



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LOS ESCALARES DE ESTRUCTURA

Br. Solmar A. Varela S.

Luis Herrera Cometta, Tutor

Alicia Di Prisco, Tutora

Caracas, 02 de noviembre del año 2009

Interpretación Física de los Escalares de Estructura

Copyright © 2009

Universidad Central de Venezuela
Solmar A. Varela S.

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LOS ESCALARES DE ESTRUCTURA

Br. Solmar A. Varela S.

*Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de*
Licenciada en Física.

A mis padres, a Dios...

Agradecimientos

Deseo agradecer en primer lugar a Dios, por estar siempre presente en cada uno de mis días, llenándome de un infinito amor.

A mis tutores, el profesor Luis Herrera Cometta y la profesora Alicia Di Prisco, por su paciencia y dedicación en la elaboración de este trabajo, por sus correcciones y consejos. Por sus esfuerzos diarios, tiempo invertido y enseñanzas. Por este trabajo que es muy especial para mí.

Al profesor Ernesto Fuenmayor por darme la oportunidad de ser preparadora. Muchas gracias por orientarme en mis estudios, por estar siempre pendiente de mis avances, por su inagotable paciencia, por su sentido del humor y por brindarme su amistad. Gracias por recomendarme con los profesores Luis Herrera y Alicia Di Prisco para elaborar este trabajo.

A mi profesora Orlenys Troconis por ayudarme durante la realización de la tesis, estando siempre dispuesta al momento de resolver una duda.

Gracias de manera especial a Emilio, por llegar en el momento justo con sus conocimientos en latex.

A mis padres José y Solis por su amor incondicional y a mi hermana Soliangel. Muchas gracias por siempre respetar y creer en lo que hago. Por ser los principales involucrados en mi formación personal y ser los principales protagonistas de los mejores momentos. Gracias a mis tías Celenia y Siomara por apoyarme siempre que lo he necesitado.

A mi amiga Bárbara con la que compartí durante toda mi carrera, por ayudarme con las dudas de latex, por su simpatía y buen humor. Gracias a tí, Francisco, por ser mi mejor amigo, por brindarme todo tu amor, apoyo y entusiasmo. Por estar siempre allí en el lugar y momento precisos, por compartír conmigo el amor por las ciencias.

Por las noches que me mantuviste despierta dándome ánimos. Mil gracias por todo lo que haces cada día y gracias también a tu mamá por ser tan linda conmigo.

También quiero agradecer a mi mejor amiga Scarleth por los buenos momentos que hemos pasado. Gracias a todos mis buenos amigos, especialmente gracias a aquellos con los que pasé días enteros estudiando en la biblioteca y por todo el tiempo que pasamos juntos. Los quiero mucho.

A todos los profesores que compartieron conmigo sus conocimientos y que siempre tuvieron la buena disposición de ayudarme. También a tí Aleska, por ser una gran persona.

Resumen

Interpretación Física de los Escalares de Estructura

Solmar A. Varela S.

Luis Herrera Cometta, Tutor

Alicia Di Prisco, Tutora

Universidad Central de Venezuela

Se estudia la evolución de fluidos esféricamente simétricos, no disipativos y localmente anisótropos, en el contexto de la Relatividad General, usando los escalares de estructura obtenidos a partir de la descomposición ortogonal del tensor de Riemann. Se analizan dos soluciones de fluidos esféricamente simétricos en evolución lenta y la aparición de fracturas en dos modelos de fluidos de densidad de energía inhomogénea, cuyo estudio se enfoca en dar una interpretación física de los escalares de estructura Y_T e Y_{TF} . Los resultados obtenidos ponen en evidencia la relevancia física de dichos escalares.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	ix
Lista de Figuras	xi
Introducción	1
1. Ecuaciones de campo y condiciones de acoplamiento. Leyes de conservación.	3
1.1. Ecuaciones de Campo	3
1.2. Condiciones de acoplamiento	8
1.3. Leyes de conservación	10
2. Tensor de Weyl. Función masa y la masa de Tolman-Whittaker. Ejemplos.	12
2.1. Tensor de Weyl	13
2.2. La función masa y la masa de Tolman-Whittaker	14
2.3. Ejemplos	18

2.3.1.	Contracción lenta de una esfera homogénea y localmente isótropa (hli), (Solución interior de Schwarzschild)	18
2.3.2.	Contracción lenta de una esfera sostenida sólo por tensiones tangenciales (hpt), (Solución de Florides)	21
3.	Escalares de estructura.	24
4.	Aplicación de los escalares de estructura.	27
4.1.	Aproximación de colapso lento	28
4.1.1.	Escalares de estructura para la solución interior de Schwarzs- child	28
4.1.2.	Escalares de estructura para la solución de Florides	30
4.2.	Fracturas en sistemas de densidad inhomogénea y escalares de estruc- tura	34
4.2.1.	Escalares de estructura para el caso de fluido perfecto	34
4.2.2.	Escalares de estructura para el caso de fluido anisótropo	37
	Conclusiones	43
	Bibliografía	45

LISTA DE FIGURAS

2.1.	Gráfica $\frac{1}{\omega_\Sigma} \frac{4}{3} \frac{Dm}{dt} = \frac{1}{\omega_\Sigma} \frac{4}{3} \frac{Dm_{TW}}{dt}$ en función de x , caso hli.	20
2.2.	Gráfica $\frac{m_{TW}}{M}$ en función de x , caso hpt.	22
2.3.	Gráfica $\frac{Dm_{TW}}{dt} \frac{8}{3} \omega_\Sigma ^{-1}$ en función de x , caso hpt.	23
4.1.	$r_\Sigma^2 Y_T$ función de x para una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa.	29
4.2.	$\frac{2r_\Sigma^3}{3\omega_\Sigma} \frac{DY_T}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa.	29
4.3.	$\frac{4r_\Sigma^2}{3} Y_T$ función de x para una esfera de densidad homogénea y sostenida por tensiones tangenciales.	31
4.4.	$-\frac{4r_\Sigma^3}{3\omega_\Sigma} \frac{DY_T}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea sostenida por tensiones tangenciales.	31
4.5.	$r_\Sigma^2 Y_{TF}$ función de x para una esfera de densidad homogénea y sostenida por tensiones tangenciales.	32
4.6.	$\frac{4r_\Sigma^3}{3\omega_\Sigma} \frac{DY_{TF}}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea sostenida por tensiones tangenciales.	32
4.7.	$r_\Sigma^2 Y_T$ función de x para un fluido perfecto.	34
4.8.	$r_\Sigma^2 Y_T^{(P)}$ función de x para un fluido perfecto.	35

4.9.	$r_{\Sigma}^2 Y_{TF}$ función de x para un fluido perfecto.	36
4.10.	$r_{\Sigma}^2 Y_{TF}^{(P)}$ función de x para un fluido perfecto.	37
4.11.	$\frac{Y_{TF}}{Y_{TF}^{(P)}}$ función de x para un fluido perfecto.	37
4.12.	Y_T función de r para un fluido anisótropo.	38
4.13.	$Y_T^{(P)}$ función de r para un fluido anisótropo, con valores específicos de los parámetros Ψ y α	39
4.14.	Y_{TF} función de r para un fluido anisótropo.	40
4.15.	$Y_{TF}^{(P)}$ función de r para un fluido anisótropo, con valores específicos de los parámetros Ψ y α	41
4.16.	$\frac{Y_{TF}}{Y_{TF}^{(P)}}$ función de r para un fluido anisótropo.	41

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enfocado en el estudio de fluidos autogravitantes, esféricamente simétricos, sin disipación y localmente anisótropos en las presiones. En particular, se realiza un estudio de la evolución lenta y de la aparición de fracturas para distintos casos de fluidos en términos de los escalares de estructura, obtenidos de la descomposición ortogonal del tensor de Riemann.

La descripción detallada del colapso gravitacional y el estudio de la estructura de objetos compactos sujetos a una variedad de condiciones es la motivación de este trabajo, ya que éstos permanecen entre los problemas más interesantes de la Relatividad General.

Se asume el estudio de fluidos esféricamente simétricos debido a que esta simetría simplifica los cálculos y describe en una buena aproximación los sistemas en estudio.

A pesar de que la isotropía local es una suposición muy común en el estudio de sistemas autogravitantes, existen evidencias teóricas de que una pequeña desviación de esta condición puede afectar de forma significativa la evolución del sistema. Además, una variada gama de fenómenos físicos pueden dar lugar a la anisotropía local [1].

En el capítulo siguiente se presentan las ecuaciones de campo y las condiciones de acoplamiento para el fluido en estudio. Además, se deduce la ecuación de equilibrio hidrostático a partir de las identidades de Bianchi.

En el segundo capítulo se introduce el tensor de Weyl y se contrastan dos diferentes definiciones de energía para dos sistemas de materia esféricamente simétricas, evolucionando lentamente, sin disipación y de densidad homogénea de energía, una isótropa y la otra sostenida sólo por tensiones tangenciales. Las definiciones de energía que se estudian son la función masa [2, 3] y la masa de Tolman-Whittaker [4, 5].

El tercer capítulo está enfocado en el estudio de las fracturas en sistemas de densidad de energía inhomogénea, específicamente se considera la fractura en un fluido perfecto y en un fluido anisótropo.

La descomposición ortogonal del tensor de Riemann se presenta en el cuarto capítulo, donde se introducen los escalares de estructura, principales objetos de este estudio.

En el capítulo 5 se muestra un estudio de los fluidos considerados en los capítulos 2 y 3, utilizando los escalares de estructura con el fin de dar a éstos una interpretación física.

Finalmente, los resultados son discutidos en las conclusiones.

CAPÍTULO 1

ECUACIONES DE CAMPO Y CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO. LEYES DE CONSERVACIÓN.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de campo para un fluido esféricamente simétrico, no disipativo, anisótropo en las presiones que está acotado por una superficie Σ . Además, se estudian las condiciones de acoplamiento y se muestran las ecuaciones obtenidas a partir de las leyes de conservación.

1.1. Ecuaciones de Campo

Para la distribución de materia a estudiar, el elemento de línea en coordenadas tipo Schwarzschild está dado por:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

donde $\nu(t, r)$ y $\lambda(t, r)$ son funciones de sus argumentos. Las coordenadas están numeradas de la forma $x^0 = t$; $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \phi$.

La expresión (1.1) debe satisfacer las ecuaciones de Einstein

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = 8\pi T^\nu_\mu \quad (1.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y R es el escalar de curvatura, definidos por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma,\nu} \quad (1.3)$$

$$R \equiv R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

T^ν_μ representa el tensor energía-impulso y el factor 8π es una normalización que permite obtener el límite newtoniano correcto. Además, se han utilizado unidades geometrizadas en (1.2), de manera que tanto la velocidad de la luz c como la constante gravitacional G se toman iguales a 1.

En (1.3), $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel que, en coordenadas tipo Schwarzschild, los únicos que no se anulan son

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{e^{(\lambda-\nu)}\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma^0_{01} &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{\nu'e^{(\nu-\lambda)}}{2}, \\ \Gamma^1_{01} &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma^1_{22} &= -re^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= -re^{-\lambda}\sin^2\theta, \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^3_{23} &= \cot\theta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde los puntos y las primas indican derivación con respecto a t y r , respectivamente.

Usando (1.3), (1.4) y (1.5), se verifica que las ecuaciones de campo son

$$-8\pi T^0_0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (1.6)$$

$$-8\pi T^1_1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (1.7)$$

$$-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = -\frac{e^{-\lambda}}{4}(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \quad (1.8)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (1.9)$$

Para dotar a las componentes del tensor energía-impulso, que aparecen en la parte izquierda de las ecuaciones (1.6)-(1.9), de significado físico se aplicará el esquema propuesto por Bondi [6].

Primero, se introduce un sistema de coordenadas localmente Minkowskiano (τ, x, y, z) en cada punto del espacio tiempo. Dichas coordenadas se relacionan con las coordenadas (t, r, θ, ϕ) por medio de

$$d\tau = e^{\nu/2} dt, \quad dx = e^{\lambda/2} dr, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\phi \quad (1.10)$$

En estas expresiones ν y λ son consideradas constantes, ya que sólo tienen valor localmente. Se verifica, que en dichas coordenadas, el elemento de línea (1.1) se escribe como

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.11)$$

Se denota con una barra el sistema local Minkowskiano (τ, x, y, z) y sin barra el sistema (t, r, θ, ϕ) . Usando la transformación

$$\bar{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} T_\beta^\gamma \quad (1.12)$$

se obtienen las componentes del tensor energía-impulso $\bar{T}_\beta^\alpha$ en términos de las componentes T_β^α

$$\bar{T}_0^0 = T_0^0, \quad \bar{T}_1^1 = T_1^1, \quad \bar{T}_2^2 = T_2^2, \quad \bar{T}_3^3 = T_3^3, \quad \bar{T}_{01} = e^{-(\nu+\lambda)/2} T_{01} \quad (1.13)$$

Ahora, se supone un observador comóvil (en cada punto) con la materia. El sistema localmente Minkowskiano asociado a dicho observador se denotará con una tilde ($\sim$) y la velocidad de un elemento de fluido respecto a el sistema barra es ω . Para este observador, el contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial $P_\perp$, y las componentes del tensor energía-impulso $\tilde{T}_{\mu\nu}$ vienen dadas por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Para escribir las componentes $\bar{T}^{\alpha\beta}$ en términos de las variables físicas vistas por el observador de coordenadas ($\sim$) se introduce la transformación

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma\delta} \quad (1.15)$$

donde, Λ_β^α es la matriz de Lorentz que se expresa por

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

A partir de (1.15) y (1.16) se determinan las componentes $\bar{T}_\beta^\alpha$ y usando (1.13) se obtienen finalmente, las componentes del tensor energía-impulso T_β^α en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) en término de variables físicas medidas por un observador localmente Minkowskiano y comóvil con la materia, obteniéndose

$$T_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} \quad (1.17)$$

$$T_1^1 = -\frac{P_r + \rho \omega^2}{1 - \omega^2} \quad (1.18)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_\perp \quad (1.19)$$

$$T_{01} = -\frac{(\rho + P_r)\omega e^{(\nu+\lambda)/2}}{1 - \omega^2} \quad (1.20)$$

La velocidad de un elemento de fluido cualquiera en coordenadas (t, r, θ, ϕ) , está relacionada con la velocidad $dx/d\tau$ de un observador localmente Minkowskiano por la expresión

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{(\lambda-\nu)/2} \quad (1.21)$$

Debido a que las superficies $r = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ son esferas de área $4\pi r^2$, en la expresión (1.21) se puede ver que $\omega > 0$ implica expansión de la esfera y $\omega < 0$ indica contracción.

La región exterior de la configuración está descrita por la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) du^2 + 2dudR - R^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \quad (1.22)$$

donde u es una coordenada tipo tiempo tal que las superficies $u = \text{constante}$ son, asintóticamente, conos de luz abierto al futuro y M es la energía total. Además, R es una coordenada nula tal que $g_{RR} = 0$. Las relaciones entre los sistemas de coordenadas (t, r, θ, ϕ) y (u, R, θ, ϕ) están dadas por

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \\ R &= r \end{aligned} \tag{1.23}$$

Se tienen, por tanto, dos regiones a considerar: la región interior, cuyo espacio-tiempo esta descrito por el elemento de línea (1.1) y la región exterior descrita por la métrica de Schwarzschild (1.22). Ambas regiones están separadas por una superficie esférica $r = r_\Sigma(t)$.

1.2. Condiciones de acoplamiento

Para evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas sobre la superficie Σ que separa la región interior de la exterior, es necesario satisfacer ciertas condiciones conocidas como condiciones de acoplamiento.

Una forma de definir dichas condiciones es la propuesta por Darmois. De acuerdo con él, para acoplar las dos regiones del espacio-tiempo sobre una hipersuperficie, necesariamente, debe haber continuidad tanto de la primera como de la segunda forma fundamental a través de la misma. La primera se refiere a la continuidad de la métrica inducida sobre la hipersuperficie y la segunda a la continuidad de la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre dicha hipersuperficie.

Una manera alternativa que garantiza la ausencia de comportamientos singulares en Σ es planteando la continuidad, a través de la misma, de

- la primera forma fundamental;
- las componentes independientes del flujo de energía-impulso.

De la continuidad a través de Σ de la primera forma fundamental se obtiene [1]

$$[e^\nu - e^\lambda \dot{r}_\Sigma^2]_\Sigma dt^2 = \left[1 - \frac{2M}{R_b} + 2 \frac{dR_b}{du} \right]_\Sigma du^2 \quad (1.24)$$

donde el subíndice Σ indica que la cantidad está evaluada en la superficie y $R = R_b(u)$ es la ecuación de la superficie en las coordenadas (u, r, θ, ϕ) . La expresión (1.24) nos lleva a

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (1.25)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (1.26)$$

La continuidad de las componentes independientes del flujo de energía-impulso se expresan como

$$(T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.27)$$

$$(T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.28)$$

Los signos $+$ y $-$ indican que las cantidades están evaluadas al exterior e interior de Σ , respectivamente. Además

$$n_\mu^{(+)} = \left(-\alpha \frac{dR_b}{du}, \alpha, 0, 0 \right) \quad (1.29)$$

$$n_\mu^{(-)} = (-\dot{r}_\Sigma \beta, \beta, 0, 0) \quad (1.30)$$

$$v^{\mu(+)} = \alpha \delta_u^\mu + \alpha \frac{dR_b}{du} \delta_R^\mu \quad (1.31)$$

$$v^{\mu(-)} = \frac{e^{-\nu_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_t^\mu + \frac{\omega_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)} \delta_r^\mu \quad (1.32)$$

n^μ es un vector unitario normal a la superficie y v^μ es un vector unitario tipo tiempo tal que $v^\mu v_\mu = 1$, donde

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R_b} + 2\frac{dR_b}{du}\right)^{1/2}} \quad (1.33)$$

$$\beta = \frac{1}{(e^{-\lambda_\Sigma} - \dot{r}_\Sigma^2 e^{-\nu_\Sigma})^{1/2}} \quad (1.34)$$

El resultado que se obtiene de esta condición es:

$$[P_r]_\Sigma = 0 \quad (1.35)$$

que expresa la continuidad de la presión radial.

Resumiendo, al cumplirse las condiciones (1.25), (1.26) y (1.35) se satisface el acoplamiento de las métricas (1.1) y (1.22) a través de la superficie Σ .

1.3. Leyes de conservación

Las leyes de conservación escritas como

$$T^\mu_{\nu;\mu} = 0 \quad (1.36)$$

se obtienen de las ecuaciones de campo (1.2) o de las identidades de Bianchi, donde “;” denota derivada covariante. Las ecuaciones (1.36) no aportan ninguna información adicional a la contenida en (1.6)-(1.9) ya que son una consecuencia de éstas. Sin embargo, la forma explícita de (1.36) puede ser útil en muchos casos, como por ejemplo al momento de integrar el sistema o al querer dar una interpretación física a una determinada situación.

Así por ejemplo, usando la forma explícita de la componente r de (1.36), o bien derivando (1.7) con respecto a r , usando las otras ecuaciones de campo y considerando el caso estático

$$\begin{aligned} T_0^0 = \rho \quad ; \quad T_1^1 = -P_r \quad ; \quad T_2^2 = -P_\perp \\ \ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = 0 \end{aligned} \tag{1.37}$$

se obtiene:

$$P_r' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} \tag{1.38}$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido anisótropo.

CAPÍTULO 2

TENSOR DE WEYL. FUNCIÓN MASA Y LA MASA DE TOLMAN-WHITTAKER. EJEMPLOS.

En este capítulo se presenta el tensor de Weyl y se contrastan dos definiciones para la energía total dentro de la superficie Σ de distribuciones de materia esféricamente simétricas que evolucionan lentamente y sin disipación, la función masa y la masa de Tolman-Whittaker. Finalmente, se ilustra la discusión sobre la energía con dos ejemplos, el primero el de una esfera isótropa de densidad homogénea; el segundo, una esfera de densidad homogénea sostenida sólo por tensiones tangenciales.

Regímenes de evolución: Antes de comenzar con la discusión del capítulo, se mencionan los tres regímenes posibles de evolución de la esfera:

- El régimen estático, donde ω y sus derivadas temporales son iguales a cero.
- El régimen de evolución lenta, donde nuestra esfera cambia muy poco en una escala de tiempo que es muy grande comparada con el tiempo característico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático. De esta forma, se considera que el sistema siempre está en equilibrio hidrostático y su evolución se puede visualizar como una secuencia de modelos estáticos. Esto

significa que la velocidad radial ω , medida por el observador Minkowskiano, es siempre mucho menor que la velocidad de la luz ($\omega \ll 1$). Además, se cumple

$$\omega^2 \approx \dot{\omega} \approx \ddot{\nu} \approx \ddot{\lambda} \approx \dot{\nu}\dot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx 0 \quad (2.1)$$

- El régimen dinámico, que es el régimen más general donde ω y sus derivadas temporales son distintas de cero.

2.1. Tensor de Weyl

El tensor de Riemann o tensor de curvatura puede ser expresado en términos del tensor de Weyl $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$, el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ y el escalar de curvatura R de la siguiente manera

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = C_{\beta\gamma\delta}^\alpha + \frac{1}{2}R_{\gamma}^\alpha g_{\beta\delta} - \frac{1}{2}R_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^\alpha + \frac{1}{2}R_{\beta\delta}\delta_{\gamma}^\alpha - \frac{1}{2}R_{\delta}^\alpha g_{\beta\gamma} - \frac{1}{6}R(\delta_{\gamma}^\alpha g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^\alpha) \quad (2.2)$$

Al considerar el régimen de evolución lenta, se obtiene que todas las componentes diferentes de cero del tensor de Weyl pueden expresarse por medio de C_{232}^3

$$E \equiv \frac{3}{2r^2}C_{232}^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{e^{\lambda}}{r^2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right) \quad (2.3)$$

o, usando las ecuaciones de Einstein

$$E = -\frac{4\pi}{r^3} \int_0^r r^3(\rho)'dr + 4\pi(P_r - P_{\perp}) \quad (2.4)$$

El primer término de (2.4) contiene la contribución debido a la inhomogeneidad en la densidad de energía en la distribución, y el segundo término la anisotropía en las presiones.

2.2. La función masa y la masa de Tolman-Whittaker

Como consecuencia de las condiciones de acoplamiento, se puede escribir (1.26) de la forma

$$M = \frac{1}{2}(rR_{232}^3)_\Sigma \quad (2.5)$$

donde M es el parámetro de Schwarzschild y R_{232}^3 es la componente del tensor de Riemann dada por

$$R_{232}^3 = 1 - e^{-\lambda} \quad (2.6)$$

La interpretación de M como la energía al total dentro de la superficie Σ sugiere que la energía al interior de una esfera de radio r , con $r < r_\Sigma$, se pueda definir como [2, 3]:

$$m(r, t) = \frac{1}{2}rR_{232}^3 = \frac{1}{2}r(1 - e^{-\lambda}) \quad (2.7)$$

que, usando (1.6) se puede escribir como

$$m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr \quad (2.8)$$

que es la denominada función masa.

A partir de la definición del tensor de Weyl (2.2), y de (1.6), (1.7), (2.3) (2.7) se obtiene [1]

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - P_r + P_\perp) + \frac{r^3 E}{3} \quad (2.9)$$

sustituyendo (2.4) en (2.9), se tiene para m [1]

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho - \frac{4}{3}\pi \int_0^r r^3 (\rho)' dr \quad (2.10)$$

donde el primer término corresponde a la contribución incompresible del fluido localmente isótropo y el segundo corresponde a la inhomogeneidad en la distribución de energía.

Tolman [4] y Whittaker [5], dieron una definición alternativa para la energía total dentro de la superficie Σ , conocida como la masa de Tolman-Whittaker, para el caso estático o cuasiestático

$$m_{TW} = 4\pi \int_0^{r_\Sigma} r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} (\rho + P_r + 2P_\perp) dr \quad (2.11)$$

Tomando en cuenta que en la expresión anterior se utiliza el elemento de volumen propio $4\pi r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} dr$, se identifica la cantidad dentro del paréntesis como la densidad de masa y por lo tanto, la masa interior a una esfera de radio $r < r_\Sigma$ se define como

$$m_{TW}(r, t) = 4\pi \int_0^r r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} (\rho + P_r + 2P_\perp) dr \quad (2.12)$$

De la sustitución de ρ , P_r y $P_\perp$ en (2.12) por sus expresiones a través de las ecuaciones de campo (1.6)-(1.9), se obtiene [1]

$$m_{TW} = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)/2} \nu' r^2 \quad (2.13)$$

derivando (2.13) con respecto a r y usando las ecuaciones de campo y la definición del tensor de Weyl (2.3), se obtiene la siguiente ecuación diferencial para m_{TW}

$$r m'_{TW} - 3m_{TW} = e^{(\nu+\lambda)/2} r^3 [4\pi(P_\perp - P_r) - E] \quad (2.14)$$

al integrar se obtiene una expresión que relaciona m_{TW} con el tensor de Weyl [1]

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right)^3 + r^3 \int_r^{r_\Sigma} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{4}{3} \frac{r^3}{\tilde{r}^4} E - \frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_\perp - P_r) \right] d\tilde{r} \quad (2.15)$$

Reemplazando E por su expresión en (2.4), se puede también escribir [1]

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right)^3 + r^3 \int_r^{r_\Sigma} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{8\pi}{\tilde{r}} (P_r - P_\perp) - \frac{4\pi}{\tilde{r}^4} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{r}^3 (\rho)' d\tilde{r} \right] d\tilde{r} \quad (2.16)$$

El primer término en la expresión (2.16) corresponde a la masa de Tolman-Whittaker asociada a un fluido con distribución de energía homogénea y localmente isótropo, y los otros dos términos corresponden a las contribuciones debidas a la anisotropía y la inhomogeneidad de la energía. Por otra parte, integrando (2.11) y usando (1.6) y la ecuación de equilibrio hidrostático (1.38), se obtiene [1]

$$m_{TW} = e^{(\nu+\lambda)/2} (m + 4\pi P_r r^3) \quad (2.17)$$

y como consecuencia de las condiciones de acoplamiento

$$(m_{TW})_\Sigma = m_\Sigma = M \quad (2.18)$$

que es lo que se espera.

Además, el término gravitacional de la ecuación (1.38), se puede escribir, de acuerdo con (2.13), como

$$-(\rho + P_r) \frac{m_{TW}}{r^2} e^{(\lambda-\nu)/2} \quad (2.19)$$

lo que nos indica que m_{TW} debe ser proporcional a la masa gravitacional activa.

Es interesante notar que la anisotropía local no contribuye explícitamente a la función masa (2.10), mientras que sí lo hace en m_{TW} (2.11). Al considerar el caso homogéneo y localmente isótropo, se obtiene de (2.16)

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = m \quad (2.20)$$

en general $m \neq m_{TW}$.

Una definición importante es la derivada convectiva (comóvil) de una función N asociada a un elemento de fluido dado

$$\frac{DN}{Dt} = \dot{N} + N' \frac{dr}{dt} \quad (2.21)$$

la cual mide la variación temporal de N para dicho elemento.

Para determinar la variación temporal de la función masa m para un elemento dado de fluido, se tiene (a partir de (2.7))

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (2.22)$$

derivando esta expresión con respecto a t se obtiene

$$\dot{\lambda} e^{-\lambda} = \frac{2\dot{m}}{r} \quad (2.23)$$

y usando (1.9) con (1.20) y (1.21)

$$\dot{m} = -4\pi r^2 (P_r + \rho) \frac{dr}{dt} \quad (2.24)$$

Por otra parte, se deriva (2.8) con respecto a r

$$m' = 4\pi r^2 \rho \quad (2.25)$$

Finalmente, sustituyendo (2.24) y (2.25) en (2.21) se obtiene

$$\frac{Dm}{Dt} = -4\pi r^2 P_r \frac{dr}{dt} \quad (2.26)$$

2.3. Ejemplos

La expresión anterior muestra cómo la presión radial realiza un trabajo sobre una esfera comóvil con el fluido, variando su función masa. Se nota también que cuando el fluido es anisótropo, la tensión tangencial no aparece en la expresión (2.26), por lo que no realiza trabajo sobre la esfera. Finalmente, evaluando (2.26) en la frontera del fluido, se obtiene, debido a las condiciones de acoplamiento

$$\left(\frac{Dm}{Dt}\right)_\Sigma = 0 \quad (2.27)$$

que evidencia el hecho de que los sistemas a considerar no tienen disipación y por lo tanto la energía total es constante.

2.3. Ejemplos

Los conceptos introducidos en la sección anterior se utilizan en la descripción del colapso lento de dos modelos diferentes.

2.3.1. Contracción lenta de una esfera homogénea y localmente isótropa (hli), (Solución interior de Schwarzschild)

Se considera un fluido localmente isótropo ($P_r = P_\perp = P$), no disipativo y de densidad homogénea ($\rho = \rho(t)$) que evoluciona lentamente. Se satisface la ecuación (1.38), ya que en el contexto de la aproximación lenta el sistema siempre está en equilibrio hidrostático. Integrando (1.38) con $\rho = \rho(t)$, se obtiene, para la presión

$$P_\perp = P_r = P = \rho \frac{(1 - nx^2)^{1/2} - (1 - n)^{1/2}}{3(1 - n)^{1/2} - (1 - nx^2)^{1/2}} \quad (2.28)$$

con

$$n \equiv \frac{2M}{r_\Sigma} < 1 \quad ; \quad x \equiv \frac{r}{r_\Sigma} \leq 1 \quad (2.29)$$

2.3. Ejemplos

Se observa que para $n = 8/9$ la expresión (2.28) es singular en $r = 0$. Es decir, hay un valor límite en el grado de compactación, más allá del cual el sistema se sale del régimen de equilibrio hidrostático. Además, se obtienen las siguientes expresiones

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \quad (2.30)$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho r_\Sigma^3 \quad (2.31)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - nx^2 \quad (2.32)$$

$$e^{\nu/2} = \frac{1}{2} \left[3(1-n)^{1/2} - (1-nx^2)^{1/2} \right] \quad (2.33)$$

De (2.4), se tiene que

$$E = 0 \quad (2.34)$$

y de las expresiones (2.10) y (2.16), se obtiene para este modelo

$$m = m_{TW} \quad (2.35)$$

Ahora, de la ecuación (2.26), usando (2.30), se obtiene

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{4\pi}{3}\dot{\rho}r^3 + 4\pi\rho r^2 \frac{dr}{dt} = -4\pi P_r r^2 \frac{dr}{dt} \quad (2.36)$$

o bien

$$\frac{1}{3}\dot{\rho}r = -(\rho + P) \frac{dr}{dt} \quad (2.37)$$

Por otra parte, derivando (2.31) con respecto a t y recordando que la masa total M es constante, se tiene

$$\dot{\rho} = -3\rho \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_\Sigma \quad (2.38)$$

Igualando las expresiones (2.37) y (2.38), se encuentra, para dr/dt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho r}{(\rho + P)} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_\Sigma \quad (2.39)$$

2.3. Ejemplos

que usando (1.21), (1.25), (1.26) y (2.28) se escribe como

$$\omega = \omega_{\Sigma} e^{(\lambda - \lambda_{\Sigma})/2} \frac{r}{r_{\Sigma}} \quad (2.40)$$

expresión que en el límite newtoniano se transforma en

$$\omega = \left(\frac{\omega}{r} \right)_{\Sigma} r \quad (2.41)$$

que es la ley de contracción homóloga.

Finalmente, a partir de (2.26) y usando (1.21), (2.28) y (2.40) se obtiene la derivada convectiva de la masa

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{Dm_{TW}}{Dt} = \frac{3}{4} \omega_{\Sigma} n (1-n)^{1/2} x^3 [(1-n)^{1/2} - (1-nx^2)^{1/2}] \quad (2.42)$$

En este modelo, se nota que

$$m = Mx^3 \quad (2.43)$$

y además, ambas definiciones de masa coinciden

$$m = m_{TW} = Mx^3 \quad (2.44)$$

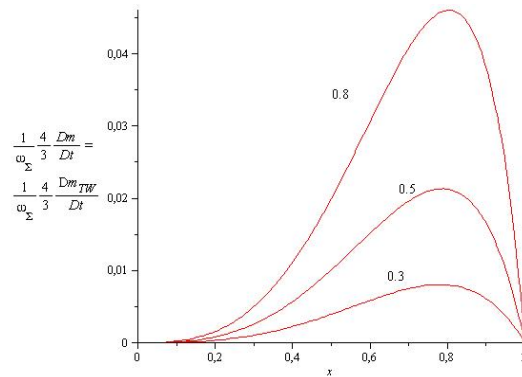


Figura 2.1: Gráfica $\frac{1}{\omega_{\Sigma}} \frac{4}{3} \frac{Dm}{dt} = \frac{1}{\omega_{\Sigma}} \frac{4}{3} \frac{Dm_{TW}}{dt}$ en función de x , caso hli.

Por tanto, al considerar un observador comóvil con el fluido, éste observará cambios tanto en m como en m_{TW} . De hecho, el observador detectará incrementos en la masa para $r < r_\Sigma$ a medida que n aumenta (contracción) [1].

2.3.2. Contracción lenta de una esfera sostenida sólo por tensiones tangenciales (hpt), (Solución de Florides)

Se considera un fluido no disipativo, de densidad homogénea ($\rho = \rho(t)$) sostenido sólo por tensiones tangenciales ($P_r = 0$). Dicha solución, obtenida por Florides [7], es un caso particular de los modelos de Bowers y Liang [8]. Se obtiene entonces [1]

$$P_\perp = \frac{3n^2x^2}{32\pi r_\Sigma^2(1-nx^2)} \quad (2.45)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad (2.46)$$

$$e^\nu = \frac{(1-n)^{3/2}}{(1-nx^2)^{1/2}} \quad (2.47)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - nx^2 \quad (2.48)$$

Y partir de (2.9) y (2.17)

$$m_{TW} = m \left(\frac{1-n}{1-nx^2} \right)^{3/4} \quad (2.49)$$

$$E = -\frac{3Mnx^2}{4r_\Sigma^3(1-nx^2)} \quad (2.50)$$

Además, usando (2.37) y (2.38) con $P_r = 0$, se obtiene para la velocidad

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{1-n}{1-nx^2} \right)^{1/4} x \quad (2.51)$$

2.3. Ejemplos

o, en coordenadas (t, r, θ, ϕ)

$$\frac{dr}{dt} = \omega_{\Sigma} (1 - n) x \quad (2.52)$$

De (2.49), tomando en cuenta que $Dm/Dt = 0$, se obtiene la derivada convectiva de m_{TW}

$$\frac{Dm_{TW}}{Dt} = \frac{3}{8} \omega_{\Sigma} n^2 x^3 \frac{(1 - n)^{3/4}}{(1 - nx^2)^{7/4}} (1 - x^2) \quad (2.53)$$

En este caso (hpt), la función masa y la masa de Tolman Whittaker no coinciden, de hecho se relacionan como en (2.49), o equivalentemente

$$m_{TW} = M \left(\frac{1 - n}{1 - nx^2} \right)^{3/4} x^3 \quad (2.54)$$

Si se consideran diferentes observadores comóviles con el fluido para diferentes valores de x , m permanece constante a medida que pasa el tiempo, como es evidente de (2.26). Sin embargo, en el proceso de contracción, m_{TW} disminuye al interior de la esfera y tiende a concentrarse en la superficie, lo que explica la mayor estabilidad de dicho modelo, ya que permite seguir la compactación de la esfera sin que el sistema salga del equilibrio considerado (ver figura 2.2). Esta disminución también queda evidenciada en (2.53) como lo indica la figura 2.3 .

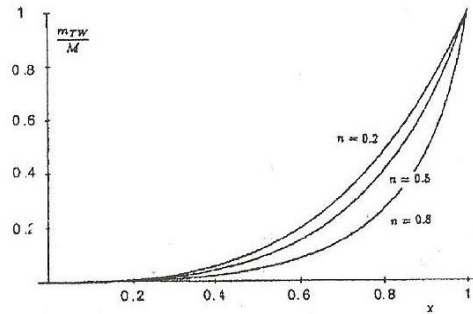


Figura 2.2: Gráfica $\frac{m_{TW}}{M}$ en función de x , caso hpt.

2.3. Ejemplos

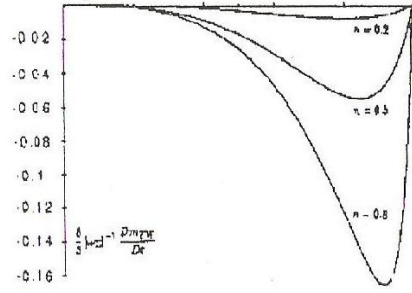


Figura 2.3: Gráfica $\frac{Dm_{TW}}{dt} \frac{8}{3} |\omega_{\Sigma}|^{-1}$ en función de x , caso hpt.

Es importante destacar que para la misma distribución de densidad de energía, m es igual, independientemente de la anisotropía local.

CAPÍTULO 3

ESCALARES DE ESTRUCTURA.

A partir de la analogía estructural existente entre la Relatividad General y el Electromagnetismo de Maxwell se puede establecer un paralelismo entre el tensor de Riemann ($R_{\alpha\beta\gamma\delta}$) y el tensor de Maxwell ($F_{\mu\nu}$). Este paralelismo fue considerado por Bel [11], quien introdujo los siguientes tensores definidos a partir del tensor de Riemann

$$Y_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (3.1)$$

$$X_{\alpha\beta} = {}^* R_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon\rho} R_{\epsilon\rho\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (3.2)$$

$$Z_{\alpha\beta} = {}^* R_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma\epsilon\rho} R^{\epsilon\rho}{}_{\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (3.3)$$

donde

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{2} \eta_{\epsilon\rho\gamma\delta} R_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\rho} \quad (3.4)$$

$\eta_{\alpha\gamma\beta\delta}$ es el tensor de Levi-Civita y u^γ es la cuadrivelocidad de un conjunto de observadores.

Para un fluido no disipativo, esféricamente simétrico y anisótropo en las presiones, se pueden encontrar las expresiones para los tensores $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ y $X_{\alpha\beta}$ en términos de las variables físicas [12].

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{3}(\rho + 3\hat{P})h_{\alpha\beta} + 4\pi\Pi_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

$$X_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{3}\rho h_{\alpha\beta} + 4\pi\Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} \quad (3.6)$$

$$Z_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.7)$$

donde

$$\Pi_\nu^\mu = \Pi(s^\mu s_\nu + \frac{1}{3}h_\nu^\mu) \quad (3.8)$$

$$\hat{P} = \frac{P_r + 2P_\perp}{3} \quad (3.9)$$

$$\Pi = P_r - P_\perp \quad (3.10)$$

$$s^\mu = \left(\frac{\omega e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, \frac{e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, 0, 0 \right) \quad (3.11)$$

y $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ es el tensor de proyección sobre el triespacio ortogonal a u^μ .

Los tensores $X_{\alpha\beta}$ e $Y_{\alpha\beta}$ pueden descomponerse en términos de sus trazas y su correspondiente parte sin traza, de la forma

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}TrX h_{\alpha\beta} + X_{<\alpha\beta>} \quad (3.12)$$

con

$$TrX = X_\alpha^\alpha \quad (3.13)$$

$$X_{<\alpha\beta>} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \left(X_{\mu\nu} - \frac{1}{3}TrX h_{\mu\nu} \right) \quad (3.14)$$

De (3.6) se obtiene

$$TrX \equiv X_T = 8\pi\rho \quad (3.15)$$

y

$$X_{<\alpha\beta>} = X_{TF} \left(s_\alpha s_\beta + \frac{h_{\alpha\beta}}{3} \right) \quad (3.16)$$

donde

$$X_{TF} \equiv (4\pi\Pi - E) \quad (3.17)$$

De forma similar para (3.5)

$$TrY \equiv Y_T = 4\pi(\rho + 3P_r - 2\Pi) \quad (3.18)$$

$$Y_{<\alpha\beta>} = Y_{TF} \left(s_\alpha s_\beta + \frac{h_{\alpha\beta}}{3} \right) \quad (3.19)$$

$$Y_{TF} \equiv (4\pi\Pi + E) \quad (3.20)$$

con

$$E = \frac{3m}{r^3} - 4\pi(\rho - P_r + P_\perp) \quad (3.21)$$

Las cantidades X_T , X_{TF} , Y_T y Y_{TF} son conocidas como escalares de estructura.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DE LOS ESCALARES DE ESTRUCTURA.

El objetivo del presente capítulo es estudiar las propiedades físicas de los escalares de estructura Y_T y Y_{TF} , mediante el análisis de diferentes procesos físicos que tienen lugar en fluidos relativistas descritos por las soluciones de Einstein. Los procesos físicos a estudiar son la evolución lenta y la fractura para los sistemas considerados en los capítulos 2 y 3.

Para el estudio de estos procesos, se utilizará una expresión importante que relaciona la masa de Tolman-Whittaker (m_{TW}) con el escalar Y_{TF} . A partir de la definición general de la masa de Tolman para el caso dinámico se obtiene[13]

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right)^3 + r^3 \int_r^{r_\Sigma} \frac{e^{(\nu+\lambda)/2}}{r} Y_{TF} dr + 4\pi r^3 \int_r^{r_\Sigma} e^\lambda (\rho + P_r) \dot{\omega} dr \quad (4.1)$$

Comparando esta expresión con (2.16) se observa que Y_{TF} describe la influencia de la anisotropía local en las presiones y de la inhomogeneidad de la densidad de energía en la masa de Tolman [12].

4.1. Aproximación de colapso lento

Para el caso de un fluido en equilibrio o evolucionando lentamente, la expresión (4.1) queda de la forma

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right)^3 + r^3 \int_r^{r_\Sigma} \frac{e^{(\nu+\lambda)/2}}{r} Y_{TF} dr \quad (4.2)$$

Para este mismo caso se obtiene para Y_T , usando (2.12) y (3.18)

$$m_{TW} = \int_0^r r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} Y_T dr \quad (4.3)$$

donde se aprecia que Y_T es proporcional a la densidad de la masa de Tolman para sistemas en equilibrio o cuasiequilibrio.

4.1. Aproximación de colapso lento

4.1.1. Escalares de estructura para la solución interior de Schwarzschild

Se considera el fluido isótropo de la sección (2.3.1), cuya presión es (2.28)

$$P_\perp = P_r = P = \rho \frac{(1 - nx^2)^{1/2} - (1 - n)^{1/2}}{3(1 - n)^{1/2} - (1 - nx^2)^{1/2}} \quad (4.4)$$

El escalar Y_T para este caso se obtiene usando la expresión anterior en (3.18) con $\Pi = 0$

$$Y_T = 8\pi\rho \left[\frac{(1 - nx^2)^{1/2}}{3(1 - n)^{1/2} - (1 - nx^2)^{1/2}} \right] \quad (4.5)$$

Se puede determinar la derivada convectiva o comóvil de Y_T , obteniéndose

$$\frac{DY_T}{Dt} = \frac{3}{2} \frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma^3} \left\{ \frac{6n(1-n) - 3n^2x^2(1-n) - 18n(1-n)^{3/2}(1-nx^2)^{1/2} - 3n^2(1-n)^{1/2}(1-nx^2)^{1/2}}{[3(1-n)^{1/2} - (1-nx^2)^{1/2}]^2} \right\} \quad (4.6)$$

4.1. Aproximación de colapso lento

Esta expresión mide la variación temporal de Y_T para un elemento de fluido.

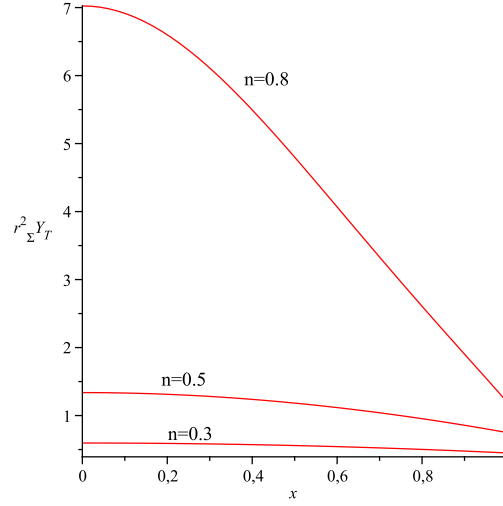


Figura 4.1: $r_\Sigma^2 Y_T$ función de x para una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa.

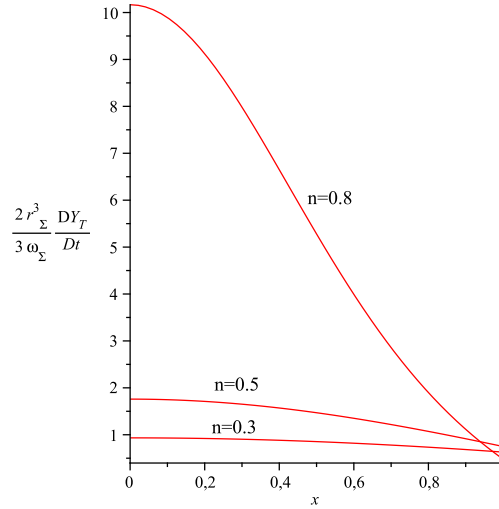


Figura 4.2: $\frac{2r_\Sigma^3}{3\omega_\Sigma} \frac{DY_T}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa.

La expresión para el escalar Y_{TF} se obtiene usando (3.20) y (3.21) que, considerando la isotropía de este caso, queda

$$\boxed{Y_{TF} = 0} \quad (4.7)$$

y su respectiva derivada comóvil viene dada por

$$\boxed{\frac{DY_{TF}}{Dt} = 0} \quad (4.8)$$

4.1.2. Escalares de estructura para la solución de Florides

Se considera el fluido anisótropo de la sección (2.3.2), donde $P_r = 0$ y la presión tangencial es (2.45)

$$P_{\perp} = \frac{3n^2 x^2}{32\pi r_{\Sigma}^2 (1 - nx^2)} \quad (4.9)$$

Usando esta expresión en (3.18), se obtiene que Y_T viene dado por

$$\boxed{Y_T = \frac{3n}{4r_{\Sigma}^2} \left(\frac{2 - nx^2}{1 - nx^2} \right)} \quad (4.10)$$

y su respectiva derivada convectiva es:

$$\boxed{\frac{DY_T}{Dt} = -\frac{3}{4} \frac{\omega_{\Sigma}}{r_{\Sigma}^3} n(1 - n) \left[nx^2 \frac{(4 - 3nx^2)}{(1 - nx^2)^2} + 6 \right]} \quad (4.11)$$

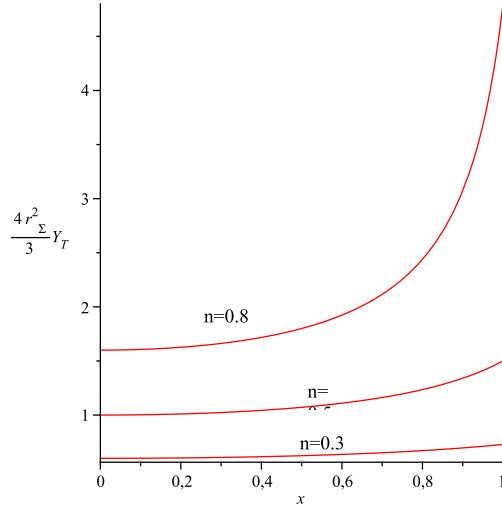


Figura 4.3: $\frac{4r_\Sigma^2}{3}Y_T$ función de x para una esfera de densidad homogénea y sostenida por tensiones tangenciales.

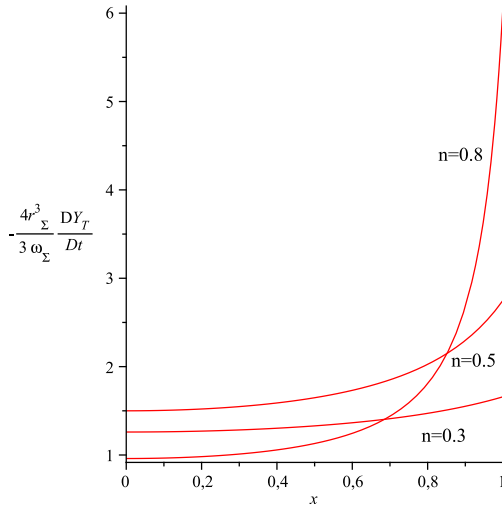


Figura 4.4: $-\frac{4r_\Sigma^3}{3\omega_\Sigma}\frac{DY_T}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea sostenida por tensiones tangenciales.

De manera similar, las expresiones para el escalar Y_{TF} y su respectiva derivada convectiva, son

4.1. Aproximación de colapso lento

$$Y_{TF} = -8\pi P_{\perp} = -\frac{3n^2x^2}{4r_{\Sigma}^2(1-nx^2)} \quad (4.12)$$

$$\frac{DY_{TF}}{Dt} = \frac{3}{4} \frac{\omega_{\Sigma}}{r_{\Sigma}^3} (1-n)n^2x^2 \left[\frac{4-3nx^2}{(1-nx^2)^2} \right] \quad (4.13)$$

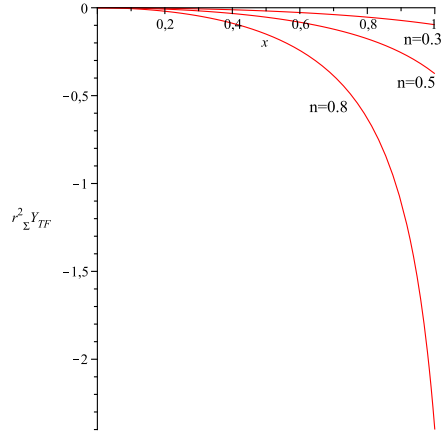


Figura 4.5: $r_{\Sigma}^2 Y_{TF}$ función de x para una esfera de densidad homogénea y sostenida por tensiones tangenciales.

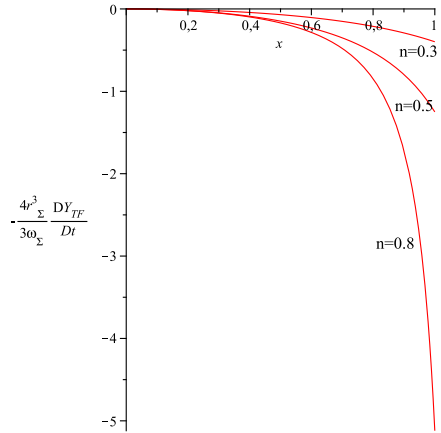


Figura 4.6: $\frac{4r_{\Sigma}^3}{3\omega_{\Sigma}} \frac{DY_{TF}}{Dt}$ función de x para una esfera de densidad homogénea sostenida por tensiones tangenciales.

4.1. Aproximación de colapso lento

En la gráfica (4.1), se observa que a medida que n aumenta (contracción) el escalar Y_T aumenta para un fluido perfecto y es mayor en la región más interna de la esfera, contrario al caso anisótropo, donde hay un incremento del escalar Y_T en el proceso de contracción (ver figura 4.3), pero es mayor para los valores de r cercanos a la superficie. Si recordamos que Y_T es proporcional a la densidad de la masa de Tolman, este último resultado explica el hecho de que el modelo anisótropo sea más estable que el isótropo.

Con respecto al escalar Y_{TF} para el caso isótropo, el hecho de que éste sea cero implica que la expresión (4.2) se reduce a

$$m_{TW} = Mx^3 \quad (4.14)$$

por lo que un observador comóvil con el fluido observará un incremento de la masa en el proceso de contracción y por ende, un aumento de la fuerza gravitacional. Como consecuencia, sólo se puede compactar la esfera hasta un cierto valor límite más allá del cual el sistema se sale del equilibrio hidrostático. De hecho, se observa que dicho valor límite es $n = 8/9$, valor para el cual la expresión (4.4) es singular en $r = 0$.

En el caso anisótropo, el escalar Y_{TF} es negativo (ver ecuación (4.12)) y decrece para $r < r_\Sigma$ en el proceso de contracción de una esfera anisótropa (ver figura (4.5)). Al considerar esto en (4.2) se obtiene que m_{TW} disminuye al interior de la esfera en el proceso de compactación. La interpretación de m_{TW} como la masa gravitacional activa implica que existe una menor atracción de los elementos de fluido al interior de la esfera, lo que permite una mayor compactación de la misma dentro del régimen de equilibrio hidrostático, sin la limitación observada en el caso isótropo.

4.2. Fracturas en sistemas de densidad inhomogénea y escalares de estructura

4.2.1. Escalares de estructura para el caso de fluido perfecto

Se considera el fluido de la sección (3.2.1), caracterizado por (??).

$$\rho = \frac{K}{r^2} \quad P = P_r = P_\perp = \frac{3K}{r_\Sigma^2 x^2} \frac{1-x}{9-x} \quad (4.15)$$

donde $K = 3/56\pi$. El escalar Y_T cuando el fluido está en equilibrio, se obtiene a partir de la ecuación (3.18)

$$Y_T = \frac{8\pi K}{r_\Sigma^2 x^2} \left(\frac{9-5x}{9-x} \right) \quad (4.16)$$

y sustituyendo el valor de K

$$Y_T = \frac{0,42857}{r_\Sigma^2 x^2} \left(\frac{9-5x}{9-x} \right) \quad (4.17)$$

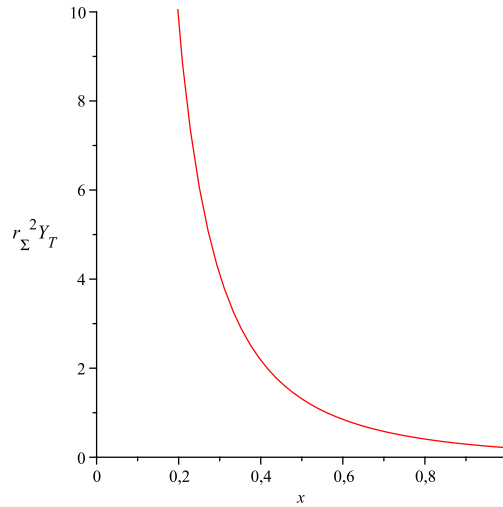


Figura 4.7: $r_\Sigma^2 Y_T$ función de x para un fluido perfecto.

4.2. Fracturas en sistemas de densidad inhomogénea y escalares de estructura

Se perturba el sistema con el fin de sacarlo del equilibrio

$$K \rightarrow K^{(P)} = \frac{3}{56\pi} + \Psi \quad ; \quad \Psi = \frac{1}{1400} \quad (4.18)$$

y se obtiene que el escalar Y_T luego de la perturbación queda como

$$Y_T^{(P)} = \frac{0,44652}{r_\Sigma^2 x^2} \left(\frac{9-5x}{9-x} \right) \quad (4.19)$$

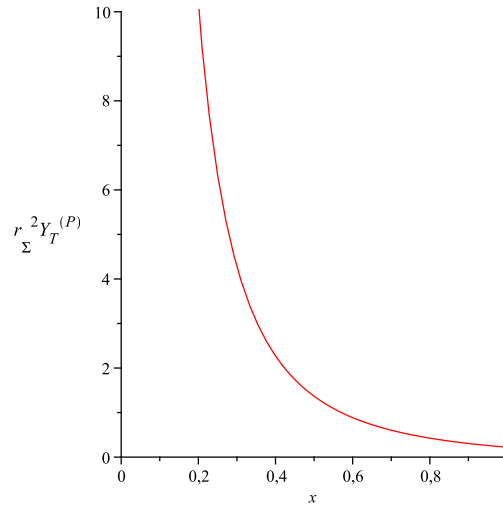


Figura 4.8: $r_\Sigma^2 Y_T^{(P)}$ función de x para un fluido perfecto.

De forma similar, el escalar Y_{TF} viene dado por la expresión (3.20), que considerando $P_r = P_\perp$ queda como

$$Y_{TF} = E \quad (4.20)$$

Para el fluido en consideración, el escalar de Weyl E se determina de (2.3)

$$E = -\frac{8\pi K}{r^2(r-9r_\Sigma)^2} \left[\left(-\frac{5}{2} + \frac{16\pi K}{(1-8\pi K)} \right) r^2 + \left(27 - \frac{96\pi K}{(1-8\pi K)} \right) r r_\Sigma + \left(-\frac{189}{2} + \frac{144\pi K}{(1-8\pi K)} \right) r_\Sigma^2 \right] \quad (4.21)$$

4.2. Fracturas en sistemas de densidad inhomogénea y escalares de estructura

Por tanto, la expresión correspondiente al escalar Y_{TF} antes de la perturbación es

$$Y_{TF} = E = -\frac{0,42857}{r_{\Sigma}^2 x^2 (x-9)^2} [(-1x^2 + 18x - 81)] \quad (4.22)$$

donde se ha sustituido el valor numérico de K .

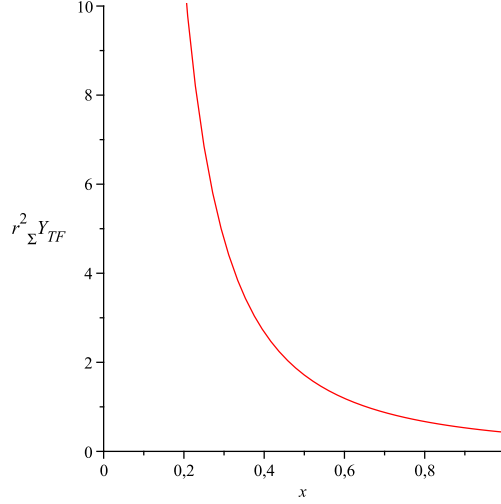


Figura 4.9: $r_{\Sigma}^2 Y_{TF}$ función de x para un fluido perfecto.

Se perturba el sistema usando (4.18) y se obtiene, finalmente

$$Y_{TF}^{(P)} = -\frac{0,4610063}{r_{\Sigma}^2 x^2 (x-9)^2} (-0,858628x^2 + 16,774779x - 77,465708) \quad (4.23)$$

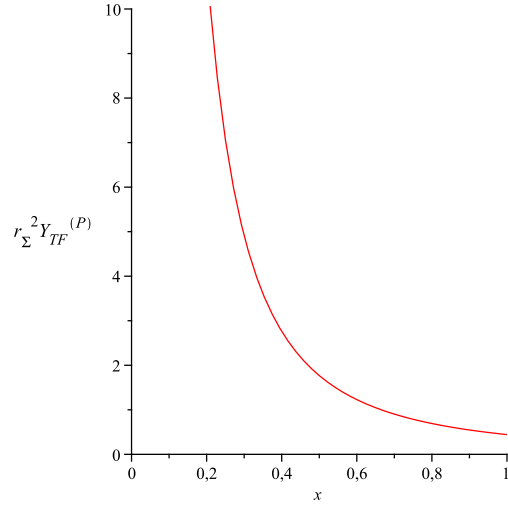


Figura 4.10: $r_{\Sigma}^2 Y_{TF}^{(P)}$ función de x para un fluido perfecto.

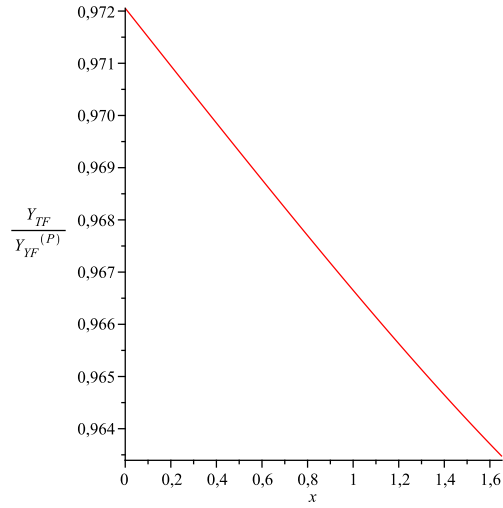


Figura 4.11: $\frac{Y_{TF}}{Y_{TF}^{(P)}}$ función de x para un fluido perfecto.

4.2.2. Escalares de estructura para el caso de fluido anisótropo

El sistema a considerar es el fluido anisótropo de la sección (3.2.2)

$$\rho = \frac{K}{r^2} \quad P_r = \frac{K}{3r^2} \frac{7-9r^{-1/2}}{1-3r^{-1/2}} \quad P_r - P_{\perp} = \frac{\gamma}{r^2} \quad (4.24)$$

4.2. Fracturas en sistemas de densidad inhomogénea y escalares de estructura

donde $K = 3/56\pi$, $\gamma = \frac{1}{4}K$ y el radio r_Σ del objeto está dado por la expresión adimensional (??).

Cuando el sistema está en equilibrio, el escalar Y_T está dado por la siguiente expresión:

$$Y_T = \frac{16\pi K}{r^2} \left(\frac{2 - 3r^{-1/2}}{1 - 3r^{-1/2}} - \frac{\gamma}{2K} \right) \quad (4.25)$$

y sustituyendo los valores numéricos de K y γ

$$Y_T = \frac{0,8571428}{r^2} \left(-0,12499998 + \frac{2 - 3r^{-1/2}}{1 - 3r^{-1/2}} \right) \quad (4.26)$$

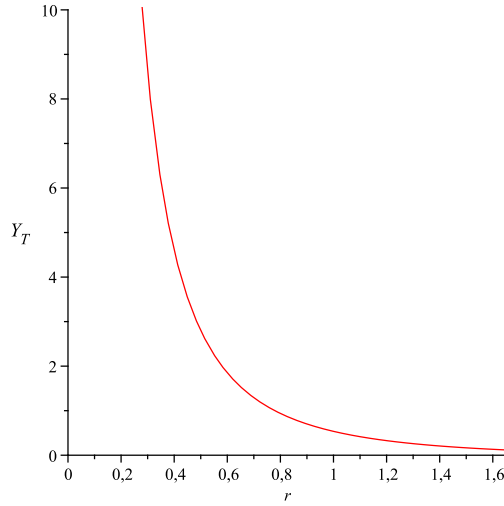


Figura 4.12: Y_T función de r para un fluido anisótropo.

Se perturba el sistema

$$\pi K^{(P)} = \frac{3}{56} + \Psi \quad \gamma^{(P)} = \frac{1}{4}(1 + \alpha)K \quad |\Psi|, |\alpha| \ll 1 \quad (4.27)$$

y el escalar Y_T queda como

$$Y_T^{(P)} = \frac{3 + 56\Psi}{28r^2} \left[\frac{15 - \alpha - 3(7 - \alpha)r^{-1/2}}{1 - 3r^{-1/2}} \right] \quad (4.28)$$

Para el caso particular en que $\Psi = \frac{1}{1400}$ y $\alpha = -0,0340$:

$$Y_T^{(P)} = \frac{0,108571}{r^2(1 - 3r^{-1/2})} (15,034 - 21,102r^{-1/2}) \quad (4.29)$$

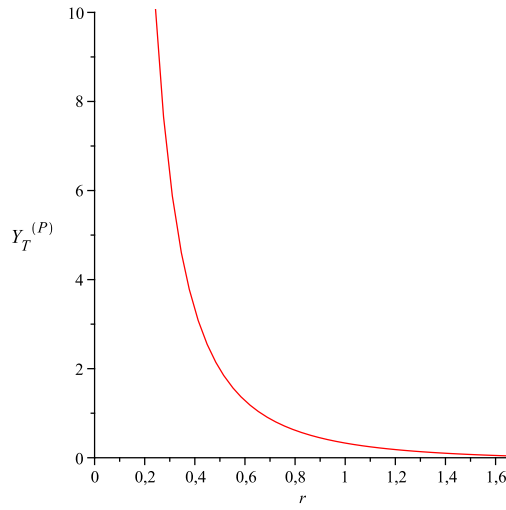


Figura 4.13: $Y_T^{(P)}$ función de r para un fluido anisótropo, con valores específicos de los parámetros Ψ y α .

El escalar de Weyl E para el fluido anisótropo considerado es

$$E = \frac{4\pi K}{3r^2(1-3r^{-1/2})^2} \left[r^{-1/2} \left(63 - \frac{240\pi K}{(1-8\pi K)} \right) - r^{-1} \left(81 - \frac{216\pi K}{(1-8\pi K)} \right) + \frac{200\pi K}{3(1-8\pi K)} - 13 \right] \quad (4.30)$$

El escalar de Y_{TF} se escribe como

$$Y_{TF} = \frac{0,071429}{r^2(1 - 3r^{-1/2})} (36r^{-1/2} - 54r^{-1} - 6) \quad (4.31)$$

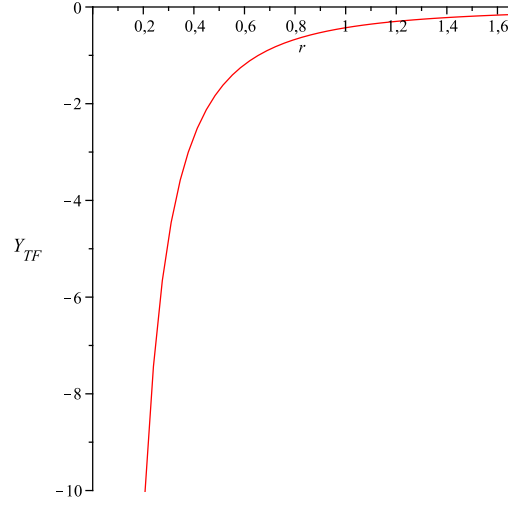


Figura 4.14: Y_{TF} función de r para un fluido anisótropo.

Se usa la perturbación (4.27) para sacar el sistema del equilibrio, y se obtiene

$$Y_{TF}^{(P)} = \frac{32\pi K^{(P)}}{r^2(1-3r^{-1/2})^2(4-56\Psi)} \left[\left(-1 + \frac{247}{3}(14\Psi) + \frac{\alpha}{8}(1-14\Psi) \right) + r^{-1/2} \left(6 - \frac{59}{4}(14\Psi) - \frac{3}{4}\alpha(1-14\Psi) \right) + r^{-1} \left(-9 + \frac{135}{8}(14\Psi) + \frac{9}{8}\alpha(1-14\Psi) \right) \right] \quad (4.32)$$

Para el caso particular en que $\Psi = \frac{1}{1400}$, $K^{(P)} = \frac{3}{56\pi} + \frac{\Psi}{\pi} = 0,0172796$ y $\alpha = -0,0340$:

$$Y_{TF}^{(P)} = \frac{0,07238095}{r^2(1-3r^{-1/2})^2} (-5,887727 + 35,67989r^{-1/2} - 53,838024r^{-1}) \quad (4.33)$$

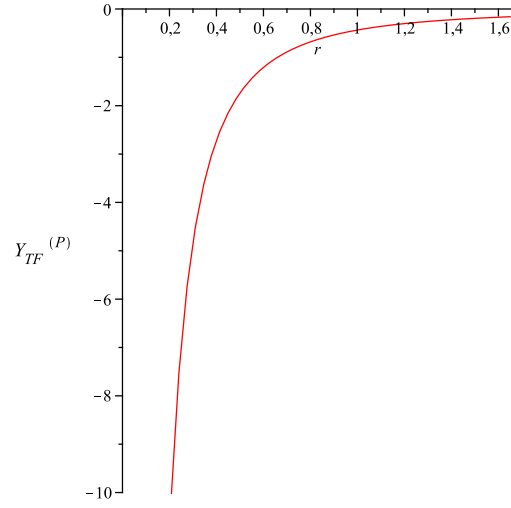


Figura 4.15: $Y_{TF}^{(P)}$ función de r para un fluido anisótropo, con valores específicos de los parámetros Ψ y α .

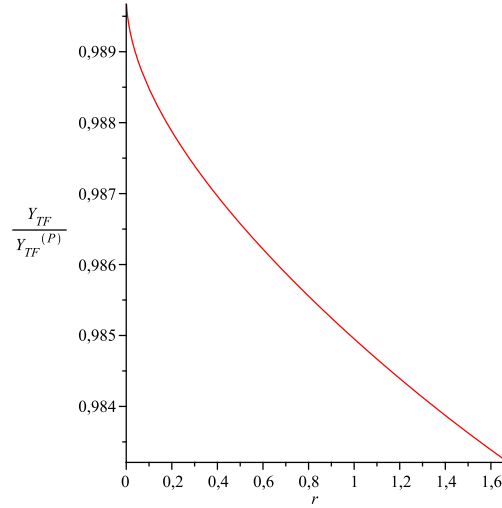


Figura 4.16: $\frac{Y_{TF}}{Y_{TF}^{(P)}}$ función de r para un fluido anisótropo.

Para el caso de fluido perfecto se tiene que Y_{TF} y $Y_{TF}^{(P)}$ son positivos para todo $r < r_{\Sigma}$ (ver gráficas (4.9) y (4.10)). Al realizar una comparación del escalar Y_{TF} antes de la perturbación con el escalar Y_{TF} perturbado se observa en la figura (4.11) que $|Y_{TF}^{(P)}| > |Y_{TF}|$. Considerando estos resultados en la expresión (4.1), se tiene que

el segundo término se incrementa luego de la perturbación, por tanto m_{TW} también aumenta para todo r .

El hecho de que m_{TW} sea considerada la masa gravitacional activa implica que los elementos de fluido experimentan una mayor fuerza gravitacional, hecho que impide la aparición de fracturas en esta distribución. Se concluye que todos los elementos del fluido colapsan para este caso.

Para un fluido anisótropo, se tiene también que $|Y_{TF}^{(P)}| > |Y_{TF}|$, como se muestra en la figura (4.16). Sin embargo, tanto Y_{TF} como $Y_{TF}^{(P)}$ son negativos (ver gráficas (4.14) y (4.15)), por lo que m_{TW} va a disminuir luego de la perturbación tal como se observa en (4.1).

El hecho de que m_{TW} disminuya para algún sector interior a la esfera implica que la fuerza hidrostática puede superar a la gravitacional, hecho que puede conducir a la aparición de fracturas. En conclusión, para que ocurra una fractura en la distribución, es necesario que Y_{TF} sea negativo y además, que $|Y_{TF}|$ aumente luego de la perturbación del sistema, al menos para algunas regiones (o bien que Y_{TF} sea positivo y que disminuya después de la perturbación).

CONCLUSIONES

Se ha realizado un estudio de fluidos autogravitantes sin disipación, esféricamente simétricos y localmente anisótropos en las presiones, en base a los escalares de estructura derivados de la descomposición ortogonal del tensor de Riemann.

Se estudiaron dos procesos físicos, la evolución lenta y la fractura, analizando distintos casos particulares de fluidos esféricamente simétricos, con el fin de dar significado físico a los escalares de estructura, específicamente, Y_T y Y_{TF} .

En el estudio de fluidos en régimen de evolución lenta, el comportamiento del escalar Y_T al interior de la distribución implica una mayor estabilidad del modelo anisótropo en comparación con el modelo isótropo ya que en este último la fuerza gravitacional se incrementa al interior en el proceso de la compactación. Al realizar el estudio usando el escalar Y_{TF} se obtiene que para un fluido perfecto, existe un valor límite en el grado de compactación de la esfera debido al aumento de m_{TW} al interior de la misma. Para el caso anisótropo, el escalar Y_{TF} es negativo, y su disminución implica a su vez una disminución de m_{TW} al interior de la esfera, por lo que el grado de compactación dentro del régimen de equilibrio hidrostático es mayor que en el caso

isótropo, quedando así en evidencia la mayor estabilidad del sistema anisótropo antes mencionada.

En el estudio de fracturas, el escalar Y_T carece de importancia al momento de explicar la aparición del fenómeno. Sin embargo, se obtiene que para que ocurra fractura en las distribuciones estudiadas, es necesario que Y_{TF} sea negativo y que además $|Y_{TF}|$ aumente luego de la perturbación, de tal manera que m_{TW} disminuya para algún sector interior a la esfera (o bien que Y_{TF} sea positivo y que disminuya después de la perturbación). Esta condición se ve satisfecha en el ejemplo anisótropo lo que sugiere que la aparición de fracturas estaría relacionada con la presencia de anisotropía en el sistema, tal como se menciona en la sección (3.2.2).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] L.Herrera en *II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica*, Ed. H. Rago, (ULA, 1996).
- [2] C. Misner y D. Sharp, *Phys. Rev*, **136**, B571 (1964).
- [3] M. Cahill y G. McVittie, *J. Math. Phys.*, **11**, 1382 (1970).
- [4] R. Tolman, *Phys.Rev.*, **35**, 875 (1930).
- [5] E.T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. London*, **A149**, 384 (1935).
- [6] H. Bondi, *Proc. R. Soc. London*, **A281**, 39 (1964).
- [7] P.S. Florides, *Proc. Roy. Soc. London*, **A337**, 529 (1974).
- [8] R. Bowers y E. Liang, *Astrophys. J.*, **188**, 657 (1974).
- [9] L. Herrera, *Phys. Lett.*, **A165**, 206 (1992), *ibid.* **188**, 402 (1994).
- [10] R. Tolman, *Phys. Rev.*, **55**, 364 (1939).
- [11] L. Bel, *Ann. Inst. H Poincaré*, **17**, 37 (1961).

- [12] L.Herrera, J.Ospino, A. Di Prisco, E.Fuenmayor, O.Troconis, *Phys.Rev.*, **D79**, 064025 (2009).
- [13] L Herrera, A. Di Prisco, J.L. Hernández-Pastora, N.O. Santos, *Phys. Lett.*, **A237**, 113 (1998).