



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Principios Generalizados de Simetría Espejo Homológica

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Lorenzo Castagno** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dr. Mauricio Angel**

Caracas, Venezuela

Mes y Año

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Principio Generalizado de Simetría Espejo Homológica**”, presentado por el **Br. Lorenzo Castagno**, titular de la Cédula de Identidad **18249100**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

---

**Dr. Mauricio Angel**  
**Tutor**

---

**Dr. Tomás Guardia**  
**Jurado**

---

**Dr. Edmundo Castillo**  
**Jurado**

## Dedicatoria

Colocar aquí la dedicatoria (optativo).

## Agradecimiento

A mi familia: Salvatore Castagno, Genoveva Di Serafino quienes me brindaron todo tipo de apoyo, Patrizia Castagno la cual estudia una carrera afín a la mía en la misma facultad, le deseo el mismo éxito y la misma suerte que he tenido a en mis estudios de la licenciatura, humildemente le ayudaré a superar obstáculos con los que me he topado en estos años.

A mis amigos, cada uno con personalidades, gustos y temperamentos disjuntos, a Alfonso Garmendia, uno de mis compañeros de clases desde el primer año de carrera, a él, prueba de que hay varias formas de ver las cosas, gracias por sus consejos, desiciones y a darme a entender el significado de tolerancia. A Carlos González, cuya sencillez y aprecio hacia todos sus amigos me dieron a enterder que la amistad es una de las cosas más importantes en el mundo. A Frank Prieto, siempre dispuesto a ayudar, a cualquier persona, en todo momento, bajo cualquier condición y circunstancia. Ysamar Meza, una de las primeras personas a quien conocí, siempre muy unida a nuestro grupo, carismática y amable al igual que Freysimar Solano, personas incomparables. Javier Machado y María Bas, amigos incondicionales y de confianza, siempre dispuestos a aportame y acompañarme en cualquier situación. Alejandra Aguilera, Edwin Pin, Jenifer Peña, Lysis González quienes fueron la prueba de dedicación y de aquella frase, de que la practica hace al maestro.

A mis profesores MsC Jean Piero Suárez Solano, que a parte de ser profesor, es un gran amigo. Al Dr Juan Manuel Guevara Jordan, cuyas clases eran únicas, a la Dra Cristina Balderrama cuya genialidad es única, al Dr Tomás Guardia por aclararme todas las dudas, todas con la misma pulcritud, al los licenciados Jonathan Otero, Alejandro Ollarves, Adriana Padrón y Jocer Franquiz siempre muy serviciales, al Dr Manuel Maia, Dr. Rafael Díaz, por tratar de enseñarnos a pensar de forma abstracta, Dr Edmundo Castillo, a la Lic Annkarys Gomez, y por supuesto al Dr. Mauricio Angel, una persona brillante y dedicada, en

lo que compartimos me dí cuenta que no sólo no sabía de matemáticas, sino de música, arte, geografía, etc. Nadie me hubiese tenido tanta paciencia como él.

A Juan Otaola Paván, a quien le debo las veces que me enteré si llegaba tarde a clases de forma privilegiada, a Jean Arp, sin él las nubes aún estarían desorientadas y el cielo en la UCV no sería el mismo, a Victor Vasarely, fuente de entretenimiento a la hora de esperar el transporte de regreso a mi casa, y a Pascual Navarro, cuya plaza fue mi albergue en horas de estudio y muy pronto anhelo con agradecerle a Alexander Calder. A la UCV, a quien me entrenó, al empezando a estudiar en ésta universidad me sentía con cierto peso tanto por la responsabilidad y las expectativas al ser llamado ucevista, no es ya sea distinto sino que las expectativas se fueron transformando en responsabilidad al pasar los años, no es fácil pasar por las mismas rutas de personajes deslumbrantes del país e incluso mentes que han dejado su huella en la humanidad, es llevar el mismo nombre de aquella institución de: Marcel Roche, Augusto Pi Sunyer, Maritza Montero ó Pedro Ríos Reyna.

A ti Alba Gabriela, conocerte es uno de mis regalos más grandes en la vida.

Quisiera terminar con una frase de un profesor muy querido en ésta escuela:

”Si la humanidad progresó en temas como los derechos humanos fue porque hubo gente con ideas nobles que despertaron la conciencia de los que estaban a su alrededor, porque alguien alguna vez ayudó, le dió la mano desinteresadamente a otros”

Mischa Cotlar

A ustedes, gracias.

## Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares algebraicos	2
1. Módulos y álgebras	2
2. Álgebra homológica	4
3. Teoría de categoría	6
4. Categoría derivada	10
5. Funtores derivados	11
Capítulo 2. Fundamentos de Geometría Diferencial	13
1. Variedades diferenciables	13
2. Fibrado vectorial	15
3. Variedad Compleja	16
4. Variedad Simpléctica	23
5. Haces	23
Capítulo 3. Simetría espejo homológica	26
1. Variedades Calabi-Yau	26
2. Teoría de Deformación	27
3. Álgebras y módulos $\mathcal{A}_\infty$	27
4. Deformaciones de álgebras $A_\infty$	29
5. Simetría Espejo Homológica	32
Capítulo 4. Principios HMS generalizados	35
1. Construcción de Fukaya	35
2. Construcción de Cao y Zhou	37
3. Equivalencia Morita	44
4. El caso de operads	45

Bibliografía

50

## Introducción

La simetría espejo, es una conjetura que proviene de la física, específicamente de la identificación de modelos relacionados con la teoría de cuerdas. Esta conjetura no era del todo bien entendida, pues se suponía que dos tipos de teorías (de tipo A y de tipo B) daban origen a invariantes equivalentes, pero en principio la naturaleza de estas teorías era distinta, luego, no estaba clara es qué sentido se consideraba la equivalencia.

En 1994, Maxim Kontsevich propuso un acercamiento matemático a la conjetura de la simetría espejo, él propuso que la simetría espejo consistía en una equivalencia de categorías trianguladas construídas desde diferentes aspectos de la geometría de variedades Calabi-Yau donde se definen las teorías de tipo A y B, éstas se denominan variedades espejos. La métrica de Calabi-Yau está determinada por una forma simpléctica y una estructura compleja, cada pieza es una rama distinta de las matemáticas. En teorías de tipo A, sólo nos preocupamos de la estructura compleja y nos trasladaremos a la geometría algebraica, y en las teorías de tipo B, sólo discutimos geometría simpléctica. Luego, que ambas teorías sean equivalentes quiere decir, que las teorías de deformación de ambas estructuras, las cuales están controladas por categorías trianguladas, son equivalentes.

Nuestro objetivo es seguir esta construcción, a fin de establecer un principio análogo para el caso de un objeto que posea dos estructuras.

## CAPÍTULO 1

### Preliminares algebraicos

En este capítulo daremos los conceptos básicos de las estructuras algebraicas que necesitaremos a lo largo del trabajo, se empieza por conceptos esenciales de la teoría como son los de álgebra y módulo, dando algunos ejemplos interesantes, luego hacemos una revisión de la teoría de homología y finalizamos con los conceptos y resultados básicos de la teoría de categoría y categoría derivada, las referencias que usaremos son [?].

#### 1. Módulos y álgebras

Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad.

DEFINICIÓN 1.1. Un  $R$ -módulo a izquierda,(a derecha) es un grupo abeliano  $M$  junto con una acción a izquierda,(respectivamente a derecha) de  $R$

$$R \times M \rightarrow M, (\text{resp}, M \times R \rightarrow M),$$

tal que:

- $r(a + b) = ra + rb, (\text{resp } (a + b)r = ar + br)$
- $(r + s)a = ra + sa, a, b \in M, (\text{resp } a(r + s) = ar + as, a, b \in M)$
- $r(sa) = (rs)a, r, s \in R, (\text{resp } (sa)r = a(rs), r, s \in R)$

EJEMPLOS 1.2.      • Si  $k$  es un cuerpo, un  $k$ -espacio vectorial es un  $k$ -módulo.

- Las matrices cuadradas  $(n \times n)$  con entradas reales forman un anillo  $R$ , y el espacio euclídeano  $R^n$  es un módulo a izquierda sobre este anillo, si definimos la operación de módulo mediante la multiplicación usual de matrices.
- Todo grupo abeliano es un  $z$ -módulo

PROPOSICIÓN 1.3. Si  $R$  y  $S$  son anillos  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de anillos y  $M$  un  $S$ -módulo, entonces  $M$  tiene estructura de  $R$ -módulo.

DEFINICIÓN 1.4. Sean  $M$  y  $N$   $R$ -módulos. Una aplicación  $\eta : M \rightarrow N$  es llamada una aplicación  $R$ -lineal si:

- $\eta(m + m') = \eta(m) + \eta(m')$
- $\eta(am) = a\eta(m)$

Para todo  $a \in R$  y  $m, m' \in M$

Denotamos por  $Hom_R(M, N)$  el conjunto de todas las aplicaciones  $R$ -lineales de  $M$  en  $N$ , y el caso particular  $M = N$  lo denotaremos por  $End(M)$ .

**PROPOSICIÓN 1.5.** *Si  $M$  es un  $R$ -módulo entonces  $End(M)$  tiene estructura de  $R$ -módulo,  $End(M)$  es anillo y  $M$  es un  $End(M)$ -módulo.*

### Definición de álgebra, álgebra graduada etc.

**DEFINICIÓN 1.6.** Una álgebra de Lie  $A$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $F$  junto con una operación binaria  $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$  llamada corchete de Lie, que satisface las propiedades siguientes:

- Es bilineal, es decir,  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$  y  $[z, ax + by] = a[z, x] + [z, y]$  para todo  $a, b$  en  $F$  y todo  $x, y, z$  en  $A$ .
- Satisface la identidad de Jacobi, es decir,  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$  para todo  $x, y, z, \in A$

Un homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  entre álgebras de Lie  $A$  y  $B$  sobre un mismo cuerpo, es una función lineal, que satisface:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$$

**EJEMPLOS 1.7.** (1) Los campos vectoriales sobre una variedad diferenciable forman un álgebra de Lie de dimensión infinita, donde el corchete de Lie se define de la siguiente manera:

$$[X, Y]f = (XY - YX)f$$

(2) Sea  $(A, *)$  una álgebra asociativa, se puede dar una álgebra de Lie, donde el corchete de define como:

$$[X, Y] = (X * Y - Y * X), \text{ esta operación conoce como el conmutador.}$$

DEFINICIÓN 1.8. Una álgebra diferencial graduada  $A$  es una álgebra graduada junto con una aplicación  $d : A \rightarrow A$  la cual es de grado 1 o de grado -1 que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $d \circ d = 0$ .
- (2)  $d(a.b) = (da).b + (-1)^{|a|}a.(db)$ .

Dadas dos álgebras diferenciales graduadas  $A$  y  $B$ , sea  $f : A \rightarrow B$  una aplicación lineal, diremos que es un morfismo de álgebra diferencial graduada si:

- $f(xy) = f(x).f(y), \forall x, y \in A$ .
- $f(ax) = af(x), \forall a \in F, \forall x \in A$ .

EJEMPLOS 1.9.      • Las formas diferenciales sobre una variedad, junto con la derivada exterior y el producto wedge es una álgebra diferencial graduada.

- La cohomología singular con coeficientes en una anillo es una álgebra diferencial graduada.

## 2. Álgebra homológica

Sea  $R$  un anillo conmutativo con identidad.

DEFINICIÓN 1.10. Un complejo de cadenas es un par  $(C^\bullet, \{f_n\})$  donde:

- $C^\bullet = \{C^i\}_{i \in I}$  es una familia de  $R$ -módulos (en general  $C^\bullet = \bigoplus_{i \in I} C^i$  como  $R$ -módulos) donde  $I$  un conjunto totalmente ordenado.
- $f_n : C^n \rightarrow C^{n-1}$  es  $R$ -lineal  $\forall n$ .
- Se satisface la siguiente condición:  $\forall n$

$$f_{n-1} \circ f_n = 0$$

OBSERVACIÓN 1.11. Si las aplicaciones son de grado 1, es decir  $f_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$  y se satisface la condición

$$f_{n+1} \circ f_n = 0$$

entonces decimos que el par  $(C^\bullet, \{f_n\})$  es un complejo de cocadenas.

EJEMPLOS 1.12. (1) Sea  $X$  un espacio topológico, definimos  $S_n(X)$  como el grupo (abeliano) libre generado por todos los  $n$ -símplices singulares  $T$ , es decir,

$$S_n(X) = \langle T : \Delta^n \rightarrow X \text{ es continua} \rangle$$

donde  $\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in R^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$ . Definimos:

$$\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

$$(\partial_i T)(x_0, \dots, x_{n-1}) = T(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

y definimos  $d_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  por

$$d_n T = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i T.$$

Se tiene que  $(S_n(X), d_n)_{n \geq 0}$  es un complejo, y se denomina **complejo simplicial** de  $X$ .

(2) Dada una álgebra  $(A, m)$  le asociamos el siguiente complejo:  $C_{Hoch}^n(A, M) = Hom(A^{\otimes n}, M)$ , el espacio de las aplicaciones  $n$ -lineales de  $A$  en  $M$ , donde  $M$  es un bimódulo. Se define el diferencial de Hochschild  $\partial_{Hoch} : C_{Hoch}^n(A, M) \rightarrow C_{Hoch}^{n+1}(A, M)$  definido por:

$$\begin{aligned} \partial_{Hoch}(f)(a_1, \dots, a_{n+1}) = \\ a_1 f(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^n f(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

De la asociatividad de la multiplicación se sigue que  $\partial_{Hoch}^2 = 0$ .

Dado que  $f_{n+1} \circ f_n = 0$  para un complejo de cadenas, se tiene que  $Im(f_{n-1}) \subset Ker(f_n)$ , de igual forma para un complejo de cocadenas  $f_n \circ f_{n-1} = 0$  implica que  $Im(f_{n+1}) \subset Ker(f_n)$ .

DEFINICIÓN 1.13. Dado un complejo de (co)-cadenas  $(C^\cdot, f_n)$  decimos que es exacto en el término  $k$ -ésimo si para cada  $k$  fijo se tiene que:

$$Ker(f_k) = Im(f_{k+1}), \quad (Ker(f_k) = Im(f_{k-1})).$$

Si el complejo es exacto en cada término decimos que es acíclico (ó exacto).

DEFINICIÓN 1.14. Sean  $A^\bullet$  y  $B^\bullet$  dos complejos de cadenas, una aplicación de cadenas  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es una colección de homomorfismos  $f_i : A^i \rightarrow B^i$  tal que:  $f_{i-1} \circ \partial = \partial \circ f_i$ , es decir,  $\forall i$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & A^i & \xrightarrow{\partial} & A^{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\ & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & B^i & \xrightarrow{\partial} & B^{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.15. Dado un complejo de (co)cadenas  $C^\bullet$ , se define el  $n$ -ésimo grupo de homología de  $C^\bullet$ ,  $H_n(C)$ , (de cohomología,  $H^n(C)$ ) como el cociente:

$$\begin{aligned} H_n(C) &= \frac{\text{Ker}(f_n)}{\text{Im}(f_{n-1})} \\ (H^n(C)) &= \frac{\text{Ker}(f_n)}{\text{Im}(f_{n+1})} \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.16. Toda transformación de cadena  $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  induce una aplicación:

$$H(f) : H^\bullet(C) \rightarrow H^\bullet(D)$$

DEFINICIÓN 1.17. Una homotopía de cadenas entre dos transformaciones  $f, g : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$  es una familia  $h_n : C^n \rightarrow D^{n+1}$  tal que:

$$d_D \cdot h_n + h_{n-1} \cdot d_C = f_n - g_n$$

Decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicos si existe una homotopía de cadenas entre ellos y en este caso escribimos  $f \simeq g$ .

PROPOSICIÓN 1.18. Si  $f \simeq g$  entonces  $H(f) = H(g)$

DEFINICIÓN 1.19. Un quasi-isomorfismo entre dos complejos  $A^\bullet$  y  $B^\bullet$  es una aplicación  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ , donde  $f$  induce un isomorfismo en (co)homología.

### 3. Teoría de categoría

La teoría de categorías es una teoría matemática que trata de forma abstracta con las estructuras matemáticas y sus relaciones.

La teoría de las categorías fue introducida en Topología algebraica, por Samuel Eilenberg y Saunders MacLane.

Los desarrollos subsiguientes de la teoría fueron impulsados por las necesidades de cómputo del Álgebra homológica y más tarde por las necesidad de axiomáticas en Geometría algebraica.

DEFINICIÓN 1.20. Una categoría  $\mathcal{C}$  consiste en los siguientes datos:

- Una clase de objetos  $Ob(\mathcal{C})$ .
- Para cada par de objetos  $x, y \in Ob(\mathcal{C})$  un conjunto de flechas o morfismos  $\zeta(x, y) = \alpha : x \rightarrow y$ .
- Una ley de composición:

$$\circ : \zeta(x, y) \times \zeta(x, z) \rightarrow \zeta(x, z)$$

$$(x \xrightarrow{\alpha} y, y \xrightarrow{\beta} z) \mapsto x \xrightarrow{\beta \circ \alpha} z$$

Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas

- (1) La composición es asociativa, si  $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} W$ , entonces

$$\gamma(\beta \alpha) = (\gamma \beta) \alpha.$$

- (2) Para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$ , existe un morfismo identidad  $id_X : X \rightarrow X$  tal que  $\alpha \circ id_X = \alpha$  y  $id_Y \circ \alpha = \alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{C}(X, Y)$ .

EJEMPLOS 1.21. (1)  $\mathcal{C} = Top$ ,  $Obj(Top) :=$  Espacios topológicos, y para cada par de objetos  $\mathcal{C}(x, y) = \{f : x \rightarrow y \mid f \text{ es continua}\}$ .

- (2)  $\mathcal{C} = Vect_k$ ,  $Obj(Vect_k) = k$ -espacios vectoriales, y para  $V, W \in Ob(Vect)$  se tiene  $\mathcal{C}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es lineal}\}$ .

- (3) La categoría **dgVect**. Los objetos de **dgVect** son pares  $(V, d_V)$  donde  $V$  es un espacio vectorial  $\mathbb{Z}$ -graduado y  $d_V : V \rightarrow V$  es una aplicación tal que  $d_V^2 = 0$ , dados dos objetos en **dgVect**,  $(V, d_V)$  y  $(W, d_W)$  un morfismo entre ellos es una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  tal que  $T \circ d_V = d_W \circ T$ .

- (4) La categoría  $k$ -**Alg**. Los objetos de  $k$ -**Alg** son álgebras sobre un anillo conmutativo con unidad  $k$  y los morfismos son los homomorfismos de  $k$ -álgebras, con la composición usual.

- (5) Si  $\mathcal{C}$  es una categoría, entonces la categoría opuesta  $\mathcal{C}^{op}$  se define por:

- $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ ,

- $\mathcal{C}^{op}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$ .

La composición  $*$  en  $\mathcal{C}^{op}$  es  $\beta * \alpha = \alpha \circ \beta$ , donde  $\circ$  es la composición en  $\mathcal{C}$ .

DEFINICIÓN 1.22. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. Un **funtor**  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  consiste de lo siguiente

- (1) Una aplicación  $\mathcal{F} : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D})$ .
- (2) Aplicaciones  $\mathcal{F}_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ , para cada par de objetos  $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ .

Estos datos deben satisfacer los axiomas

- (1)  $\mathcal{F}_{XX}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$
- (2)  $\mathcal{F}_{XZ}(\beta\alpha) = \mathcal{F}_{YZ}(\beta)\mathcal{F}_{XY}(\alpha)$ .

EJEMPLOS 1.23. (1) El funtor identidad  $Id : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , que está dado por  $Id(X) = X$  y  $Id(\alpha) = \alpha$ , para todo  $X \in Ob(\mathcal{C})$  y todo  $\alpha \in \mathcal{C}(X, Y)$ .

(2) Sea  $A \in Ob(\mathcal{C})$  fijo y consideremos el funtor  $Hom(A, ) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  dado en objetos por  $Hom(A, X) = \mathcal{C}(A, X)$  y para  $\psi \in \mathcal{C}(X, Y)$  la aplicación  $Hom(A, )(\psi) \in \mathbf{Set}(\mathcal{C}(A, X), \mathcal{C}(A, Y))$ , está dada por la composición con  $\psi$  a la izquierda, es decir  $Hom(A, )(\psi)(\alpha) = \psi\alpha$ .

(3) El funtor "forget" (olvido)  $f : Top \rightarrow Set$ , que envía a cada espacio topológico en su conjunto subyacente.

DEFINICIÓN 1.24. Una categoría  $\mathcal{C}$  **admite sumas directas** (finitas), si para cualquier conjunto finito de objetos  $X_1, \dots, X_n \in Ob(\mathcal{C})$  existe un objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  y un morfismo  $\pi_i : X_i \rightarrow X$  tal que para cualquier otro objeto  $Y$  y morfismo  $f_i : X_i \rightarrow Y$  existe un único morfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f \circ \pi_i = f_i$ , para todo  $i$ .

DEFINICIÓN 1.25. Decimos que una categoría  $\mathcal{C}$  es aditiva si se satisface lo siguiente:

- $\forall x, y \in Obj(\mathcal{C})$  se tiene una estructura de grupo abeliano en  $\mathcal{C}(x, y)$ .
- La operación suma (+) que dota a  $\mathcal{C}(X, Y)$  con la estructura de grupo abeliano, es distributiva con respecto a  $\circ_C$  (La composición de la categoría).
  - $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \forall f \in \mathcal{C}(x, z), g, h \in \mathcal{C}(x, y)$ .
  - $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \forall f, g \in \mathcal{C}(y, z)$  y  $h \in \mathcal{C}(x, y)$ .
- $\mathcal{C}$  admite sumas directas finitas.

- Existe un objeto "distinguido", que denominemos el objeto  $0$ , tal que  $C(0, 0) = 0$  (el grupo trivial), y se satisface  $\forall A \in C, C(A, 0) = 0 = C(0, A)$ .

EJEMPLOS 1.26.      • *GrAb*:= Categorías de grupos abelianos, donde la suma es la suma directa usual.

- *Vect<sub>K</sub>*:= Categorías de espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 1.27. Dada una categoría aditiva  $\mathcal{C}$ , un morfismo  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  es un **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**) si para cualquier  $g \in \mathcal{C}(Z, X)$  se tiene que  $fg = 0$  implica que  $g = 0$  (resp. para cualquier  $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$  se tiene que  $gf = 0$  implica que  $g = 0$ ).

DEFINICIÓN 1.28. Dado un morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , el **kernel** de  $f$  es un objeto  $\ker(f)$  junto con un morfismo  $k : \ker(f) \rightarrow X$  tal que  $fk = 0$  y si  $g \in \mathcal{C}(Z, X)$  es tal que  $fg = 0$ , entonces  $g = kh$  para alguna  $h \in \mathcal{C}(Z, \ker(f))$ . El **cokernel** es un objeto  $\operatorname{coker}(f)$  y un morfismo  $ck : Y \rightarrow \operatorname{coker}(f)$  tal que  $ckf = 0$  y si  $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$  es tal que  $gf = 0$ , entonces  $g = hck$  para alguna  $h \in \mathcal{C}(\operatorname{coker}(f), Z)$ .

DEFINICIÓN 1.29. Una categoría **abeliana**  $\mathcal{C}$  es una categoría aditiva tal que

- (1) Cada morfismo tiene kernel y cokernel.
- (2) Cada monomorfismo es el kernel de su cokernel y cada epimorfismo es el cokernel de su kernel.
- (3) Cada morfismo se expresa como la composición de un epimorfismo con un monomorfismo.

DEFINICIÓN 1.30. Sean  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. Una transformación natural  $\Phi$  de  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$  consiste de un sistema de morfismos  $\Phi_X \in \mathcal{D}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ , uno para cada objeto  $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ , tal que para cada  $\alpha \in \mathcal{C}(X, Y)$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}_X(\alpha)} & \mathcal{F}(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}_X(\alpha)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Si cada  $\Phi_X$  es un isomorfismo, decimos que  $\Phi$  es una **equivalencia natural** y que los funtores  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son equivalentes.

EJEMPLOS 1.31. (1) Para cada funtor  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , el morfismo identidad  $\Phi_X = id_{\mathcal{F}(X)}$  constituye una equivalencia natural de  $\mathcal{F}$  consigo mismo.

(2) Sea  $A \in Ob(\mathcal{C})$  un objeto fijo y consideremos el funtor  $Hom(A, \_) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Sean  $\mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  un funtor arbitrario y  $a \in \mathcal{G}(A)$  un elemento fijo. Definimos una transformación natural  $\Phi^a$  de  $Hom(A, \_)$  a  $\mathcal{G}$  como sigue. Dado  $X \in Ob(\mathcal{C})$ ,  $\Phi_X^a : Hom(A, X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  está dado por

$$\Phi_X^a(\psi) = \mathcal{G}(\psi)(a).$$

DEFINICIÓN 1.32. Dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  se dicen equivalentes si existen funtores  $\mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $\mathcal{F}_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  son funtores equivalentes a los funtores identidad.

DEFINICIÓN 1.33. Consideremos  $R$  un anillo conmutativo con unidad y  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Decimos que  $\mathcal{C}$  es una categoría  **$R$ -lineal** si para todos  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  se tiene que el espacio  $\mathcal{C}(A, B)$  es un  $R$ -módulo.

PROPOSICIÓN 1.34. Sea  $\rho : S \rightarrow R$  un homomorfismo de anillos y  $\mathcal{C}$  una categoría  $R$ -lineal  $\mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{C}$  posee una estructura de categoría  $S$ -lineal.

DEMOSTRACIÓN. Para todos  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  se tiene que el espacio  $\mathcal{C}(A, B)$  es un  $S$ -módulo con la acción dada por  $\rho$ , los morfismos de  $\mathcal{C}$  como categoría  $S$ -lineal son los morfismos de  $\mathcal{C}$   $R$ -lineales compatibles de manera obvia con la acción de  $S$  sobre  $\mathcal{C}(A, B)$ .  $\square$

#### 4. Categoría derivada

Dada una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ , podemos considerar la categoría  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  de complejos de  $\mathcal{A}$ , uno de los problemas de esta categoría es que dos complejos quasi-isomorfos dan lugar a la misma homología, de modo que se presenta la necesidad de identificar todos los complejos quasi-isomorfos, con este fin, definimos la categoría derivada.

La categoría derivada de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , se obtiene a partir de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  invirtiendo formalmente todos los quasi-isomorfismos. De modo que  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es la localización de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  con respecto a la clase de quasi-isomorfismos, a fin de describir este proceso formalmente se tiene la siguiente definición,

DEFINICIÓN 1.35. Una clase  $S$  de morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$  se dice que forma un sistema multiplicativo si satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $id_x \in S$ . Si  $s, t \in S$  entonces  $s \circ t \in S$  (siempre que se pueda componer).
- (2)
- (3)

TEOREMA 1.36. *La clase de quasi-isomorfismos es un sistema multiplicativo en  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  la categoría de complejos de  $\mathcal{A}$ .*

DEFINICIÓN 1.37. La categoría derivada  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  se define como sigue:

- $\text{Obj}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) = \text{Obj}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ .
- Los morfismos de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  son los morfismos de  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  localizados por la clase de quasi-isomorfismos.

## 5. Funtores derivados

DEFINICIÓN 1.38. Sea  $M$  un objeto de una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ . Una resolución a derecha de  $M$  es un complejo de cocadenas  $I^\bullet$  con  $I^i = 0$  para  $i \leq 0$  y un morfismo  $\xi : M \rightarrow I^\bullet$ , llamado morfismo de aumentación, de manera tal que:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\xi} I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{d} \dots \quad (*)$$

es exacta. Si además cada  $I^i$  es inyectivo, entonces se dirá que  $(*)$  es una resolución inyectiva de  $M$ .

Para un objeto en una categoría abeliana no necesariamente se tiene una resolución inyectiva, formalmente diremos que  $\mathcal{A}$  tiene suficientes objetos inyectivos si para cada objeto  $A$  de existe un monomorfismo  $A \rightarrow I$  con  $I$  inyectivo. Se tiene el siguiente

LEMA 1.39. *En una categoría abeliana  $\mathcal{A}$ ; un objeto  $I$  es inyectivo si y sólo si el functor contravariante  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$  es exacto, es decir  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$  preserva sucesiones exactas cortas.*

LEMA 1.40. *Si una categoría abeliana  $\mathcal{A}$  tiene suficientes objetos inyectivos, entonces todo objeto en  $\mathcal{A}$  tiene una resolución inyectiva.*

OBSERVACIÓN 1.41. De manera dual se tienen resultados sobre objetos proyectivos.

El método a seguir para obtener funtores derivados es el siguiente: Dada una resolución, aplicamos el funtor contravariante de dos categorías abelianas  $A$  y  $R$ ,  $T : A \rightarrow R$  tomamos la homología del complejo resultante y éste nos dá una secuencia de funtores, los cuales llamamos "funtores derivados" de  $T$ .

DEFINICIÓN 1.42. Sea  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor entre categorías abelianas, si  $\mathcal{A}$  tiene suficientes objetos inyectivos construimos el funtor derivado a derecha de  $T$ ,  $R^n T$  para ( $n \geq 0$ ), como sigue: Si  $A \in Ob(\mathcal{A})$ , escogemos una resolución inyectiva  $A \rightarrow I^\bullet$  y se define:  $R^n T(A) = H^n(T(I^\bullet))$  la homología  $n$ -ésima del complejo  $T(I^\bullet)$ .

Los objetos  $R^n T(A)$  no dependen de la escogencia de la resolución inyectiva  $I^\bullet$  y cualquier morfismo  $\alpha : A \rightarrow A'$  se levanta naturalmente en el morfismo  $R^n T(\alpha) = \alpha_* : R^n T(A) \rightarrow R^n T(A')$ , haciendo de  $R^n T$  un funtor contravariante de  $A$  en  $R$ .

Si  $\mathcal{A}$  tiene suficientes objetos proyectivos  $T : A \rightarrow R$  es un funtor entre categorías abeliano exacto a derecha, entonces para cualquier resolución proyectiva  $x_\bullet \rightarrow A$  de un objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  se tiene que  $T(x_1) \rightarrow T(x_0) \rightarrow T(A) \rightarrow 0$  es exacta. Por lo tanto  $L_0 T(A) = H_0(T(x_\bullet)) \cong T(A)$ .

De manera dual si  $\mathcal{A}$  tiene suficientes objetos inyectivos;  $A \rightarrow I^\bullet$  es una resolución inyectiva de  $A$  y  $T$  es exacto a izquierda entonces  $0 \rightarrow T(A) \rightarrow T(I^0) \rightarrow T(I^1)$  es exacta y por lo tanto  $R^0 T(A) = H^0(T(I^\bullet)) \cong T(A)$ .

## CAPÍTULO 2

### Fundamentos de Geometría Diferencial

Este capítulo está dedicado a revisar los aspectos básicos de geometría diferencial. Comenzaremos revisando el concepto de variedad diferenciable, daremos las definiciones de fibrados y de haces, ésta última definición es fundamental para concretar lo que más adelante desarrollaremos como la versión homológica de la simetría espejo.

#### 1. Variedades diferenciables

DEFINICIÓN 2.1. Dado un espacio topológico  $M$ , Hausdorff, segundo numerable, un atlas sobre  $M$  es una colección de pares  $Q = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  tal que:

- $\varphi_i : U_i \rightarrow R^n$  es un homeomorfismo.
- La colección  $\{U_i\}_{i \in I}$  cubre a  $M$  ;  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

Decimos que el atlas es diferenciable, si para cada par de cartas  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  se tiene que  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  y  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  es diferenciable como funciones de  $R^n$  a  $R^n$ .

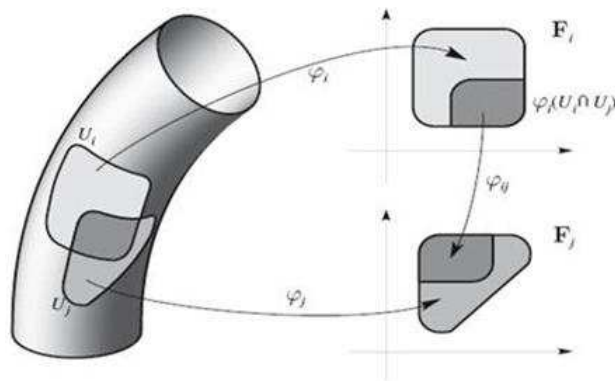


FIGURA 2.1. Cambio de carta

Decimos que un atlas diferenciable  $Q = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  es maximal si cada carta  $(U, \varphi)$  tal que:

- $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfismo.
- $\forall (U_i, \varphi_i) \in Q$  se tiene que:

$$\varphi_i \circ \varphi^{-1} \text{ y } \varphi \circ \varphi_i^{-1} \text{ son } C^\infty.$$

Entonces  $(U, \varphi) \in Q$ .

No todo atlas es maximal, sin embargo el siguiente teorema garantiza la existencia de un atlas maximal, la demostración se puede ver en [??]

**TEOREMA 2.2.** *Todo atlas está contenido en un atlas maximal.*

**DEFINICIÓN 2.3.** Una variedad diferenciable es un espacio topológico  $M$ , Hausdorff, segundo numerable junto con un atlas maximal.

Nota: En virtud del teorema 1.2 bastará considerar un atlas cualquiera y la estructura de variedad la determinará el atlas maximal que lo contiene.

Ejemplos:

- La esfera  $n$ -dimensional es un ejemplo clásico de variedad diferenciable. Tomemos las cartas  $U_i = \{x \in S^1 : x_i \geq 0\}$  y  $U_{i-1} = \{x \in S^1 : x_i \leq 0\}$   $\Pi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi(x) = (x_1, \dots, x_n)$

**DEFINICIÓN 2.4.** Una aplicación  $f : M \rightarrow N$  entre dos variedades diferenciables, decimos que es diferenciable ó  $C^\infty$  si para cualquier carta  $(u, \phi)$  sobre  $M$  y  $(v, \psi)$  sobre  $N$  la función  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  es diferenciable  $C^\infty$  como función de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINICIÓN 2.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva diferenciable con  $\gamma(0) = p$  ( $\gamma$  necesita solo ser definida en un entorno de 0.) Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable donde  $U$  es una vecindad abierta de  $p$ . Entonces la derivada direccional de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  en  $p$  es:

$$D_\gamma(f) = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

El operador es  $D_\gamma$  es llamado el vector tangente a  $\gamma$  en  $p$ .

DEFINICIÓN 2.6. Un germen sobre una función diferenciable  $f$  en  $p \in M$  sobre una variedad suave  $M$  es una clase de equivalencia  $f$  bajo la siguiente relación:  $f_1 \approx f_2 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$  para todo  $x$  en algún entorno de  $p$ .

DEFINICIÓN 2.7. Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $p \in M$ ,  $T_p(M)$  denota el espacio vectorial de todos los vectores tangentes a gérmenes en  $p$ .

DEFINICIÓN 2.8. Si  $\phi : M \rightarrow N$  es una función diferenciable, entre dos variedades diferenciables, entonces se define el diferencial de  $\phi$  en  $p \in M$  para ser la función:

$$\phi_* : T_p(M) \rightarrow T_{\phi(p)}(N)$$

dados por  $\phi_*(D_\gamma) = D_{\phi \circ \gamma}$

DEFINICIÓN 2.9. Una variedad  $n$ -dimensional junto con un atlas tal que, para dos cartas cualesquiera  $\phi, \psi$  en el atlas, el Jacobiano de la función cambio de cartas  $\phi \circ \psi^{-1}$  tiene determinante positivo para todos los puntos del dominio, la variedad se denomina una variedad orientada, el atlas maximal con esta propiedad se llama una orientación de la variedad.

## 2. Fibrado vectorial

DEFINICIÓN 2.10. Un fibrado vectorial  $E$  sobre una variedad  $M$  consiste de una variedad  $E$  y una aplicación diferenciable, llamada la proyección:

$$\Pi : E \rightarrow M$$

Tal que  $E$  es localmente trivial, es decir:

Para cada cubrimiento abierto de la variedad  $U$

$U \times \mathbb{R}^k$  es difeomorfo a  $\Pi^{-1}U$ , es decir:

$$\Phi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi^{-1}U \quad \Phi_U(p, y) \in \Pi^{-1}(p)$$

EJEMPLOS 2.11. 

- Sea  $M$  una variedad,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset M$ ,  $T_p M$  es el espacio tangente en un punto  $p$  de  $M$ . Entonces el fibrado tangente es  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ . En el caso en que  $M = S^1$  se tiene que  $T_p M = \mathbb{R}$  y el fibrado tangente sería un cilindro circular recto.

- El fibrado cotangente es un fibrado vectorial, la fibra en cada punto es el dual del espacio tangente.

TEOREMA 2.12. Si  $E$  y  $F$  son fibrados vectoriales sobre  $M$  entonces:  $E \times F, E \otimes F, \wedge E$  y  $E + F$  son fibrados sobre  $M$ .

DEFINICIÓN 2.13. Un morfismo desde el fibrado vectorial  $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$  al fibrado vectorial  $\pi_2 : E_2 \rightarrow N$  viene dada por las funciones continuas, tales que:

$$(1) \quad g\pi_1 = \pi_2 f$$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

(2) Para cada  $x$  en  $X_1$ , la función  $\pi_1^{-1}(x) \rightarrow \pi_2^{-1}(g(x))$  inducida por  $f$  es una transformación lineal entre espacios vectoriales. La composición de morfismos, es un morfismo.

Dado un fibrado vectorial  $\pi : E \rightarrow X$  y un subconjunto abierto  $U$  de  $X$ , podemos considerar las secciones suaves de  $\pi$  en  $U$ , es decir funciones diferenciables  $s : U \rightarrow E$  con  $\pi s = id_U$ .

En este caso decimos que la sección es local, si la aplicación  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id$  entonces decimos que la sección es global. Denotaremos el espacio de secciones locales por  $\Gamma(U, E)$  y las secciones globales por  $\Gamma(M, E)$ .

EJEMPLOS 2.14. (1)  $\Gamma(M, TM) :=$  El espacio de campos vectoriales sobre  $M$ .

(2)  $\Gamma(M, \wedge TM^*) = \Omega(M) :=$  El espacio de formas diferenciales sobre  $M$ .

(3)  $\Gamma(M, \wedge^2 TM) :=$  El espacio de polícampos vectoriales sobre  $M$ .

### 3. Variedad Compleja

DEFINICIÓN 2.15. Una variedad diferenciable que admite un cubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  y una aplicación de coordenadas  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  tal que:  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  es holomorfa sobre:

$$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \quad \forall a, b$$

se denomina variedad compleja.

Ejemplos:

- (1) Sea  $C = C \cup \infty$  y sea  $f(z) = z$  donde  $z$  pertenece a  $S/\infty$  y  $g(z) = \frac{1}{z}$  donde  $z$  pertenece a  $S/0$  y  $1/\infty$  se define como 0, como se definen estas funciones  $f$  y  $g$  son cartas compatibles y  $f, g$  es un atlas para  $S$  donde  $S$  se conoce como la esfera de Riemann.
- (2) Toda superficie de Riemann es una variedad compleja.

**TEOREMA 2.16.** *Una variedad quasi-compleja  $(M, J)$ , es una variedad  $M$  diferenciable donde  $J$  es una aplicación tal que:  $J : T_x M \rightarrow T_x M$  y se satisface que:  $J^2 = I$*

**DEFINICIÓN 2.17.** Una **variedad compleja  $M$  de dimensión  $n$**  es un espacio topológico Hausdorff  $M$ , junto con un **atlas complejo**  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$  de pares  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  donde para cada  $\alpha$ ,

- (1)  $U_\alpha$  es un abierto de  $M$  y  $\cup_\alpha U_\alpha = M$ .
- (2)  $\varphi_\alpha$  es un homeomorfismo de  $U_\alpha$  sobre un abierto de  $C^n$ .
- (3) Para todo  $U_\alpha, U_\beta$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , la aplicación entre abiertos de  $C^n$ ,

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

es biholomorfa, es decir, holomorfa, invertible y con inversa holomorfa.

- (4)  $\mathcal{A}$  es maximal con respecto a la propiedad anterior, esto es si  $(U, \varphi)$  es tal que para  $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$  la aplicación  $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$  es biholomorfa, para todo  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ , entonces  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ .

Al atlas complejo  $\mathcal{A}$  también se le denomina **estructura holomorfa** sobre  $M$ . Claramente una variedad compleja  $M$  de dimensión  $n$  posee una estructura de variedad diferenciable real de dimensión  $2n$ .

### Ejemplos.

- (1) El espacio de  $n$ -tuplas complejas  $C^n$  posee de manera canónica una estructura de variedad compleja.
- (2) El espacio complejo proyectivo  $CP^m$  se puede definir como el conjunto de rectas complejas de  $C^{m+1}$ . Si definimos la relación de equivalencia sobre  $C^{m+1} - \{0\}$  por:

$$(z_0, \dots, z_m) \sim (\alpha z_0, \dots, \alpha z_m), \quad \forall \alpha \in C - \{0\},$$

entonces  $\mathcal{C}P^m = (\mathcal{C}^{m+1} - \{0\}) / \sim$ . Denotamos la clase de equivalencia de  $(z_0, \dots, z_m)$  por  $[z_0, \dots, z_m]$ . Consideremos el cubrimiento de abierto  $\{U_i\}$ , con  $i = 0, \dots, m$ , de  $\mathcal{C}P^m$  definido por:

$$U_i := \{[z_0, \dots, z_m] \mid z_i \neq 0\}$$

y las aplicaciones  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathcal{C}^m$ ,

$$\varphi_i([z_0, \dots, z_m]) = \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_m}{z_i} \right).$$

Es fácil calcular  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ :

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(w_1, \dots, w_m) = \left( \frac{w_1}{w_i}, \dots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_j}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_m}{w_i} \right),$$

la cual es holomorfa sobre su dominio de definición, pues  $w_i \neq 0$ ,  $\forall i$ .

**DEFINICIÓN 2.18.** Sea  $M$  una variedad compleja. Una función  $f : M \rightarrow \mathcal{C}^n$  es **holomorfa** si  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  es holomorfa para cada  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Una aplicación biholomorfa  $\varphi = (z_1, \dots, z_n) : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathcal{C}^n$  se denomina un **sistema de coordenadas holomorfas** sobre  $U$ , una función  $f : M \rightarrow N$  de variedades complejas es holomorfa, si lo es en términos de coordenadas holomorfas sobre  $N$ , esto es, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{C}^m & \xrightarrow{\phi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \mathcal{C}^n \end{array}$$

conmuta, para sistemas de coordenadas holomorfos  $\varphi$  y  $\phi$ .

Dada una variedad compleja  $M$  y  $z \in M$ , el espacio tangente a  $M$  en  $z$  se define por

$$T_{\mathcal{C},z}M = T_{\mathfrak{R},z}M \otimes_{\mathfrak{R}} \mathcal{C},$$

donde  $T_{\mathfrak{R},z}M$  es el espacio tangente a  $M$  en  $z$  considerando a  $M$  como una variedad real. Se tiene,

$$T_{\mathcal{C},z}M = \mathcal{C} \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\rangle.$$

donde,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

Si consideramos  $T_z^{(1,0)}M = \mathcal{C} \langle \partial/\partial z_i \rangle \subset T_{\mathcal{C},z}M$ , llamado el espacio tangente holomorfo a  $M$  en  $z$  y  $T_z^{(0,1)}M = \mathcal{C} \langle \partial/\partial \bar{z}_i \rangle \subset T_{\mathcal{C},z}M$  llamado el espacio tangente anti-holomorfo a  $M$  en  $z$ , claramente se tiene

$$T_{\mathcal{C},z}M = T_z^{(1,0)}M \oplus T_z^{(0,1)}M.$$

DEFINICIÓN 2.19. Dada una variedad diferencial  $M$ , una **estructura casi-compleja**  $J$  sobre  $M$  es un endomorfismo  $J : TM \rightarrow TM$  tal que  $J^2 = -Id$ . Decimos que el par  $(M, J)$  es una **variedad casi-compleja**.

LEMA 2.20. *Toda variedad compleja es una variedad casi-compleja.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$ . Para cada  $X \in T_{\mathfrak{R},z}M$ , escogemos  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ , el atlas complejo de  $M$ , con  $z \in U_\alpha$  y definimos:

$$J_{U_\alpha}(X) = \varphi_\alpha^{-1*} \circ j_n \circ \varphi_\alpha^*(X).$$

donde  $j_n$  es la multiplicación por  $i$  en  $\mathbb{C}^n$ ; veamos que esta definición no depende de la carta escogida.

Si tomamos otro  $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$  que contiene a  $z$ , entonces  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  es holomorfa, y  $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta$ , así

$$\begin{aligned} J_{U_\beta}(X) &= \varphi_\beta^{-1*} \circ j_n \circ \varphi_\beta^*(X) = \varphi_\beta^{-1*} \circ j_n \circ (\varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\alpha)^*(X) \\ &= \varphi_\beta^{-1*} \circ j_n \circ \varphi_{\beta\alpha}^* \circ \varphi_\alpha^*(X) = \varphi_\beta^{-1*} \circ \varphi_{\beta\alpha}^* \circ j_n \circ \varphi_\alpha^*(X) \\ &= \varphi_\alpha^{-1*} \circ j_n \circ \varphi_\alpha^*(X) = J_{U_\alpha}(X), \end{aligned}$$

lo que muestra que  $J_U$  no depende de  $U$ , de modo que la colección de los  $J_U$  es un tensor  $J$  en  $TM$  bien definido. Claramente se tiene  $J^2 = -Id$ .  $\square$

Consideramos el espacio tangente complejo a  $M$ ,  $T_{\mathcal{C}}M := T_{\mathfrak{R}}M \otimes \mathcal{C}$  y extendemos los endomorfismos reales y operadores diferenciales de  $TM$  a  $T_{\mathcal{C}}M$  por  $\mathcal{C}$ -linealidad. Consideramos los subespacios de  $T_{\mathcal{C}}M$ ,  $T^{(1,0)}M$  y  $T^{(0,1)}M$ . El siguiente lema algebraico es sencillo de demostrar.

LEMA 2.21. *Se tiene*

$$(a) T^{(1,0)}M = \{X - iJX | X \in TM\} \quad y \quad (b) T^{(0,1)}M = \{X + iJX | X \in TM\}.$$

Recordemos que dada una variedad diferencial  $M$ , una **distribución** sobre  $M$ , es un conjunto de subespacios  $\mathcal{D}_p$  de  $T_pM$ , para cada  $p \in M$  y que una distribución es **integrable** si para cada par de campos vectoriales  $X, Y$  tales que  $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$  se tiene que  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ . Se tiene puede ser enunciado como sigue:

TEOREMA 2.22 (Newlander-Nirenberg). *Sea  $(M, J)$  una variedad casi-compleja. La estructura casi compleja  $J$  proviene de una estructura holomorfa en  $M$  si y sólo si la distribución  $T^{(0,1)}M$  es integrable.*

DEFINICIÓN 2.23. Una estructura casi-compleja que proviene de una estructura holomorfa se llama una **estructura compleja**.

Sea  $M$  una variedad compleja, de manera análoga al caso de variedades diferenciables, consideramos  $\Omega^k(M)$  el espacio de las  $k$ -formas con valores complejos sobre  $M$ . Consideramos el espacio dual  $T_{\mathcal{C},z}^*M$  de  $T_{\mathcal{C},z}M$ ; usando la descomposición  $T_{\mathcal{C},z}M = T_z^{(1,0)}M \oplus T_z^{(0,1)}M$  obtenemos

$$T_{\mathcal{C},z}^*M = T_z^{(1,0)*}M \oplus T_z^{(0,1)*}M$$

y esto induce una descomposición

$$\bigwedge^k T_{\mathcal{C},z}^*M = \bigoplus_{p+q=k} \left( \bigwedge^p T_z^{(1,0)*}M \wedge \bigwedge^q T_z^{(0,1)*}M \right).$$

De manera que podemos escribir

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M)$$

donde

$$\Omega^{p,q}(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) : \omega(z) \in \bigwedge^p T_z^{(1,0)*}M \wedge \bigwedge^q T_z^{(0,1)*}M, \forall z \in M\}.$$

Diremos que una forma  $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$  es de tipo  $(p, q)$  o simplemente una  **$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ -forma**. Denotamos por  $\pi^{p,q}$  la proyección  $\pi^{p,q} : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M)$ , de modo que para  $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$  y  $z \in M$ ,

$$d\omega(z) \in \left( \bigwedge^p T_z^{(1,0)*}M \wedge \bigwedge^q T_z^{(0,1)*}M \right) \wedge T_{\mathcal{C},z}^*M$$

donde  $d$  es el diferencial de De Rham, es decir

$$d\omega \in \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M).$$

Definimos los operadores de Dolbault:

$$\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M) \quad \partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$$

por

$$\bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d \quad \text{y} \quad \partial = \pi^{p+1,q} \circ d.$$

Como  $d = \partial + \bar{\partial}$  y  $d^2 = 0$ , tenemos que  $\partial\partial = 0$ ,  $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$  y  $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ .

En términos de coordenadas holomorfas  $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ , una  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  de tipo  $(p, q)$  se puede escribir como:

$$\omega(z) = \sum_{\substack{\#I=p \\ \#J=q}} \varphi_{IJ}(z, \bar{z}) dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

donde,  $\#I$  significa la cardinalidad del conjunto  $I$  y para  $I = \{i_1 < \dots < i_p\}$  se tiene

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}.$$

Los operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  están dados por:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\omega(z) &= \sum_{I,J,j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \varphi_{IJ}(z, \bar{z}) d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \partial\omega(z) &= \sum_{I,J,j} \frac{\partial}{\partial z_j} \varphi_{IJ}(z, \bar{z}) dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

**DEFINICIÓN 2.24.** Sea  $M$  una variedad compleja y  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial complejo sobre  $M$  (i.e. para cada  $x \in M$  la fibra  $\pi^{-1}(x)$  es un espacio vectorial complejo). Decimos que  $E$  es un **fibrado vectorial holomorfo** si existe una trivialización con funciones de transición holomorfas. Es decir, existe un cubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  y para cada  $U_\alpha$  un difeomorfismo  $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathcal{C}^k$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathcal{C}^k \\ \pi \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

y para cada par de abiertos  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  que se intersectan se tiene que

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v),$$

donde  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl_k(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}^{k^2}$  son funciones holomorfas.

### Ejemplos.

(1) El fibrado tangente de una variedad compleja  $M$  de dimensión  $m$  es holomorfo.

Para ver esto, tomamos el atlas holomorfo  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de  $M$  y definimos  $\varphi_\alpha : TM|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathcal{C}^m$  por  $\varphi_\alpha(X_x) = (x, (\phi_\alpha)^*(X))$ . Las funciones de transición  $g_{\alpha\beta} = (\phi_\alpha)^* \circ (\phi_\beta)^{-1*}$  son holomorfas.

(2) Sea  $M$  una variedad compleja, los fibrados cotangente y  $\Lambda^{p,0}M$  son holomorfos. De hecho, usando de nuevo un atlas holomorfo de la variedad  $M$ , podemos trivializar a  $\Lambda^{p,0}M$  localmente, la regla de la cadena

$$dz_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_{\alpha_p} = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_p} \frac{\partial z_{\alpha_1}}{\partial w_{\beta_1}} \dots \frac{\partial z_{\alpha_p}}{\partial w_{\beta_p}} dw_{\beta_1} \wedge \dots \wedge dw_{\beta_p}$$

muestra que las funciones de transición son holomorfas.

Para cada fibrado complejo  $\pi : E \rightarrow M$ , se define el fibrado  $\Lambda^{p,q}E := \Lambda^{p,q}M \otimes E$  de formas  $E$ -valuadas sobre  $M$  de tipo  $(p, q)$ , hacemos

$$\Omega^{p,q}(M; E) = \Gamma(M, \Lambda^{p,q}E) := (p, q)\text{-formas de } M \text{ con valores en } E.$$

Un elemento típico  $\omega \in \Omega^{p,q}(M; E)$  es de la forma

$$\omega = \sum_i \omega_i \otimes e_i$$

donde  $\{e_i\}$  es una base local para  $E$  y  $\omega_i \in \Omega^{p,q}(M)$ . Nótese que los fibrados  $\Lambda^{p,q}M$  no son en general fibrados holomorfos para  $q \neq 0$ .

**DEFINICIÓN 2.25.** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial complejo. Una **estructura holomorfa** sobre  $E$ , es una familia de operadores  $\bar{\partial}_\varepsilon : \Omega^{p,q}(M; E) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M; E)$ , donde  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ , tal que:

$$(1) \bar{\partial}_\varepsilon \circ \bar{\partial}_\varepsilon = 0$$

$$(2) \bar{\partial}_\varepsilon(u \wedge \alpha) = \bar{\partial}(u) \wedge \alpha + (-1)^{p+q} u \wedge \bar{\partial}_\varepsilon(\alpha); \quad u \in \Omega^{p,q}(M), \alpha \in \Omega^\bullet(M; E)$$

PROPOSICIÓN 2.26. *Un fibrado vectorial complejo  $\pi : E \rightarrow M$  es holomorfo si y sólo si posee una estructura holomorfa  $\overline{\partial}_\varepsilon$ .*

#### 4. Variedad Simpléctica

DEFINICIÓN 2.27. Una variedad simpléctica es un par  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $\omega$  es una 2-forma de  $M$  tal que:

- (1)  $d\omega = 0$
- (2)  $\omega$  es no-degenerada, ie, si  $\omega(a, b) = 0$  para todo  $b$ , entonces  $a = 0$

DEFINICIÓN 2.28. Una subvariedad Lagrangiana de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  es una subvariedad cerrada  $L$  de  $M$  de dimensión  $\dim(M)/2$  tal que  $\omega|_L = 0$

#### 5. Haces

Se definirán en dos pasos, primero introduciremos el concepto de prehaz, y luego le agregaremos un axioma a esta definición (el llamado axioma de pegado).

DEFINICIÓN 2.29. Sea  $X$  un espacio topológico,  $C$  una categoría (por lo general una categoría de conjuntos, de anillos conmutativos ó grupos abelianos) un prehaz  $F$  de objetos en  $C$  sobre  $X$  es:

- Para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$ , existe un objeto  $F(U)$  en  $C$ .
- Para cada inclusión de conjuntos abiertos  $V \subset U$ , existe un morfismo  $F(U) \rightarrow F(V)$  en la categoría  $C$ .
- Para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$ , tenemos  $i : U \rightarrow U : u = id_{F(U)}$  (la inclusión de  $U$  en  $U$  es la identidad.)
- Dados cualquiera tres conjuntos abiertos  $W \subset V \subset U$ , tenemos  $i : U \rightarrow u_{V,W} \circ i : U \rightarrow u_{U,V} = i : U \rightarrow u_{U,W}$

Esta definición puede darse en términos de teoría de categorías. Se define la categoría de los conjuntos abiertos sobre  $X$ , como la categoría  $Top_X$  cuyos objetos son los conjuntos abiertos de  $X$  y cuyos morfismos son las inclusiones.  $Top_X$  es entonces la categoría correspondiente al orden parcial  $\subset$  sobre los conjuntos abiertos de  $X$ . Un  $C$ -prehaz sobre  $X$  es un funtor contravariante desde  $Top_X$  a  $C$ .

Si  $C$  es una categoría concreta, entonces cada elemento de  $F(U)$  es llamado una sección.

Los haces son prehaces sobre los cuales las secciones sobre conjuntos abiertos pueden ser pegadas para dar secciones sobre abiertos más grandes. Se establecen secciones para que  $C$  sea una categoría concreta. Sea  $U$  la unión de la colección de los conjuntos abiertos  $\{U_i\}$ .

Para cada  $U_i$  es  $f_i$ , es decir,  $res_{U,U_i}(f) = f_i$

Si las  $f_i$  representan funciones, estamos diciendo que cualquiera de ellas coincidirá con alguna en donde se solapen.

El axioma de haz enuncia que podemos obtener con los  $f_i$  una sección  $f$  sobre  $U$  cuya restricción a cada  $U_i$  es  $f_i$ , es decir  $res_{U,U_i}(f) = f_i$

Notamos que podemos escribir los objetos y los morfismos como:

$$F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_i F(U_i \cap U_j)$$

La primera aplicación aquí es el producto de las aplicaciones restricción  $res_{U,U_i} : F(U) \rightarrow F(U_i)$  y cada par de flechas representa las dos restricciones  $res_{U_i,U_i \cap U_j} : U_i \rightarrow U_i \cap U_j$ ,  $res_{U_j,U_i \cap U_j} : U_j \rightarrow U_i \cap U_j$

La condición de que  $F$  sea haz es exactamente a la que  $F(U)$  es el límite del resto del diagrama, así debemos reescribir la noción de de recubrimiento,

$$\prod_{i,j} U_i \cap U_j \rightarrow \prod_i U_i \rightarrow U$$

La condición de que  $U$  es la unión de los  $U_i$  es la de  $U$  el colímite del resto del diagrama.

El axioma de pegado es ahora el que  $F$  torna todos los colímites en límites.

Ejemplos.

- (1) Para cada conjunto abierto  $U$  en  $X$ , sea  $F(U)$  el conjunto de todas las aplicaciones  $f : U \rightarrow E$  tales que  $\pi(f(x)) = x$  para todo  $x$  en  $U$ , tal función es llamada sección de  $\pi$ , donde  $F$  es un haz de conjuntos sobre  $X$ .
- (2) Cualquier fibrado vectorial proporciona un haz de conjunto, identificando las secciones.

**DEFINICIÓN 2.30.** Un haz coherente sobre un espacio anillado  $(X, \mathcal{O})$  es un haz  $F$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos con las siguientes dos propiedades:

- (1) Para algún punto en  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U \subset X$  tal que la resolución inyectiva  $F|_U$  de  $F$  a  $U$  es generado por un número finito de secciones cualesquiera
- (2) Para cualesquiera conjuntos abiertos  $U \subset X$ , cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y algún morfismo  $\phi : \mathcal{O}_X^n|_U \rightarrow F|_U$  de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, el kernel de  $\phi$  es de rango finito.

Un ejemplo de un haz coherente son los haces de las secciones sobre un fibrado vectorial.

Otra definición de haz (esta la pongo porque no se cual dejar)

A continuación se introducirán varias operaciones de tipo algebraico sobre el concepto de haz a introducir.

Una noción importante antes de introducir el concepto de haz, se introducirá el concepto de "prehaz" (de grupos abelianos) sobre un espacio topológico  $X$ . Un prehaz  $A$  sobre  $X$  es una función que asigna, a cada subconjunto abierto  $U \subset X$ , un grupo abeliano  $A(U)$  y que asigna, para el par  $U \subset X$  de conjuntos abiertos, un homomorfismo (llamado la restricción)  $i : U \rightarrow V : A(V) \rightarrow A(U)$  donde  $i : U \rightarrow U = 1$  y  $i : U \rightarrow V, i : V \rightarrow W = i : U \rightarrow W$  cuando  $U \subset V \subset W$ , si usamos la terminología usual, enunciamos la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 2.31.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un "pre-haz"  $A$  (de grupos abelianos) sobre  $X$  es un funtor contravariante que parte de la categoría de conjuntos abiertos de  $X$  y inclusiones a la categoría de grupos abelianos. En general se puede definir un pre-haz con valores en una categoría arbitraria. Si cada  $A(U)$  es un anillo y  $r_{U,V}$  es el anillo de homomorfismos, sobre  $X$  y si suponemos que  $B$  es un pre-haz sobre  $X$  tal que cada  $B(U)$  es un  $A(U)$ -módulo y que  $r_{U,V} : B(V) \rightarrow B(U)$  son homomorfismos de módulos, entonces decimos que  $B$  es un  $A$ -módulo.

Es usual referirnos a los elementos de  $A(U)$  como "secciones de  $A$  sobre  $U$ ". Si  $s \in A(V)$  y  $U \subset V$ , donde usaremos la notación  $s|_U$ ,  $s$  restricto a  $U$  para  $r_{U,V}(s)$  y llamarla la restricción de  $s$  a  $U$ .

Ejemplo:

Si  $M$  es un grupo abeliano, entonces existe un "pre-haz constante"  $A$  con  $A(U) = M$  para todo  $U$  y  $r_{U,V} = 1$  para todo  $U \subset V$ .

**DEFINICIÓN 2.32.** Un "haz" (de grupos abelianos) sobre  $X$  es un par  $(A, \pi)$  donde:

Sea:  $A \Delta A$  el subespacio de  $A \times A$  que consiste en todos los pares  $\langle \alpha, \beta \rangle$  con  $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ . Entonces la función  $A \Delta A \rightarrow A$  tomando  $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \alpha - \beta$  es continuo. De forma equivalente  $\alpha \rightarrow -\alpha$  de  $A \rightarrow A$  es continuo y  $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \alpha + \beta$  de  $A \Delta A \rightarrow A$ .

## CAPÍTULO 3

### Simetría espejo homológica

#### 1. Variedades Calabi-Yau

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $M$  una variedad de Riemann con una estructura quasi-compleja  $J$  y una métrica  $g$ . Decimos que  $g$  es Hermitiano con respecto a la estructura quasi-compleja  $J$  si:  $g(X, Y) = g(JX, JY)$  para todos los campos vectoriales  $X$  y  $Y$

TEOREMA 3.2. Sea  $(M, J, g)$  una variedad compleja, con estructura compleja  $J$ , una métrica Riemanniana-Hermitiana  $g$ ,  $\omega$  la forma Hermitiana asociada y  $\Delta$  la conexión de Levi-Civita. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\Delta\omega = 0$
- $\Delta J = 0$
- $d\omega = 0$

DEFINICIÓN 3.3. Cualquier variedad de Riemann compleja  $(M, J, g)$  que satisfaga al menos una de las condiciones del teorema anterior es una variedad de Kahler.

Ejemplos:

- (1) El espacio euclídeo complejo  $C^n$  con la métrica hermítica estándar es una variedad de Kahler.
- (2) Cada superficie de Riemann es una variedad de Kahler, puesto que la condición de que  $\omega$  sea cerrado es trivial en dos dimensiones (reales).

TEOREMA 3.4. Sea  $M$  una variedad de Kahler compacta de dimensión par, entonces los siguientes puntos son equivalentes:

- El fibrado tangente es trivial.
- $M$  tiene estructura holomorfa.
- $M$  es curvatura de Ricci
- La primera integral de clase de Chern  $c_1(M)$  de  $M$  desaparece.

- $M$  tiene métrica de Kahler con holonomía global contenida en  $SU(n)$ .

Entonces se define una variedad de Calabi-Yau si  $M$  es una variedad de Kahler que satisface cualquiera de las condiciones (equivalentes) del teorema anterior.

Ejemplo:

Una Variedad de Calabi-Yau 1-dimensional es una curva elíptica compleja, en particular una algebraica.

## 2. Teoría de Deformación

DEFINICIÓN 3.5. Sea  $k$  un cuerpo de característica cero, un anillo de Artin  $(A_R)$  sobre  $k$  es un anillo  $R$  conmutativo, local tal que  $R/R^+ = K$  donde  $R^+$  es el único ideal maximal de  $R$ .

DEFINICIÓN 3.6. Sea  $A$  un objeto con una estructura algebraica. Decimos que una deformación de  $A$  es una estructura algebraica. Una deformación de  $A$  es un aestructura  $A_R$ , del mismo tipo que  $A$ , tal que  $\frac{A_R}{R^+A}$  es isomorfa a  $A$ .

Cuando  $A_R = A \otimes R$  y  $R = R[[t]]$ , entonces decimos que la llamada deformación es formal, si  $\frac{R[[t]]}{t^2}$ , entonces decimos que la deformación es infinitesimal.

DEFINICIÓN 3.7. Sea  $A$  una álgebra asociativa, una deformación formal de  $A$ , está dada por una álgebra  $A_t$  junto con una serie formal  $F = \sum_{n \geq 0} f_n t^n$  con coeficientes en  $Hom(A \otimes A, A)$  tal que  $F$  es el producto en  $A_t$  y  $(A_0, f_0)$  es la álgebra  $A$  junto con su producto.

Ejemplo: Sea  $A = C[x, y]/(y^2 - x^3)$  y  $A_t = C[x, y, t]/(y^2 - x^3 - x^2t)$ .

DEFINICIÓN 3.8. Sea  $A$  una álgebra asociativa, una deformación infinitesimal de  $A$ , está dada por una álgebra  $A_t$  junto con una aplicación  $F = f_0 + t f_1$  con  $t^2 = 0$  y  $f_1 \in Hom(A \otimes A, A)$ , tal que  $F$  es el producto en  $A_t$  y  $(A_0, f_0)$  es la álgebra  $A$  junto con su producto.

La cohomología de Hochschild controla las deformaciones infinitesimales.

## 3. Álgebras y módulos $\mathcal{A}_\infty$

DEFINICIÓN 3.9. Sea  $A^\bullet$  un  $\mathbf{k}$ -módulo  $Z$ -graduado. Una estructura de **álgebra**  $\mathcal{A}_\infty$  sobre  $A^\bullet$  está dada por una coderivación  $\delta$  de grado 1 sobre  $T(A[1])$ , tal que  $\delta^2 = 0$ .

Si denotamos por  $m_k$  la componente en  $Hom((A[1])^{\otimes k}, A[1])$  de  $\delta$ , entonces la condición  $\delta^2 = 0$  se puede escribir como:

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{(r+1+t)r} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0$$

Equivalentemente, podemos definir las álgebras  $\mathcal{A}_\infty$  de la siguiente forma

**DEFINICIÓN 3.10.** Una estructura de álgebra  $\mathcal{A}_\infty$  sobre  $A^\bullet$  está dada por una familia de homomorfismos  $m_k : (A[1])^{\otimes k} \rightarrow A[1]$  de grado 1 tal que la coderivación  $\delta$  de grado 1 sobre  $T(A^\bullet[1])$  (dada por el *Lema ??*) satisface  $\delta^2 = 0$ , es decir

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{(r+1+t)r} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

En particular se tiene que  $m_1^2 = 0$ , por lo tanto este es un diferencial sobre  $A^\bullet$ , de modo que definimos la cohomología del álgebra  $\mathcal{A}_\infty (A^\bullet, \delta)$ , como la cohomología del complejo  $(A^\bullet, m_1)$ .

**EJEMPLOS 3.11.** Sea  $(A^\bullet, m, d)$  una adg, si hacemos

$$m_1(x) = (-1)^{\bar{x}} dx, \quad m_2(x, y) = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+1)} m(x, y)$$

y  $m_k = 0$  para  $k \geq 3$ ; entonces la familia  $\{m_k\}$  determina una estructura de álgebra  $\mathcal{A}_\infty$  sobre  $A^\bullet$ .

**DEFINICIÓN 3.12.** Sean  $(A^\bullet, \delta_A)$  y  $(B^\bullet, \delta_B)$  dos álgebras  $\mathcal{A}_\infty$ , un  $\mathcal{A}_\infty$ -morfismo  $f : (A^\bullet, \delta_A) \rightarrow (B^\bullet, \delta_B)$  es un homomorfismo de cóalgebras  $f : T(A[1]) \rightarrow T(B[1])$  tal que  $f\delta_A = \delta_B f$ .

**DEFINICIÓN 3.13.** Decimos que dos álgebras  $\mathcal{A}_\infty$ ,  $(A^\bullet, \delta_A)$  y  $(B^\bullet, \delta_B)$  son quasi-isomorfas si existe un  $\mathcal{A}_\infty$ -morfismo que induce isomorfismo en cohomología.

La demostración del siguiente teorema se puede hallar en [?]

**TEOREMA 3.14.** Sea  $(A^\bullet, \delta)$  un álgebra  $\mathcal{A}_\infty$ . Entonces la cohomología  $H^\bullet(A)$  tiene una estructura de álgebra  $\mathcal{A}_\infty$ , tal que:

- (1)  $m_1 = 0$  y  $m_2$  es inducido por  $m_2^A$ .

- (2) *Existe un quasi-isomorfismo de álgebras  $A_\infty$ ,  $H^\bullet(A) \rightarrow A^\bullet$  que levanta la identidad de  $H^\bullet(A)$ .*

DEFINICIÓN 3.15. Sean  $f, g : (A^\bullet, \delta_A) \rightarrow (B^\bullet, \delta_B)$  dos  $A_\infty$ -morfismos, decimos que  $f$  y  $g$  son **homotópicos** si existe una aplicación  $h : T(A[1]) \rightarrow T(B[1])$  de grado -1 tal que

$$\Delta h = f \otimes h + h \otimes g \quad \text{y} \quad f - g = \delta_B h + h \delta_A.$$

DEFINICIÓN 3.16. Un  $A_\infty$ -morfismo  $f : (A^\bullet, \delta_A) \rightarrow (B^\bullet, \delta_B)$  es una **equivalencia homotópica** si existe un  $A_\infty$ -morfismo  $g : (B^\bullet, \delta_B) \rightarrow (A^\bullet, \delta_A)$  tal que las composiciones  $fg$  y  $gf$  son homotópicas a la identidad. Dos álgebras  $A_\infty$  son homotópicamente equivalentes si existe una equivalencia homotópica entre ellas.

El siguiente teorema es útil para demostrar que un  $A_\infty$ -morfismo es una equivalencia homotópica, su prueba puede verse en [8, 11]

TEOREMA 3.17. *Para  $A_\infty$ -morfismos se tienen los siguientes resultados:*

- (1) *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de  $A_\infty$ -morfismos.*
- (2) *Un  $A_\infty$ -morfismo es un quasi-isomorfismo si y sólo si es una equivalencia homotópica.*

DEFINICIÓN 3.18. Sea  $A$  una álgebra  $A_\infty$

Un módulo  $\mathcal{A}_\infty$  es un espacio graduado  $M$  junto con la aplicación:

$$b_n : SM \otimes (SA)^{\otimes n-1} \rightarrow SM, n \geq 1,$$

es homogénea de grado 1.

#### 4. Deformaciones de álgebras $A_\infty$

Como antes, sea  $\mathbf{k}$  un cuerpo y sea  $\mathcal{R}$  un anillo local tal que  $\mathbf{k} \cong \mathcal{R}/\mathcal{R}_+$ .

DEFINICIÓN 3.19. Sea  $(A^\bullet, \delta_A)$  un álgebra  $A_\infty$ , una deformación de  $(A^\bullet, \delta_A)$  sobre  $\mathcal{R}$  es un par  $((A_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{A_{\mathcal{R}}}), i_A)$  tal que  $(A_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{A_{\mathcal{R}}})$  es un álgebra  $A_\infty$  sobre  $\mathcal{R}$  e  $i_A : A_{\mathcal{R}}^\bullet/\mathcal{R}_+ A_{\mathcal{R}}^\bullet \rightarrow A^\bullet$  es un isomorfismo de álgebras  $A_\infty$ .

De nuevo, esto es equivalente a que  $\delta_{A_{\mathcal{R}}}$  se proyecte a  $\delta_A$  bajo la proyección natural  $\pi : A_{\mathcal{R}}^\bullet \rightarrow A_{\mathcal{R}}^\bullet / \mathcal{R}_+ A_{\mathcal{R}}^\bullet \cong A^\bullet$ .

Cuando  $A_{\mathcal{R}}^\bullet = A^\bullet \otimes \mathcal{R}$ , se debe tener  $\delta_{A_{\mathcal{R}}} = \delta_A + e$  donde  $e \in \text{Coder}(T(A^\bullet \otimes \mathcal{R}_+[1]))$ , o equivalentemente  $e \in \text{Coder}(T(A^\bullet[1]) \otimes \mathcal{R}_+)$ , de grado 1. La condición  $\delta_{A_{\mathcal{R}}}^N = 0$  implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{A_{\mathcal{R}}}^2 \\ &= (\delta_A + e)^2 \\ &= \delta_A e + e \delta_A + e^2 \\ &= \delta_{\text{End}(T(A[1]))}(e) + e^2 \end{aligned}$$

De modo que  $e$  debe satisfacer la ecuación de Maurer-Cartan.

DEFINICIÓN 3.20. Sea  $(A^\bullet, \delta_A)$  una  $A_\infty$ -álgebra sobre  $R$  y sean  $(A_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{A_{\mathcal{R}}}, i_A)$ ,  $(B_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{B_{\mathcal{R}}}, i_B)$  deformaciones de  $(A^\bullet, \delta_A)$  sobre  $\mathcal{R}$ . Decimos que  $(A_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{A_{\mathcal{R}}}, i_A)$  es isomorfa a  $(B_{\mathcal{R}}^\bullet, \delta_{B_{\mathcal{R}}}, i_B)$  si existe un  $A_\infty$ -isomorfismo  $\Phi : A_{\mathcal{R}}^\bullet \rightarrow B_{\mathcal{R}}^\bullet$  tal que el isomorfismo inducido  $\bar{\Phi} : A_{\mathcal{R}}^\bullet / \mathcal{R}_+ A_{\mathcal{R}}^\bullet \rightarrow B_{\mathcal{R}}^\bullet / \mathcal{R}_+ B_{\mathcal{R}}^\bullet$  satisface  $i_B \bar{\Phi} = i_A$ .

DEFINICIÓN 3.21. Definimos el functor de deformación  $\text{Def}_A : \mathbf{Artin} \rightarrow \mathbf{Set}$  asociado a  $A^\bullet$ . El functor  $\text{Def}_A$  está dado por:

- (1) Sea  $\mathcal{R} \in \text{Ob}(\mathbf{Artin})$ .  $\text{Def}_A(\mathcal{R})$  es el conjunto de todas las clases de isomorfismo de las deformaciones de  $A^\bullet$  sobre  $\mathcal{R}$ .
- (2) Sea  $\varphi \in \text{Mor}_{\mathbf{Artin}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$  y sea  $A_{\mathcal{R}}^\bullet$  una deformación de  $A^\bullet$  sobre  $\mathcal{R}$ . Hacemos  $\text{Def}_A(\varphi)(A_{\mathcal{R}}^\bullet) = A_{\mathcal{R}}^\bullet \otimes \mathcal{R}'$ .

Es fácil ver que  $\text{Def}_A$  es un functor formal de moduli.

Sean  $(A^\bullet, \delta)$  una  $A_\infty$ -álgebra,  $b \in A^1 \otimes \mathcal{R}$ , denotemos por

$$e^b = \sum_{k \geq 0} b^{\otimes k}$$

y para un elemento no-homogéneo  $a \in T(A^\bullet[1])$  denotaremos por

$$m(a) = m_1(a_1) + m_2(b_1, b_2) + m_3(c_1, c_2, c_3) + \dots$$

donde  $a = a_1 \oplus (b_1 \otimes b_2) \oplus (c_1 \otimes c_2 \otimes c_3) \oplus \dots$ .

Definimos  $e_b \in \text{Coder}(T(A^\bullet[1]) \otimes \mathcal{R}_+)$  como la coderivación que generan los morfismos  $\{m_n^b\}$  definidos por

$$\begin{aligned} m_1^b(a) &= m(e^b, a, e^b) \\ m_n^b(a_1, \dots, a_n) &= m(e^b, a_1, e^b, a_2, \dots, a_{n-1}, e^b, a_n, e^b) \end{aligned}$$

$e_b$  es la coderivación asociada al elemento  $b$ , se tiene que  $(A^\bullet \otimes \mathcal{R}_+, e_b)$  es una deformación de  $(A^\bullet, \delta_A)$  si  $m(e^b) = 0$ . Este hecho se sigue del siguiente resultado

PROPOSICIÓN 3.22.  $m_1^b m_1^b = 0$  si y sólo si  $m(e^b) = 0$ , y en general

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{(r+1+t)r} m_{r+1+t}^b(1^{\otimes r} \otimes m_s^b \otimes 1^{\otimes t}) = 0$$

si y sólo si  $m(e^b) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} m_1^b(m_1^b(a)) &= m_1^b(m(e^b, a, e^b)) \\ &= m(e^b, m(e^b, a, e^b), e^b) \\ &= \pm m(m(e^b, e^b), a, e^b, e^b) \pm m(e^b, e^b, a, m(e^b, e^b)) \\ &= \pm m(m(e^b), a, e^b) \pm m(e^b, a, m(e^b)). \end{aligned}$$

La segunda parte de la proposición se demuestra de manera análoga. □

Llamamos a  $m(e^b) = 0$  la ecuación de Maurer-Cartan y decimos que un elemento  $b \in A^1 \otimes \mathcal{R}_+$  es un **elemento de Maurer-Cartan** de  $A^\bullet \otimes \mathcal{R}$  si  $e_b$  satisface  $m(e^b) = 0$ .

DEFINICIÓN 3.23. Definimos el funtor de Maurer-Cartan  $\overline{MC}(A) : \mathbf{Artin} \rightarrow \mathbf{Set}$  asociado al álgebra  $A_\infty (A^\bullet, \delta_A)$ , el funtor  $\overline{MC}(A)$  está dado por:

- (1) Sea  $\mathcal{R}$  un objeto de  $\mathbf{Artin}$ .  $\overline{MC}(A)(\mathcal{R})$  es el conjunto de todos los elementos de Maurer-Cartan de  $A^\bullet \otimes \mathcal{R}$ .

- (2) Si  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  es un morfismo en **Artin** y  $b$  es un elemento de Maurer-Cartan de  $A^\bullet \otimes \mathcal{R}$ , entonces  $(1 \otimes \varphi)(b)$  es un elemento de Maurer-Cartan de  $A^\bullet \otimes \mathcal{R}'$ . Así se obtiene una aplicación  $\varphi_*$  de  $\overline{MC}(A)(\mathcal{R})$  en  $\overline{MC}(A)(\mathcal{R}')$ .

$\overline{MC}(A)(\mathcal{R})$  es un funtor formal de moduli. Sin embargo el conjunto  $\overline{MC}(A)(\mathcal{R})$  es usualmente demasiado grande, de manera que lo dividimos mediante una apropiada relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 3.24. Sean  $b, b' \in \overline{MC}(A)(\mathcal{R})$ , decimos que  $b$  es equivalente a  $b'$ , si existe una equivalencia homotópica  $h : A^\bullet \otimes \mathcal{R} \rightarrow A^\bullet \otimes \mathcal{R}$  tal que  $h(b) = b'$ .

DEFINICIÓN 3.25. Definimos el funtor  $MC(A) : \mathbf{Artin} \rightarrow \mathbf{Set}$  asociado al álgebra  $A_\infty(A^\bullet, \delta_A)$ , al que también denominaremos de Maurer-Cartan, el funtor  $MC(A)$  está dado por:

- (1) Sea  $\mathcal{R}$  un objeto de **Artin**.  $MC(A)(\mathcal{R})$  es el conjunto de todas las clases de equivalencias de los elementos de  $\overline{MC}(A)(\mathcal{R})$ .
- (2) Si  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  es un morfismo en **Artin** y  $\varphi_* : \overline{MC}(A)(\mathcal{R}) \rightarrow \overline{MC}(A)(\mathcal{R}')$ , entonces hacemos  $\varphi_*(\bar{b}) = \overline{\varphi_*(b)}$

El siguiente resultado muestra que el funtor de Maurer-Cartan es un invariante homotópico.

TEOREMA 3.26 (Fukaya). *Si  $(A^\bullet, \delta_A)$  y  $(B^\bullet, \delta_B)$  son álgebras  $A_\infty$  homotópicamente equivalentes, entonces el funtor  $MC(A)$  es equivalente al funtor  $MC(B)$ .*

Presentamos ahora el resultado más importante de esta sección y el cual establece, que las deformaciones de una  $A_\infty$ -álgebra están controladas por la ecuación de Maurer-Cartan.

TEOREMA 3.27. *Sea  $A^\bullet$  una  $A_\infty$ -álgebra, entonces el funtor  $MC(A)$  y el funtor  $\mathcal{D}ef_A$  son equivalentes.*

## 5. Simetría Espejo Homológica

La versión homológica, ó la conjetura homológica espejo, reformula esta conjetura como equivarianza de categorías trianguladas construídas desde distintas propiedades de la variedad de Calabi-Yau de dos geometrías. La variedad de Calabi-Yau está determinada por

dos partes: La parte compleja y la parte simpléctica, si estudiamos la parte compleja, nos encargamos de estudiar geometría algebraica, en cambio para comprender la parte simpléctica, nos enfocamos en geometría simpléctica. El objetivo de esta versión es encontrar alguna relación entre estas dos geometrías. Kontsevich encontró ésta relación. La versión homológica formula que la categoría de haces coherentes es equivalente a la categoría de Fukaya.

DEFINICIÓN 3.28. Sea  $(M, \omega)$ , una variedad simpléctica,  $L_0, L_1$ , subvariedades Lagrangianas compactas intersectadas transversalmente. Los complejos  $CF(L_0, L_1) = \wedge^{|L_0 \cap L_1|}$  induce un diferencial  $m_1$ , un producto  $m_2$ , y las operaciones:

- (1)  $CF^*(L_0, L_1) \otimes \dots \otimes CF^*(L_{k-1}, L_k) \xrightarrow{m_k} CF^*(L_0, L_k)[2..k]$ . Hemos fijado en el disco de aplicaciones  $J$ -holomorfas  $u$  desde el disco  $D^2$  con puntos identificados desde la frontera, a discos en la variedad, entre  $L_0, \dots, L_k$  con  $u(z_0) = q \in L_0 \cap L_k$ ,  $u(z_i) = p_i \in L_{i-1} \cap L_i$ , la dimensión de la variedad  $M(p_1, \dots, p_k, q, [u], J)$  es  $gradq - (gradp_1 + \dots gradp_k) + k - 2$ . Asumiendo la transversabilidad,
- (2)  $m_k(p_k, \dots, p_1) = \sum_{q \in L_0 \cap L_k, ind([u])=0} (\#M(p_1, \dots, p_k, q, [u], J)) T^{\omega(u)} q$ . Mirando  $\delta$ , obtendremos las siguientes relaciones  $A_{infy}$

PROPOSICIÓN 3.29. *Asumiendo que los discos y esferas no se autointersectan,*

$$\forall m \geq 1, (p_1, \dots, p_m), p_i \in L_{i-1} \cap L_i$$

$$\sum_{k,l \geq 1, k+l=m+1, 0 \leq j \leq l-1} (-1)^* m_l(p_m, \dots, p_{j+k+1}, m_k(p_{j+k}, \dots, p_{j+1}), p_j, \dots, p_1) = 0$$

$$\text{donde } * = grad(p_1) + \dots + grad(p_j + j)$$

DEFINICIÓN 3.30. La categoría  $A_\infty$  es una categoría lineal donde los morfismos de los espacios tienen asociados operaciones algebraicas  $(m_k)_{k \geq 1}$  que satisfacen las relaciones  $A_\infty$  relaciones.

Particularmente:

DEFINICIÓN 3.31. Una categoría de Fukaya es una categoría  $A_\infty$  cuyos objetos son subvariedades Lagrangianas y los morfismos son los complejos de Floer.

DEFINICIÓN 3.32. Sea  $X$  una variedad compleja,  $O(X)$  es el haz de todas las funciones holomorfas sobre  $X$ . Un haz coherente  $F$  es un haz de los  $O(x)$  - *modulos* tal que:

- $F$  es de tipo finito, es decir, existe un cubrimiento abierto que refine a  $U_i$ . Es decir  $F|_{U_i}$  es generado por un número finito de secciones, ie, existe una aplicación suryectiva  $O_X|_{U_i}^{\oplus n} \rightarrow F|_{U_i}$
- Para todo  $U \subset X$  abierto,  $\phi : O_X|_U^{\oplus n} \rightarrow F|_U$  un homomorfismo de  $O_X$  – modulo, el  $\ker \phi$  es de tipo finito.

Ahora bien se define la categoría de haces coherentes como todos los haces complejos coherentes y acotados.

Conjetura de la simetría espejo homológica:

La categoría derivada de Fukaya  $Fuk(M)$  es equivalente a la categoría derivada de Haces coherentes  $QCoh(X)$ .

## CAPÍTULO 4

### Principios HMS generalizados

#### 1. Construcción de Fukaya

Existen dos descripciones de variedad compleja, una, que el cambio de cartas de la variedad sea holomorfo y la otra viene dada por el siguiente teorema:

**TEOREMA 4.1.** *Newlander-Niremberg* Sea  $M$  una variedad diferenciable, y sea  $J : TM_x \rightarrow TM_x$  si  $\dim(M) = 2n$  y  $J$  es integrable (como distribución), entonces  $M$  es una variedad compleja.

**COROLARIO 4.2.** *Una estructura Holomorfa sobre  $E$ , es una secuencia de operadores:*  
 $\delta_\epsilon : \omega^{0,q}(M, E) \rightarrow \omega^{p,q+1}(M, E)$  para  $p, q \in \{1, \dots, n\}$  tal que:

- $\delta_\epsilon \circ \delta_\epsilon = 0$
- $\delta_\epsilon(u \wedge \alpha) = d(u) \wedge \alpha + (-1)^{p+q} u \wedge \delta_\epsilon(\alpha)$  (Regla de derivación de Leibnitz) con  $u \in \omega^{p,q}(M), \alpha \in \omega^1(M; E)$

Consideremos el fibrado vectorial  $End(M)$  cuya fibra en  $p$  es  $Hom(E_p, E_p)$ .

Sea  $\omega^{p,q}(M, End(M))$  el conjunto de todas las secciones suaves de  $\wedge^{p,q} \otimes End(E)$

Definimos los operadores:

- $\circ : \omega^{p,q}(M, End(M)) \otimes \omega^{p',q'}(M, E) \rightarrow \omega^{p+p',q+q'}(M, E)$ .
- $\circ : \omega^{p,q}(M; End(M)) \otimes \omega^{p',q'}(M, End(E)) \rightarrow \omega^{p+p',q+q'}(M, End(E))$

Usando:

$$End(E) \otimes E \rightarrow E, End(M) \otimes End(M) \rightarrow End(E)$$

y el producto wedge de manera obvia.

Una estructura holomorfa  $\delta_\epsilon$  sobre  $E$  induce una estructura holomorfa sobre  $End(E)$  por:

$$\delta_\epsilon(B) = \delta_\epsilon \circ B - (-1)^{grad B} B \delta_\epsilon$$

**TEOREMA 4.3.** *Sea  $\delta_{\epsilon'}$  otra estructura holomorfa sobre  $\Pi_E : E \rightarrow M$  entonces, existe una sección  $B \in \omega^{0,1}(M, End(E))$  tal que:*

$$\delta_{\epsilon'}(\alpha) = \delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ \alpha, \text{ con } \alpha \in \omega(M, E) \quad (1)$$

Donde  $B$  satisface la ecuación diferencial  $\delta_{\epsilon}B + B \circ B = 0$  (2)

Por otro lado, sea  $B \in \omega^{0,1}(M, \text{End}(M))$  una sección que satisface (2) definimos a  $\delta_{\epsilon'}$ . Luego  $\delta_{\epsilon'}$  define una estructura holomorfa sobre  $\Pi : E \rightarrow M$ .

Prueba: Por definición, encontramos que:  $\delta_{\epsilon'} - \delta_{\epsilon}(u \wedge \alpha) = (-1)^{\text{grad}u} u \wedge (\delta_{\epsilon'} - \delta_{\epsilon})(\alpha)$

Como consecuencia, que  $\delta_{\epsilon'} - \delta_{\epsilon}$  es inducido por la sección de  $\omega^{0,1}(M, \text{End}(M))$ , la cual para mostrar la propiedad (2) vemos:

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon'}(\delta_{\epsilon'}(\alpha)) &= \delta_{\epsilon'}(\delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ \alpha) = \delta_{\epsilon}(\delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ \alpha) + B \circ (\delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ \alpha) \\ &= \delta_{\epsilon}B \circ \alpha - B \circ \delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ \delta_{\epsilon}(\alpha) + B \circ B \circ \alpha = (\delta_{\epsilon}B + B \circ B) \circ \alpha \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.4. Un módulo diferencial graduado sobre una álgebra diferencial graduada  $(A, \cdot, d)$  es por definición, una terna  $(C^*, \cdot, d)$  tal que:

- (1) Para cada  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M^k$  es un  $R$ -módulo (escribimos  $\text{grada} = k$  si  $a \in M^k$ )
- (2)  $\cdot : A^k \otimes M^l \rightarrow M^{k+l}$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos con la asociatividad.
- (3)  $d : M^k \rightarrow M^{k+1}$  es un homomorfismo  $R$ -módulos tal que  $d \circ d = 0$
- (4)  $d(a \cdot x) = d(a) \cdot x + (-1)^{\text{grada}a} a \cdot d(x)$  para  $a \in A, x \in M$ .

DEFINICIÓN 4.5. Dados dos módulos diferenciales graduados  $(M, \cdot_M, d_M)$  y  $(N, \cdot_N, d_N)$  sobre  $(A, \cdot_A, d_A)$  una aplicación  $f : M \rightarrow N$  es un homomorfismo de módulos diferenciales graduados si se tiene que:

- (1)  $f(m_M(a, b)) = (-1)^{\bar{a}f} m_N(a, f(b))$  para todo  $a \in A$  y  $b \in M$ .
- (2)  $d_N \circ f = f \circ d_M$

Es natural preguntarse ¿cuándo en el fibrado existe una estructura compleja? la respuesta es cuando  $\bar{\delta}_{\epsilon}$  induce una estructura de módulo diferencial graduado. Se concluye que la construcción de Fukaya se fundamenta en sustituir la estructura de variedad compleja por una de un fibrado holomorfo inducido por el diferencial  $\bar{\delta}_{\epsilon}$ , en otras palabras la estructura holomorfa sobre  $E$  es una estructura sobre  $\Omega(M, E)$  de módulo diferencial graduado, así, en vez de estudiar la deformación de la estructura compleja como tal, estudiamos la deformación del diferencial la cual es más simple, ésta es controlada por (2) la ecuación de Maurer-Cartan.

## 2. Construcción de Cao y Zhou

DEFINICIÓN 4.6. Una álgebra de Gerstenhaber es una álgebra diferencial graduada conmutativa, con un corchete de Lie de grado -1, que satisface la identidad de Poisson, el grado de un elemento lo denotamos por  $| |$ , el cual cumple con las siguientes propiedades:

- $| a | (ab) = | a | + | b |$ .
- $| [a, b] | = | a | + | b |$ .
- $(ab)c = a(bc)$ ,  $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ .
- $[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{|a|-1|b|}b[a, c]$ .
- $[a, b] = -(-1)^{|a|-1|b|-1}[b, a]$ .
- $[[a, b], c] = [a, [b, c]] - (-1)^{|a|-1|b|-1}[b, [a, c]]$ .

Sean dos álgebras, de Batalin Vilkovisky,  $(A, \wedge, [ ])$   $(B, \wedge', [ ]')$ , sea  $f$  una aplicación lineal de grado cero, diremos que es un morfismo de álgebra de Batalin Vilkovisky si:

- $f$  es morfismo de álgebras asociativas graduadas, es decir  $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f$  es un morfismo de álgebras de Lie graduadas, es decir  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Ejemplos:

- (1) Sea  $g$  una álgebra de Lie, entonces el álgebra exterior del álgebra de Lie,  $\wedge_*(g)$  es naturalmente una álgebra de Gerstenhaber, para el producto exterior y una prolongación natural del corchete de  $g$
- (2) Sea  $X$  una variedad diferenciable, sea  $\tau X \rightarrow X$  su espacio tangente, y  $\wedge_* \rightarrow X$  el álgebra exterior asociada al fibrado. Sea  $\omega_*(x) = \Gamma(X, \wedge_* \tau X)$  el espacio de secciones, en otras palabras el espacio de los campos tensoriales diferenciables contravariantes. Entonces  $(\omega_*(x), \wedge, [ , ])$  es una álgebra exterior de Gerstenhaber para el producto exterior  $\wedge$  de campos tensoriales, donde  $[ , ]$  es el operador de Schouten.

DEFINICIÓN 4.7. Una Álgebra de Batalin Vilkovisky es una álgebra (conmutativa) graduada, con un operador diferencial de segundo orden  $\Delta$  que satisface:

- $(ab) = a + b$
- $(\Delta(a)) = 1 + (a)$
- $(ab)c = a(bc)$ ,  $(ab) = (-1)^{(a)(b)}ba$
- $\Delta^2 = 0$

Sean dos álgebras de Batalin-Vilkovisky,  $(A, \Delta, \wedge, [, ])$ ,  $(B, \Delta', \wedge', [, ]')$ , sea  $f$  una aplicación lineal de grado cero, diremos que es un morfismo de álgebra de Batalin-Vilkovisky si:

- $f$  es morfismo de álgebras asociativas graduadas, es decir  $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f$  es un morfismo de álgebras de Lie graduadas, es decir  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Se satisface  $f(a, b) = f(a), f(b)$

Ejemplos:

- (1) Tomemos  $(\wedge_*(g), \wedge, \delta)$  es una álgebra de Batalin-Vilkovisky, donde  $\delta$  es el diferencial del complejo homológico de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie  $g$  con coeficientes escalares:

$$\delta(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} (-1)^i + j [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_p$$

- (2) Para una variedad de Poisson  $(P, \wedge)$ , sea  $(\omega_*(P), \wedge, \delta)$  la estructura natural de Gerstenhaber asociada a él. Entonces el operador  $d_\wedge = [i(\wedge), d]$  genera el corchete de Gerstenhaber, así se obtiene una álgebra de Batalin-Vilkovisky  $(\wedge_*(P), \wedge, d_\wedge)$

## Álgebras de Batalin-Vilkovisky proveniente del espacio de campos polivectoriales

DEFINICIÓN 4.8. Sea  $\omega^*(M) = \Gamma(M, \wedge^* TM)$  es espacio de campos polivectoriales sobre  $M$

DEFINICIÓN 4.9. Dados dos campos de vectores diferenciables  $X$  y  $Y$  sobre una variedad  $M$ , se define el corchete de Lie para campos vectoriales, denotado como  $[X, Y]$ , de la siguiente manera:

$$[X, Y]_f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

El corchete de Lie para campos vectoriales puede ser extendido por el corchete de Schouten-Nijenhuis,  $[., .]_s$ , definido como:

$$[., .]_s : \omega^{-*}(M) \times \omega^{-*}(M) \rightarrow \omega^{-*}(M)$$

de grado -1, dado localmente por:

$$[X_1 \wedge \dots \wedge X_p, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_q]_s = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j+p+1} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \overline{X}_i \wedge \dots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \overline{Y}_j \wedge \dots \wedge Y_q$$

para campos vectoriales locales, pues bien,  $(\omega^*(M), \wedge, [\cdot, \cdot]_s)$  define una  $G$ -álgebra, para convertirla en álgebra de Batalin-Vilkovisky, enunciamos la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 4.10.** *Sean  $P, Q$  dos campos vectoriales de una variedad  $M$ , y sea  $[P, Q]$  su corchete de Schouten-Nijenhuis. El producto interior  $i([P, Q])$  está expresado, en términos del diferencial exterior  $\delta$  y de sus productos interiores  $i(P)$  e  $i(Q)$ , mediante:*

$$i([P, Q]) = -[[i(Q), \delta], i(P)]$$

Ahora  $(\omega^*(M), \wedge, [\cdot, \cdot]_s, \delta)$  define una álgebra de Batalin-Vilkovisky.

### Álgebras de Batalin-Vilkovisky provenientes de variedades de Calabi-Yau.

Recordemos que a una variedad de Kahler es llamada una variedad de Calabi-Yau si ella admite una forma de volúmen paralelo holomorfo. Esta terminología proviene de la solución de Yau para la solución de la conjetura de Calabi.

Dada una variedad Calabi-Yau  $n$ -dimensional  $M$ , la forma del volúmen holomorfo  $\Omega$  define un isomorfismo  $\Omega^{-*,*}(M) \rightarrow \Omega^{n-*,*}(M)$ .

**DEFINICIÓN 4.11.** Sea  $\Delta : \Omega^{-*,*}(M) \rightarrow \Omega^{-(*-1),*}(M)$  la conjugación de  $\delta$  via isomorfismo.

Se puede probar que  $[\cdot, \cdot]_\Delta = [\cdot, \cdot]_s$  tal que  $\Delta$  dá lugar a una álgebra de Batalin-Vilkovisky sobre  $\Omega^{-*,*}(M)$ .

Si partimos del resultado de que  $\bar{\delta}\Omega = 0$ , uno puede ver que  $\bar{\delta}\Delta + \Delta\bar{\delta} = 0$ .

Así pues  $(\Omega^{-*,*}(M), \wedge, \bar{\delta}, \Delta, [\cdot, \cdot]_\Delta)$  induce una álgebra de Batalin-Vilkovisky.

**DEFINICIÓN 4.12.** Una variedad de Poisson es una variedad diferencial  $M$ , tal que el álgebra  $C^\infty(M)$  de funciones diferenciables sobre  $M$  admite una aplicación lineal, llamada el corchete de Poisson. Diremos que una variedad de Poisson es regular, si  $\omega$  tiene rango constante

Sobre una variedad de Poisson se define  $\sigma : \omega^{-*}(M) \rightarrow \omega^{-(**+1)}(M)$  mediante  $\sigma(P) = [\omega, P]$ , entonces  $(\omega^*(M), \wedge, [\cdot, \cdot]_s)$  es una  $G$ -álgebra, hay una estructura de álgebra de Batalin-Vilkovisky asociada a la variedad de Poisson. Koszul definió el operador  $\Delta = [i(\omega), d] : \Omega^* \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$  donde  $i(\omega)$  denota la contracción de  $\omega$ . Se ha probado que  $[\delta, \Delta] = \Delta^2 = 0y[\cdot, \cdot]_s$  satisface la regla de derivación de Leibnitz:

$$[\alpha \bullet (\beta \wedge \gamma)]_\Delta = [[\alpha \bullet \beta]_\Delta \wedge \gamma + (-1)^{(|\alpha|-1)|\beta|} \beta \wedge [\alpha \bullet \gamma]_\Delta$$

Por lo tanto  $(\Omega^*(M), \wedge, d, \Delta, [\cdot, \cdot]_\Delta)$  es una álgebra de Batalin-Vilkovisky.

**Álgebras de Batalin-Vilkovisky provenientes de una variedad simpléctica.** Una variedad simpléctica  $M$  es de forma natural una variedad de Poisson, por lo tanto existen una álgebras diferenciales asociadas. De hecho, la forma simpléctica  $\omega$  induce un isomorfismo  $\phi : \omega^*(M) \rightarrow \omega^{-*}(M)$  y  $\beta : \omega^{-*}(M) \rightarrow \omega^*(M)$ . Si mencionamos el teorema de Darboux se puede probar que el bivector (archivado)  $\omega = \omega^\phi$  es una estructura de Poisson. Además se puede ver que:  $d = [\omega, \bullet, \cdot]_\Delta$ . La forma simpléctica induce un isomorfismo de álgebra diferencial graduada. La forma simpléctica induce un isomorfismo de álgebras diferencial graduada,  $(\omega^{-*}, \wedge, \sigma, \Delta, [\cdot, \cdot]_S) \cong (\omega^*, \wedge, d, \Delta, [\bullet, \bullet]_\Delta)$ .

Como resultado hemos propuesto una versión de la conjetura de simetría espejo homológica:

Para una variedad de Calabi-Yau  $M$  y su variedad espejo  $\overline{M}$  definida de forma conveniente, las álgebras diferenciales de Batalin-Vilkovisky:

$$(\Omega^{*,*}(M), \wedge, d, (d_c^*), [\cdot, \cdot]_{(d_c^*)})$$

y

$$(\Omega^{-*,*}(\overline{M}), \wedge, \bar{d}, \Delta, [\cdot, \cdot]_S)$$

**DEFINICIÓN 4.13.** Denotamos por  $ADBV_{qi}$  la subcategoría de  $ADBV_q$  consiste de álgebras de Batalin-Vilkovisky en  $ADBV_q$  las cuales admiten integrales "nice". Un quasi-isomorfismo entre dos elementos en  $ADBV_q$  ( $ADBV_{qi}$ ) es un morfismo en  $ADBV_q$  ( $ADBV_{qi}$ ) el cual induce un morfismo sobre los grupos de cohomología.

por lo tanto las dos estructuras de álgebras de Batalin-Vilkovisky son quasi-isomorfas.

**DEFINICIÓN 4.14.** Sea  $A$  una  $Q$ -álgebra. Una métrica invariante sobre una álgebra conmutativa  $(H, \wedge)$  sobre  $A$  es una aplicación no-degenerada  $\eta : H \times H \rightarrow A$  tal que:

- (1)  $\eta(X, Y) = \eta(Y, X)$
- (2)  $\eta(X \wedge Y, Z) = \eta(X, Y \wedge Z)$

para  $X, Y, Z \in H$ , la terna  $(H, \wedge, \eta)$  es llamada el Álgebra de Frobenius.

Ejemplo:

- Sea  $M$  una variedad de dimensión finita, diferenciable, orientada y cerrada, entonces el teorema de la cohomología de de Rham  $H^*(M)$  junto con el producto wedge  $\wedge$

es una álgebra conmutativa sobre  $R$ . Sea  $\int_M : H^*(M) \rightarrow R$ , entonces el teorema de dualidad de Poincaré garantiza que  $\int_M$  induce una estructura de álgebra de Frobenius sobre  $(H^*(M), \wedge)$ .

DEFINICIÓN 4.15. Sea  $A$  una  $Q$ -álgebra. Una métrica invariante sobre una álgebra conmutativa  $(H, \wedge)$  sobre  $A$  es una aplicación no-degenerada  $\eta : H \times H \rightarrow A$  tal que:

- (1)  $\eta(X, Y) = \eta(Y, X)$
- (2)  $\eta(X \wedge Y, Z) = \eta(X, Y \wedge Z)$

para  $X, Y, Z \in H$ , la terna  $(H, \wedge, \eta)$  es llamada el Álgebra de Frobenius.

Ejemplo:

- Sea  $M$  una variedad de dimensión finita, diferenciable, orientada y cerrada, entonces el teorema de la cohomología de de Rham  $H^*(M)$  junto con el producto wedge  $\wedge$  es una álgebra conmutativa sobre  $R$ . Sea  $\int_M : H^*(M) \rightarrow R$ , entonces el teorema de dualidad de Poincaré garantiza que  $\int_M$  induce una estructura de álgebra de Frobenius sobre  $(H^*(M), \wedge)$ .

Un quasi-isomorfismo entre dos álgebras diferenciales graduadas  $A$  y  $B$  es una serie de álgebras diferenciales graduadas  $A_0, \dots, A_n$  y un homomorfismo entre las álgebras diferenciales graduadas  $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$  para  $0 \leq i \leq n-1$  tal que  $A_0 = A$ ,  $A_n = B$  y cada  $f_i$  induce un isomorfismo en cohomología.

Ecuaciones WDVV y estructura formal de variedad de Frobenius.

Denotamos por  $\{x^a\}$  las coordenadas en la base  $\{e_a\}$ . Consideremos una familia de multiplicaciones tanto asociativas como conmutativas  $\wedge_x$  sobre  $H$ , uno por cada  $x \in H$ , tal que:

$$\eta(X \wedge_x Y, Z) = \eta(X, Y \wedge_x Z)$$

para todo  $X, Y, Z, x \in H$ . Entonces tenemos una familia de 3-tensores  $\phi_{abc}(x)$ , estas familias tienen la propiedad que:

$$\frac{\partial}{\partial x^d} \phi_{abc}(x) = \frac{\partial}{\partial x^c} \phi_{abd}(x)$$

Dada una familia, uno puede encontrar una función  $\Phi : H \rightarrow k$  tal que:  $\phi_{abc} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c}$

por lo anterior,  $\Phi$  satisface las ecuaciones de (WDVV):  $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} \eta^{pq} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} \eta^{pq} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c}$

La función  $\Phi$  es llamada la función potencial. Una estructura formal de variedad de Frobenius sobre  $(H, \wedge, \eta)$  es una serie de potencia formal  $\Phi$  que satisfacen las ecuaciones de WDDV

Algunas teorías de homotopía racional.

Estructura de variedad formal de Frobenius sobre la cohomología de una álgebra de Gerstenhaber.

- (1) La cohomología algebraica  $H(A, \partial) = \frac{Ker\partial}{Im\partial}$  es libre y de rango finito como un  $k$ -módulo.
- (2) Es una integral nice sobre  $A$ .
- (3) Las inclusiones  $(Ker\Delta, \partial) \rightarrow (A, \partial)$  y  $(Ker\partial, \Delta) \rightarrow (A, \Delta)$  induce un isomorfismo en cohomología.

Conexiones con las series formales:

Dada una álgebra diferencial de Lie  $(L, [., .], d)$  fijamos una descomposición  $L = H \oplus dM \oplus M$  tal que  $H \subset Ker d$ , la aplicación natural  $H \rightarrow H(l, d)$  es un isomorfismo y  $d|_M$  es inyectivo. Tal que una descomposición es llamada la descomposición homológica. Fijamos una base homogénea  $\alpha_j \in H$ , denotamos  $X^J$  es la base dual. Cada  $X^J$  nos dá el grado  $-|\alpha_j + 1|$ . El espacio dual se denota por  $s^{-1}H^t$ . Sea  $\bar{S}(s^{-1}H^t) = \sum^n (s^{-1}H^t)$  modificando el método en referencia de forma inductiva construimos el diferencial  $b$  sobre  $\bar{S}(s^{-1}H^t)$  y una serie formal de potencias de la forma:

$$\omega = \sum \alpha_i X^i + \dots + \sum \alpha_{i_1 \dots i_n} X^{i_1} \odot \dots \odot X^{i_n} + \dots$$

donde  $\alpha_{i_1 \dots i_n} \in L$  es de grado  $1 - |X^{i_1}| - \dots - |X^{i_n}|$ , tal que:

$$b\omega + d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

Así naturalmente se ha extendido  $b$ ,  $d$  y  $[., .]$  sobre  $L \odot \bar{S}(s^{-1}H^t)$ .

Integrales "Nice"

**DEFINICIÓN 4.16.** Un funcional  $k$ -lineal  $f : A \rightarrow k$  sobre una álgebra diferencial de Batalin-Vilkovisky  $(A, \wedge, \delta, \Delta, [., .])$  es llamada una integral, es para todos los elementos homogéneos  $a, b \in A$

- (1)  $f(\delta a) \wedge b = (-1)^{|a|} + 1 \int a \wedge \delta b$
- (2)  $f(\Delta a) \wedge b = (-1)^{|a|} \int a \wedge \Delta b$

Dada una integral  $\eta(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge \beta$  define una forma lineal  $\eta$  sobre  $H(A, \delta)$ . Si  $\eta$  es no degenerado decimos que la integral es "nice". Entonces si  $A$  tiene una integral "nice" entonces  $(H(A, \delta), \wedge, \eta)$  es una Álgebra de Frobenius.

DEFINICIÓN 4.17. Estructura formal de variedad de Frobenius sobre la cohomología de una álgebra de Batalin Vilkovisky.

Sea  $(A, \wedge, \delta, \Delta, [., .])$  una álgebra de Batalin Vilkovisky que satisface las siguientes tres condiciones:

- (1) El álgebra cohomológica  $H(A, \delta) = \frac{Ker\delta}{Im\delta}$  es libre y de rango finito como un  $k$ -módulo.
- (2) Es una integral "nice" sobre  $A$ .
- (3) Las inclusiones  $(Ker\Delta, \delta) \rightarrow (A, \delta)$  y  $(Ker\delta, \Delta) \rightarrow (A, \Delta)$  inducen isomorfismos en cohomología.

Entonces existe una construcción canónica de una variedad de estructura formal de Frobenius con identidad de  $H(A, \delta)$ .

Esta construcción está implícita en referencia, en el caso especial de la extensión de la teoría de deformación extendida de las variedades Calabi- Yau basadas en el trabajo de Tian y Todorov referencia, las cuales fueron formuladas matemáticamente por Baranikov y Kontsevich referencia. Encontraremos descripciones en términos de la construcción de Chen de las conexiones de series formales de potencia. Partiendo de que  $(s, A, \delta, [., .])$  es una álgebra de Batalin Vilkovisky referencia se puede tomar una conexión con la serie formal de potencias  $\Gamma$  y una derivación  $\delta$  sobre  $K = S(H(A, \delta)^t)$  tal que:

$$\delta\Gamma + \delta T + \frac{1}{2}[\Gamma \bullet \Gamma] = 0.$$

La condición 3 implica que  $\delta = 0$ . Entonces,  $\Gamma$  satisface:

$$\delta T + \frac{1}{2}[\Gamma \bullet \Gamma] = 0,$$

entonces uno puede tomar  $\Gamma = \Gamma_1 + \Delta B$ , donde  $\Gamma_1 = \sum \alpha_j X^j$ . El conjunto  $\delta_\Gamma = \delta + [\Gamma, \bullet]$ , entonces  $\delta_\Gamma$  es una derivación de  $A_K = (A, \otimes K, \wedge)$ .

$$\text{Ahora } \delta_\Gamma^2 = [(\delta\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma\Gamma])\bullet] = 0$$

Se puede probar que  $H(A_K, \delta_\Gamma) \cong H(A, \delta) \otimes K$ , tal que la multiplicación en  $H(A_K, \delta_\Gamma)$  induce una deformación de la multiplicación en  $H(A, \delta)$ . Dado un  $X \in H(A, \delta)$ , la contracción de  $X$  por la derecha induce una derivación a derecha de grado  $|X|$  sobre  $K$  y también sobre  $A_K$ . Para  $\alpha \in A_K$ , denotamos por  $X\alpha$  la contracción de  $X$  por ambos lados, tomamos:

$$\delta(X\Gamma) + [\Gamma \bullet (X\Gamma)] = 0$$

Entonces  $X\Gamma$  representa una clase in  $H(A_K, \delta_\Gamma$  Siguiendo a Bershadsky en referencia:

$$\Phi = \int \frac{1}{6}\Gamma^3 - \frac{1}{2}\delta B\Delta B$$

Un cálculo en Barannikov-Kontsevich referencia y Manin referencia muestra que:

$$X^3\Phi = \int (X\Gamma)(X\Gamma)(X\Gamma),$$

es decir,  $\Phi$  es la función potencial de la deformación.

Invarianza de Gauge: Expondremos algunos de los resultados de Cao-Zhou referencia . Sea  $m$  el ideal maximal de  $K$ . Consideremos el grupo:

$$G = \exp(sA \otimes m)^e$$

con la multiplicación  $e^A e^B = e^C$  definida por la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff. Asumimos que  $(A, \wedge, \delta, \Delta, [., .])$  es una álgebra de Batalin-Vilkovisky que satisface las tres condiciones, entonces en nueve se muestra que dadas dos soluciones normalizadas universales  $\Gamma$  y  $\bar{\Gamma}$ , existe un elemento agregado  $A \in (Im\Delta \otimes m)$ , tal que  $e^A \cdot \Gamma = \bar{\Gamma}$ . Por lo tanto el potencial de la función  $\Phi$  es Gauge invariante:  $\Phi(e^A \cdot \Gamma) = \Phi(\Gamma)$ .

Invarianza bajo quasi-isomorfismos.

Un homomorfismo entre dos álgebras de Batalin-Vilkovisky con integrales "Nice" sobre  $k$   $(A_i, \wedge_i, \delta_i, \Delta_i, [., .]_i, f_i), i = 1, 2$  es un homomorfismo de álgebras graduadas  $f : A_1 \rightarrow A_2$  tal que  $f\delta_1 = \delta_2 f$ ,  $f\Delta_1 = \Delta_2 f$  y  $\int_2 f(\alpha) = \int_1 \alpha$  para todo  $\alpha \in A$ . Es un quasi-isomorfismo si  $f$  induce un isomorfismo  $(H_1, \delta_1) \rightarrow (H_2, \delta_2)$  y  $(H_1, \Delta_1) \rightarrow (H_2, \Delta_2)$ . Se probó el siguiente resultado en nueve: Si hay un isomorfismo entre dos álgebras de Batalin-Vilkovisky que satisface las tres condiciones, entonces variedades de Frobenius puede estar identificadas una de otra.

### 3. Equivalencia Morita

Dada una álgebra  $A$  conmutativa sobre un anillo  $k$ , por conveniencia escribiremos  $D(A)$  para la categoría derivada  $D(mod - A)$ . Dadas dos  $k$ -álgebras, es natural preguntarse cuando  $D(A)$  y  $D(B)$  son categorías equivalentes. Por supuesto, si  $A$  y  $B$  son equivalentes Morita, esto es que son equivalentes como  $k$ -módulo, entonces  $D(A)$  y  $D(B)$  son equivalentes.

#### 4. El caso de operads

DEFINICIÓN 4.18. Un operad  $C$  consiste en una familia de  $k$ -módulos  $\{C(j)\}_{j \geq 0}$ , junto con una aplicación unitaria  $\eta : k \rightarrow C(1)$  una acción a derecha del grupo de simetrías  $\sum_{J_s}$  sobre  $C(j)$  para cada  $j$ , y aplicaciones:

$$\gamma : C(k) \otimes C(j_1) \otimes \dots \otimes C(j_k) \rightarrow C(j)$$

para  $k \geq 1$  y  $j_s \geq 0$ , donde  $\sum j_s = j$ . Se pide que  $\gamma$  sea unitaria, asociativa, y equivariante en los siguientes sentidos.

- (1) Los siguientes diagramas asociativos conmutan, donde  $\sum j_s = j$  y  $\sum i_t = i$ ; fijamos  $g_s = j_1 + \dots + j_s$ , y  $h_s = i_{g_{s-1}+1} + \dots + i_{g_s}$  para  $1 \leq s \leq k$ :

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \otimes \left( \bigotimes_{s=1}^k C(j_s) \right) \otimes \left( \bigotimes_{r=1}^j C(i_r) \right) & \xrightarrow{\gamma \otimes Id} & C(j) \otimes \left( \bigotimes_{r=1}^j C(i_r) \right) \\
 \downarrow \text{shuffle} & & \downarrow \gamma \\
 C(k) \otimes \left( \bigotimes_{s=1}^k (C(j_s) \otimes \left( \bigotimes_{q=1}^{j_s} C(i_{g_{s-1}+q}) \right)) \right) & \xrightarrow{Id \otimes (\otimes_s \gamma)} & C(k) \otimes \left( \bigotimes_{s=1}^k C(h_s) \right) \\
 & & \uparrow \gamma \\
 & & C(i)
 \end{array}$$

- (2) El siguiente diagrama unitario conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \otimes (k)^k & \xrightarrow{\cong} & C(k) \\
 Id \otimes n^k \downarrow & \nearrow \gamma & \\
 C(k) \otimes C(1)^k & & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 k \otimes C(j) & \xrightarrow{\cong} & C(j) \\
 Id \otimes n^k \downarrow & \nearrow \gamma & \\
 C(1) \otimes C(j) & & 
 \end{array}$$

- (3) Los siguientes diagramas de equivariancia conmutan, donde  $\sigma \in \sum_k$ ,  $\tau_s \in \sum j_s$ ,  $\sigma(j_1, \dots, j_k) \in \sum_k$  permuta  $k$  espacios de letras como  $\sigma$  permuta  $k$  letras, y  $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k \in \sum_k$  es el bloque de las sumas:

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \otimes C(j_1) \otimes \dots \otimes C(j_k) & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & C(j_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes C(j_{\sigma(k)}) \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
 C(j) & \xrightarrow{\sigma(j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(k)})} & C(j).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \otimes C(j_1) \otimes \dots \otimes C(j_k) & \xrightarrow{Id \otimes \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_k} & C(j_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes C(j_{\sigma(k)}) \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
 C(j) & \xrightarrow{\tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_k} & C(j).
 \end{array}$$

DEFINICIÓN 4.19. Sea  $C$  un operad. Una  $C$ -álgebra es un  $k$ -módulo  $A$  junto con una aplicación  $\sigma : C(j) \otimes A^j \rightarrow A$ ,  $j \geq 0$ , tal que es asociativo, unitario y equivariante en los siguientes sentidos:

- (1) En el sentido asociativo el diagrama conmuta, donde  $j = \sum j_s$

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \otimes C(j_1) \otimes \dots \otimes C(j_k) \otimes^j & \xrightarrow{\gamma \otimes Id} & C(j) \otimes A^j \\
 \downarrow \text{shuffle} & & \downarrow \theta \\
 & & A \\
 & & \uparrow \theta \\
 C(k) \otimes C(j_1) \otimes A^{j_1} \otimes \dots \otimes C(j_k) \otimes A^{j_k} & \xrightarrow{Id \otimes \theta^k} & C(k) \otimes A^k.
 \end{array}$$

- (2) El siguiente diagrama unitario conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 k \otimes A & \xrightarrow{\cong} & A \\
 n \otimes Id \downarrow & \nearrow \sigma & \\
 C(1) \otimes A & & 
 \end{array}$$

- (3) Los siguientes diagramas equivariantes conmutan, donde  $\sigma \in \sum_j$

$$\begin{array}{ccc}
 C(j) \otimes A^j & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & C(j) \otimes A^j \\
 \searrow \gamma & & \swarrow \gamma \\
 & A &
 \end{array}$$

Ejemplos de operads:

- (1) Sea  $P(n) := Hom(V^{\otimes n}, V)$  donde  $V$  es un espacio vectorial. La acción del grupo de simetrías y la identidad de los elementos se definen de la manera obvia, y la composición se define como sutituciones:

$$\begin{aligned}
 & (m_{n_1, \dots, n_k}(\phi \otimes (\psi_1 \otimes \psi_2, \dots, \psi_k)))(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_1 + \dots + n_k} := \\
 & \phi(\psi_1(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_1}) \otimes \dots \otimes \psi_k(v_{n_1 + \dots + n_{k-1} + 1} \otimes \dots \otimes v_{n_1 + \dots + n_k}))
 \end{aligned}$$

donde  $\phi \in P(k) = Hom(V^{\otimes k}, V)$ ,  $\psi_i \in P(n_i) = Hom(V^{\otimes n_i}, V)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Este operad es llamado el operad de endomorfismo de un espacio vectorial.

- (2) Otro ejemplo de operad es *Assoc1*. La  $n$ -ésima componente  $Assoc1(n)$  para  $n \geq 0$  se define como la colección universal de todos los operadores  $n$ -líneales  $A^n \rightarrow A$  definido sobre todas las álgebras asociativas  $A$  con unidad. La dimensión de este espacio es  $n!$  y es generada por los vectores:

$$a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \rightarrow a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}$$

donde  $\sigma \in S_n$  es una permutación.

Operads libres y árboles:

DEFINICIÓN 4.20. Sean  $O$  Y  $O'$  operads, decimos que  $f : O \rightarrow O'$  es un morfismo de operad si se tiene asociado de forma subyacente un morfismo de  $r$ -módulo.  $f(n) : O(n) \rightarrow O'(n)_{n \geq 2}$  en el cual conmuta de forma obvia con las operaciones  $\gamma$ .

Operdas que dan lugar a una categoría.

El functor olvído

$$(O(n), \circ_i^{n, n'} \rightarrow O(n) \text{ para } n, n' \geq 1, 1 \leq i \leq n$$

como un functor autoadjuto, libre, al cual se le asocia una colección arbitraria,  $\epsilon = \epsilon(n)_{n \geq 1}$  del grado de los  $S_n$ -espacios vectoriales del operad libre.  $Free(\epsilon)$ . A continuación se describirán los árboles de una forma más clara: Un  $n$ -árbol  $T$  es por definición una terna  $(V_t, N_t, \theta_T)$  donde  $V_t$  es un conjunto estratificado, cuyos elementos son llamados los vértices, una biyección  $\theta_T : V_t^t \rightarrow 1, 2, \dots, n =: [n]$ ;

Una aplicación  $N_T : V_T \rightarrow V_T$  que satisface las condiciones:  $N_T$  sólo tiene puntos fijos  $root_T$  los cuales pertenecen a  $V_T^i$  y son llamados los vértices de rotación  $N_T^k(v) = root_T$ ,  $\forall v \in V_T$  y  $k \geq 1$ . Para todo  $v \in V_T^i$  la cardinalidad  $\#v$  del conjunto  $N_T^{-1}(v)$  es mayor ó igual a 1, mientras que la cardinalidad de  $V_T^i$  es 0

Dado un  $s$ -módulo  $\epsilon = \epsilon(n)_{n \geq 1}$  podemos asociarle a un  $n$ -árbol  $T$  el espacio vectorial:

$$\epsilon(T) = \bigotimes_{v \in V_T^s} \epsilon(\#v)$$

Ahora como un  $s$ -módulo un operad libre se define como:

$$Free(\epsilon)(n) = \bigoplus_{n\text{-árboles } T} \epsilon(T),$$

Ejemplo:

Sea  $V$  un espacio vectorial  $Z$ -graduado. El  $S$ -módulo asociado es:

$$\epsilon_V(n) := Hom(V^{\otimes n}, V)$$

tiene una estructura natural de operad con la composición,  $f \circ_i^{n,n'} f'$  dada por insertar de  $f' \in Hom(V^{\otimes n'}, V)$  en la  $i$ -ésima entrada de  $f \in Hom(V^{\otimes n}, V)$ .

DEFINICIÓN 4.21. Una álgebra sobre un operad  $P$  consiste de un espacio vectorial  $A$  y una colección de aplicaciones multi-lineales  $f_n : P(n) \otimes A^k$  para todo  $n \geq 0$  que satisface los siguientes axiomas:

- (1) Para cualquier  $n \geq 0$  la aplicación  $f_n$  es  $S_n$  - *equivariante*.
- (2) Para cualquier  $a \in A$  tenemos  $f_1(Id_P \otimes a) = a$ ,
- (3) Todas las composiciones en  $P$  van a composiciones de operaciones multilineales sobre  $A$

En otras palabras la estructura de álgebra sobre  $P$  sobre un espacio vectorial  $A$  está dado por un homomorfismo de operad de  $P$  a los operads de endomorfismos sobre  $A$ .

Ejemplos:

- (1) Una álgebra sobre el operad *Assoc1* es una álgebra asociativa unitaria. Si reemplazamos el espacio uno-dimensional *Assoc1*(0) por el espacio cero 0, tenemos un operad *Assoc* describiendo las álgebras asociativas sin unidad.
- (2) De forma análoga existe un operad *Lie*, tal que las álgebras-*Lie* son álgebras de Lie. La dimensión de la  $n$ -ésima componente *Lie*( $n$ ) es  $(n - 1)!$  para  $n \geq 1$  y 0 para  $n = 0$ .

Sea  $O$  un operad. Una estructura  $A_\infty$  sobre  $O$  es un morfismo de operads:  $A \rightarrow O$ . Si  $C$  es un módulo diferencial graduado, una álgebra  $A_\infty$  sobre  $C$  es una estructura  $A_\infty$  sobre el operad de endomorfismo, ie, un morfismo de operads  $A \rightarrow \text{End}(C)$ ,

ésta noción se puede generalizar para el caso de álgebras  $A_\infty^N$

Ahora, siguiendo el mismo principio de la versión homológica de la simetría espejo, nos podemos preguntar lo siguiente: Dados dos operads  $P$  y  $P'$ , supongamos que se tiene una  $P$ -álgebra  $A$  y una  $P'$ -álgebra  $B$ , ¿cuándo  $A$  y  $B$  son equivalentes? consideremos el caso en que  $A(\text{resp} B)$  es también una  $P'$ -álgebra (resp una  $P$ -álgebra) siguiendo el artículo [] estableceremos la siguiente conjetura:

$A$  y  $B$  son equivalentes si:  $D(P) \cong D(P')$ .

## Bibliografía

- [1] P. FREYD, Abelian Categories, Harper & Row, Publisher, (1964).
- [2] N. ARONSZAN, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.
- [3] BIRKHOFF, S. MC LANE, Algebra Moderna. Referencia: Biblioteca de la Facultad de Ciencias (UCV).
- [4] N. JACOBSON, Basic Algebra Vol 1. Referencia: Biblioteca de la Facultad de Ciencias (UCV).
- [5] M. NAKAHARA, Geometría, Topología y Física. Referencia: Biblioteca de la Facultad de Ciencias (UCV).
- [6] H-D. CAO, J. ZHOU, DGBV Algebras and Mirror Symmetry. Referencia: eprint arXiv:math/0006123.
- [7] M. R. BALLARD, Meet homological mirror symmetry. Referencia: Modular forms and string duality, 191–224, Fields Inst. Commun., 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [8] K. Fukaya, *Morse homotopy,  $A_\infty$ -category, and Floer homologies*, Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93, Seúl 1993.
- [9] K. Fukaya, *Floer homology and Mirror symmetry I*, Proceedings of the Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds, AMS/IP Studies in Advance Mathematics Volume 23, 2001.
- [10] K. Fukaya, *Floer homology and Mirror symmetry II*, Preprint 2001.
- [11] K. Fukaya, *Deformation theory, homological algebra, and mirror symmetry*, Preprint January 2002.
- [12] H-D. CAO, J. ZHOU, On quasi-isomorphic DGBV algebras, Referencia:eprint arXiv:math/9904168.
- [13] C. ROGER, Gertenhaber and Batalin-Vilkovsiy algebras, algebraic geometric and physical aspects. (Université Claude Bernard).
- [14] R.P. THOMAS, Derived categories for the working mathematicians. Referencia: ArXiv:math/0001045v2 [math.AG].
- [15] M. J. REDONDO, A. SOLOTAR, Derived Categories and their applications, Rev. Mat. Argentina, **Vol. 48-3**, 2007, 1-26.