Consideraciones analíticas

Margaret Masterman, su crítica a la noción de paradigma y su invisibilización
María Carolina Álvarez Puerta

El papel de las heurísticas en el desarrollo de una Inteligencia Artificial General
Luz Marina Barreto

El *Dilema de Benacerraf* como una objeción al Platonismo tradicional en matemática
Ricardo Da Silva y Solani Rivas

Fundamentos técnicos y dilemas éticos en los modelos de lenguaje natural en las Inteligencias Artificiales
Nahir Hurtado

An interpretation of the I/Me distinction in G. H. Mead's "The definition of the psychical" and H. Joas' criticism
Leopoldo Márquez Velasco

¿Hay matemática más allá de la lógica?
Edgar Valenzuela

U.C.V EPISTEME NS ENERO - JUNIO 45 N°1 2025

EPISTEME NS

Revista del Instituto de Filosofía

ISSN: 07984324 Dep. Leg.: pp198102DF423

45

Enero - Junio

N°1

2025

Universidad Central de Venezuela
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

Revista Semestral ISSN: 0798–4324 Depósito Legal: pp198102DF423

EPISTEME NS

Revista del Instituto de Filosofía

45
Enero - Junio
N° 1
2025

Universidad Central de Venezuela
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

© by Instituto de Filosofía
Facultad de Humanidades y Educación
Universidad Central de Venezuela
Publicado en línea en abril 2026
Caracas–Venezuela

EPISTEME NS

EPISTEME NS es una revista de crítica e investigación en filosofía, abierta a todas las corrientes y estilos de pensamiento y a la reflexión en todos los ámbitos del saber filosófico, sin más requisitos que la originalidad, seriedad y rigor argumentativos. Los números salen alternativamente dedicados a temas de Filosofía, Historia de la Filosofía y Filosofía Social (Serie Azul) y de Lógica, Análisis del Lenguaje y Filosofía de las Ciencias (Serie Roja), además de las ediciones especiales (Serie Gris). La Revista, de periodicidad semestral y arbitrada según los procedimientos *ad usum*, es una publicación de circulación internacional indexada en *The Philosopher Index, Latindex* y *Clase*, y registrada en *Ulrich´s International Periodical Directory*; también aparece en versión electrónica en las plataformas SciELO (www.scielo.org.ve) y Saber UCV (www.saber.ucv.ve). Todas las colaboraciones deben ser inéditas y ser enviadas por triplicado para ser sometidas a la consideración del Comité de arbitraje. Los trabajos podrán ser de tres tipos: Artículos (no deben exceder de 10.000 palabras), Notas y Discusiones (5.000 palabras) y Reseñas. Los Artículos y las Notas y Discusiones deben ser presentados en cuartilla tamaño carta a doble espacio con notas a pie de página (también pueden ser enviados en *attachment* a las siguientes direcciones electrónicas: revista.epistemens@gmail.com y/o nnunezm@gmail.com y deberán estar acompañados de sendos resúmenes, en inglés y en castellano, de una extensión no mayor de diez (10) líneas, acompañados con tres palabras claves. Para cualquier uso posterior de los materiales publicados en EPISTEME NS, es necesaria la autorización escrita del Editor de la Revista.

EPISTEME NS/Revista del Instituto de Filosofía, Vol. 45, (enero-junio, 2025). Caracas: Ediciones de la Facultad de Humanidades y Educación, 1981.

V./ 22 cm.
2 veces al año.
Continúa: Episteme NS
Título de cubierta.
Director –fundador Anuario Episteme: 1957 – Juan David García Bacca
Director–fundador Episteme NS: 1981 – Juan Nuño
Directora: diciembre 2021 – María Carolina Álvarez
ISSN: 0798–4324
1. Filosofía – Publicaciones periódicas.
Depósito Legal: pp198102DF423

EPISTEME NS

Semestral

Director Fundador: Juan David García Bacca†

Directora: María Carolina Álvarez Puerta

Comité Editorial:

Editora: Nancy Núñez

Secretaría de Redacción: María Carolina Álvarez Puerta

Secretaría de Administración: Benjamín Sánchez

Consejo Consultivo: Omar Astorga (UCV), Francisco Bravo (UCV) †, Luz M. Barreto (UCV), Sabine Knabenschuh de Porta (LUZ), Carlos Kohn (UCV), Vincenzo P. Lo Monaco, (UCV), Nancy Núñez (UCV), Benjamín Sánchez (UCV), Gustavo Sarmiento (USB), Fabiola Vethencourt (UCV), Corina Yoris (UCAB)

Consejeros Internacionales: J. J. Acero (UGR), Francisco Ayala (UCLA), Mario Bunge (McGILL) †, Hugo Calello (UBA), Marisa Kohn de Beker (UCV) †, Pedro Lluberes (USB), M. Reyes Mate (CSIC), Jesús Mosterín (CSIC) †, Ulises Moulines (LMU), José M. Rosales (UMA), Giulio F. Pagallo (Unipd) †.

Responsable de este número: Ricardo Da Silva

Asistentes: María Alejandra Pérez y Sebastián Bogoljubskij

Diseño de Portada: Lic. José Bifano

Arte Final: María Alejandra Pérez

EPISTEME NS

Volumen 45, N° 1, 2025

Contenido
Consideraciones analíticas

Presentación
DA SILVA, R.: Presentación..... *i*

Artículos *Págs.*

ÁLVAREZ, M.: Margaret Masterman, su crítica a la noción de paradigma y su invisibilización *(Margaret Masterman, her criticism of the notion of paradigm and its invisibility)*..... 01

BARRETO, L.: El papel de las heurísticas en el desarrollo de una inteligencia artificial general *(Heuristic's role on the development of a general artificial intelligence)*..... 25

DA SILVA, R. Y RIVAS, S.: El *Dilema de Benacerraf* como una objeción al Platonismo tradicional en matemática *(Benacerraf's Dilemma as an objection to traditional Platonism in mathematics)*..... 49

HURTADO, N..: Fundamentos técnicos y dilemas éticos en los modelos de lenguaje natural en las Inteligencias Artificiales *(Technical foundatinos and ethical dilemmas of natural language in Artificial Intelligence)*..... 81

Marquez, L.: An interpretation of the I/Me distinction in G. H. Mead's "The definition of the psychical" and H. Joas' criticism *(Una interpretación de la distinción Yo/Mí en "The definition of the psychical" de G. H. Mead y la crítica de H. Joas)*..... 95

Valenzuela, E.: ¿Hay matemática más allá de la lógica? (Is *there mathematics beyond logic?*)..... 121

Notas y discusiones

Blanco, F.: Notas introductorias al concepto de «Lógica» (*Introductory notes on the concept of «Logic»*)..... 137

Chávez, M.: ¿Es la *existencia* una propiedad, o una *modalidad*? (*Is existence a property, or a modality?*)..... 153

Recensiones

Bogoljubskij, S.: Posy, C - Intuicionismo matemático (*Mathematical Intuitionism)*..... 159

μiscelánea 165

EPISTEME NS, VOL. 45, N°1, 2025, pp. i-ii

Ricardo J. Da Silva Araujo

PRESENTACIÓN

Bajo la premisa de que la unidad filosófica no exige uniformidad temática, este número ofrece un panorama diverso donde la multiplicidad de problemas abordados cobra sentido bajo el rigor que el análisis filosófico confiere a la investigación académica actual.

Aunque es factible trazar conexiones entre ciertos núcleos temáticos que se comentarán más adelante, el verdadero denominador común de esta entrega es el compromiso de presentar los problemas desde una visión argumentativa que los sustente. De esta manera, cada texto aquí reunido destaca por la claridad conceptual empleada para desarrollar sus hipótesis, ofreciendo al lector un ejercicio de pensamiento crítico y estructurado.

Aunque el índice obedece a un orden lexicográfico, podemos reagrupar los artículos según ciertas similitudes. Los primeros serían aquellos que reflexionan directamente sobre la obra de un autor. Así, María Carolina Álvarez se propone revalorizar y visibilizar las críticas que Margaret Masterman le hiciese a la noción de "paradigma" de Thomas Kuhn en la edición de 1962 de *La estructura de las revoluciones científicas*; por su parte, Leopoldo Márquez propone una nueva lectura de la subjetividad en el trabajo temprano de George H. Mead, heredada luego por su obra madura, tratando así de sustentar una exégesis continuista sobre el pensamiento del autor.

En otra dirección, encontramos trabajos que giran en torno al tema de la inteligencia artificial, tales como su capacidad para capturar la semántica del lenguaje y los desafíos éticos que presentan estas nuevas herramientas. Luz Marina Barreto busca examinar el desarrollo de algunos métodos algorítmicos de procesamiento de lenguaje y explicar, especialmente, las limitaciones de los grandes modelos de lenguaje (LLM) para actuar como modelos de razonamiento sin la retroalimentación continua de anotadores humanos. Nahir Hurtado, por su parte, hace un recorrido elucidatorio por los mecanismos que han hecho

posible el surgimiento de modelos como GPT, pasando así revista a las redes neuronales y las arquitecturas transformers. Ambas autoras concluyen remarcando el énfasis en las consideraciones éticas y en las exigencias de legislación sobre el uso de estas nuevas tecnologías.

El último par de artículos trata sobre cuestiones inherentes a la filosofía de la matemática. Edgar Valenzuela revisa la persistencia de la lógica en el quehacer matemático a través del estudio de sistemas lógicos no clásicos, defendiendo, así, una tesis pluralista en contraposición al monismo lógico tradicional. A su vez, Solani Rivas y Ricardo Da Silva realizan una reconstrucción argumentativa del dilema de Benacerraf en contra del platonismo matemático clásico y presentan la propuesta de Mark Balaguer, el platonismo pleno, como un intento de solución.

El presente número se ve, además, enriquecido con dos notas ensayísticas y una reseña bibliográfica. La primera de las notas, escrita por Francisco Blanco, busca indagar en un concepto de lógica que se reconstruya desde sus compatibilidades e incompatibilidades semánticas con otros conceptos. En este sentido, el material puede servir de apoyo para las primeras sesiones de un curso de lógica en cualquier pregrado de humanidades. La segunda nota, de Marcel Chávez, revisa críticamente la idea de que la existencia es una propiedad de los individuos, es por ello que esboza una interpretación desde la ontología de Duns Escoto, desde la cual se concluye que la existencia no es una propiedad, sino una forma de modalidad. Finalmente, Sebastián Bogoljubskij reseña el texto *Mathematical Intuitionism* de Carl Posy. La obra reseñada forma parte de la colección *Cambridge Elements: The Philosophy of Mathematics* y tiene por objetivo introducir a los lectores en la filosofía intuicionista de la matemática desde consideraciones filosóficas y formales. Bogoljubskij reconoce la claridad analítica en la exposición propuesta por el autor; sin embargo, identifica que algunos capítulos, debido a su reconstrucción formal, no resultarían accesibles para estudiantes que no estén familiarizados con ciertos contenidos de lógica matemática.

Podemos concluir afirmando que la presente edición contribuye a la idea de que la *buena filosofía* —sea lo que sea— se sustenta en argumentos. Que resulte de provecho para todos.

EPISTEME NS, VOL. 45, N° 1, 2025, pp. 121-135

Edgar Valenzuela

¿HAY MATEMÁTICA MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA?

Resumen: Exploramos la persistencia de la lógica en el quehacer matemático a través del estudio de sistemas lógicos no clásicos. Partiendo de los teoremas de incompletud de Gödel, se analiza la limitación de la lógica clásica y la teoría de conjuntos ZFE, permitiendo la emergencia de enfoques pluralistas, tales como el intuicionismo, la paraconsistencia y la relevancia. Se presentan ejemplos concretos de aplicación en teoría de conjuntos, mediante el método de *forcing*, y en estructuras algebraicas donde se legitiman estados paradójicos como soluciones naturales y no explosivas. Finalmente, se argumenta a favor de una matemática que trasciende el rigor del *ex falso quodlibet*, sugiriendo nuevas vías de investigación en topología paraconsistente aplicada al análisis de datos.

Palabras clave: Lógicas No Clásicas, Teoremas de Gödel, ZFE, Intuicionismo.

IS THERE MATHEMATICS BEYOND LOGIC?

Abstract: We explore the persistence of logic in mathematical practice through the study of non-classical logical systems. Starting from Gödel's incompleteness theorems, we analyze the limitations of classical logic and ZFE set theory, allowing for the emergence of pluralistic approaches such as intuitionism, paraconsistency, and relevance. Concrete examples of applications are presented in set theory, through the forcing method, and in algebraic structures where paradoxical states are legitimized as natural, non-explosive solutions. Finally, we argue in favor of a mathematics that transcends the rigor of *ex falso quodlibet*, suggesting new research avenues in paraconsistent topology applied

Recibido 28-01-25 ☼ Aceptado 02-02-25

to data analysis.

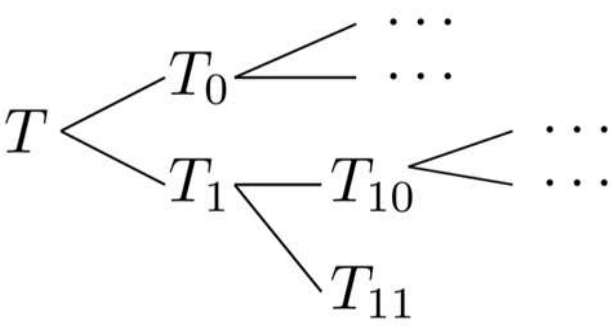
Keywords: Non-Classical Logics, Gödel's Theorems, ZFC, Intuitionism.

Introducción

Los teoremas de incompletud de Gödel establecen que cualquier teoría T que sea lo suficientemente fuerte para axiomatizar la aritmética, no puede ser completa y consistente a la par. Es decir, o bien T deduce una contradicción o bien existe un enunciado φ tal que $T+\varphi$ y $T+\neg\varphi$ son consistentes. Pero, si T es lo suficientemente fuerte para construir el sistema aritmético, $T+\varphi$ y $T+\neg\varphi$ también deben serlo, así que podemos encontrar φ_1 tal que

$$T+\varphi+\varphi_1,$$
$$T+\varphi+\neg\varphi_1,$$
$$T+\neg\varphi+\varphi_1 \text{ y}$$
$$T+\neg\varphi+\neg\varphi_1$$

también son consistentes. Continuando esto, podemos encontrar una sucesión de afirmaciones $(\varphi_i : i<\omega)$ que genera un árbol de teorías que bifurcan como lo ilustra el siguiente diagrama.



Entre estas teorías, se encuentra la teoría de conjuntos *ZFE*.[1] A partir de esto, se generaron métodos para estudiar los diferentes modelos de la teoría de conjuntos *ZFE*. De esto emergieron tanto el método de *forzamiento* desarrollado por P. Cohen y el método de *modelos internos* cuya semilla es el trabajo de K. Gödel. Esto destruyó el proyecto de Hilbert de reducir la matemática a una serie finita de postulados de donde se pudieran deducir toda la matemática. Aunque usualmente se utiliza la teoría *ZFE* como marco teórico para la formalización de las

1 La teoría Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección.

matemáticas, esta teoría no se puede axiomatizar con una serie finita de axiomas ni puede ser completa. Es decir, no toda la matemática se puede expresar en *ZFE* y menos de una forma finitista.

Después de los teoremas de incompletud de Gödel, se suele decir que la matemática no se puede reducir a la lógica. Sin embargo, seguimos suponiendo un sistema lógico para hacer matemáticas y pretendemos que la matemática es superior a la lógica. Pero esta lectura es perpetuada por una de las dicotomías del teorema de Gödel. La otra opción es que *ZFE* sí es completa, aunque esto signifique que es inconsistente. Esto nos obliga a considerar otro sistema lógico donde las paradojas no sean *explosivas*, es decir, de una contradicción no se sigue cualquier cosa. Para este fin se exploran la *dialeteia* y la *paraconsistencia*.

La lógica clásica solo tiene dos valores de verdad, *verdadero* y *falso*. Entre las reglas que supone la lógica clásica, se tiene la regla *ex falso quodlibet*: de lo falso se sigue cualquier cosa. Formalmente, $falso \rightarrow \varphi$ para cualquier enunciado φ. Puesto que $falso = \psi \wedge \neg\psi$, podemos reescribir esta regla como

$$\psi \wedge \neg\psi \rightarrow \varphi.$$

Esta máxima nos permite utilizar la preciosísima regla de *reductio ad absurdum*. Es decir, si queremos probar φ, suponemos $\neg\varphi$, y esperamos obtener una contradicción $\psi \wedge \neg\psi$ y de aquí podemos deducir cualquier cosa. ¡Explosión!

Si encontramos un sistema lógico que elimine esta regla, podremos pensar en una posibilidad para obtener una axiomatización completa de las matemáticas. La lógica paracosistente permite enunciados *aglutinantes*. Es decir, enunciados que son verdaderos y falsos a la par: $\varphi \wedge \neg\varphi$. De esta forma, cuando encontramos una contradicción, solamente decimos que hemos demostrado una paradoja.

Pero estas no son las únicas opciones para trabajar con la matemática. Incluso, detrás del método de forzamiento está la *lógica intuicionista*. Esto muestra que ya se utilizan otros marcos lógicos para generar más matemáticas. Sin embargo, solemos actuar como si la lógica clásica fuera la lógica superior.

La intención de este trabajo es mostrar la *constante* de la lógica en la labor matemática y la pluralidad que esta genera. A pesar de la insistencia de muchos lógicos por establecer a la lógica clásica como el único

modelo viable para modelar matemáticamente [como otl],[2] ya hay otros sistemas lógicos que se utilizan para generar matemáticas. Además, sirve como un recorrido para los posibles interesados en hacer matemática de otra forma. Presentaremos algunos sistemas lógicos y sus usos en matemáticas, haciendo énfasis en las aplicaciones que el autor quisiera ver para estas matemáticas no-clásicas. Pasaremos por topología, álgebra, teoría de conjuntos y teoría de modelos para ejemplificar los usos de distintos sistemas lógicos. Con esto, estableceremos que:

> *la formalización matemática del lenguaje actua [...]*
> *reduciendo los malentendidos y ambiguedades por medio de definiciones rigurosas, presentándola al poder computacional y deductivo de un régimen de escritura formalizado y reforzando su transmisibilidad íntegra lo más posible.* [Catren].[3]

Es decir, la lógica es constante y necesaria para la labor matemática, pero esta formalización no tiene porqué hacerse *de una sola forma*, hay múltiples formas. Puesto de otra forma, *las lógicas son constantes y necesarias para la labor matemática.*

Lógicas

No daremos una definición formal de lo que entendemos por una lógica. Dejaremos que el lector se haga una vaga idea a través de ejemplos sobre lo que entendemos por lógica.

La lógica clásica, aunque no es de interés para este trabajo salvo como referencia de lo que queremos modificar, es la lógica que permite dos valores de verdad *1* y *0*. La propiedad principal (al menos para el propósito de este trabajo) de la lógica clásica es que es explosiva. Es decir, que cualquier contradicción es un absurdo porque de ella se sigue cualquier cosa.

La lógica intuicionista difiere de la lógica clásica al cambiar la forma en que trabaja la negación. La principal característica de la lógica intuicionista es que algo existe solo si podemos construirlo o bien, da pruebas constructivas. Es común que los matemáticos procedamos por reducción al absurdo al suponer que algo no es cierto y al obtener

2 Griffiths, O y Paseau, A. C., *One True Logic. A Monist Manifesto*, Oxford University Press, 2022.

3 Catren, G., *Pleromatica, or Elsinore's Trance*, Urbanomic and Sequence Press, 2023.

una contradicción podemos decir que la contradicción venía de suponer que algo no era cierto. Esquematizado, queremos demostrar que de Γ *se deduce* φ, o en símbolos:

$$\Gamma \vdash \varphi$$

Sin embargo, supondremos que

$$\Gamma \vdash \neg\varphi,$$

es decir, que Γ deduce la negación de φ. Al llegar a una contradicción $\neg\psi \wedge \psi$, podemos decir que no ocurre $\Gamma \vdash \neg\varphi$, es decir,

$$\Gamma \vdash \neg\neg\varphi.$$

En lógica clásica no tenemos ningún problema puesto que $\neg\neg\varphi$ y φ son equivalentes, pero la lógica intuicionista prohíbe precisamente este hecho.

Esto es, la lógica intuicionista solo valida $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ pero no el recíproco. Haciendo una analogía con topología, que X *no sea no cerrado*, no significa que sea cerrado. Esta lógica sí es explosiva, es decir, de una contradicción se sigue cualquier cosa, pero no valida la regla del tercer excluido: $\neg\ \varphi \vee \varphi$. Por este hecho, podemos decir que la lógica es *paracompleta*. Es decir, hay enunciados a los cuales no se les puede asignar un valor de verdad.

Claramente, la lógica intuicionista ya se sale de la lógica clásica. Semánticamente, una forma de ver esto es que la lógica intuicionista permite tener un tercer valor de verdad i que es para enunciados que no están determinados.

La lógica $\mathbf{PS}_3$ se define al permitir tres valores de verdad $\{1, x, 0\}$. La única condición para aceptar la ocurrencia de p es que su valor sea 1 o x. Puesto en palabras, p *ocurre siempre y cuando* **no sea falsa**. Es decir, siempre que evaluemos p distinto de 0.

CONJUNCIÓN				DISYUNCIÓN				IMPLICACIÓN			
$\wedge$	1	x	0	$\vee$	1	x	0	$\rightarrow$	1	x	0
1	1	x	0	1	1	1	1	1	1	1	0
x	x	x	0	x	1	x	x	x	1	1	0
0	0	0	0	0	1	x	0	0	1	1	1

A esta lógica le agregamos una negación ¬ definida de la siguiente forma

¬	
1	*0*
x	*x*
0	*1*

La lógica resultante $\mathbf{nPS_3}$ es *paraconsistente* porque si *p* tiene valor *x* entonces $p \wedge \neg p$ también es verdadera porque tiene valor

$$x \wedge \neg x = x \wedge x = x.$$

Notemos que la semántica establecida en $\mathbf{nPS_3}$ coincide con la semántica de la lógica clásica porque *no ser falso* es equivalente a ser verdadero. Es decir, podemos decir que esta lógica extiende a la lógica clásica y como la extiende es natural que deduzca más cosas, como la paradoja establecida.

La lógica paraconsistente de Łukasiewicz $\mathbf{Ł_3}$ se define con la misma conjunción, disyunción y negación que $\mathbf{nPS_3}$. La diferencia es el tratamiento de la implicación.

→	1	*x*	*0*
1	*1*	*x*	*0*
x	*1*	*x*	*x*
0	*1*	*1*	*x*

De nuevo, aceptamos que *p* es el caso siempre que no sea falsa; esto es, el valor de *p* es *1* o *x*.

Existen una gran variedad de diferentes lógicas como las *relevantes* o *conexivas*. Incluso, la mecánica cuántica tiene su propio sistema formal. No trataremos más lógicas, porque eso involucraría mucho más que un tomo para poder entrar en detalles. El lector puede consultar [Priest][4] para más ejemplos.

4 Cf. Priest, G., *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*, segunda edición, Cambridge University Press, 2008.

Teoría de Conjuntos

En esta sección, tocamos temas de teoría de conjuntos con sistemas no clásicos, cuestionando la supuesta omniprescencia de la lógica clásica. Comenzamos repasando el sistema conjuntista más utilizado.

La teoría de conjuntos *ZFE* se define mediante los siguientes axiomas. Sean x, y conjuntos.

1. Axioma de existencia. Existe un conjunto que no tiene elementos: *el conjunto vacío* $\emptyset$.
2. Axioma de extensionalidad. Los conjuntos se distinguen por sus elementos. Es decir, son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos.
3. Axioma de comprensión. Determina subconjuntos definibles así como interseccion de conjuntos: $\{z \in x : \varphi(z)\}$ es un conjunto.
4. Axioma de la pareja. Permite definir un conjunto que contiene exactamente dos elementos: $\{x, y\}$ es un conjunto.
5. Axioma de unión. Asegura la unión de conjuntos: $U\{z : z \in x\}$ es un conjunto.
6. Axioma de potencia. Precisa que la colección de subconjuntos de un conjunto a su vez es un conjunto: $\mathbf{P}(x) = \{z : z \subset x\}$ es un conjunto.
7. Axioma de infinito. La colección de números naturales es un conjunto. Esto es, existe un conjunto que es infinito: $\{0, 1, 2...\}=\omega$ es un conjunto.
8. Axioma de reemplazo. Asegura que $f[x]$ sea un conjunto, siempre que f sea una función.
9. Axioma de regularidad. Verifica que no se caiga en argumentos circulares, además de asegurar que «el infinito no se puede contar al revés». Técnicamente, dice que x tiene un elemento que es $\in$-mínimo.
10. Axioma de elección. Permite el cálculo de productos cartesianos: si $\neg\emptyset \in x$, entonces $\prod_{y \in x} y$ es un conjunto.

Como ejemplo de lo que se puede construir utilizando *ZFE* (que es prácticamente todo), mostraremos que podemos generar productos cartesianos finitos, incluso sin el axioma de elección. Primero

definimos $(x,y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, esto se logra con tres aplicaciones sucesivas del **axioma de par**. Primero para obtener $\{x, x\}=\{x\}$, luego obtenemos $\{x, y\}$, finalmente iteramos para obtener $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Notemos que el **axioma de extensionalidad** asegura que $\{x, x\}=\{x\}$. Cuando $x \in a$ y $y \in b$, deducimos $\{x\} \in \mathbf{P}(a)$ y $\{x, y\} \in \mathbf{P}(a \cup b)$. Para esto tuvimos que usar el **axioma de potencia** en dos ocasiones y el **axioma de unión** para obtener $\cup\{a, b\}=a \cup b$. De esta forma vemos que $a \times b=\{(x, y) : x \in a, y \in b\} \subset P(P(a \cup b))$ y el **axioma de comprensión** asegura que $a \times b$ es un conjunto. Además, estos axiomas son suficientes para formalizar el teorema de inducción, particularmente el **axioma de infinito**. Así que, por inducción, podemos demostrar que $a_0 \times \cdots \times a_n$ es un conjunto, siempre que $n<\omega$ y $a_0,\ldots,a_n$ sean conjuntos.

Los famosos teoremas de Gödel establecen que la teoría *ZFE* es inconsistente o es incompleta. Es decir, o deduce una contradicción, o bien existe φ tal que $ZFE+\varphi$ y $ZFE+\neg\varphi$ ambos tienen modelos. Un método importante para obtener la consistencia $ZFE+\varphi$ es generar modelos a través de *forzamiento*. No entraremos en tantos detalles, pero la idea principal detrás del forzamiento es que se genera un nuevo elemento a través de dotar de estructura lógica a un orden parcial y a dicho orden parcial le encontramos un subonjunto especial que es un *filtro genérico*. Damos la siguiente receta para obtener modelos a través de *forcing*.

1. Tomamos un modelo M de *ZFE*.
2. En M, consideramos un conjunto parcialmente ordenado $(\mathbf{P}, \leq_{\mathbf{p}})$.
3. Se obtiene un conjunto $G \subset \mathbf{P}$ que llamamos genérico y que no ocurre $G \in M$.
4. Utilizamos G para ver a $\mathbf{P}$ como una estructura lógica donde $p \rightarrow q$ significa $p \leq_{\mathbf{p}} q$ y se dice que *p es más fuerte que q*.
5. Entonces se obtiene un modelo $M[G]$ donde los elementos de $M[G]$ son funciones a: $M \rightarrow \mathbf{P}$.
6. Resulta que $M[G]$ verifica los axiomas de *ZFE* y $G \in M[G]$. Además es el menor que satisface estas dos propiedades.

Lo que deseamos resaltar de todo esto es que, al dotar de una estructura lógica a **P**, la lógica resultante es una lógica intuicionista. Esta es una muestra de que ya utilizamos otros sistemas lógicos para razonar

matemáticamente. Por alguna razón, insistimos en que los teoremas de Gödel dicen que la matemática es independiente de la lógica, pero seguimos utilizándola para hacer matemáticas. Peor aún, nos empeñamos a decir que la lógica clásica es *la lógica*, pero luego utilizamos cosas como el intuicionismo para justificar nuestros razonamientos.

No solo expusimos brevemente el método de forzamiento para mostrar que ya se usa la lógica intuicionista para modelar nuestro pensamiento matemático. Resulta que el método de forzamiento se puede generalizar para obtener modelos inconsistentes de *ZFE*. Para presentar este enfoque, elaboramos más en el método de forzamiento. Particularmente, en el intermedio de los pasos 4 y 5. Entre esos pasos, lo que se hace es encontrar un álgebra de Boole **B** adecuada tal que $\mathbf{P} \subset \mathbf{B}$ y las funciones descritas en el paso 5, más bien son funciones $x{:}M\to\mathbf{B}$. Sobre las álgebras de Boole, baste decir que estas son estructuras con un elemento *1*, un elemento *0* y tres operaciones $\cup$, $\cap$, $^-$ tales que, entre otras propiedades, $a\cap\bar{a} = 0$ y $a\cup\bar{a} = 1$. Por ejemplo, la lógica clásica es un álgebra de Boole que solo tiene los elementos *1*, *0* para verdadero y falso. Pero, ¿qué tal que pensamos en estructuras algebraicas en general? Por ejemplo, la lógica $\mathbf{nPS_3}$ presentada anteriormente. Construimos $V^{\mathbf{nPS3}}$ al definir funciones $a{:}\ V\to\{1, x, 0\}$. Resulta que el modelo resultante es un modelo de *ZFE* y no solo eso. Consideremos el enunciado

$$\exists uvw(u{=}v \wedge w{\in}u \wedge \neg w{\in}v).$$

Es decir, existen conjuntos que tienen los mismos elementos porque son iguales, pero no tienen los mismos elementos porque w lo atestigua. Bajo el axioma de extensionalidad, este teorema es contradictorio. Ya mencionamos que $V^{\mathbf{nPS3}}$ es un modelo de *ZFE*, particularmente del axioma de extensionalidad. Supongamos que $a,b,c{\in}V^{\mathbf{nPS3}}$ son tales que $\{c\}= dom(a){=}dom(b)$ y $a(c) = 1$, pero $b(c) = x$. En este caso tenemos que $V^{\mathbf{nPS3}}$ constata la siguiente aseveración.

$$a{=}b \wedge c{\in}a \wedge \neg c{\in}b.$$

Así que $V^{\mathbf{nPS3}}$ ya es un modelo paraconsistente de la teoría de conjuntos *ZFE*. Para más sobre métodos de *forcing* en un contexto no clásico, consulte [LT][5] y [Taraf].[6]

Aunque no entramos en detalles sobre la verdadera construcción de las funciones $a:V\rightarrow\{1, x, 0\}$, este ejemplo ilustra un poco su construcción. Se construye el primer nivel de funciones, luego el siguiente nivel se construye de tal forma que el dominio de las nuevas funciones son las funciones previas y así sucesivamente. Reiteramos que este método puede generalizarse a diferentes sistemas lógicos, un caso de interés es la *teoría de conjuntos cuántica* donde se toma la estructura de la lógica cuántica para desarrollar una teoría que siga este sistema, [Tak][7], [Oza].[8] En este caso, la teoría algebraica subyacente es una *retícula* con propiedades adicionales. Es decir, un orden parcial tal que cualesquiera dos elementos x, y tienen una cota inferior $x \wedge y$ una cota superior mínima $x \vee y$, más otras propiedades.

En otra dirección, recordamos la famosa paradoja de Russell. Para esto, supondremos el (todopoderoso) axioma de comprensión:

$$\{x : \varphi(x)\}$$

siempre es un conjunto. Ahora, definamos $\varphi(x)$ como $\neg x\in x$. Entonces $r = \{x: \neg x\in x\}$ es un conjunto. Por la naturaleza de la lógica clásica, hay dos opciones r mismo satisface a φ o no lo satisface. Si $\neg r\in r$, entonces r satisface las propiedades para pertenecer a sí mismo, así $r\in r$. Si $r\in r$, entonces no ocurre $r\in r$. En cualquier caso, obtenemos una contradicción y

$$\neg r\in r \Leftrightarrow r\in r.$$

La solución que se propuso fue acotar los enunciados de tal forma que $\{x\in y : \varphi(x)\}$ es un conjunto siempre que y lo sea.

De nuevo, la lógica clásica es explosiva y de una contradicción obtenemos cualquier cosa, lo cual es absurdo. Hay mucho que poner en

5 Lowe, B y Tarafder, S., *Generalized Algebra-Valued Models of Set Theory*. Los Angeles, Journal of Symbolic Logic, Vol. 8, No. 1, (2015), pp. 192-205.

6 Tarafder, S., *Non-Classical Foundations of Set Theory*. Los Angeles, Journal of Symbolic Logic, Vol. 87, No. 1, (2022), pp. 347-376.

7 Takeuti, G., *Quantum Set Theory, Current Issues in Quantum Logic*, eds. F. Beltrametti y B. C. van Fraassen, 1981. pp. 303–322.

8 Ozawa, M., *Orthomodular-valued models for Quantum Set Theory*, Los Angeles, Journal of Symbolic Logic, Vol. 10, No. 4, (2017), pp. 782–807.

duda sobre el *ex falso quodlibet*. Una cosa que podemos poner en duda es la *relevancia* de las deducciones. La *lógica relevante* es la que establece las deducciones lógicas son aquellas en las que las premisas son relevantes para las conclusiones y las conclusiones son relevantes para las premisas. Por ejemplo, la regla $p \rightarrow p \rightarrow q$ no es relevante porque introduce la q sin una justificación para hacerlo. Y esta regla es totalmente válida en lógica clásica. En [Weber][9] se plantea una lógica con dos implicaciones $\rightarrow$, $\Rightarrow$ donde $\Rightarrow$ modela *extensionalidad* y $\rightarrow$ modela *intensionalidad*. La extensionalidad de $\Rightarrow$ establece que los conjuntos se definen por medio de sus elementos, mientras que la intensionalidad establece que los conjuntos se definen por medio de propiedades. Mencionamos la lógica relevante justo porque la lógica que desarrolla el autor en [Weber][10] es una lógica relevante y paraconsistente. Y en esta lógica podemos tratar el axioma de comprensión en toda su fortaleza sin caer en un absurdo, i.e. sin explosión. Entre las múltiples reglas que satisface esta lógica tenemos la siguiente lista

$$(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$
$$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$
$$(\varphi \,\&\, \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$
$$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \,\&\, \neg\psi).$$

Pero no verifica la regla $p \Rightarrow p \,\&\, p$, esta es una de las razones por la cual es relevante. Por esta razón es que optamos por utlizar el símbolo &, en lugar de $\wedge$. Tampoco realiza la regla de contrapositiva $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Álgebra

Construiremos un sistema algebraico que atestigua contradicciones. Primero estableceremos algunos ejemplos, a partir de estos intentaremos dar la esquematización general.

Definición. Un grupo G es una colección de elementos $g_0, g_1, g_2 \ldots$ junto con una *operación* $\circ$ y un elemento *neutro* e tales que

1. No importa el orden de la operación $\circ$, en símbolo

$$g_0 \circ (g_1 \circ g_2) = (g_0 \circ g_1) \circ g_2.$$

9 Weber, Z., *Paradoxes and Inconsistent Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2021.

10 *Ibidem.*

2. El elemento neutro e no hace nada, esto es
$$g_0 \circ e = e \circ g_0 = g_0.$$
3. Se puede deshacer la operación ○, es decir para g_0 existe g_0^{-1} tal que juntos no hacen nada o
$$g_0 \circ g_0^{-1} = g_0^{-1} \circ g_0 = e.$$

En lugar de concentrarnos en dar un ejemplo matemático, pensemos en el siguiente escenario. Se tiene un tablero cuadriculado y una figura en dicho tablero. Los movimientos entre los cuadrados que conforman la cuadrícula son los elementos del grupo. La operación es combinar los movimientos, véase la Figura 1 de lado izquierdo. El elemento neutro del grupo es cuando no hacemos ningún movimiento. Además, cualquier movimiento es reversible, si se avanza hacia adelante y luego se avanza hacia atrás la misma cantidad de cuadrados, es como si no hubiéramos hecho nada, Figura 1 lado derecho.

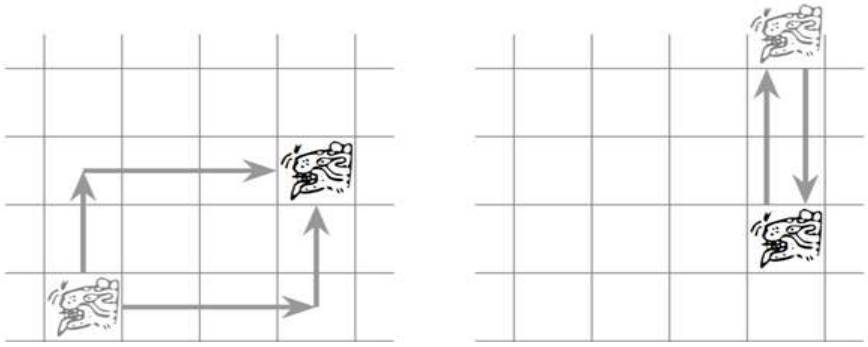


Figura 1. Ejemplo de un grupo. A la izquierda tenemos una operación entre dos elementos cuyo orden no importa. A la derecha observamos el resultado de adelantar 3 espacios para retroceder los mismos 3 espacios, que resulta equivalente a no hacer nada.

Ahora, un *campo K* es una colección de elementos {*a, b, c,...*} junto con una suma + que generan un grupo al considerar un elemento *0*, junto con una operación de multiplicación que también genera un grupo con su respectivo elemento neutro *1*. En otras palabras, un campo es un objeto donde podemos sumar, restar, multiplicar y dividir, *siempre y cuando no sea división entre cero.*

Trabajemos con la lógica $\mathbf{Ł}_3$; sean *K* un campo y *a, b* elementos de *K*, y definamos el valor de verdad de *a=b* como *x*, resulta que
$$a = b \wedge a \neq b$$

es una aseveración veradera. Tenemos la siguiente cadena de implicaciones

$$a=b$$
$$a\cdot a = ab$$
$$a^2 + a^2 = ab + a^2$$
$$2a^2=ab + a^2$$
$$2a^2- 2ab= ab + a^2 - 2ab$$
$$2(a^2- ab)=1(a^2- ab)$$
$$2=1.$$

Este es un argumento popular en redes sociales y la raíz de la falacia está en el último paso. Puesto que $a=b$, resulta que $a^2- ab= a^2- a2=0$ y no podemos dividir entre cero, pero en nuestro caso también sabemos $a \neq b$, así que $a^2- ab \neq 0$, y sí podemos dividir entre $a^2- ab$. Por tanto, usando $\mathbf{Ł_3}$ sí podemos legitimizar $2=1$. Para los matemáticos que están a punto de aventar el texto a la hoguera, dedujimos $2=1$, pero también ocurre $2\neq1$. Ocurren ambas, no solo la que nos disgusta.

En la teoría usual de grupos, se sabe que $e\circ e = e$ por definición de e. Además, se puede demostrar que e es único. Pero si g_0, g_1 son elementos inconsistentes como antes, es decir $g_0=g_1$ ocurre con valor x, entonces tenemos las siguientes igualdades.

$$g_0 \circ g_1^{-1}=e$$
$$g_1 \circ g_0^{-1} \neq e.$$

De esto se desprenden las siguientes ecuaciones

$$e \circ e \neq e,$$
$$e \neq e.$$

De aquí resulta que el elemento neutro no es único, puesto que e ≠ e hay más de un neutro (aunque sea solo uno).

El esquema general es el siguiente, para cualquier teoría algebraica T, escogemos dos elementos a, b tales que su valor de verdad es *no falso*, en este caso x, y esto generará al menos una paradoja

$$a = b \wedge a \neq b,$$

pero seguramente generará más. Véase [Mort].[11]

Una queja válida de este método de obtención de paradojas es que aparecen de una convención, es decir, nosotros escogimos «a mano»

11 Mortensen, C., *Inconsistent Mathematics*. Londres, Springer Nature. 1995.

el escenario para la paradoja, esto dista de ser natural. A continuación, veremos un método que dista de ser artificial.

Sorites: Legitimando las paradojas

La *paradoja de sorites* se pregunta cuándo empieza algo y termina otra cosa. Por ejemplo,

- ¿Cuántos litros de agua necesitamos para formar un lago?
- ¿Cuántos granos de arena conforman un desierto?

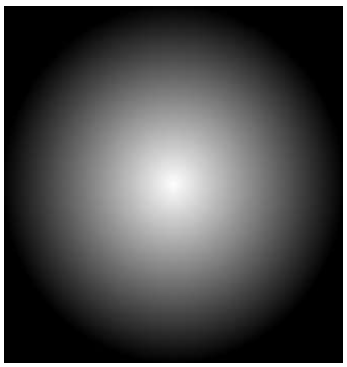


Figura 2. ¿Dónde termina el blanco? ¿Dónde comienza el gris? ¿Dónde comienza el negro?

La axiomatización finita de la paradoja de sorites es mediante el siguiente escenario.

1. Tenemos estados ordenados $e_0<...<e_n$ y una propiedad P.
2. Para cualquier estado e_n, $\neg P(e_n)$ o $P(e_{n+1})$.
3. Ocurre $P(e_0)$ pero existe un estado e_j tal que $\neg P(e_j)$.

Estos supuestos no tienen nada de insensatez, ni juntos y mucho menos por sí solos. Y modelan el escenario de la paradoja sorites.

Tomemos el menor estado tal que $\neg P(e_j)$. Así que

$$P(e_{j-1}) \wedge \neg P(e_j). \qquad (\clubsuit)$$

Por el inciso 2, tenemos

$$\neg P(e_{j-1}) \vee P(e_j). \qquad (\heartsuit)$$

Tomando la conjunción de las expresiones (♣), (♥) y con cierta manipulación obtenemos

$$(P(e_{j-1}) \wedge \neg P(e_{j-1})) \vee (P(e_j) \wedge \neg P(e_j)).$$

Es decir, al menos uno de los dos estados e_{j-1}, e_j es paradójico. Lo más natural sería pensar que el paradójico es el estado e_j porque e_j era el menor tal que $\neg P(e_j)$ y $e_{j-1}<e_j$, pero hablando de paradojas, ambos son

igual de naturales, bien podría ocurrir que ambos estados sean paradójicos. Hemos obtenido (al menos) un legítimo estado paradójico, todo sin necesidad de usar algo que pudiera parecer artificial como fijar valuaciones para forzar una paradoja.

Conclusión

Cambiando el ambiente lógico podemos obtener distintas formas de hacer matemáticas. Comenzamos con el ejemplo de la teoría de conjuntos justo porque los teoremas de incompletud de Gödel ya nos orillan a una lógica distinta de la lógica clásica, pero ¿por qué parar ahí? ¿por qué solo estas lógicas son legítimas? En lugar de pensar que hemos arruinado un argumento al obtener una contradicción, podemos pensar que hemos *demostrado una paradoja*. Después pasamos a escenarios alegbraicos para mostrar estructuras algebráicas paraconsistentes, y terminamos con el ejemplo de la paradoja sorites para mostrar que las paradojas son más naturales al pensamiento de lo que nuestra formación nos obligó a creer. Al final las paradojas están ahí. Nadie dice que solo tenemos que hacer matemática con lógica clásica, así como nadie dice que no se pueda utilizar otro marco lógico. Después de todo ya hicimos precisamente eso en este trabajo.

Hay mucho más desarrollo en este campo de lógicas no clásicas y matemáticas. Algo que se puede explotar y los invitamos a explotar es la topología paraconsistente. Particularmente, [Weber][12] desarrolla un sistema topológico que esperamos que tenga aplicaciones prácticas. Creemos que tal vez el análisis de datos tenga un gran espacio para el uso de topología paraconsistente.

Edgar Valenzuela
Universidad Autónoma Metropolitana
gar_ed_93@hotmail.com

12 Weber, Z., *Paradoxes and Inconsistent Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2021.