LA FÍSICA DEL BÉISBOL Y ANÁLISIS DEL EXTRAORDINARIO JONRÓN DE GALARRAGA

JOSÉ LUIS LÓPEZ [1], OSCAR ANDRÉS LÓPEZ [2], ELIZABETH RAVEN [3]

[1] Instituto de Mecánica de Fluidos, Facultad de Ingeniería, UCV (lopezjoseluis7@gmail.com)

[2] Instituto de Materiales y Modelos Estructurales, Facultad de Ingeniería, UCV (oalsf @ yahoo.com)

[3] Instituto Universitario de Tecnología Región Capital Dr. F.R.P. (nenuraven@yahoo.com)

Recibido: enero 2017 Aprobado para publicación: junio 2017

RESUMEN

Se presentan los principios físicos que gobiernan el movimiento de la pelota de béisbol y se formula un modelo matemático para reproducir en el espacio y en el tiempo el vuelo de la bola. Las ecuaciones diferenciales no lineales que describen el problema son resueltas por diferencias finitas para determinar la trayectoria de la pelota y evaluar los efectos de las diferentes fuerzas que afectan su recorrido: gravedad (peso), arrastre, viento y Magnus. Se muestra el efecto de la densidad del aire y de la rapidez de rotación de la pelota en el recorrido de la misma. El modelo se aplica para analizar el extraordinario jonrón de Andrés Galarraga del 31 de mayo de 1997 catalogado históricamente como uno de los pocos que han excedido la barrera de los 500 ft, pero que fue degradado en un estudio reciente en donde se le asigna un recorrido menor. Los autores combinan las disciplinas de la física y la geometría descriptiva, la edición de videos y los sensores remotos (LIDAR) para demostrar que la distancia recorrida por la pelota está comprendida entre 519 ft y 535 ft con un valor más probable de 524 ft. Se concluye que el jonrón de Galarraga es uno de los pocos que han excedido la barrera de los 500 ft en la historia de las Grandes Ligas (MLB).

Palabras clave: béisbol, modelo matemático, Andrés Galarraga, fuerza de Magnus

THE PHYSICS OF BASEBALL AND ANALYSIS OF THE GALARRAGA´S EXTRAORDINARY HOMERUN

ABSTRACT

The physical processes that govern the movement of a baseball are presented and a mathematical model is formulated to reproduce the space and time variation of the ball flight. The non linear differential equations that describe the problem are solved using finite differences to determine the trajectory of the ball and to evaluate the effects of the different forces that influence the solution: gravity, drag, wind and Magnus. The effects of the air density and the speed rotation on the trajectory of the ball are shown. The model is applied to analyze the extraordinary homerun of Andrés Galarraga on May 31, 1997, listed historically as one of the few who have exceeded the 500-foot barrier but degraded in a recent study where it is given a shorter distance. The authors combine the fields of physics and descriptive geometry, the video editing and remote sensors (LIDAR) to demonstrate that the distance reached by the ball is between 519 and 535 ft, being 524 ft the most probable value. It is concluded that the homerun of Galarraga is one of the few that have exceeded 500 ft in the history of the Major League Baseball (MLB).

Keywords: Baseball, mathematical model, Andrés Galarraga, Magnus Force

EL VUELO DE LA PELOTA SEGÚN LAS LEYES DE LA FÍSICA

En el texto que sigue se describen las unidades de longitud en pies (ft) y de velocidad en millas por hora (mph), propias de la terminología empleada en el béisbol. Un pie equivale aproximadamente a 0,305 metros. El principio fundamental que rige el movimiento de la pelota fue formulado hace más de 300 años por Newton: la resultante de la sumatoria de fuerzas que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración que adquiere. Cualquier pelota, bateada o lanzada, sigue una trayectoria curva que se aleja de la dirección inicial en la que fue enviada, debido a la fuerza de gravedad que atrae la pelota hacia abajo y debido

también a la resistencia del aire que frena el avance de la pelota. Por otro lado, es casi imposible que una pelota viaje sin rotar sobre sí misma. Las rotaciones que sufre la pelota en su recorrido por el espacio generan una fuerza adicional de tipo aerodinámica denominada Fuerza de Magnus que también altera su trayectoria inicial. En lo que sigue suponemos que el movimiento de la pelota está contenido en un plano vertical. Una descripción detallada del tema se puede consultar en (López y López, 2019).

La Figura 1a describe las fuerzas actuantes sobre una pelota en movimiento ascendente que se desplaza en el espacio con una rapidez de traslación V y rapidez rotacional ω. Las tres fuerzas son: 1) la fuerza de gravedad o peso, F_g, que actúa en dirección vertical; 2) la fuerza de arrastre, F_d, que se opone al movimiento de la pelota y actúa en la misma dirección del vector velocidad pero con sentido contrario; 3) la fuerza de Magnus, F_m, que actúa perpendicular al vector velocidad y puede ser positiva o negativa, dependiendo del tipo de rotación que adquiera la pelota. El efecto de la velocidad del viento se incorpora dentro de la fuerza de arrastre, la cual depende de la velocidad relativa entre la pelota y el aire que la circunda. Se supone que el viento actúa solamente en dirección horizontal y su efecto puede ser positivo o negativo si sopla a favor o en contra del movimiento de la pelota. Tanto la fuerza de arrastre como la fuerza de Magnus son el resultado de pequeños desbalances de la presión del aire en diferentes partes de la pelota. Con la pelota en movimiento, el flujo de aire colide con la superficie de la pelota y altera su movimiento.

La fuerza de arrastre

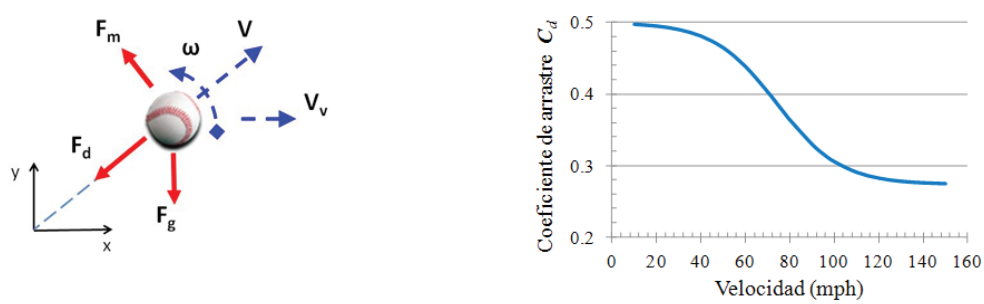
La fuerza de arrastre F_d se expresa usualmente como (Adair, 2002; Nathan, 2008):

$$F_d = \frac{1}{2}\rho C_d A V^2 \qquad (1)$$

$$C_d = 0.50 - \frac{0.227}{1 + e^{-\left(\frac{1{,}467\,V - 108{,}7}{21{,}0}\right)}} \qquad (2)$$

donde ρ es la densidad del aire, C_d es el coeficiente de arrastre, A es el área de la sección transversal igual a πR^2, R es el radio de la pelota y V es la rapidez del vector velocidad relativa, la cual está dada por la diferencia entre la rapidez de la pelota y la rapidez del viento V_v proyectada en la dirección del vector velocidad. En la Ecuación (2) la rapidez V está en mph (millas por hora).

La fuerza de arrastre, dada por la Ecuación (1), engloba los dos tipos de resistencia que se presentan en el movimiento de la pelota: la resistencia de fricción debida al rozamiento del flujo de aire con la pelota, y la resistencia de forma debida a que el flujo no sigue el contorno de la pelota y se produce el fenómeno de separación, siendo este un efecto aerodinámico. El coeficiente de arrastre C_d para una pelota de béisbol dado por la Ecuación (2) ha sido obtenido experimentalmente en el laboratorio, mediante ensayos en túneles de viento, y se ha encontrado que depende solamente de la rapidez relativa de la pelota (Adair, 2002). La Figura 1b muestra la variación del coeficiente de arrastre (Ecuación (2)) con la velocidad, la cual corresponde a un ajuste de los valores medidos. Se observa que el coeficiente C_d se reduce a medida que aumenta la velocidad de la pelota. El esquema de la Figura 2 ayuda a explicar este fenómeno.



a) Fuerzas y velocidades

b) Coeficiente de arrastre

Figura 1. *a) Fuerzas (línea continua) y velocidades (líneas a trazos) actuando en un plano vertical sobre una pelota rotando hacia atrás (backspin) y con viento a favor;*
b) Variación del coeficiente C_d con la velocidad relativa de la pelota

La interacción entre la pelota y el flujo de aire se ilustra en la Figura 2; se indica allí la zona de separación de flujo y la estela de remolinos que se forma atrás de la pelota. Para velocidades bajas, V<50 millas por hora (mph), correspondientes a números de Reynolds aproximadamente menores a 1 x 10^5, la separación ocurre a un ángulo aproximado de 80 grados del frente de la pelota y la estela de remolinos es amplia (Figura 2a), correspondiéndole un valor de C_d cercano a 0,5. Para velocidades un poco mayores (Figura 2b), cercanas a 120 mph, correspondientes a números de Reynolds en el orden de 3 x 10^5, el flujo alrededor de la pelota se hace más turbulento, lo cual origina que el punto de separación se desplace aguas abajo, hacia la parte de atrás de la pelota, a un ángulo cercano a 120 grados, disminuyendo la estela de remolinos y la resistencia al flujo, lo que produce una caída brusca en el coeficiente C_d hasta valores cercanos a 0,3 (Figura 1b) (Adair, 2002 White, 1979). Esta reducción drástica en C_d debido a la contracción de la estela se conoce como la "crisis del arrastre".

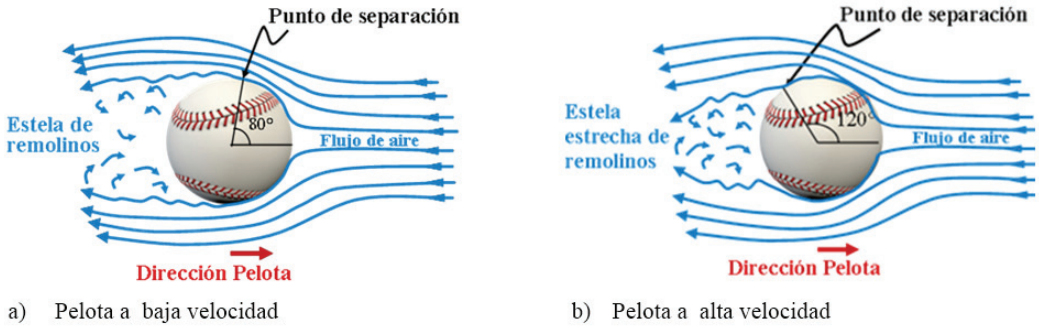


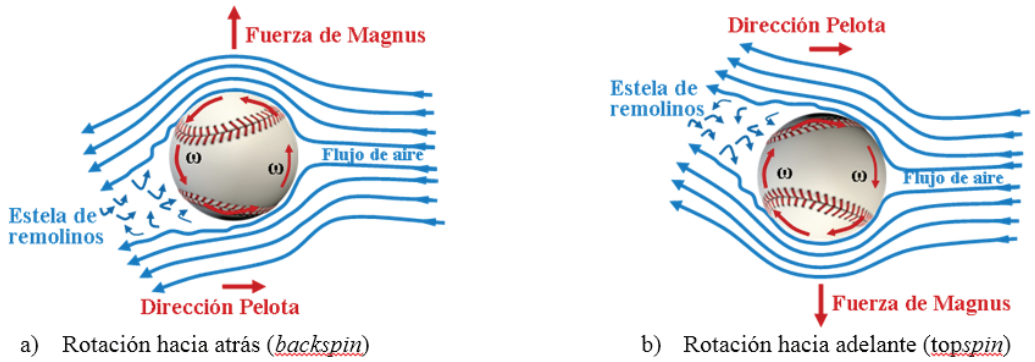
Figura 2. *Vista lateral de una pelota desplazándose de izquierda a derecha con diferentes velocidades, mostrando el punto de separación del flujo y la estela de remolinos. A alta velocidad el punto de separación se desplaza hacia atrás de la pelota por lo que la estela se estrecha y se reduce la resistencia al flujo*

Nótese que el efecto del viento está incluido dentro de la fuerza de arrastre (Ecuación (1)) al definir V como la rapidez del vector velocidad relativa, la cual está dada por la diferencia entre la rapidez de la pelota y la rapidez del viento V_v proyectada en la dirección del vector velocidad. Al no haber viento, caso de espacios techados, V es la rapidez de la pelota con respecto al sistema tierra. Un viento en sentido opuesto al movimiento de la pelota, aumenta la fuerza de arrastre y disminuye la rapidez de la pelota. Un viento en el mismo sentido (Figura 1a) disminuye la fuerza de arrastre y aumenta la rapidez de la pelota. En el caso teórico de que la velocidad del viento tuviese la misma magnitud y sentido que la velocidad de la pelota, la fuerza de arrastre se haría cero.

La fuerza de Magnus

Si la pelota rota sobre sí misma durante el vuelo, se genera una fuerza adicional denominada fuerza de Magnus cuya dirección es perpendicular a la dirección del movimiento y al eje de rotación (Figura 1a). La Figura 3a muestra el flujo de aire en torno a una pelota que gira en sentido contrario a las agujas del reloj, es decir, con efecto hacia atrás (*backspin*), con una rapidez rotacional ω. Por efecto de la viscosidad del aire y de la fricción del contorno, las capas de aire que se encuentran en contacto con la superficie de la pelota son arrastradas por el movimiento de giro de la bola de tal forma que en la parte superior los elementos del fluido (aire) aumentan su rapidez mientras que en la parte inferior la disminuyen. Como consecuencia, el punto de separación en la parte superior de la pelota se traslada aguas abajo mientras que en la parte inferior hacia aguas arriba. Esto ocasiona la deflexión de la estela de remolinos hacia abajo generando una asimetría en la zona de separación, en contraposición con el caso sin rotación en donde la zona de separación es simétrica.

La asimetría en la separación del flujo empuja el aire de atrás de la pelota para abajo. La fuerza que empuja el aire hacia abajo tiene una reacción en sentido contrario que empuja la pelota hacia arriba, de acuerdo a la tercera ley de Newton (acción y reacción). Esta fuerza, que en este caso es hacia arriba y mantiene la pelota en el aire un tiempo mayor del que estaría si no hubiese rotación, es la fuerza de Magnus. Si la rotación de la pelota fuese hacia adelante (*topspin*) la fuerza se Magnus sería hacia abajo y se reduciría el tiempo de vuelo de la bola (Figura 3b).



a) Rotación hacia atrás (*backspin*) b) Rotación hacia adelante (*topspin*)

Figura 3. *Vista lateral de una pelota desplazándose de izquierda a derecha con rotación hacia atrás y con rotación hacia adelante, lo cual genera la aparición de la fuerza de Magnus*

La fuerza de Magnus puede explicarse también por el principio de Bernoulli que establece que la presión en un fluido disminuye cuando la rapidez aumenta. La mayor rapidez del fluido en el tope de la pelota (Figura 3a) se traduce en una menor presión, mientras que en la parte inferior las rapideces menores implican una mayor presión. Se crea entonces un gradiente de presiones en la dirección vertical que actúa hacia arriba, dando origen a la fuerza de Magnus.

La fuerza de Magnus se suele expresar como (Nathan, 2008):

$$F_m = \frac{1}{2}\rho C_m A V^2 \tag{3}$$

en donde C_m es el coeficiente de Magnus. Estudios experimentales han encontrado que C_m varía débilmente con la velocidad de la pelota y que depende fundamentalmente del parámetro de rotación (S). La siguiente expresión de C_m ha sido propuesta por Sawicki y otros (2003) y citada en Nathan (2008) por su buen ajuste a las mediciones experimentales. C_m depende del factor de rotación S, el cual es un cociente entre la rapidez rotacional y la rapidez lineal:

$$C_m = 1{,}5\,S \quad para \quad S \leq 0{,}1 \tag{4}$$

$$C_m = 0{,}09 + 0{,}6\,S \quad para \quad S > 0{,}1 \tag{5}$$

$$S = R\frac{\omega}{V} \tag{6}$$

Considerando la circunferencia de la pelota igual a 9 pulgadas = 22,86 cm y expresando ω en revoluciones por minuto (rpm) y V en millas por hora (mph), el parámetro adimensional S se describe por la ecuación:

$$S = 0{,}00853\,\frac{\omega}{V} \tag{7}$$

Las bolas bateadas en el béisbol suelen tener una rapidez rotacional (ω) en el rango entre 1000 y 3500 rpm (Nathan, 2013) y la rapidez lineal (V) entre 60 y 130 mph. Por tanto, el valor de S se encuentra entre 0,1 y 0,4 en el rango relevante para el béisbol, por lo que C_m varía entre 0,1 y 0,3.

EL MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático de simulación del movimiento de la pelota se formula a partir de la segunda ley de Newton, suponiendo que la trayectoria se describe en dos dimensiones, $\boldsymbol{x}$ es la coordenada horizontal, y es la coordenada vertical y t es el tiempo (Figura 1):

$$\sum F_x = -F_{d_x} - F_{m_x} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{8}$$

$$\sum F_y = -F_g - F_{d_y} + F_{m_y} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \tag{9}$$

en donde m es la masa de la pelota y las demás variables ya han sido definidas. Se suponen conocidas las condiciones iniciales (x, y) y rapidez inicial dx/dt y dy/dt de la pelota en el tiempo t=0. El signo de la fuerza de Magnus deberá revertirse en el caso de que la pelota rote hacia adelante (*topspin*). Las ecuaciones (8) y (9), complementadas con las ecuaciones (1) a (7), conforman un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, que no tiene solución analítica y debe ser resuelto por métodos numéricos a los fines de determinar en cada instante de tiempo los valores de las coordenadas (x, y) que definen la trayectoria de la pelota, dadas unas condiciones iniciales conocidas. El procedimiento de solución consistió en

convertir las dos ecuaciones de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden que fueron resueltas utilizando diferencias finitas con el método de Euler en pequeños intervalos de tiempo para aproximar las derivadas. El algoritmo de cálculo es el siguiente:

$$x^{n+1}=x^n+V_x^n\Delta t \tag{10}$$

$$y^{n+1}=y^n+V_y^n\Delta t \tag{11}$$

$$a_x^{n+1}=\frac{-\rho A}{2m}C_d^n(V_x^n-V_V)V_*^n-\frac{\rho A}{2m}C_m^n V_y^n V_*^n \tag{12}$$

$$a_y^{n+1}=-g-\frac{\rho A}{2m}C_d^n V_y V_*^n+\frac{\rho A}{2m}C_m^n(V_x^n-V_V)V_*^n \tag{13}$$

$$V_x^{n+1}=V_x^n+a_x^n\Delta t \tag{14}$$

$$V_y^{n+1}=V_y^n+a_y^n\Delta t \tag{15}$$

$$V_*=\sqrt{(V_x-V_v)^2+V_y^2} \tag{16}$$

en donde el superíndice n se refiere a un instante de tiempo dado donde las variables son conocidas y el superíndice $n+1$ a un instante de tiempo posterior donde se desea calcular las incógnitas. Adicionalmente, a_x y a_y son las aceleraciones en las direcciones x, y, respectivamente; V_V es la rapidez del viento; V_* es la rapidez o magnitud del vector velocidad ajustado por el viento, en donde se ha supuesto que este sopla en la dirección horizontal y que tiene una magnitud constante durante el vuelo de la pelota; Δt es un intervalo pequeño de tiempo, en el orden de centésimas o milésimas de segundos, seleccionado en función de la precisión que se desea tener en los cálculos. Las ecuaciones anteriores se resuelven recursivamente para diferentes pasos de tiempo desde n = 0, 1, 2, 3…. hasta que la pelota culmine su trayectoria de vuelo, es decir, cuando la coordenada y se haga igual a cero o se alcance un valor negativo muy pequeño.

Validación del modelo

¿Cómo se pueden validar los resultados del modelo? No existe una solución analítica para el sistema de ecuaciones no lineales y no se dispone de resultados experimentales donde todas las variables se hayan medido en el campo. Sin embargo, considerando solamente la atracción de la gravedad y despreciando las otras fuerzas, la trayectoria de la pelota puede obtenerse por medio de la teoría clásica del movimiento de proyectiles que se estudia en cursos básicos de Física. Sea el caso de una pelota bateada con una altura inicial h_0, rapidez lineal inicial V_0, ángulo inicial de salida con respecto a la horizontal de θ_0. Sea g la aceleración de gravedad. La solución clásica nos suministra los valores de la distancia total recorrida (D) durante el tiempo de llegada (t_D) hasta caer al suelo (h=0) y la altura máxima alcanzada (h_{max}) en el tiempo t_h:

$$D=(V_0\cos\theta_0)t_D \tag{17}$$

$$t_D=\frac{V_0\sin\theta_0+\sqrt{(V_0\sin\theta_0)^2+2gh_0}}{g} \tag{18}$$

$$h_{max}=h_0+\frac{(V_0\sin\theta_0)^2}{2}g \tag{19}$$

$$t_h=\frac{V_0\sin\theta_0}{g} \tag{20}$$

Por ejemplo, para una pelota bateada con h_0 = 1 metro = 3,281 ft, V_0 = 110 mph y θ_0 =35º, sustituyendo en las fórmulas clásicas (Ecuaciones 17 a 20) se consiguen los valores mostrados en la Tabla 1, obtenidos con g = 981 cm/s^2 = 32,185 ft/s^2, en donde se aprecia una distancia total de 764,6 ft y una altura máxima de 136,3 ft. Para aplicar el algoritmo aquí desarrollado se supone una densidad del aire igual a cero a los efectos de suprimir las fuerzas de arrastre y de Magnus y que la velocidad del viento es cero. Con un intervalo de discretización del tiempo Δt de 0,005 segundos se resolvieron las ecuaciones diferenciales aplicando el algoritmo dado por las Ecuaciones (10) a (16), el cual requirió de 1159 puntos de integración hasta la caída de la pelota. La trayectoria de la bola está graficada en la Figura 4 (Caso Gravedad), la cual tiene los valores característicos mostrados en la Tabla 1. La distancia total recorrida es de 765,2 ft con una altura máxima de 136,5 ft. Las diferencias con la solución clásica en cuanto a las distancias y tiempos asociados son menores a 1,5 por mil, atribuible a la discretización numérica empleada, la cual pudiera reducirse aún más si se disminuyese el intervalo de discretización Δt y se aumentasen los puntos de integración.

Tabla 1. Comparación de la solución obtenida con el modelo matemático y la solución clásica

Solución	Distancia total		Altura máxima	
	D (ft)	t_D (s)	h_{max} (ft)	t_h (s)
Clásica	764,6	5,786	136,3	2,875
Modelo matemático	765,2	5,790	136,5	2,880

Una segunda verificación del modelo matemático cuando actúan las fuerzas de arrastre y de Magnus se hizo comparando con los resultados publicados por Nathan (2008), en donde se analiza el caso de una pelota bateada con unas condiciones iniciales de velocidad V_0 = 100 mph, ángulo de salida θ = 30 grados, altura inicial h_0 = 3 ft, densidad del aire ρ =1,225 kg/m^3, correspondiente a unas condiciones estándar de clima a nivel del mar, sin viento y para diferentes valores de la rapidez rotacional ω = 0, 1000 y 2000 rpm con sentido hacia atrás. Los resultados en términos de distancia total recorrida (D) y altura máxima alcanzada (h_{max}) se presentan en la Tabla 2. La comparación es aproximada puesto que los valores de Nathan han sido leídos de la Figura 7 que aparece en su trabajo. La diferencia relativa entre los resultados del modelo y los de Nathan para los tres casos citados es menor a 1,2 %, lo cual nos permite concluir que el modelo ha sido formulado y programado adecuadamente. La solución del modelo se determinó con un intervalo de discretización del tiempo Δt de 0,005 segundos, verificándose previamente que intervalos más pequeños introducen muy pequeñas variaciones en los resultados.

Tabla 2. Comparación de resultados con Nathan (2008) incluyendo la fuerza de arrastre y la fuerza de Magnus. Ejemplos con V_0 = 100 mph, θ = 30 grados, h_0 = 3 ft y tres valores de ω

Resultados	ω = 0 rpm		ω =1000 rpm		ω = 2000 rpm	
	D (ft)	h_{max} (ft)	D (ft)	h_{max} (ft)	D (ft)	h_{max} (ft)
Modelo matemático	394	94	378	84	339	65
Nathan (2008)	390	93	374	83	335	65

Efecto de la fuerza de arrastre y la fuerza de Magnus

Aun cuando el modelo puede aplicarse para describir la trayectoria de pelotas lanzadas por el *pitcher* o por los demás jugadores así como a bolas golpeadas por el bateador, en lo que sigue consideraremos solo este último caso. La Figura 4 muestra la trayectoria calculada con el modelo en el caso de una pelota bateada con una altura inicial de 1 m, rapidez lineal inicial de 110 mph, ángulo inicial de 35º con la horizontal, rotando hacia atrás con una rapidez rotacional constante de 1500 rpm, valores típicos en un juego. Se adoptó una densidad del aire de 1,225 kg/m^3, sin viento. El intervalo de discretización del tiempo en el cálculo numérico fue de 0,005 s. Los resultados indican que la pelota recorrería 766 ft en el vacío considerando solo la fuerza de gravedad. Si se incluye la fuerza de arrastre, la distancia se reduce a 394 ft por la resistencia del aire. Si se considera adicionalmente la fuerza de Magnus, esta actúa como una fuerza ascensional debido al efecto de rotación hacia atrás, manteniendo la pelota más tiempo en el aire y, por tanto, incrementando su altura y la distancia recorrida a 430 ft. Este ejemplo destaca la importancia de considerar la acción simultánea de las tres fuerzas para una determinación confiable de la distancia total recorrida por la pelota.

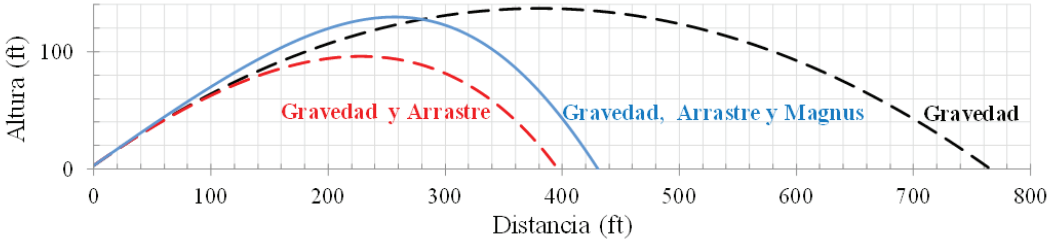


Figura 4. *Trayectoria calculada de la pelota de béisbol para tres diferentes casos de fuerzas actuantes: a) Gravedad; b) Gravedad y arrastre; y c) Gravedad, arrastre y Magnus*

Efecto de la densidad del aire

La densidad del aire (ρ) influencia el recorrido de la pelota y la distancia alcanzada, al aparecer como término multiplicador en la fuerza de arrastre (Ecuación (1)) y en la fuerza de Magnus (Ecuación (3)). La densidad del aire depende principalmente de la altura sobre el nivel del mar, disminuyendo a medida que se sube, pero depende también de factores climáticos como son la temperatura, la presión atmosférica y la humedad relativa o del punto de rocío. En

la Tabla 3 se presentan valores característicos del clima en cuatro ciudades de Venezuela y Estados Unidos. Para los cálculos se seleccionaron las ciudades de Mérida y la Guaira por sus diferencias en altitudes, Mérida está a 1630 msnm (metros sobre el nivel del mar) y la Guaira a 4 msnm. Por la misma razón se escogieron Denver a 1609 msnm, la ciudad más alta con un equipo de béisbol en la Liga Mayor de Béisbol (MLB, por sus siglas en inglés), y Nueva York que está a nivel del mar. Los parámetros del clima indicados en la Tabla 3 corresponden a valores medios durante el día en el mes de noviembre del año 2016 en La Guaira y Mérida (Meteocast, 2016) y en el mes de junio en Denver y Nueva York (Weather Underground, 2016).

Para ilustrar el efecto de la densidad del aire se aplicó el modelo matemático para determinar el recorrido de una pelota bateada en cada una de las cuatro ciudades y sujeta a las misma condiciones iniciales, a saber, rapidez inicial = 100 mph a una altura inicial de 1 metro con un ángulo de salida de 35º y rotando hacia atrás con una rapidez rotacional de 1500 rpm, sin viento. La trayectoria seguida por la pelota en cada ciudad se muestra en la Figura 5. La menor densidad de aire en las ciudades a mayor altura, Denver y Mérida, dan lugar a mayores distancias recorridas en relación a las ciudades sobre el nivel del mar, La Guaira y Nueva York. La distancia total alcanzada por la pelota en Denver es aproximadamente unos 60 ft (18 metros), mayor que en La Guaira o Nueva York, lo que en la práctica significaría que un elevado que pudiese ser capturado por los jardineros en La Guaira o Nueva York pudiera convertirse en un jonrón en Mérida o Denver.

Tabla 3. Parámetros climáticos en cuatro ciudades y densidad del aire

Ciudad	Altura (msnm)	Temperatura (ºC)	Presión atmosférica (mmHg)	Punto de rocío (ºC)	Humedad relativa (%)	Densidad del aire (Kg/m^3)
Mérida	1630	15	764	10	64	1,00
La Guaira	4	28	762	20	85	1,16
Denver	1609	20	620	10	30	0,81
Nueva York	0	23	761	13	52	1,18

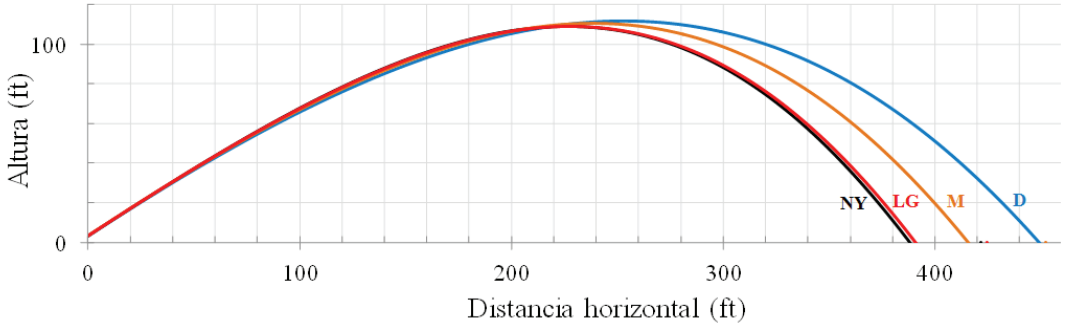


Figura 5. *Recorrido de la pelota bateada con las mismas condiciones iniciales en cuatro ciudades diferentes; NY= Nueva York; LG= La Guaira; M= Mérida; D= Denver*

Efecto del sentido de rotación de la pelota

El sentido de la rotación, si es hacia atrás (*backspin*) o hacia adelante (*topspin*), con que sale la pelota despedida por el bate condiciona en forma significativa su trayectoria. Para cuantificar su influencia se aplicó el modelo para reproducir los casos límites de una pelota bateada sin rapidez angular, otra bateada con rotación hacia atrás y otra bateada con rotación hacia adelante. Se consideraron los casos de una rapidez angular de 2000 rpm, típica de largos batazos, y un caso intermedio con un valor de 1000 rpm. Las condiciones iniciales son una rapidez lineal de salida de 100 mph con un ángulo de 30° y una altura inicial de 3 ft. La densidad del aire es de 1,225 kg/m^3, sin viento.

Los resultados se presentan en la Figura 6. Sin rotación (ω=0), la pelota no tiene la ayuda de la fuerza de Magnus y se eleva tan solo a 65 ft con un recorrido total de 340 ft. Cuando el bateador golpea la pelota un poco por debajo del centro de masa y le imprime una rotación hacia atrás

con rapidez rotacional ω = 2000 rpm, la bola se eleva a una altura máxima de 94 ft finalizando con una distancia horizontal total de 393 ft. La diferencia es notable. La fuerza de Magnus incrementa el recorrido en 53 ft (16 m) en comparación con la que sale despedida sin rotación.

¿Qué sucedería si la bola es golpeada ligeramente por arriba del centro de masa y sale despedida con una rotación hacia adelante? La Figura 6 ilustra este caso donde se aprecia que las diferencias son importantes. La bola es golpeada con las mismas condiciones iniciales anteriores y con la misma rapidez rotacional ω = 2000 rpm, pero con rotación hacia adelante en lugar de rotación hacia atrás; como consecuencia viaja tan solo 278 ft y se eleva a 48 ft, en comparación con los valores anteriores de 392 ft y 94 ft. Es decir, la diferencia entre imprimirle a la pelota una rotación hacia atrás o hacia adelante se traduce en 114 ft (35 m) menos de distancia recorrida y 46 ft (14 m) menos de altura alcanzada. La rotación hacia adelante produce una fuerza de Magnus en dirección vertical pero dirigida hacia abajo, que recorta apreciablemente el recorrido de la pelota. En la práctica, las pelotas que salen despedidas con rotación hacia atrás son típicas de los elevados, mientras que las que salen con rotación hacia adelante son características de las líneas cortas o de los rodados al cuadro (*rolling*).

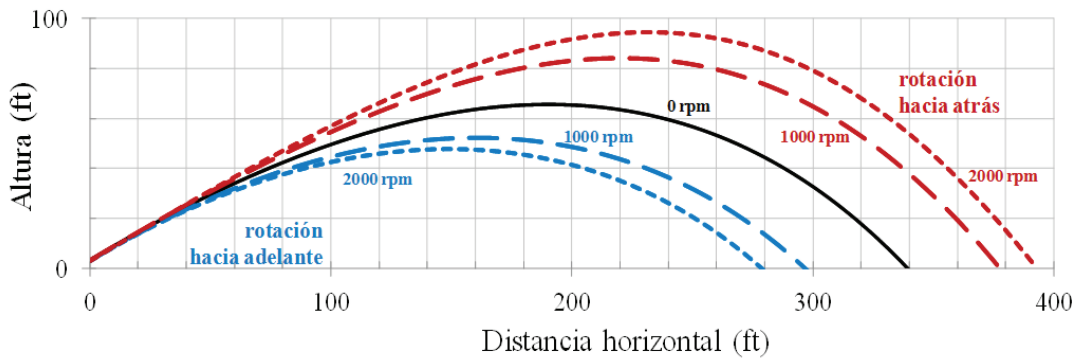
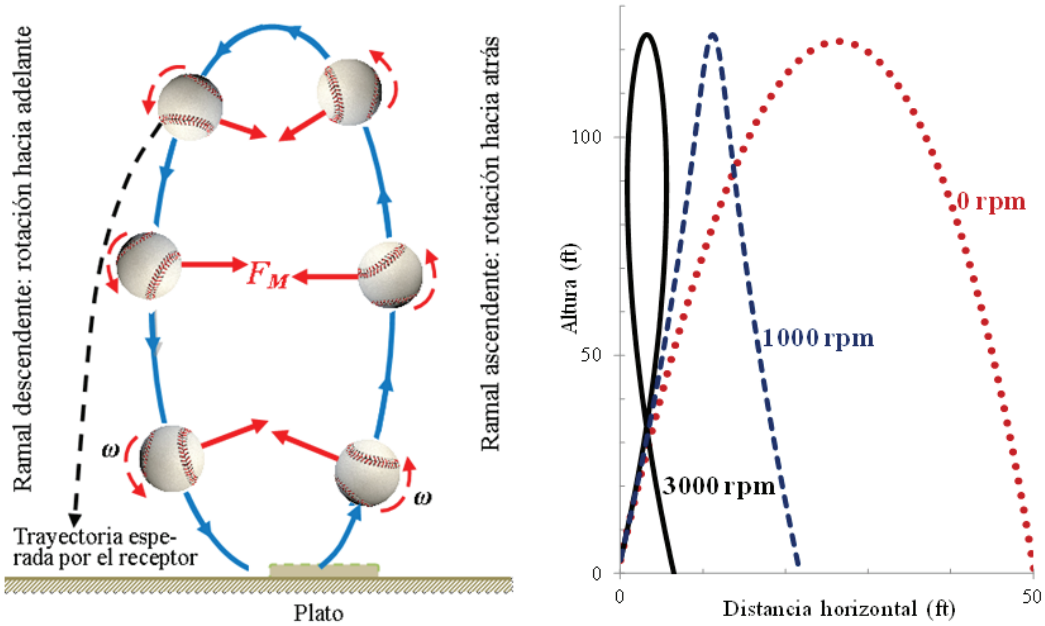


Figura 6. *Recorrido de la pelota bateada sin rotación (0 rpm) y con rotación hacia atrás y rotación hacia adelante, para dos valores de la rapidez rotacional ω: 1000 rpm y 2000 rpm*

La paradoja del elevado que no se deja atrapar

El efecto aerodinámico de Magnus puede dar lugar a situaciones incómodas para un jugador al tratar de atrapar una pelota. La Figura 7a ilustra el caso de una pelota bateada casi verticalmente con una elevada rapidez rotacional hacia atrás. Al llegar a su punto más alto comienza a descender, pero la rotación es ahora hacia adelante y se invierte el sentido de la fuerza de Magnus produciendo una curva que se aleja de la trayectoria esperada si la pelota no tuviese rotación. Si la rapidez de rotación es elevada, este efecto engaña al receptor u otro jugador del cuadro quien puede errar y perder la bola. Algunos analistas deportivos han atribuido equivocadamente este desempeño a un error del receptor o al efecto del viento, pero el verdadero responsable es el efecto Magnus.

El modelo matemático aquí desarrollado permite reproducir y cuantificar este curioso efecto que se conoce en la bibliografía especializada como la paradoja de los elevados cortos (McBeath y otros, 2008). La Figura 7b presenta el recorrido de un elevado en las cercanías del plato saliendo con un pronunciado ángulo de 83 grados con respecto a la horizontal y con una rapidez inicial de 70 mph. La bola es golpeada por el bateador por debajo de su centro geométrico introduciendo una rotación hacia atrás. Se grafica el recorrido de la pelota, calculado por el modelo, para tres valores distintos de la rapidez rotacional ω. Si no hay rotación (ω = 0), la bola sigue una trayectoria cuasi-parabólica fácil de seguir y atrapar por alguno de los jugadores del cuadro. Para una elevada rapidez rotacional de ω= 3000 rpm la pelota sigue una trayectoria inesperada en forma de lazo que toma el sentido contrario al llegar a la cúspide alejándose y sorprendiendo al receptor al tratar de atraparla. El caso de ω = 1000 rpm representa una situación intermedia entre los casos extremos descritos.



a) Esquema de una trayectoria cuasi-vertical indicándose la rotación hacia atrás y la fuerza de Magnus

b) Recorrido calculado de la pelota bateada cuasi-vertical dentro del cuadro (infield), para valores de ω: 0, 1000 y 3000 rpm

Figura 7. *Efecto de la rotación hacia atrás en pelotas con trayectoria cuasi-vertical*

APLICACIÓN AL CASO DEL JONRÓN DE ANDRÉS GALARRAGA DE 1997

El modelo matemático desarrollado en la sección precedente permite analizar y dilucidar la controversia sobre si el cuadrangular de Andrés Galarraga pertenece o no al selecto grupo de jonrones que han sobrepasado la frontera de los 500 ft en más de un siglo de historia de las grandes ligas. En Birnie (2015) se coloca el batazo de Galarraga en el sexto lugar, con una distancia de 529 ft, dentro del selecto grupo de 15 jonrones que han excedido la barrera de los 500 ft. Al jonrón más largo en esta lista se le asignan 540 ft. Sin embargo, Rybarczyk, quien es analista deportivo de ESPN, ingeniero e instructor de física, estudió recientemente los grandes jonrones en la MLB y degradó el batazo de Galarraga asignándole solo 468 ft (Rybarczyk, 2013). En esta nueva lista solo aparecen cuatro jonrones que exceden la barrera de los 500 ft, siendo 539 ft el batazo más largo.

Definición de distancia total recorrida

Aclaremos que la distancia total recorrida por un jonrón es la distancia horizontal total que viajaría la pelota sin ningún impedimento, es decir si hubiese aterrizado en el terreno y no en las gradas del estadio. La Figura 8 permite definir la altura inicial (h_o) al momento en que la pelota es impactada por el bate, medida con respecto al plato, la distancia horizontal recorrida (d) desde el plato hasta el sitio de impacto en las gradas, el tiempo de vuelo (t_v) desde el momento en que la bola es impactada por el bate hasta el sitio de impacto, la altura (h) del sitio de impacto medida con respecto al plato y la distancia horizontal total (D) medida desde el plato. Solo en casos excepcionales, cuando el jonrón sale del estadio y cae en el terreno, pudiera medirse directamente la distancia horizontal total recorrida por la bola. En la gran mayoría de los casos, lo que se puede conocer es la distancia hasta el punto de impacto en la grada, a la cual habría que sumarle el resto de la distancia que hubiese recorrido sin interrupciones la pelota hasta descender en el terreno. Para hacer este cálculo se requiere aplicar el modelo matemático presentado en la primera parte de este trabajo a fin de determinar el recorrido inicial de la pelota bajo la acción de las fuerzas actuantes (gravedad, arrastre, viento, Magnus) hasta el punto de impacto en las gradas y calcular su posterior recorrido hasta aterrizar en el suelo. Algunos equipos de béisbol poseen tablas elaboradas para cada parque, con las cuales estiman la distancia total recorrida dependiendo de la ubicación (sector del estadio y número de fila) donde impacta la pelota y del tipo de jonrón, si es de línea, elevado o extraordinario (Raue, 2001), lo cual es un procedimiento de cálculo de menor precisión que el procedimiento formulado en este trabajo, basado en

la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de la física.

El cuadrangular de Galarraga

El sábado 31 de mayo de 1997 en el Pro Player Stadium en Miami, los Rockies de Colorado se enfrentaban a los Marlins de Florida, dos *outs* en la pizarra, parte alta del cuarto *inning*. Larry Walker había sido boleado intencionalmente para llenar las bases y lanzarle a Galarraga, lo cual significó una desafortunada decisión para los Marlins. Con la cuenta en 2-2, Galarraga enganchó un lanzamiento del diestro Kevin Brown y la depositó en la tercera sección del último piso (*upper deck*) del estadio para un laberíntico jonrón HR (Figura 9a). Como anécdota, en el octavo *inning* Galarraga recibió un pelotazo en represalia por su jonrón, lo cual desencadenó una pelea colectiva (Figura 9b).

En relación al tipo de lanzamiento empleado por el pitcher, en los reportes de prensa (Figura 9) un articulista (Ringoslby) cita una recta de 96 mph, pero otro (Etkin) describe una *slider*. Sin embargo, un examen del video indica que la velocidad registrada por el radar fue de 84 mph y que la bola parece no romper. Por ello se descarta que haya sido una bola rápida, ya que la recta de Brown sobrepasaba las 90 mph, por lo que adoptamos que fue una *slider* que se quedó colgada. Los lanzamientos en *slider* tienen los valores más altos de la velocidad de rotación, los cuales, para las bolas de HR se estiman entre 2000 y 2500 rpm (Nathan, 2016).

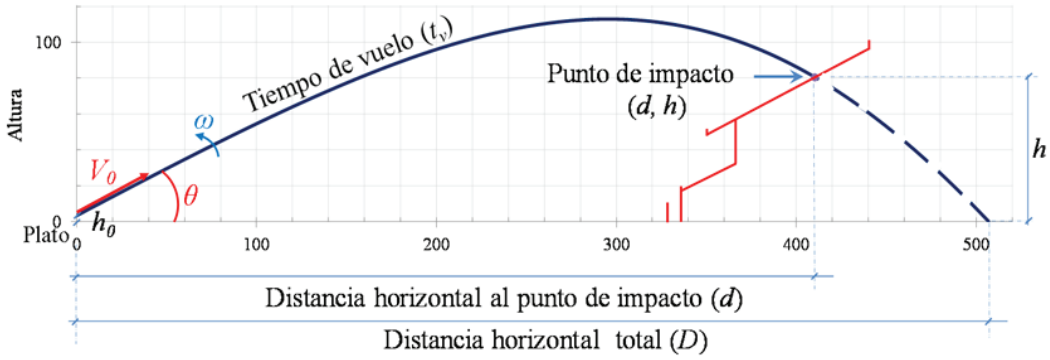


Figura 8. *Definición de distancia horizontal total (D), tiempo de vuelo (t_v) y coordenadas (d, h) del punto de impacto en las gradas*

a) Galarraga llega al plato después de conectar el jonrón. El titular indica los 529 ft asignados al batazo.

b) Galarraga enfrenta al *pitcher* quien lo golpeó en el 8° *inning* en represalia por su jonrón.

Figura 9. *Recortes de prensa del Rocky Mountain News al día siguiente del jonrón de Galarraga*

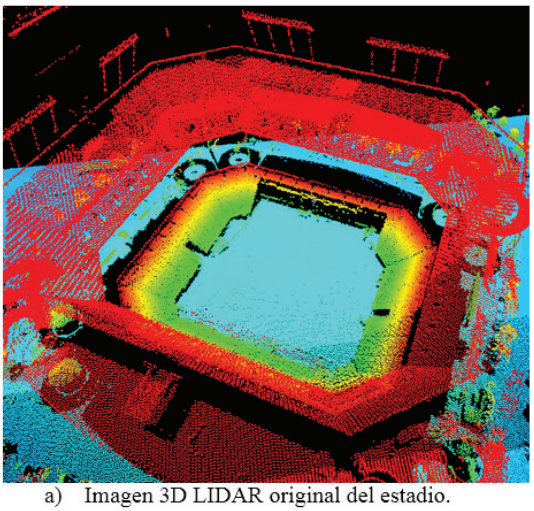
Incógnitas a ser determinadas

Para calcular la distancia total recorrida D es necesario reconocer que hay dos categorías de incógnitas que deben ser determinadas previamente. La primera categoría se refiere al tiempo de vuelo (t_v) y a las coordenadas del punto de impacto (d, h), ver Figura 8. Estas son incógnitas que se pueden medir, de alguna forma, con el uso de videos del juego (si existen) en conjunto con mapas, fotografías, imágenes satelitales o nubes de puntos (LIDAR, por sus siglas en inglés: Laser Imaging Detection and Ranging). La segunda categoría de incógnitas se refiere a las condiciones iniciales en el momento en que el bate golpea a la pelota, que son la rapidez lineal inicial (V_0), el ángulo de salida (θ) y la rapidez rotacional (ω), ver Figura 8. Estas son variables que no se medían en el año de 1997, pero deben ser estimadas de alguna manera para resolver el problema. Las incógnitas en esta segunda categoría tienen un mayor nivel de incertidumbre que las de la primera categoría.

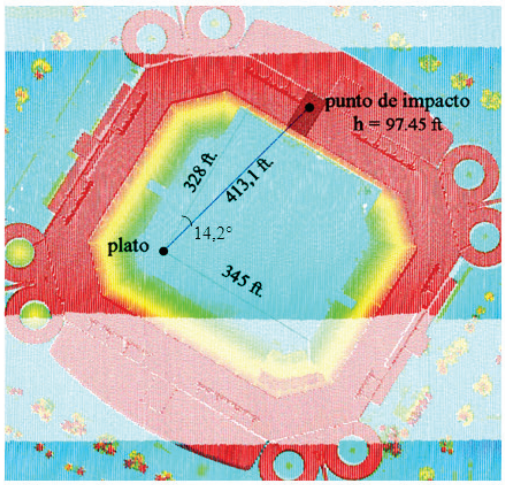
Punto de impacto y tiempo de vuelo; uso del video y de la nube de puntos LIDAR

Se realizó un análisis detallado del único video conocido que muestra el jonrón de Galarraga, filmado por el canal Fox. La descarga del video se hizo desde el portal de la MLB, el cual tiene mayor resolución que los videos disponibles en Youtube. Con un programa de edición profesional de videos (Adobe Premiere) y mediante un análisis cuadro a cuadro, cada uno con una duración de 1/30 segundos, se efectuó un análisis en detalle utilizando una herramienta que permite rastrear y seguir el recorrido de la pelota. Se obtuvo un tiempo de vuelo de $t_v = 4{,}67$ segundos desde el momento en el que la pelota es impactada por el bate hasta chocar con las sillas del estadio. La medición se repitió insertando tres cronómetros distintos dentro del programa, obteniéndose el mismo resultado, el cual fue corroborado con el cronómetro interno del programa. El punto de impacto está en el tercer sector del segundo piso detrás del jardín izquierdo, en la fila 20, contada de abajo hacia arriba, punto localizado aproximadamente en la mitad de la dimensión transversal y a 2/3 desde abajo de la dimensión longitudinal. Las Figuras 10 y 11 muestran el sitio de impacto. La Figura 10 muestra imágenes del estadio construidas con la tecnología LIDAR que se explica a continuación. La Figura 11 muestra una fotografía satelital del campo de béisbol y una imagen virtual elaborada con el programa SketchUp.

La distancia horizontal (d) y la altura (h) del punto de impacto (Figura 8) se determinaron mediante el uso de la tecnología LIDAR. Para ello se dispuso de una imagen de nube de puntos del estadio descargada del portal de la USGS (USGS, 2016), la cual se muestra en 3D en la Figura 10a. Las nubes de puntos se obtienen mediante el uso de rayos láser (LIDAR) y sistemas GPS que suministran una descripción tridimensional del estadio, de alta precisión. El procesamiento y los cálculos se hicieron con el programa Global Mapper. Se obtuvo una distancia horizontal (d) de 413,10 ft y una altura (h) de 97,45 ft. En la Figura 10b se muestra la imagen del estadio, visto desde arriba, sobre la cual se señala el punto de impacto y la distancia horizontal (d); la línea que une el plato con el punto de impacto forma un ángulo de 14,2° con la línea del jardín izquierdo. Se indican también las distancias del plato a la cerca del jardín izquierdo (328 ft) y a la del jardín derecho (345 ft).



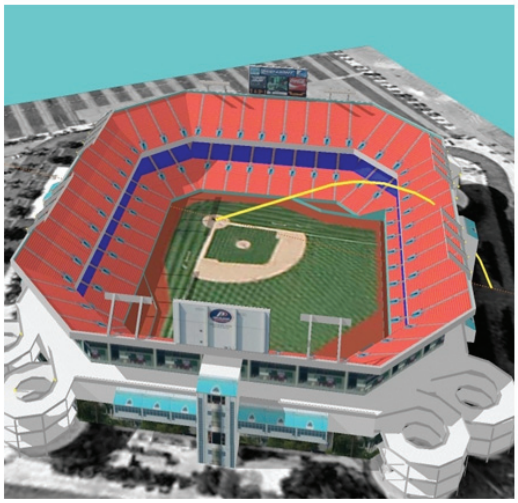
a) Imagen 3D LIDAR original del estadio.



b) Imagen 2D LIDAR mostrando el punto de impacto y las mediciones efectuadas.

Figura 10. *Imágenes LIDAR 3D y 2D del estadio Sun Life, originalmente Pro Player Stadium, y mediciones obtenidas del punto de impacto: d=413,10 ft, h=97,45 ft*

a) Fotografía satelital del campo de beisbol indicando el sitio de impacto.



b) Imagen virtual 3D indicando la trayectoria de la pelota y su extensión fuera del estadio.

Figura 11. *Fotografía e imagen virtual 3D del estadio que indica el campo de béisbol, el plato, el punto de impacto y la trayectoria de la pelota*

Condiciones climáticas

En relación a las condiciones climáticas del día del juego, el *boxscore* indica una temperatura de 87º F, vientos de 6 mph hacia el *centerfield*, cielo nublado sin precipitaciones, iniciándose a la 1:17 pm con duración de 3h y 32´ (Baseball Reference, 2016). En la página *Weather Underground* (2016) se pueden conocer las condiciones climáticas en esa fecha, humedad relativa promedio de 72 % con un máximo de 97 % y una presión a nivel del mar de 1013 hPa. Para conocer la densidad del aire, nos basamos en la herramienta *Density Altitude Calculator (*Shelquist Engineering, 2016). Con los valores de altitud (1 m), temperatura (87º F), humedad relativa y presión se obtiene una densidad de 1,148 kg/m^3. La densidad es importante porque la fuerza de arrastre es directamente proporcional a la densidad del aire, por lo que la bola viajará más lejos si el aire es menos denso. La componente de la velocidad del viento en la dirección del batazo es de 6 mph por el coseno de (45°-14,2°) = 5,1 mph (Figura 10b). Tomando en cuenta que a la hora del batazo, aproximadamente a las 3 pm, la velocidad del viento en Miami había aumentado aproximadamente 1 mph (Weather Underground, 2016), adoptamos para el cálculo una velocidad de 6,1 mph en la dirección horizontal y en el mismo sentido que el de la bola.

Condiciones iniciales

El problema a resolver consiste en determinar la trayectoria recorrida por la pelota con la condición de que debe pasar por el punto de impacto definido por sus coordenadas (d, h) en el tiempo de vuelo (t_v). Dicha trayectoria depende de las condiciones iniciales (rapidez lineal inicial (V_0), ángulo de salida (θ) y rapidez rotacional (ω)) con que sale la bola al ser golpeada por el bate, las cuales no se conocen. Se supone que la rotación de la pelota es hacia atrás, característica de los largos batazos, y que su rapidez (ω) se mantiene constante durante todo el tiempo de vuelo. Se supone también que la bola es impactada por el bate a una altura inicial h_0 = 3,28 ft.

En vista de que se desconocen dichas condiciones iniciales, existen múltiples soluciones posibles al problema planteado. Sin embargo, no es necesario adoptar valores totalmente arbitrarios puesto que en los dos últimos años se han hecho mediciones de la rapidez lineal inicial (V_0) y del ángulo de salida (θ) de los jonrones que se conectan en la MLB, mediante la herramienta denominada Statcast que usa cámaras y radares Doppler de alta precisión, instalados recientemente en todos los parques de las grandes ligas. Esta información es aprovechada en este trabajo para definir rangos de valores posibles de estas variables y aplicarlos en la solución del problema. Un análisis de la información disponible en Statcast (2016), indica que todos los jonrones conectados en los años 2015 y 2016 en la MLB tuvieron una rapidez lineal inicial entre 101 y 119 mph y un ángulo de salida entre 18° y 45°. Por tanto, se adopta este rango de valores de V_0 y de θ para los cálculos que se presentan a continuación.

Por otro lado, Statcast no reporta valores de la rapidez rotacional de las pelotas bateadas. Sin embargo, existe información obtenida de manera indirecta (Nathan, 2013) mediante ajustes a un modelo matemático basado en

mediciones efectuadas de la distancia recorrida, el ángulo de salida y la velocidad inicial, para un conjunto de 281 jonrones. Se encontraron valores de la rapidez rotacional comprendidos entre 650 rpm y 3500 rpm, pero los que alcanzaron una mayor distancia (D>450 ft) tuvieron valores en exceso de 1100 rpm (Nathan, 2013). Por lo tanto, el rango de valores de ω a considerar en el cálculo estará comprendido entre 1100 y 3500 rpm.

Determinación de la trayectoria y la distancia total recorrida

El problema se reduce entonces a variar el trío de valores de V_0, θ y ω, comprendidos dentro de los rangos seleccionados, y resolver las ecuaciones diferenciales no lineales (Ecuaciones 10 a 16) hasta conseguir por aproximaciones sucesivas que la trayectoria de la pelota coincida con los valores medidos del punto de impacto (d, h) en el tiempo determinado t_v.

Se definieron seis casos de análisis en los que varía la rapidez rotacional en intervalos de 480 rpm, entre el mínimo 1100 rpm y el máximo 3500 rpm seleccionados. La Tabla 4 muestra los seis valores adoptados. Mediante iteraciones sucesivas se determinaron para cada caso los valores de V_0 y θ que ocasionan que las coordenadas del punto de impacto (x, y) se aproximen a los valores conocidos (d, h), con un error menor al 0,25 por mil. Las variaciones arbitrarias de V_0 y θ se mantuvieron dentro de los rangos seleccionados de 101-119 mph y 18°-45°, respectivamente. Las coordenadas obtenidas para el punto de impacto y sus errores relativos se muestran en la Tabla 4. El error relativo es una medida del nivel de acierto en la llegada al punto de impacto y está dado por la diferencia entre el valor calculado (x, y) y el valor conocido (d, h), dividida entre el valor conocido y multiplicada por mil. El mayor error es de 0,235 por mil.

La trayectoria de la bola para cada caso se muestra en la Figura 12, en donde se aprecian las diferentes alturas y distancias alcanzadas por cada uno, pasando todos por el punto de impacto. Aun cuando es posible encontrar otras soluciones, las mismas estarían comprendidas entre los seis casos mostrados en la Figura 12. La distancia total recorrida (D) se indica en la última columna de la Tabla 4; se aprecia que en todas las soluciones está por encima de los 500 ft, con un valor medio de 524 ft.

Tabla 4. Resultados del análisis: Seis (6) soluciones posibles y distancia total recorrida

	Rapidez de Rotación	Rapidez inicial	Ángulo de Salida	Punto de impacto (ft) d=413,1 h=97,45			Error relativo (tanto por mil)		Distancia total recorrida
	ω (rpm)	V_0 (mph)	θ (º)	x (ft)	y (ft)	t (sg)	x	y	**D (ft)**
1	1100,00	117,85	34,56	413,13	97,44	4,67	0,0726	-0,1026	**509,21**
2	1580,00	116,98	32,86	413,12	97,43	4,67	0,0600	-0,2140	**513,87**
3	2060,00	116,15	31,32	413,10	97,47	4,67	0,0033	0,2354	**518,72**
4	2540,00	115,35	29,76	413,09	97,47	4,67	-0,0245	0,1576	524,08
5	3020,00	114,59	28,18	413,11	97,44	4,67	0,0248	-0,0690	**529,37**
6	3500,00	113,87	26,59	413,10	97,47	4.67	0,0000	0,2052	534,79

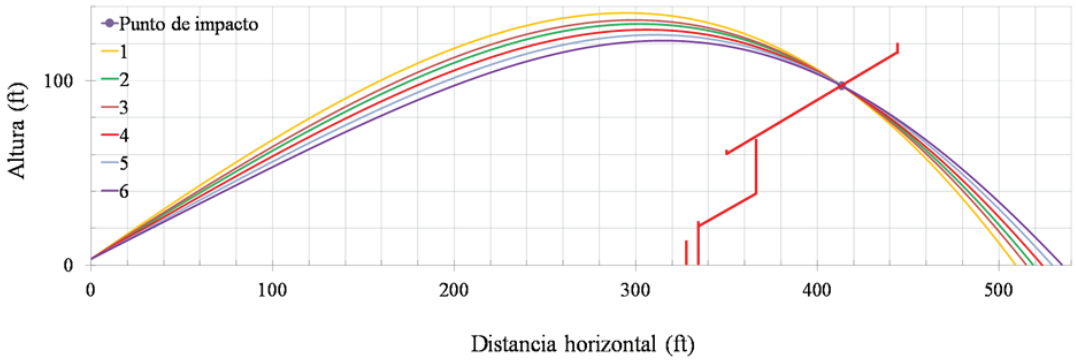


Figura 12. *Trayectoria de la bola para las seis soluciones posibles del jonrón de Galarraga, indicando el punto de impacto en las gradas y el sitio de aterrizaje que define la distancia total recorrida*

Comparación con Rybarczyk y análisis de altura máxima

El recorrido de la pelota encontrado en este trabajo y representado por las seis soluciones de la Figura 12 se compara en la Figura 13 con el recorrido determinado en Rybarczyk (2013), quien obtuvo una distancia total de 468 ft. Se aprecia que el recorrido de Rybarczyk alcanza una mayor altura que el de este trabajo. Las principales diferencias entre los resultados aquí presentados y el de Rybarczyk son las siguientes: 1) Coordenadas del punto de impacto: Rybarczyk reporta d= 404 ft y h=82 ft, mientras que los valores aquí obtenidos mediante la imagen de nube de puntos LIDAR son d= 413,1 ft y h=97,45 ft; 2) Rybarczyk usó un tiempo de vuelo t_v = 4,97 segundos mientras que este trabajo obtuvo un tiempo de t_v = 4,67 segundos, verificado con cuatro cronómetros.

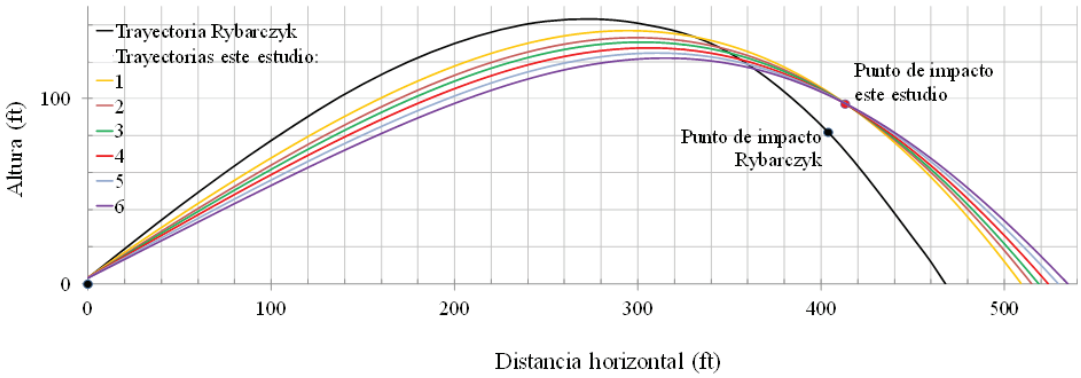


Figura 13. *Trayectoria recorrida por la pelota en las seis soluciones posibles y comparación con la trayectoria obtenida en (Rybarczyk, 2013)*

Dada la diferencia con Rybarczyk se decidió comparar la altura máxima de la pelota de cada solución con la estimada a partir del análisis del video. La Figura 14 muestra una vista en planta y un corte del estadio procesados con el programa Global Mapper a partir de la nube de puntos LIDAR, en donde se indica el punto de ubicación de la cámara de video en la sala de prensa y el punto de impacto de la pelota en el escalón 20. El corte A-A pasa por los dos puntos citados; el plano vertical resultante se indica en la parte inferior de la Figura 14. Nótense los puntos en color de LIDAR que delinean las gradas del sector derecho del estadio donde está ubicada la cámara y las del sector izquierdo donde impactó la pelota. Sobre el plano vertical se proyectaron los seis recorridos de la pelota dados en este trabajo y el recorrido dado por Rybarczyk.

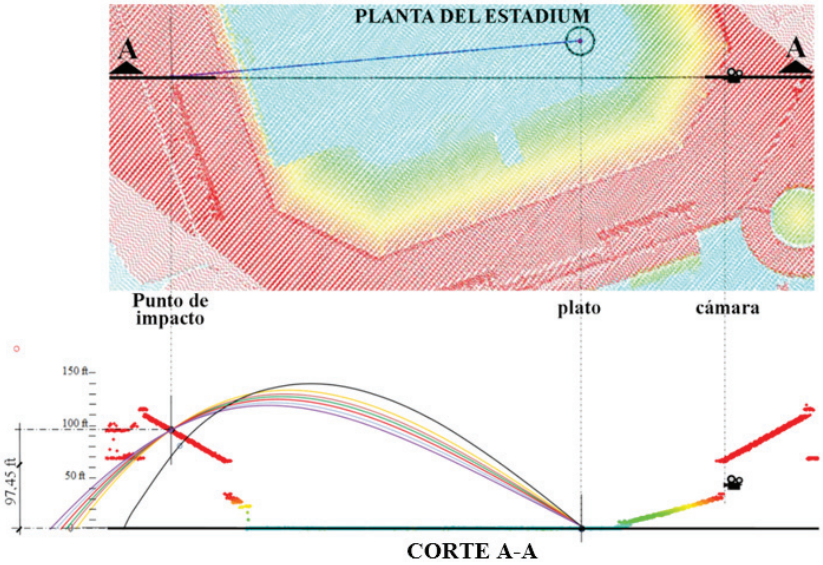


Figura 14. *Planta del estadio y corte A-A sobre la nube de puntos LIDAR que delinea las gradas del estadio. El Corte A-A pasa por la cámara y por el punto de impacto*

Seguidamente se realizó una proyección cónica cuyo foco está en la cámara y cuyos rayos se indican en la parte inferior de la Figura 15. Para los efectos de visualización se muestra el plano de proyección rebatido 90° y sobre el mismo se han superpuesto dos fotogramas del video donde se indica en forma aproximada la altura máxima alcanzada por la pelota, según la observación detenida del mismo. Un primer fotograma colocado en la parte inferior muestra el estadio y un segundo fotograma colocado en la parte superior muestra la altura máxima de la pelota. Para verificar que el cuadro o fotograma del video superpuesto coincide correctamente con la posición de la cámara en la proyección, el tamaño de la imagen se ajustó al corte tomando como referencia puntos característicos como bordes de barandas de las gradas, los cuales efectivamente coincidieron tal como se aprecia si seguimos los rayos correspondientes en la Figura 15. Dichos rayos pasan también por los puntos más altos de las trayectorias y por el punto de impacto, extendiéndose hasta el plano de proyección. En el caso de las soluciones de este trabajo, el rayo pasa por la altura máxima promedio de las seis soluciones encontradas.

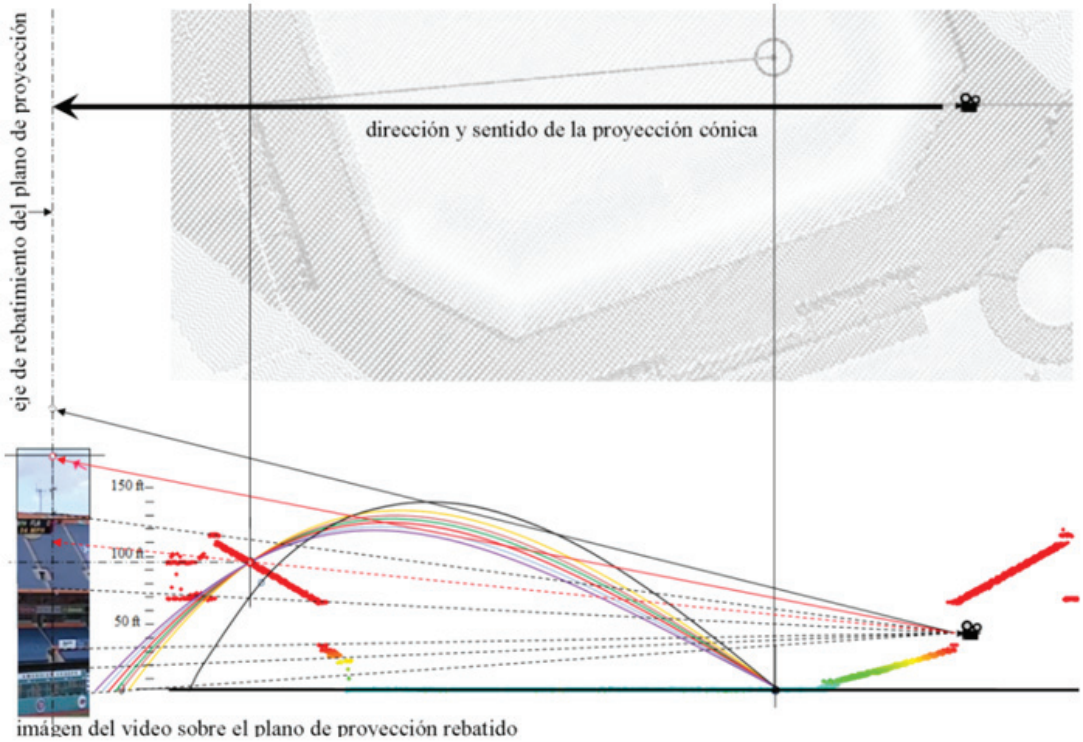


Figura 15. *Proyección cónica desde la cámara que pasa por las trayectorias de la pelota hasta un plano de proyección rebatido 90° en el que se superponen dos fotogramas del video ajustados al corte*

En la Figura 16 se muestra una ampliación de la porción inferior de la Figura 15 en donde se puede comparar la altura máxima indicada por el video con la altura máxima predicha por la solución 4 de este trabajo y por la solución de Rybarczyk. El análisis del video muestra que la pelota en su punto más alto se mantuvo siempre dentro de los fotogramas durante la filmación, es decir, el camarógrafo nunca perdió de vista a la pelota. Se puede apreciar que la proyección de la altura máxima de Rybarczyk se sale del fotograma del video, lo cual no se corresponde con el video. Igualmente, las soluciones 1 y 2 de este estudio (Figuras 13 y 16) poseen alturas máximas que también se salen del fotograma, lo que las hace menos confiables que las otras cuatro (soluciones 3 a 6), cuyas proyecciones sí se mantienen dentro del fotograma y se acercan más a la altura máxima observada en el video, siendo la solución 4 la que mejor se ajusta a la altura máxima de la pelota estimada en el fotograma.

Puesto que las soluciones 3 a 6 de este estudio se ajustan mejor que la solución obtenida por Rybarczyk a la altura máxima de la pelota registrada en el video, se puede afirmar que el resultado de la distancia total del jonrón de Galarraga obtenido en este trabajo es más preciso que el encontrado por Rybarczyk. Con base a los resultados de las soluciones 3 a 6 dados en la Tabla 4 se puede concluir que la distancia total (*D*) recorrida por el batazo de Galarraga está comprendida entre 518,7 ft y 534,8 ft con un valor más probable de 524,1 ft (solución 4).

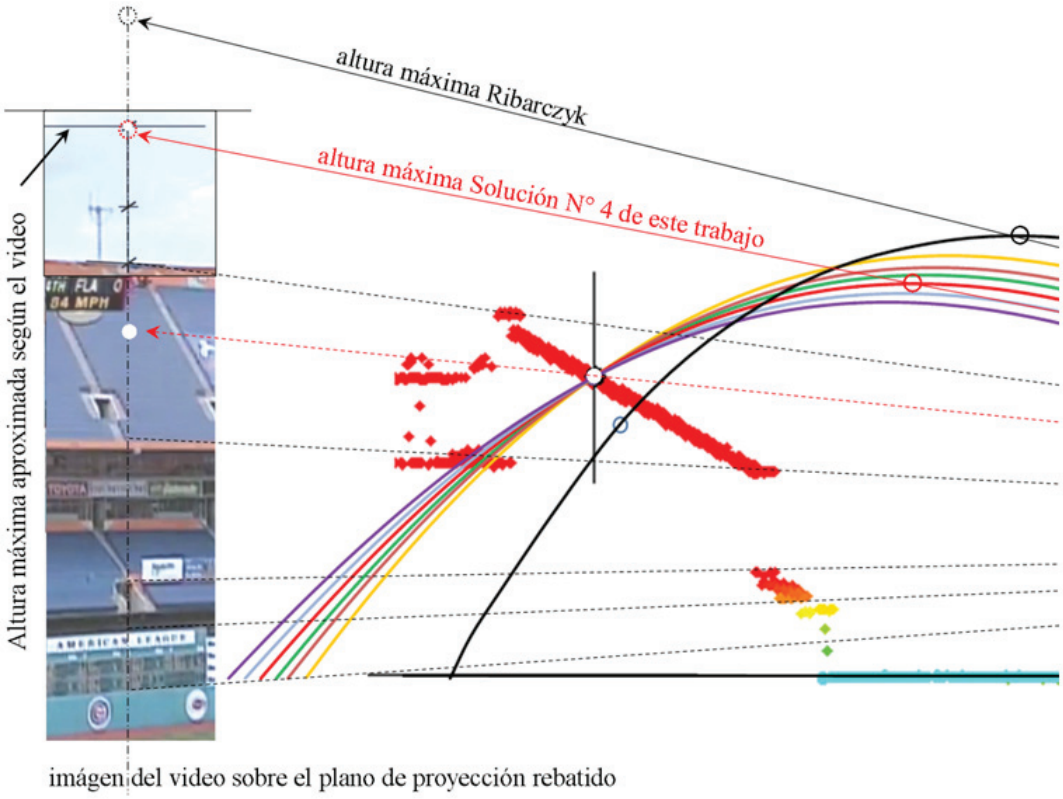


Figura 16. *Comparación de la altura máxima indicada en el fotograma del video con las alturas máximas predichas por este trabajo y por Rybarczyk*

CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo matemático para describir el movimiento de una pelota de béisbol, en el cual se consideran los efectos de las fuerzas de gravedad, de arrastre inducida por la resistencia del aire, del viento y de Magnus. Se desarrolló un algoritmo numérico que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales por medio de diferencias finitas, y se encontró que es apropiado para determinar el recorrido de la pelota de béisbol. Del presente estudio se desprende que la fuerza de Magnus inducida por la rotación de la pelota tiene un papel predominante en el recorrido. El modelo matemático permitió reproducir el fenómeno conocido como la paradoja de los elevados cortos en donde una alta rapidez rotacional produce alteraciones en el movimiento de la pelota difíciles de prever por los fildeadores.

El modelo matemático se aplicó en el análisis del recorrido de la pelota durante el extraordinario jonrón que conectó Andrés Galarraga el 31/05/1997 en Florida. Se ha establecido que la aplicación de los principios de la física y la geometría descriptiva, en conjunto con el uso de las imágenes construidas a partir de nubes de puntos provenientes de la técnica LIDAR y el análisis detallado del video, proporcionan las herramientas necesarias para una determinación precisa de la trayectoria recorrida por la pelota. Los resultados de las simulaciones con el modelo matemático indican que la distancia total recorrida por el batazo de Galarraga está comprendida entre 519 ft y 535 ft con un valor más probable de 524 ft, valor superior al estimado recientemente de 468 ft (Rybarczyk, 2013) y más cercano al valor de 529 ft dado en 1997 (Birnie, 2015). Se concluye que el jonrón de Galarraga es uno de los pocos que han excedido la barrera de los 500 ft en la historia de las grandes ligas (MLB).

REFERENCIAS

ADAIR, R. K. (2002). *The Physics of Baseball*. New York: Harper-Collins Publishers Inc.

BASEBALL REFERENCE (2016). http://www.baseball-reference.com/

BIRNIE N. (2015). Top 15 Longest Home Runs in MLB History. *The Sportster*. Recuperado de http://www.thesportster.com/baseball/top-15-longest-home-runs-in-mlb-history/

LÓPEZ J. L., LÓPEZ O. A., (2019). La Física del Béisbol con Hechos y Hazañas de las Grandes Ligas. A ser publicado.

MCBEATH MK, NATHAN AM, BAHILL AT, BALDWIN DG. (2008). Paradoxical pop-ups: Why are they difficult to catch? *Am. J. Phys*. 76, 723–29.

METEOCAST (2016). http://es.meteocast.net/

MLB (2016). Portal oficial de las Grandes Ligas de Baseball. www.mlb.mlb.com.

NATHAN, A.M. (2008).The Effect of Spin on the Flight on a Baseball. *American J. of Physics*, 76(2), 119-124

NATHAN. A. M. (2013). How Far Did That Fly Ball Travel? Baseball ProGUESTus. http://www.baseballprospectus.com/article.php?articleid=19322.

NATHAN, A. M. (2016). Comunicación personal.

RAUE B. A. (2001). Home run distances at Pro Player Stadium. Department of Physics, Florida International University. http://www2.fiu.edu/~baraue/personal/homers.html.

RYBARCZYK G. (2013). Home Run Tracker. Recuperado de http://www.hittrackeronline.com/

SAWICKI G. S., HUBBARD M. AND STRONGE W. (2003). How to hit home runs: Optimum baseball bat swing parameters for maximum range trajectories. *Am. J. Phys*. 71, 1152–1162.

SHELQUIST ENGINEERING (2016). Density Calculator. Recuperado de https://wahiduddin.net/calc/calc_da.htm.

STATCAST (2016). Statcast leaderboard. Recuperado de www.mlb.mlb.com.

USGS (2016). Imagen LIDAR FL Broward Co 2007 000519. Recuperado de https://earthexplorer.usgs.gov/.

WEATHER UNDERGROUND (2016). https://www.wunderground.com/

WHITE, F.M. (1979). Mecánica de Fluidos, McGraw Hill.