



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Soluciones polinomiales de la ecuación en diferencia de tipo hipergeométrica.

Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de
Venezuela por el **Br. Kenyer Aguiar**
para optar al título de Licenciado en
Matemática.

Tutor: Dr. Cristina Balderrama.

Caracas, Venezuela

Junio, 2009

A mi familia y a la memoria de mi abuela adorada Juana Rodriguez.

Contenido

Introducción	1
1 Preliminares	5
1.1 Polinomios ortogonales.	5
1.1.1 Construcciones equivalentes de los polinomios ortogonales	7
1.2 Propiedades generales de los polinomios ortogonales	9
1.3 Ejemplos de familias de polinomios ortogonales.	12
1.3.1 Polinomios ortogonales clásicos de variable continua.	13
1.3.2 Polinomios ortogonales clásicos de variable discreta	20
2 Ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica	23
2.1 Discretización de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica.	23
2.2 Operadores de diferencia	25
2.3 Soluciones de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica	30
2.3.1 Forma autoadjunta de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica . .	33
2.4 Formula tipo Rodrigues	35
3 Estudio de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica.	37
3.1 Existencia de soluciones polinomiales	38
3.1.1 Consecuencias de la fórmula de Rodrigues	40
3.2 Propiedad de ortogonalidad	41
3.3 Caracterización de la soluciones polinomiales de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica	46

4	Propiedades de los polinomios clásicos de variable discreta	51
4.1	Polinomios de Charlier	51
4.2	Polinomios de Meixner	53
4.3	Polinomios de Kravchuk	54
4.4	Polionomios de Hanh	56
A	Algunas funciones especiales	57
B	Propiedades de los polinomios clásicos de variable continua	60

Introducción

La teoría de funciones especiales y particularmente la de polinomios ortogonales es bien conocida por su importancia dentro de la Física-Matemática y otras áreas tales como las ecuaciones diferenciales, la teoría de aproximación y la teoría de fracciones continuas, entre otras. Ejemplo de estas familias (usualmente llamadas polinomios ortogonales clásicos de variable continua) son las familias de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi. Tales familias de polinomios son ampliamente estudiados debido a su aplicación en las más diversas áreas de la ciencia actual.

El estudio sistemático de estas funciones comienza a finales del siglo XVIII, ya que surgen en la resolución de problemas relativos a la física, siendo uno de los problemas más atractivos en esos años el de la atracción de un cuerpo por una esfera. Este problema fué abordado muy exitosamente por Adrien Marie Legendre (1752-1833), dando origen a los polinomios de Legendre.

Otro resultado destacable es el presentado por el francés Olinde Rodrigues, quien da una fórmula para expresar a los polinomios de Legendre como derivadas recursivas de una función; dicha fórmula se conoce hoy en día como fórmula de Rodrigues. Cabe destacar que junto con la aparición de nuevas familias de polinomios ortogonales, se lograron establecer fórmulas de tipo Rodrigues para éstas.

La siguiente familia en orden de aparición fué la de los polinomios de Hermite, llamados así en honor a Charles Hermite (1822-1901), quien los estudió en el contexto de desarrollos en series de funciones, aunque al parecer, el primero en considerarlos fue Laplace, quien los utilizó en problemas relativos a la teoría de probabilidades.

Edmond Nicolás Laguerre (1834-1886), al estudiar la relación entre las integrales de ciertas funciones y las fracciones continuas, se topa con una nueva familia de polinomios ortogonales, los cuales posteriormente fueron llamados polinomios de Laguerre en honor a su descubridor.

La última familia de polinomios ortogonales clásicos fue abordada por uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX, Karl Gustav Jacobi. Ellos son definidos a partir de la función hipergeométrica de Gaus y la función Gamma de Euler. Posteriormente son llamados polinomios de Jacobi.

En general una familia de polinomios ortogonales es una base polinomial ortogonal de un espacio L^2 . Uno de los objetivos de este trabajo es hacer un estudio sistemático de las propiedades generales de familias de polinomios ortogonales en $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, donde μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ de momentos finitos. En este contexto, si μ es una medida no atómica diremos que los polinomios ortogonales son de variable continua, los ejemplos más importantes de polinomios ortogonales de variable continua los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

Por otra parte en el caso en que μ sea una medida completamente atómica, diremos que los polinomios ortogonales son de variable discreta. Como ejemplo de este tipo de familias tenemos a los polinomios de Chaliar, Mexnier, Kravchuk y Hahn; estas familias serán centrales en nuestro estudio.

El estudio de los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta fue iniciado por Chebyshev a mediados del siglo XVIII, y siguen siendo estudiados con interés en la actualidad. Un tratamiento extensivo de éstas familias puede encontrarse en [10].

Los polinomios ortogonales clásicos de variable continua tienen en común que son solución de una ecuación diferencial hipergeométrica de la forma

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (0.1)$$

donde a, b son polinomios de grado a lo sumo dos y uno respectivamente y λ es una constante. En 1997 O. Mazet [9] demostró que estas son las únicas soluciones de esta ecuación. Para más sobre la historia de los polinomios ortogonales remitimos a [1].

Estamos interesados ahora en discretizar la ecuación (0.1). Aproximando las derivadas de primer y segundo orden adecuadamente se obtiene la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (0.2)$$

donde σ, τ son polinomios de grado a lo sumo dos y uno respectivamente, λ es una constante y los operadores en diferencias Δ y ∇ vienen dados por

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1).$$

De manera análoga a la caracterización obtenida para las soluciones polinomiales de la ecuación (0.1), en libro [10] se hace una caracterización de las soluciones polinomiales de la ecuación (0.2). En este trabajo estudiamos en detalle estas caracterizaciones hechas por los autores de [10]

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. Un capítulo 1 de preliminares donde estudiaremos los aspectos básicos de la teoría general de los polinomios ortogonales en $\mathbb{R}$, presentaremos como ejemplos de estos a las familias de polinomios ortogonales clásicos de variable continua y de variable discreta.

En el capítulo 2 estudiaremos la discretización de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica en término de los operadores de diferencias y su relación con la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica, estudiaremos las propiedades de los operadores de diferencias, por último trataremos las propiedades generales de las soluciones de (0.2), en particular de la propiedad hipergeométrica la cual nos permitirá demostrar la existencia de soluciones polinomiales de dicha ecuación.

En el capítulo 3, daremos condiciones para la existencia de soluciones polinomiales de la ecuación en diferencias así como la representación explícita de las mismas en términos de la formula de Rodrigues, ya demostrada la existencia de dichas soluciones pasamos a dar condiciones sobre las cuales resultan ser ortogonales en cierto intervalo, finalmente caracterizaremos dichas soluciones.

Capítulo 4 trata sobre los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta, en el cual daremos las demostraciones de las propiedades enunciadas para los mismos en el capítulo 1.

Para hacer lo mas autocontenido posible este trabajo, incluimos dos apéndices. El primero, sobre algunas funciones especiales, como la función gamma y la función beta, símbolo de Pochhammer, serie binomial y producto de series. El segundo, sobre polinomio ortogonales clásicos de variable continua, donde daremos las demostraciones enunciadas para los mismos en el capítulo 1.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos una breve introducción a la teoría de polinomios ortogonales. Definiremos, demostraremos algunas de sus propiedades generales más importantes y daremos ejemplos de polinomios ortogonales tanto de variable discreta como continua.

1.1 Polinomios ortogonales.

Consideremos el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y sea μ una medida de Borel en $[a, b]$ de momentos finitos; es decir, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n d\mu(x) < \infty$. Como es usual por $L^2([a, b], \mu)$, denotaremos al espacio de las funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles tales que $\int_a^b f(x) d\mu(x) < \infty$. Al producto interno usual de este espacio lo denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, para $f, g \in L^2([a, b], \mu)$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) d\mu(x). \quad (1.1)$$

Para convertir este espacio en un espacio de producto interno, y de Hilbert, es necesario pasar al espacio cociente por medio de la relación $f \sim g$ si, y solo si, $f = g$ c.s.- μ . Al espacio cociente lo seguiremos denotando $L^2([a, b], \mu)$, pero hacemos notar que en este caso la noción de igualdad, es la igualdad casi siempre con respecto a μ ; este espacio es un espacio de Hilbert. Un tratamiento extenso en lo referente a espacios de Hilbert podemos encontrarlo en [13].

La norma asociada a este producto interno es entonces

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}, \quad f \in L^2([a, b], \mu). \quad (1.2)$$

Definición 1.1 Sean $f, g \in L^2([a, b], \mu)$, diremos que f, g son **ortogonales** si, y sólo si, $\langle f, g \rangle = 0$ y diremos que $f \in L^2([a, b], \mu)$ es **normal** si $\|f\| = 1$.

Definición 1.2 Decimos que la familia finita o infinita de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un **sistema ortogonal** en $L^2([a, b], \mu)$ si, y sólo si,

$$\langle f_n, f_m \rangle = c_m \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

donde $c_m \in \mathbb{R}$ y $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$, $\delta_{n,m} = 0$ si $n \neq m$ es la delta de Kronecker. Decimos que el sistema ortogonal $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un **sistema ortonormal** si, y sólo si, $c_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, si para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es normal.

Dada una familia de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones linealmente independiente en $L^2([a, b], \mu)$, siempre es posible conseguir un sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2([a, b], \mu)$ tal que

$$\overline{\text{lin}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}} = \overline{\text{lin}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $\text{lin } A$, para $A \subseteq L^2([a, b], \mu)$ es el conjunto de las combinaciones lineales de los elementos de A . El método para conseguir un sistema ortonormal a partir de una familia linealmente independiente es conocido como método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Como μ es una medida de momentos finitos tenemos que los **monomios** $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ están en $L^2([a, b], \mu)$, además es fácil probar que son linealmente independientes, entonces usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos conseguir una familia de polinomios $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonales en $L^2([a, b], \mu)$. A esta familia la llamaremos **polinomios ortogonales** asociados a la medida μ o respecto a la medida μ .

Si μ es una medida no atómica diremos que los polinomios $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son de variable continua. Si además μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, es decir existe una función $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\mu(E) = \int_E \omega(x) dx$ para todo $E \in \mathcal{B}([a, b])$, entonces también nos referiremos a la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como los polinomios ortogonales asociados al peso ω . En este caso las integrales (1.1) y (1.2) toman la forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

y

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}.$$

En el caso en que μ sea una medida completamente atómica, diremos que los polinomios $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son de variable discreta. Notamos que si μ tiene un numero infinito de puntos de salto, digamos en $\mathbb{N}$, entonces $L^2([a, b], \mu) = l^2(\mathbb{N}, \mu)$.

Estamos interesados en medidas con respecto a las cuales el conjunto de los monomios $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $L^2([a, b], \mu)$. La densidad está garantizada si, por ejemplo, pedimos que μ tenga momento exponencial; esto es, si existe $\epsilon > 0$ tal que $\int_a^b e^{\epsilon|x|} d\mu(x) < \infty$.

La familia de polinomios construida por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt es única salvo constante; de hecho, este método garantiza unicidad si se pide, por ejemplo que dicha familia sea ortonormal. Notemos que esta no es la única condición de normalización que se puede pedir; entre las normalizaciones más comunes se encuentran pedir que los polinomios sean mónicos o que el término constante de cada P_n sea uno. En general fijada una normalización podemos obtener una familia única de polinomios ortogonales respecto a la medida μ .

1.1.1 Construcciones equivalentes de los polinomios ortogonales

De la construcción de anterior es claro que todo polinomio de grado n puede expresarse como combinación lineal de los polinomios $P_0, P_1, \dots, P_n$, usando este hecho no es difícil ver que la condición

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = c_n \delta_{n,m}$$

es equivalente a

$$\langle P_n, x^k \rangle = \int_a^b P_n(x) x^k d\mu(x) = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

Observación 1.3 En términos de la condición anterior, una manera de expresar que la familia de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonales obtenidos por Gram-Schmidt es única salvo constante, es la siguiente, si para cada $n \in \mathbb{N}$ es un polinomio de grado n tal que

$$\int_a^b x^k r_n(x) d\mu(x) = 0 \quad \text{para } k \leq n-1,$$

entonces r_n es múltiplo escalar de P_n . En efecto, como r_n es de grado n , entonces puede escribirse como combinación lineal de $P_0, P_1, \dots, P_n$, es decir $r_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)$, así pues para $k \leq n-1$, tenemos

$$\lambda_k \|P_k\|^2 = \int_a^b r_n(x) P_k(x) d\mu(x) = \int_a^b r_n(x) \{a_k x^k + \dots\} d\mu(x) = 0,$$

por tanto $r_n(x) = \lambda_n P_n(x)$.

Notemos que suponiendo conocidos la sucesión de momentos $m_n = \int_a^b x^n d\mu(x)$, la ecuación (1.3), determina al polinomio P_n , salvo una constante. En efecto, escribiendo

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tenemos que

$$\int_a^b P_n(x) x^k d\mu(x) = a_n \int_a^b x^{k+n} d\mu(x) + a_{n-1} \int_a^b x^{k+n-1} d\mu(x) + \cdots + a_0 \int_a^b x^k d\mu(x).$$

Variando $k = 0, 1, 2, \dots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_n m_n + \cdots + a_1 m_1 + m_0 &= 0 \\ a_n m_{n+1} + \cdots + a_1 m_2 + m_1 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n m_{2n-1} + \cdots + a_1 m_n + m_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Éste es un sistema de n ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas, por lo cual no podemos afirmar unicidad en la solución de este sistema y por lo tanto los polinomios ortogonales quedan determinados salvo una constante multiplicativa. Si pedimos que P_n sea mónico, es decir, que $a_n = 1$, estamos agregando una ecuación más al sistema, lo cual nos permite garantizar la unicidad en la solución del mismo, obteniendo así la sucesión $\{P_n\}$ de polinomios ortogonales mónicos. Utilizando el método de Kramer (ver [11]) para la solución de sistemas de ecuaciones lineales encontramos una expresión para el polinomio mónico P_n dada por

$$P_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

1.2 Propiedades generales de los polinomios ortogonales

Por la propiedad de ortogonalidad de la familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$, unido a que todo polinomio de grado n se puede expresar como combinación lineal de los $n + 1$ primeros términos de la sucesión $\{P_k\}_{k=0}^n$, se puede establecer que cualquiera de ellos se puede expresar a su vez como combinación lineal de otros dos. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4 Los polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1,$$

donde A_n, B_n, C_n son constantes, $A_n > 0$ y $C_n > 0$. Si el coeficiente principal de $P_n(x)$ es denotado por k_n , tenemos

$$A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}; \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{||P_{n-1}||^2}{||P_{n-2}||^2}. \quad (1.5)$$

Esta relación es conocida como relación de recurrencia a tres términos.

Demostración

Sea $Q_n(x) = P_n(x) - A_n x P_{n-1}(x)$, con $A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}$. EL polinomio Q_n resulta ser de grado $n - 1$ y por lo tanto se puede escribir como una combinación lineal de $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, es decir,

$$Q_n(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}(x)$$

y por ortogonalidad se sigue que para $k = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned} ||P_k||^2 \lambda_k &= \int_a^b Q_n(x) P_k(x) d\mu(x) = \\ &= \int_a^b P_n(x) P_k(x) d\mu(x) - A_n \int_a^b P_{n-1}(x) [x P_k(x)] d\mu(x). \end{aligned}$$

Como el grado de $x P_k(x)$ es $k + 1$, por ortogonalidad las dos integrales del lado derecho se anulan para $k \leq n - 3$, es decir $\lambda_k = 0$ para $k \leq n - 3$, así

$$P_n(x) = (\lambda_{n-1} + A_n x) P_{n-1}(x) + \lambda_{n-2} P_{n-2}(x).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b P_n(x) P_{n-2}(x) d\mu(x) = \lambda_{n-1} \int_a^b P_{n-1}(x) P_{n-2}(x) d\mu(x) + A_n \int_a^b x P_{n-1}(x) P_{n-2}(x) d\mu(x) \\ &\quad + \lambda_{n-2} \int_a^b P_{n-2}^2(x) d\mu(x) \\ &= A_n \int_a^b x P_{n-1}(x) P_{n-2}(x) d\mu(x) + \lambda_{n-2} ||P_{n-2}||^2. \end{aligned}$$

Dado que $Q_{n-2}(x) = P_{n-1}(x) - A_{n-1}P_{n-2}(x)$, la primera integral del lado derecho de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \int_a^b P_{n-1}(x)[xP_{n-2}(x)]d\mu(x) &= \frac{1}{A_{n-1}} \int_a^b P_{n-1}(x)[P_{n-1}(x) - Q_{n-1}(x)]d\mu(x) \\ &= \frac{1}{A_{n-1}} \|P_{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

de donde $\lambda_{n-2} = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} = -C_n$.

□

Teorema 1.5 (Fórmula Cristoffel-Darboux) Los polinomios ortogonales $\{P_n\}$ satisfacen la siguiente relación

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2} = \frac{1}{A_{n+1}\|P_n\|^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)}, \quad (1.6)$$

donde $A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}$, siendo k_n el coeficiente principal de P_n .

Demostración

Usando la relación de recurrencia (1.4) tenemos que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_n(y) &= [(A_{n+1}x + B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x)]P_n(y) \\ &= A_{n+1}xP_n(x)P_n(y) + B_{n+1}P_n(x)P_n(y) - C_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y), \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) &= A_{n+1}(x-y)P_n(x)P_n(y) - C_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y) \\ &\quad + C_{n+1}P_{n-1}(y)P_n(x) \\ &= A_{n+1}(x-y)P_n(x)P_n(y) \\ &\quad + C_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Como $\frac{C_{n+1}}{A_{n+1}\|P_n\|^2} = \frac{1}{A_n\|P_{n-1}\|^2}$, dividiendo la expresión anterior por $A_{n+1}(x-y)\|P_n\|^2$ tenemos

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{A_{n+1}\|P_n\|^2(x-y)} = \frac{P_n(x)P_n(y)}{\|P_n\|^2} + \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{A_n\|P_{n-1}\|^2(x-y)}. \quad (1.7)$$

De la expresión anterior se obtiene que

$$\frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{A_n||P_n||^2(x-y)} = \frac{P_{n-1}(x)P_{n-1}(y)}{||P_{n-1}||^2} + \frac{P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-1}(y)P_{n-2}(x)}{A_{n-1}||P_{n-2}||^2(x-y)},$$

sustituyendo en (1.7), encontramos que

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{A_{n+1}||P_n||^2(x-y)} = \sum_{k=n-1}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{||P_k||^2} + \frac{P_{n-1}(x)P_{n-2}(y) - P_{n-1}(y)P_{n-2}(x)}{A_{n-1}||P_{n-2}||^2(x-y)},$$

iterando el proceso, al cabo de n pasos llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{A_{n+1}||P_n||^2(x-y)} &= \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{||P_k||^2} + \frac{P_1(x)P_0(y) - P_1(y)P_0(x)}{A_1||P_0||^2(x-y)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{||P_k||^2}. \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Observación 1.6 En el caso $x = y$ en (1.6) usando la regla de L'Hopital tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{||P_k||^2} &= \frac{1}{A_{n+1}||P_n||^2} \lim_{x \rightarrow y} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)} \\ &= \frac{1}{A_{n+1}||P_n||^2} \lim_{x \rightarrow y} \frac{P'_{n+1}(x)P_n(y) - P'_n(x)P_{n+1}(y)}{(x-y)} \\ &= \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{A_{n+1}||P_n||^2}. \end{aligned}$$

La fórmula de Chritoffel-Darboux es de gran utilidad en la teoría de convergencia de series de Fourier, pues permite escribir en forma compacta las sumas parciales de una serie.

Definición 1.7 Dada $f \in L^2([a, b], \mu)$, definimos la **serie de Fourier** de f respecto al conjunto ortogonal $\{P_n\}$, denotamos por $s(f)$, como la siguiente expansión

$$s(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n P_n(x), \quad (1.8)$$

donde la convergencia es respecto a la norma $|| \cdot ||$ definida en (1.2) y los coeficiente $\hat{f}_n$ se llaman **coeficientes de Fourier** y están dados por

$$\hat{f}_n = \frac{1}{||P_n||} \langle f, P_n \rangle = \frac{1}{||P_n||} \int_a^b f(x) P_n(x) d\mu(x). \quad (1.9)$$

Para $k \geq 1$ la **k-ésima suma parcial de f** viene dada por

$$s_k(f, x) = \sum_{n=0}^k \hat{f}_n P_n(x). \quad (1.10)$$

Usando Cristoffel-Darboux (1.6) podemos dar una forma integral para $s_k(f, x)$, específicamente

$$\begin{aligned}
 s_k(f, x) &= \sum_{n=0}^k \left(\int_a^b f(y) P_n(y) d\mu(y) \right) \frac{P_n(x)}{\|P_n\|^2} \\
 &= \sum_{n=0}^k \int_a^b f(y) \frac{P_n(x) P_n(y)}{\|P_n\|^2} d\mu(y) \\
 &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \frac{P_n(x) P_n(y)}{\|P_n\|^2} \right) f(y) d\mu(y) \\
 &= \frac{1}{A_{n+1} \|P_n\|^2} \int_a^b f(y) \left[\frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_{n+1}(y) P_n(x)}{(x-y)} \right] d\mu(y).
 \end{aligned}$$

Cerramos esta sección con una proposición que muestra como se comportan los ceros de los polinomios ortogonales.

Proposición 1.8 *Los ceros de los polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n \geq 0}$ son todos reales y distintos y están en el intervalo (a, b) .*

En primer lugar notemos que por ortogonalidad de P_n

$$\int_a^b P_n(x) d\mu(x) = 0,$$

para todo $n \geq 1$ y por lo tanto existe por lo menos un punto en (a, b) donde P_n cambia de signo.

Si $x_1, x_2, \dots, x_m$, con $m \leq n$ son todos los ceros de P_n , entonces el polinomio

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) P_n(x),$$

no cambia de signo en (a, b) ; es decir, siempre es positivo ó negativo en (a, b) . Luego

$$\int_a^b (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) P_n(x) d\mu(x) \neq 0. \quad (1.11)$$

Así, necesariamente debe ocurrir que $n = m$, ya que si $m < n$, (1.11) contradice que P_n sea ortogonal a todo polinomio de grado menor que n . $\square$

1.3 Ejemplos de familias de polinomios ortogonales.

Hasta ahora hemos presentado algunos resultados generales de las familias de polinomios ortogonales por lo que la siguiente sección está orientada a presentar algunos ejemplos específicos de algunas de las familias de polinomios ortogonales más notables, como lo son las familias clásicas de variable continua y de variable discreta.

1.3.1 Polinomios ortogonales clásicos de variable continua.

Las familias de polinomios ortogonales, usualmente llamadas clásicas de variable continua, son los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi. La referencia obligatoria para el estudio de los polinomios ortogonales clásicos es el libro de G. Szegő [11]. Las características fundamentales que distinguen a estas familias de las restantes familias de polinomios ortogonales son sus propiedades diferenciales, entre ellas las más relevantes son

- i) Son las únicas soluciones polinomiales de una ecuación diferencial de segundo orden, de la forma

$$a(x)y'' + b(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1.12)$$

donde a, b son polinomios de grado a lo sumo dos y uno respectivamente y λ es una constante. Esta ecuación es usualmente conocida como **ecuación diferencial de tipo hipergeométrica** y en lo que sigue nos referiremos a esta ecuación de esta manera.

- ii) Pueden ser generados mediante una fórmula que contiene derivadas de orden n , conocida como formula de Rodrigues, cuya forma general es

$$P_n(x) = \frac{1}{\gamma_n \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \rho^n(x)],$$

donde γ_n es una constante, ω es el peso y ρ es un polinomio independiente de n , de grado a lo sumo dos. Tanto γ_n, ω así como ρ dependen de la familia en cuestión.

- iii. Tienen una **función generatriz**, esto es, una función de dos variables digamos $f(x, t)$, tal que para t pequeño, el n -ésimo coeficiente de su desarrollo series de potencias respecto a esta variable, es salvo constante, el polinomio $p_n(x)$, es decir

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) t^n.$$

A continuación presentamos a éstos polinomios, junto con sus propiedades mas usuales, las cuales solo enunciamos. Remitimos al apéndice B, para ver las demostraciones de las mismas.

Polinomios de Hermite.

Los polinomios de Hermite $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los polinomios ortogonales respecto a la medida gaussiana

$$d\mu(x) = e^{-x^2} dx.$$

Esta medida está asociada al peso ω dado por

$$\omega(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tomando la siguiente condición de ortogonalidad y normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

se tiene que la norma de estos polinomios es

$$||H_n||^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!. \quad (1.13)$$

La fórmula de Rodrigues de estos polinomios es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]. \quad (1.14)$$

El polinomio de Hermite de grado n es la única solución polinomial de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (1.15)$$

Demostración

Como e^{-x^2} es el factor integrante de (1.15), podemos escribir ésta ecuación diferencial en su forma equivalente como

$$\frac{d}{dx} \{e^{-x^2} y'\} + 2ny e^{-x^2} = 0.$$

Veamos ahora, que $y = H_n$ es solución de esta ecuación diferencial. Sea $r(x) = y'' - 2xy'$, como $y = H_n(x)$ es un polinomio de grado n se sigue que r es un polinomio de grado n , veamos que r es múltiplo de H_n .

Sea $\rho(x)$ un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$, entonces basta ver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) \rho(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \frac{d}{dx} \{e^{-x^2} y'\} dx = 0.$$

Integrando por partes encontramos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) \rho(x) e^{-x^2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x) e^{-x^2} y' dx,$$

integrando de nuevo por partes tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x) e^{-x^2} y' dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{d}{dx} \{e^{-x^2} \rho'(x)\} dx.$$

Ya que ρ es un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$, se sigue que $\frac{d}{dx}\{e^{-x^2}\rho'(x)\}$ es de la forma $e^{-x^2}u(x)$, donde u es un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$ y por lo tanto esta última integral se anula. De esta manera tenemos que $r(x) = cH_n(x)$. Aparte de la expresión de $r(x)$ se deduce que su coeficiente principal es $a_n = -2nh_n$, donde h_n es el coeficiente principal de H_n , por lo tanto $ch_n = -2nh_n$, es decir, $c = -2n$. $\square$

Su función generatriz viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

y tenemos la siguiente representación explícita

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}. \quad (1.17)$$

De ésta fórmula explícita vemos que el coeficiente principal h_n de H_n está dado por

$$h_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H_n(x)}{x^n} = 2^n. \quad (1.18)$$

Por el Teorema 1.4, tenemos que los polinomios de Hermite H_n satisfacen la siguiente relación de recurrencia.

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (1.19)$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x$$

y por el Teorema 1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$ la fórmula de Christoffel-Darboux para estos polinomios es

$$\sum_{k=0}^n (2^k k!)^{-1} H_k(x) H_k(y) = (2^{n+1} n!)^{-1} \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (1.20)$$

Polinomios de Laguerre

Para $\alpha > -1$ los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los polinomios ortogonales respecto a la medida μ_α dada por

$$d\mu_\alpha(x) = \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) e^{-x} x^\alpha dx.$$

Esta medida está asociada al peso ω_α dado por

$$\omega_\alpha = e^{-x} x^\alpha, \quad x \in [0, \infty].$$

Como condición de ortogonalidad y normalización en este caso consideramos la siguiente

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha dx = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (1.21)$$

donde Γ es la función gamma y para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ $\binom{\alpha}{n}$ se conoce como coeficiente binomial generalizado y está dado por

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Otro operador de interés es el símbolo de Pochhammer, el cual se define para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ como

$$(x)_n = \prod_{k=1}^n (x + k - 1) = x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1).$$

Para mas sobre éstos ver el apéndice A.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la norma de estos polinomios es

$$\|L_n^\alpha\|^2 = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}. \quad (1.22)$$

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre es

$$e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x} x^{\alpha+n}\}. \quad (1.23)$$

El polinomio de Laguerre de grado n es la única solución de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0. \quad (1.24)$$

Demostración

Comencemos notando que

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

es equivalente a

$$\frac{d}{dx} \{e^{-x} x^{\alpha+1} y'\} + ne^{-x} x^\alpha y = 0,$$

dado que

$$\frac{d}{dx} \{e^{-x} x^{\alpha+1} y'\} = \{xy'' + (\alpha + 1 - x)y'\} e^{-x} x^\alpha,$$

sea $r(x) = xy'' + (\alpha + 1 - x)y' = \frac{d}{dx} \{e^{-x}x^{\alpha+1}y'\} e^x x^{-\alpha}$, veamos que r es múltiplo de $y = L_n^\alpha(x)$. Para ello sea $\rho(x)$ un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$, entonces basta ver que

$$\int_0^{+\infty} \rho(x)r(x)e^{-x}x^\alpha dx = \int_0^{+\infty} \rho(x)\frac{d}{dx} \{e^{-x}x^{\alpha+1}y'\} dx = 0.$$

Integrando por partes esta última expresión tenemos

$$\int_0^{+\infty} \rho(x)r(x)e^{-x}x^\alpha dx = - \int_0^{+\infty} y'\rho'(x)e^{-x}x^{\alpha+1}dx,$$

integrando de nuevo por partes encontramos que

$$\int_0^{+\infty} y'\rho'(x)e^{-x}x^{\alpha+1}dx = \int_0^{+\infty} y\frac{d}{dx} \{\rho'(x)e^{-x}x^{\alpha+1}\} dx.$$

Pero $\frac{d}{dx} \{\rho'(x)e^{-x}x^{\alpha+1}\}$ tiene la forma $e^{-x}x^{\alpha+1}s(x)$, donde s es un polinomio de grado a lo sumo $n - 1$ y por lo tanto la última integral se anula. Así hemos demostrado que $r(x) = cL_n^\alpha(x)$, de la expresión de $r(x)$ igualando los coeficientes principales, se deduce que $c = -n$. $\square$

La función generatriz en este caso esta dada por

$$(1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) r^n \text{ para } |r| < 1. \quad (1.25)$$

Los polinomios de Laguerre admiten la siguiente representación explícita

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (1.26)$$

Si denotamos como l_n^α el coeficiente principal de $L_n^\alpha(x)$, entonces el mismo esta dado por

$$l_n^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{x^n} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1.27)$$

Por el Teorema 1.4, tenemos que los polinomios de Laguerre satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} nL_n^\alpha(x) &= (2n-x+\alpha-1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n+\alpha-1)L_{n-2}^\alpha(x), \quad n \geq 2 \\ L_0^\alpha &= 1 \quad ; \quad L_1^\alpha = -x + \alpha + 1. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Por el Teorema 1.5, tenemos que la fórmula de Cristoffel-Darboux para los polinomios de Laguerre viene dada por

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \binom{k+\alpha}{k} \right\}^{-1} L_k(x)L_k(y) = (n+1) \left\{ \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(y)}{x-y}. \quad (1.29)$$

Los polinomios de Jacobi.

Para $\alpha, \beta > -1$ los polinomios de Jacobi $\{P_n^{\alpha, \beta}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los polinomios ortogonales con respecto a la medida de Jacobi

$$d\mu_{\alpha, \beta}(x) = \mathbb{1}_{[-1, 1]}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

Esta medida está asociada al peso $\omega_{\alpha, \beta}$ dado por

$$\omega_{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad x \in [-1, 1].$$

Notemos que la condición $\alpha, \beta > -1$ es suficiente para garantizar la integrabilidad de $\omega_{\alpha, \beta}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Para obtener una familia específica de polinomios, tomaremos la siguiente normalización

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}. \quad (1.30)$$

Dada la simetría de $[-1, 1]$ y que $\omega_{\alpha, \beta}$ verifica

$$\omega_{\alpha, \beta}(-x) = \omega_{\beta, \alpha}(x), \quad (1.31)$$

no es difícil ver que

$$P_n^{\alpha, \beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(x), \quad (1.32)$$

de donde

$$P_n^{\alpha, \beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (1.33)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la norma de estos polinomios viene dada por

$$\|P_n^{\alpha, \beta}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \quad (1.34)$$

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Jacobi es

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\}. \quad (1.35)$$

El polinomio de Jacobi de grado n , es la única solución polinomial de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \quad (1.36)$$

La demostración de esta propiedad es completamente análoga a como se procedió en los casos Hermite y Laguerre.

Su función generatriz para $|r| < 1$, viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x) r^n = 2^{\alpha+\beta} (1-2xr+r^2)^{-\frac{1}{2}} \left((1-2xr+r^2)^{\frac{1}{2}} - r + 1 \right)^{-\alpha} \left((1-2xr+r^2)^{\frac{1}{2}} + r + 1 \right)^{-\beta}. \quad (1.37)$$

La fórmula de Rodrigues para estos polinomios es

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} \quad (1.38)$$

y tenemos la representación explícita

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \quad (1.39)$$

Notemos que si $l_n^{\alpha,\beta}$ es el coeficiente principal de $P_n^{\alpha,\beta}$ entonces

$$l_n^{\alpha,\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{x^n} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}. \quad (1.40)$$

Por el Teorema 1.4, tenemos que los polinomios de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}$, satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{\alpha,\beta}(x) = \\ (2n+\alpha+\beta-1) \{ (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2 \} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \\ - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \end{aligned}$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$ y

$$P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1 \text{ y } P_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Por el Teorema 1.5, tenemos la siguiente fórmula de Christoffel-Darboux para los polinomios de Jacobi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ h_k^{\alpha,\beta} \right\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(x) P_k^{\alpha,\beta}(y) = & \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2) \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)} \\ & \times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y) - P_n^{\alpha,\beta}(x) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

1.3.2 Polinomios ortogonales clásicos de variable discreta

Las familias de polinomios ortogonales clásicos de variable discreta son los polinomios de Hanh, Charlier, Kravchuk y Meixner. Estas familias tienen en común que son soluciones polinomiales de la siguiente ecuación en diferencias

$$\sigma(x)\Delta\nabla y + \tau(x)\Delta y + \lambda y = 0, \quad (1.41)$$

donde σ, τ son polinomios de grado a lo sumo uno y dos respectivamente, λ es una constante y Δ, ∇ son los operadores de diferencias dados por

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{y} \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1). \quad (1.42)$$

La ecuación (1.41) es llamada por los autores de [10] **ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica** y así la llamaremos a lo largo de este trabajo. Otra característica especial de estos polinomios es que pueden ser expresados en términos de diferencias recursivas de cierta función, más precisamente tal representación tiene la forma

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\xi(x)\rho(x+n)], \quad (1.43)$$

donde B_n es una constante que depende solo de n , y ρ, ξ son fijos para cada familia e independientes de n . Ésta es un análogo a la fórmula de Rodrigues para los polinomios clásicos de variable continua.

Estas familias de polinomios son estudiados ampliamente hoy en día y son de gran utilidad en el campo de la combinatoria, teoría de representaciones de grupos y matemática computacional.

La ecuación (1.41) puede ser pensada como una discretización de la ecuación (1.12) en términos de los operadores de diferencias antes mencionados, los cuales estudiaremos con detenimiento en el capítulo siguiente. A continuación presentamos estas familias de polinomios discretos así como algunas de sus propiedades más importantes, las cuales demostraremos en el capítulo 2.

Polinomios de Charlier

Para $a > 0$, la familia de polinomios de Charlier $\{c_n^a\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en el espacio $l^2(\mathbb{N}, \mu_a)$, donde la medida μ_a es la medida de Poisson dada por

$$\mu_a(\{x\}) = \frac{e^{-a}a^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio c_n^a es solución única de la ecuación en diferencias

$$x\Delta\nabla y + (a - x)\Delta y + ny = 0. \quad (1.44)$$

La función generatriz para estos polinomios es

$$e^{-r} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n^a(x)}{n!} r^n. \quad (1.45)$$

La fórmula tipo Rodrigues para estos polinomios viene dada por

$$c_n^a(x) = \frac{x!e^a}{a^{x+n}} \nabla^n \left[\frac{e^{-a} a^{x+n}}{x!} \right]. \quad (1.46)$$

El cuadrado de la norma de estos polinomios es

$$||c_n^a(x)||^2 = \frac{n!}{a^n}. \quad (1.47)$$

Polinomios de Meixner

Para $a > 0$ y $0 < b < 1$, la familia de polinomios de Meixner $\{m_n^{a,b}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en $l^2(\mathbb{N}, \mu_{a,b})$, donde la medida discreta $\mu_{a,b}$ tiene átomos en $x \in \mathbb{N}$ con

$$\mu_{a,b}(\{x\}) = \frac{b^x \Gamma(a+x)}{x! \Gamma(a)}. \quad (1.48)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el polinomio $m_n^{a,b}$ es solución de la ecuación en diferencias

$$x\Delta\nabla y + [ab - x(1-b)]\Delta y + n(1-b)y = 0. \quad (1.49)$$

El cuadrado de la norma de estos polinomios es

$$||m_n^{a,b}||^2 = \frac{n!(a)_n}{b^n(1-b)^a}. \quad (1.50)$$

La función generatriz para estos polinomios viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n^{a,b}(x)}{n!} r^n = \left(1 - \frac{r}{b}\right)^x (1-r)^{-(a+x)}, \quad (1.51)$$

La fórmula de Rodrigues para estos polinomios viene dada por

$$m_n^{a,b}(x) = \frac{x! \Gamma(a)}{b^{x+n} \Gamma(a+x)} \nabla^n \left[\frac{b^{x+n} \Gamma(x+a+n)}{x! \Gamma(a)} \right]. \quad (1.52)$$

Polinomios de Kravchuk

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $0 < p < 1$, la familia de polinomios de Kravchuk $\{k_n^p\}_{n=0}^N$ es ortogonal en el espacio $l^2(\{0, 1, \dots, N+1\}, \mu_p)$, donde μ_p es la medida binomial dada por

$$\mu_p(\{x\}) = \frac{N! p^x q^{N-x}}{x! \Gamma(N+1-x)} = \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, N+1\} \quad y \quad p+q=1. \quad (1.53)$$

Para cada $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ el polinomio $k_n^p(x)$ es solución de la ecuación

$$x \Delta \nabla y + \frac{Np-x}{q} \Delta y + \frac{n}{q} y = 0. \quad (1.54)$$

El cuadrado de la norma de estos polinomios viene dada por

$$||k_n^p||^2 = \binom{N}{n} (pq)^n \quad (1.55)$$

La función generatriz para estos polinomios está dada por

$$\sum_{n=0}^N k_n^p(x) r^n = (1+qr)^x (1-pr)^{N-x} \quad (1.56)$$

Una fórmula tipo Rodrigues para el polinomio $k_n^p(x)$ es

$$k_n^p(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \binom{N}{x}^{-1} p^{-x} q^{-N+x+n} \nabla^n \left[\frac{N! p^{x+n} q^{N-n-x}}{x! \Gamma(N-n-x+1)} \right]. \quad (1.57)$$

Polinomios de Hanh

Para $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta > -1$, la familia de polinomios de Hanh $\{h_n^{\alpha, \beta}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en el espacio $l^2(\{0, 1, \dots, N\}, \mu_{\alpha, \beta})$, donde la medida discreta $\mu_{\alpha, \beta}$ está dada por

$$\mu_{\alpha, \beta}(\{x\}) = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{x! \Gamma(N-x)}, \quad x \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.58)$$

Para cada $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ el polinomio $h_n^{\alpha, \beta}(x)$ es solución de la ecuación

$$x(N+\alpha-x) \Delta \nabla y + [(\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x] \Delta y + n(\alpha+\beta+n+1) y = 0. \quad (1.59)$$

El cuadrado de la norma de estos polinomios es

$$||h_n^{\alpha, \beta}||^2 = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)_N}{(\alpha+\beta+2n+1)n!(N-n-1)!}. \quad (1.60)$$

La correspondiente fórmula tipo Rodrigues para estos polinomios es la siguiente

$$h_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x! \Gamma(N-x)}{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)} \nabla^n \left[\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(n+\beta+x+1)}{x! \Gamma(N-n-x)} \right]. \quad (1.61)$$

Capítulo 2

Ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica

En este capítulo estudiamos la discretización de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica en término de los operadores de diferencia y la relación de dicha discretización con la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica, ambas introducidas en el capítulo anterior en la sección de ejemplos de familias de polinomios ortogonales clásicos de variable continua y de variable discreta, respectivamente. En segundo lugar estudiamos de manera detallada los operadores de diferencias, sus propiedades generales y otras propiedades útiles, que llamaremos propiedades polinomiales. Cerramos estudiando las propiedades generales de las soluciones de (1.41) dando una fórmula explícita de tipo Rodrigues para las mismas.

2.1 Discretización de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrica.

Como dijimos antes, los polinomios ortogonales clásicos en $\mathbb{R}$, es decir, los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi, son soluciones polinomiales de la ecuación de tipo hipergeométrica

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (2.1)$$

donde a, b son polinomios de grado a lo sumo 1 y 2 respectivamente y λ una constante.

Es bien sabido que las derivadas $y'(x)$ y $y''(x)$ pueden ser aproximadas por diferencias con un error de orden cuadrático. Específicamente cuando $h \rightarrow 0$

$$y''(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \mathcal{O}(h^2),$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \mathcal{O}(h^2),$$

donde la notación $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ cuando $t \rightarrow a$, significa que el cociente $f(t)/g(t)$ está acotado cuando $t \rightarrow a$, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| \leq M, \quad t \rightarrow a.$$

Reemplazando estas aproximaciones en la ecuación (2.1), obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{a(x)}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ + \frac{b(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La cual aproxima a (2.1) con un error de orden cuadrático. Haciendo el cambio lineal de variable $x = hu$, la ecuación (2.2) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{a(hu)}{h} \left[\frac{y(h(u+1)) - y(hu)}{h} - \frac{y(hu) - y(h(u-1))}{h} \right] + \\ + \frac{b(hu)}{2} \left[\frac{y(h(u+1)) - y(hu)}{h} + \frac{y(hu) - y(h(u-1))}{h} \right] + \lambda y(hu) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por otra parte, haciendo ahora el cambio lineal de las funciones

$$y(hu) = \bar{y}(u), \quad \frac{b(hu)}{h} = \bar{b}(u), \quad \frac{a(hu)}{h^2} = \bar{a}(u), \quad (2.4)$$

en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{a}(u) [(\bar{y}(u+1) - \bar{y}(u)) - (\bar{y}(u) - \bar{y}(u-1))] + \\ + \frac{\bar{b}(u)}{2} [(\bar{y}(u+1) - \bar{y}(u)) + (\bar{y}(u) - \bar{y}(u-1))] + \lambda \bar{y}(u) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La cual se puede reescribir como en términos de los operadores Δ y ∇ , de la forma

$$\bar{a}(u)(\Delta \bar{y}(u) - \nabla \bar{y}(u)) + \frac{\bar{b}(u)}{2}(\Delta \bar{y}(u) + \nabla \bar{y}(u)) + \lambda \bar{y}(u) = 0. \quad (2.6)$$

Pero

$$\frac{\bar{b}(u)}{2}(\Delta\bar{y}(u) + \nabla\bar{y}(u)) = \bar{b}(u)\Delta\bar{y}(u) - \frac{\bar{b}(u)}{2}(\Delta\bar{y}(u) - \nabla\bar{y}(u))$$

entonces, la ecuación (2.6) puede escribirse como

$$\left(\bar{a}(u) - \frac{\bar{b}(u)}{2}\right)(\Delta\bar{y}(u) - \nabla\bar{y}(u)) + \bar{b}(u)\Delta\bar{y}(u) + \lambda\bar{y}(u) = 0. \quad (2.7)$$

Es fácil ver que $\Delta\bar{y}(u) - \nabla\bar{y}(u) = \Delta\nabla\bar{y}(u)$, de modo que (2.7) es equivalente a

$$\sigma(u)\Delta\nabla y(u) + \tau(u)\Delta y(u) + \lambda y(u) = 0, \quad (2.8)$$

donde

$$\sigma(u) = \bar{a}(u) - \frac{\bar{b}(u)}{2} \quad \text{y} \quad \tau(u) = \bar{b}(u). \quad (2.9)$$

Notemos que σ, τ polinomios de grado a lo sumo dos y uno respectivamente, por lo tanto la ecuación (2.8) es de la misma forma que la ecuación (1.41), es decir una ecuación en diferencia de tipo hipergeométrica, en consecuencia dada la linealidad de los cambios previamente realizados tenemos que resolver la ecuación la ecuación (2.2) es equivalente a resolver (2.8).

Como los operadores Δ, ∇ determinan los valores de la función $f(x)$, en saltos de longitud igual a 1, de ahora en adelante restringiremos nuestro estudio a las funciones cuyo soporte sea un subconjunto de los números naturales digamos A , ahora bien, para simplificar un poco la notación, hagamos $a = \min\{A\}$ y $b = \sup\{A\}$ entonces $A = [a, b] \cap \mathbb{N}$, este conjunto lo denotaremos de ahora en adelante como $[a, b]_{\mathbb{N}}$, más precisamente

$$A = [a, b] \cap \mathbb{N} =: [a, b]_{\mathbb{N}} \quad (2.10)$$

2.2 Operadores de diferencia

Estamos interesados ahora en estudiar las soluciones polinomiales de (1.41), dado que ésta ecuación viene expresada mediante los operadores de diferencias Δ y ∇ . Esta sección estará precisamente dedicada al estudio de las propiedades más importantes de estos operadores, las cuales serán centrales en el próximo capítulo el cual está dedicado al estudio de las soluciones de (1.41).

Los operados de diferencia Δ , ∇ son usualmente llamados operadores de diferencias progresivas y regresivas respectivamente. Algunas de sus propiedades más notables se muestran a continuación.

Teorema 2.1 (Propiedades generales) Los operadores de diferencia Δ, ∇ satisfacen las siguientes propiedades generales

i. Δ, ∇ son operadores lineales.

ii. $\Delta^n f(x) = \nabla^n f(x+n)$, $n \in \mathbb{N}$.

iii. $\Delta \nabla f(x) = \nabla \Delta f(x) = \Delta f(x) - \nabla f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$.

iv. **Regla del producto**

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x).$$

v. **Fórmula de sumación por partes**

$$\sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} g(x+1)\Delta f(x),$$

vi. $\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

i. Esto es consecuencia inmediata de la definición de Δ y ∇ .

ii. Procedemos por inducción sobre n , para $n = 1$ por definición tenemos

$$\nabla f(x+1) = f(x+1) - f(x+1-1) = f(x+1) - f(x) = \Delta f(x).$$

Ahora supuesta cierta la igualdad para n , por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} f(x) &= \Delta(\Delta^n f(x)) = \nabla^n f(x+n+1) - \nabla^n f(x+n) \\ &= \nabla(\nabla^n f(x+n+1)) \\ &= \nabla^{n+1} f(x+n+1). \end{aligned}$$

iii. Por una parte, usando la definición,

$$\begin{aligned} \Delta \nabla f(x) &= \Delta(f(x) - f(x-1)) = f(x+1) - f(x) - f(x) + f(x-1) \\ &= f(x+1) - 2f(x) + f(x-1). \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (i.) y (ii.), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta \nabla f(x) &= \Delta(f(x-1) - f(x)) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1) \\
 &= \Delta f(x) - \nabla f(x) = \nabla(f(x+1) - f(x)) \\
 &= \nabla \Delta f(x).
 \end{aligned}$$

iv. Con un simple cálculo obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Delta[f(x)g(x)] &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\
 &= (f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1)) + (f(x)g(x+1) - f(x)g(x)) \\
 &= g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).
 \end{aligned}$$

v. Recordemos que $[a, b]_{\mathbb{N}} = [a, b] \cap \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} f(x)\Delta g(x) &= \sum_{k=a}^{b-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=a}^{b-1} f(k)g(k) \\
 &= \sum_{k=a}^{b-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=a-1}^{b-2} f(k+1)g(k+1) \\
 &= \sum_{k=a}^{b-1} f(k)g(k+1) - \sum_{k=a}^{b-1} f(k+1)g(k+1) + f(b)g(b) - f(a)g(a) \\
 &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=a}^{b-1} (f(k+1) - f(k))g(k+1) \\
 &= f(k)g(k) \Big|_a^b - \sum_{k=a}^{b-1} g(k+1)\Delta f(k) \\
 &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \sum_{x \in [a, b-1]} g(x+1)\Delta f(x).
 \end{aligned}$$

v. Por inducción sobre n , el caso $n = 1$ se reduce a

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) = f(x) - f(x-1) = \nabla f(x),$$

ahora, supuesta cierta la relación para n , usando la linealidad y definición de ∇ , tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla^{n+1}f(x) &= \nabla(\nabla^n f(x)) = \nabla \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \nabla f(x-k) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k-1) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} f(x-k) \\
&= f(x) + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] (-1)^k f(x-k) + (-1)^{n+1} f(x-n-1).
\end{aligned}$$

Usando la conocida relación de Stiefel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

en la ecuación anterior resulta que

$$\begin{aligned}
\nabla^{n+1}f(x) &= f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} f(x-k) + (-1)^{n+1} f(x-n-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f(x-k).
\end{aligned}$$

Teorema 2.2 (Propiedades polinomiales) Sea p un polinomio de grado n , entonces los operadores Δ y ∇ satisfacen la siguientes propiedades

- i. $\Delta p(x)$, $\nabla p(x)$ son polinomios de grado $n-1$.
- ii. $\Delta^m p(x) = \nabla^m p(x) = 0$ si $m > n$.
- iii. $\Delta^n p(x) = \nabla^n p(x) = a_n n!$, donde a_n es el coeficiente principal de $p(x)$.
- iv. Si $f(x)$ es una función en $[a, b]_{\mathbb{N}}$, tal que $\Delta^n f(x)$ es polinomio de grado $n+1$, entonces $f(x)$ es un polinomio de grado n .
- v. $\Delta^{n-1}(x^n) = n! \left(x + \frac{n-1}{2} \right)$.

Demostración

Dada la linealidad de los operadores de diferencias, para verificar estas propiedades es suficiente con verificarlas para $p(x) = x^n$.

i. Por definición

$$\Delta p(x) = \Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k,$$

de donde el grado de $\Delta p(x)$ es $n-1$. De manera análoga se ve que $\nabla p(x)$ es de grado $n-1$.

ii. Como $m > n$, entonces $m = n + y$, donde $y \in \mathbb{N}$ y $y \geq 1$. Por asociatividad $\Delta^m p(x) = \Delta^y(\Delta^n p(x))$. Aplicando n veces (i.), tenemos que $\Delta^n p$ es un polinomio de grado $n - n = 0$, es decir, es una constante digamos c . De manera que

$$\Delta^m p(x) = \Delta^y(c) = 0.$$

iii. Para $n = 1$, tenemos que $\nabla x = 1$. Ahora, supuesto que $\nabla^n x^n = n!$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla^{n+1}(x^{n+1}) &= \nabla^n(\nabla x^{n+1}) = \nabla^n((x+1)^{n+1} - x^{n+1}) \\ &= \nabla^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k \right). \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva y la propiedad (ii.), resulta $\nabla^n(x^k) = \delta_{k,n} n!$, de donde, en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^{n+1}(x^{n+1}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \nabla^n(x^k) \\ &= \binom{n+1}{n} n! = (n+1)!. \end{aligned}$$

Notemos que para el caso general tomando $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ el resultado es el siguiente

$$\nabla^n p(x) = a_n \nabla^n(x^n) + a_{n-1} \nabla^n(x^{n-1}) + \cdots + a_0 \nabla^n(1),$$

de donde

$$\nabla^n p(x) = a_n \nabla^n(x^n) = a_n n!.$$

La demostración de $\Delta^n p(x) = a_n n!$ es análoga.

v. Por (ii.), el polinomio $\Delta^{n-1}(x^n)$ es de primer grado, entonces, podemos escribir

$$\Delta^{n-1}(x^n) = \alpha_n(x + \beta_n), \quad (2.11)$$

donde α_n, β_n son constantes. Para hallar α_n, β_n , observemos que por (iii.)

$$n! = \Delta^n(x^n) = \Delta(\Delta^{n-1}(x^n)) = \alpha_n(\Delta(x + \beta)) = \alpha_n. \quad (2.12)$$

Para $n + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(x + \beta_{n+1}) &= \Delta^n(x^{n+1}) = \Delta^{n-1}(\Delta(x^{n+1})) \\ &= \Delta^{n-1} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-1}(x^k) \\ &= \binom{n+1}{n-1} \Delta^{n-1}(x^{n-1}) + \binom{n+1}{n} \Delta^{n-1}(x^n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (n-1)! + (n+1)[\alpha_n(x + \beta_n)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por (2.12), $\alpha_{n+1} = (n+1)!$ y $\alpha_n = n!$, al reemplazar en (2.13) y comparando términos se obtiene

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{1}{2}.$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Así que

$$\beta_{n+1} - \beta_1 = \sum_{k=1}^n \beta_{k+1} - \beta_k = \frac{n}{2}.$$

Haciendo $n = 1$ en (2.11), se obtiene $\beta_1 = 0$. Por lo tanto $\beta_n = \frac{n-1}{2}$.

□

2.3 Soluciones de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica

Aplicando propiedades de la derivada no es difícil ver que si y es una solución de la ecuación (2.1), entonces y' es solución de una ecuación de la misma forma, tal comportamiento se conoce como propiedad hipergeométrica. Los operadores de diferencias si bien no se comportan de la misma manera que la derivada, como lo podemos ver en la regla del producto demostrada previamente, estos funcionan de manera parecida, de hecho como veremos en esta sección las soluciones de (1.41) también tienen la propiedad hipergeométrica, más precisamente tenemos el siguiente

Teorema 2.3 *Propiedad hipergeométrica.* Si $y(x)$ es solución de la ecuación (1.41), entonces $\Delta y(x) = v_1(x)$ satisface la ecuación

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau_1(x)\Delta y(x) + \mu_1 y(x) = 0, \quad (2.15)$$

donde

$$\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x), \quad (2.16)$$

$$\mu_1(x) = \lambda + \Delta\tau(x). \quad (2.17)$$

Además si $\lambda \neq 0$ vale el recíproco, es decir, para toda v_1 solución de (2.15) existe y solución de (1.41) tal que $v_1(x) = \Delta y(x)$.

Demostración

Supongamos que $y(x)$ es solución de (1.41), entonces aplicando Δ a esta resulta

$$\Delta[\sigma(x)\Delta\nabla y(x)] + \Delta[\tau(x)\Delta y(x)] + \lambda y(x) = 0. \quad (2.18)$$

Aplicando propiedades de los operadores en en diferencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta[\sigma(x)\Delta\nabla y(x)] &= \Delta\sigma(x)\Delta\nabla(x+1) + \sigma(x)\Delta^2\nabla y(x) \\ &= \Delta\sigma(x)\Delta^2 y(x) + \sigma(x)\Delta\nabla(\Delta y(x)) \\ &= \Delta\sigma(x)\Delta v_1(x) + \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta[\tau(x)\Delta y(x)] &= \Delta[\Delta y(x)\tau(x)] \\ &= \tau(x+1)\Delta^2 y(x) + \Delta y(x) \Delta\tau(x) \\ &= \tau(x+1)v_1(x) + v_1(x)\Delta\tau(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.18), podemos escribir

$$\sigma(x)\Delta v_1(x) + [\Delta(x) + \tau(x+1)]\Delta v_1(x) + v_1(x)[\lambda + \Delta\tau(x)] = 0. \quad (2.19)$$

Recíprocamente si λ es no nulo, supongamos que v_1 satisface (2.15), sea

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)\nabla v_1(x) + \tau(x)v_1(x)], \quad (2.20)$$

entonces

$$\begin{aligned}
-\lambda \Delta y(x) &= \Delta[\sigma(x) \nabla v_1(x) + \tau(x) v_1(x)] \\
&= \sigma(x) \Delta \nabla v_1(x) + [\Delta \sigma(x) + \tau(x+1)] \Delta v_1(x) \\
&\quad + \Delta \tau(x) v_1(x) \\
&= -\lambda v_1(x).
\end{aligned}$$

Es decir $\Delta y(x) = v_1(x)$, de manera que (2.20) se puede reescribir como

$$-\lambda y(x) = \sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) \Delta y(x),$$

por lo tanto y satisface (1.41) y $v_1(x) = \Delta y(x)$. $\square$

Razonando de manera análoga por inducción matemática podemos extender el Teorema previo, al siguiente resultado

Teorema 2.4 Sea $y(x)$ solución de (1.41) y para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $v_m(x) = \Delta^m y(x)$, entonces v_m satisface la ecuación

$$\sigma(x) \Delta \nabla v_m(x) + \tau_m(x) \Delta v_m(x) + \mu_m v_m(x) = 0, \quad (2.21)$$

donde

$$\tau_m(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \Delta \sigma(x), \quad \tau_0 = \tau; \quad (2.22)$$

$$\mu_m = \mu_{m-1} + \Delta \tau_{m-1}, \quad \mu_0 = \lambda. \quad (2.23)$$

Si además $\mu_k \neq 0$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$ y v_m es solución de (2.21), entonces existe y solución de (1.41) tal que $v_m = \Delta^m y(x)$.

Ahora hallaremos las expresiones explícitas para τ_m , y μ_m , que nos serán de gran utilidad más adelante. Notemos que (2.22) puede escribirse como

$$\tau_m(x) + \sigma(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1), \quad (2.24)$$

iterando el lado derecho de esta ecuación, resulta

$$\begin{aligned}
\tau_m(x) + \sigma(x) &= \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1) = \tau_{m-2}(x+2) + \sigma(x+2) = \dots \\
&= \tau_0(x+m) + \sigma(x+m) \\
&= \tau(x+m) + \sigma(x+m).
\end{aligned} \quad (2.25)$$

Por otra parte, como

$$\mu_m = \mu_0 + \sum_{k=1}^m (\mu_k - \mu_{k-1}).$$

Usando (2.23), se obtiene

$$\mu_m = \mu_0 + \sum_{k=1}^m (\mu_k - \mu_{k-1}) = \lambda + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{k-1}(x). \quad (2.26)$$

Aplicando Δ a (2.22), tenemos que

$$\Delta\tau_m(x) = \Delta\tau_{m-1}(x+1) + \Delta^2\sigma(x), \quad (2.27)$$

dado que $\Delta\tau_m(x)$, $\Delta^2\sigma(x)$ independientes de x , la expresión anterior se puede escribir como

$$\Delta\tau_m = \Delta\tau_{m-1} + \Delta^2\sigma,$$

iterando el lado derecho de la esta ecuación, resulta

$$\Delta\tau_m = \Delta\tau_0 + m\Delta^2\sigma = \Delta\tau + m\Delta^2\sigma. \quad (2.28)$$

Sustituyendo esta igualdad en (2.26) y simplificando, encontramos la siguiente expresión explícita para μ_m .

$$\mu_m = \lambda + m\Delta\tau + \frac{1}{2}m(m-1)\Delta^2\sigma. \quad (2.29)$$

2.3.1 Forma autoadjunta de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica

En esta sección daremos una forma equivalente de escribir la ecuación (1.41), la cual la llamaremos forma autoadjunta, la cual será de gran utilidad en el capítulo siguiente. Para esto supongamos que existe una función $\rho(x)$ que satisface la ecuación

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x). \quad (2.30)$$

Multiplicando ambos lados de (1.41) por $\rho(x)$, obtenemos

$$\sigma(x)\rho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\rho(x)\Delta y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0.$$

Pero, por (2.30)

$$\begin{aligned}
\sigma(x)\rho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\rho(x)\Delta y(x) &= \sigma(x)\rho(x)\Delta\nabla y(x) + \Delta[\sigma(x)\rho(x)]\Delta y(x) \\
&= \Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y(x)],
\end{aligned}$$

de donde la ecuación (1.41) puede escribirse como

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y(x)] + \lambda\rho(x)y(x) = 0. \quad (2.31)$$

A la ecuación anterior se le denomina forma autoadjunta de la ecuación (1.41). Notemos que para poder reducir (1.41) a su forma autoadjunta, hemos supuesto la existencia de una función $\rho(x)$ que satisface la propiedad (2.30), la existencia de tal función está garantizada, tal como veremos en el capítulo siguiente.

Análogamente la ecuación (2.21), se puede escribir en la forma autoadjunta

$$\Delta[\sigma(x)\rho_m(x)\nabla v_m(x)] + \mu_m\rho_m(x)v_m(x) = 0, \quad (2.32)$$

donde la función ρ_m satisface la ecuación

$$\Delta[\rho_m(x)\sigma(x)] = \tau_m(x)\rho_m(x). \quad (2.33)$$

Obviamente la ecuación (2.33) guarda una estrecha relación con la (2.30), lo que nos interesa ahora es hallar una expresión para ρ_m , en términos precisamente de ρ , para ello observemos que la ecuación (2.33) es equivalente a

$$\rho_m(x+1)\sigma(x+1) - \sigma(x)\rho_m(x) = \tau_m(x)\rho_m(x),$$

a su vez esta última expresión puede escribirse como

$$\frac{\rho_m(x+1)\sigma(x+1)}{\rho_m(x)} = \tau_m(x) + \sigma(x). \quad (2.34)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.34), tenemos que

$$\frac{\rho_m(x+1)\sigma(x+1)}{\rho_m(x)} = \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1),$$

la cual de nuevo por (2.34), es equivalente a la siguiente relación

$$\frac{\rho_m(x+1)\sigma(x+1)}{\rho_m(x)} = \frac{\rho_{m-1}(x+2)\sigma(x+2)}{\rho_{m-1}(x+1)},$$

esta última igualdad se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\rho_{m-1}(x+1)\sigma(x+1)}{\rho_m(x)} = \frac{\rho_{m-1}(x+2)\sigma(x+2)}{\rho_m(x+1)}.$$

Notemos que la ecuación anterior implica que la función $f_m(x)$ definida por

$$f_m(x) = \frac{\rho_{m-1}(x+1)\sigma(x+1)}{\rho_m(x)},$$

es periódica, con periodo 1, dado que nuestro principal interés es hallar cualquier solución de (2.33), tomaremos $f_m(x) \equiv 1$, así que

$$\rho_m(x) = \rho_{m-1}(x+1)\sigma(x+1). \quad (2.35)$$

Por otra parte como, $\rho_0(x) = \rho(x)$, iterando conseguimos que

$$\begin{aligned} \rho_m(x) &= \rho_{m-1}(x)\sigma(x+1) \\ &= [\rho_{m-2}(x+2)\sigma(x+2)]\sigma(x+1) \\ &= \cdots = \rho_0(x+m)\sigma(x+1)\sigma(x+2)\cdots\sigma(x+m) \\ &= \rho(x+m) \prod_{k=1}^m \sigma(x+k), \end{aligned}$$

es decir,

$$\rho_m(x) = \rho(x+m) \prod_{k=1}^m \sigma(x+k). \quad (2.36)$$

2.4 Formula tipo Rodrigues

El siguiente resultado nos da una fórmula de tipo Rodrigues para las diferencias de las soluciones de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica.

Teorema 2.5 Sea y una solución de la ecuación (1.41), fijemos $n \in \mathbb{N}$, entonces si para $k < m$

$$\mu_k = \lambda + k\Delta\tau + \frac{1}{2}k(k-1)\Delta^2\sigma(x) \neq 0, \quad k < n,$$

entonces

$$\Delta^m y(x) = \frac{A_m(\lambda)}{A_n(\lambda)\rho_m(x)} \nabla^{n-m}[\rho_n(x)v_n(x)], \quad (2.37)$$

donde $v_n(x) = \Delta^n y(x)$ y

$$A_p(\lambda) = \prod_{k=0}^{p-1} (-1)^p \mu_k, \quad A_0(\lambda) = 1; \quad p \leq n. \quad (2.38)$$

Demostración

Para $m < n$ sea $v_m(x) = \Delta^m y(x)$, como y es solución de (1.41), por el Teorema (2.4) v_m es solución de la ecuación

$$\sigma(x) \Delta \nabla v_m(x) + \tau_m(x) + \mu_m v_m(x) = 0,$$

y por tanto satisface

$$\Delta[\sigma(x) \rho_m(x) v_m(x)] + \mu_m v_m(x) = 0.$$

La condición $\mu_k \neq 0$ para $k < n$, nos permite escribir la ecuación anterior de la forma

$$\rho_m(x) v_m(x) = -\frac{1}{\mu_m} \Delta[\sigma(x) \rho_m(x) \nabla v_m(x)].$$

Ahora iterando el argumento del lado derecho de esta ecuación, tomando en cuenta la fórmula explícita (2.35) y la propiedad $\nabla v_m(x+1) = \Delta v_m(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_m(x) v_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\sigma(x+1) \rho_m(x+1) \nabla v_m(x+1)] \\ &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla[\rho_{m+1}(x) v_{m+1}(x)] \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) \nabla^2[\rho_{m+2}(x) v_{m+2}(x)] \\ &= \frac{1}{\prod_{k=m}^{n-1} (-1)^k \mu_k} \nabla^{n-m}[\rho_n(x) v_n(x)] \\ &= \frac{A_m(\lambda)}{A_n(\lambda)} \nabla^{n-m}[\rho_n(x) v_n(x)], \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta^m y(x) = \frac{A_m(\lambda)}{A_n(\lambda)} \nabla^{n-m}[\rho_n(x) v_n(x)].$$

□

Capítulo 3

Estudio de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica.

El objetivo de este capítulo es estudiar las soluciones polinomiales de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica, dicho estudio se basa en el método presentado por los autores A.F Nikiforov, V.B Ubarov y S.K Suslov en el libro [10], en el cual se derivan las propiedades y se caracterizan las soluciones polinomiales de la ecuación antes mencionada en términos de los operadores de diferencias presentados en el capítulo previo.

Antes de proseguir con nuestro estudio debemos hacer énfasis en que estamos trabajando en un espacio de funciones de dominio el subconjunto de los números naturales $[a, b]_{\mathbb{N}}$.

Estudiar las soluciones de (1.41), no resulta tarea fácil mucho menos caracterizar las soluciones de dicha ecuación, los Rusos antes mencionados desarrollan en el libro [10] un método general para realizar dicho estudio, basándose precisamente en las propiedades de los operadores de diferencias, cabe destacar que tal método es elegante, en el sentido que con pocos elementos y con una teoría realmente poco exigente, logran su cometido.

3.1 Existencia de soluciones polinomiales

Estamos interesados en ver bajo que condiciones, la ecuación (1.41), admite soluciones polinomiales. El siguiente resultado nos da precisamente las condiciones necesarias para asegurar la existencia de soluciones polinomiales de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica.

Teorema 3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $\lambda = \lambda_n$ dado por

$$\lambda = \lambda_n = -n\Delta\tau(x) - \frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2\sigma(x). \quad (3.1)$$

Si

$$\mu_{k,n} = \mu_k \Big|_{\lambda=\lambda_n} = -(n-m) \left(\Delta\tau + \frac{n+m-1}{2}\Delta^2\sigma(x) \right) \neq 0 \quad k < n, \quad (3.2)$$

entonces (1.41) es decir

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0, \quad (3.3)$$

admite una solución polinomial $y = y_n$.

Demostración

Reemplazando $\lambda = \lambda_n$ en (2.23) tenemos

$$\mu_n = \lambda_n + n\Delta\tau(x) + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2\sigma(x) = 0.$$

Así que tomando $m = n$ en la ecuación (2.21), vemos que

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_n(x) + \tau_n(x)\Delta v_n(x) + \mu_n v_n(x) = 0.$$

tiene una solución particular $v_n(x) = C$, donde C es una constante. Por otro lado como $\mu_{k,n} \neq 0$ para $k \leq n-1$, por el Teorema (2.4) existe y_n solución de la ecuación (1.41) tal que $v_n(x) = \Delta^n y_n(x)$, es decir $\Delta^n y_n(x) = C$, entonces la por la propiedad polinomial (iv) del Teorema 2.2, se tiene que $y_n(x)$ es un polinomio de grado n . $\square$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el Teorema anterior nos garantiza la existencia de soluciones polinomiales de la ecuación (1.41) para el valor $\lambda = \lambda_n$, por lo tanto al variar $n \in \mathbb{N}$ obtenemos una familia $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios, donde cada y_n es solución de la ecuación

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0, \quad (3.4)$$

y una familia de ecuaciones en diferencias de tipo hipergeométrica en la que solo cambian las constantes λ_n , mientras que los polinomios σ, τ son los mismos para cada valor de n . Para estos polinomios tenemos el siguiente resultado, el cual nos da forma explícita de sus diferencias. .

Teorema 3.2 *Bajo las condiciones del teorema anterior, para la cada $n \in \mathbb{N}$ la solución polinomial y_n de (1.41) se expresan mediante la fórmula de Rodrigues*

$$\Delta^m y_n(x) = \frac{A_{m,n} B_n}{\rho_m(x)} \Delta^{n-m} [\rho_n(x)] \quad (3.5)$$

$$\text{donde } B_n = \frac{\Delta^n y_n}{A_{n,n}} \text{ y}$$

$$A_{p,n} = A_p(\lambda_n) = \frac{n!}{(n-p)!} \prod_{k=0}^{p-1} \left(\Delta \tau(x) + \frac{1}{2}(n+k-1) \Delta^2 \sigma(x) \right), \quad A_0 = 1, \quad p \leq n. \quad (3.6)$$

En particular

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho_n(x)]. \quad (3.7)$$

Demostración

Como $\mu_{k,n} \neq 0$ para $k < n$, por el teorema (2.37) tenemos que para $m < n$

$$\Delta_n^y(x) = \frac{A_m(\lambda_n)}{A_n(\lambda_n) \rho_m(x)} = \nabla^{n-m} [\rho_n(x) \Delta^n y_n],$$

como y_n es un polinomio de grado n , entonces $\Delta^n y_n$ es constante y podemos escribir

$$\Delta^m y_n(x) = \frac{A_{m,n} \Delta^n y_n(x)}{A_{n,n} \rho_m(x)} = \frac{A_{m,n} B_n}{\rho_m(x)} \nabla^{n-m} [\rho_n(x)].$$

Por otra parte como $A_{0,n} = 1$, $\rho_0 = \rho$, haciendo $m = 0$, en (3.5) encontramos la correspondiente fórmula de tipo Rodrigues para el polinomio $y_n = v_{0,n}$

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho_n(x)]. \quad (3.8)$$

□

Para $m < n$, usando (3.2) tenemos

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= A_m(\lambda_n) = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} (k-n) \left(\Delta \tau(x) + \frac{n+k-1}{2} \Delta^2 \sigma(x) \right) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) \left(\Delta \tau(x) + \frac{1}{2}(n+k-1) \Delta^2 \sigma(x) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\Delta \tau(x) + \frac{1}{2}(n+k-1) \Delta^2 \sigma(x) \right). \end{aligned}$$

es decir,

$$A_{m,n} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\Delta\tau(x) + \frac{1}{2}(n+k-1)\Delta^2\sigma(x) \right). \quad (3.9)$$

□

3.1.1 Consecuencias de la fórmula de Rodrigues

Teorema 3.3 Coeficientes principales

Si escribimos a $y_n(x)$, como $y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$, entonces

$$a_n = \frac{A_{n-1,n} B_n}{n!} \Delta\tau_{n-1} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\Delta\tau + \frac{n+k-1}{2} \Delta^2\sigma \right); \quad a_0 = B_0, \quad (3.10)$$

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\Delta\tau_{n-1}} - \frac{1}{2}n(n-1).$$

Demostración

Supongamos que $y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$, entonces por las propiedades polinomiales teorema (2.1),

$$\Delta^{n-1}y_n = a_n \Delta^{n-1}(x^n) + b_n \Delta^{n-1}(x^{n-1}) = a_n n! \left(x + \frac{n-1}{2} \right) + b_n (n-1)!. \quad (3.11)$$

Poniendo $m = n-1$ en (3.5), se obtiene

$$\Delta^{n-1}y_n(x) = \frac{A_{n-1,n} B_n}{\rho_{n-1}(x)} \nabla[\rho_n(x)],$$

pero

$$\begin{aligned} \nabla[\rho_n(x)] &= \Delta[\rho_n(x-1)] = \rho_n(x) - \rho_n(x-1) \\ &= \rho_{n-1}(x+1)\sigma(x+1) - \rho_{n-1}(x)\sigma(x) \\ &= \Delta[\rho_{n-1}(x)\sigma(x)] = \tau_n(x)\rho_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Así que

$$\Delta^{n-1}y_n(x) = A_{1,n} B_n \tau_{n-1}(x) \quad (3.12)$$

Igualando (3.12), (3.11)

$$A_{n-1,n} B_n \tau_{n-1} = a_n n! \left(x + \frac{n-1}{2} \right) + b_n (n-1)!, \quad (3.13)$$

y aplicando Δ a ambos lados resulta

$$A_{n-1,n}B_n\Delta\tau_{n-1} = n!a_n,$$

despejando a_n , por (3.9) y (2.27), al simplificar encontramos que

$$a_n = \frac{B_n A_{n-1,n}}{n!} \Delta\tau_{n-1} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\Delta\tau + \frac{n+k-1}{2} \Delta^2\sigma \right).$$

Notemos que la igualdad anterior, implica

$$\frac{n!}{\Delta\tau_{n-1}} = \frac{B_n A_{n-1,n}}{a_n},$$

usando esta última igualdad y poniendo $x = 0$ en (3.13), resulta

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\Delta\tau_{n-1}} - \frac{1}{2}n(n-1).$$

□

3.2 Propiedad de ortogonalidad

En esta sección veremos que bajo ciertas condiciones de las funciones ρ , y σ las soluciones polinomiales son ortogonales en cierto intervalo. Más concretamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4 Si $\rho(x)$, $\sigma(x)$ son funciones tales se cumplen las siguientes condiciones

$$i. \rho(x) > 0 \text{ para } x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}} \quad (3.14)$$

ii. Si b , entonces

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{a,b} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

iii. Si $b = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x)x^k = 0 \quad y \quad \sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{x=a} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

entonces las soluciones polinomiales (1.41), son ortogonales en $l^2([a, b-1]_{\mathbb{N}}, \mu)$, donde μ es la medida discreta con peso en cada $x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}$ dado por $\mu(\{x\}) = \rho(x)$; esto es

$$\langle y_n, y_m \rangle = \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m(x)y_n(x)\rho(x) = \delta_{m,n}d_n^2, \quad (3.17)$$

donde $d_n^2 = \langle y_n, y_n \rangle$.

Demostración

Sean y_n, y_m soluciones polinomiales de (1.41), es decir, satisfacen las ecuaciones

$$\sigma(x)\Delta\nabla y_n(x) + \tau_n(x)\Delta y_n(x) + \lambda_n y_n(x) = 0,$$

$$\sigma(x)\Delta\nabla y_m(x) + \tau_m(x)\Delta y_m(x) + \lambda_m y_m(x) = 0.$$

O equivalentemente

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n \rho(x)y_n(x) = 0,$$

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_m(x)] + \lambda_m \rho(x)y_m(x) = 0.$$

Multiplicando la primera por $-y_m$, la segunda por y_n y sumando las ecuaciones resultantes se obtiene

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)y_m(x)y_n(x)\rho(x) &= y_m(x)\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_n(x)] \\ &\quad - y_n(x)\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_m(x)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sumando sobre los valores $x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}$, tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m(x)y_n(x)\rho(x) &= \\ &= \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m \Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_n(x)] - \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_n(x)\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_m(x)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

por la formula de sumación por partes, la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m(x)y_n(x)\rho(x) = \rho(x_i)\sigma(x_i)[y_m(x_i)\Delta y_n(x_i) - y_n(x_i)\Delta y_m(x_i)] \Big|_a^b. \quad (3.20)$$

Ahora, como $y_m(x)\Delta y_n(x) - y_n(x)\Delta y_m(x)$, es un polinomio, entonces para b finito la condición (3.15) implica que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m(x)y_n(x)\rho(x) = 0,$$

y para b infinito, tomando limite cuando $b \rightarrow \infty$ en (3.20) la condición (3.16) nos permite concluir lo mismo. Además si $m \neq n$, entonces $\lambda_n \neq \lambda_m$, así que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{x \in [a, b-1]_{\mathbb{N}}} y_m(x)y_n(x)\rho(x) = 0, \quad \text{si } n \neq m. \quad (3.21)$$

□

Observación 3.5 Sobre las condiciones de borde.

i. La ecuación (2.30), es decir

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x), \quad (3.22)$$

nos dice que

$$\begin{aligned} \sigma(x+1)\rho(x+1) - \sigma(x)\rho(x) &= \Delta[\sigma(x)\rho(x)], \\ &= \tau(x)\rho(x) \end{aligned}$$

o lo que es equivalente

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)},$$

entonces la condición (3.14), implica que $\rho(x+1)/\rho(x)$ es positivo en $[a, b-2]_{\mathbb{N}}$, por lo tanto $\sigma(x) + \tau(x)$ y $\sigma(x+1)$, tienen el mismo signo en $[a, b-2]_{\mathbb{N}}$, sin pérdida de generalidad podemos tomar ambos positivos en este intervalo, pero $\sigma(x+1)$ es positivo en $[a, b-2]$ si y sólo si, $\sigma(x)$ es positivo en $[a+1, b-1]_{\mathbb{N}}$, de manera que la condición (3.14) equivale a las condiciones

$$\sigma(x) > 0, \text{ para } x \in [a+1, b-1]_{\mathbb{N}} \quad (3.23)$$

$$\sigma(x) + \tau(x) > 0, \text{ para } x \in [a, b-2]_{\mathbb{N}} \quad (3.24)$$

ii. Si b es finito como (2.30) es equivalente a

$$\sigma(x+1)\rho(x+1) = [\sigma(x) + \tau(x)]\rho(x), \quad (3.25)$$

entonces

$$\sigma(b)\rho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\rho(b-1)$$

como $\rho(b-1) > 0$, la condición (3.15) implica que

$$\sigma(b-1) + \tau(b-1) = 0. \quad (3.26)$$

iii. Por tomando $k = 0$ y $x = a$ en (3.15), vemos que $\sigma(a)\rho(a) = 0$, entonces por positividad de $\rho(x)$ tenemos que $\sigma(a) = 0$, es decir, a es un raíz de $\sigma(x)$. Ya que el cambio lineal de variable $x = u + a$ preserva el tipo de ecuación, sin pérdida de generalidad podemos tomar $a = 0$, siempre y cuando $\sigma(x)$ no sea una función constante, de manera que $\sigma(0) = 0$.

Una consecuencia inmediata de las condiciones de borde (3.15),(3.16) y la ecuación (2.36), es que para $k \in \mathbb{N}$

$$\sigma(x)\rho_k(x) x^p \Big|_{a,b-k} = 0, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

Por otro lado usando las ecuaciones (2.30), (2.36) y las condiciones de la observación previa, por inducción matemática tenemos que

$$\rho_k(x) > 0, \quad \text{para } x \in [a, b - k - 1] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Razonando de manera análoga al teorema anterior podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 3.6 Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo, entonces los polinomios $v_{k,n} = \Delta^k y_n$ son ortogonales en $[a, b - k - 1]$, respecto al peso ρ_k , es decir,

$$\langle v_{k,m}, v_{k,n} \rangle = \sum_{x_i=a}^{b-k-1} v_{k,n}(x_i) v_{k,m}(x_i) \rho_k(x_i) = \delta_{n,m} d_{k,n}^2, \quad (3.28)$$

donde

$$d_{k,n}^2 = \sum_{x_i=1}^{b-k-1} v_{k,n}^2(x_i) \rho_k(x_i), \quad d_{0,n}^2 = d_n^2. \quad (3.29)$$

Concluiremos esta sección hallando una expresión explícita del cuadrado de la norma d_n^2 de los polinomios y_n .

Para cada $k \in \mathbb{N}$ la relación entre $d_{k,n}^2$ y $d_{k+1,n}^2$, nos las da el siguiente lema.

Lema 3.7 Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces vale la siguiente igualdad

$$d_{k,n}^2 = \frac{1}{\mu_{k,n}} d_{k+1,n}^2. \quad (3.30)$$

Demostración

Consideremos el polinomio $v_{k,n} = \Delta^k y_n$, entonces satisface la ecuación

$$\Delta[\sigma(x)\rho_k(x)\nabla v_{k,n}(x)] + \mu_{k,n}\rho_{k,n}v_{k,n}(x) = 0,$$

multiplicando ambos lados por $v_{k,n}$, tenemos

$$v_{k,n}\Delta[\sigma(x)\rho_k(x)\nabla v_{k,n}(x)] + \mu_{k,n}\rho_{k,n}v_{k,n}^2(x) = 0.$$

sumando sobre los valores $x \in [a, b - k - 1]_{\mathbb{N}}$ y usando (3.29)

$$\sum_{x \in [a, b-k-1]_{\mathbb{N}}} v_{k,n}(x) \Delta[\sigma(x) \rho_k(x) \nabla v_{k,n}(x)] + \mu_{k,n} d_{k,n}^2 = 0. \quad (3.31)$$

Por la fórmula de sumación por partes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in [a, b-k-1]_{\mathbb{N}}} v_{k,n}(x) \Delta[\sigma(x) \rho_k(x) \nabla v_{k,n}(x)] &= v_{k,n}(x) \sigma(x) \rho_k(x) \nabla v_{k,n}(x) \Big|_a^{b-k} \\ &\quad - \sum_{x \in [a, b-k-1]_{\mathbb{N}}} \sigma(x+1) \rho_k(x+1) v_{k+1,n}^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La condición (3.27) implica que

$$v_{k,n}(x) \sigma(x) \rho_k(x) \nabla v_{k,n}(x) \Big|_a^{b-k} = 0.$$

Por otro parte, es fácil ver usando (3.27) y (2.35) que

$$\sum_{x \in [a, b-k-1]_{\mathbb{N}}} \sigma(x+1) \rho_k(x+1) v_{k+1,n}^2 = d_{k+1,n}^2,$$

sustituyendo en (3.31) se sigue el resultado. $\square$

Teorema 3.8 Para cada $n \in \mathbb{N}$, el cuadrado de la norma del polinomio y_n , viene dada por

$$d_n^2 = (-1)^n A_{n,n} B_n^2 S_n, \quad (3.33)$$

$$\text{donde } S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i).$$

Demostración

Como $d_{0,n}^2 = d_n^2$, se sigue del lema previo

$$d_{0,n}^2 = \frac{1}{\mu_{0,n}} d_{1,n}^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\mu_{1,n}} \cdots \frac{1}{\mu_{n-1,n}} d_{n,n}^2,$$

es decir,

$$d_n^2 = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{k,n}} d_{n,n}^2.$$

Por la formula de Rodrigues (3.5) $v_{n,n} = A_{n,n} B_n$, entonces

$$d_{n,n}^2 = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} v_{n,n}^2 \rho_n(x_i) = v_{n,n}^2 \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i) = A_{n,n}^2 B_n^2 S_n,$$

usando (3.6) se tiene

$$d_n^2 = (-1)^n A_{n,n} B_n^2 S_n, \quad (3.34)$$

$$\text{donde } S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i).$$

3.3 Caracterización de la soluciones polinomiales de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrica

Todo el estudio que hemos realizado hasta ahora depende de la función $\rho(x)$ que está determinada por $\sigma(x)$ y $\tau(x)$ por medio de la ecuación (2.30)

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x), \quad (3.35)$$

es de gran interés, ya que constituye una relación entre las funciones mencionadas, de hecho, esta equivale a

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \quad (3.36)$$

Si hacemos $f(x) = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}$, entonces la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f(x).$$

Entonces nuestro problema fundamental es resolver la ecuación previa. Para tal propósito, notemos que $\sigma(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2, entonces $\sigma(x) + \tau(x)$ es también y en ambos casos, se pueden expresar como el producto de polinomios de grado 1, por lo tanto $f(x)$ se puede escribir de la forma

$$f(x) = \frac{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)}{(a_3x + b_3)(a_4x + b_4)},$$

de manera que nos interesará solo estudiar el caso en el que la función f pueda ser expresada como el producto o el cociente de dos funciones.

Para resolver esta ecuación, haremos uso del siguiente resultado.

Proposición 3.9 Si las funciones $\rho_1(x)$ y $\rho_2(x)$ son soluciones de las ecuaciones

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f_1(x), \quad \frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f_2(x), \quad (3.37)$$

respectivamente, entonces la solución de la ecuación

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f(x). \quad (3.38)$$

Con $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ es $\rho(x) = \rho_1(x)\rho_2(x)$ y con $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ esta dada por $\rho(x) = \rho_1(x)/\rho_2(x)$.

Demostración

Si $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, entonces por (3.37)

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) = \frac{\rho_1(x+1)\rho_2(x+1)}{\rho_1(x)\rho_2(x)},$$

entonces $\rho(x) = \rho_1(x)\rho_2(x)$ es solución de (3.38). Análogamente cuando $f(x) = \rho_1(x)/\rho_2(x)$. $\square$

Observación 3.10 Si $\rho_1(x)$ y $\rho_2(x)$ son soluciones de la ecuación

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}, \quad (3.39)$$

entonces

$$\frac{\rho_1(x+1)}{\rho_1(x)} = \frac{\rho_2(x+1)}{\rho_2(x)},$$

esta igualdad se reescribe como

$$\frac{\rho_1(x+1)}{\rho_2(x+1)} = \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)},$$

por lo tanto el cociente $\rho_1(x)/\rho_2(x)$ es una función constante, es decir, $\rho_1(x) = C\rho_2(x)$. Esto nos permite concluir que si $\rho(x)$ la solución general de la ecuación anterior, entonces $\rho(x) = C\rho_1(x)$, donde ρ_1 es cualquier solución particular de la misma.

Observación 3.11 Sea γ una constante, entonces haciendo $f(x) = \gamma + x$, $f(x) = \gamma - x$, $f(x) = \gamma$, en (3.38), tenemos las ecuaciones

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma + x. \quad (3.40)$$

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma - x. \quad (3.41)$$

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma. \quad (3.42)$$

Una solución particular para (3.40), es

$$\rho(x) = \Gamma(x + \gamma),$$

ya que por propiedades de la función gamma

$$\frac{\Gamma(x + \gamma + 1)}{\Gamma(x + \gamma)} = x + \gamma.$$

Análogamente una solución particular de (3.41), es

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}.$$

Por último es claro que

$$\rho(x) = \gamma^x,$$

es una solución particular de (3.42).

Es claro que la solución de la ecuación (3.36), depende del grado del polinomio σ , para hallar la solución de la misma considerando los casos en que el grado de σ sea 1 y 2, respectivamente.

Caso 1. σ es polinomio de grado dos.

Por la observación (3.5) podemos tomar $a = 0$, entonces $\sigma(0) = 0$. Estudiamos dos subcasos, dependiendo de si el coeficiente principal de σ es negativo ó positivo.

i) Si el coeficiente principal de σ es negativo, como $\sigma(0) = 0$, entonces podemos escribir

$\sigma(x) = x(k_1 - x)$, de manera que $\sigma(x) + \tau(x) = (x + k_2)(x - k_3)$, donde k_1, k_2, k_3 son constantes.

Para que se cumpla la condición (3.23), es decir $\sigma(x) = x(k_1 - x) > 0$ en $[1, b - 1]_{\mathbb{N}}$, entonces b debe ser un número finito, digamos N . Además $x(k_1 - x) > 0$ en $[1, N - 1]_{\mathbb{N}}$ si, y sólo si, $k_1 > x$ para todo $x \in [1, N - 1]_{\mathbb{N}}$, esto ocurre si, y sólo si, $k_1 > N - 1$, esto equivale a que $k_1 = N + \alpha$, donde $\alpha > -1$.

Por otra parte como b es finito la condición (3.26), nos dice que $\sigma(N - 1) + \tau(N - 1) = 0$, es decir, $(N - 1 - k_2)(k_3 - N + 1) = 0$, la cual se cumple si tomamos $k_3 = N - 1$.

Razonando de la misma manera vemos que la condición (3.24), es decir $\sigma(x) + \tau(x) = (x + k_2)(N - 1 - x) > 0$, se cumple si, y sólo si, $k_2 > 0$ y sin pérdida de generalidad podemos tomar k_2 de manera que $k_2 = 1 + \beta$, donde $\beta > -1$. Tomando en cuenta lo anterior vemos la ecuación (3.36) se escribe como

$$\frac{\rho(x + 1)}{\rho(x)} = \frac{(x + 1 + \beta)(N - 1 - x)}{(x + 1)(N + \alpha - x)}.$$

Ahora, por la proposición (3.9), tomando en cuenta las soluciones particulares de (3.40) y (3.41) anteriormente, tenemos que

$$\rho(x) = C \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N + \alpha - x)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)}, \quad (3.43)$$

Tomando en este caso el factor de normalización $B_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ y la constante $C = 1$, los polinomios obtenidos son los polinomios de Hanh, los cuales introducimos en el capítulo 1.

ii. Coeficiente principal de $\sigma(x)$ positivo.

Remitimos a [10], para ver que en este caso las correspondientes expresiones que se obtienen para $\sigma(x)$ y $\sigma(x) + \tau(x)$, son las mismas pero con el signo contrario a las correspondientes del caso anterior, por lo tanto los polinomios obtenidos en este caso satisfacen la misma ecuación en diferencias que los del caso anterior, en este sentido no se da origen a otra nueva familia.

Caso 2: $\sigma(x)$ es polinomio de grado 1.

En este caso podemos tomar sin pérdida de generalidad $\sigma(0) = 0$, de manera que basta considerar $\sigma(x) = x$. Consideraremos tres subcasos

i) $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma + x)$ En este caso, la ecuación (3.36) se reduce a

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\mu(x+\gamma)}{x}.$$

Ahora, por la proposición (3.9) y tomando en cuenta las soluciones particulares de (3.40) y (3.42), tenemos que

$$\rho(x) = C \frac{\mu^x + \Gamma(x + \gamma)}{\Gamma(x + 1)}. \quad (3.44)$$

Por otra parte, dado que

$$\sigma(x)\rho(x)x^l = C \frac{\mu^x \Gamma(x + \gamma)}{\Gamma(x + 1)} x^{l+1} \neq 0$$

para todo $l \in \mathbb{N}$ y para todo x finito, es decir la condición (3.15), nunca se cumple, debe ser $b = \infty$. Para $b = \infty$, la condición (3.16), es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x)x^l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu^x \Gamma(x + \gamma)}{\Gamma(x + 1)} x^l = 0,$$

se satisface si, y sólo si, es $0 < \mu < 1$. Por otra parte la condición (3.24), es decir, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(x + \gamma) > 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$, se satisface si, y sólo si, $\gamma > 0$. Ahora bien, tomando en este $B_n = \mu^{-n}$ y $C = 1/\Gamma(\gamma)$. Obtenemos la fórmula explícita de $\rho(x)$, dada por

$$\rho(x) = \frac{\mu^x(\gamma)_x}{\Gamma(x+1)}. \quad (3.45)$$

Como dijimos en el capítulo 1, la familia de polinomio ortogonales respecto al peso anterior, son los polinomios de

$$ii) \sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma - x)$$

Para valores de $x \in \mathbb{N}$ muy grandes, $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma - x)$ toma valores negativos, de manera que para satisfacer la condición (3.24), debe ser b un número finito, digamos $b = N + 1$. Por otra parte es claro que (3.26), es decir, $\sigma(N) + \tau(N) = 0$ se cumple si, y sólo si, $\gamma = N$. La condición (3.24) implica que $\sigma(x) + \tau(x) = \mu(N - x) > 0$ en $[0, N - 1]_{\mathbb{N}}$, de donde $\mu > 0$ y sin perdida de generalidad podemos escribir a μ de la forma $\mu = p/q$, donde $p + q = 1$ y $p, q > 0$. En este caso $\rho(x)$ viene dado por

$$\rho(x) = C \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-1-x)} \quad (3.46)$$

Y tomando $C = q^N N!$, obtenemos

$$\rho(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}. \quad (3.47)$$

Con $B_n = (-1)^n q^n / n!$, como se vio en en capitulo 1, la familia obtenida es la familia de polinomios de Kravchuk.

$$iii) \sigma(x) + \tau(x) = \mu$$

Razonando de manera análoga a los casos anteriores encontramos que $b = \infty$, μ es un numero positivo y tomando $C = e^{-\mu}$, obtenemos la siguiente representación para $\rho(x)$

$$\rho(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}. \quad (3.48)$$

Los polinomios asociados este peso son los polinomio de Charlier, introducidos en el capitulo 1.

Caso 3: $\sigma(x) = 1$ Este caso no es considerable, ya que la condición $\sigma(a) = 0$ nunca se satisface.

Capítulo 4

Propiedades de los polinomios clásicos de variable discreta

En este capítulo damos la demostración de algunas de las propiedades enunciadas en el capítulo 1, sobre los polinomios clásicos de variable discreta.

4.1 Polinomios de Charlier

Como dijimos en el capítulo 1, para $a > 0$, la familia de polinomios de Charlier $\{c_n^a\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en el espacio $l^2(\mathbb{N}, \mu_a)$, donde la medida μ_a es la medida de Poisson dada por

$$\mu_a(\{x\}) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema (3.2), la fórmula de Rodrigues para estos polinomios es

$$C_n^a(x) = \frac{x! e^a}{a^{x+n}} \nabla^n \left[e^{-a} \frac{a^{x+n}}{x!} \right] \quad (4.1)$$

y por el Teorema 3.8 su norma para cada $n \in \mathbb{N}$ viene dada por

$$||c_n^a(x)||^2 = \frac{n!}{a^n}. \quad (4.2)$$

A partir de la fórmula de Rodrigues de estos polinomios es posible dar la representación explícita de los mismos, como se muestra en el siguiente

Teorema 4.1

(Fórmula explícita)

$$C_n^a(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! a^{-k}. \quad (4.3)$$

Demostración

Por linealidad y como $\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k)$, desarrollando la fórmula anterior

$$\begin{aligned} C_n^a(x) &= \frac{x! e^a}{a^{x+n}} \nabla^n \left[e^{-a} \frac{a^{x+n}}{x!} \right] \\ &= \frac{x!}{a^x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{a^{x-k}}{(x-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x!}{(x-k)!} a^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! a^{-k}. \end{aligned}$$

□

De la fórmula explícita, podemos demostrar el siguiente resultado para su función generatriz

Teorema 4.2 (Función Generatriz)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n^a(x) r^n = \left(1 + \frac{r}{a}\right)^x, \quad |r| < a \quad (4.4)$$

Para $|r| < a$ (ver apéndice) vale el siguiente desarrollo de Taylor

$$\left(1 + \frac{r}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

desarrollando la serie de Taylor de e^r , tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-r} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^x &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-r)^m}{m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \right) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} r^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} a^{-n} r^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a r^n. \end{aligned}$$

Donde por la fórmula del producto de series, C_n viene dado por

$$\begin{aligned}
 C_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \binom{x}{k} a^{-k} \\
 &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \binom{x}{k} a^{-k} \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \binom{x}{k} a^{-k} \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! a^{-k} = \frac{(-1)^n}{n!} C_n^a(x).
 \end{aligned}$$

□

4.2 Polinomios de Meixner

Recordemos que para $a > 0$ y $0 < b < 1$, la familia de polinomios de Meixner $\{m_n^{a,b}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en $l^2(\mathbb{N}, \mu_{a,b})$, donde la medida discreta $\mu_{a,b}$ tiene átomos en $x \in \mathbb{N}$ con

$$\mu_{a,b}(\{x\}) = \frac{b^x \Gamma(a+x)}{x! \Gamma(a)}. \quad (4.5)$$

Por el Teorema 3.2, la fórmula de Rodrigues para estos polinomios es

$$m_n^{a,b}(x) = \frac{x! \Gamma(a)}{b^{x+n} \Gamma(a+x)} \nabla^n \left[\frac{b^{x+n} \Gamma(x+a+n)}{x! \Gamma(a)} \right] \quad (4.6)$$

y por el Teorema 3.8, la norma de estos polinomios viene dada por

$$\|m_n^{a,b}\|^2 = \frac{n! (a)_n}{b^n (1-b)^a}. \quad (4.7)$$

De la fórmula de Rodrigues para estos polinomios tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.3 (Fórmula explícita)

$$\frac{m_n^{a,b}(x)}{n!} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{-a-x}{n-k} (-1)^n b^{-k}. \quad (4.8)$$

Demostración Por la fórmula de Rodrigues

$$\begin{aligned}
 m_n^{a,b}(x) &= \frac{x! \Gamma(a)}{b^{x+n} \Gamma(a+x)} \nabla^n \left[\frac{b^{x+n} \Gamma(x+a+n)}{x! \Gamma(a)} \right] \\
 &= \frac{x!}{\Gamma(a+x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(a+x+n-k)}{(x-k)!} (-1)^k b^{-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} k! \frac{x!}{(x-k)!} \frac{\Gamma(a+x+n-k)}{\Gamma(a+x)} (-1)^k b^{-k} \\
 &= n! \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \frac{\Gamma(a+x+n-k)}{(n-k)! \Gamma(a+x)} (-1)^k b^{-k}.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como (ver apéndice)

$$\binom{-a}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)n!},$$

entonces

$$\binom{-a-x}{n-k} = (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(a+x+n-k)}{(n-k)!\Gamma(a+x)}.$$

usando esta relación en (4.9), se obtiene (4.8).

Por último damos la función generatriz de estos polinomios

Teorema 4.4 (Función generatriz)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n^{a,b}(x)}{n!} r^n = \left(1 - \frac{r}{b}\right)^x (1-r)^{-(a+x)}, \quad |r| < b. \quad (4.10)$$

Por la serie binomial para $|r| < b$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{b}\right)^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n} (-1)^n \left(\frac{r}{b}\right)^n \\ (1-r)^{-(a+x)} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-a-x}{m} (-1)^m r^m \end{aligned}$$

Usando estos desarrollos y la fórmula del producto de series, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n^{a,b}(x)}{n!} r^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{-a-x}{n-k} (-1)^n b^{-k} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left[\binom{x}{k} (-1)^k \left(\frac{r}{b}\right)^k \right] \left[\binom{-a-x}{n-k} (-1)^{n-k} r^{n-k} \right] \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n} (-1)^n \left(\frac{r}{b}\right)^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-a-x}{m} (-1)^m r^m \right) \\ &= \left(1 - \frac{r}{b}\right)^x (1-r)^{-(a+x)}. \end{aligned}$$

□

4.3 Polinomios de Kravchuk

Por lo dicho en el capítulo anterior para $N \in \mathbb{N}$ y $0 < p < 1$, la familia de polinomios de Kravchuk $\{k_n^p\}_{n=0}^N$ es ortogonal en el espacio $l^2(\{0, 1, \dots, N+1\}, \mu_p)$, donde μ_p es la medida binomial dada por

$$\mu_p(\{x\}) = \frac{N! p^x q^{N-x}}{x! \Gamma(N+1-x)} = \binom{N}{x} p^x q^{N-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, N+1\} \quad \text{y} \quad p+q=1. \quad (4.11)$$

Por el Teorema 3.2, la fórmula de Rodrigues para estos polinomios es

$$k_n^p(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \binom{N}{x}^{-1} p^{-x} q^{-N+x+n} \nabla^n \left[\frac{N! p^{x+n} q^{N-n-x}}{x! \Gamma(N-n-x+1)} \right]. \quad (4.12)$$

La norma en este caso, por el Teorema 3.8 viene dada por

$$||k_n^p||^2 = \binom{N}{n} (pq)^n \quad (4.13)$$

A continuación damos la fórmula explícita y la función generatriz

Teorema 4.5 (Fórmula explícita)

$$k_n^p(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{N-k}{n-k} (-p)^{n-k} q^k \quad (4.14)$$

Demostración

Aplicando linealidad y la relación para ∇^n , resulta

$$\begin{aligned} k_n^p(x) &= \frac{(-1)^n q^x}{n!} x! (N-x)! p^{n-x} \nabla^n \left[\frac{p^x q^{-x}}{x! (N-n-x)!} \right] \\ &= \frac{(-1)^n q^x}{n!} x! (N-x)! p^{n-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{p^{x-k} q^{-x+k}}{(x-k)! (N-n-x)!} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x!}{k! (n-k)!} \frac{(N-x)!}{(n-k)! (N-n-x+k)!} p^{n-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{N-x}{n-k} (-1)^{n-k} p^{n-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{N-x}{n-k} (-p)^{n-k} q^k. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6 (Función generatriz)

$$(1+qr)^x (1-pr)^{N-x} = \sum_{n=0}^N k_n^p(x) r^n \quad (4.15)$$

Demostración

En efecto, por la serie binomial (ver apéndice), tenemos que

$$(1 + qr)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} q^n r^n,$$

$$(1 - pr)^{N-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{N-x}{m} (-p)^m r^m.$$

Así que

$$\begin{aligned} (1 + qr)^x (1 - pr)^{N-x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} q^n r^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{N-x}{m} (-p)^m r^m \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n, \end{aligned}$$

donde por la fórmula del producto de series

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} q^k \binom{N-x}{n-k} (-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{N-x}{n-k} q^k (-p)^{n-k}. \quad (4.16)$$

Para $n > N$, implica que $n - k > N - k > N - x$, al ser $n - k, N - x$ números naturales se sigue que (ver apéndice), $\binom{N-x}{n-k} = 0$, entonces $C_n = 0$ para $n > N$, y por lo tanto se concluye que

$$C_n = \sum_{k=0}^N \binom{x}{k} \binom{N-x}{n-k} q^k (-p)^{n-k} = k_n^p(x).$$

□

4.4 Polinomios de Hanh

Para $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta > -1$, la familia de polinomios de Hanh $\{h_n^{\alpha, \beta}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal en el espacio $l^2(\{0, 1, \dots, N\}, \mu_{\alpha, \beta})$, donde la medida discreta $\mu_{\alpha, \beta}$ está dada por

$$\mu_{\alpha, \beta}(\{x\}) = \frac{\Gamma(N + \alpha - x) \Gamma(\beta + x + 1)}{x! \Gamma(N - x)}, \quad x \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (4.17)$$

Por el Teorema 3.2, la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hanh es

$$h_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x! \Gamma(N - x)}{\Gamma(N + \alpha - x) \Gamma(\beta + x + 1)} \nabla^n \left[\frac{\Gamma(N + \alpha - x) \Gamma(n + \beta + x + 1)}{x! \Gamma(N - n - x)} \right] \quad (4.18)$$

y por el teorema Teorema 3.8 la norma de estos polinomios viene dada por

$$\|h_n^{\alpha, \beta}\|^2 = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) (\alpha + \beta + n + 1)_N}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! (N - n - 1)!}. \quad (4.19)$$

Apéndice A

Algunas funciones especiales

En este apéndice tratamos las funciones Gamma, Beta , algunas de sus identidades. También se define el símbolo de Pochhammer, el coeficiente binomial, por último presentamos la Serie Binomial así como el producto de series. Para un estudio más amplio de las cuestiones tratadas remitimos a los libros [2] y [6].

La función Gamma.

Para $\operatorname{Re} z > 0$, definimos la **función Gamma** por

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{z-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.1})$$

Integrando por partes es fácil ver que la función Gamma satisface la siguiente relación de recurrencia

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (\text{A.2})$$

en particular haciendo $z = n$, con $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (\text{A.3})$$

La función Beta

Para $\operatorname{Re}(m) > 0$, $\operatorname{Re}(n) > 0$, definimos la **función Beta** por

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt. \quad (\text{A.4})$$

Haciendo el cambio de variable $t = 1 - u$, vemos directamente que $B(m, n)$ es simétrica, es decir, $B(m, n) = B(n, m)$. Por otra parte, el cambio de variable $t = \frac{1+u}{2}$, lleva el intervalo $[1, 0]$ al intervalo $[-1, 1]$, así

$$B(m, n) = \frac{1}{2^{m+n-1}} \int_{-1}^1 (1+u)^{m-1} (1-u)^{n-1} du. \quad (\text{A.5})$$

Por último, la relación entre la función Gamma y la función Beta viene dada por la siguiente igualdad

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(n+m)}. \quad (\text{A.6})$$

Símbolo de Pochhammer

El **símbolo de Pochhammer** denotado con $(\alpha)_n$, se define para todo real no nulo y $n \in \mathbb{N}$ por

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1) = \prod_{k=1}^n (\alpha+k-1), \quad (\text{A.7})$$

y

$$(\alpha)_0 = 1.$$

Algunas consecuencias de la definición son las siguientes propiedades del símbolo de Pochhammer

- i. $(1)_n = n!$;
- ii. $(x)_{n+m} = (x)_m (x+m)_n$, para $m, n \in \mathbb{N}$;
- iii. $(x)_n = (-1)^n (1-n-x)_n$;
- iv. $(x)_{n-k} = \frac{(-1)^k (x)_n}{(1-n-x)_k}$.

Por la relación de recurrencia de la función Gamma, tenemos **la relación entre el Símbolo de Pochhammer y la función Gamma**

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{A.8})$$

Serie Binomial

Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos el **coeficiente binomial generalizado** denotado por $\binom{\alpha}{n}$ como

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (\text{A.9})$$

Notemos que en particular

$$\binom{m}{n} = 0, \quad \text{si } m < n \text{ y } n, m \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.10})$$

Por otra parte podemos escribir el coeficiente binomial en termino de la función Gamma y el símbolo de Pochhammer como

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} = \frac{(\alpha-n+1)_n}{n!}, \quad (\text{A.11})$$

de donde

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-\alpha-n+1)_n}{n!} = \frac{(-1)^n(\alpha)_n}{n!} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}.$$

Se llama **Serie Binomial** al siguiente desarrollo en series de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \quad |x| < 1, \quad (\text{A.12})$$

donde α es cualquier numero real.

De la definición se obtenemos el siguiente desarrollo

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad |x| < 1. \quad (\text{A.13})$$

Producto de series

Dadas dos series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ absolutamente convergentes, el producto de las series está dado por

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n, \quad (\text{A.14})$$

donde

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}, \quad n \leq 1. \quad (\text{A.15})$$

La convergencia absoluta de las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ garantizan la convergencia del producto.

Apéndice B

Propiedades de los polinomios clásicos de variable continua

En este capítulo daremos las demostraciones respectivas de las propiedades enunciadas en el capítulo 2, en la sección de ejemplos de las familias de polinomios clásicos de variable continua.

Polinomios de Hermite

Fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]. \quad (\text{B.1})$$

Demostración

Notemos en primer lugar que $\frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] = r_n(x) e^{-x^2}$, donde $r_n(x)$ es un polinomio de grado n , veamos entonces que es múltiplo de $H_n(x)$, por la observación (1.3), basta ver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r_n(x) \rho(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \rho(x) dx = 0,$$

donde $\rho(x)$ polinomio de grado a lo sumo $n - 1$. En efecto, integrando n veces por partes la integral anterior puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \rho(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \rho^{(n)}(x) dx,$$

como el grado de $\rho(x)$ es a lo sumo $n - 1$, la integral de la derecha se anula, luego $cH_n(x) = \rho(x)$, la constante c se halla comparando ambos lados de $cH_n(x) = \rho(x)$. $\square$

Función generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.2})$$

Demostración

Consideremos la función

$$\psi(x, t) = e^{2xt-t^2} = e^{x^2} e^{-(x-t)^2}.$$

Su desarrollo en serie de Taylor en la variable t viene dado por

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n!} t^n,$$

donde

$$A_n(x) = \left. \frac{\partial^n \psi(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0}.$$

Hagamos $\phi(x) = e^{x^2}$, $u(x, t) = x - t$ y $v(u) = e^{-u^2}$, entonces

$$\psi(x, t) = \phi(x) v(u(x, t)) = \phi(x) v(u).$$

Veamos que

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \psi(x, t) = (-1)^n \phi(x) \frac{\partial^n}{\partial u^n} v(u(x, t)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= \phi(x) \frac{\partial}{\partial u} v \circ u(x, t) \\ &= \phi(x) \frac{\partial}{\partial u} v(u(x, t)) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\ &= (-1) \phi(x) \frac{\partial}{\partial u} v(u(x, t)). \end{aligned}$$

Esto prueba la validez de (B.3) para $n = 1$. Veamos ahora el paso inductivo si suponemos cierta la relación para n , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \psi(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} \psi(x, t) \right) \\
 &= (-1)^n \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^n}{\partial u^n} v(u(x, t)) \right) \\
 &= (-1)^n \phi(x) \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} v(u(x, t)) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \\
 &= (-1)^{n+1} \phi(x) \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} v(u(x, t)).
 \end{aligned}$$

Así hemos probado la validez de (B.3), y como consecuencia de esta igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}
 A_n(x) &= \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \psi(x, t) \right|_{t=0} = (-1)^n \phi(x) \left. \frac{\partial^n}{\partial u^n} v(u(x, t)) \right|_{t=0} \\
 &= (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{\partial^n}{\partial^n} v(x - t) \right|_{t=0} \\
 &= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial u^n} v(x) \\
 &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

que es, exactamente la fórmula de Rodrigues para el n -ésimo polinomio de Hermite H_n , de donde $A(x) = H_n(x)$ y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}.$$

□

A partir de esta última fórmula podemos dar la representación explícita de los polinomios de Hermite tal como se muestra en el siguiente ítem.

Fórmula explícita

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}.$$

Demostración

Consideremos de nuevo la función $\psi(x, t) = e^{2xt-t^2}$; desarrollando e^{2xt} y e^{-t^2} en series de Taylor respecto a la variable t obtenemos

$$e^{2xt-t^2} = e^{-t^2} e^{2xt} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^{2m} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} t^n \right).$$

Poniendo ahora $a_n = \frac{(2x)^n}{n!}$ y

$$b_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ \frac{(-1)^{m/2}}{(\frac{m}{2})!} & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

tenemos que

$$e^{2xt-t^2} = e^{-t^2} e^{2xt} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m t^m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n,$$

entonces por la fórmula del producto de series tenemos que el coeficiente c_n de t^n en el desarrollo anterior viene dado por

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2k} a_{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}, \end{aligned}$$

así

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!} \right) t^n.$$

Por otra parte, sabemos que la función generatriz de los polinomios de Hermite viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2},$$

de donde

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}.$$

□

Polinomios de Laguerre

Fórmula de Rodrigues

$$e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ e^{-x} x^{\alpha+n} \}. \quad (\text{B.4})$$

Demostración

Al usar la fórmula del producto de Leibnitz se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x} x^{\alpha+n}\} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [e^{-x}] \frac{d^k}{dx^k} [x^{\alpha+n}] \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (\alpha+n+1-k) (-x)^{n-k} \right\} e^{-x} x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Sea

$$r(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (\alpha+n+1-k) (-x)^{n-k}, \quad (\text{B.6})$$

entonces r es un polinomio de grado n . Veamos ahora que $r = cL_n^\alpha$, para ello basta ver que para todo polinomio ρ de grado a lo sumo $n-1$ se tiene que

$$\int_0^\infty \rho(x) r(x) e^{-x} x^\alpha dx = \int_0^\infty \rho(x) \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x} x^{\alpha+n}\} dx = 0. \quad (\text{B.7})$$

Integrando n veces por parte en (B.7), se obtiene que

$$\int_0^\infty \rho(x) \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x} x^{\alpha+n}\} dx = (-1)^n \int_0^\infty \rho^{(n)}(x) e^{-x} x^{\alpha+n} dx.$$

Como el grado de ρ es a lo sumo $n-1$, tenemos que $\rho^{(n)}(x) = 0$ y por lo tanto ésta última integral se anula, así $r(x) = cL_n^\alpha(x)$, comparando los coeficientes de ambos lados de esta expresión se encuentra que que $c = n!$. $\square$

A partir de la fórmula de Rodrigues (B.4), podemos dar la representación explícita de los polinomios de Laguerre $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$.

Fórmula explícita

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (\text{B.8})$$

Demostración

De la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre y de la ecuación (B.5), tenemos

que

$$\begin{aligned}
 L_n^\alpha(x) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x} x^{\alpha+n}\} e^{-x} x^\alpha \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (\alpha+n-k+1) (-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (\alpha+k+1) (-x)^k \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (\alpha+k+1)_{(n-k)} (-x)^k.
 \end{aligned}$$

así, sólo resta ver que

$$\binom{n}{n-k} (\alpha+k+1)_{(n-k)} = \frac{n!}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k}.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{n-k} (\alpha+k+1)_{(n-k)} &= \frac{(k+1)_{(n-k)}}{(n-k)!} (\alpha+k+1)_{(n-k)} \\
 &= (k+1)_{(n-k)} \binom{n+\alpha}{n-k} \\
 &= \frac{\Gamma(k+1+n-k)}{\Gamma(k+1)} \binom{n+\alpha}{n-k} \\
 &= \frac{n!}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k}.
 \end{aligned}$$

□

Función generatriz

.

$$(1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) r^n \text{ para } |r| < 1. \quad (\text{B.9})$$

Demostración

Dado que para $|r| < 1$ (ver apéndice A) y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(1-r)^{-n-\alpha-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+\alpha+1)_k}{m!} r^m$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 (1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-xr}{1-r}\right)^n \frac{1}{n!}\right) (1-r)^{-\alpha-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} r^n (1-r)^{-n-\alpha-1} \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} r^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+\alpha+1)_m}{m!} r^m\right).
 \end{aligned}$$

Ahora, para cada n fijo sea $k = n + m$, entonces

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} r^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+\alpha+1)_m}{m!} r^m\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \frac{(n+\alpha+1)_{(n-k)}}{(k-n)!} r^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{(k+\alpha+1)_{(k-n)}}{(n-k)!} r^n \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{n!} \binom{n}{k} (k+\alpha+1) r^n, \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

como (ver apéndice A) $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, entonces por la fórmula explícita de éstos polinomios tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{n!} \binom{n}{k} (k+\alpha+1) r^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} \frac{(k+\alpha+1)_{(k-n)}}{(n-k)!} r^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} \binom{n+\alpha+1}{n-k} r^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^\alpha(x) r^n.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (B.10), podemos escribir

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} r^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(n+\alpha+1)_m}{m!} r^m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^\alpha(x) r^n, \quad (\text{B.11})$$

es decir,

$$(1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^\alpha(x) r^n.$$

□

Polinomios de Jacobi.

Fórmula de Rodrigues

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\}. \quad (\text{B.12})$$

Demostración

Aplicando la regla de Leibnitz para el producto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(1-x)^{\alpha+n}] \frac{d^k}{dx^k} [(1+x)^{\beta+n}] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (k+\alpha+1)_{(n-k)} (1-x)^{\alpha+k} (n+\beta-k+1)_k (1+x)^{n+\beta-k} \\ &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta r(x), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde

$$r(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (k+\alpha+1)_{(n-k)} (1-x)^k (n+\beta-k+1)_k (1+x)^{n-k}$$

es un polinomio de grado n . Veamos que r es múltiplo de $P_n^{\alpha,\beta}$. Debemos ver que

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} \rho(x) dx = 0,$$

donde ρ es un polinomio de grado menor que n . Integrando n veces por partes la expresión anterior encontramos que

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} \rho(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} \rho^{(n)}(x) dx$$

Esta última integral se anula debido a que ρ es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ y por tanto $\rho^{(n)} = 0$, así $r(x) = c P_n^{\alpha,\beta}(x)$. Para encontrar el valor de c basta evaluar $x = 1$ en la relación anterior y usar las condición de normalización (1.30). $\square$

Tomando en cuenta (B.13) y la formula de Rodrigues (B.12), se puede dar la forma explícita para los polinomios de Jacobi.

Fórmula explícita

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \quad (\text{B.14})$$

Aplicando la regla del producto de Leibnitz a (B.12), obtenemos

$$\begin{aligned}
(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(1-x)^{n+\alpha}] \frac{d^k}{dx^k} [(1+x)^{n+\beta}] \\
&= \frac{(-1)^{2n}}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{-k} (k+\alpha+1)_{(n-k)} (1-x)^{\alpha+k} (n+\beta-k+1)_k (1+x)^{n+\beta-k} \\
&= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!} (k+\alpha+1)_{(n-k)} \left[\frac{(x-1)}{2} \right]^k \\
&\quad \times (n+\beta-k+1)_k \left[\frac{(1+x)}{2} \right]^{n-k} \\
&= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left[\frac{(x-1)}{2} \right]^k \left[\frac{(1+x)}{2} \right]^{n-k} \\
&= \frac{1}{2^n} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

En el siguiente ítem presentamos sin demostración la función generatriz de estos polinomios, una demostración de la misma puede encontrarse en [4].

Función Generatriz

Para $|r| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x) r^n &= 2^{\alpha+\beta} (1-2xr+r^2)^{-\frac{1}{2}} \left((1-2xr+r^2)^{\frac{1}{2}} - r + 1 \right)^{-\alpha} \\
&\quad \left((1-2xr+r^2)^{\frac{1}{2}} + r + 1 \right)^{-\beta}. \tag{B.15}
\end{aligned}$$

La fórmula de Rodrigues nos permite calcular el cuadrado de la norma L^2 de los polinomios de Jacobi, que denotaremos

Norma

$$\begin{aligned}
||P_n^{\alpha,\beta}||^2 = h_n^{\alpha,\beta} &= \int_{-1}^1 (P_n^{\alpha,\beta}(x))^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Demostración

Usaremos el hecho de que $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ se puede escribir como

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = l_n^{\alpha,\beta} x^n + r(x),$$

donde r es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ y $l_n^{\alpha,\beta}$ es el coeficiente principal, de este modo tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) dx &= \\ &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta l_n^{\alpha,\beta} x^n P_n^{\alpha,\beta}(x) dx + \\ &\quad + \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta r(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) dx. \end{aligned}$$

El segundo miembro de la derecha es cero por la ortogonalidad y por lo tanto, usando la fórmula de Rodrigues, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) dx &= \\ &= l_n^{\alpha,\beta} \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) x^n dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} l_n^{\alpha,\beta} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right\} x^n dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes n veces esta última integral obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n (-1)^n}{2^n n!} l_n^{\alpha,\beta} n! \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx &= \\ &= \frac{1}{2^n} l_n^{\alpha,\beta} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx. \end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $2s = 1+x$ y usando la expresión de la función Beta en términos de la función Gamma (ver apéndice A), resulta

$$\frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}}{2^n} l_n^{\alpha,\beta} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+n} s^{\beta+n} ds = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+1)},$$

usando la fórmula explícita del coeficiente principal (1.40). □

Bibliografía

- [1] Álvarez-Nodarse, R. *Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. 18 (2001), 19-45. [2](#)
- [2] Andrews, G.E., Askey, R., Roy R. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge (2000). [57](#)
- [3] Balderrema, C. *Polinomios ortogonales con argumento en las matrices hermitianas y semigrupos asociados*. Tesis Doctoral. UCV (2008).
- [4] Balderrama, C. *Sobre el semigrupo de Jacobi*. Tesis de Maetría. UCV (2007). [68](#)
- [5] Bochner, S. *Über Sturm-Liovillesche polynomsysteme*. Math. Zeit. **29** (1929), 730-736.
- [6] Dunkl, C., Xu, Y. *Ortogonal polynomials of several variables*. Enciclopedia of Mathematics and its aplications. Cambridge University Press, Cambridge (1999). [57](#)
- [7] Jackson D. *Fourier series and orthogonal polynomials*. Dover publications, 2004.
- [8] López, T., Piejeira, H. *Polinomios Ortogonales*. XIV Escuela Venezolana de Matemáticas. Merida (2001).
- [9] Mazet, O. *Clasification des semi-groupes de diffusion sur Rassociés a une famille de probabilités (Strasbourg)*, tome 31 (1997), P46-53. [2](#)
- [10] Nikiforov, A.F., Suslov, S.K., Uvarov, B.V. *Clasical orthogonal polynomials of a discrete variable*. Springer Verlag. Berlin (1991). [2](#), [3](#), [20](#), [37](#), [49](#)
- [11] Szegő, G. *Orthogonal polynomials*. Colloq. Publ. 23. Amer. Math. Soc. Providence (1959). [8](#), [13](#)
- [12] Urbina, W. *Notas sobre teoria de aproximación y polinomios ortogonales*. TFORMA. AMV. (2009).
- [13] Young, N. *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press (1998). [5](#)