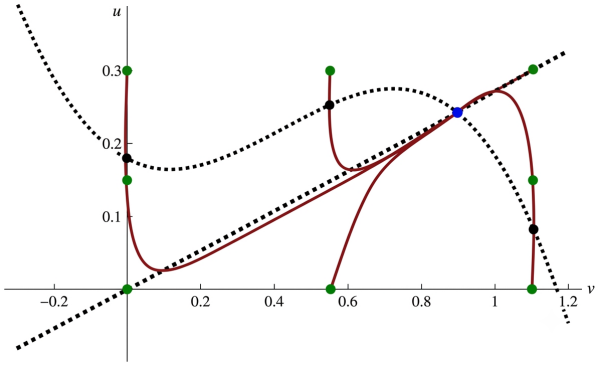


Figura 18. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,25;\ b = 0,8;\ \gamma = 2,5;\ I = 0,18.$

3.3. Régimen Oscilatorio (bifurcaciones)

Continuando con la premisa que se cumplen las condiciones de existencia de un solo punto crítico ($\Delta \leq 0$), y desarrollando (8) se obtiene que:

$$T = -3v^2 + 2(1+a)v - (a + b\gamma) \tag{17}$$

cuyas raíces son:

$$v_1 = \tfrac{1}{3}(1 + a - \sqrt{\delta_1}) \tag{18}$$

$$v_2 = \tfrac{1}{3}(1 + a + \sqrt{\delta_1}) \tag{19}$$

donde $\delta_1 = (1+a)^2 - 3(a + b\gamma)$.

- Si $\delta_1 < 0$ y observando (17) la traza siempre será negativa, y de la Figura 1 se extrae que el punto crítico es estable (ya sea nodo ó foco), esto indica que el punto crítico siempre es un atractor $\forall\, I$. En este caso, el incrementar la corriente tiene sólo el efecto de aumentar el valor de la componente v del equilibrio.

- Si $\delta_1 \geq 0$ esto implica que existen raíces reales, y por ende la traza T tiene un cambio de signo, de la Figura 1 se extrae que el punto crítico es inestable; la situación anterior se conoce como el escenario de la *bifurcación de Andronov-Hopf*. Asociado a este proceso de inestabilización del equilibrio aparece un ciclo límite estable, y adicionalmente, este ciclo depende de las amplitudes de la corriente de excitación. El rango está dado por los siguientes valores:

$$I_{inf} = -v_1(1 - v_1)(v_1 - a) + v_1/\gamma \tag{20}$$

$$I_{sup} = -v_2(1 - v_2)(v_2 - a) + v_2/\gamma \tag{21}$$

lo que significa que para $b\gamma \leq \frac{1}{3}(a^2 - a + 1)$ y si I cumple

$$I < I_{inf} \quad \text{ó} \quad I > I_{sup} \quad \Rightarrow \quad \text{el punto crítico es estable}$$

$$I_{inf} \leq I \leq I_{sup} \quad \Rightarrow \quad \text{el punto crítico es inestable}$$

En las Figuras 19 a 21, se muestra este caso y además se exhibe cómo al variar los valores de la corriente I se encuentra la transición, entre régimen excitable y el régimen oscilatorio de la dinámica del sistema.

En las Figuras 22 y 23, se muestra que este régimen oscilatorio está asociado a una inestabilidad del punto crítico donde también se evidencia la existencia de una frontera límite

- Caso donde se muestra la bifurcación ($I_{inf} = 0,0739,\ I_{sup} = 0,122$)

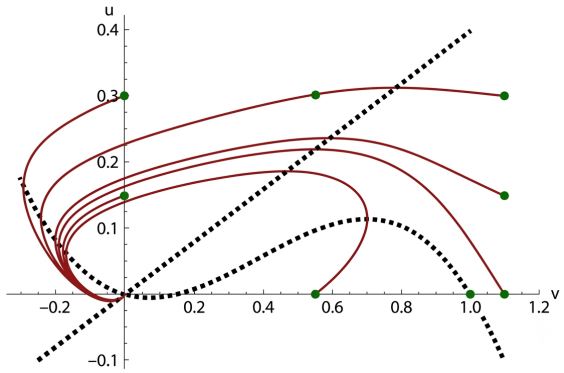


Figura 19. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 0,08;\ \gamma = 2,5;\ I = 0,0.$

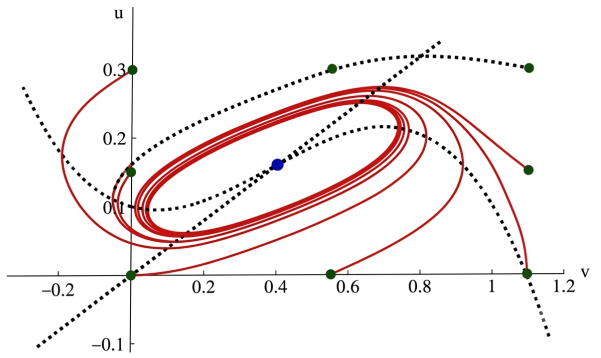


Figura 20. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 0,08;\ \gamma = 2,5;\ I = 0,1.$

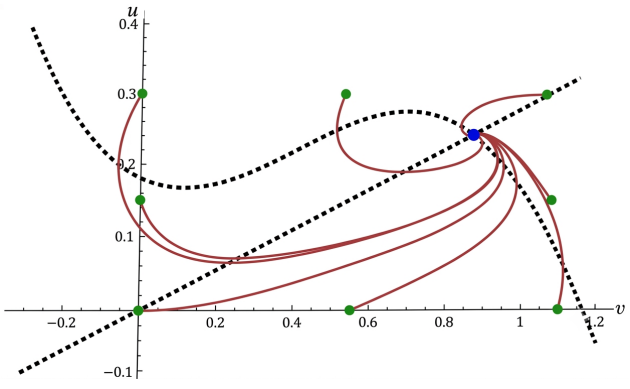


Figura 21. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15;\ b = 0,08;\ \gamma = 2,5;\ I = 0,22.$

- Esquemas mostrando el comportamiento de frontera límite para la situación donde ocurre la condición de bifurcación de Andronov-Hopf ($I_{inf} = 0,0495$, $I_{sup} = 0,146$)

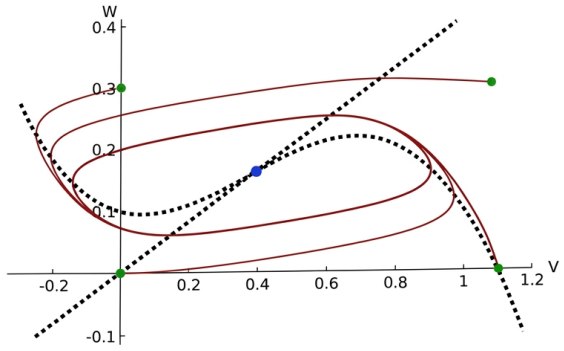


Figura 22. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15$; $b = 0,03$; $\gamma = 2,5$; $I = 0,1$ *con condiciones iniciales ubicados fuera de la frontera límite .*

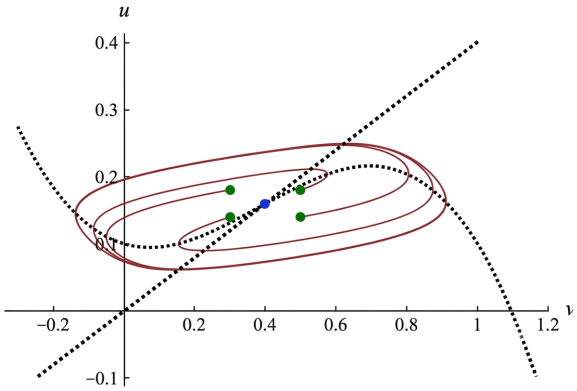


Figura 23. *Retrato de fase sistema* (5) $a = 0,15$; $b = 0,03$; $\gamma = 2,5$; $I = 0,1$ *con condiciones iniciales ubicados dentro de la frontera límite, evidenciando el comportamiento de la inestabilidad del punto crítico.*

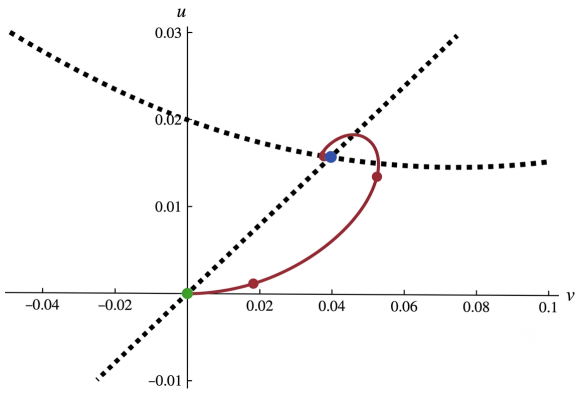
3.4. Excitación con pulso de corriente

En las secciones anteriores se ha mostrado el comportamiento del sistema (5) para el caso de excitación estática (el tiempo de duración de la excitación es infinitamente largo respecto a cualquier tiempo de relajación del sistema). Sin embargo, es sabido en forma experimental que el proceso de transmisión de información de índole nervioso es influenciado principalmente por la rata de pulsos transmitidos y en menor grado por la amplitud de los mismos, de allí que sea un poco más realista este tipo de tratamiento tratamiento.

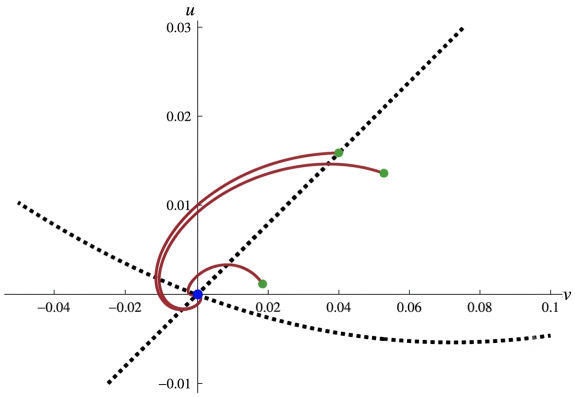
Los resultados obtenidos son puramente numéricos, sin embargo, todo el análisis anterior es estremadamente útil para establecer los comportamientos asintóticos ya sea para la excitación desde un estado de reposo, y la correspondiente relajación a partir del cese de la excitación. También este tipo de tratamiento pone en evidencia la condición de potencial umbral, es decir, el sistema presenta una inercia propia aun después del cese de excitación, y además se evidencia que esta inercia tiene un límite de saturación.

Los resultados se muestran en las Figuras 24 a 35, las mismas se presentan como una combinación de los retrato de fase (v, w) del sistema (5) para estado excitado y estado de-excitado, conjuntamente con la respuesta en tiempo del potencial v para distintos niveles de excitación y distintos tiempos de duración del pulso. Las Figuras 24 a 29, corresponden al caso de un sistema con carácter no oscilatorio, y Las Figura 30 a 35 corresponden al caso de un sistema con carácter oscilatorio (con bifurcación).

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,02; t_1 = 1,0, t_2 = 5,0; t_3 = 15,0; t_4 = 22,0$.



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de excitación.

Figura 24. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana* (5) $a = 0,15$; $b = 0,14$; $\gamma = 2,5$. *En* (*a*) *se muestran las órbitas según la duración del pulso con condiciones iniciales de reposo; en* (*b*), *se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

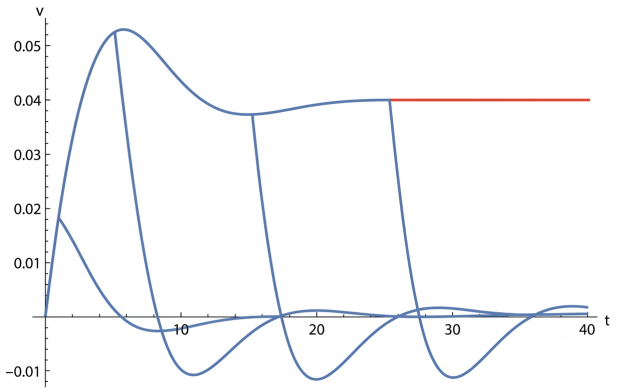
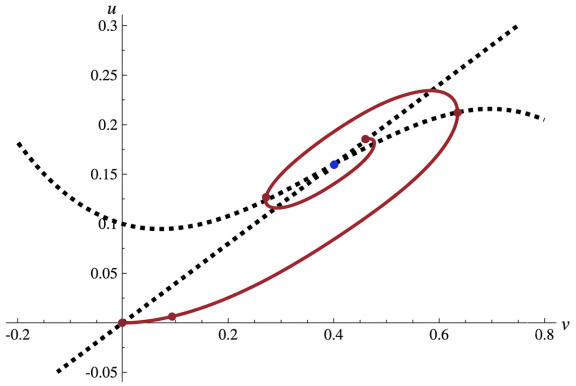
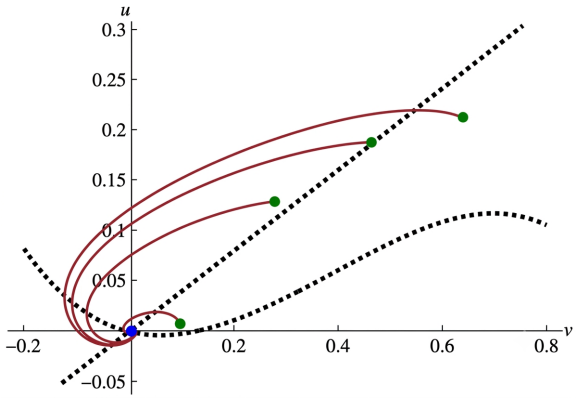


Figura 25. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,1; t_1 = 1,0; t_2 = 10,0, t_3 = 25,0, t_4 = 45,0$.



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de excitación.

Figura 26. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana (5) $a = 0,15$, $b = 0,14$, $\gamma = 2,5$. En (a) se muestran las órbitas según la duración del pulso con condiciones iniciales de reposo; en (b), se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

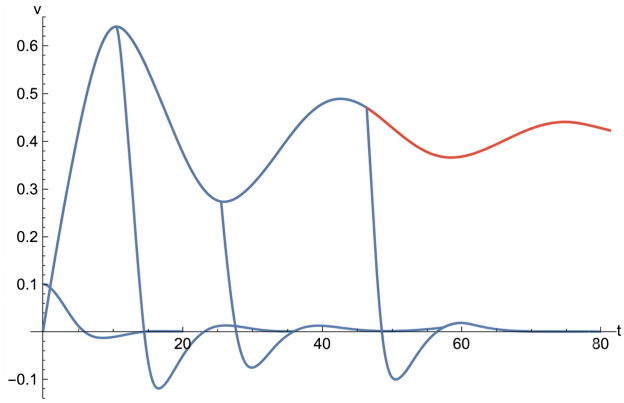
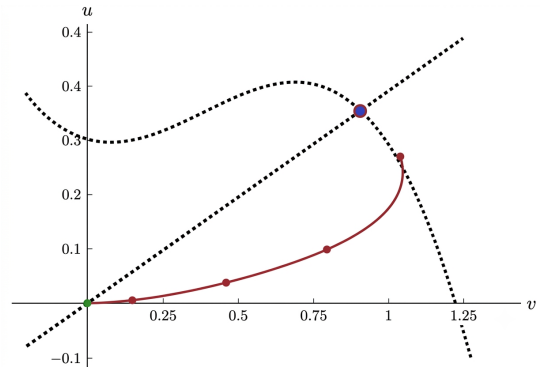
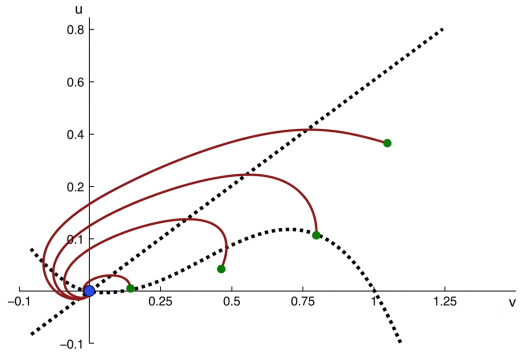


Figura 27. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,3; t_1 = 0,7, t_2 = 1,7,0; t_3 = 3,5, t_4 = 7,0$.



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de excitación.

Figura 28. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana (5) $a = 0,15$, $b = 0,14$, $\gamma = 2,5$. En (a) se muestran las órbitas según la duracón del pulso con condiciones iniciales de reposo; en (b), se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

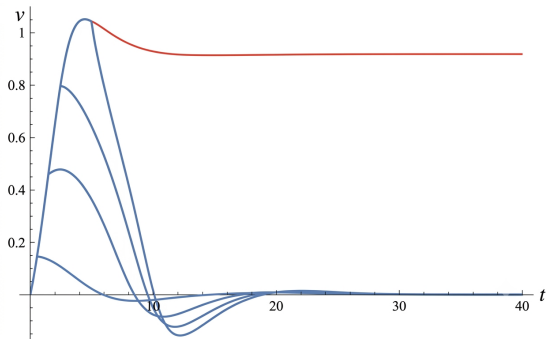
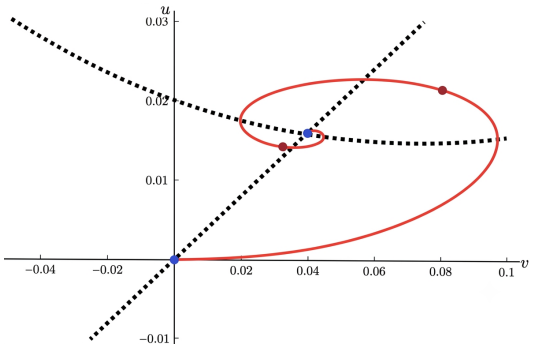
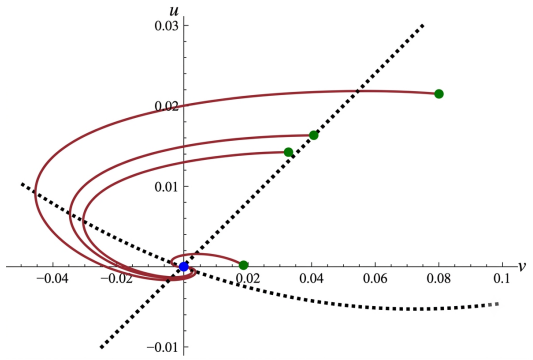


Figura 29. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,02; t_1 = 1,0; t_2 = 15,0; t_3 = 35,0; t_4 = 55,0.$



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de en condición de excitación excitación.

Figura 30. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana (5) $a = 0,15$, $b = 0,03$, $\gamma = 2,5$. En (a) se muestran las órbitas según la duracón del pulso con condiciones iniciales de reposo; en (b), se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

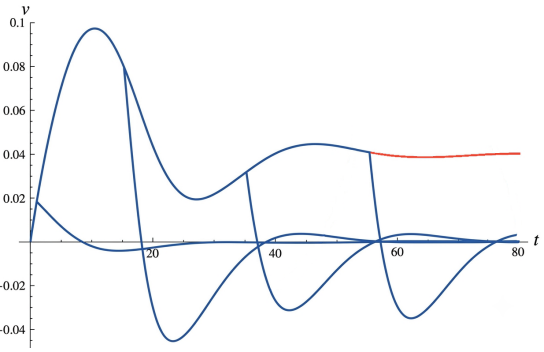
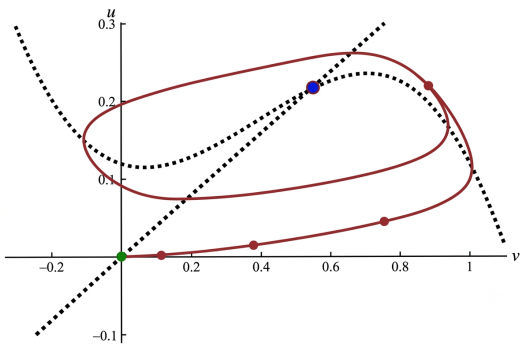
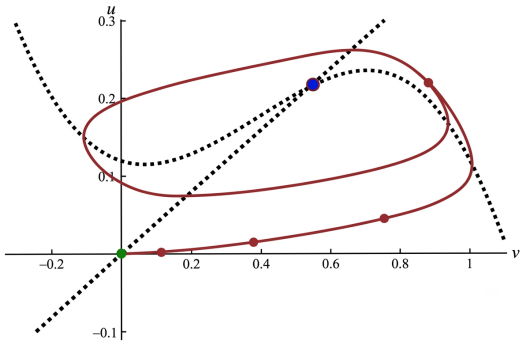


Figura 31. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,12; t_1 = 1,0, t_2 = 3,0; t_3 = 5,0; t_4 = 15,0.$



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de excitación

Figura 32. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana (5) a = 0.15, b = 0.03, y = 2.5. En (a) se muestran las órbitas según la duración del pulso con condiciones iniciales de reposo; en (b), se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

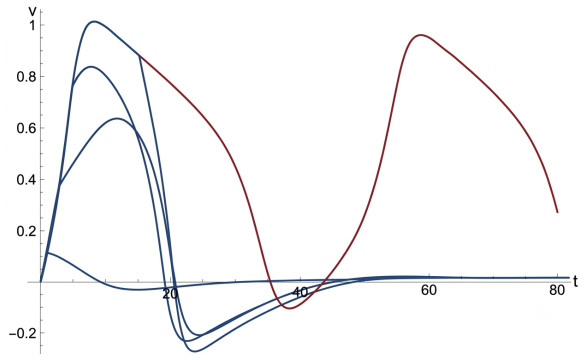
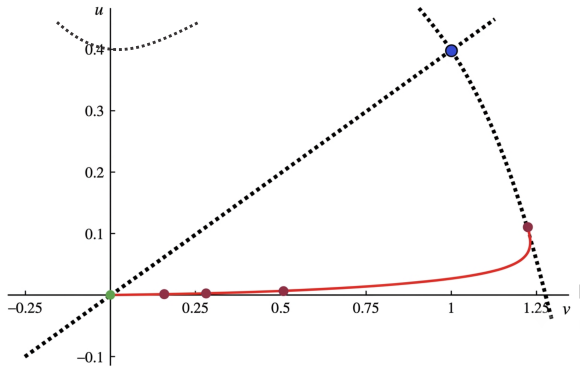
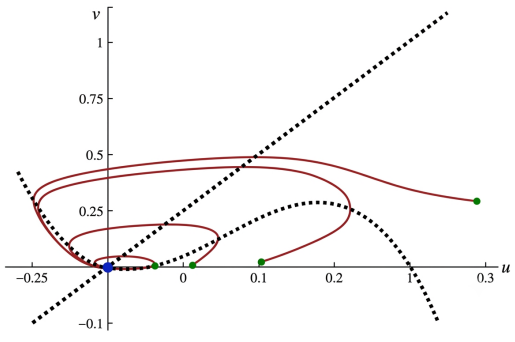


Figura 33. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

Resultados de potencial de membrana para el caso en que la excitación es un pulso de corriente con duración finita. $I_{estim} = 0,4; t_1 = 0,4, t_2 = 0,7; t_3 = 1,2; t_4 = 5,0$.



(*a*) Retrato de fase para evolución del sistema en condición de excitación.



(*b*) Retrato de fase para condición de cese de excitación.

Figura 34. *Orbitas de respuesta del potencial de la membrana (5) $a = 0,15$; $b = 0,03$; $\gamma = 2,5$. En (a) se muestran las órbitas según la duracón del pulso con condiciones iniciales de reposo; en (b), se muestran las órbitas de relajación usando como condición inicial el estado precedente correspondiente.*

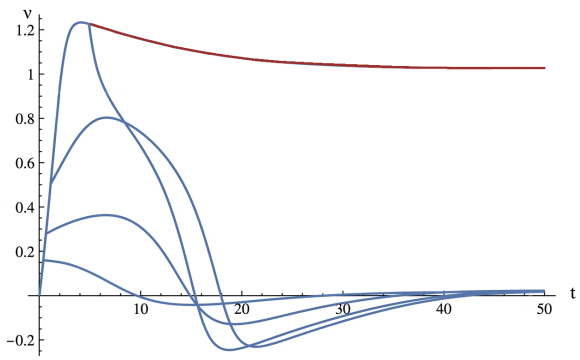


Figura 35. *Respuesta temporal del potencial de la membrana (5) con condiciones iniciales y finales en estado de reposo. Las curvas en azul muestran las respuestas para las distintas duraciones de los pulsos de corriente. La curva en rojo corresponde al caso de estimulación bajo la condición de excitación con un pulso de corriente de duración infinita.*

De los gráficos se puede inferir lo siguiente:

- Existen situaciones de intensidad y duración de excitación donde nunca alcanza el potencial umbral de disparo.
- Existen situaciones que dependiendo de la intensidad y dependiendo de la duración de excitación donde se alcanza o no se alcanza el potencial umbral de disparo.
- Existen situaciones de intensidad y duración de excitación donde aparece condición de saturacíon (en el caso no oscilatorio), lo que quiere decir que no importa que tan intensa sea el nivel de corriente, la respuesta del sistema no crece en forma indefinida.

Se debe mencionar que las transiciones en los niveles del pulso de excitación deben ser instantáneos, si las transiciones son extremadamente lentas, la respuesta del sistema es completamente distinta a la morfología del los potenciales de acción nerviosa y más bien tiende a ser siempre estable y apareada a la excitación.

4. Análisis Ondulatorio ecuación FHN reducida

Uno de los aspectos en que se analiza (4) es describir algunas propiedades del tipo ondulatorio. Se buscan soluciones del tipo onda viajera $v(x,t) = v(z)$, donde $z = x - ct$. La forma convencional consiste en transformar (4) al espacio z el cual queda de la siguiente forma:

$$-c\frac{dv}{dz} = \frac{d^2v}{dz^2} + v(1-v)(v-a) \qquad (22)$$

la ecuación anterior ha sido objeto de extensos análisis para la búsqueda de soluciones del tipo ondas solitón. En lo sucesivo se mostrará un análisis básico en espacio de fase, y también se mostrará dos técnicas para la determinación de algunas soluciones analíticas particulares.

4.1. Análisis en plano de Fase

definiendo un espacio de fase (v, w) donde $w = \frac{dv}{dz} = v'$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones autónomo

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= -cw - v(1-v)(v-a) \end{aligned} \tag{23}$$

del sistema (23) se deduce que existen tres puntos críticos (v_c, w_c); donde $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ y $P_3 = (1,0)$; con un tratamiento semejante al de la sección anterior, el Jacobiano del sistema (23) es el siguiente:

$$J(v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v(v-a) - v(1-v) - (v-a)(1-v) & -c\gamma \end{pmatrix}_{v_c, w_c} \tag{24}$$

los autovalores $\lambda_{1,2}$ de (24) para los puntos críticos P_1 y P_3 son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \mp \frac{1}{2}\left[c^2 + 4a\right] \tag{25}$$

para el punto críticos P_3 los autovalores $\lambda_{1,2}$ son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \mp \frac{1}{2}\left[c^2 - 4a(1-a)\right]^{1/2} \tag{26}$$

donde $T = -c < 0$ es la traza de J, y $D = 4a(1-a) > 0$ es la determinante de J, esto indica que el punto crítico P_3 es asintóticamente estable, y adicionalmente si $c^2 < 4a(1-a)$, P_3 es un nodo y si $c^2 > 4a(1-a)$, P_3 es una espiral. En las Figuras 36 a 41, se muestran unos resultados típicos para los casos indicados para c.

- Orbitas sistema (23) para el caso $a = 0,4$, $c^2 > 4a(1-a)$.

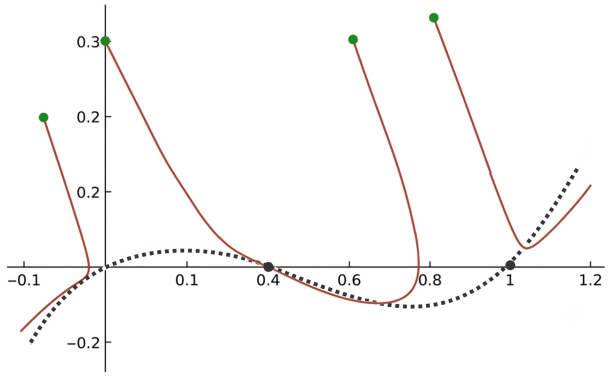


Figura 36. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v \geq 0$ y w arbitrarias*

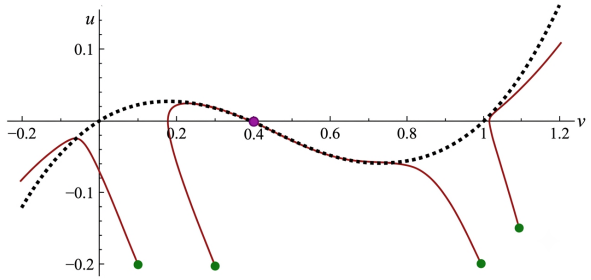


Figura 37. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v < y$ w arbitrarias.*

- Orbitas sistema (23) para el caso $a = 0,4$, $c^2 > 4a(1-a)$.

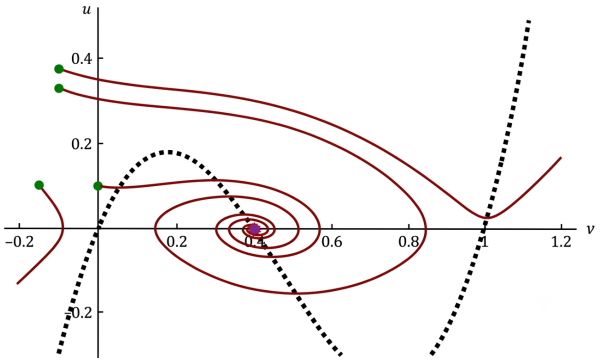


Figura 38. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v \geq 0$ y w arbitrarias*

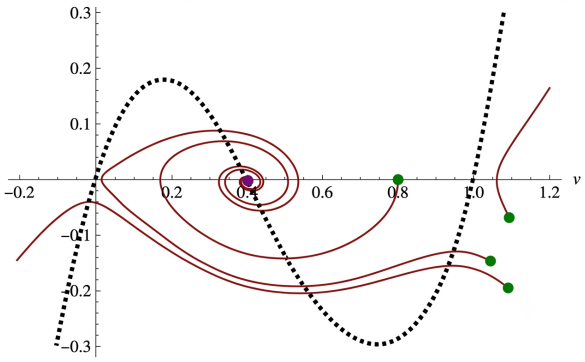


Figura 39. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v < y$ w arbitrarias*

- Orbitas sistema (23) para el caso $a = 0,4$, $c = 0$.

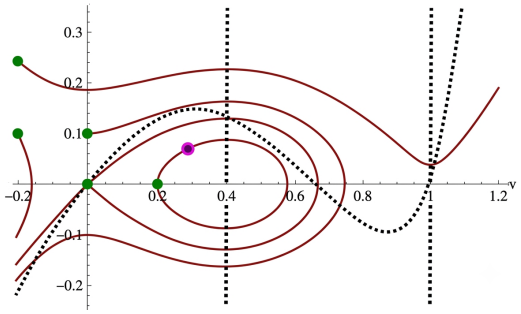


Figura 40. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v \geq 0$ y w arbitrarias*

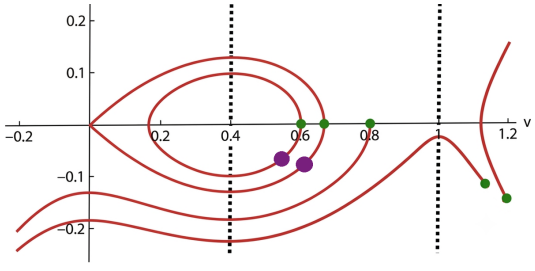


Figura 41. *Retrato de fase sistema (23) con condiciones iniciales $v < y$ w arbitrarias.*

4.2. Soluciones Analíticas

La cuestión es determinar soluciones del tipo onda viajera para (23), por un procedimiento convencional se obtiene la siguiente ecuación que describe las órbitas.

$$\frac{dw}{dv} = \frac{cw + v(1-v)(a-v)}{w}$$

implica

$$v\left(\frac{dw}{dv} - c\right) = cw + v(1-v)(a-v) \tag{27}$$

por la forma de la ecuación obtenida, un intento preliminar es hallar soluciones del tipo polinomial $w = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3$; al introducirlo en (27) e igualando los términos polinomiales del mismo orden, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0(a_1 - c) &= 0 \\ 2a_0a_2 + a_1(a_1 - c) &= a \\ 3a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_2(a_1 - c) &= -(1+a) \\ 3a_1a_3 + 2a_2^2 + a_3(a_1 - c) &= 1 \\ 3a_2a_3 + 2a_2a_3 &= 0 \\ 3a_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

de aquí que $a_3 = 0$ y $a_2 = \pm 1/\sqrt{2}$, por lo que el sistema remanente a resolver es:

$$\begin{aligned} a_0(a_1 - c) &= 0 \\ 2a_0a_2 + a_1(a_1 - c) &= a \\ 2a_1a_2 + a_2(a_1 - c) &= -(1+a) \end{aligned}$$

aquí se presentan dos conjuntos de soluciones:

Caso 1.

$$c = -\frac{1+a}{2a_2}, \qquad a_0 = \frac{a}{2a_2}, \qquad a_1 = -\frac{1+a}{2a_2}$$

Caso 2.

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = -\frac{a}{2a_2}, \qquad c = \frac{1}{2a_2}$$

Caso 3.

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = -\frac{1}{2a_2}, \qquad c = \frac{a}{2a_2}$$

Adicionalmente, existen dos caso más que también son solución de (27), los cuales son:

Caso 4. La función $w = \beta_1 v(1-v)$, que por un procedimiento análogo a los anteriores arroja el siguiente resultado:

$$\beta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-2a)$$

Caso 5. La función $w = \beta_1 v(a-v)$, el cual arroja el siguiente resultado:

$$\beta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a-2)$$

Todos los casos indicados son isomorfos (w = polinomios de segundo grado en v), cuya solución general para $v(z)$ se obtiene integrando la primera ecuación de (23) y regresando el cambio de variable de z:

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2a_2}\left[\mu \tan(\mu(x+ct)/2 + A_0) - a_1\right] \tag{28}$$

donde $\mu = \sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}$ y A_0 es una constante de integración (en ocasiones denominada ángulo de fase inicial).

A modo de ejemplo, usando el caso 4 ($c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2a)$) e imponiendo que $v(0) = 1/2$ se obtiene el siguiente resultado:

$$v(x,t) = -\tfrac{1}{2}\left[\tanh\left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}(x+ct)\right) - 1\right] \tag{29}$$

en la siguiente Figura 42 se muestra la distribución espacio-temporal de la amplitud del frente de onda.

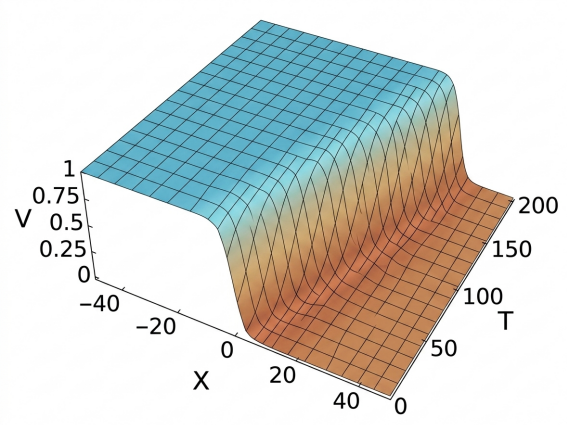


Figura 42. *Frente de Onda solitón caso 4 (23) para el caso $a = 0{,}4$.*

Puesto que el problema es no lineal, se infiere que las soluciones indicadas no son las únicas, por lo que se han propuesto otras técnicas para construcción de soluciones analíticas adicionales del tipo ondulatorio para (4), una de ellas es obtenida por el procedimiento de Painlevé (Cheng, 1998, p. 149), otra técnica consiste en aplicar una transformación bilineal (Elagan, et al., 2011); donde se parte de la premisa que (4) admite una solución del tipo:

$$v(x,t) = \alpha \frac{g_x(x,t)}{g(x,t)} \tag{30}$$

donde α es una constante no arbitraria a determinar. Introduciendo (30) en (4) e igualando los términos de la misma potencia en g e imponiendo que se desea una solución no trivial, esto implica que $\alpha = \sqrt{2}$ por lo que el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} g_t - 3g_{xx}\sqrt{2}(1-a)g_x &= 0 \\ g_{tx} - g_{xxx} + ag_x &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

asumiendo que $g(x,t) = g(x+\eta t) = g(z)$ el sistema anterior se transforma en la siguiente:

$$\begin{aligned} \eta g' - 3g'' + \sqrt{2}(1+a)g' &= 0 \\ \eta g'' - g''' + ag' &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

donde $g' = \frac{dg}{dz}$, buscando soluciones de la forma $g = \exp(\lambda z)$, el sistema indicial (λ, η) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \eta + \sqrt{2}(1+a) - 3\lambda &= 0 \\ \lambda(-\lambda^2 + \eta\lambda + a) &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

esto indica que existen tres posible autovalores $\lambda_{1,2,3}$ que cumplan con el sistema indicial, una solución obvia es $\lambda_1 = 0$ que arroja que $\eta_1 = -\sqrt{2}(1+a)$, los otros autovalores se hallan resolviendo el sistema combinado remanente arrojando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \tfrac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2-a) \\ \lambda_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2a-1) \end{aligned} \tag{34}$$

lo que permite establecer una expresión para $g(x,t)$:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= A_1 + A_2 \exp\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2a-1)t\right)\right] \\ &+ A_3 \exp\left[\tfrac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2-a)t\right)\right] \end{aligned} \tag{35}$$

finalmente, con (30) la solución $v(x,t)$ es la siguiente:

$$u(x,t) = \frac{u_1 + u_2}{A_1 + u_3 + u_4} \tag{36}$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= A_2 \exp\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2a-1)t\right)\right] \\ u_2 &= A_3 a \exp\left[\tfrac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2-a)t\right)\right] \\ u_3 &= A_2 \exp\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2a-1)t\right)\right] \\ u_4 &= A_3 \exp\left[\tfrac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(2-a)t\right)\right] \end{aligned}$$

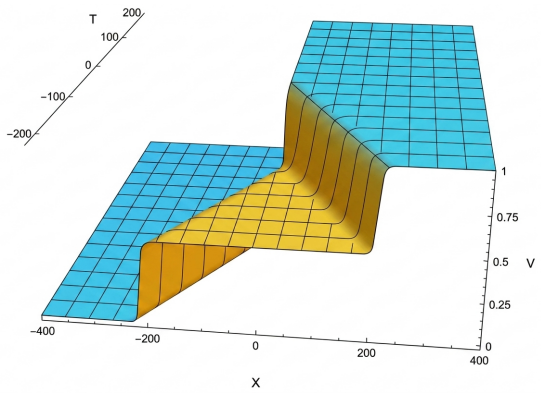


Figura 43. *Frente de Onda solitón* (23) *para el caso* $a = 0,5, A1, A2, A3 = 1$.

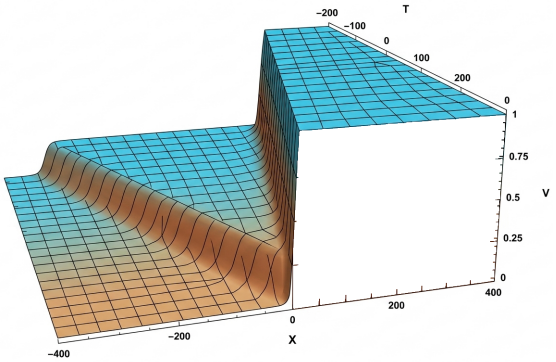


Figura 44. *Frente de Onda solitón* (23) *para el caso* $a = 0,25$; $A_1, A_2, A_3 = 1$, *comportamiento regresivo.*

Se debe indicar el hecho que la solución (36) se compone de la combinación no-lineal de dos sub-frentes de onda, cuyas velocidades corresponden a las velocidades obtenidas en las soluciones solitonicas del caso 4 y el caso 5 analizadas anteriormente.

5. Conclusiones

A partir del análisis cualitativo, numérico y analítico desarrollado en este trabajo en torno a la ecuación de FitzHugh-Nagumo, se desprenden que:

En ausencia de estimulación externa ($I = 0$), el modelo presenta un comportamiento fisiológicamente congruente y matemáticamente robusto. El origen $(v_c, w_c) = (0,0)$ se erige como el único punto de equilibrio del sistema. Además se demostró que, para cualquier combinación admisible de los parámetros intrínsecos ($a, b > 0$ y $\gamma > 0$), este estado de equilibrio es asintóticamente estable, actuando como un atractor global que garantiza el retorno del potencial de membrana a su estado basal tras sufrir perturbaciones transitorias.

La introducción de una corriente de excitación constante ($I \neq 0$) complejiza la estructura algebraica del modelo, permitiendo la coexistencia de uno a tres puntos críticos. Para el escenario biológicamente relevante de un único punto crítico (caracterizado por un discriminante $\Delta < 0$), el sistema experimenta una bifurcación de Andronov-Hopf. Este fenómeno delimita un rango crítico para la corriente externa tal que $I_{inf} \leq I \leq I_{sup}$, dentro del cual el punto de equilibrio pierde su estabilidad y da origen a un ciclo límite estable, lo que se traduce en la transición hacia un régimen de oscilaciones autosostenidas. Fuera de estos umbrales, el sistema recupera su estabilidad estacionaria.

Las simulaciones numéricas bajo estímulos no constantes revelan propiedades críticas sobre los mecanismos de activación neuronal. Primero, se constata la existencia de un potencial umbral estricto, donde ciertas combinaciones de intensidad y duración del pulso resultan insuficientes para activar el potencial de acción. Segundo, en el régimen no oscilatorio, el modelo manifiesta un límite de saturación que impide un crecimiento indefinido de las variables de estado ante

incrementos desmedidos de la corriente. Finalmente, se determinó una alta sensibilidad a la tasa de transición del estímulo: para reproducir fielmente la morfología del impulso nervioso, las transiciones del pulso deben ser casi instantáneas, ya que variaciones lentas inducen un acoplamiento artificial que desvirtúa la dinámica propia del sistema.

Al evaluar la ecuación diferencial parcial (4) reducida con $b = 0$ mediante la transformación de onda viajera $z = x - ct$, se evidencia que la topología del espacio de fase transformado está supeditada de forma crítica a la velocidad de propagación c. El punto de equilibrio transmuta entre un nodo y una espiral dependiendo de si el término c^2 supera o no el umbral de estabilidad dado por $4a(1 - a)$. Asimismo, mediante la aplicación de métodos algebraicos polinomiales y transformaciones bilineales, se validó la factibilidad de deducir soluciones analíticas exactas para frentes de onda de tipo solitón.

Finalmente se concluye que estas estructuras complejas son el resultado de una superposición no lineal de sub-frentes de onda, cuyas velocidades intrínsecas están determinadas de manera unívoca por las soluciones basales del sistema.

Declaraciones

Aprobación de la autoría
El autor ha leído y aprobado la versión final publicada del manuscrito.

Fuente de financiamiento
Esta investigación no recibió financiamiento.

Conflicto de Intereses
El autor declaran no tener ningún conflicto de intereses.

Aprobación ética
No se requiere aprobación ética.

Uso de herramientas de IA generativa
Este artículo se elaboró sin IA generativa. Todo el contenido y conclusiones son responsabilidad del autor.

Disponibilidad de datos
No aplicable.

Acceso Abierto
Este artículo está bajo una licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Obra Derivadas 4.0 Internacional, la cual permite cualquier uso no comercial, compartir, distribuir y reproducir en cualquier medio o formato, siempre que se cite adecuadamente al autor o autores originales y la fuente, se proporcione un enlace a la licencia Creative Commons. Esta licencia no permite compartir material adaptado derivado de este artículo o partes del mismo. Para consultar una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Información adicional
- **Versión digital:** El artículo está disponible en Saber UCV: https://saber.ucv.ve/ojs/index.php/rev_fiucv/article/view/33415.
- **ORCID de los autores:**
  - Franklin Martínez: 0009-0009-6795-761X

Referencias

Al Beattie, B., Feketa, P., Ochs, K., & Kohlstedt, H. (2024). Criticality in FitzHugh-Nagumo oscillator ensembles: Design, robustness, and spatial invariance. *Communications Physics*, 7, 1-14. https://doi.org/10.1038/s42005-024-01530-y

Brandibur, O., & Kaslik, E. (2022). Stability Analysis for a Fractional-Order Coupled FitzHugh-Nagumo-Type Neuronal Model. *Fractal and Fractional*, *6*(5), 2-13, 257. https://doi.org/10.3390/fractalfract6050257

Bresadola, M. (1998). Medicine and science in the life of Luigi Galvani (1737-1798). *Brain Research Bulletin*, *46*(5), 367-380. https://doi.org/10.1016/S0361-9230(98)00023-9

Casten, R. G., Cohen, H., & Lagerstrom, P. A. (1975). Perturbation analysis of an approximation to the hodgkin-huxley theory. *Quarterly of Applied Mathematics*, *32*(4), 365-402. https://doi.org/10.1090/qam/445095

Cheng, Gui-Quiang (1998). *Advanced in Nonlinear Partial Differential Equationas and Related Areas*. World Scientific Publishing, 1 edition

Dehghan, M., & Narimani, N. (2018). Approximation of continuous surface differential operators with the generalized moving least-squares (GMLS) method for solving reaction-diffusion equation. *Computational and Applied Mathematics*, *37*(5), 6955-6971. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0716-1

Di Talia, S., & Vergassola, M. (2022). Waves in embryonic development. *Annual review of biophysics*, *51*(1), 327-353. https://doi.org/10.1146/annurev-biophys-111521-102500

Elagan, S.K., Sayed, M., & Hamed, Y.S. (2011). An innovative solution for the generalized fitzhugh-nagumo equation using the generalized g'/g expansion method. *Applied Mathematics*, 2, 470-474. https://doi.org/10.4236/am.2011.24060

Fitzhugh, R. (1961). Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical J.*, 1(6), 445-466. https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6

Flores, G. (2003). *Ondas viajeras en modelos físicos y biológicos*. Escuela Venezolana de Matemática. Mérida: Venezuela.

Focaccia, M., & Simili, R. (2007). Luigi Galvani, Physician, Surgeon, Physicist: From Animal Electricity to Electro-Physiology. In: Whitaker, H., Smith, C.U.M., Finger, S. (eds) Brain, Mind and Medicine: Essays in Eighteenth-Century Neuroscience. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-70967-3_11

Fuselier, E.J., Wright, G.B. (2013). A High-Order Kernel Method for Diffusion and Reaction-Diffusion Equations on Surfaces. *J Sci Comput*, *56*, 535-565. https://doi.org/10.1007/s10915-013-9688-x

Gelens, L., Anderson, G. A., & Ferrell Jr, J. E. (2014). Spatial trigger waves: positive feedback gets you a long way. *Molecular biology of the cell*, *25*(22), 3486-3493. https://doi.org/10.1091/mbc.e14-08-1306

Glass, L. & Josephson, M. E. (1995). *Physical review letters* 75(10), 2059-2062. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.2059

Huxley F. A. & Hodgkin. A.(1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117(4), 500-544. https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764

Keener, J. P. (1988). A mathematical model for the vulnerable phase in myocardium. *Mathematical Biosciences*, 90(1-2), 3-18. https://doi.org/10.1016/0025-5564(88)90055-7

Kuramoto, Y., Battogtokh, D., & Nakao, H. (1998). Multiaffine chemical turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, *81*(16), 3543-3546. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3543

Lakshmanan, M. & Rajagopal, K. (1981). A singular perturbation theory for the fitzhugnagumo nerve conduction equation. *Physics Letters*, *82*(5), 266-270. https://doi.org/10.1016/0375-9601(81)90204-8

Lei, L., & Yang, J. (2021). Patterns in coupled FitzHugh-Nagumo model on duplex networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, *144*, 1-6, 110692. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110692

Li, Z., Zhou, H., Wang, M. & Ma, M. (2021). Coexisting firing patterns and phase synchronization in locally active memristor coupled neurons with HR and FN models. *Nonlinear Dyn* 104, 1455-1473. https://doi.org/10.1007/s11071-021-06315-4

Lin, A. L., Hagberg, A., Meron, E., & Swinney, H. L. (2004). Resonance tongues and patterns in periodically forced reaction-diffusion systems. *Physical Review E*, *69*, 1-10. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.066217

Linares-Barranco, B., Sánchez-Sinencio, E., Rodríguez-Vazquez, A., & Huertas, J. L. (1991). A CMOS implementation of FitzHugh-Nagumo neuron model. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, *26*(7), 956-965.https://doi.org/10.1109/4.92015

Murray, J. D., & Murray, J. D. (2003). Mathematical biology: II: spatial models and biomedical applications (Vol. 18). New York: springer. https://doi.org/10.1007/b98869

Nagai, Y., González, H., Shrier, A., & Glass, L. (2000). Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media. *Physical review letters*, *84*(18), 4248-4251. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4248

Nagumo, J., Arimoto, S. & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc I.R.E.*, *50*(10), 2061-2070. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235

Piccolino, M. (2008). Visual images in Luigi Galvani's path to animal electricity, *J. Hist. Neurosci.*, *17*(3), pp. 335-348. https://doi.org/10.1080/09647040701420198

Rajagopal, K. (1984). Fitzhugh-nagumo nerve conduction equation: A singular perturbation analysis. *Physics Letters*, 100(5), 269-272. https://doi.org/10.1016/0375-9601(84)90781-3

Rocsoreanu, C., Georgescu, A., & Giurgiteanu, N. (2012). *The FitzHugh-Nagumo model: bifurcation and dynamics* (Vol. 10). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9548-3

Rogers, J. M. & McCulloch, A. D. (1994). A collocation-Galerkin finite element model of cardiac action potential propagation, in *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 41(8), 743-757, https://doi.org/10.1109/10.310090

Schiesser, W. E. & Griffiths, G. W. (2012). *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations*. Academic Press, Amsterdam.

Scott, A. C. (1975). Electrophysics of a nerve fiber. *Rev. Mod. Phys.*, 47(2),487-533. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.47.487

Sherwood, W. E. (2022). FitzHugh-Nagumo model. In: Jaeger, D., Jung, R. (eds) *Encyclopedia of Computational Neuroscience*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-0716-1006-0_147

Takembo, C.N., Mvogo, A., Fouda, H.P.E. & Kofané, T. C.(2019). Wave pattern stability of neurons coupled by memristive electromagnetic induction. Nonlinear Dyn *96*, 1083-1093. https://doi.org/10.1007/s11071-019-04841-w

Tuckwell, H.C. (2009). Introduction to Theoretical Neurobiology. Cambridge University Press, N. Y. https://doi.org/10.1017/CBO9780511623271

van der Pol, B. (1926). On Relaxation-Oscillations, *Philosophical Magazine Series* 7 *2*(11), 978-992. https://doi.org/10.1080/14786442608564127

Volkenshtein, M. V. (1985). *Biofísica*. Editorial MIR. Moscú.

Nota del editor/Descargo de responsabilidad: La Editorial Innovación Tecnológica (EdIT) mantiene una postura neutral e imparcial respecto a las declaraciones, opiniones y datos contenidos en esta publicación, los cuales son responsabilidad exclusiva de los autores y colaboradores, y no de la Revista de la Facultad de Ingeniería UCV ni de sus editores. Asimismo, la Revista de la Facultad de Ingeniería UCV y sus editores no se hacen responsables por daños a personas o bienes que puedan derivarse del uso o aplicación de ideas, metodologías, métodos, resultados, instrucciones o productos mencionados en este artículo.

Citar este artículo como / Cite this article as:

Martínez, F. (2026). Análisis cualitativo de estabilidad, bifurcaciones y soluciones exactas tipo solitón para el modelo de FitzHugh-Nagumo. *Rev. Fac. Ing. UCV*, *41*(1), 23-38.

Postule su próximo manuscrito en la Revista de la Facultad de Ingeniería UCV y obtenga ventajas competitivas globales:

- ✓ **Envío directo:** proceso simple por correo electrónico
- ✓ **Arbitraje riguroso:** revisión por pares a doble ciego con expertos en el área
- ✓ **Sin costo:** libre de cargo por procesamiento de envío, revisión y publicación
- ✓ **Publicación continua:** los artículos se publican tras su aceptación y maquetación
- ✓ **Acceso abierto:** visibilidad científica sin restricciones
- ✓ **Preservación digital**: respaldo permanente mediante LOCKSS y CLOCKSS
- ✓ **Conectividad global:** integración nativa con ORCID y Google Scholar
- ✓ **Visibilidad académica:** preservación en el Repositorio Institucional Saber UCV
- ✓ **Impacto global:** proyecte su producción científica al mundo

Envíe su manuscrito a:
revistafacingenieria@gmail.com / revistafacingenieria@ucv.ve