Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 2002, Vol. VIII, No. 2 (jul-dic), pp. 33-43
recibido 17-05-02 / arbitrado 29-07-02

NO LINEALIDAD Y DINÁMICA ECONÓMICA: ALGUNOS COMENTARIOS

Jesús Gerardo Navarro
ESCUELA DE ECONOMÍA-UCV

Resumen:

Este ensayo pone de relieve las principales diferencias entre la dinámica lineal y la no lineal. Subraya, además, la necesidad de abordar ciertos fenómenos de dinámica económica, tales como ciclos persistentes, por medio de análisis no lineal. Un tipo de funciones no lineales usadas en modelación de sistemas dinámicos es la aproximación lineal a trozos. El modelo de Goodwin de 1951, el cual presenta una interacción entre renta y capital, es una clara referencia a este tipo de funciones. Goodwin obtiene de esta manera un ciclo auto-sostenido endógenamente, éste no desaparece ni explota. El ciclo límite que se genera sólo es producto de la estructura funcional del modelo, no depende de las condiciones iniciales y no son necesarios factores exógenos para poner el ciclo en movimiento.

Palabras claves: Sistemas dinámicos, no linealidad, dinámica económica, dinámica no lineal, ciclos límites.

Los orígenes de la teoría de sistemas dinámicos se encuentran en los trabajos de Galileo y Kepler sobre el movimiento de la tierra y del sistema planetario. Es Newton, sin embargo, quien inicia la teoría matemática de sistemas dinámicos cuando logra la unificación de la teoría del movimiento planetario. Poincaré, más tarde, revive los conceptos geométricos de Newton y enfatiza tanto lo cualitativo como los aspectos globales de sistemas dinámicos en espacios de fases. Poincaré inicia de esta manera, el estudio cualitativo, como opuesto al estudio cuantitativo, de las ecuaciones diferenciales; llegando a establecer los métodos y resultados de lo que ha llegado a ser la teoría de sistemas dinámicos: estabilidad, periodicidad y recurrencia. La meta de esta teoría de sistemas dinámicos es tener respuestas para lo que ocurre en el largo plazo.

El carácter de la sociedad moderna y la complejidad del mundo real, la cual se ha incrementado dramáticamente en décadas recientes, dificulta explicar acertadamente el comportamiento de la vida económica. Las diversas escuelas económicas han desarrollado diferentes perspectivas hacia la no linealidad en modelos económicos. Los modelos lineales han sido empleados especialmente por los escritores Neoclásicos y los Nuevos Clásicos quienes, después del intervalo (Neo) Keynesiano del desequilibrio se han concentrado de nuevo en la investigación del equilibrio.

Muchas de las teorías dinámicas formuladas durante los años de la Gran Teoría[1], particularmente aquellas de Hayek, Harrod, Kaldor, la Escuela de Estocolmo y Schumpeter fueron ejemplos de que las oscilaciones auto-sostenidas no pueden ser discutidas con análisis lineal.

En economía, en décadas recientes, el estudio de la dinámica económica ha sido dominado principalmente por la teoría de la estabilidad lineal, concentrándose casi exclusivamente en aspectos de estática comparativa, siendo el punto de equilibrio el único tipo de equilibrio interesante. Este hecho se debe, probablemente, a que los modelos no lineales no pueden, en general, ser reducidos a la aplicación rutinaria de ciertas técnicas matemáticas. No obstante, últimamente, se ha incrementado de una manera considerable el estudio de sistemas dinámicos no lineales, en los cuales el equilibrio estático es considerado como un resultado no deseado para muchos sistemas económicos.

La dinámica económica no lineal puede ser considerada como una colección de modelos no lineales, que requieren el uso de un conjunto de herramientas matemáticas novedosas y relativamente nuevas. Las principales herramientas de este análisis dinámico es la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en diferencia.

Las ecuaciones diferenciales y en diferencias son usadas extensivamente para modelar la forma como los sistemas económicos cambian en el tiempo y describir la interacción dinámica entre variables económicas tales como precios, salarios, capital, etc. Además, con ellas se pueden analizar la formulación, evolución y tendencia de sistemas dinámicos, así como también hacer un examen cualitativo de la estabilidad de estos sistemas dinámicos cuando se encuentran bajo estímulos externos. Las ecuaciones diferenciales pueden ser utilizadas para modelar procesos los cuales cambian continuamente en el tiempo; mientras que las ecuaciones en diferencias son más apropiadas, cuando el ajuste se presenta como un período discreto mediante procesos periódicos. Hay gran similitud en las propiedades de las ecuaciones diferenciales y en diferencias, pero las diferencias entre ellas son importantes y pueden dar origen a diferentes clases de comportamiento dinámicos. Por ejemplo, las trayectorias dinámicas derivadas de las ecuaciones diferenciales son cualitativamente similares a las trayectorias dinámicas de las ecuaciones en diferencias, excepto que en el caso de las primeras, son continuas y no muestran saltos discretos que son típicos de trayectorias dinámicas de ecuaciones en diferencias.

---

[1]. Período (comprendido entre la Primera y la Segunda Guerra Mundial) en que se producen algunas de las más ricas teorías en la historia del pensamiento económico.

En 1939, Samuelson desarrolló un modelo lineal basado en la interacción entre el acelerador de la inversión y el multiplicador del consumo. El modelo fue formulado mediante una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes. Las soluciones dependen de la relación entre dos parámetros: el acelerador y el multiplicador. Pero, un ciclo endógeno es sólo posible mediante valores específicos de los parámetros, los cuales a su vez determinan las raíces de la ecuación característica de la ecuación en diferencias. Un ciclo persistente (continuo) puede ser obtenido sólo en el caso particular donde las raíces de la ecuación característica son complejas y el acelerador es el recíproco de la propensión al consumo.

En 1950, Hicks introduce por primera vez, una cota superior e inferior para limitar el movimiento del acelerador lineal y producir no linealidad dentro de su modelo, el cual es una nueva versión del modelo de Samuelson. La idea de una cota superior y una cota inferior, llamada la técnica del "ceiling and floor", es usada para producir no linealidad dentro del modelo, pero de tal manera que el modelo permanezca lineal localmente, y por lo tanto relativamente fácil de analizar. Tales modelos se dicen lineales a trozos. Es de hacer notar que la técnica del "ceiling and floor" fue entendida primeramente como una restricción física, para evitar que el sistema explotara. Con esta nueva técnica se mejoró notablemente el tradicional modelo acelerador-multiplicador y ya no era necesario elegir valores exactos de los parámetros, como en el caso del modelo de Samuelson, para generar ciclos.

En 1951, bajo la influencia del trabajo de Ph. Le Corbeiller sobre la teoría de oscilaciones, Goodwin, hizo una gran contribución teórica a la economía, introduciendo no linealidad en su famoso artículo intitulado "The Nonlinear Accelerator and Persistence of Business Cycle", en el cual muestra que es posible producir ciclos límites mediante métodos de análisis no lineal.

Un sistema no lineal es un sistema en el cual las ecuaciones de comportamiento en el tiempo son no lineales, es decir, las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema aparecen en la ecuación en una forma no lineal. La idea fundamental es la siguiente: si un parámetro que describe un sistema lineal es cambiado, entonces la frecuencia y amplitud de las oscilaciones resultantes cambiarán, pero la esencia cualitativa del comportamiento permanece igual. Para sistemas no lineales un pequeño cambio en un parámetro puede conducir a rápidos y dramáticos cambios, tanto en el comportamiento cualitativo como en el cuantitativo del sistema. Para un valor, el comportamiento puede ser periódico, para otro valor, sólo ligeramente diferente del primero, el comportamiento puede ser completamente aperiódico.

El descubrimiento de que ciertos fenómenos de dinámica económica, en particular ciclos persistentes (continuos), no pueden ser enfrentados efectivamente por medio de modelos lineales ha llevado a un creciente número de investigadores a hacer uso de métodos de análisis no lineal. Para esto es necesario un profundo entendimiento del comportamiento complejo de sistemas dinámicos, así como también de nuevas y poderosas técnicas matemáticas. Desarrollos fundamentales en esta dirección fueron hechos durante y después de la Segunda Guerra Mundial. Equilibrio estable e inestabilidad, incluso ciclos límites, son revelados ahora, más que como una configuración, en un más rico y complejo universo teórico. Tan pronto como la linealidad ha sido dejada, incluso un modelo simple puede mostrar un comportamiento muy complicado (por ejemplo, ver May, 1976).

La necesidad de una teoría no lineal en economía, principalmente en "Business Cycle" (ciclos auto-sostenidos endógenamente), se debe a que los sistemas dinámicos lineales originan trayectorias las cuales tienden al equilibrio en forma monótona y en oscilaciones amortiguadas, con lo cual el ciclo desaparece.

Por otra parte, los modelos lineales no pueden generar soluciones cíclicas no amortiguadas. Estos modelos sólo pueden producir cuatro tipos de comportamiento: crecimiento exponencial, decrecimiento exponencial, oscilación explosiva y oscilación amortiguada. Además, los modelos lineales no son capaces de originar comportamiento asimétrico.

Por su parte, los modelos no lineales si son capaces de generar soluciones cíclicas no amortiguadas cuyo ciclo depende de los parámetros del sistema. Las expansiones (boom) y las contracciones (depresiones) con diferentes velocidades pueden ser producidas mediante modelos no lineales, lo cual dice que los modelos no lineales pueden originar comportamientos asimétricos.

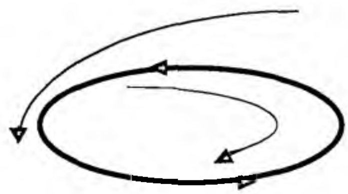
Las funciones no lineales pueden presentarse en un modelo dinámico ya sea porque ellas son intrínsecas a la naturaleza del sistema o debido a que ellas han sido deliberadamente introducidas, principalmente como un detalle técnico, para el diseño de un propósito específico. Otro punto, el cual es importante señalar, es que las propiedades de estabilidad de sistemas no lineales son esencialmente más complicadas que en el caso lineal, y en particular, hay que distinguir entre aspectos globales y locales. Para un sistema lineal no hay tal distinción, pero cuando la no linealidad está presente, algunas nuevas características pueden aparecer. Por ejemplo, la estabilidad de un sistema no lineal en la vecindad de un punto de equilibrio no necesariamente implica alguna propiedad global. Es posible que allí algunos puntos de equilibrio sean estables y otros no, en cuyo caso será sólo una región límite de convergencia (dominio de atracción) alrededor de un punto de equilibrio el cual es asintóticamente estable.

Además, pueden estar otras formas de comportamiento, tales como oscilaciones persistentes (continuas) conocidas como ciclos límites.

Un ciclo límite es una solución periódica representada en el plano de fases mediante una trayectoria cerrada aislada, lo cual significa que otras trayectorias en la vecindad de un ciclo límite no son ciclos límites, es decir, un ciclo límite es un tipo especial de trayectorias formada por una curva cerrada. El ciclo límite representa una oscilación inherente al sistema, esta oscilación no es impuesta desde fuera. Ciclos límites pueden ocurrir en sistemas de cualquier orden, y constituyen la forma típica de comportamiento oscilatorio que se origina cuando un punto de equilibrio de un sistema no lineal llega a ser inestable.

Los Ciclos límites pueden ser estables o inestables, pero sólo los ciclos límites estables pueden servir como equilibrio. Si un modelo tiene un ciclo límite estable, el movimiento de equilibrio de la economía es cíclico. La trayectoria que la economía recorre esta endógenamente determinada por el modelo y es independiente de las condiciones iniciales. El siguiente diagrama representa un ciclo límite:

Figura No. 1. Diagrama de ciclo límite



Por otra parte, es de hacer notar que las soluciones analíticas de sistemas no lineales no están usualmente disponibles, particularmente para las ecuaciones que se manejan en el análisis económico. Afortunadamente, la información cualitativa es a menudo suficiente para establecer resultados sobre la estabilidad de las trayectorias.

Un tipo de funciones no lineales usado algunas veces en modelación de sistemas es la aproximación lineal a trozos. Tales funciones no son continuas en todos sus puntos puesto que ellas contienen discontinuidades. No obstante, ellas tienen la ventaja que la ecuación dinámica llega a ser lineal (y por lo tanto soluble) en cualquier región particular, y las soluciones para diferentes regiones pueden entonces ser unidas en las fronteras, es decir, el más importante hecho de este tipo de modelo es que es capaz de dividir el espacio-estado en un número de regiones distintas, en el que en cada una de ellas, el comportamiento dinámico del sistema puede ser analizado mediante técnicas lineales, con la solución para diferentes regiones encontrándose en las fronteras. Por consiguiente, las propiedades dinámicas como periodicidad y estabilidad pueden ser investigadas estudiando el comportamiento de esas sucesiones, las cuales son generadas mediante la aplicación desde un punto de cruce al siguiente, inducido mediante la dinámica lineal apropiada para la región intermedia.

Como un ejemplo de esta técnica, puede mencionarse el modelo de Goodwin de 1951, en su caso más simple, el cual es un modelo no lineal del tipo acelerador- multiplicador para ciclos auto-sostenidos endógenamente en el cual el consumo (o ahorro) y la inversión inducida son las principales variables. Es de hacer notar que el modelo presenta un interesante ejemplo de la interacción dinámica entre renta y capital. Goodwin introduce no linealidad dentro del modelo acelerador-multiplicador mediante una forma indirecta. Él usó un modelo lineal y con la ayuda de la técnica del "ceiling and floor" introduce no linealidad dentro del sistema. El resultado es la obtención de un ciclo auto-sostenido endógenamente restringido donde renta y capital fluctúan con cota inferior y superior, es decir, existe un ciclo auto-sostenido, el cual ni desaparece (apagarse gradualmente) ni explota. Las oscilaciones persistentes (continuas) (es decir, ciclos límites) son sólo producto de la estructura funcional del modelo. La forma de los ciclos no depende de las condiciones iniciales. No son necesarios factores exógenos e inexplicados para poner el ciclo en movimiento.

En este modelo Goodwin asume una función lineal de consumo:

$$c = \alpha y + \beta \tag{1}$$

donde α, β son constantes e y es la renta. Además, el stock deseado del capital ξ es proporcional al nivel de renta y:

$$\xi = \lambda y \tag{2}$$

donde λ es constante. La renta y es igual a la suma del consumo c y de la inversión neta $\dot{k}$:

$$y = c + \dot{k} \tag{3}$$

donde $\dot{k}$ es la tasa de cambio del stock actual de capital k. Por lo tanto la inversión neta bruta I es dada mediante

$$I = \dot{k} + \delta k \tag{4}$$

donde δk es la depreciación.

Por otra parte, Goodwin obtiene una función de inversión $\dot{k}$ mediante el siguiente razonamiento:

(a) Si $k > \xi$, entonces $\dot{k} = -\delta k$, esto es, si el stock actual de capital k es mayor que el stock deseado de capital ξ, la inversión bruta I será cero, $I = 0$.

(b) Si $k = \xi$, entonces $\dot{k} = 0$, esto es, la inversión neta $\dot{k}$ es cero cuando el stock actual de capital k y el stock deseado de capital ξ son iguales.

(c) si $k < \xi$, entonces $\dot{k} = I^* - \delta k$, esto es, si el stock actual de capital k es menor que el stock deseado de capital ξ, la inversión bruta I crecerá. Pero I se incrementa hasta cierta cuota I^* debido a la capacidad de inversión en la industria de bienes. Por consiguiente, $I^* = max\, I$, lo cual implica que la inversión bruta es igual a I^*.

Las relaciones (a)-(c) producen una función neta de inversión $\dot{k}$, lineal a trozos, la cual puede ser escrita como

$$\dot{k} = \begin{cases} -\delta k & si \;\; k > \xi \\ 0 & si \;\; k = \xi \\ I^* - \delta k & si \;\; k < \xi \end{cases} \tag{5}$$

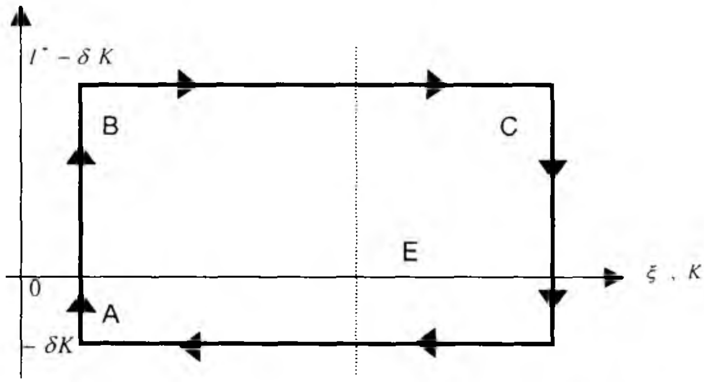
Mediante (1)-(3), el stock deseado de capital ξ, el cual es proporcional a la renta y, viene dado por

$$\xi = \frac{\lambda}{1-\alpha}(\beta + \dot{k}) \tag{6}$$

y por (5), obtenemos que

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-\alpha}(\beta - \delta k) & si \;\; k > \xi \\ \dfrac{\lambda}{1-\alpha}\beta & si \; k = \xi \\ \dfrac{\lambda}{1-\alpha}(\beta + I^* - \delta k) & si \;\; k < \xi \end{cases} \tag{7}$$

El siguiente diagrama muestra el movimiento cíclico ABCD. Las flechas señalan la dirección del movimiento.



El punto E es un punto de equilibrio, $\dot{k} = 0$ cuando $k = \xi$. Si no ocurre alguna perturbación, el sistema permanecerá en el punto de equilibrio E. Suponga que aplicamos al sistema una pequeña perturbación, lo cual implica que $k \neq \xi$ y en este caso $k < \xi$ y $\dot{k} = I^* - \delta k$. En consecuencia, el stock deseado de capital ξ cambia discontinuamente a

$$\xi = \frac{\lambda}{1-\alpha}(\beta + I^* - \delta k)$$

La inversión neta $\dot{k}$ se mantiene en el nivel $I^* - \delta k$ si el stock deseado de capital ξ, continua siendo mayor que el stock actual de capital k, $k > \xi$, lo cual es representado mediante el punto C. Después de haber alcanzado el punto C con $k = \xi$, la inversión neta $\dot{k}$ caerá a cero y el stock deseado de capital ξ cambia a

$$\xi = \frac{\lambda}{1-\alpha}\beta$$

trayendo como consecuencia que $k > \xi$, lo cual implica que el stock deseado de capital ξ cambie a

$$\xi = \frac{\lambda}{1-\alpha}(\beta - \delta k)$$

y la inversión neta es negativa, $\dot{k} = -\delta k$. Por lo tanto, la inversión neta $\dot{k}$ cambia discontinuamente del punto C al punto D.

Mientras que el stock actual de capital k sea mayor que el representado por el punto A, la inversión neta se mantiene al nivel $-\delta k$. En consecuencia, obtenemos una inversión neta a lo largo del segmento DA.

En A, mediante razonamiento similar, el stock deseado de capital ξ cambia a

$$\xi = \frac{\lambda}{1-\alpha}(\beta + I^* - \delta k)$$

En este caso, $\dot{k} = I^* - \delta k$, y obtenemos el punto B. Similarmente el punto C y así continuamos indefinidamente.

Por lo tanto este modelo genera ciclos ABCD, sin importar el punto inicial. El punto de equilibrio E es inestable pues no es posible retornar a este después que el sistema ha sido perturbado (para más detalles, ver Goodwin 1951).

El modelo de Goodwin de 1951, es un modelo donde la inestabilidad del equilibrio da origen a un movimiento cíclico permanente. Es importante destacar que en esta clase de modelos, la estabilidad del equilibrio es una condición no deseada. Si el modelo origina movimientos que tienden hacia un punto de equilibrio, significa que el ciclo desaparece, a menos que le mantengamos vivo por medio de shocks exógenos, por consiguiente, si deseamos un ciclo autosostenido, la convergencia debe ser excluida. Este hecho ilustra una relación esencial de la no linealidad la cual no es válida en sistemas lineales. En los sistemas lineales, la inestabilidad del equilibrio implica que la desviación inicial tiende hacerse cada vez más grande.

Es de hacer notar que aparte de los casos nombrados, con respecto a la no linealidad en economía, es importante resaltar que, inspirados por los trabajos modernos sobre sistemas dinámicos no lineales, un número considerable de economistas han comenzado a explicar fenómenos económicos complicados introduciendo inestabilidad y no linealidad dentro del análisis económico dinámico. De allí, el interés en los equilibrios asintóticamente estables, llamados sumideros, y los ciclos asintóticamente estables, llamados ciclos límites. Ahora, sólo ecuaciones diferenciales no lineales tienen interés en la dinámica económica.

Finalmente, debemos señalar que durante el desarrollo de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos, se han realizados grandes avances en fenómenos de bifurcación[2] y en comportamiento caótico. La teoría de bifurcación en la dinámica económica es uno de los tópicos de mayor investigación. La bifurcación estudia tanto la existencia de soluciones de equilibrio como su estabilidad. Se interesa por los cambios que ocurren en la estructura de un sistema dinámico cuando varían los parámetros en que descansa el sistema. Un cambio en las propiedades cualitativas puede significar un cambio en la estabilidad del sistema original, y así el sistema deberá asumir un estado diferente al inicial. Estos cambios pueden ser leves en algunos casos, abruptos en algunos otros, o aún peor, pueden ocasionar pérdida de estabilidad estructural.

En cuanto, al fenómeno caótico en sistemas dinámicos no lineales, se puede señalar que se trata de un comportamiento muy complejo del sistema, el cual es muy sensible a las condiciones iniciales, de esta manera las trayectorias que están muy próximas en cierto momento, se separan y se mezclan con otras de manera errática y violenta, es decir, la evolución del sistema es turbulenta y caótica. Sistemas económicos tales como el mercado laboral, el mercado monetario, sistemas urbanos, sistemas de comunicación y transporte están caracterizados por caos.

Todos esos fenómenos complicados observados muy bien, no han sido explicados apropiadamente mediante las teorías económicas existentes. La dinámica no lineal se muestra necesaria para un mejor entendimiento de los mismos. Los fenómenos caóticos en sistemas dinámicos no lineales inestables, sólo pueden ser entendidos con la ayuda de las matemáticas, puesto que ellas están más allá de nuestro sentido intuitivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gandolfo, G. (1976), *Métodos y Modelos Matemáticos de la Dinámica Económica*, Editorial Tecnos, Madrid.

Goodwin, R. (1951), *The Nonlinear Accelerator and Persistence of Business Cycles,* Econométrica, 19.

Goodwin, R. (1983), *Essay in Economy Dinamics*, MacMillan, London.

Goodwin, R. (1990), *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendon Press, Oxford.

Hicks, J. R. (1950), *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*. Oxford University

[2] La teoría original de bifurcación fue descrita originalmente por Poincaré (1892-1899).

Press, London.

Hirsch, M. W. y Smale, S. (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York.

Le Corbeiller, Ph. (1933), *The Non-Linear Theory of the Maintenance of Oscillations,* Journal of the Institution of Electrical Engineers, London.

May, R. A. (1976), *Simple Mathematical Model with a very Complicated Dynamics*, Nature, Vol. 261.

Navarro, J. G. (1995), "Limit Cycles in Goodwin's Model. Pure Mathematical and Applications", *Ser C,* Vol. 3.

Navarro, J. G. (1996), *Ciclos Límites y Modelo Perturbado de Goodwin,* Trabajo de Ascenso Académico, Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Poincaré, H. (1892-1899), *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (3 volumenes), Gauthires-Villars, Paris.

Samuelson, P. A. (1939), *Interactions Between the Multiplier Analysis and Principle of Acceleration*, Review of Economic Statistics 21.

Strubel, R. (1961), *Nonlinear Differential Equations*, McGraw-Hill, New York.

Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, Berlin.