Consideraciones analíticas

Margaret Masterman, su crítica a la noción de paradigma y su invisibilización
María Carolina Álvarez Puerta

El papel de las heurísticas en el desarrollo de una Inteligencia Artificial General
Luz Marina Barreto

El *Dilema de Benacerraf* como una objeción al Platonismo tradicional en matemática
Ricardo Da Silva y Solani Rivas

Fundamentos técnicos y dilemas éticos en los modelos de lenguaje natural en las Inteligencias Artificiales
Nahir Hurtado

An interpretation of the I/Me distinction in G. H. Mead's "The definition of the psychical" and H. Joas' criticism
Leopoldo Márquez Velasco

¿Hay matemática más allá de la lógica?
Edgar Valenzuela

U.C.V EPISTEME NS ENERO - JUNIO 45 N°1 2025

EPISTEME NS

Revista del Instituto de Filosofía

ISSN: 07984324 Dep. Leg.: pp198102DF423

45

Enero - Junio

N°1

2025

Universidad Central de Venezuela
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

Revista Semestral ISSN: 0798–4324 Depósito Legal: pp198102DF423

EPISTEME NS

Revista del Instituto de Filosofía

45
Enero - Junio
N° 1
2025

Universidad Central de Venezuela
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

© by Instituto de Filosofía
Facultad de Humanidades y Educación
Universidad Central de Venezuela
Publicado en línea en abril 2026
Caracas–Venezuela

EPISTEME NS

EPISTEME NS es una revista de crítica e investigación en filosofía, abierta a todas las corrientes y estilos de pensamiento y a la reflexión en todos los ámbitos del saber filosófico, sin más requisitos que la originalidad, seriedad y rigor argumentativos. Los números salen alternativamente dedicados a temas de Filosofía, Historia de la Filosofía y Filosofía Social (Serie Azul) y de Lógica, Análisis del Lenguaje y Filosofía de las Ciencias (Serie Roja), además de las ediciones especiales (Serie Gris). La Revista, de periodicidad semestral y arbitrada según los procedimientos *ad usum*, es una publicación de circulación internacional indexada en *The Philosopher Index, Latindex* y *Clase*, y registrada en *Ulrich´s International Periodical Directory*; también aparece en versión electrónica en las plataformas SciELO (www.scielo.org.ve) y Saber UCV (www.saber.ucv.ve). Todas las colaboraciones deben ser inéditas y ser enviadas por triplicado para ser sometidas a la consideración del Comité de arbitraje. Los trabajos podrán ser de tres tipos: Artículos (no deben exceder de 10.000 palabras), Notas y Discusiones (5.000 palabras) y Reseñas. Los Artículos y las Notas y Discusiones deben ser presentados en cuartilla tamaño carta a doble espacio con notas a pie de página (también pueden ser enviados en *attachment* a las siguientes direcciones electrónicas: revista.epistemens@gmail.com y/o nnunezm@gmail.com y deberán estar acompañados de sendos resúmenes, en inglés y en castellano, de una extensión no mayor de diez (10) líneas, acompañados con tres palabras claves. Para cualquier uso posterior de los materiales publicados en EPISTEME NS, es necesaria la autorización escrita del Editor de la Revista.

EPISTEME NS/Revista del Instituto de Filosofía, Vol. 45, (enero-junio, 2025). Caracas: Ediciones de la Facultad de Humanidades y Educación, 1981.

V./ 22 cm.
2 veces al año.
Continúa: Episteme NS
Título de cubierta.
Director –fundador Anuario Episteme: 1957 – Juan David García Bacca
Director–fundador Episteme NS: 1981 – Juan Nuño
Directora: diciembre 2021 – María Carolina Álvarez
ISSN: 0798–4324
1. Filosofía – Publicaciones periódicas.
Depósito Legal: pp198102DF423

EPISTEME NS

Semestral

Director Fundador: Juan David García Bacca†

Directora: María Carolina Álvarez Puerta

Comité Editorial:

Editora: Nancy Núñez

Secretaría de Redacción: María Carolina Álvarez Puerta

Secretaría de Administración: Benjamín Sánchez

Consejo Consultivo: Omar Astorga (UCV), Francisco Bravo (UCV) †, Luz M. Barreto (UCV), Sabine Knabenschuh de Porta (LUZ), Carlos Kohn (UCV), Vincenzo P. Lo Monaco, (UCV), Nancy Núñez (UCV), Benjamín Sánchez (UCV), Gustavo Sarmiento (USB), Fabiola Vethencourt (UCV), Corina Yoris (UCAB)

Consejeros Internacionales: J. J. Acero (UGR), Francisco Ayala (UCLA), Mario Bunge (McGILL) †, Hugo Calello (UBA), Marisa Kohn de Beker (UCV) †, Pedro Lluberes (USB), M. Reyes Mate (CSIC), Jesús Mosterín (CSIC) †, Ulises Moulines (LMU), José M. Rosales (UMA), Giulio F. Pagallo (Unipd) †.

Responsable de este número: Ricardo Da Silva

Asistentes: María Alejandra Pérez y Sebastián Bogoljubskij

Diseño de Portada: Lic. José Bifano

Arte Final: María Alejandra Pérez

EPISTEME NS

Volumen 45, N° 1, 2025

Contenido
Consideraciones analíticas

Presentación
DA SILVA, R.: Presentación..... *i*

Artículos *Págs.*

ÁLVAREZ, M.: Margaret Masterman, su crítica a la noción de paradigma y su invisibilización *(Margaret Masterman, her criticism of the notion of paradigm and its invisibility)*..... 01

BARRETO, L.: El papel de las heurísticas en el desarrollo de una inteligencia artificial general *(Heuristic's role on the development of a general artificial intelligence)*..... 25

DA SILVA, R. Y RIVAS, S.: El *Dilema de Benacerraf* como una objeción al Platonismo tradicional en matemática *(Benacerraf's Dilemma as an objection to traditional Platonism in mathematics)*..... 49

HURTADO, N..: Fundamentos técnicos y dilemas éticos en los modelos de lenguaje natural en las Inteligencias Artificiales *(Technical foundatinos and ethical dilemmas of natural language in Artificial Intelligence)*..... 81

Marquez, L.: An interpretation of the I/Me distinction in G. H. Mead's "The definition of the psychical" and H. Joas' criticism *(Una interpretación de la distinción Yo/Mí en "The definition of the psychical" de G. H. Mead y la crítica de H. Joas)*..... 95

Valenzuela, E.: ¿Hay matemática más allá de la lógica? (Is *there mathematics beyond logic?*)..... 121

Notas y discusiones

Blanco, F.: Notas introductorias al concepto de «Lógica» (*Introductory notes on the concept of «Logic»*)..... 137

Chávez, M.: ¿Es la *existencia* una propiedad, o una *modalidad*? (*Is existence a property, or a modality?*)..... 153

Recensiones

Bogoljubskij, S.: Posy, C - Intuicionismo matemático (*Mathematical Intuitionism)*..... 159

μiscelánea 165

EPISTEME NS, VOL. 45, N°1, 2025, pp. i-ii

Ricardo J. Da Silva Araujo

PRESENTACIÓN

Bajo la premisa de que la unidad filosófica no exige uniformidad temática, este número ofrece un panorama diverso donde la multiplicidad de problemas abordados cobra sentido bajo el rigor que el análisis filosófico confiere a la investigación académica actual.

Aunque es factible trazar conexiones entre ciertos núcleos temáticos que se comentarán más adelante, el verdadero denominador común de esta entrega es el compromiso de presentar los problemas desde una visión argumentativa que los sustente. De esta manera, cada texto aquí reunido destaca por la claridad conceptual empleada para desarrollar sus hipótesis, ofreciendo al lector un ejercicio de pensamiento crítico y estructurado.

Aunque el índice obedece a un orden lexicográfico, podemos reagrupar los artículos según ciertas similitudes. Los primeros serían aquellos que reflexionan directamente sobre la obra de un autor. Así, María Carolina Álvarez se propone revalorizar y visibilizar las críticas que Margaret Masterman le hiciese a la noción de "paradigma" de Thomas Kuhn en la edición de 1962 de *La estructura de las revoluciones científicas*; por su parte, Leopoldo Márquez propone una nueva lectura de la subjetividad en el trabajo temprano de George H. Mead, heredada luego por su obra madura, tratando así de sustentar una exégesis continuista sobre el pensamiento del autor.

En otra dirección, encontramos trabajos que giran en torno al tema de la inteligencia artificial, tales como su capacidad para capturar la semántica del lenguaje y los desafíos éticos que presentan estas nuevas herramientas. Luz Marina Barreto busca examinar el desarrollo de algunos métodos algorítmicos de procesamiento de lenguaje y explicar, especialmente, las limitaciones de los grandes modelos de lenguaje (LLM) para actuar como modelos de razonamiento sin la retroalimentación continua de anotadores humanos. Nahir Hurtado, por su parte, hace un recorrido elucidatorio por los mecanismos que han hecho

posible el surgimiento de modelos como GPT, pasando así revista a las redes neuronales y las arquitecturas transformers. Ambas autoras concluyen remarcando el énfasis en las consideraciones éticas y en las exigencias de legislación sobre el uso de estas nuevas tecnologías.

El último par de artículos trata sobre cuestiones inherentes a la filosofía de la matemática. Edgar Valenzuela revisa la persistencia de la lógica en el quehacer matemático a través del estudio de sistemas lógicos no clásicos, defendiendo, así, una tesis pluralista en contraposición al monismo lógico tradicional. A su vez, Solani Rivas y Ricardo Da Silva realizan una reconstrucción argumentativa del dilema de Benacerraf en contra del platonismo matemático clásico y presentan la propuesta de Mark Balaguer, el platonismo pleno, como un intento de solución.

El presente número se ve, además, enriquecido con dos notas ensayísticas y una reseña bibliográfica. La primera de las notas, escrita por Francisco Blanco, busca indagar en un concepto de lógica que se reconstruya desde sus compatibilidades e incompatibilidades semánticas con otros conceptos. En este sentido, el material puede servir de apoyo para las primeras sesiones de un curso de lógica en cualquier pregrado de humanidades. La segunda nota, de Marcel Chávez, revisa críticamente la idea de que la existencia es una propiedad de los individuos, es por ello que esboza una interpretación desde la ontología de Duns Escoto, desde la cual se concluye que la existencia no es una propiedad, sino una forma de modalidad. Finalmente, Sebastián Bogoljubskij reseña el texto *Mathematical Intuitionism* de Carl Posy. La obra reseñada forma parte de la colección *Cambridge Elements: The Philosophy of Mathematics* y tiene por objetivo introducir a los lectores en la filosofía intuicionista de la matemática desde consideraciones filosóficas y formales. Bogoljubskij reconoce la claridad analítica en la exposición propuesta por el autor; sin embargo, identifica que algunos capítulos, debido a su reconstrucción formal, no resultarían accesibles para estudiantes que no estén familiarizados con ciertos contenidos de lógica matemática.

Podemos concluir afirmando que la presente edición contribuye a la idea de que la *buena filosofía* —sea lo que sea— se sustenta en argumentos. Que resulte de provecho para todos.

EPISTEME NS, VOL. 45, N° 1, 2025, pp. 49-80

Ricardo Da Silva y Solani Rivas

EL DILEMA DE BENACERRAF COMO UNA OBJECIÓN AL PLATONISMO TRADICIONAL EN MATEMÁTICA

Resumen: La postura según la cual los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros como entidades abstractas, en lugar de ser productos de nuestras construcciones teóricas o estados mentales, ha sido ampliamente compartida a lo largo del tiempo. Esta perspectiva, defendida por diversos matemáticos y filósofos, se conoce como *Platonismo matemático*. Más allá de los matices que cada autor adopta, la idea central es que los objetos matemáticos poseen una existencia abstracta e independiente del sujeto cognoscente. Sin embargo, resulta problemático afirmar que los seres humanos contamos con los recursos epistemológicos para obtener información sobre algo que no es ubicable espacio-temporalmente; es decir, que es causalmente inerte. Esta es precisamente la objeción presentada por Paul Benacerraf en su célebre artículo de 1973, "Mathematical Truth", la cual se conocería posteriormente como el Dilema de Benacerraf. Con la exposición de este argumento, el *Platonismo matemático tradicional* se vio seriamente cuestionado: si las matemáticas se refieren a objetos que no pertenecen a nuestro mundo físico, resulta difícil explicar cómo es posible que sepamos tanto sobre ellos. Ante este desafío, surgieron distintas variantes del platonismo que buscan resolver tales dificultades epistemológicas. El objetivo del presente artículo es realizar una reconstrucción argumentativa del Dilema de Benacerraf y presentar la propuesta de Mark Balaguer como un intento de solución al mismo.

Palabras clave: Filosofía de la matemática, Platonismo matemático, Dilema de Benacerraf, Platonismo pleno.

Recibido 10-02-25 ☼ Aceptado 23-02-25

BENACERRAF'S DILEMMA AS AN OBJECTION TO TRADITIONAL PLATONISM IN MATHEMATICS

Abstract: The view that mathematical objects exist independently of us as abstract entities, rather than being products of our theoretical constructions or mental states, has been widely held throughout history. This perspective, defended by various mathematicians and philosophers, is known as *Mathematical Platonism*. Beyond the nuances adopted by each author, the central idea is that mathematical objects possess an abstract existence independent of the knower. However, it is problematic to claim that human beings possess the epistemological resources to obtain information about something that cannot be located in space and time; that is, something that is causally inert. This is precisely the objection presented by Paul Benacerraf in his seminal 1973 article, "Mathematical Truth," which would later become known as Benacerraf's Dilemma. With the exposition of this argument, *traditional Mathematical Platonism* was seriously called into question: if mathematics refers to objects that do not belong to our physical world, it is difficult to explain how we can possibly know so much about them. Faced with this challenge, various forms of Platonism emerged seeking to resolve these epistemological difficulties. The aim of this article is to provide an argumentative reconstruction of Benacerraf's Dilemma and present Mark Balaguer's proposal as an attempted solution.

Keywords: Philosophy of mathematics, mathematical platonism, Benacerraf's Dilemma, Full-blooded Platonism.

Introducción

A pesar de los argumentos, y las afirmaciones a favor de la existencia de los objetos matemáticos (como objetos abstractos), diversos autores han desarrollado una variedad de objeciones al *platonismo matemático tradicional*, en las que se afirma que los objetos matemáticos abstractos son epistemológicamente inaccesibles y metafísicamente problemáticos. Nuestro objetivo en el presente artículo es realizar un estudio crítico del *Dilema de Benacerraf*, visto como una de las más relevantes objeciones a la "concepción estándar" o platonista de la matemática. Para ello analizaremos su estructura argumentativa a partir de la disyunción entre el *cuerno semántico* (la preocupación por tener una

teoría semántica homogénea, en la que la semántica de los enunciados matemáticos sea paralela a la semántica del discurso no matemático o lenguaje ordinario) y el *cuerno epistemológico* (la preocupación porque la explicación de la verdad matemática se adecue con una epistemología causal razonable). Posteriormente, estudiaremos las consecuencias epistemológicas que se derivan del *Argumento disyuntivo de Benacerraf*, en relación con la "concepción estándar". Finalmente presentamos el *Platonismo pleno* de Mark Balaguer como una solución al problema epistemológico de Benacerraf, que restringe al *Platonismo matemático tradicional*. Para ello, examinaremos el abandono de la "concepción estándar" y la subsecuente adopción de nuevas perspectivas de *platonismo en matemática*. De modo que presentaremos un breve estudio de las respuestas o posibles soluciones que los platonistas han dado al *cuerno epistemológico* y las fallas que cometen sus tentativas (reconstruyendo las falencias que en dichas concepciones observa Balaguer). Luego, describiremos la propuesta de Balaguer como una forma de superar la *objeción epistemológica* de Benacerraf. Según esta propuesta, existen objetos matemáticos de todas las clases y, para conocerlos, sólo tendremos que conceptualizarlos o pensarlos de manera consistente. Esto se debe a que, como Balaguer indica, "(…) toda teoría puramente matemática consistente describe con verdad alguna parte del reino matemático".[1]

Estructura argumentativa del Dilema de Benacerraf

El 8 de noviembre de 1973, Paul Benacerraf publica un artículo titulado "Mathematical Truth", en *The Journal of Philosophy*.[2] En dicho artículo, el autor señala que cualquier explicación adecuada de la verdad matemática debe satisfacer dos preocupaciones:[3] 1) Disponer de una teoría semántica homogénea, en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la del resto del lenguaje y

1 Balaguer, M. «*Platonismo pleno*», Traducción de María Cristina González en: Análisis Filosófico, Vol. 14, N°2, (1994). p. 138.

2 Benacerraf, P., "*Mathematical Truth*", The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 19, (1973). El 27 de diciembre de 1973, Benacerraf presenta este artículo en un simposio patrocinado conjuntamente por la American Philosophical Association, Eastern Division, y la Association for Symbolic Logic. Ciencia real, matriz disciplinar.

3 Cf. *Ibid*., p. 661.

2) Ofrecer una explicación de la verdad matemática que sea cónsona con una epistemología razonable,[4] esto es, con una teoría causal del conocimiento.[5] Cada una de estas preocupaciones debe ser explicada con detalle, para comprender el argumento problemático que sostiene el autor.

Con respecto a la primera preocupación, Benacerraf considera que una teoría de la verdad para el lenguaje en general (lenguaje con el que nos comunicamos, dialogamos, argumentamos, teorizamos, con el que exponemos nuestros argumentos científicos y matemáticos, etc.), debe proporcionar condiciones de verdad similares para enunciados tanto matemáticos como no-matemáticos.[6]

Resulta evidente que muchas de las proposiciones usadas cotidianamente (proposiciones no-matemáticas), son generalizaciones universales o particulares,[7] en donde la verdad de estas debe ser explicada en función del rol semántico de la cuantificación. También es conocido que las leyes y axiomas de la matemática se expresan como proposi-

4 Cf. Benacerraf, P., "*La verdad matemática*", (Trad. Pere-Blai Fornés Ferrer & Francisco Santonja Gómez), Ágora: Papeles de Filosofía, Vol. 23, No. 2, (2004), pp. 233-234.

5 En su formulación más amplia, la teoría causal del conocimiento sostiene que para que una persona S sepa que "p", es necesario que S esté causalmente relacionada con "p", de una manera apropiada. Por supuesto, hay muchas maneras diferentes de explicar esta relación causal "apropiada", y por tanto hay muchas versiones diferentes de la teoría causal del conocimiento, sin embargo, la predominante considera que la percepción es la manera "apropiada" de establecer esa relación causal. Un precedente importante de este enfoque lo encontramos en R. Carnap: "Encontramos entre los conceptos de la física -e igualmente entre los de toda la ciencia empírica - diferencias en cuanto a la abstracción. Algunos son más elementales que otros, en el sentido de que podemos aplicarlos en casos concretos sobre la base de *observaciones* de un modo más directo que otros. Hay otros que son más abstractos; para descubrir si se cumplen en un cierto caso, tenemos que llevar a cabo un procedimiento más complejo que, sin embargo, también descansa finalmente sobre *observaciones*" en Carnap., R. *Fundamentos de lógica y matemáticas*, Madrid: Taller de Edición Josefina Betancor, 1975, p. 133. (Cursivas propias).

6 Cf. Benacerraf, P., «*La verdad matemática*», pp. 233-234.

7 Piénsese en proposiciones como: "*Todos* los hombres son mortales", "*algunos* políticos son corruptos", "*Cualquier* año que fuera final no podría ser seguido por *ningún* otro año", "*las* sustancias simples no pueden ser cambiadas por adición a sus partes", etc. En los ejemplos anteriores, las palabras en cursivas indican la fuerza cuantificacional con la que se expresa la proposición.

ciones universales o existenciales,[8] por lo que la verdad de estas leyes depende, nuevamente, de una explicación adecuada del rol semántico que cumplen los cuantificadores. Esto quiere decir que, si nos comprometemos con una teoría global de la verdad, requerimos explicar bajo las mismas condiciones la función de los cuantificadores en todas las proposiciones cuantificadas (tanto matemáticas como no-matemáticas), en palabras del autor: "Las condiciones de verdad asignadas a dos enunciados que contengan cuantificadores deberían reflejar de manera significativamente similar la contribución de los cuantificadores".[9]

Para entender a lo que se refiere Benacerraf, consideremos los dos enunciados siguientes:[10]

1. Hay al menos cuatro ciudades capitales más grandes que Caracas.
2. Hay al menos cuatro números pares mayores que 20.

A primera vista, pareciera que ambas tienen la misma forma lógico-gramatical, a saber:

3. Hay al menos cuatro individuos que son F y G, que están en la relación R con a.

Podemos enriquecer formalmente la paráfrasis de (3) al enunciar la forma lógica de (1) y (2), como sigue:

3'. Hay al menos cuatro individuos x, tal que Fx y Gx y Rxa.

En donde 'Hay al menos cuatro' es un cuantificador numérico que puede ser sustituible del modo habitual, por medio de cuantificador existencial y la relación lógica de identidad, de la siguiente manera:

3." $\exists xyvw \{[(Fx \wedge Gx) \wedge (Fy \wedge Gy) \wedge (Fv \wedge Gv) \wedge (Fw \wedge Gw)] \wedge [(Rxa) \wedge \ldots \ldots \wedge (Rya) \wedge (Rva) \wedge (Rwa)] \wedge [(x \neq y) \wedge (x \neq v) \wedge (x \neq w) \wedge (y \neq v) \wedge (y \neq w) \wedge (v \neq w)]\}$.

8 Por solo citar algunos ejemplos: El *axioma de extensionalidad*, el *principio de inducción matemática*, la *ley de tricotomía*, la *propiedad transitiva del paralelismo entre rectas*, entre otras proposiciones.

9 *Ibid.*, p. 235.

10 Cf. Benacerraf, P., "*Mathematical Truth*", p. 663, y en español Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», pp. 235-236.

Conseguimos así un esquema lógico que da cuenta por completo de las formas lógicas de las proposiciones (1) o (2) si reemplazamos adecuadamente las funciones proposicionales '*Fx*' y '*Gx*' por predicados monádicos,[11] la relación '*Rxy*' por un predicado diádico,[12] y '*a*' por el nombre de un elemento del dominio de los cuantificadores.[13] [14]

Al preguntarse por las condiciones de verdad de (1) y (2), a Benacerraf le parece claro que (3)[15] refleja correctamente la forma de (1). En efecto, (1) será verdadera si, y sólo si, el objeto nombrado por la constante '*a*' ('Caracas') tiene la relación designada por la expresión que reemplaza a *x* en '*Rxa*' ('*x* es más grande que *a*') con al menos cuatro elementos (del dominio de discurso de los cuantificadores) que satisfacen los predicados que reemplazan a '*Fx*' y '*Gx*' ('*x* es ciudad' y '*x* es capital', respectivamente). El autor infiere que esto es lo que una definición de verdad apropiada nos diría; y no sólo es apropiada, sino que también la considera correcta.[16]

Pero surge inmediatamente la siguiente inquietud: ¿Qué ocurre con (2)? ¿Puede (3) explicar con detalle las condiciones de la verdad de (2), de la misma manera que con (1)? La respuesta obvia parece ser afirmativa. Sin embargo, Benacerraf señala que, en la historia de la filosofía de la matemática, se han contemplado diversas respuestas. Dicha pluralidad de enfoques sobre las condiciones que hacen verdadera a (2) se ven motivadas por el rechazo de "(…) afrontar las consecuencias de combinar lo que llamaré una explicación semántica "estándar" con

11 En el caso de (1) *Fx* por 'ser ciudad' y *Gx* por 'ser capital', en el caso de (2) *Fx* por 'ser número' y *Gx* por 'ser par'.

12 En el caso de (1) *Rxy* por 'ser más grande que', en el caso de (2) *Rxy* por 'ser mayor que'.

13 En el caso de (1) *a* por 'Caracas', en el caso de (2) *a* por '20'.

14 Cf. Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», pp. 235-236.

15 Y de forma más adecuada (3").

16 Paul Benacerraf está siguiendo la teoría tarskiana, como señala al decir: "(...) necesitamos una explicación de la verdad del tipo que Tarski proporcionó para lenguajes "referenciales". Asumo que las condiciones de verdad para el lenguaje (p. ej., el castellano) al que el matematés parece pertenecer, han de ser elaboradas principalmente sobre las bases que sentó Tarski" en Benacerraf, P. «La verdad matemática», p. 241. Con *matematés* el autor se refiere al lenguaje con el que hacemos matemática. El *matematés* puede verse como un subconjunto del español unido a un conjunto de símbolos especiales para los que hay asociados reglas sintácticas y semánticas.

una concepción platonista de la naturaleza de los números".[17] Tanto David Hilbert,[18] como el propio Benacerraf,[19] ofrecieron respuestas en esta dirección, teniendo por norte el rechazo a la tesis de que términos para los números sean términos referenciales tales como los nombres.

Si nos centramos, por ejemplo, en la propuesta de Hilbert, nos encontramos con un enfoque que aleja la noción de *verdad* de la noción semántica de *referencia*.

Lo que hace el matemático de Königsberg es separar los enunciados matemáticos en dos clases antagónicas, por un lado, la clase de los enunciados "reales", que no requieren justificación[20] por ser finitamente verificables, tales como "2+2=4" o "700 < 1000". Por otro lado, la clase de los enunciados cuantificados,[21] que no pueden ser finitamente verificables pues el dominio de la aritmética es infinito, ejemplos de tales enunciados son: "Para todo número natural z, existe un par de números x e y, tal que z= x·y" o "Todo número distinto de cero es el sucesor de algún otro número". Los enunciados de la última clase, siguiendo al autor, no se comportan semánticamente igual a los de la primera clase pues no se le atribuye referencia a los términos que aparecen en ellos. A pesar de esto, Hilbert considera que cumplen un rol, pues ellos actúan como "instrumentos"[22] que permiten el paso

17 *Ibid*., p. 236.

18 Hilbert, D., *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen (Berlin), Vol. 95, No. 1, (1926), pp. 161-190. Traducido como Hilbert, D., «*On the infinite*» en P. Benacerraf y H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 1984, pp. 183–201.

19 Paul Benacerraf, en su primer artículo publicado, afirma que: "(...) Por lo tanto, extendiendo el argumento que nos llevó a la conclusión de que los números no podrían ser conjuntos, sostengo que los números no podrían ser objetos de ninguna clase; pues no hay más razón para identificar un número individual con un objeto particular que para hacerlo con cualquier otro (que no se sepa ya que es un número). (...) Por tanto los números no son objetos en absoluto, pues al dar las propiedades (necesarias y suficientes) de los números se está meramente caracterizando una *estructura abstracta* (...)" en Benacerraf, P., «Qué no podrían ser los números», Traducción de Xavier Amavati Carballido y Francisco Rodríguez Consuegra en: *Mathesis*, Vol. 9, N°3, (1993), pp. 339.

20 No se requiere una prueba de consistencia para ellos.

21 Enunciados universales absolutos, universales condicionados, existenciales absolutos y existenciales condicionados.

22 La noción de "instrumento" y su referencia al *instrumentalismo* es tomada de Benacerraf, P., *Ibid*, pp. 236-237. Una noción clara y diáfana del instrumentalismo se puede recoger en el Diccionario de Lógica y Filosofía de la ciencia de

(derivación) de enunciados finitamente verificables ("reales") a otros enunciados finitamente verificables ("reales"). En contraposición a los enunciados "reales", e inspirándose en la geometría, el matemático de Königsberg nombró como "ideales" a estos últimos. La posición alternativa de Hilbert es recogida en las siguientes palabras del Profesor Benacerraf (quien la entiende además como parte del proyecto metamatemático del autor):

> Desde cierta perspectiva, Hilbert separa una clase de métodos y enunciados, los de la matemática "intuitiva", como aquellos que no necesitan más justificación. Supongamos que todos ellos sean "finitamente verificables" en algún sentido no especificado de manera precisa. Hilbert ve los enunciados de la aritmética que no comparten esta propiedad (típicamente, los que contienen cuantificadores) como instrumentos para pasar de enunciados "reales" o "finitamente verificables" a enunciados "reales", en gran medida como un instrumentalista considera las teorías en las ciencias naturales como una forma de pasar de enunciados observacionales a enunciados observacionales. A estos enunciados matemáticamente "teoréticos", Hilbert los denominó "elementos ideales", asemejando su introducción a la de los puntos "en el infinito" de la geometría proyectiva: se introducen como un recurso cómodo para hacer más simple y más elegante la teoría de las cosas que realmente nos importan. Si no llevan a contradicción y si tienen estos otros usos, entonces su introducción está justificada: de ahí la búsqueda de una prueba de consistencia para el sistema completo de la aritmética de primer orden.[23]

De la explicación de la concepción de Hilbert expuesta en los párrafos anteriores, podemos concluir que no consideró por igual, semánticamente, a todos los enunciados cuantificados. Dar una semántica para la aritmética como él la concibió, no trataría el cuantificador en

---

J. Mosterín y R. Torretti: "(El instrumentalismo) sostiene que las teorías son instrumentos conceptuales que nos sirven para hacer predicciones observacionales, para calcular valores medibles, para resolver problemas y diseñar experimentos y sistemas tecnológicos. En especial, según los instrumentalistas, no todos los términos de las teorías necesitan tener una referencia en la realidad extra-teórica; algunos pueden ser meros artilugios de conveniencia, introducidos por un valor instrumental en la obtención de predicciones observacionales o en la resolución de problemas" en Mosterín, J. &. Torretti, R., *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencias*. Madrid: Editorial Alianza, 2002, p. 300, Entrada: *Instrumentalismo*.

23 Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», pp. 236-237.

(2) de la misma manera que en (1) y, por lo tanto, negaría que (3) sea el modelo de acuerdo con el que se estudia la verdad de (2).[24]

De igual forma, la concepción del propio Benacerraf, que califica de "combinatoria", considera que las condiciones de verdad para los enunciados de la aritmética son proporcionadas a modo de derivabilidad a partir de conjuntos de axiomas específicos. En tales casos, la *verdad* no se explica en términos de *referencia*, sino que se define sintácticamente (a partir de *demostraciones*).[25] La idea anterior se ve recogida en las siguientes palabras de Consuegra cuando analiza la posición "combinatoria" en sus notas introductorias a la traducción al español del artículo de Benacerraf:

> (…) los matemáticos consideran "verdadero" un teorema sencillamente cuando son capaces de proporcionar una demostración de él que tome como premisas otros enunciados ya aceptados, bien como axiomas bien como teoremas ya probados, y que utilice como reglas de inferencia las usualmente aceptadas en su práctica profesional.[26]

Pero resulta evidente que esta explicación de la verdad matemática no asimila (1) y (2) a (3),[27] y es inconsistente con el requisito de que exista una teoría global de la verdad, en la cual las condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas sean evidentes, como ocurre cuando se define la verdad en términos de referencia.[28] Pero

24 Cf. *Ibid.*, p. 237.

25 La noción de demostración o derivación siempre depende del sistema formal en el que se le defina. Se entiende por demostración o derivación el proceso por el cual a partir de un conjunto de axiomas y mediante una secuencia finita de pasos finalicemos con la fórmula a la cual llamaremos *teorema* del sistema. Es necesario señalar que cualquiera de los pasos a partir de los cuales podamos llegar a la fórmula que queremos derivar, debe, o ser un axioma o haberse obtenido a partir de las reglas de inferencia. La noción de demostración definida en sistemas formales para la lógica proposicional, la lógica de primer orden y la aritmética en primer orden puede consultarse en Hamilton, A. *Logic for mathematicians*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

26 Rodríguez, F. «*Lo que es y lo que no es la verdad matemática: nota introductoria a "La verdad matemática de Paul Benacerraf*"», en: Ágora: Papeles de Filosofía, Vol. 23, N°2, (2004), p. 229.

27 Dado que la verdad de proposiciones como (1) no dependen, necesariamente, de la demostración de (1) en el marco de un sistema formal.

28 Precisamente la concepción de la verdad en la "posición combinatoria" excluye cualquier consideración semántica. La idea de fondo es que no es

más allá de las posiciones filosóficas,[29] existe un impedimento para asimilar dentro de los sistemas formales para la aritmética[30] una identificación (completa) entre las nociones de verdad y demostración.[31] Lo anterior se debe al *Teorema de incompletitud* probado por Gödel en 1931,[32] el cual, de forma intuitiva, e informal, nos dice que:

> (…) todo sistema matemático suficientemente potente contiene al menos un enunciado evidentemente verdadero pero indemostrable dentro del sistema; ello basta para mostrar que el concepto de demostración no puede servir para explicar el de verdad.[33] [34]

Dado que la reflexión de Benacerraf está dirigida hacia "(…) una explicación filosófica coherente y global de la verdad y del conocimiento",[35] su primera preocupación es porque exista una teoría general de la verdad, a partir de la cual pueda verificarse que la

consistente mantener la tesis de una teoría global de la verdad y a su vez un tratamiento preferencial (sintáctico) para la verdad de las proposiciones matemáticas.

29 Nos referimos al debate entre la concepción global de la verdad vs. la "concepción combinatoria".

30 Cfr. Hamilton, A., *Ob. Cit*, Cap. 5 y 6.

31 Aunque el teorema limitativo de Gödel supone un antes y un después en la investigación sobre los fundamentos de la matemática, no trajo consigo repercusiones significativas que modificarían la práctica habitual de la matemática. Los matemáticos, en buena medida, siguen realizando su quehacer identificando pragmáticamente la demostración con la verdad, dejando al margen, siempre que sea posible, el teorema de incompletitud. Esta "conducta" se ve reflejada en la siguiente cita de Rodríguez Consuegra: "En su práctica habitual los matemáticos hacen precisamente eso, aunque la mayoría han oído hablar de los resultados de incompletitud de Gödel, que paradójicamente impiden esa identificación" en Rodríguez, F. *Ob. Cit*., pp. 229-230.

32 Cf. Gödel, K. (1931). "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines" en Gödel, K., *Obras completas*. Mosterín, J. (Ed.). (2da. ed). Madrid: Alianza Editorial. Para un acercamiento formal al resultado puede revisarse Hamilton, A., *ob. cit*., 1989, Cap. 5 y 6.

33 Rodríguez, F., *ob. cit*., p. 230.

34 Consuegra recoge en su explicación informal y especulativa del teorema limitativo de Gödel la idea de Benacerraf de que la incompletitud puede ser usada como contraargumento de la concepción "combinatoria": "Cuando se unieron al deseo de atribuir un valor de verdad a cada enunciado cerrado de la aritmética, estas concepciones fueron torpedeadas por los teoremas de incompletud". Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», p. 237.

35 *Ibid*., p. 238.

explicación de la verdad matemática constituya efectivamente una auténtica explicación de la verdad matemática.[36]

Cualquier teoría de la verdad matemática debe ser acorde con una teoría general de la verdad, que legitime que la "verdad" de los enunciados sea, en efecto, verdadera a *secas*. Benacerraf considera que esto "(…) sólo puede hacerse sobre la base de alguna teoría general que abarque al menos el lenguaje en su conjunto".[37] En este sentido, el aparato semántico de la matemática debe verse como parte del aparato semántico del lenguaje natural en que se apoya en un principio y, así:

> (…) cualquier explicación semántica que seamos proclives a proporcionar de los nombres o, de manera más general, de los términos singulares, predicados y cuantificadores en la lengua materna, incluya esas partes de la lengua materna que clasificamos como matematés.[38]

De tal forma que Benacerraf sugiere que, si se cumple este requisito, no deberíamos estar satisfechos con una explicación que fracase al tratar a (1) y (2) de manera similar, en base al modelo (3). Puede que surjan diferencias, pero se esperaría que emerjan en el nivel del análisis de la referencia de los términos singulares y los predicados.

Ahora bien, Benacerraf afirma que, si estuviésemos forzados a mantener una distinción entre los enunciados matemáticos y los no-matemáticos, como ocurriría en una teoría que proporcione una explicación de la contribución de los cuantificadores al razonamiento matemático que sea distinta de la habitual en el razonamiento cotidiano,[39] tal teoría tendría que brindar razones necesarias y suficientes para sustituir a la concepción homogénea o global de la verdad.

Este fue el punto de vista que autores como Hilbert, Carnap[40] y el propio Benacerraf asumieron en algún momento del desarrollo de

36 *Ibid*., p. 239.

37 *Ibídem*.

38 *Ibídem*.

39 En palabras de Benacerraf: "Tal distanciamiento podría manifestarse, por ejemplo, en una teoría que proporcione una explicación de la contribución de los cuantificadores al razonamiento matemático que sea distinta de la habitual en el razonamiento cotidiano sobre lápices, elefantes y vicepresidentes. David Hilbert recomendó tal explicación en "Sobre el infinito", de lo cual trataré brevemente más abajo". Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», p. 248.

40 Para finales de la tercera década del siglo pasado Carnap afirma, con cierto

su obra, aunque el propio autor considerará a tales enfoques como insatisfactorios.[41] Sin embargo, esto no significa que la concepción homogénea de la verdad se encuentre libre de dificultades. Por el contrario, cuando es presentada junto con *asunciones platonistas*, como la de considerar a los términos numéricos como términos referenciales, se presenta un problema, esto es, la *concepción platonista* de la naturaleza de los números supondría que los numerales son nombres, concediendo referencia a sus términos, sin explicar cómo conocemos las entidades referidas por tales términos. De esta forma el señalamiento de Consuegra resulta oportuno: "La semántica usual es necesaria para que los términos de los enunciados matemáticos se refieran a entidades reales, si tales enunciados han de ser verdaderos, como suponemos en nuestros usos lingüísticos habituales".[42] Consideremos las implicaciones de lo anterior.

Conceder referencia a los términos de un enunciado implica exigir que vayan de la mano la verdad y la referencia. Los platonistas consideran que los enunciados matemáticos se comportan, en cuanto a su referencia, como cualquier otro enunciado del lenguaje ordinario. Asimilan los enunciados matemáticos a la semántica referencial que usualmente utilizamos, debido a que consideran que los objetos matemáticos a los que se refieren dichos enunciados existen realmente. No obstante, los platonistas no dan cuenta de la conexión que, según veremos en la segunda preocupación, debería existir entre las creencias del sujeto y lo que hace verdaderos los enunciados correspondientes. Tomemos como ejemplo el caso de la aritmética, si los números naturales son objetos abstractos cuya existencia es independiente del sujeto,

espíritu hilbertiano, lo siguiente: "(...) tendremos que enfrentarnos con la cuestión de la naturaleza de los teoremas lógicos y matemáticos. Se pondrá en evidencia que no poseen ningún contenido factual. Al denominarlos verdaderos se está suponiendo otro tipo de verdad que no depende de los hechos" en Carnap., R., *Fundamentos de lógica y matemáticas*, Madrid: Taller de Edición Josefina Betancor, 1975, p. 14.

41 Benacerraf afirma que: "Así, cuando llegamos a la matemática, la ausencia de una explicación coherente de cómo se conecta nuestra intuición matemática con la verdad de las proposiciones matemáticas hace insatisfactoria la explicación global". Benacerraf, P. "*La verdad matemática*", p. 248.

42 Rodríguez, F., "Lo que es y lo que no es la verdad matemática: nota introductoria a '*La verdad matemática*' de Paul Benacerraf", en: Ágora: Papeles de Filosofía, Vol. 23, N°2, (2004), p. 230.

no puede establecerse la conexión entre las condiciones de verdad de los enunciados de la teoría de números y las personas que se supone tienen conocimiento matemático.

Este es el problema de fondo en la segunda preocupación que considera Paul Benacerraf, pues, el autor presupone que, en efecto, poseemos conocimiento matemático y que tal conocimiento no es menos conocimiento por ser, de hecho, matemático. Ciertamente, nuestro conocimiento lo es sobre verdades,[43] así, una explicación de la verdad matemática, para ser aceptable, debe ser consistente con la posibilidad de poseer conocimiento matemático.

Dado que Benacerraf indica que "(…) las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas no pueden hacernos imposible el saber que se satisfacen",[44] entonces, una explicación satisfactoria de la verdad matemática debe ser consistente con la posibilidad de que algunas de tales verdades sean cognoscibles. Es por ello por lo que el filósofo de Princeton considera que el concepto de verdad matemática debe coincidir con una explicación global del conocimiento, de manera que quede claro cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos.[45]

---

43 La concepción clásica del conocimiento ("creencia verdadera justificada") se suele formular de la siguiente forma:

S sabe que "p" si y sólo si (i) "p" es verdadera
(ii) S cree que "p", y
(iii) S está justificado en creer que "p".

Esta postura con respecto a las condiciones necesarias y suficientes de que alguien sepa una proposición dada, se remonta al *Teeteto* (202b-202c) de Platón. Cfr. Platón, *Diálogos V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político*. Gredos (Madrid, 1988), pp. 295-297. Por su parte, Edmund Gettier desarrolló un argumento en contra de esta forma de concebir el conocimiento. Así, Gettier propone una forma de pensar distinta a esa concepción clásica, debido a que una creencia verdadera podría estar justificada por razones que no tienen nada que ver con lo que la hace verdadera: si éste fuera el caso, difícilmente la tomaríamos por conocimiento. Cfr. Gettier, E. "¿Una creencia verdadera justificada es conocimiento?". Traducido por Paulo Vélez León en: *Disputatio: Philosophical Research Bulletin*, Vol. 2, No 3, (2013), pp. 185 - 193.

44 Benacerraf, P., «*La verdad matemática*», p. 240.

45 Cf. *Ibídem*.

Hemos de recordar que, para Benacerraf "una semántica aceptable para la matemática debe encajar en una epistemología aceptable",[46] por lo tanto, en matemática debe ser posible acoplar lo que es para "*p*" ser verdadera con mi creencia de que "*p*".[47] Es decir, un sujeto sabe que "*p*", sólo si hay *algo* que hace que "*p*" sea verdadera y el sujeto está relacionado con este algo de una manera que hace que sea posible para él determinar si las condiciones de verdad de "*p*" se satisfacen. Así, sí sé que "*el océano Atlántico se encuentra entre América (al oeste) y Europa y África (al este)*", es porque existe una cierta relación entre las condiciones de verdad de ese enunciado y mi creencia.[48]

Benacerraf es partidario de una epistemología de corte causal. Según el autor, una teoría causal del conocimiento exige que se disponga de una explicación de cómo sabemos que las condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas, en efecto, se dan. Es decir, "(…) que las entidades conocidas, que constituyen la referencia de nuestros términos matemáticos, deben hacer posible una relación causal con nosotros".[49] Sin embargo, como las entidades matemáticas son causalmente inertes, por no vincularse causalmente con ninguna de nuestras posibles percepciones, entonces, no puede haber auténtico conocimiento de ellas.

Dicho esto, Benacerraf advierte que las explicaciones básicas[50] disponibles de la verdad matemática no logran satisfacer ambos requisitos, sino más bien *casi todas*[51] las explicaciones del concepto de

46 *Ibídem*.

47 Cf. *Ibídem*.

48 Benacerraf indica que, sin importar cualesquiera que puedan ser nuestras explicaciones de la verdad y el conocimiento, deben conectarse de esta manera. Cf. Benacerraf, P., «*La verdad matemática*», p. 240.

49 Rodríguez, F. «Lo que es y lo que no es la verdad matemática: nota introductoria a *La verdad matemática* de Paul Benacerraf», p. 229.

50 Como indica Francisco Rodríguez Consuegra en su nota introductoria a *La verdad matemática* de Paul Benacerraf, el autor sólo considera las posturas *platonista* (concepción "estándar") y *formalista* (concepción "combinatoria") dejando de lado otras concepciones como la *intuicionista*. Es por ello por lo que Rodríguez Consuegra considera que: "Un sexto problema sería, consiguientemente, que el dilema de Benacerraf no es exhaustivo, pues existen posiciones a las que no alcanza" en *Ibid*., p. 230.

51 En el texto original Benacerraf menciona: "It will be my general thesis that *almost all* accounts of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another of these masters at the expense of the other" en

verdad matemática pueden identificarse como sirviendo a uno, u otro, de estos propósitos (disponer de una teoría semántica homogénea u ofrecer una epistemología razonable) a expensas del otro. En palabras de Benacerraf:

> (…) las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y el no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras aquellas que atribuyen a las proposiciones matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de los enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su verdad.[52]

Lo expuesto por el autor en su artículo, no es sólo un argumento contra el *platonismo*, es más bien un argumento que pretende mostrar que dos requisitos diferentes, relativos a la verdad de los enunciados matemáticos y al conocimiento matemático, aunque son plausibles independientemente, no pueden satisfacerse ambos al mismo tiempo. En otras palabras, cuando la semántica usual se aplica a los enunciados matemáticos que se dicen verdaderos, haciendo referencia a sus términos, no se explica cómo conocemos las entidades referidas por tales términos. Y cuando se les aplica el patrón usual del conocimiento matemático, entonces se deja de lado la semántica referencial.

En resumen, Benacerraf nos expone en su argumento problemático lo siguiente: dado que la verdad de cada proposición se justifica en función de la referencia a objetos, el conocimiento de dichas proposiciones verdaderas se explica por la conexión o relación causal entre el sujeto conocedor de la verdad y los objetos requeridos para satisfacer los términos (nombres o descripciones) de la proposición verdadera. La existencia de dicha relación causal es la garantía que justifica la creencia del sujeto sobre las proposiciones. El *quid* de la cuestión es que en las proposiciones matemáticas existen términos cuya referencia se entiende, desde la concepción estándar, como abstracta, siendo así

Benacerraf, P., "*Mathematical Truth*", p. 1. (Cursivas propias).

52 Benacerraf, P., «*La verdad matemática*», p. 234.

imposible la conexión causal (por no existir percepción posible de las entidades abstractas).

De tal manera que nos encontramos ante lo que se conoce como un dilema, y por su significativo impacto en la filosofía de la matemática, recibe el nombre de el *Dilema de Benacerraf*, debido a que es una disyunción en la que ambos cuernos conducen a situaciones inaceptables.

Las consecuencias del Dilema de Benacerraf ante la "concepción estándar"

Tras lo expuesto, resulta evidente que cualquier explicación de la verdad matemática debe satisfacer dos condiciones (que resultan mutuamente excluyentes), a saber, fundamentarse sobre la base de: (i) una explicación semántica amparada por una teoría global de la verdad y (ii) una epistemología causal como la que justifica el conocimiento que tenemos de las proposiciones del discurso cotidiano y científico.

Benacerraf considera que como ambos requisitos no se satisfacen simultáneamente en ninguna de las explicaciones a las que pasa revista, de ahí que las mismas no sean adecuadas. Por un lado, la "concepción combinatoria" da por bueno el conocimiento matemático que se obtiene mediante demostraciones, pero fracasa al justificar ese conocimiento de forma referencial, debido a que "(…) niegan que los términos de los enunciados matemáticos que toman como verdaderos designen entidades reales".[53]

Por otro lado, la "concepción estándar", se caracteriza a nivel ontológico por considerar que la matemática versa sobre objetos abstractos, cuya existencia es independiente del sujeto pensante. Esta característica es la base en la que se sustenta su esquema (*realista*) de la verdad, en el cual, la verdad de las proposiciones (teoremas) se explica apelando al rol semántico que tiene la referencia.[54] Además, recordemos que, a nivel epistemológico, la "concepción estándar" se caracteriza por suponer que el conocimiento que tenemos sobre dichos objetos

53 Rodríguez, F., «Lo que es y lo que no es la verdad matemática: nota introductoria a *La verdad matemática* de Paul Benacerraf», p. 228.

54 Cf. *Ibidem*.

(abstractos) no se obtiene mediante los sentidos, sino mediante algún mecanismo cognitivo distinto.[55]

Frente al *cuerno semántico*, la "concepción estándar" se encuentra bien posicionada, debido a que cuenta con una semántica afín a la usual en el discurso no-matemático. En efecto, al considerar que existen los objetos matemáticos (como objetos abstractos), y al aceptar la referencia como criterio de verdad, la *postura platonista* cumple con el requisito semántico impuesto. La dificultad surge cuando se considera el *cuerno epistemológico*. La "concepción estándar", para poder ofrecer una explicación de la verdad matemática satisfactoria (según los criterios de Benacerraf), también debe dar cuenta de cómo los sujetos pensantes tienen acceso a esos objetos abstractos a los que se refiere la matemática.

El problema epistemológico que se genera, y que debe enfrentar la postura platonista, puede ser formulado de la siguiente manera:[56]

1. Los seres humanos existen enteramente dentro del espacio-tiempo.
2. Si existen objetos matemáticos abstractos, entonces no existen en el espacio-tiempo.

Por lo tanto, es muy plausible que:

3. Si existen objetos matemáticos abstractos, los seres humanos no pueden conocerlos.

En consecuencia:

4. Si el *platonismo matemático* es correcto, entonces los seres humanos no podrían alcanzar el conocimiento matemático.
5. Los seres humanos (de hecho) tienen conocimiento matemático.

Como conclusión:

6. El *platonismo matemático* no es correcto.[57]

---

55 Recordemos el *intelecto* (*νοῦς o nous*) de Platón, la *razón* en Descartes, la *intuición matemática* que propone Gödel, etc.

56 Otra formulación del argumento epistemológico en contra del platonismo matemático es expuesta por Linnebo en Linnebo, Ø., "*Platonism in the Philosophy of Mathematics*". The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), 2023. Recuperado el 04 de marzo de 2024 desde: https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/, Sección 3.1.

57 Balaguer, M., "*Platonism in Metaphysics*", Sección 5. (Traducción propia).

Visto así, el argumento gira en torno a la plausibilidad de (3), pues, si se puede establecer la verdad de (3), también se puede establecer (como consecuencia lógica) la verdad de (6); y esto se justificaría pues (3) trivialmente implica[58] (4), (5) está más allá de duda, y (4) y (5) trivialmente implican[59] (6). No obstante, es importante señalar que (1) y (2) no implican estrictamente (3),[60] en consecuencia, se abre un espacio para que los platonistas respondan, para que expliquen cómo podrían los seres humanos adquirir conocimiento de objetos matemáticos abstractos. Por el momento únicamente nos detendremos en exponer las consecuencias del *Dilema de Benacerraf* sobre la "concepción estándar".

El desafío epistemológico, en pocas palabras, parte de la premisa de que nuestra mejor teoría del conocimiento, como vimos anteriormente, es la *teoría causal del conocimiento*. Si también se considera que para Benacerraf, la mejor teoría epistemológica nos dice que el conocimiento de las entidades matemáticas debería resultar de la interacción causal con esas entidades, es difícil imaginar cómo podría ser así,[61] debido a que:

> Si los objetos matemáticos existen fuera del espacio tiempo, entonces son causalmente inertes y, por tanto, no podrían estar causalmente relacionados con nosotros, porque no podrían estar causalmente relacionados con nada.[62]

Por lo tanto, del *Dilema de Benacerraf* se desprende una consecuencia de carácter epistemológico que afecta el *platonismo matemático tradicional*, y que está relacionado con la posibilidad del acceso a los objetos matemáticos. De ahí que el filósofo estadounidense advierta que la "concepción estándar":

---

58 Esto es, se puede establecer un condicional material que tenga a (3) como antecedente y (4) como consecuente, de tal forma que cada vez que (3) es verdadera, (4) también lo es.

59 Cfr. *Ibidem*. Esto es, se puede establecer un condicional material que tenga la conjunción de (4) y (5) como antecedente y (6) como consecuente, de tal forma que cada vez que la conjunción entre (4) y (5) es verdadera, (6) también lo es.

60 Los platonistas podrían argumentar que tanto 1) como 2) son falsas, y por eso no implican 3). O también podrían aceptar que 1) y 2) sean verdaderas, y aún hace, 3) sea falsa.

61 Cf. Horsten, L., "*Philosophy of Mathematics*", Sección 3.4.

62 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 22. (Traducción propia).

> (...) representará las condiciones de verdad en términos de condiciones respecto a objetos cuya naturaleza, cómo se concibe normalmente, les sitúa más allá del alcance de los medios del conocimiento humano que comprendemos mejor (p. ej., la percepción sensorial y otros por el estilo).[63]

Cabe acotar que, si bien la "concepción estándar" no cuenta simultáneamente con los dos criterios exigidos por el autor, lo que a sus ojos la hace una explicación de la verdad matemática insatisfactoria, esto no quiere decir que deba ser descartada por completo. Ciertamente, el propio Benacerraf reconoce que esta concepción tiene varias virtudes.[64] De manera que, la *postura platonista*, para ser una explicación satisfactoria de la verdad matemática y superar las consecuencias del *Dilema de Benacerraf*, debe enfrentarse al *cuerno epistemológico*, probando cómo los seres humanos pueden conocer los objetos matemáticos abstractos, superando así el problema del acceso. La respuesta de los platonistas no se hizo esperar y, como veremos a continuación, las nuevas propuestas que surgieron buscaban superar la objeción epistemológica.

El abandono de la "concepción estándar": Nuevas perspectivas de platonismo en matemática

Como ya vimos, la objeción epistemológica de Benacerraf que sostiene, de forma breve, que la "concepción estándar" no puede explicar adecuadamente la verdad matemática (porque no deja claro cómo es posible el conocimiento matemático), afecta al *platonismo matemático tradicional*. Dado que varios autores consideran que la objeción no puede ser resuelta por la "concepción estándar",[65] algunos pensadores presentaron diferentes versiones del *platonismo matemático* para solventar el problema.[66]

Aunque surgieron diversas perspectivas del *platonismo en matemática*, Mark Balaguer reconoce que estas se fundamentan principalmente en tres consideraciones distintas (excluyentes entre sí) con respecto a la

63 Benacerraf, P. «*La verdad matemática*», p. 240.
64 Cf. *Ibid*., Apartado III: La "*concepción estándar*".
65 *Ibid*., p. 131.
66 Dichas versiones ya no entrarían en la categoría de lo que hemos calificado como *platonismo matemático tradicional.*

epistemología: (a) se tiene *contacto* con otros mundos, (b) se tiene *contacto* con este mundo, o (c) no se tiene *contacto*.[67]

La primera consideración, (a), negaría la primera premisa del problema epistemológico que dice que (1) los seres humanos existen enteramente dentro del espacio tiempo. La idea central sería que: "(...) la mente humana es capaz, de alguna manera, de forjar contacto con el reino matemático y adquirir así información sobre ese reino".[68]

La segunda consideración, (b), propondría que es falsa la segunda premisa que establece que (2) si existen objetos matemáticos abstractos, entonces no existen en el espacio-tiempo, debido a que consideraría que: "(...) los seres humanos pueden adquirir información sobre objetos matemáticos por medios perceptivos normales ".[69]

La tercera y última consideración de las nuevas perspectivas de *platonismo matemático*, (c), sí acepta las dos premisas que fueron negadas anteriormente, pero considera que la tercera premisa, la que afirma que (3) si existen objetos matemáticos abstractos, los seres humanos no pueden conocerlos, es falsa.[70]

A simple vista (a), (b) o[71] (c) parecen vías plausibles para responder a la objeción desarrollada por Benacerraf, ya que presentan una epistemología que explicaría cómo los seres humanos podrían adquirir conocimiento sobre los objetos matemáticos. Las dos primeras estrategias[72] suponen una *epistemología de contacto*,[73] esto es, consideran que los seres humanos son capaces de entrar en algún tipo de conexión, o relacionarse de alguna manera, con los objetos matemáticos.[74] Por otro lado, la tercera estrategia[75] difiere de las dos primeras debido a que considera que no podemos establecer ningún tipo de contacto con

67 Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Capítulo 2. Secciones 3-6.

68 *Ibid*., p. 24. (Traducción propia).

69 *Ibidem*. (Traducción propia).

70 Cf. *Ibidem*.

71 Entendiendo la "o" como una disyunción exclusiva.

72 Nos referimos a (a) y (b).

73 Cf. *Ibidem*.

74 Esto se debe a que, como indica Balaguer, ambas estrategias parten de la idea de que: "(...) la información puede pasar de los objetos matemáticos a los seres humanos y que es por eso que somos capaces de adquirir conocimiento de tales objetos." *Ibidem*. (Traducción propia).

75 Nos referimos a (c).

dichos objetos.[76] Sin embargo, acepta que somos capaces de adquirir conocimiento de los objetos matemáticos, de modo que busca explicar el motivo de este hecho, sin recurrir a vínculo alguno.

Si se realiza un detallado estudio histórico de los platonistas que adoptaron alguna de estas tres respuestas, en miras al problema epistemológico, se observaría un variado y numeroso grupo de matemáticos y filósofos de la matemática. No obstante, en tanto que nos proponemos evaluar si estas propuestas efectivamente superan la objeción epistemológica, realizaremos, siguiendo a Balaguer, el estudio de sólo algunos casos puntuales que sirvan de ejemplo.

Para examinar la versión del *platonismo* que defiende una *epistemología de contacto* con otros mundos, Balaguer utiliza de ejemplo la propuesta heredada a partir de Kurt Gödel,[77] quien sostenía la tesis de que de la misma forma que adquirimos conocimiento de los objetos sensibles concretos, por medio de la facultad de la percepción sensorial, también adquirimos conocimiento de los objetos matemáticos abstractos, a partir de la facultad (paralela a la sensible) de la *intuición matemática*.

El problema con esta postura es que parece imposible para nosotros recibir información de objetos matemáticos, porque la tesis de que la información es capaz de pasar de un reino matemático no espacio-temporal, a nuestros cerebros ubicados en el reino sensible, parece ininteligible. Los defensores de este tipo de *platonismo* responderían que la concepción es injustificable sólo porque se considera que la *intuición matemática* implica una especie de cruce entre reinos, cuando en realidad la idea es que esta *epistemología de contacto* se sustenta en la tesis, de por sí problemática, de que las mentes humanas no dependen de los cerebros y sus propiedades físicas, siendo de hecho inmateriales y abstractas, lo que garantiza el acceso epistemológico dada la supuesta similitud entre las naturaleza abstracta de los objetos matemáticos y las mentes de los sujetos cognoscentes. De ahí que:

76 Cf. *Ibidem*.

77 Se entiende que el filósofo Mark Balaguer se refiere a los trabajos inéditos de Gödel y a la recepción que la filosofía gödeliana recibió en el pensamiento de autores como Hao Wang.

> (…) si mantenemos que las mentes humanas son en sí mismas inmateriales y no espaciotemporales -que no dependen de los cerebros-, entonces podríamos ser capaces de construir un punto de vista según el cual adquirimos información de objetos matemáticos, aunque no haya señales que pasen del reino matemático al espacio-tiempo.[78]

Con todo, esta versión del *platonismo matemático* no supera el desafío planteado por Benacerraf porque, incluso si las mentes son inmateriales, igual se presenta un contraargumento decisivo: La idea de que la información pase de un objeto no espacio-temporal a otro, es tan inexplicable como la idea de que la información pase de un objeto abstracto a un objeto físico. Esto se debe a que la transferencia de información es causal, es decir, sólo tiene sentido cuando el emisor y el receptor son ambos objetos físicos.[79] En consecuencia, podemos notar que esta postura platonista no resuelve el problema de la falta de acceso a las entidades matemáticas.

Ahora bien, en el caso de la versión del *platonismo* que defiende una *epistemología de contacto* con este mundo, Balaguer utiliza de ejemplo la propuesta de la matemática y filósofa estadounidense Penélope Maddy, quien desarrolló un *platonismo naturalizado*. Esta postura mantiene la idea de que los seres humanos son capaces de adquirir conocimiento de los objetos matemáticos al entrar en contacto con ellos, es decir, al recibir información de ellos. No obstante, esta propuesta epistemológica, según Balaguer, se diferencia de la anterior al optar por una visión naturalista de los entes matemáticos y defender que el saber humano sobre ellos puede originarse en la experiencia sensorial.[80]

---

78 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 25. (Traducción propia).

79 Cf. *Ibid.*, p. 26. Recordemos que, como señala Francisco Rodríguez Consuegra, esta tesis está presente en la propuesta del autor de *La verdad matemática*, pues: "Para Benacerraf, ese conocimiento debe estar basado en lo que llama "teoría causal del conocimiento": las entidades conocidas, que constituyan la referencia de nuestros términos matemáticos, deben hacer posible una relación causal con nosotros. Los objetos físicos habituales nos son conocidos cuando podemos establecer una relación causal con ellos, que comienza con la percepción sensorial, que explicamos causalmente." Rodríguez, F., "Lo que es y lo que no es la verdad matemática: nota introductoria a 'La verdad matemática' de Paul Benacerraf", p. 229.

80 Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 28.

Esta tesis es defendida por Maddy en *Realism in Mathematics* de 1990, donde indica: "Tengo la intención de rechazar la caracterización platónica tradicional de los objetos matemáticos (...) [y] traerlos al mundo que conocemos y ponerlos en contacto con nuestras facultades cognitivas familiares".[81] Puesto que Maddy está pensando principalmente en conjuntos,[82] sus dos premisas centrales serían: (1) Los conjuntos están ubicados en el espacio y tiempo, por ejemplo, un conjunto formado por tres manzanas está ubicado justo donde están las manzanas (el agregado físico), y (2) Los conjuntos pueden ser percibidos de formas habituales (es decir, pueden verse, oírse, etc.).[83]

Algunos autores no estarían de acuerdo con pensar que la propuesta de Maddy de naturalizar el *platonismo*, sea realmente platonista, dado que la "concepción estándar" suele caracterizarse por afirmar que las entidades matemáticas son, de hecho, objetos abstractos (entendiendo la categoría "abstracta" de la forma tradicional según es recogida en la historia de la filosofía occidental, esto es, como objetos que no se encuentran en el espacio-tiempo). Sin embargo, que los naturalistas como Maddy consideren que los conjuntos no son abstractos en el sentido tradicional, no quiere decir que no conciban que son abstractos en algún otro sentido. Consideremos un agregado físico, como un grupo de tres manzanas, al cual le corresponde un conjunto, en este caso, un conjunto de tres elementos. Según la propuesta de Maddy,

(Traducción propia).

81 Maddy, P., *Realism in Mathematics*, citado por Balaguer, M., (1998). *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1990, citado por Balaguer en Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1998, p. 28. (Traducción propia y corchetes del texto en inglés).

82 Balaguer indica que, en los escritos tempranos de Maddy, se encuentran contenidos dos puntos de vista, entre los cuales ella se mantiene neutral. El primero de ellos, que Maddy llama *platonismo fisicalista*, es el punto de vista de que todos los conjuntos son *conjuntos platónicos naturalizados*. El segundo punto de vista, que Balaguer llama *platonismo híbrido*, sostiene que, además de los *conjuntos platónicos naturalizados*, también hay conjuntos que son abstractos en el sentido tradicional, es decir, conjuntos que existen fuera del espacio-tiempo. Nótese que, en ambos puntos de vista, Maddy se refiere a los conjuntos. Cf. Balaguer, M. «Against (Maddian) Naturalized Platonism», en: *Philosophia Mathematica*, Series 3, Vol. 2. (1994).

83 Cf. Balaguer, M., «*Platonismo pleno*», sección 2.

la diferencia que hay entre el agregado físico original (el grupo de las tres manzanas) y el conjunto que se forma a partir de ese agregado (el conjunto de tres elementos), no es de carácter físico, sino abstracto. Si además tenemos en cuenta que los agregados físicos forman una cantidad infinita de conjuntos diferentes,[84] entonces, los seguidores de la propuesta de Maddy deben aceptar que hay algo abstracto (*sui generis*) en los conjuntos, que permite diferenciarlos.[85] De forma que, siguiendo a Balaguer, la concepción de la filósofa estadounidense puede resumirse como vemos a continuación:

> El punto de vista de Maddy, entonces, es que los conjuntos son distintos de sus correspondientes agregados físicos porque están estructurados de forma diferente. Pero puesto que los conjuntos están hechos de la misma materia que sus agregados, y puesto que comparten sus localizaciones con estos agregados, esta diferencia estructural debe ser una diferencia no física o abstracta, por lo que parece justo concluir que los conjuntos maddianos son abstractos de una cierta manera no tradicional.[86]

Aun así, esta versión del *platonismo* no logra superar el *cuerno epistemológico* del *Dilema*, ya que, sin importar que tipo de abstracción se aplique a los conjuntos maddianos, parece haber una incompatibilidad entre abstracción y perceptibilidad.[87] De modo que la tesis de la filósofa estadounidense no deja del todo claro cómo el conocimiento de cosas en el espacio-tiempo, podría llevar al conocimiento de objetos con un tipo de abstracción que, si bien no corresponde del todo con una existencia fuera del espacio-tiempo, sigue siendo problemática en términos epistemológicos.

---

84 Maddy argumenta que los conjuntos no podrían ser meros agregados físicos porque, mientras que un conjunto tiene un número determinado de miembros, los agregados físicos no lo tienen, y es por ello por lo que cada agregado formula una cantidad infinita de conjuntos. Para probarlo, Maddy toma de ejemplo un cartón con tres huevos. Aunque el conjunto de huevos cuenta con tres elementos, una infinidad de conjuntos pueden surgir del mismo agregado, debido a que este cuenta con: "tres huevos, [...] muchas más moléculas, [y] aún más átomos." Maddy, P. *Realism in Mathematics,* 1990, citada por Balaguer en Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 30. (Traducción propia, corchetes de Balaguer).

85 Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 30.

86 *Ibid*., p. 31. (Traducción propia).

87 Cf. *Ibidem.*

Asimismo, si la dudosa relación entre la abstracción y la perceptibilidad no fueran motivos suficientes para descartar la propuesta de Maddy, Balaguer advierte que existe otro problema. Si bien es evidente que se puede adquirir conocimiento de los agregados físicos, apelando a la percepción, el *conjunto platónico naturalizado*,[88] por el contrario, cuenta con un elemento que lo distingue del agregado, y que parece que no se puede percibir. Ese elemento, como ya mencionamos, es un tipo de abstracción que lo diferencia no sólo del agregado sino de los infinitos otros conjuntos que comparten la misma materia y ubicación. La dificultad a la que se enfrenta el *platonismo* de Maddy es que, dado que el conjunto y el agregado están hechos de la misma materia, ambos conducen a la misma estimulación retiniana.[89] Como sólo se recibe un estímulo, entonces la información perceptual recibida sobre el conjunto es idéntica a la información perceptual recibida sobre el agregado.

Al problema anterior se le añade una nueva dimensión de dificultad si se considera, como advierte Alemán Pardo,[90] el *principio de individuación de la materia*.[91] Al plantear la idea de que tanto el agregado físico como *su conjunto platónico naturalizado* comparten las mismas coordenadas espaciales y temporales, la tesis maddiana va en contra del *principio de individuación* que postula que "(...) entidades no abstractas[92] diferentes no pueden ocupar la misma región espacio-temporal".[93] Por lo tanto, esta segunda propuesta tampoco logra superar el desafío de Benacerraf, pues, "(...) todavía hay una brecha epistémica inexplicable[94]

88 Por *conjunto platónico naturalizado* entiéndase aquellos: "(...) conjuntos que existen en el espacio-tiempo pero que, no obstante, son abstractos en algún sentido no tradicional que los hace distintos de sus agregados físicos correspondientes". Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 32. (Traducción y cursivas propias).

89 O en términos más generales, a la misma estimulación de nuestras facultades perceptivas-sensoriales.

90 Cf. Alemán, A., *ob. cit.*, p. 86.

91 Para ser más exactos: "Principio de individuación espacio-temporal para entidades no abstractas" en *ibidem*.

92 Entendiendo acá por "abstracto" el significado usual y no el significado *sui generis* de Maddy.

93 *Ibidem*.

94 Consideramos importante mencionar que Balaguer, partiendo de los escritos de Maddy, sugiere una posible respuesta de parte de la matemática estadounidense al argumento que él propuso. Dicha respuesta, de forma breve, consistiría en proponer una especie "reconocedor neuronal" que permita distinguir entre el

entre la información que recibimos en la percepción sensorial y los hechos relevantes sobre los conjuntos".[95]

La propuesta de Mark Balaguer: El Platonismo pleno como posible solución ante la objeción epistemológica de Benacerraf

En la sección anterior vimos que el *platonismo matemático*, para dar respuesta al desafío de Benacerraf, puede adoptar tres diferentes estrategias epistemológicas. Las dos primeras sostienen la tesis de que los seres humanos son capaces de adquirir conocimiento de los objetos matemáticos por medio del contacto, ya sea con otro mundo o con este mundo. Metafóricamente, se podría decir que mientras la primera buscaba "(...) llevar a los seres humanos al cielo platónico (...)",[96] la segunda pretendía "(...) traer a los habitantes del cielo platónico a la tierra",[97] no obstante, ninguna de las dos propuestas logra superar el problema del acceso, debido a que no prueban cómo los seres humanos pueden conocer los objetos matemáticos abstractos.

Aún faltaría examinar la tercera estrategia epistemológica, que acepta que somos capaces de adquirir conocimiento de los objetos matemáticos, sin recurrir a ningún tipo de contacto. Aunque esta estrategia puede ser adoptada de diferentes formas,[98] el ejemplo que usaremos para estudiar esta versión del *platonismo matemático* será el

agregado físico y los conjuntos de dicho agregado. En este sentido, el hecho de que veamos un conjunto o un agregado en una ocasión determinada, dependería de si se activa un conjunto de células de conjunto o de un conjunto de células de agregado. El motivo por el cual no desarrollamos esta respuesta en nuestro trabajo, se debe a que Balaguer también refuta esta respuesta, y mantiene el argumento de que nunca recibimos datos perceptivos de los conjuntos platónicos naturalizados, que vayan más allá de los datos que recibimos de los agregados. En caso de que se quiera profundizar en la respuesta que podría dar Maddy o la refutación de Balaguer a dicha respuesta Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, sección 5.2. o Cf. Balaguer, M., «Against (Maddian) Naturalized Platonism», sección 3.2.

95 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 33. (Traducción propia).

96 *Ibid*., p. 28. (Traducción propia).

97 *Ibidem*. (Traducción propia).

98 Cf. *Ibid*, sección 6.

estructuralismo[99] de Michael Resnik y Stewart Shapiro.[100] Su propuesta parte de la idea de que todas las teorías matemáticas describen *estructuras*. A su vez, las *estructuras* están formadas por *lugares*, que mantienen relaciones estructurales *entre sí*. De modo que, según esta propuesta, "(...) las teorías matemáticas describen lugares o posiciones en las *estructuras*".[101]

El término 'describir' ya es una señal acerca de la concepción que hay detrás de la tesis que plantean los autores. Sin embargo, no es un *platonismo tradicional* el que sostienen Resnik y Shapiro, debido a que lo que se describe no son objetos. Si se toma de ejemplo el número siete, desde su punto de vista, no es un objeto sino un lugar en la *estructura* de los números naturales. En este sentido, Resnik y Shapiro desarrollan una nueva versión del *platonismo* que, para enfrentar el desafío de Benacerraf, recurre a una *estrategia epistemológica sin contacto*, porque no hay objetos con los que mantener esa relación.

Sin embargo, esta versión del *platonismo* tampoco supera el *cuerno epistemológico* del dilema. El motivo es que, aunque las *estructuras* y los *lugares* en las *estructuras* pueden no ser objetos, igual siguen siendo abstractos y, por lo tanto, es natural preguntar cómo se obtiene conocimiento de ellos. Balaguer señala que, para responder a esta pregunta, "(...) Resnik y Shapiro afirman que podemos adquirir conocimiento de las estructuras matemáticas construyendo sistemas de axiomas, porque tales sistemas proporcionan *definiciones implícitas* de las estructuras".[102]

Aun así, esta respuesta no es suficiente, debido a que los *platónicos estructuralistas* no pueden afirmar que adquirimos conocimiento de estructuras matemáticas abstractas, simplemente formulando sistemas de axiomas que implícitamente definen tales *estructuras*. Ya que, al hacer esta afirmación, no queda claro cómo podemos saber cuáles de los diversos sistemas de axiomas que pueden ser formulados[103]

99 Cf. Horsten, L., *ob. cit.*, sección 4; Cf. Hale, B. &. Wright, C., «*Benacerraf's Dilemma Revisited*», sección 4.

100 Cf. Resnik, M. *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford, Oxford University Press, 1997; Cf. Shapiro, S. *Philosophy of Mathematics*, New York, Oxford University Press, 1997.

101 Horsten, L., *ob. cit.*, sección 4.2. (Traducción y cursiva propia).

102 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 45. (Traducción propia y cursivas del texto original).

103 Piénsese en la variedad de sistemas que se pueden ofrecer, para la

realmente seleccionan estructuras que existen en el ámbito matemático.[104] De modo que, en el *estructuralismo*, no queda del todo claro cómo se puede obtener el conocimiento de las *estructuras matemáticas*.

Aunque la versión del *platonismo estructuralista* no supera el desafío planteado por Benacerraf, Balaguer considera que la estrategia epistemológica que hay detrás (la propuesta de que somos capaces de adquirir conocimiento de los objetos matemáticos, aunque no tengamos contacto con ellos), es prometedora.

Es por ello por lo que decide desarrollar su propia propuesta a partir de esa tercera estrategia. Balaguer asegura que dicha propuesta, conocida como *platonismo pleno*,[105] es una versión del *platonismo matemático* que realmente funciona, en el sentido de que "(...) explica con éxito cómo criaturas espaciotemporales como nosotros podrían adquirir conocimiento de objetos matemáticos abstractos".[106] De aquí en adelante nos dedicaremos a estudiar la propuesta del autor norteamericano para evaluar si, efectivamente, logra superar la objeción epistemológica de Benacerraf.

El *platonismo pleno*, de forma simple, se compromete con la tesis de que existen todos los objetos matemáticos que sean posibles.[107] Con mayor detalle, Balaguer señala que "(...) según el platonismo pleno, *todas* las teorías puramente matemáticas consistentes describen verdaderamente alguna colección de objetos matemáticos".[108] En estas

aritmética, por ejemplo: sistemas en primer orden, segundo orden, en fin, en n-orden. Luego podemos ofrecer extensiones no clásicas como las infinitarias o las modales, o restricciones no clásicas como las intuicionistas. Y obviamente el "menú" de propuestas axiomáticas no se agota en las opciones comentadas.

104 Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 46.

105 Cuando Mark Balaguer presentó por primera vez esta perspectiva (en 1992 y 1995), la llamó 'full-blooded platonism', o 'platonismo de sangre pura'. Desde entonces, varios filósofos han comentado sobre esta perspectiva, pero parecía que a nadie le gustaba el nombre original, porque se referían a ella de distintas formas. Incluso el propio Balaguer (en 1994) insinuó que la perspectiva podría llamarse 'super-platonism'. Al final se decantó por 'plenitudinous platonism', 'platonismo plenitudinoso' o 'platonismo pleno', como un mejor nombre, porque es más descriptivo. Cf. Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 181, cita 5.

106 *Ibid*., p. 46 (traducción propia).

107 Cf. Balaguer, M., «*Platonismo pleno*», p. 137.

108 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 50. (Traducción propia, cursivas del texto original).

definiciones de la propuesta balaguereana, ya es posible rastrear los principales compromisos del *platonismo matemático*, puesto que acepta, no sólo la existencia independiente de los objetos matemáticos (como evidencia el uso del término 'describir'), sino también reconoce su carácter abstracto.

Sin embargo, lo que da paso a la *objeción epistemológica de Benacerraf*, es el criterio de abstracción. Por lo tanto, Balaguer debe mostrar cómo los platonistas plenos pueden explicar el conocimiento matemático que efectivamente tenemos, incluso sabiendo que éste refiere a un reino matemático que parece inaccesible. No obstante, y a diferencia de otras versiones del *platonismo*, Balaguer afirma que "la ventaja del platonismo pleno es que elimina el misterio de cómo los seres humanos pudimos obtener conocimiento de los objetos matemáticos abstractos".[109]

Ahora bien, para explicar la epistemológica que hay detrás del *platonismo pleno*, Balaguer recurre a la "consistencia"[110] como base fundamental de su planteamiento, como se puede notar en la siguiente cita:

> Si el platonismo pleno es correcto, entonces todas las teorías puramente matemáticas consistentes describen realmente alguna colección de objetos matemáticos abstractos. Así, para adquirir conocimiento de objetos matemáticos, todo lo que necesitamos hacer es adquirir conocimiento de que alguna teoría puramente matemática es *consistente*.[111]

Así, si pensamos o conceptualizamos acerca de un objeto matemático cualquiera, en tanto éste sea consistente, habremos formado una representación segura de algún objeto matemático, porque existirían todos los objetos matemáticos posibles (consistentes).[112] A su vez, si se sabe que alguna teoría describe verdaderamente parte del reino matemático, entonces se tiene conocimiento de ese reino, independientemente de si describe una parte única de ese reino, o si se

109 Balaguer, M., «*Platonismo pleno*», p. 138.

110 Por consistencia entiéndase: "Propiedad que puede tener un enunciado, discurso o teoría de no implicar contradicción alguna (...) La consistencia es la mínima virtud epistémica de un discurso o de una teoría. Aunque no garantiza la verdad ni la aplicabilidad, tampoco las excluye a priori, como ocurre si la teoría es inconsistente." Mosterín, J. &. Torretti, R., *ob. cit*., p. 120, Entrada: *consistencia*.

111 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 48. (Traducción propia, cursivas del texto original).

112 Cf. Balaguer, M., «*Platonismo pleno*», p. 138.

trata de alguna colección de objetos matemáticos abstractos. En pocas palabras, que toda teoría puramente matemática consistente describa con verdad alguna parte del reino matemático es el rasgo que hace al *platonismo pleno* epistemológicamente aceptable, debido a que, al ser así, "(...) se sigue que el conocimiento de la consistencia matemática es suficiente para el conocimiento del reino matemático".[113]

Por otro lado, en la respuesta acerca de cómo es posible el conocimiento matemático, queda expuesta por cuál de las tres estrategias epistemológicas se decantó Balaguer. Efectivamente, el profesor de la Universidad Estatal de California adopta una *epistemología sin contacto*, pues, el conocimiento de la consistencia de una teoría matemática no requiere ningún tipo de acceso o contacto con los objetos de los que trata la teoría.

Al desarrollar su propia versión de la tercera estrategia epistemológica, que plantea que es posible que los seres humanos conozcan los objetos matemáticos abstractos sin tener conexión con ellos, porque los primeros existen enteramente dentro del espacio-tiempo, mientras que los segundos no existen en el espacio-tiempo, Balaguer evita las dificultades que conlleva aceptar el criterio de abstracción.

Ciertamente, el asumir una epistemología de este estilo, es lo que hace que el *platonismo pleno* difiera, no sólo del *platonismo matemático tradicional*, sino incluso de las nuevas versiones que asumieron estrategias parecidas (como el *estructuralismo*), porque es la que le permite a Balaguer lograr el objetivo que las otras no pudieron alcanzar, puesto que el conocimiento de la consistencia matemática, es suficiente para el conocimiento del reino matemático. De modo que: "(...) la objeción benacerrafiana ha sido respondida: podemos adquirir conocimiento de objetos matemáticos abstractos sin la ayuda de ningún tipo de contacto con dichos objetos".[114]

A modo de conclusión

Tal como fue presentado, Mark Balaguer sostiene que se debe aceptar la suposición del *platonismo matemático*, según la cual, los objetos matemáticos son objetos abstractos. Sin embargo, esta postura

113 *Ibidem.*

114 Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, p. 49.

con respecto a la realidad matemática no recoge una única perspectiva. Efectivamente, así como fue desarrollado líneas atrás, el autor señala que el punto de vista que los platonistas deben adoptar no es la "concepción estándar" que se ha venido aceptando, pues la misma es refutada por el argumento problemático de Benacerraf.

De igual forma, Balaguer es crítico, y así lo expone en sus textos, de otras perspectivas platonistas contemporáneas, como la *concepción heredada* de Gödel, el *platonismo naturalizado* de Maddy o el *estructuralismo* de Resnik y Shapiro, pues tampoco logran explicar el hecho de que en efecto tenemos conocimiento matemático.

Dado que nuestro autor no queda complacido por el estado del arte, opta por proponer una explicación original del conocimiento matemático que salga airoso del *cuerno epistemológico* del *Dilema de Benacerraf*, esto es, su platonismo pleno según el cual la condición para tener conocimiento de los objetos matemáticos es el conceptualizarlos (o incluso "inventarlos")[115] de manera consistente. La fuerza de su propuesta filosófica se expresa de manera poética cuando nos dice: "No hacemos nada especial[116] que implique algún tipo de conexión entre nuestras cabezas y los modelos estándar.[117] Sólo tenemos nuestras intuiciones, nociones y concepciones, y poco a poco construimos teorías a partir de ellas".[118] De esta forma, si esas teorías construidas resultan consistentes, entonces (aceptado en *platonismo pleno*), tenemos conocimiento garantizado de las mismas.

Quisiéramos a modo de conclusión plantear un tópico que puede conducir a una reflexión continua y sistemática sobre la filosofía en general, y el *platonismo pleno* en particular.

Uno de los aspectos más interesantes de la propuesta de Mark Balaguer, más allá de su objetivo, es el hecho de que se presenta como un verdadero ejercicio de análisis y argumentación filosófica. En efecto, el autor no construye su concepción de la "nada", no niega el panorama ni le da la espalda a los desafíos que la tradición, y la revolución

115 Cf. Balaguer, M., «*Platonismo pleno*», p. 138.

116 Esto es, diferente a la práctica matemática.

117 Balaguer es consciente que la gran debilidad del *platonismo matemático tradicional*, y las *epistemologías de contacto*, es plantear y explicar esa pretendida "conexión".

118 Cf. *Ibid.*, p. 65.

filosófica, dejaron sin resolver. Por el contrario, su concepción se nutre de conocer la historia de la filosofía y es erigida tomando en cuenta tanto las exigencias impuestas por el *Dilema de Benacerraf*, así como los fallos cometidos por las demás *epistemologías de contacto*.

La estrategia de Balaguer se puede pensar, metafóricamente, como un tamizado que va desde la malla más gruesa hasta la malla más fina: En un primer momento el autor rescata el problema a considerar, luego se aprecian todas las alternativas de solución, seguidamente se evalúan los errores que cometen las mismas, para luego filtrar su propia respuesta al problema, y finalmente someterla a las críticas, refutaciones y contraargumentos que pudiesen existir y así poder apreciar si lo que se obtiene tras la última malla es realmente valioso.

Incluso si el *platonismo pleno* no fuese la "pepita de oro" que pretende ser, es digno de admiración y de imitar toda la reflexión filosófica que se encuentra tras dicha concepción, pues su pensamiento presupone que la filosofía (y en el caso que nos compete, la filosofía de la matemática), debe ser un diálogo entre la tradición y lo contemporáneo, entre las exigencias científicas y nuestros compromisos onto-epistémicos, entre el ortodoxo y lo heterodoxo.

Ricardo Da Silva
Universidad Central de Venezuela
ricardo6337@gmail.com

Solani Rivas
Unviersidad Central de Venzuela
solanirivas@gmail.com