Sobre la estructura de la Lógica Modal

Por *Miguel Sánchez-Mazas*

Creemos haber encontrado la expresión matemática más clara y simple posible del sistema de conceptos *modales* que, por estar fundado sobre las oposiciones clásicas *posible-imposible, necesario-contingente, verdadero-falso,* puede, con toda propiedad, ser denominado *sistema de la lógica modal clásica.* Dicho sistema será aquí designado abreviadamente por *SM,* para distinguirlo de otros sistemas modales, como los conocidos S1, S2, S3, S4, S5 de C. I. Lewis y los recientes L de J. Lukasiewicz[1] y VE, EV, M, M′, M″ y M (p/q) de G. H. von Wright,[2] para citar los más afines. No nos ocuparemos en este trabajo del sentido filosófico de las modalidades, ni nos detendremos en explicaciones o ejemplos; sólo nos interesa aquí mostrar que la expresión de las modalidades por las matrices que hemos adoptado satisface al sistema *SM,* cuya interpretación intuitiva corresponde a la lógica clásica.

La expresión matemática que proponemos se funda en dos maneras de representación de las modalidades de cualquier orden, maneras estrechamente vinculadas entre sí:

1. Mediante el *grupo de matrices modales.*

2. Mediante el sistema de *coordenadas modales*: *Q* (*cantidad modal*) y *S* (*signo modal*).

---

1. Jan Lukasiewicz: *A system of Modal Logic,* Actes du XIème Congrès International de Philosophie. Bruxelles, 20-26 août 1953, Vol. XIV, pp. 82-87.
2. G. H. von Wright: *An Essay in Modal Logic,* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1951. Y también: *A New System of Modal Logic,* Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20-26 août 1953, Vol. V, pp. 53-64.

Veamos primero cuáles son las características formales generales del sistema modal *SM*.

a) Considera todas las estructuras compuestas de los conceptos modales elementales *posible* (P), *imposible* (I), *necesario* (N), *contingente* (C), *verdadero* (V) y *falso* (F), aplicables como operadores a una proposición o variable proposicional, y las de los conceptos modales superiores aplicables a dos o más argumentos, como *compatible* (P-P) etc. Todas estas estructuras lógicas se denominan, en general, *modalidades*.

b) Establece las leyes de reducción, equivalencia e implicación entre modalidades y proposiciones o funciones proposicionales modalizadas, deduciéndolas en virtud de ciertas reglas y esquemas generales de deducción que permiten operar algebraicamente.

c) Se funda en dos únicos conceptos independientes, *necesario* (N) y *falso* (F), en función de los cuales se definen los restantes conceptos elementales y, a través de éstos, todos los otros, de cualquier orden.

d) Las combinaciones entre modalidades se obtienen gracias a que en el universo lógico modal se define una operación, que aquí denominaremos *producto*, asociativa y, en general, no-conmutativa, respecto de la cual las modalidades constituyen lo que en álgebra superior se llama un *grupo*. En efecto, satisfacen a las cuatro condiciones siguientes:

1. Dadas dos modalidades cualesquiera M y M′, pertenecientes al sistema *SM*, existe siempre una modalidad M″, perteneciente a *SM*, equivalente al producto MM′, y una modalidad M‴, también perteneciente a *SM*, equivalente al producto M′M (condición de *cierre*).

2. Existe en el sistema *SM* una modalidad *V* que hace el papel de *elemento-unidad* respecto de la operación producto, porque el resultado de multiplicar por ella, a la derecha o a la izquierda, cualquier modalidad M del sistema SM es equivalente a M misma (condición de existencia de la *unidad*).

3. Dada una modalidad cualquiera M del sistema SM, existe siempre en *SM* una modalidad M′, denominada *inversa* de M, que, multiplicada a la derecha o a la izquierda por M, da como resultado un producto equivalente a la unidad (condición de existencia del elemento *inverso*).

4. Dadas tres modalidades cualesquiera M, M′ y M″, pertenecientes a *SM*, el resultado de multiplicar M, a la derecha, por el producto de M′ a la derecha, por M″ es equivalente al resultado de multiplicar el producto de M, a la derecha, por M′, a la derecha, por M″; y, del mismo modo, el resultado de multiplicar M, a la izquierda, por el producto de M′, a la izquierda, por M″ es equivalente al resultado de multiplicar el producto de M, a la izquierda, por M′, a la izquierda, por M″ (condición de validez, para la operación producto, de la *propiedad asociativa*).

Si empleamos la notación 'XY' para designar el *producto* de la multiplicación de una modalidad X, a la izquierda, por otra modalidad Y; la notación 'YX' para designar el *producto* de la multiplicación de X, a la derecha, por Y; los *cuantificadores* '(X)' y '(EX)' para significar, respectivamente, como en el cálculo de predicados y de clases, 'para todo X' y 'existe un X tal que'; el signo 'V' (verdadero) para representar la modalidad *unidad*, el signo 'M^{-1}' para expresar la modalidad *inversa* y el signo '=' como signo de *equivalencia*, escribiremos las cuatro condiciones anteriores como sigue:

1. $(M)\ (M')\ (EM'')\ MM' = M''$
   $(M)\ (M')\ (EM''')\ M'M = M'''$
2. $(EV)\ (M)\ VM = MV = M$
3. $(M)\ (EM^{-1})\ MM^{-1} = M^{-1}M = V$
4. $(M)\ (M')\ (M'')\ M(M'M'') = (MM')\ M''$
   $(M)\ (M')\ (M'')\ (M''M')\ M = M''\ (M'M)$

e) Las *definiciones* básicas del sistema *SM*, que expresan las modalidades C (contingente), P (posible), I (imposible) y V (verdadero) como funciones o combinaciones de dos únicas modalidades fundamentales, utilizadas como variables independientes, N (necesario) y F (falso), son las siguientes:

D1. C = FN
D2. P = FNF
D3. I = NF
D4. V = FF

f) De la aplicación de la anterior condición 2. (condición de existencia de la unidad) a las modalidades elementales N, C, P, I, F y V, resulta:

2a. VN = NV = N
2b. VP = PV = P
2c. VC = CV = C
2d. VI = IV = I
2e. VF = FV = F
2f. VV = V

g) Se establecen los siguientes *axiomas* para la reducción de modalidades de segundo orden a V (verdad):

A1. NP = V
A2. PN = V

que nos dan P como inversa de N y N como inversa de P. De A1. y A2. se deducen inmediatamente, haciendo uso de las definiciones de C, P e I y de las propiedad asociativa del producto, otras dos equivalencias para la reducción de modalidades de segundo orden a V (verdad):

A1′. II = V
A2′. CC = V

En efecto, demostremos primero las equivalencias NP = II y PN = CC:

$$\text{d23. } NP \underset{D2}{=} N\,(FNF) \underset{4}{=} (NF)\,(NF) \underset{D3}{=} II \qquad \text{c.q.d.}$$

$$\text{d21. } PN \underset{D2}{=} (FNF)\,N \underset{4}{=} (FN)\,(FN) \underset{D1}{=} CC \qquad \text{c.q.d.}$$

Ahora, de d23. (NP = II) y A1. (NP = V) deducimos II = V, o sea, A1′;
de d21. (PN = CC) y A2. (PN = V), deducimos CC = V, o sea, A2′.

Las equivalencias A1′. (II = V), A2′. (CC = V), D4. (FF = V) y 2f. (VV = V) nos dan, respectivamente, I, C, F y V como modalidades inversas de sí mismas. Con ello, la condición 3. (condición de existencia del inverso) puede adoptarse, no ya como un axioma, sino como un *teorema* demostrable del sistema *SM*, en la forma siguiente:

h) *Teorema:* Toda modalidad de cualquier orden de *SM*, expresable por una fórmula del tipo:

$$(1).\ M = M_1 M_2 M_3 \ldots\ldots M_{n-1} M_n$$

—donde M_1 M_2 $M_3, \ldots,$ M_{n-1}, M_n son modalidades elementales de *SM*—, tiene su inverso:

$$(2).\ M^{-1} = M_n^{-1} M_{n-1}^{-1} \ldots\ldots M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1}$$

Demostración: Los inversos de las seis modalidades elementales han quedado establecidos en g), de la forma siguiente:

Por A1. $N = P^{-1}$ (N inverso de P)
Por A2. $P = N^{-1}$ (P inverso de N)
Por A1′. $I = I^{-1}$ (I inverso de I)
Por A2′. $C = C^{-1}$ (C inverso de C)
Por D4. $F = F^{-1}$ (F inverso de F)
Por 2f. $V = V^{-1}$ (V inverso de V)

La existencia de los factores de M^{-1} en la fórmula (2) de h) está, pues, probada. Sólo queda por demostrar que $MM^{-1} = V$ y que $M^{-1} M = V$ para los valores de M y M^{-1} expresados por (1) y (2) de h). Y, en efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
MM^{-1} &= M_1 M_2 M_3 \ldots M_{n-1}\ \ M_n M_n^{-1} M_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_2 M_3 \ldots M_{n-1}\ \ V M_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_2 M_3 \ldots M_{n-1}\ \ M_{n-1}^{-1}\ M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} \\
&= M_1 M_2 M_3 \ldots V \ldots M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_2 M_3 \ldots M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_2 V M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_2 M_2^{-1} M_1^{-1} = \\
&= M_1 V M_1^{-1} = \\
&= M_1 M_1^{-1} = V \qquad \text{c.q.d.}
\end{aligned}$$

y de una manera en todo análoga se demuestra que $M^{-1} M = V$.

i) *SM* se funda, por último, en un *axioma* que expresa la *implicación* modal fundamental, axioma del que se deducen todas las leyes de implicación entre modalidades de cualquier orden. Este axioma es el siguiente:

A3. $N \to V \to P$ (necesidad implica verdad, verdad implica posibilidad).

A3. no es más que la forma abreviada para escribir, como un solo axioma, los axiomas parciales A3′ y A3″ y su consecuencia C3:

A3′. $N \to V$
A3″. $V \to P$
C3. $N \to P$

LAS MATRICES MODALES

Para la expresión matemática adecuada del sistema *SM* cuyas principales características formales acabamos de enumerar hay que tener en cuenta, ante todo, el carácter en general no-conmutativo del producto entre modalidades, en virtud del cual, mientras la expresión 'FI', por ejemplo es decir, la que se lee:

'es falso que sea imposible'

equivale modalmente a 'es posible', es decir a P, como es fácil de demostrar:

$$FI \underset{D3}{=} F\,(NF) \underset{4.}{=} FNF \underset{D2}{=} P \qquad \text{c.q.d.}$$

sin embargo, la expresión 'IF', que se lee:

'es imposible que sea falso'

equivale modalmente a 'es necesario', o sea a N, como también se demuestra:

$$IF \underset{D3}{=} (NF)F \underset{4.}{=} N(FF) \underset{D4}{=} NV \underset{2.}{=} N \qquad \text{c.q.d.}$$

En otras palabras, multiplicar a la derecha no da el mismo resultado que multiplicar a la izquierda, y como una de las consecuencias de este hecho, dos símbolos F (falso) se anulan mutuamente si se hallan contiguos en la fórmula de una modalidad de orden superior, por ejemplo:

$$M_1 \ldots FF \ldots M_n \underset{D4.}{=} M_1 \ldots V \ldots M_n \underset{2.}{=} M_1 \ldots M_n$$

pero no si se hallan separados en la fórmula por el símbolo de otra modalidad, ya que no cabe aplicar la propiedad conmuattiva para colocar contiguos a los símbolos 'F' de modo que puedan anularse por la aplicación sucesiva de la definición D4. y de la propiedad 2. (propiedad de la modalidad *verdad* o modalidad *unitaria*), como acabamos de hacer en la reducción precedente.

Así, por ejemplo, mientras que la modalidad de tercer orden 'FFN', que se lee:

'es falso que sea falso que sea necesario'

equivale a 'N', pues los dos 'F' contiguos desaparecen por la reducción siguiente:

$$\underset{4.}{FFN} = \underset{D4.}{(FF)N} = \underset{2a.}{VN} = N$$

sin embargo, la modalidad de tercer orden 'FNF', que se lee:

'es falso que sea necesario que sea falso'

equivale a 'es posible', o sea, a 'P', según la definición D2.

En virtud de estas consideraciones, se comprende que cualquier intento de expresión matemática de las modalidades por medio de términos cuyo producto sea conmutativo —como, por ejemplo, los números enteros— es inviable, y que el universo modal, por sus peculiares características, no puede traducirse en un sistema de relaciones matemáticas análogo al álgebra de Boole, que emplea la suma y el producto aritméticos como expresión de la *alternativa* y de la *conjunción* de la lógica proposicional, gracias a que los caracteres formales de 'verdadero' y 'falso' en esa lógica son idénticos a los de '1' y '0' en una aritmética. Aquí, por el contrario, aun en el caso de que empleáramos tantos números enteros diferentes como modalidades distintas, nos encontraríamos con la dificultad de expresar por ese camino el producto no-comunicativo entre modalidades. Esta constatación nos ha llevado a intentar la representación de cada *modalidad* (u *operador modal)* por medio de una *matriz,* ya que el producto de matrices es también, en general, no-conmutativo.

Tomemos matrices cuadradas de segundo orden, de coeficientes por el momento incógnitos, para expresar los seis operadores modales o modalidades fundamentales (elementales, o de primer orden), V, F, N, I, P y C:

$$V = \begin{Vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{Vmatrix} \qquad F = \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix}$$

$$N = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \qquad I = \begin{Vmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{Vmatrix}$$

$$P = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \qquad C = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{Vmatrix}$$

En virtud de la condición 2., que caracteriza al operador modal V como operador *unidad* a la derecha y a la izquierda, podremos ya tomar como matriz representativa del operador *verdad* la matriz unidad:

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

que multiplicada por cualquier otra matriz, a la derecha o a la izquierda, da como producto la matriz dada.

Para encontrar la matriz representativa de F, expresemos la relación entre matrices que implica la definición D4.

$$FF = \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix} = V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Aplicando ahora las reglas para el producto de matrices, nos resultarán las ecuaciones siguientes:

$$f_1^2 + f_2 f_3 = 1 \qquad (a)$$
$$f_1 f_2 + f_2 f_4 = 0 \qquad (b)$$
$$f_3 f_1 + f_4 f_3 = 0 \qquad (c)$$
$$f_3 f_2 + f_4^2 = 1 \qquad (d)$$

De las ecuaciones (a) y (d) se deduce que $f_1^2 = f_4^2$. A su vez, sacando factor común en (b) y (c), tenemos, respectivamente:

$$f_2 (f_1 + f_4) = 0 \qquad (b')$$
$$f_3 (f_1 + f_4) = 0 \qquad (c')$$

El sistema tiene más de una solución, y entre ellas elegimos la siguiente:

$$[\, f_1 = 1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0 \quad f_4 = -1 \,]$$

por ser la más sencilla y semejante a la representativa de V. Tenemos, pues, el operador modal F (falsedad) expresado por la matriz:

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Por su parte, los operadores C, P e I, que en las definiciones D1., D2. y D3. han quedado expresados en función de N y F estarán representados por matrices que cumplan las condiciones siguientes:

$$C = FN = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{Vmatrix}$$

$$P = FNF = \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \right\} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix}$$

$$I = NF = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{Vmatrix}$$

De las precedentes condiciones se deducen las ecuaciones que siguen:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = p_1 = i_1 = n_1 \\ c_2 = n_2 \ , \ p_2 = i_2 = -n_2 \\ c_3 = p_3 = -n_3 \ , \ i_3 = n^3 \\ c_4 = i_4 = -n_4 \ , \ p_4 = n_4 \end{array} \right\} \quad (\Gamma)$$

Con ello, basta encontrar n_1, n_2, n_3 y n_4, por ejemplo, para tener los elementos de las matrices representativas de las modalidades C, P e I.

Los axiomas de reducción A1. y A2. se traducen en las condiciones siguientes:

$$\text{A1.}\quad NP = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} =$$

$$= V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\text{A2.}\quad PN = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} =$$

$$= V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

y, aplicando las reglas del producto de matrices, tenemos las ecuaciones siguientes:

$$(e)\left\{\begin{aligned} n_1^2 - n_2\, n_3 &= 1 \\ -n_1\, n_2 + n_2\, n_4 &= 0 \\ n_3\, n_1 - n_4\, n_3 &= 0 \\ -n_3\, n_2 + n_4^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (f)\left\{\begin{aligned} n_1^2 - n_2\, n_3 &= 1 \\ n_1\, n_2 - n_2\, n_4 &= 0 \\ -n_3\, n_1 + n_4\, n_3 &= 0 \\ -n_3\, n_2 + n_4^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Los dos sistemas de ecuaciones, (e) y (f) son equivalentes, y sus soluciones se deducen del modo siguiente:

$$\left\{ n_1^2 = n_4^2 \;\;,\;\; n_2\,(n_4 - n_1) = 0 \;\;,\;\; n_3\,(n_4 - n_1) = 0 \;\;,\;\; n_1^2 = 1 + n_2\, n_3 \right\}$$

que queda satisfecha atribuyendo a n_1, n_2, n_3 y n_4 los valores:

$$\left\{ n_1 = 1 \ , \ n_2 = 0 \ , \ n_3 = 1 \ , \ n_4 = 1 \right\}$$

con lo cual, como es natural, la matriz representativa de N (necesidad) es la siguiente:

$$N = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

y aplicando las precedentes ecuaciones (Γ) que dan los valores de c_1, c_2, c_3, c_4, p_1, p_2, p_3, p_4, i_1, i_2, i_3, e i_4 en función de n_1, n_2, n_3 y n_4, tenemos:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

En resumen, hemos obtenido como matrices representativas de las modalidades elementales o de primer orden V, F, N, C, P e I, seis matrices distintas cuya forma general es:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix}$$

siendo $Q = 1$ para N e I, $Q = 0$ para V y F, $Q = -1$ para P y C, al tiempo que $S = 1$ para N, V y P, mientras que $S = -1$ para I, F y C.

Estas matrices se relacionan entre sí de tal modo, que quedan satisfechas las equivalencias definitorias D1., D2., D3. y D4., así como las condiciones 2a., 2b., 2c., 2., 2e. y 2f. y los axiomas de la reducción A1. y A2. Son el fundamento de la expresión matemática de todas las modalidades mon-arias, operadores modales de un sólo argumento (generalmente, una variable proposicional). Cualquier modalidad de esta categoría quedará expresada por una matriz.

EL GRUPO MODAL

Se comprueba inmediatamente que, como consecuencia de lo anterior, toda modalidad de la categoría indicada quedará representada por una matriz de la forma

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix}$$

donde Q es un entero cualquiera y S la unidad positiva o negativa, o sea $+1$ ó -1. En efecto, cualquier modalidad mon-aria del sistema $\mathcal{SM}$ resultará de la aplicación reiterada de la operación producto a las modalidades elementales N, V, P, I, F y C, y estará, por tanto, matemáticamente representada por una matriz resultante del producto de algunas de las seis matrices fundamentales halladas. Ahora bien, el producto de dos matrices fundamentales de la forma:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix} \quad y \quad M' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{Vmatrix}$$

es una matriz de la forma:

$$M'' = MM' = \begin{Vmatrix} A & B \\ Q'' & S'' \end{Vmatrix}$$

cuyos coeficientes vienen dados por el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \times 1 + 0 \times Q' = 1 \\ B = 1 \times 0 + 0 \times S' = 0 \\ Q'' = Q \times 1 + S \times Q' = Q + SQ' \\ S'' = Q \times 0 + S \times S' = SS' \end{array}\right\}$$

o sea que, en definitiva, resulta de la forma siguiente:

$$M'' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q+SQ' & SS' \end{Vmatrix}$$

pero, siendo los cuatro números Q, Q', S y S' siempre enteros para las matrices fundamentales, $Q'' = Q + SQ'$ será también siempre entero, y siendo S y S′ siempre iguales a $+1$ ó a -1, también $S'' = SS'$ resultará siempre igual a $+1$ ó a -1. Toda nueva matriz obtenida como producto de dos fundamentales será siempre, pues, al igual que éstas, de la forma:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ Q \ \text{(entero)} & S\ (\pm 1) \end{matrix} \right\|$$

Veamos ahora de qué modo toda modalidad de la categoría señalada queda expresada por una matriz perteneciente a un *grupo* (en el sentido algebraico) que denominaremos *grupo modal.*

Quedan satisfechas, en efecto, las cuatro condiciones que caracterizan un *grupo:*

a) Todo producto de matrices pertenecientes a la categoría indicada (coeficientes $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, m_3 entero, $m_4 = \pm 1$) pertenece también a la categoría indicada *(condición del cierre).*

b) Forma parte del conjunto una *matriz unidad,* que expresa la modalidad V (verdad) y tal que el producto al multiplicarla, a la derecha o a la izquierda, por cualquier matriz del grupo, M, es la misma matriz dada, M. En efecto, para toda M,

$$M' = VM = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} \right\| = M$$

c) Para toda matriz M del grupo:

$$M = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{matrix} \right\|$$

está definida la matriz *inversa*

$$M^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{matrix} \right\|$$

tal que el producto de ambas es igual a la unidad, o sea:

$MM^{-1} = M^{-1}M = V$, o sea:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

o lo que es lo mismo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Q+SQ' & = & 0 \\ SS' & = & 1 \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{lcl} Q' & = & -Q/S \\ S' & = & 1/S \end{array} \right\}$$

con lo que está demostrado que M^{-1} pertenece también al *grupo de matrices modales,* como exige la condición, pues Q' resulta entero para Q entero y S igual a $+1$ ó -1, mientras que S' es igual a $+1$ ó a -1 al ser S igual a $+1$ ó -1.

d) Es válida la propiedad *asociativa* para todo producto de matrices.

COORDENADAS MODALES

Como hemos visto, todas las matrices que representan modalidades del *grupo modal* considerado tienen la primera fila idéntica. Esto aconseja —y así me lo hizo notar mi amigo D. Julio Palacios, el gran físico español, cuando le expuse el sistema modal que estamos examinando— tener en cuenta también otra representación de las modalidades u operadores modales aún más simple, pues basada sólo en los dos coeficientes de la segunda fila de la matriz Q y S, tomadas como *coordenadas de la modalidad,* convertida en punto de un *plano modal,* toda modalidad del grupo estaría caracterizada, pues, por un par de coordenadas, (Q, S), llamándose la primera, abscisa, *cantidad modal* (Q), y la segunda, ordenada, *signo modal* (S), teniendo en cuenta las siguientes leyes:

1. Siendo M y M' modalidades de coordenadas, respectivamente, M (Q, S) y M' (Q', S'), el producto de M por M' es una modalidad $M'' = MM'$ de coordenadas (Q'', S'') definidas por las ecuaciones siguientes:

$$Q'' = Q + SQ'$$
$$S'' = SS'$$

2. Si M y M′ son modalidades, diremos que M (Q, S) implica M′ (Q′, S′) si Q es mayor o igual que Q′ y S es igual a S′. O sea:

$M(Q, S) \rightarrow M'(Q' S')$ si $Q \geqslant Q'$, $S = S'$

lo cual también puede expresarse por medio de este principio:

Entre modalidades del mismo signo ($S = S'$), el sentido de la implicación está definido así: una modalidad implica otra si su cantidad es igual o mayor que la de ésta.

Ejemplo en el caso de modalidades elementales:

N (1, 1) → (0, 1)	necesidad implica verdad
N (1, 1) → P (—1, 1)	necesidad implica posibilidad
V (0, 1) → P (—1, 1)	verdad implica posibilidad
I (1, —1) → F (0, —1)	imposibilidad implica falsedad
I (1, —1) → C (—1, —1)	imposibilidad implica contingencia
F (0, —1) → C (—1, —1)	falsedad implica contingencia

Así definida la implicación entre modalidades, vemos que satisface a las dos condiciones siguientes:

a) *Transitividad:* Si M → M′ y M′ → M″, entonces M → M″

b) *Reflexividad:* Para toda M, M → M.

Ginebra, 22 de octubre de 1961