UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Construcción del movimiento Browniano, la hoja Browniana y su representación en Matlab.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Jennifer Del Valle Peña C.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutora: Dra. Mairene Colina.

Caracas, Venezuela
Mayo-2011.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Construcción del movimiento Browniano, la hoja Browniana y su representación en Matlab**", presentado por la **Br. Jennifer del Valle Peña Correa**, titular de la Cédula de Identidad **18.994.982**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mairene Colina.
Tutor

MSc. José B. Hernández.
Jurado

MSc. Angie Pineda.
Jurado

Dedicatoria

Dedico este trabajo primero que todo al Dios Todopoderoso y a la Virgen Santísima, por darme la fortaleza espiritual para lograr todas mis metas.

A todo el grupo de profesores que día a día con el transcurrir del tiempo nos sirven de guía a nosotros los estudiantes, para lograr las metas trazadas.

A mi abuelo Manuel, quien aunque ahora está con Dios se que le hubiese encantado verme cumplir parte de mis sueños.

A mi mami Yeni por apoyarme incondicionalmente.

Agradecimiento

Ante todo debo de agradecer al Dios Todopoderoso y a la Virgen Santísima en sus diferentes advocaciones, en particular a la Virgencita Del Valle por guiarme y darme la fortaleza en todo momento, para no decaer. Es difícil para mi resumir en tan solo unas líneas las palabras de agradecimiento que les tendría que dar a cada una de las personas que han colaborado de una u otra manera en la realización de tan importante meta. Lo que expreso en ésta página siempre se quedará pequeño, pues son innumerables las gracias que les tengo que dar a todas las personas que contribuyeron en mi formación como persona y profesional.

Agradezco a la Universidad Central De Venezuela, por haber sido mi segunda casa durante mis estudios universitarios. Agradezco a la profesora Mairene Colina por haber aceptado ser mi tutora, por guiarme, aconsejarme y ayudarme en todo momento, infinitas gracias para usted profesora. Agradezco al profesor Mauricio por sus excelentes consejos durante mis años de estudio. Agradezco a la profesora Angie quien se comportó más que como una profesora como una amiga. Al profesor José Benito quien con su amable disposición me motivó a realizar mi tesis en el área de probabilidad. Al profesor Imanoul quién siempre tenía un buen consejo y una disposición increíble ante cualquier pregunta. Al profesor Jean Piero quien siempre tenía un buen libro que recomendar. En fin agradezco a todos los profesores que me dieron clases y me guiaron en todo momento pues me ayudaron a cumplir una de mis metas. A mi compañero Reifel quien siempre estaba dispuesto cuando necesitaba un favor. A mi mami linda quien es la persona más importante en mi vida, pues con sus abrazos y besos sinceros me motiva en todo momento a seguir adelante. A mi hermanito Argenis quien me hace reír con sus ocurrencias e ingenio. A mi papá Argenis pues siempre ha puesto todo de su parte para que yo y mi hermano logremos nuestras metas. A mi abuelita por sus ocurrencias. A mi abuelito Manuel quién por siempre vivirá en mi corazón. Muchas gracias familia, los amo muchísimo y soy afortunada ya que gracias a la carrera que estudié tengo la dicha de decir que mi familia se multiplicó pues he ganado buenos y maravillosos amigos.

Contenido

Introducción

El Movimiento Browniano o proceso de Wiener es el nombre dado al movimiento irregular que realizan las partículas de polen suspendidas en un líquido. Este movimiento fue observado por el botánico inglés Robert Brown (1773-1858) en 1827, cuando investigaba el polen de diversas plantas. El propio Brown descubrió que partículas muy finas de varios minerales seguían el mismo movimiento, por lo que descartó cualquier origen orgánico.

A partir de aquí aparecen distintos investigadores, que trataron de explicar éste fenómeno, entre los más recientes resaltan Louis Bachelier (1870-1946) en 1900 quien utilizó éste modelo para la descripción del cambio de los precios de las bolsas de valores; Albert Einstein (1879-1955) en 1905 quien estudió la teoría física que explicaba éste movimiento, entre otros. Sin embargo fue en 1923 cuando Nobert Wiener (1894-1964) logra dar una construcción matemática de dicho proceso, sentando así las bases del movimiento Browniano, razón por la cual éste proceso se denomina frecuentemente proceso de Wiener.

A partir de la formalización matemática dada por Wiener en 1923 al movimiento Browniano, éste se convirtió en un área de investigación muy activa. Desde entonces, se han generado y se siguen generando elegantes e importantes descubrimientos relacionados con éste proceso estocástico, no solo en la matemática, sino en ciencias como la física y la química, finanzas, entre otras.

Luego de dicha formalización, muchos investigadores a nivel mundial se concentraron en extender el movimiento Browniano a una medida en varias variables surgiendo así la llamada hoja Browniana la cual fue introducida por el estadístico Kitagawa en 1951, para realizar análisis de varianza en tiempo continuo.

Definimos entonces la hoja Browniana, movimiento Browniano en dos parámetros o proceso de Wiener en dos parámetros como un proceso estocástico de dos parámetros $\{W(z), z = (x, y) \in R_+^2\}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que satisface las siguientes condiciones:

(i) $W(R) \in \mathcal{N}(0,\lambda(R))$ para todo R=$[x_1, x_2)\times[y_1, y_2)$, $\lambda(R)$=$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, donde λ denota la medida de Lebesgue.

(ii) $W(0,y)\equiv W(x,0)\equiv 0$ $(0 \leq x, y < \infty)$.

(iii) $W(z)$ es un proceso de incrementos independientes, es decir: $W(R_1)$, $W(R_2)$,..., $W(R_n)$, (n=2,3,...) son variables aleatorias independientes si $R_1, R_2, \ldots, R_n$, son rectángulos disjuntos.

(iv) $W(z;\omega)$ tiene trayectorias continuas en z con probabilidad uno.

Un conjunto separado de ideas motivan el estudio de la hoja Browniana algunas de ellas provienen del hecho de que este proceso es central para la teoría de integrales estocásticas multiparamétricas y es el ejemplo básico de una solución a ecuaciones parciales estocásticas de tipo hiperbólica perturbadas por un ruido blanco. La hoja Browniana también está conectada con el cálculo de Malliavin. Este proceso también permite una representación simple del proceso de Ornstein-Uhlenbeck sobre un espacio de Wiener. Además la hoja Browniana abre un amplio terreno de estudio en la teoría de potenciales.

Grandes investigadores como Pruit, Orey, Walsh entre otros, se encargaron de estudiar el comportamiento de las trayectorias de éste proceso, así como establecer un módulo de continuidad y una ley del logaritmo iterado las cuales permiten medir las oscilaciones de las trayectorias de la hoja.

Debido a todo lo anterior hemos decidido realizar éste trabajo, el cual se basará en la construcción del movimiento Browniano con su respectiva representación en Matlab; además extenderemos dicha construcción y representación al movimiento Browniano en dos parámetros, el cual es también conocido como la hoja Browniana. Así hemos decidido estructurar éste trabajo de la siguiente manera:

Capítulo I: en éste capítulo recordaremos las definiciones de espacios de probabilidad, variables aleatorias, vectores aleatorios y procesos estocásticos, así como mencionaremos las desigualdades relevantes, los teoremas, lemas y corolarios que necesitaremos en el resto de los capítulos, tales como: el teorema de Egorov's, Criterio de Convergencia de Kolmogorov, Teorema de tres series de Kolmogorov, lema de Borel-Cantelli, entre otros.

Capítulo II: daremos la definición del movimiento Browniano, así como mencionaremos algunas de sus propiedades, luego demostraremos la existencia de éste movimiento construyendo un proceso que satisfaga todas sus propiedades, y finalmente daremos su representación en Matlab.

Capítulo III: en ésta parte daremos la definición de la hoja Browniana, mencionaremos algunas de sus propiedades y extenderemos la construcción del movimiento Browniano hecha en el capítulo II, luego representaremos la hoja Browniana en Matlab y mencionaremos algunas áreas de estudio donde éste proceso es aplicado.

Capítulo 1

Definiciones y conceptos preliminares.

1.1 Espacios de probabilidad

En ésta parte recordaremos algunas definiciones sobre espacios de probabilidad, la medida de probabilidad y algunas de sus propiedades, así como las variables aleatorias. Las cuales serán necesarias para las demostraciones que realizaremos en los capítulos posteriores. Algunas de las demostraciones que se encuentran en éste capítulo serán omitidas, sin embargo indicamos los libros donde pueden ser encontradas.

Sea Ω un espacio muestral, A un evento de Ω.

Definición 1.1 Denotaremos a la familia de subconjuntos de Ω formada por los eventos, como la *σ -álgebra* $\mathcal{F}$, con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F}$ donde $A^C = \Omega \setminus A$ es el complemento de A en Ω.

3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Así pues, la *σ-álgebra* $\mathcal{F}$ es cerrada bajo, uniones numerables, intersecciones numerables, diferencias y complementos.

Definición 1.2 El par $(\Omega, \mathcal{F})$ es llamado *un espacio medible.*

Definición 1.3 Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}$ una familia de eventos de Ω. Una *medida de probabilidad o probabilidad* sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, es una función $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ definida sobre $\mathcal{F}$ que satisface lo siguiente:

1. P es no negativa, es decir para todo evento $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $P(A) \geq 0$

2. $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$

3. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$, entonces:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definición 1.4 La terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se denomina *espacio de probabilidad*, y el valor $P(A)$ se denomina *probabilidad de A*.

Los subconjuntos F de Ω que pertenecen a $\mathcal{F}$ son llamados conjuntos *$\mathcal{F}$-medibles*. En el contexto de probabilidad esos conjuntos son llamados *eventos* y utilizamos la interpretación:

$$P(F) = \text{“la probabilidad de que el evento } F \text{ ocurra”}$$

En particular, si $P(F)=1$ decimos que F ocurre con probabilidad 1 , o casi seguramente (c.s).

Dada alguna familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de Ω se tiene que la σ- álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{U}$ es $\mathcal{H}_U$:

$$\mathcal{H}_U = \bigcap \{\mathcal{H};\ \mathcal{H}\ \sigma\text{-álgebra de } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}$$

y decimos que $\mathcal{H}_U$ es la *σ-álgebra generada por $\mathcal{U}$*.

Definición 1.5 Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilididad, entonces una función $Y\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ es llamada *$\mathcal{F}$-medible* si:

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\ Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

para todo conjunto abierto $U \in \mathbf{R}^n$, (o equivalentemente para todo conjunto de Borel $U \subset \mathbf{R}^n$).

Definición 1.6 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ el espacio probabilizable formado por la recta real $\mathbf{R}$ y la σ-álgebra de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Una aplicación X: $(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ es *una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible* si y solo si $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo $B \subset \mathcal{B}$; es decir:

$$X^{-1}(B)=\{\ \omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\ \} \in \mathcal{F}$$

es un evento.

1.2 Densidad

Definición 1.7 Una función $f:\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es una *función de densidad* sobre $\mathbf{R}$ si y solo si f satisface las siguientes condiciones:

i. Para todo $x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Definición 1.8 Una variable aleatoria X es *continua o absolutamente continua* si existe una función de densidad f tal que para todo $a \in \mathbf{R}$

$$\mathrm{F}(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(u)du.$$

En este caso f se denomina *función de densidad de probabilidad de* X.

Ejemplo 1.1 La función definida por

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

es llamada *función de densidad normal estándar* y su integral:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

es la *función de distribución normal estándar*.

Por otro lado podemos considerar la siguiente desigualdad, la cual es muy utilizada con la distribución normal, y que de hecho consideraremos más adelante para realizar algunas demostraciones.

Lema 1.1 Para cada $x > 0$, se satisface:

$$\frac{x}{x^2+1} e^{\frac{-x^2}{2}} \leq \int_{x}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du \leq \frac{1}{x} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

<u>Demostración</u>:

Integrando por partes se tiene que:

$$\int_{x}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{\frac{-u^2}{2}} du = x^{-1} e^{\frac{-x^2}{2}}. \tag{1.1}$$

De aquí tenemos:

$$\int_{x}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du \leq x^{-1} e^{\frac{-x^2}{2}}. \tag{1.2}$$

Para la otra desigualdad, utilizamos el hecho de que $x \leq u < \infty$, y por monotonía de la integral se sigue que:

$$\int_{x}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{\frac{-u^2}{2}} du \leq (1 + x^2) \int_{x}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du. \tag{1.3}$$

Así de (1.1),(1.2) y (1.3) se tiene:

$$\frac{x}{x^2+1}e^{\frac{-x^2}{2}} \leq \int_x^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}du \leq \frac{1}{x}e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Que era lo que se quería demostrar. $\square$

Ahora mencionaremos la siguiente desigualdad, la cual será de utilidad en las próximas secciones:

$$\text{Si} \quad 0 < x < 1 \quad \text{entonces se satisface que} \quad 1 - x \leq e^{-x}, \tag{1.4}$$

En efecto pues, notemos que para $0 < x < 1$:

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \geq x$$

luego multiplicando por -1 y aplicando exponencial a ambos lados se obtiene la desigualdad deseada. $\square$

1.3 Esperanza y varianza de variables aleatorias.

Unas de las características interesantes de una variable aleatoria son la esperanza, la varianza y los momentos.

Definición 1.9 Si X es una variable aleatoria discreta con probabilidades $p_n = P(X = x_n)$, entonces:

- *La esperanza se define como:*

$$\mu_X = EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

- *La varianza se define como:*

$$\sigma_X^2 = var(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - \mu_X)^2 p_k.$$

Definición 1.10 Si X es una variable aleatoria con densidad f, entonces

- *La esperanza se define como:*

$$\mu_X = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

- *La varianza es definida como:*

$$\sigma_X^2 = var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 f(x) dx.$$

Un resultado que consideraremos luego es el siguiente:

Proposición 1.1 Si Y es una variable aleatoria tal que var(Y)=0 entonces Y=E(Y) casi seguramente respecto a la medida.

1.4 Vectores aleatorios

En lo que sigue utilizaremos estructuras aleatorias finito-dimensionales e infinito-dimensionales. Iniciamos con los vectores aleatorios finito-dimensionales, antes de definir un proceso estocástico.

Definición 1.11 Un vector **X**= *(X_1,X_2,...,X_n)* es un *vector aleatorio n-dimensional* si sus componentes X_1,X_2,...,X_n son variables aleatorias reales unidimensionales definidas sobre un mismo espacio de probabilidad (Ω,$\mathcal{F}$, P).

Análogamente a las variables aleatorias reales unidimensionales, podemos introducir las definiciones de función de distribución, esperanza y matriz de covarianza de un vector aleatorio.

Definición 1.12 Un vector **X**= (X_1,X_2,...,X_n) es un *vector aleatorio* $n - dimensional$ si sus componentes X_1,X_2,...,X_n son variables aleatorias reales unidimensionales definidas sobre un mismo espacio de probabilidad (Ω,$\mathcal{F}$, P).

Definición 1.13 La función $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathbf{X}}(\mathrm{x}) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= P(\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\}), \end{aligned}$$

donde x=($x_1, x_2, \ldots, x_n$) $\in \mathbf{R}^n$, es la *función de distribución* $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$ de **X**.

Definición 1.14 Si la distribución de un vector aleatorio **X** tiene densidad f_{X}, podemos representar la *función de distribución conjunta* $\mathrm{F}_{\mathbf{X}}$ de **X** como:

$$\mathrm{F}_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathrm{X}}(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n, \; con \; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Donde la densidad es una función que satisface lo siguiente:

$$f_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) \geq 0 \quad para \quad todo \quad x \in \mathbf{R^n} \tag{1.5}$$

y

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathrm{X}}(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n = 1. \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.2 *La función definida como:*

$$f_{\mathrm{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}} e^{\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T\}}, \mathbf{x} \in \mathbf{R^n}. \tag{1.7}$$

Para algún $\mu \in \mathbf{R^n}$ y Σ una matriz simétrica definida positiva; es una densidad en $\mathbf{R}^n$ pues se puede verificar que (1.5) y (1.6) se cumplen, además a los vectores aleatorios con ésta densidad se les llaman *vectores aleatorios gaussianos o normales*.

Ahora bien, la esperanza de un vector aleatorio tiene una función similar al valor esperado de una variable aleatoria. Así, los valores de **X**(ω) son concentrados alrededor de ésta.

Definición 1.15 La *Esperanza de un vector aleatorio* $\mathbf{X}$ es dada por:

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\mathbf{X}= (EX_1,\ldots,EX_n).$$

Definición 1.16 La *Matriz de Covarianza* de $\mathbf{X}$ es definida como:

$$\Sigma_{\mathbf{X}}(i,j)=\text{cov}\,(X_i, X_j):\ i, j= 1,\ldots, n,$$

donde

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_i,X_j) &= E[(X_i-\mu_{X_i})(X_j-\mu_{X_j})]\\ &= E(X_iX_j)-\mu_{X_i}\mu_{X_j},\end{aligned}$$

es la *covarianza de* X_i *y* X_j. Además cov(X_i, X_i)= $\sigma^2_{X_i}$.

En general, podemos escribir: $\Sigma_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X}-\mu_{\mathbf{X}})^T(\mathbf{X}-\mu_{\mathbf{X}})]$.

De aquí en adelante denotaremos como:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma^2_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma^2_{nn}\end{pmatrix},$$

donde $\sigma^2_{ii} = var(X_i) = cov(X_i,X_i)$ para $i = 1,\ldots,n$; y para $i \neq j$ $\sigma^2_{ij} = cov(X_i,X_j)$.
Ahora consideremos el siguiente resultado, el cual utilizaremos con frecuencia:

Teorema 1.1 Sean $X_i : \Omega \to \mathbf{R}$ variables aleatorias; con $1 \leq i \leq n$. Entonces:

$$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n) \text{ es normal}$$

si y solo si

$$\mathbf{Y}=\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \text{ es normal para todo } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbf{R}.$$

La demostración de éste teorema la podemos encontrar en [5].

Ejemplo 1.3 En el ejemplo 1.2, se puede apreciar que la densidad de un vector aleatorio Normal **X** y por lo tanto, su distribución están completamente determinados por su esperanza μ y matriz de covarianza Σ, por ésta razón de aquí en adelante utilizaremos la notación $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$ para identificar a un vector aleatorio normal n-dimensional **X** con media μ y matriz de covarianza Σ.

De manera análoga a la propiedad de las variables aleatorias normales, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.2 Sea $\mathbf{X}$=(X_1,...,X_n) un vector aleatorio que tiene distribución $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$ y A una matriz $m \times n$. Entonces A$\mathbf{X}^T$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mathrm{A}\mu^T,\mathrm{A}\Sigma A^T)$.

Demostración:

Sea **X** un vector aleatorio tal que $\mathbf{X}\sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, y sea $\mathbf{Y}$= A$\mathbf{X}^T$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{X} = (X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)) = (x_1,\ldots,x_n), \text{ para cada } \omega \in \Omega.$$

Al multiplicar las matrices A y $\mathbf{X}^T$ obtenemos:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+ & \cdots & +a_{2n}x_n \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, por hipótesis **X** es normal, así que del Teorema 1.1, se sigue que cualquier combinación lineal de las componentes de **X** es una variable aleatoria normal, así cada una de las componentes del vector **Y** es normal. Luego para ver que **Y** es normal consideramos lo siguiente. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ escalares en **R** entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_1 & (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + \lambda_n(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = \\ = & \; x_1(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1}) + \cdots + x_n(\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}), \end{aligned}$$

utilizando el hecho de que el vector **X** es normal y el teorema 1.1, obtenemos la normalidad del vector **Y**. Ahora bien, utilizando linealidad de la esperanza y multiplicación de un vector por una matriz obtenemos:

$$E\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EX_1 \\ \vdots \\ EX_n \end{pmatrix},$$

es decir: $E\mathbf{Y}$=Aμ^T, pues μ=E **X**=(E X_1,. . .,EX_n).

También podemos verificar que: $\Sigma_{\mathbf{Y}}$=A Σ A^T.
Por lo tanto **Y** tiene distribución $\mathcal{N}$(Aμ^T , A Σ A^T). □

1.5 Independencia

Definición 1.17 Dos eventos A_1 *y* A_2 *son independientes* si:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

Definición 1.18 Dos variables aleatorias X_1 y X_2 son *independientes* si:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2),$$

para todo subconjunto B_1 y B_2 borelianos de **R**

Definición 1.19 Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ *son independientes* si, para cualquier elección de índices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ y enteros $1 \leq k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Definición 1.20 Las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes,* si para cualquier elección de índices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, enteros donde $1 \leq k \leq n$ y cualesquiera borelianos B_1, $\ldots$, B_n de $\mathbf{R}$

$$P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in B_{i_k}) = P(X_{i_1} \in B_{i_1}) \cdots P(X_{i_k} \in B_{i_k}).$$

Es decir los eventos $\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_n \in B_n\}$ son independientes.

También podemos decir que:

Las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son *independientes* si y sólo si su función de distribución conjunta puede ser escrita como sigue:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Si el vector $\mathbf{X}$=$(X_1, \ldots, X_n)$ tiene densidad $f_{\mathbf{X}}$, entonces $X_1, \ldots, X_n$ son *independientes* si y sólo si:

$$f_{X_1,\ldots,X_n} = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Un resultado interesante y que consideraremos más adelante es el siguiente:

Proposición 1.3 Sea Y un vector aleatorio en $\mathbf{R}^n$ definido como Y = $(Y_1, \ldots, Y_n)$, tal que Y $\sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ con $\mu \in \mathbf{R}^n$ y Σ su matriz $n \times n$ de covarianzas entonces se verifica que:

Σ es diagonal si y solo si las componentes de Y son independientes.

<u>Demostración:</u> Supongamos primero que las componentes de Y son independientes, además sabemos que:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_{ii}^2 = var(Y_i) = E[(Y_i - \mu_i)^2]$ para $i = 1, \ldots, n$; y para los $i \neq j$ tenemos que $\sigma_{ij}^2 = cov(Y_i, Y_j) = E[Y_i Yj] - E[Y_i]E[Y_j]$. Luego por la suposición hecha sobre la independencia tenemos que $\sigma_{ij}^2 = E[Y_i]E[Yj] - E[Y_i]E[Y_j] = 0$. De donde obtenemos que Σ es diagonal.

Ahora supongamos que Σ es diagonal y del ejemplo 1.2 tenemos que la función de densidad gaussiana de Y es:

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}} e^{\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)^T\}}, \ \mathbf{y} \in \mathbf{R^n},$$

como Σ es diagonal se tiene que det(Σ)$\neq$0 y podemos obtener Σ^{-1} como:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{nn}^2} \end{pmatrix}.$$

Luego desarrollando el argumento de la exponencial:

$$(\mathbf{y} - \mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mu)^T = \frac{(y_1 - \mu_1)^2}{\sigma_{11}^2} + \cdots + \frac{(y_n - \mu_n)^2}{\sigma_{nn}^2}$$

Así por propiedad de la exponencial y lo anterior podemos escribir la densidad como:

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{11}} e^{\frac{-(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_{11}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{22}} e^{\frac{-(y_2-\mu_2)^2}{2\sigma_{22}^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{nn}} e^{\frac{-(y_n-\mu_n)^2}{2\sigma_{nn}^2}} \\ &= f_{Y_1}(y_1) \ldots f_{Y_n}(y_n). \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos la demostración. $\square$

1.6 Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos son estructuras aleatorias infinito-dimensionales. La teoría de procesos aleatorios se basa en el estudio y modelación de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo o del espacio de manera aleatoria, así tenemos la siguiente definición:

Definición 1.21 Sea el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F}, P)$. Un *proceso estocástico* X es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F}, P)$, y que asumen valores en $\mathbf{R}^n$. El espacio de parámetros T es usualmente considerado como la semirecta $[0,\infty)$, subintervalos [a,b] o también los enteros no negativos.

Otra manera de ver los procesos estocásticos, es como una función de dos variables:

$$\begin{aligned} X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}) \\ \omega &\longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Es decir,

- Para todo instante de tiempo fijo t, $X_t=X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ *es una variable aleatoria.*
- Para todo $\omega \in \Omega$ fijo, $X_t=X_t(\omega)$ es una función del tiempo o trayectoria muestral del proceso X.

Observación: También podemos considerar T=$[0,\infty) \times [0,\infty)$, obteniendo así un proceso estocástico de dos parámetros $\{X_z\colon z \in \mathbf{R}^2_+\}$ donde $\mathbf{R}^2_+$ es el cuadrante positivo del plano y X_z:=$X(z)$:=$X(x,y,\omega)$, con $x,y \in \mathbf{R}$. Este es el tipo de procesos los consideraremos en el capítulo III para definir la hoja Browniana.

Ejemplo 1.4 X_t: número de personas que esperan un autobús en un instante t donde $t \in$ [10,11].

De manera análoga a las variables aleatorias y los vectores aleatorios, también podemos hablar de las características no aleatorias de un proceso estocástico, tales como son su distribución, esperanza, covarianza, etc.

Uno de los aspectos importantes de los procesos estocásticos es que pueden ser considerados como una colección de vectores aleatorios, lo cual motiva la siguiente definición,

Definición 1.22 Las *distribuciones finito dimensionales* (fidis) del proceso estocástico X son las distribuciones de los vectores finito dimensionales

$$(\mathrm{X}_{t_1}, \ldots, \mathrm{X}_{t_n}),\ t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}.$$

para toda posible elección de tiempos $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}$ (un intervalo) y todo $n \geq 1$.

Definición 1.23 Sea X=(X_t, $t \in$ T), $T \subset \mathbf{R}$ un proceso estocástico entonces *la función esperanza de* X es definida como:

$$\mu_{\mathrm{X}}(t) = \mu_{\mathrm{X_t}} = E\mathrm{X}_t,\ \text{con } t \in \mathrm{T}.$$

Definición 1.24 Sea X=(X_t, $t \in T$), $T \subset \mathbf{R}$ un proceso estocástico entonces *la función de covarianza de* X es definida como:

$$c_X(t,s) = cov(\mathrm{X}_t, \mathrm{X}_s) = \mathrm{E}\,[(\mathrm{X}_t - \mu_{\mathrm{X}}(t))(\mathrm{X}_s - \mu_{\mathrm{X}}(s))],\ donde\ t, s \in \mathrm{T}.$$

Definición 1.25 Sea X=(X_t, $t \in T$), $T \subset \mathbf{R}$ un proceso estocástico entonces *la función de varianza de* X es definida como:

$$\sigma^2{}_{\mathrm{X}}(t) = c_{\mathrm{X}}(t,t) = var(\mathrm{X}_t),\ con\ t \in T.$$

Ejemplo 1.5 Un proceso estocástico es llamado *gaussiano* si todas sus fidis son Gaussianas multivariadas. Y vimos en el ejemplo (1.3) que los parámetros μ y Σ de un vector gaussiano son su esperanza y matriz de covarianza respectivamente. Por lo tanto la distribución de un proceso estocástico Gaussiano está completamente determinado por su vector de medias y su función de covarianza.

Los procesos estocásticos se pueden clasificar de distintas maneras y una de ellas es a través de las características probabilísticas de las variables aleatorias. Una manera especial de clasificarlos es mediante una estructura de dependencia, lo cual nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 1.26 Un proceso estocástico X=(X_t, $t \in$ T), T $\subset$ **R** es *estrictamente estacionario* si las distribuciones finito dimensionales verifican lo siguiente:

$$(X_{t_1},\ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h},\ldots, X_{t_n+h})$$

para toda elección de índices $t_1,\ldots,t_n \in$ T, $n \geq 1$ y h tal que $t_1 + h,\ldots,t_n + h \in T$. Donde $\stackrel{d}{=}$ indica la igualdad en distribución, es decir los vectores anteriores tienen la misma función de distribución.

En particular si X es un proceso estrictamente estacionario, entonces para cualquier t_1 y t_2 en T con $t_1 < t_2$ y $t_2 = t_1 + h$ para algún $h > 0$, se tiene $X_{t_1} = X_{t_2}$, por lo tanto *X es un proceso de variables aleatorias idénticamente distribuidas.*

Ejemplo 1.6 Sea X=(X_t, $t \in T$) un proceso con T=[0,∞) ó T= **Z**.

Un ejemplo de proceso estrictamente estacionario es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_t, $t \in$ T. Dado que un proceso Gaussiano X es determinado por sus funciones de esperanzas y covarianzas, se tiene que la definición de proceso estrictamente estacionario se reduce a:

$$\mu_X(t+h) = \mu_X(t) \ y \ c_X(t+h, s+h) = c_X(t,s),$$

para todo $s, t \in$ T, y h tal que $s + h, t + h \in$ T.

En particular, tenemos que: $\mu_X(t)$=$\mu_X(0)$ para todo t, y $c_X(t,s)$=$c_X(t-s,0) = \widetilde{c}(|t-s|)$ tomando $h=-s$ donde $\widetilde{c}_X$ es una función de una variable. Es decir, un proceso Gaussiano estrictamente estacionario tiene función de esperanza constante y la función de covarianza sólo depende de la distancia $|t-s|$ entre las variables en consideración.

Sea X=(X$_t$, $t \in$ T) un proceso estocástico y T $\subset$ **R** un intervalo, entonces:

Definición 1.27 *X tiene incrementos estacionarios* si:

$$X_t - X_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{t+h} - X_{s+h} \text{ para todo } t,s \in \mathrm{T} \text{ y } h \text{ tal que } t+h, s+h \in \mathrm{T}$$

Definición 1.28 *X tiene incrementos independientes* si para toda elección de $t_i \in$ T con $t_1 < \ldots < t_n$ y $n \geq 1$,

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

Definición 1.29 Un proceso estocástico X=(X$_t$, $t \in [0,\infty)$) es $H - auto - similar$ para algún $H > 0$ si sus fidis satisfacen la condición:

$$(\alpha^H X_{t_1}, \ldots, \alpha^H X_{t_n}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_{\alpha t_1}, \ldots, X_{\alpha t_n}),$$

para todo $\alpha > 0$, toda elección de índices $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ y $n \geq 1$.

Intuitivamente, si un proceso es autosimilar entonces las trayectorias de $(\alpha^H X_{t_1}, \ldots, \alpha^H X_{t_n})$ y de $(X_{\alpha t_1}, \ldots, X_{\alpha t_n})$ aun cuando no son idénticas, son similares visualmente. El proceso más estudiado que satisface ésta propiedad es el movimiento Browniano fraccionario.

A continuación enunciaremos tres resultados importantes que utilizaremos en los próximos capítulos y cuyas demostraciones las podemos encontrar en [7].

Lema 1.2 (Lema de Borel-Cantelli) Sea $\{A_n\}$ una sucesión de eventos. Si.

$$\sum_n P(\mathrm{A_n}) < \infty,$$

entonces

$$P(\ [A_n\ i.o]\ ) = P\ (\limsup_{n\to\infty} A_n)\ = 0.$$

Donde i.o indica infinita veces.

Teorema 1.2 (Criterio de Convergencia de Kolmogorov). Supongamos que $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes. Si

$$\sum_{j=1}^{\infty} Var(X_j) < \infty,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty}(X_j - E(X_j)) \ \text{ converge casi seguramente.}$$

Teorema 1.3 (Teorema de tres series de Kolmogorov). Sean $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La serie $\sum_n X_n$ converge casi seguramente.
- Existe una constante $K > 0$ tal que las siguientes tres series convergen:

  i. $\sum_n P(\,|X_n| > K)$;

  ii. $\sum_n E(X_n 1_{|X_n| \leq K})$;

  iii. $\sum_n Var(X_n 1_{|X_n| \leq K})$.

Un resultado importante que se desprende de éste último teorema y que utilizaremos a lo largo del trabajo es el siguiente:

Corolario 1.1 Sean $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, normalmente distribuidas con $E(X_n) = \mu_n$, $var(X_n) = \sigma_n^2$, entonces:

$$\sum_n X_n \quad \text{converge casi seguramente si y solo si} \quad \sum_n \mu_n \, , \, \sum_n \sigma_n^2 < \infty.$$

<u>Demostración:</u>

Supongamos primero que $\sum_n \mu_n$ y $\sum \sigma_n^2 < \infty$, entonces por el criterio de convergencia de Kolmogorov, se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) \quad \text{converge casi seguramente.}$$

Además sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ converge casi seguramente. Por lo tanto

$$\sum_n X_n \quad \text{converge casi seguramente.}$$

Ahora supongamos que $\sum_n X_n$ converge casi seguramente, entonces por el Teorema 1.3, existe $C > 0$ tal que:

$$\sum_n P(\,|X_n| > C);\, \sum_n E(X_n 1_{|X_n| \leq C});\, \sum_n Var(X_n 1_{|X_n| \leq C}) \quad \text{convergen.} \tag{1.8}$$

Además podemos escribir para todo $n \geq 1$:

$$X_n = X_n 1_{|X_n| \leq C} + X_n 1_{|X_n| > C} \tag{1.9}$$

Por otra parte, se tiene por (1.8) y el lema 1.2 que:

$$P(\{|X_n| > C \ \forall \ n \geq 1\}) = 0 \quad (c.s); \tag{1.10}$$

Entonces por linealidad de la esperanza, (1.8) y (1.10):

$$\sum_n E(X_n) = \sum_n E[X_n 1_{|X_n| \leq C}] + \sum_n E[X_n 1_{|X_n| > C}] \tag{1.11}$$

Así, por (1.8), (1.10) y (1.11):

$$\sum_n E(X_n) < \infty. \tag{1.12}$$

Por otro lado, podemos escribir:

$$\sum_n Var[X_n] = \sum_n Var[X_n 1_{|X_n| \leq C}] + \sum_n Var[X_n 1_{|X_n| > C}] - \sum_n Cov(X_n 1_{|X_n| \leq C}, X_n 1_{|X_n| > C}). \tag{1.13}$$

A partir de la definición de varianza, (1.10) y (1.12) tenemos que para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} Var[X_n 1_{\{|X_n| > C\}}] &= E[X_n 1_{\{|X_n| > C\}}]^2 - (E(X_n 1_{\{|X_n| > C\}}))^2 \\ &= E[X_n 1_{\{|X_n| > C\}}]^2 \quad (c.s) \\ &= E[X_n^2 1_{\{|X_n| > C\}}] \quad (c.s) \\ &= 0 \quad (c.s), \end{aligned}$$

ya que $P(\{|X_n| > C \; \forall \; n \geq 1\})$=0 c.s.

Además utilizando (1.10) y el hecho de que los conjuntos $\{|X_n| > C\}$ y $\{|X_n| \leq C\}$ son disjuntos tenemos que:

$$Cov(X_n 1_{|X_n| \leq C}, X_n 1_{|X_n| > C}) = 0.$$

Así de lo anterior, (1.8) y (1.13):

$$\sum_n Var(X_n 1_{\{|X_n| > C\}}) < \infty \quad (c.s). \tag{1.14}$$

Con lo cual se obtiene lo que se quería demostrar.

□

Como hemos mencionado anteriormente los procesos estocásticos se pueden clasificar de acuerdo a las propiedades probabilísticas de las variables aleatorias, así entre éstas clasificaciones tenemos a los procesos de incrementos independientes, y uno de los ejemplos más importantes de éste tipo de procesos es el movimiento Browniano, el cual estudiaremos a continuación.

Capítulo 2

Movimiento Browniano.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener es el nombre dado al movimiento irregular que realizan las partículas de polen suspendidas en un líquido. Este movimiento fue observado por el botánico inglés Robert Brown (1773-1858) en 1827, cuando investigaba el polen de diversas plantas. Observó que el polen de las muestras preparadas para la observación en microscopio estaban en constante movimiento. Como éste se repetía con todos los tipos de sustancias orgánicas, creyó que había encontrado la molécula primitiva de los seres vivos, sin embargo también encontró que las sustancias inorgánicas como el polvo, presentaban el mismo comportamiento.

A partir de aquí aparecen distintos investigadores, que trataron de explicar éste fenómeno. De entre todos se destacan los siguientes: en 1858 Regnault pensó que el movimiento era causado por el calentamiento irregular de la muestra provocado por la luz incidente. En 1863 Weiner comprueba que el movimiento no es mantenido por fuerzas de una partícula sobre otra, ni por diferencias de temperatura ni por evaporación. Cantoni y Ochl en 1865 comprobaron que el movimiento de las partículas continuaba a pesar de mantener durante un año el líquido con las partículas entre dos láminas de vidrio selladas y sin mover el experimento. Exner en 1867 encuentra que el movimiento es tanto más rápido cuanto más pequeñas son las partículas, más luz y más calor reciben. En 1870 Jevons da la idea que el movimiento es causado por fuerzas de naturaleza eléctrica, sin embargo Dancer, en el mismo año demuestra claramente el error del razonamiento de Jevons. En 1877, Delsaux expresó por primera vez que el origen del movimiento Browniano está en el impacto entre las moléculas del soluto con las del disolvente. También éste punto de vista fue dado independientemente por Carbonelle en el mismo año. Ninguno de ellos lo demostró adecuadamente y sus ideas no fueron tenidas en consideración.

La primera investigación precisa fue realizada por Guoy en 1888, quién concluyó que el movimiento era más intenso cuando la viscosidad del disolvente era menor y relacionó el movimiento a la agitación térmica molecular del líquido. En 1900 Louis Bachelier (1870-1946) utilizó el movimiento para la descripción del cambio de los precios de las bolsas de valores. Después de muchos intentos por explicar el fenómeno en 1905 Einstein (1879- 1955) constituye uno de los puntos culminantes de la larga investigación sobre la deducción de las leyes que gobiernan el movimiento Browniano.

Sin embargo la estructura matemática del movimiento Browniano, tal y como se la conoce hoy en día, es debida la matemático norteamericano Norbert Wiener (1894-1964) en 1923. Por ésta razón el movimiento Browniano es también conocido como el proceso de Wiener.

2.1 Definición.

Definición 2.1 Un proceso estocástico W=($W(t,\omega)$=$W(t)$; $t \in [0,\infty)$) definido sobre un espacio de probabilidad (Ω,$\mathcal{F}$, P) es llamado *proceso de Wiener o movimiento Browniano* si satisface las siguientes condiciones:

i. $W(0)$=0 para casi todo ω, (empieza en cero),

ii. $W(t)$-$W(s) \in \mathcal{N}(0,t\text{-}s)$, para todo $0\leq s < t < \infty$,

iii. $W(t\ )$ es un proceso de incrementos independientes, es decir:
$W(t_2)$-$W(t_1)$, $W(t_3)$-$W(_2)$,. . .,$W(t_i)$-$W(t_{i-1})$ son variables aleatorias independientes para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots \leq t_{i-1} \leq t_i < \infty$ (i=2,3, . . .),

iv. $W(t, \omega)$tiene trayectorias continuas en t con probabilidad uno.

2.2 Propiedades.

A partir de la definición anterior podemos obtener las siguientes propiedades del movimiento Browniano:

a. Para cada $t \in [0,\infty)$, $W(t)$ tiene distribución $\mathcal{N}(0,t)$, esto se sigue de la parte (ii) de la definición, haciendo s=0 y utilizando (i).

b. W es un proceso Gaussiano.
En efecto, pues:
Sean $t_1, \ldots, t_n$ elementos de $[0,\infty)$, α_1,. . .,α_n números reales, y consideremos λ_i como λ_i=$\sum_{j=i}^{n} \alpha_j$ con n natural, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_1 W(t_1) \quad &+ \ldots + \alpha_n W(t_n) = \\ = \quad & (\lambda_1 - \lambda_2)W(t_1) + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)W(t_{n-1}) + \lambda_n W(t_n) \\ = \quad & \lambda_1 W(t_1) + \lambda_2(W(t_2) - W(t_1)) + \ldots + \lambda_n(W(t_n) - W(t_{n-1})), \end{aligned}$$

Ahora bien, como los incrementos son normales e independientes, se tiene por el teorema 1.1 que ($W(t_1)$,. . ., $W(t_n)$) es normal.

c. Las Variables $W(t)$-$W(s)$ *y* $W(t\text{-}s)$ tienen distribución $\mathcal{N}(0, t\text{-}s)$ con $s < t$.

Pues, por (i),(ii) y la estacionariedad, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
W(t)-W(s) &\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(t-s)-W(s-s) \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(t-s)-W(0) \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(t-s).
\end{aligned}
$$

Entonces de **a.** se tiene que W (t-s) tiene distribución $\mathcal{N}$(0, t-s). De hecho $W(t)$-$W(s)$ y $W(t$-$s)$ tienen la misma distribución pues son variables aleatorias normales con igual media y varianza, así podemos escribir: $W(t)$-$W(s)\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(t-s)$.

d. La función de covarianza del movimiento Browniano es:

$$c_W(s,t) = E[W(s)W(t)] = min(s,t).$$

En efecto pues, utilizando (i), (ii), (iii), tenemos para $s < t$ que:

$$
\begin{aligned}
c_W(s,t) &= EW(s)W(t) \\
&= E[W(s)W(t) - W(s)^2 + W(s)^2] \\
&= E[W(s)(W(t) - W(s))] + E[W(s)^2] \\
&= E[W(s)]E[W(t) - W(s)] + E[W(s)^2] \\
&= 0 + s \\
&= min(s,t).
\end{aligned}
$$

Si $t < s$ el procedimiento es análogo.

e. El movimiento Browniano es un proceso gaussiano con:

$$\mu_W(t)\text{=}0 \text{ y } c_W(s,t)\text{=}min(s,t).$$

En efecto, pues,

A partir de la parte (i), (ii) de la definición se tiene que la función de esperanzas es:

$$\mu_W(t)=EW(t)=0,$$

y el hecho de que $c_W(s,t)=min(s,t)$ lo obtuvimos en la parte anterior, como W es un proceso gaussiano, entonces está completamente determinado por sus funciones de esperanza y covarianza, con lo cual se sigue el resultado.

f. Si W es un movimiento Browniano, se tienen las siguientes transformaciones de W:

- (**Simetría**). El proceso $-W(t)$, $t\geq 0$, es un movimiento Browniano.
- (**Escala en el tiempo**). Para todo c>0, el proceso $cW(t/c^2)$, $t \geq 0$ es un movimiento Browniano.
- (**Inversión en el tiempo**). El proceso X definido por: $X(0)=0$, $X(t)=tW(1/t)$ para $t > 0$ es un movimiento Browniano.

g. Para algún $s > 0$ fijo, el proceso $W(t+s)$-$W(s)$, $t \geq 0$, es un movimiento Browniano independiente de $\sigma(W(u), u \leq s)$, donde $\sigma(W(u), u \leq s)$ representa la sigma algebra generada por las variables aleatorias $W(u)$ para $u \leq s$.

En base a las propiedades que hemos mencionado del movimiento Browniano, se puede obtener una definición equivalente, que enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.1 Sea $X=(X_t = X(t), t \in \mathrm{T})$ un proceso estocástico, entonces X es un movimiento Browniano si y solo si

(i) X es un proceso gaussiano.

(ii) $\mu_X(t)=0$ para todo $t \in \mathrm{T}$ (el proceso es centrado).

(iii) $c_X(s,t)=min(s,t)$ para cada par s y t de elementos de T.

(iv) X tiene trayectorias continuas.

Demostración:

Supongamos primero que X satisface las condiciones (i),(ii),(iii) y (iv) y veamos que X es un movimiento Browniano:

- Por (ii) se tiene que $\mu_X(t)$=0 para todo $t \in$ T, en particular se satisface para que $t = 0$ y por (iii) se tiene que var(X_0)=0, así por la proposición 1.1 $X_0 = 0$ c.s.

- Dado que X es un proceso gaussiano se tiene por el ejemplo 1.5 que cualquier colección finita de variables aleatorias de X es gaussiana, luego por el teorema 1.1 se tiene que en particular $X_t - X_s$ es normal para t y s elementos de T con $s < t$. Por otro lado utilizando linealidad de la esperanza e (ii) obtenemos que E[$X_t - X_s$]=0, y por (iii) la $var[X_t - X_s]$=$t - s$. Obteniéndose así que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0,t - s)$.

- Veamos que X tiene incrementos independientes:

  Sean $t_1, \ldots, t_n \in$ T, entonces los incrementos asociados a éstos índices son:

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}};$$

  estos incrementos son gaussianos:

  Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares en **R**, entonces:

$$\alpha_1(X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + \alpha_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}});$$

  es combinación lineal de variables gaussianas y como por hipótesis X es gaussiano, se tiene que el vector de incrementos es gaussianos por el teorema 1.1, como esto sucede para cualquier colección de elementos de T, se tiene que los incrementos son gaussianos. Ahora para ver que los incrementos son independientes, es suficiente que veamos su covarianza, ya que son gaussianos.

Sean i, j enteros no negativos tales que $i > j$, entonces, por linealidad de la esperanza y (iii):

$$cov[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}), (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] = E[X_{t_i} X_{t_j}] - E[X_{t_i} X_{t_{j-1}}] - E[X_{t_j} X_{t_{i-1}}] + E[X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}}] = 0;$$

así por la proposición 1.3 se tiene que los incrementos son independientes, análogamente se procede si consideramos $i < j$.

Así se tiene que X es por definición un movimiento Browniano. La otra implicación de la demostración la obtuvimos anteriormente utilizando las propiedades del movimiento Browniano. De todo lo anterior y por la continuidad de las trayectorias, se tiene la equivalencia de las definiciones. □

2.3 Construcción

El objetivo de ésta parte es dar una prueba constructiva de la existencia del movimiento Browniano. Para ello, consideremos lo siguiente:

Sea $\{r_n\}$ una sucesión de números racionales diádicos positivos, es decir números de la forma $k/2^n$, k=$1, 2, 3, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ y sea $\{X_{r_n}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}$(0,1), definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F}, P)$.

Sobre éste espacio de probabilidad construimos un movimiento Browniano de la siguiente manera:

i. $W(0)$=0 y para todo entero positivo $k > 0$, definimos:

$$W(k) = X_1 + X_2 + \ldots + X_k. \tag{2.1}$$

Con ésta definición se tiene que $W(k)$ es:

- Normal por el teorema 1.1 ya que es la suma de variables aleatorias normales e independientes.
- Es centrado por la linealidad de la esperanza y el hecho de que las $\{X_{r_n}\}$ tienen distribución $\mathcal{N}(0,1)$.
- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ entonces por ser las $\{X_{r_n}\}$ independientes se tiene que:

$$\begin{aligned}
cov(W(k_1), W(k_2)) =& E[(W(k_1) - E(W(k_1)))(W(k_2) - E(W(k_2)))] \\
=& E[W(k_1)W(k_2)] \\
=& E[X_1^2] + E[X_1X_2] + \cdots + E[X_1X_{k_2}] + \\
&+ E[X_2X_1] + E[X_2^2] + \cdots + E[X_2X_{k_2}] + \\
&\vdots \\
&+ E[X_{k_1}X_1] + E[X_{k_1}X_2] + \ldots + E[X_{k_1}^2] + \cdots + E[X_{k_1}X_{k_2}] \\
=& E[X_1^2] + E[X_2^2] + \cdots + E[X_{k_1}^2] \\
=& var(X_1) + \cdots + var(X_{k_1}) \\
=& 1 + \cdots + 1 \\
=& k_1 \\
=& min(k_1, k_2).
\end{aligned}$$

ii. Para los racionales de la forma $k + \frac{1}{2}$, donde k es un entero positivo, definimos:

$$W\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{W(k) + W(k+1)}{2} + \frac{X_{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}}. \tag{2.2}$$

Con ésta definición se tiene que $W(k + \frac{1}{2})$ es:

- Normal por el teorema 1.1.
- Es centrado por la linealidad de la esperanza, la parte (i) anterior y el hecho de que las $\{X_{r_n}\}$ tienen distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$, por la independencia de las $\{X_{r_n}\}$ se tiene que $E[W(i)X_{j+\frac{1}{2}}] = E[X_{j+\frac{1}{2}}X_{i+\frac{1}{2}}] = 0$ con i, j enteros positivos. Así podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&cov\left(W\left(k_1+\frac{1}{2}\right), W\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right) = E\left[W\left(k_1+\frac{1}{2}\right)W\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right] \\
&=\frac{1}{4}E[W(k_1)W(k_2)] + \frac{1}{4}E[W(k_1)W(k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W(k_1)X_{k_2+\frac{1}{2}}] + \\
&+\frac{1}{4}E[W(k_1+1)W(k_2)] + \frac{1}{4}E[W(k_1+1)W(k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W(k_1+1)X_{k_2+\frac{1}{2}}] + \\
&+\frac{1}{4}E[X_{k_1+\frac{1}{2}}W(k_2)] + \frac{1}{4}E[X_{k_1+\frac{1}{2}}W(k_2+1)] + \frac{1}{4}E[X_{k_1+\frac{1}{2}}X_{k_2+\frac{1}{2}}] \\
&=\frac{1}{4}min(k_1,k_2) + \frac{1}{4}min(k_1,k_2+1) + \frac{1}{4}min(k_1+1,k_2) + \frac{1}{4}min(k_1+1,k_2+1) \\
&=min\left(k_1+\frac{1}{2}, k_2+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

iii. De acuerdo a la construcción se tiene que de manera recursiva hemos definido $W(k/2^n)$ con k=1,2,...; n=1,2,...,n_0, y satisface ser normal, centrado y tal que

$$cov(W(k_1/2^n), W(k_2/2^n)) = min(k_1/2^n, k_2/2^n).$$

iv. Para $k = 1, 2, \ldots$ y $n = n_0 + 1$, sea:

$$W\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \frac{W(\frac{2k}{2^n}) + W(\frac{2k+2}{2^n})}{2} + \frac{X_{(2k+1)2^{-n}}}{\sqrt{2^{n+1}}}. \tag{2.3}$$

Y además W($\frac{2k+1}{2^n}$), también satisface que:

- Es normal por el teorema 1.1.
- Es centrado por la linealidad de la esperanza, y la suposición hecha en (iii) debida a la construcción.
- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$, con k_1, k_2 enteros no negativos, entonces por la independencia de las $\{X_{r_n}\}$ y la suposición hecha en (iii) dada la construcción se tiene que para i, j enteros no negativos,

$$E\left[W\left(\frac{2i}{2^n}\right)X_{(2j+1)2^{-n}}\right] = E\left[W\left(\frac{2i+1}{2^n}\right)X_{(2j+1)2^{-n}}\right] = E\left[X_{(2i+1)2^{-n}}X_{(2j+1)2^{-n}}\right] = 0.$$

Así podemos obtener:

$$\begin{aligned}
cov & \left(W\left(\frac{2k_1+1}{2^n}\right), W\left(\frac{2k_2+1}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{4}E\left[W\left(\frac{2k_1}{2^n}\right)W\left(\frac{2k_2}{2^n}\right)\right] + \\
+ & \frac{1}{4}E\left[W\left(\frac{2k_1}{2^n}\right)W\left(\frac{2k_2+2}{2^n}\right)\right] + \frac{1}{4}E\left[W\left(\frac{2k_1+2}{2^n}\right)W\left(\frac{2k_2}{2^n}\right)\right] + \\
+ & \frac{1}{4}E\left[W\left(\frac{2k_1+2}{2^n}\right)W\left(\frac{2k_2+2}{2^n}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(\frac{2k_1}{2^n}\right)X_{(2k_2+1)2^{-n}}\right] + \\
+ & \frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(\frac{2k_1+2}{2^n}\right)X_{(2k_2+1)2^{-n}}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(\frac{2k_2}{2^n}\right)X_{(2k_1+1)2^{-n}}\right] + \\
+ & \frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(\frac{2k_2+2}{2^n}\right)X_{(2k_1+1)2^{-n}}\right] + \frac{1}{2^{n+1}}E\left[X_{(2k_1+1)2^{-n}}X_{(2k_2+1)2^{-n}}\right] \\
= & \frac{1}{4}E(W(2k_1/2^n)W(2k_2/2^n)) + \frac{1}{4}E(W(2k_1/2^n)W((2k_2+2)/2^n)) + \\
+ & \frac{1}{4}E(W((2k_1+2)/2^n)W(2k_2/2^n)) + \frac{1}{4}E(W((2k_1+2)/2^n)W((2k_2+2)/2^n)) \\
= & \frac{1}{4}min\left(\frac{2k_1}{2^n}, \frac{2k_2}{2^n}\right) + \frac{1}{4}min\left(\frac{2k_1}{2^n}, \frac{2k_2+2}{2^n}\right) + \\
+ & \frac{1}{4}min\left(\frac{2k_1+2}{2^n}, \frac{2k_2}{2^n}\right) + \frac{1}{4}min\left(\frac{2k_1+2}{2^n}, \frac{2k_2+2}{2^n}\right) \\
= & \; min\left(\frac{2k_1+1}{2^n}, \frac{2k_2+1}{2^n}\right).
\end{aligned}$$

v. Dada la construcción se puede verificar que para cualquier racional diádico no negativo $\frac{k}{2^n}$ con $k = 1, 2, \ldots$ y $n = 1, 2, \ldots$, se satisface que $W(\frac{k}{2^n})$ es normal, centrado y $cov(W(\frac{k_1}{2^n}), W(\frac{k_2}{2^n})) = min(\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_2}{2^n})$ donde $\frac{k_1}{2^n}$ y $\frac{k_2}{2^n}$ son racionales diádicos no negativos.

Así, se tiene que por inducción hemos definido nuestro proceso que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema 2.1 para todo racional diádico positivo r_n con $n \geq 1$.

Para un $t > 0$ arbitrario utilizamos la siguiente representación:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{2^k},$$

donde $\varepsilon_0(t) = 0, 1, 2, \ldots$; $\varepsilon_k(t) = 0, 1$; $k = 0, 1, \ldots$, y definimos:

$$\begin{aligned} W(t) &= \lim_{n\to\infty} W(t_n) \quad (c.s) \\ &= W(\varepsilon_0(t)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (W(t_k) - W(t_{k-1})) \quad (c.s), \end{aligned}$$

donde $t_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon_j(t)}{2^j}$.

La existencia del límite de arriba se sigue del teorema de tres series de Kolmogorov, para todo $0 < t < \infty$ fijo. En efecto, pues:

Llamemos $Y_k = W(t_k) - W(t_{k-1})$, es decir Y_k son los incrementos del proceso definido anteriormente sobre los racionales diádicos y que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema 2.1, por lo tanto son normales e independientes. Además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[Y_k] < \infty \text{ pues } Y_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} var(Y_k) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} var(W(t_k) - W(t_{k-1})) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} t_n - t_0 \\ &= t - t_0 < \infty. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[Y_k], \qquad \sum_{k=1}^{\infty} var(Y_k) < \infty.$$

Ahora bien, por el corolario 1.1 tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$ converge casi seguramente, es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (W(t_k) - W(t_{k-1})) \textit{ converge casi seguramente.}$$

Así hemos demostrado que para todo $t > 0$ fijo, el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(W(t_k) - W(t_{k-1})) \tag{2.4}$$

existe, y además también existe un conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilidad cero tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(W(t_k) - W(t_{k-1}))$ converge para todo $\omega \in \Omega - \Omega_0$.

Ahora veamos que la representación de $W(t)$ se satisface uniformemente en t con probabilidad uno. Para ver esto primero mostremos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{0\leq t\leq 1}|W(t_k) - W(t_{k-1})| < \infty \ (c.s).$$

Para ello consideremos $K = 2^k$, $u_k = C\sqrt{2logK}$ y $C = constante > 1$. Además para un proceso que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema 2.1 se tiene que $W(t_k) - W(t_{k-1}) \stackrel{\text{d}}{=} W(t_k - t_{k-1})$ donde por definición $t_k = \sum_{j=0}^{k}\frac{\varepsilon_j(t)}{2^j}$ y $k \in N$ así:

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0\leq t\leq 1}|W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq u_k\frac{1}{\sqrt{K}}\right] &= P\left[\left|\sqrt{K}W\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \geq u_k\right] \\ &= P\left[\left|\sqrt{K}W\left(\frac{1}{K}\right)\right| \geq u_k\right] \\ &= 2P\left[\sqrt{K}W\left(\frac{1}{K}\right) \geq u_k\right]. \end{aligned}$$

Luego como $\sqrt{K}W\left(\frac{1}{K}\right)$ tiene distribución $\mathcal{N}(0,1)$, se tiene por la desigualdad del lema 1.1 y mediante la acotación hecha en el lema 3.1 del apéndice que:

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq 1}|W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq u_k\frac{1}{\sqrt{K}}\right] \leq 2Ke^{\frac{-u_k^2}{2}}.$$

Utilizando argumentos similares podemos obtener que:

$$P\left[\sum_{k=1}^{n}\sup_{0\leq t\leq 1}|W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq \sum_{k=1}^{n}u_k\frac{1}{\sqrt{K}}\right] \leq \sum_{k=1}^{n}2Ke^{\frac{-u_k^2}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Entonces por continuidad de la medida:

$$P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \frac{1}{\sqrt{K}}\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2Ke^{\frac{-u_k^2}{2}}.$$

Consecuentemente, con $L = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2log2^k}{2^k}}$ y sustituyendo los valores de K y u_k tenemos:

$$P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq CL\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^{k(C^2-1)}} = \frac{2}{2^{(C^2-1)} - 1}.$$

En el lado derecho obtenemos como cota una serie geométrica de razón $\frac{1}{2^{(C^2-1)}}$ y haciendo tender $C \to \infty$ se tiene que:

$$P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \geq CL\right] \longrightarrow 0.$$

Así obtenemos el resultado deseado, es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| < \infty \ (c.s). \tag{2.5}$$

Lo cual implica que:

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \to \infty \ (c.s). \tag{2.6}$$

De donde

$$|W(t_k) - W(t_{k-1})| \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \to \infty \quad \text{para todo } t \in [0,1] \ (c.s).$$

De aquí $\{W(t_k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{R}$ y por ser $\mathbf{R}$ completo, se tiene que existe $W(t)$ en $\mathbf{R}$, tal que:

$$\lim_{k\to\infty} W(t_k) = W(t) \quad \text{para todo } t \in [0,1], \ (c.s).$$

Así

$$W(t) = W(\varepsilon_0(t)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (W(t_k) - W(t_{k-1})) \tag{2.7}$$

converge uniformemente en t con probabilidad 1.

Ahora veamos que el proceso $\{W(t) : 0 \leq t < \infty\}$ que hemos definido satisface las condiciones del teorema 2.1, el cual es una definición equivalente del movimiento Browniano.

Dada la definición de $W(t)$ se tiene que el proceso $\{W(t) : 0 \leq t < \infty\}$:

- Es normal, pues es la suma de variables aleatorias normales, centradas e independientes, así se tiene que convergen a una variable aleatoria normal.
- Para cada k natural t_k es un racional diádico no negativo, y por la construcción que hemos hecho sobre los racionales diádicos no negativos se tiene que $W(t_k)$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, t_k)$, así por linealidad de la esperanza y el teorema de la convergencia monótona se tiene que el proceso $\{W(t) : 0 \leq t < \infty\}$ es centrado.
- Sea $0 \leq s < t < \infty$ y $s_j = \sum_{k=0}^{j} \frac{\varepsilon_k(s)}{2^k}$, $t_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varepsilon_j(t)}{2^j}$ entonces:

$$s_j - s_{j-1} = \frac{\varepsilon_j(s)}{2^j} \quad con \quad \varepsilon_j(s) = 0,\, 1 \quad y \quad \varepsilon_0(s) = 0, 1, 2, \dots,$$

y

$$t_k - t_{k-1} = \frac{\varepsilon_k(t)}{2^k} \quad con \quad \varepsilon_k(t) = 0,\, 1 \quad \varepsilon_0(t) = 0, 1, 2, \dots$$

Luego por la independencia, tenemos:

$$E[W(\varepsilon_0(s))(W(t_k) - W(t_{k-1}))] = E[(W(t_k) - W(t_{k-1}))(W(s_j) - W(s_{j-1}))] = 0,$$

además por ser el proceso centrado y haciendo uso del teorema de la convergencia monótona, obtenemos que:

$$\begin{aligned} cov(W(s), W(t)) &= E[(W(s) - E(W(s)))(W(t) - E(W(t)))] = E[W(s)W(t)] \\ &= E[W(\varepsilon_0(t))W(\varepsilon_0(s))] + E\left[W(\varepsilon_0(t)) \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} (W(s_j) - W(s_{j-1}))\right] + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(W(t_k)-W(t_{k-1}))W(\varepsilon_0(s))\right]+\\
&+E\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(W(t_k)-W(t_{k-1}))\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(W(s_j)-W(s_{j-1}))\right]\\
&=min(\varepsilon_0(t),\varepsilon_0(s))+\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{j=1}^{m}E[W(\varepsilon_0(t))(W(s_j)-W(s_{j-1}))]+\\
&+\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}E[W(\varepsilon_0(s))(W(t_k)-W(t_{k-1}))]+\\
&+\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}E[(W(t_k)-W(t_{k-1}))(W(s_j)-W(s_{j-1}))]\\
&=\varepsilon_0(s)+\lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{j=1}^{m}(s_j-s_{j-1})\\
&=\varepsilon_0(s)+s-\varepsilon_0(s)\\
&=min(s,t).
\end{aligned}
$$

Análogamente se tiene si $s > t$.

- Ahora demostraremos que el proceso $\{W(t) : 0 \leq t < \infty\}$ tiene trayectorias continuas, para ello utilizaremos el siguiente teorema, el cual da el módulo de continuidad del movimiento Browniano o proceso de Wiener. Una de las formas a través de las cuales podemos ver la continuidad y las oscilaciones de las trayectorias del movimiento Browniano, es buscando un módulo de continuidad. Razón por la cual debemos introducir la siguiente definición:

Definición 2.2 Una función $g(\cdot)$ es llamada *módulo de continuidad* para la función $f : [0,T] \longrightarrow \mathbf{R}$ si $0 \leq s < t \leq T$ y $|t-s| \leq \delta$ implica que $|f(t)-f(s)| \leq g(\delta)$ para todo $\delta > 0$. Un resultado relevante de P. Lévy (1937) asegura que g definida como:

$$
g(\delta) := \sqrt{2\delta\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}, \quad \delta > 0 \tag{2.8}
$$

es un módulo de continuidad exacto para casi toda trayectoria Browniana, ésta afirmación es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 2.2 (**Módulo de Lévy** (1937)).
Sea $g : (0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^+ \backslash \{\mathbf{0}\}$ tal que g(δ):=$\sqrt{2\delta \log(1/\delta)}$ se tiene que:

$$P\left[\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \frac{1}{g(\delta)} \max_{\substack{0\le s<t\le 1\\ t-s\le\delta}} |W(t)-W(s)| = 1\right] = 1.$$

Demostración:

Veamos primero que

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \frac{1}{g(\delta)} \max_{\substack{0\le s<t\le 1\\ t-s\le\delta}} |W(t)-W(s)| \ge 1.$$

Sea $n \ge 1$, $0 < \theta < 1$ entonces por la independencia de los incrementos y el hecho de que:

$$W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \overset{\mathrm{d}}{=} W\left(\frac{1}{2^n}\right), \tag{2.9}$$

tenemos,

$$P\left[\max_{1\le j\le 2^n}\left|W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right| \le (1-\theta)^{1/2} g(2^{-n})\right] = \tag{2.10}$$

$$= \prod_{j=1}^{2^n} P\left[\ \left|2^{\frac{n}{2}} W\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \le (1-\theta)^{1/2}\sqrt{2^{1-n}\log(2^n)}\ \ 2^{\frac{n}{2}}\ \right] =$$

Llamemos $x = (1-\theta)^{1/2}\sqrt{2^{1-n}\log(2^n)}\ \ 2^{\frac{n}{2}}$ y utilizando propiedades de la distribución normal obtenemos:

$$
\begin{aligned}
P\left[\max_{1\leq j\leq 2^n}\left|W\left(\frac{j}{2^n}\right)\right.\right. &- \left.\left.W\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right| \leq (1-\theta)^{1/2}g(2^{-n})\right] = \left(P\left[\left|2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq x\right]\right)^{2^n} \\
&= \left(1-P\left[\left|2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| > x\right]\right)^{2^n} \\
&= \left(1-\left(P\left[2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right) > x\right] + P\left[2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right) < -x\right]\right)\right)^{2^n} \\
&= \left(1-2P\left[2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right) > x\right]\right)^{2^n}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como $2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$ tenemos por el lema 1.1 que:

$$
\begin{aligned}
P\left[2^{\frac{n}{2}}W\left(\frac{1}{2^n}\right) > x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2/2}du &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{(1+x^2)}e^{-x^2/2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}(1+x^2)}2^{-n(1-\theta)} \\
&= \frac{\alpha}{2}\;2^{-n(1-\theta)},\;\; \alpha > 0.
\end{aligned}
$$

Usando éste resultado se tiene que (2.10) se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
P\left[\max_{1\leq j\leq 2^n}\left|W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right| \leq (1-\theta)^{1/2}g(2^{-n})\right] &\leq \left(1-\alpha 2^{-n(1-\theta)}\right)^{2^n} \\
&\leq e^{-\alpha 2^{-n(1-\theta)}2^n} = e^{-\alpha 2^{n\theta}},
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad la obtenemos por la desigualdad (1.4) de la exponencial.

Así tenemos que:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left[\max_{1\leq j\leq 2^n}\left|W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right| \leq (1-\theta)^{1/2}g(2^{-n})\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha 2^{n\theta}} < \infty, \qquad (2.11)
$$

en el lado derecho de (2.11) tenemos una serie convergente. Así por el lema 1.2 de Borel-Cantelli, se tiene que existe un evento $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$, $P(\Omega_\theta)$=1, y una variable aleatoria entera N_θ tal que para cada $\omega \in \Omega_\theta$:

$$\max_{1\leq j\leq 2^n} \left| W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right| > \sqrt{1-\theta}\, g(2^{-n})\ , \quad con \quad n \geq N_\theta.$$

Considerando $\delta = \frac{1}{2^n}$ se tiene que $\delta \to 0$ cuando $n \to \infty$; además si hacemos $\theta \downarrow 0$ a lo largo de los racionales obtenemos:

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \frac{1}{g(\delta)} \max_{\substack{0\leq s<t\leq 1 \\ t-s\leq\delta}} |W(t)-W(s)| \geq 1. \quad c.s, \tag{2.12}$$

completando de ésta manera la primera parte de la demostración.

Veamos ahora que:

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \frac{1}{g(\delta)} \max_{\substack{0\leq s<t\leq 1 \\ t-s\leq\delta}} |W(t)-W(s)| \leq 1,$$

para demostrar ésta desigualdad consideremos:

$$\theta \in (0,1) \quad y \quad \epsilon > \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

Entonces, por propiedad del máximo, subaditividad de la medida, (2.9) y sabiendo que,

$$g\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{k}{2^n} 2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)},$$

obtenemos:

$$P\left[\max_{\substack{0\leq i<j\leq 2^n \\ k=j-i\leq 2^{n\theta}}} \frac{1}{g(k2^{-n})} \left| W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \geq 1+\epsilon \right] \leq \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]} P\left[\max_{0\leq i<i+k\leq 2^n}\left|W\left(\frac{k+i}{2^n}\right)-W\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|\geq(1+\epsilon)\,g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\\
&\leq \sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]}\sum_{i=0}^{2^{(n-1)}} P\left[\ \left|W\left(\frac{k+i}{2^n}\right)-W\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|\geq(1+\epsilon)g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\\
&= 2^n\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]} P\left[\ \left|W\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|\geq(1+\epsilon)\,g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\\
&= 2^n\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]} P\left[\ \frac{\left|W\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|}{\sqrt{k/2^n}}\geq(1+\epsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)}\ \right],
\end{aligned}
$$

como $\frac{W\left(\frac{k}{2^n}\right)}{\sqrt{k/2^n}}\sim\mathcal{N}(0,1)$ utilizamos la desigualdad del lema 1.1 y la acotación del lema 3.2 en el apéndice, para obtener:

$$
2^n\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]} P\left[\ \frac{\left|W\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|}{\sqrt{k/2^n}}\geq(1+\epsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)}\ \right]\leq 2^n\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]}\frac{(k2^{-n})^{(1+\epsilon)^2}}{(1+\epsilon)\sqrt{n\pi(1-\theta)\log(2)}}. \tag{2.14}
$$

Llamando

$$
Ctte=\frac{1}{(1+\epsilon)\sqrt{\pi(1-\theta)\log(2)}}
$$

tenemos de (2.13) y (2.14) que:

$$
P\left[\max_{\substack{0\leq i<j\leq 2^n\\ k=j-i\leq 2^{n\theta}}}\frac{1}{g(k2^{-n})}\left|W\left(\frac{j}{2^n}\right)-W\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|\geq 1+\epsilon\right]\leq 2^n\frac{Ctte}{\sqrt{n}}2^{-n(1+\epsilon)^2}\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]}k^{(1+\epsilon)^2} \tag{2.15}
$$

como

$$
\sum_{k=1}^{[2^{n\theta}]}k^{(1+\epsilon)^2}\leq\int_0^{2^{n\theta}+1}x^{(1+\epsilon)^2}dx=\frac{(2^{n\theta}+1)^v}{v},
$$

donde $v=1+(1+\epsilon)^2$ y utilizando (2.15) tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left[\max_{\substack{0 \leq i < j \leq 2^n \\ k=j-i \leq 2^{n\theta}}} \frac{1}{g(k2^{-n})} \left| W\left(\frac{j}{2^n}\right) - W\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \geq 1+\epsilon \right]$$
$$\leq \; Ctte \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{-n[(1+\epsilon)^2(1-\theta)-(1+\theta)]} < \infty,$$

pues $(1+\epsilon)^2(1-\theta)-(1+\theta) > 0$ así se tiene en el lado derecho una serie convergente. Entonces por el lema 1.2 de Borel-Cantelli, existe un evento $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$, $P(\Omega_\theta)$=1, y una variable aleatoria entera N_θ tal que:

$$2^{-(1-\theta)N_\theta(\omega)} \leq \frac{1}{e}, \; para\ todo\ \omega \in \Omega_\theta \tag{2.16}$$

y

$$\max_{\substack{0<i<j\leq 2^n \\ k=j-i\leq 2^{n\theta}}} \frac{\left| W\left(\frac{j}{2^n},\omega\right) - W\left(\frac{i}{2^n},\omega\right) \right|}{g(k/2^n)} < (1+\epsilon) \quad con\ n \geq N_\theta,\ \omega \in \Omega_\theta \tag{2.17}$$

Ahora extendamos el resultado anterior, para ello consideremos el conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ de racionales diádicos en [0,1], con $D_n = \{k2^{-n}, k = 0,1,\ldots,2^n\}$. Entonces para cada $\omega \in \Omega_\theta$ y $n \geq N_\theta$, la desigualdad:

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq (1+\epsilon)\left[2\sum_{j=n+1}^{\infty} g(2^{-j}) + g(t-s)\right] \tag{2.18}$$

es válida para todo par (s,t) de racionales diádicos que satisfagan $0 < t-s < 2^{-n(1-\theta)}$. La demostración de éste hecho la realizamos en el lema 3.3 del apéndice.

Ahora, regresando nuevamente a la demostración original, supongamos que los racionales diádicos s, t en (2.18) son tales que:

$$2^{-(n+1)(1-\theta)} \leq \delta = t-s < 2^{-n(1-\theta)}$$

y por (2.16) se tiene que $2^{-n(1-\theta)} \leq 1/e$ para todo $\omega \in \Omega_\theta$ y $n \geq N_\theta(\omega)$. Dado que g es creciente en $(0,1/e]$, tenemos:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} g(2^{-j}) \leq C g(2^{-(n+1)}), \tag{2.19}$$

con C una constante positiva. Por otro lado, utilizando la definición de g podemos obtener:

$$\frac{g(2^{-(n+1)})}{g(2^{-(n+1)(1-\theta)})} = \sqrt{\frac{2 \times 2^{-(n+1)} \log(2^{n+1})}{2 \times 2^{-(n+1)(1-\theta)} \log(2^{(n+1)(1-\theta)})}} = \frac{2^{-\frac{\theta(n+1)}{2}}}{\sqrt{1-\theta}},$$

de donde

$$g(2^{-(n+1)}) = g(2^{-(n+1)(1-\theta)}) \frac{2^{\frac{-(n+1)\theta}{2}}}{\sqrt{1-\theta}}, \tag{2.20}$$

y por el crecimiento de g:

$$g(2^{-(n+1)(1-\theta)}) \leq g(\delta). \tag{2.21}$$

Así a partir de (2.19) utilizando (2.20) y (2.21)

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} g(2^{-j}) \leq \frac{C}{\sqrt{1-\theta}}\, 2^{\frac{-(n+1)\theta}{2}} g(\delta)$$

como esto se satisface para $0 < s < t$ y $\delta = t - s$ tales que $\delta \in [2^{-(n+1)(1-\theta)}, 2^{-n(1-\theta)})$ se tiene por (2.18) que:

$$\max_{\substack{0 \leq s < t \leq 1 \\ t-s=\delta}} |W(t) - W(s)| \leq g(\delta)(1+\epsilon) \left[\frac{2C}{\sqrt{1-\theta}}\, 2^{\frac{-(n+1)\theta}{2}} + 1 \right]$$

para todo $\omega \in \Omega_\theta$ y $n \geq N_\theta$. Ahora tomemos $n \to \infty$ así:

$$\overline{\lim_{\delta \downarrow 0}} \frac{1}{g(\delta)} \max_{\substack{0 \leq s < t \leq 1 \\ t-s=\delta}} |W(t) - W(s)| \leq 1 + \epsilon,$$

dado que g es creciente en $(0,1/e]$ podemos reemplazar la condición $t - s = \delta$ por $t - s \leq \delta$ en la expresión anterior, luego haciendo tender $\theta \downarrow 0$ y $\epsilon \downarrow 0$ a lo largo de los racionales, tenemos:

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}}\frac{1}{g(\delta)}\max_{\substack{0\leq s<t\leq 1\\ t-s\leq\delta}}|W(t)-W(s)|\leq 1. \quad (c.s). \tag{2.22}$$

Finalmente con (2.12) y (2.22) obtenemos el resultado deseado. □

2.4 Representación.

En ésta parte presentamos dos algoritmos que podemos utilizar en Matlab para la representación del movimiento Browniano estándar:

- **Algoritmo 1**:

```
>T = 1; N = 500; dt = T/N;
>dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
>W = cumsum(dW);
>plot([0:dt:T],[0,W],'r-')
>xlabel('t','FontSize',16);
>ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
>title('Movimiento Browniano Estándar');
```

- **Algoritmo 2**

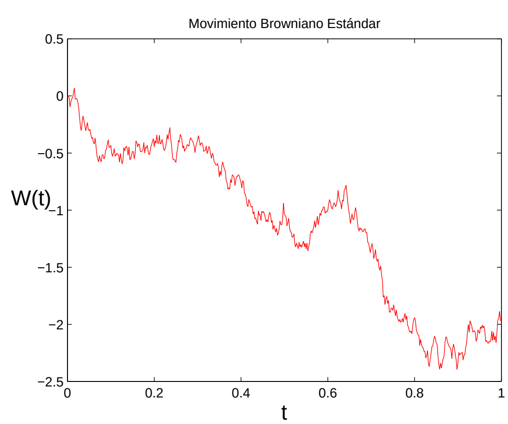
```
>T = 1; N = 500; dt = T/N;
>dW = zeros(1,N);
>W = zeros(1,N);
>dW(1) = sqrt(dt)*randn;
>W(1) = dW(1);
```

```
>for j = 2:N
> dW(j) = sqrt(dt)*randn;
> W(j) = W(j-1) + dW(j);
>end
>plot([0:dt:T],[0,W],'r-')
>xlabel('t','FontSize',16)
>ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

En ambos casos tomamos como ejemplo una partición del intervalo [0,1] de longitud $dt = \frac{1}{N}$. Luego en el primer algoritmo generamos primero los incrementos utilizando la independencia de los mismos y el hecho de que cada altura del movimiento Browniano la podemos escribir como:

$$W(t_i) = \sum_{j=1}^{i} (W(t_j) - W(t_{j-1})), \quad con\ i \geq 1,$$

donde $W(t_j) - W(t_{j-1}) \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$. En el segundo algoritmo utilizamos un rasonamiento similar, pero considerando ésta vez un ciclo para representar las alturas en función de los incrementos. Como podemos ver el primer caso resulta ser un poco más eficiente que el segundo ya que no utilizamos un ciclo. Sin embargo por cualquiera de los dos métodos obtenemos resultados similares al siguiente:



Capítulo 3

Hoja Browniana.

3.1 Procesos estocásticos en dos parámetros.

A continuación mencionaremos algunas definiciones que utilizaremos posteriormente.
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo respecto a la medida P y R^2_+ el cuadrante positivo del plano. Consideremos el espacio de medida (R^2_+,B(R^2_+),λ), donde λ es la medida de Lebesgue. Si $z, z' \in \mathrm{R}^2_+$, entonces z=(x_1, y_1), z'=(x_2, y_2) con x_1, x_2, y_1, y_2 $\in \mathrm{R}^2_+ \cup \{0\}$.
Utilizaremos el siguiente orden parcial en R^2_+:

$$''\prec'': \quad z \prec z' \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad x_1 \leq x_2 \quad y \quad y_1 \leq y_2.$$

Sean $z, z' \in \mathrm{R}^2_+$, z=(x_1, y_1), z'=(x_2, y_2) con $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$ denotaremos como R=$[x_1, x_2)$ $\times[y_1, y_2)$ y R_z=$\mathrm{R}_{(x_1,y_1)}$=$[0, x_1)\times[0, y_1)$.

Definición 3.1 *Sea* {$X(z)$, con z=$(x, y)$$\in$ R^2_+} un proceso estocástico de dos parámetros y R=$[x_1, x_2)\times[y_1, y_2) \subseteq \mathrm{R}^2_+$, ($0 \leq x_1 < x_2 < \infty$, $0 \leq y_1 < y_2 < \infty$), definimos sobre R^2_+ la $''X-medida''$ $X(\mathrm{R})$ *de* R como:

$$X(\mathrm{R}) = X(x_2, y_2) + X(x_1, y_1) - X(x_1, y_2) - X(x_2, y_1),$$

también conocido como *Incremento doble o incremento de X sobre* R.

3.2 Hoja Browniana.

A partir de la formalización matemática dada por Wiener en 1923 al movimiento Browniano, éste se convirtió en un área de investigación muy activa. Desde entonces, se han generado y se siguen generando elegantes e importantes descubrimientos relacionados con éste proceso estocástico, no solo en la matemática, sino en ciencias como la física y la química, entre otras.

A partir de dicha formalización, muchos investigadores a nivel mundial se concentraron en extender el movimiento Browniano a una medida en varias variables surgiendo así la llamada hoja Browniana la cual fue introducida por el estadístico Kitagawa en 1951, para realizar análisis de varianza en tiempo continuo.

Un conjunto separado de ideas motivan el estudio de la hoja Browniana algunas de ellas provienen del hecho de que este proceso es central para la teoría de integrales estocásticas multiparamétricas y es el ejemplo básico de una solución a ecuaciones parciales estocásticas de tipo hiperbólica perturbadas por un ruido blanco. La hoja Browniana también está conectada con el cálculo de Malliavin. Este proceso también permite una representación simple del proceso de Ornstein-Uhlenbeck sobre un espacio de Wiener. Además la hoja Browniana abre un amplio terreno de estudio en la teoría de potenciales.

Grandes investigadores como Pruit, Orey, Walsh entre otros, se encargaron de estudiar el comportamiento de las trayectorias de éste proceso, así como establecer un módulo de continuidad y una ley del logaritmo iterado las cuales permiten medir las oscilaciones de las trayectorias de la hoja. En lo que sigue daremos la definición de tan importante proceso, presentamos algunas de las propiedades que caracterizan sus trayectorias y daremos una prueba constructiva de su existencia.

Definición 3.2 Un proceso estocástico W=$\{W(z), z = (x, y) \in \mathrm{R}_{+}^{2}\}$ es llamado *un proceso* *de Wiener en dos parámetros, movimiento Browniano de dos parámetros u hoja Browniana* si éste satisface:

i. $W(\mathrm{R}) \in \mathcal{N}(0,\lambda(\mathrm{R}))$ para todo $\mathrm{R}=[x_1, x_2)\times[y_1, y_2)$, $\lambda(\mathrm{R})=(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$,

ii. $W(0,y)\equiv W(x,0)\equiv 0$ $(0 \leq x, y < \infty)$,

iii. $W(z)$ es un proceso de incrementos independientes, es decir: $W(R_1)$, $W(R_2)$,..., $W(R_n)$, (n=2,3,...) son variables aleatorias independientes si $R_1, R_2, \ldots, R_n$, son rectángulos disjuntos,

iv. $W(z;\omega)$ tiene trayectorias continuas en z con probabilidad uno.

A partir de (i)-(iii) obtenemos que la función de covarianza de una hoja Browniana o proceso de Wiener en dos parámetros $W(z)$ es:

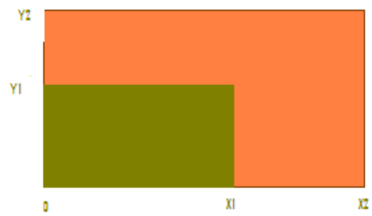
$$cov(W(z), W(z')) = E(W(z)W(z')) = (x_1 \wedge x_2)(y_1 \wedge y_2) = min(x_1, x_2)min(y_1, y_2), \quad (3.1)$$

donde $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$.

En efecto pues, sean $z, z' \in R^2_+$ con $z \prec z'$, entonces:

$$\begin{aligned} cov(W(z), W(z')) &= E(W(x_1, y_1)W(x_2, y_2)) \\ &= E[W(x_1, y_1)]E[W(x_2, y_2) - W(x_1, y_1)] + var[W(x_1, y_1)] \\ &= 0 + \lambda([0, x_1) \times [0, y_1)) \\ &= min(x_1, x_2)min(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Los rectángulos $[0, x_1) \times [0, y_1)$ y $[0, x_2) \times [0, y_2)$ los podemos ver en la siguiente figura, donde notamos la independencia de los incrementos de la hoja, pues trabajamos sobre regiones disjuntas de dichos rectángulos:



Es decir una hoja Browniana es un proceso gaussiano de dos parámetros $W(z)$ continuo, centrado con función de covarianza $min(x_1, x_2)min(y_1, y_2)$.

3.3 Propiedades.

A partir de la definición podemos obtener las siguientes propiedades de la hoja Browniana:

- W se anula sobre los ejes de coordenadas, es decir:

$$W(x, 0) = W(0, y) = 0 \ (c.s), \ con \ x, \ y \geq 0.$$

Para obtener una idea del comportamiento de las trayectorias de la hoja Browniana, veamos cómo es su restricción sobre varias curvas.

- Para algún $0 < x_0 < \infty$ fijo el proceso

$$\{x_0^{-1/2} W(x_0, y), \ 0 \leq y < \infty\},$$

  es la restricción de la hoja a una línea recta, y tal restricción es un movimiento Browniano de un parámetro, pues es un proceso gaussiano, con media cero y por (3.1) su función de covarianza, es $c_W(y_1, y_2) = x_0^{-1} E[W(x_0, y_1)W(x_0, y_2)] = x_0^{-1} x_0 (y_1 \wedge y_2) = (y_1 \wedge y_2)$. Con $0 \leq y_1 < y_2 < \infty$. Análogamente se tiene para $\{y_0^{-1/2} W(x, y_0)$, $0 \leq x < \infty\}$.

- También podemos considerar:

$$X(u) = W(u, 1-u), \quad con \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Este es un proceso gaussiano, centrado, que se anula en los tiempos 0 y 1, es decir

$$X(0) = X(1) = 0$$

con función de covarianza

$$cov(X(x), X(y)) = E[W(x, 1-x)W(y, 1-y)] = min(x, y) - xy.$$

Un proceso que satisface las condiciones anteriores se conoce como *puente Browniano.*

- A lo largo de la curva $xy = 1$ definimos

$$X(y) = W(e^y, e^{-y}).$$

El proceso $\{X(y), -\infty < y < \infty\}$ es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, es decir, un proceso gaussiano, estrictamente estacionario, con media cero, varianza uno y función de covarianza:

$$cov(X(x), X(y)) = E(W(e^x, e^{-x})W(e^y, e^{-y})) = e^{-|x-y|}$$

- Al aplicar una transformación de escala, inversión o traslación a una o a las dos coordenadas de la hoja Browniana, obtenemos otra hoja Browniana,
  - Escalamiento: A(x, y)=$\frac{1}{ab}W(a^2x, b^2y)$.
  - Inversión: C(x, y)=$xyW(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$, C$(x, y)$=$xW(\frac{1}{x}, y)$
  - Traslación: D(x, y)=$W(x_0 + x, y_0 + y)$-$W(x_0 + x, y_0)$-$W(x_0, y_0 + y)$+$W(x_0, y_0)$

En base a las propiedades de la hoja Browniana, podemos de manera análoga al movimiento Browniano obtener una definición equivalente de la hoja, que la presentaremos a continuación como un teorema, para así, demostrar formalmente la equivalencia entre las dos definiciones.

Teorema 3.1 Sea X=($X(s,t)$, $(s,t) \in \mathrm{R}^2_+$) un proceso estocástico de dos parámetros, entonces X es una hoja Browniana si y solo si

(i) X es un proceso gaussiano en dos variables.

(ii) $\mu_X(s,t)=0$ para todo $s,t \geq 0$.

(iii) $c_X((s_1,t_1),(s_2,t_2)) = min(s_1,s_2)\, min(t_1,t_2)$ para cada par (s_1,t_1), $(s_2,t_2) \in \mathrm{R}^2_+$, con $(s_1,t_1) \prec (s_2,t_2)$.

(iv) X tiene trayectorias continuas.

Observación: Cuando hablamos de un proceso gaussiano en dos variables, nos referimos a la extensión natural de la definición de un proceso gaussiano de un parámetro.

Demostración:

Supongamos primero que X satisface (i)-(iv), entonces,

- Sabemos por (ii) que $\mu_X((x,0)) = 0$ y además por (iii) $c_X((x,0),(x,0)) = var(X(x,0)) = 0$. Así por la proposición 1.1 se tiene que $X((x,0)) = 0$. Análogamente se tiene que $X((0,y)) = 0$.

- Sea R=$[x_1,x_2) \times [y_1,y_2)$, y utilizando la definición del incremento doble tenemos que:

$$X(R) = X([x_1,x_2) \times [y_1,y_2)) = X(x_2,y_2) + X(x_1,y_1) - X(x_1,y_2) - X(x_2,y_1),$$

luego por linealidad de la esperanza y (ii) se tiene que:

$$E[X(R)] = E[X(x_2, y_2) + X(x_1, y_1) - X(x_1, y_2) - X(x_2, y_1)] = 0, \tag{3.2}$$

además de la definición de varianza, 3.2, linealidad de la esperanza y (iii):

$$\begin{aligned}
var\ (X(R)) = E[X^2(R)] = E[X(x_2, y_2) + X(x_1, y_1) - X(x_1, y_2) - X(x_2, y_1)]^2 =& \\
=&E[X^2(x_2, y_2)] + E[X(x_2, y_2)X(x_1, y_1)] - E[X(x_2, y_2)X(x_1, y_2)] - E[X(x_2, y_2)X(x_2, y_1)] \\
&+E[X(x_1, y_1)X(x_2, y_2)] + E[X^2(x_1, y_1)] - E[X(x_1, y_1)X(x_1, y_2)] - E[X(x_1, y_1)X(x_2, y_1)] \\
&-E[X(x_2, y_2)X(x_1, y_2)] - E[X(x_1, y_1)X(x_1, y_2)] + E[X^2(x_1, y_2)] + E[X(x_2, y_1)X(x_1, y_2)] \\
&-E[X(x_2, y_2)X(x_2, y_1)] - E[X(x_1, y_1)X(x_2, y_1)] + E[X(x_1, y_2)X(x_2, y_1)] + E[X^2(x_2, y_1)] \\
=&(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\
=&\lambda(R). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Así por (i), (3.2) y (3.3) tenemos que $X(R) \sim \mathcal{N}(0, \lambda(R))$.

- Ahora consideremos R_1, R_2,..., R_n rectángulos tales que para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
R_i =& [x_{i-1}, x_i) \times [y_{i-1}, y_i), \\
R_j =& [x_{j-1}, x_j) \times [y_{j-1}, y_j),
\end{aligned}$$

considerando $(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1) \prec \ldots \prec (x_n, y_n)$. Luego por la definición del incremento doble tenemos que:

$$X(R_i) = X(x_i, y_i) + X(x_{i-1}, y_{i-1}) - X(x_{i-1}, y_i) - X(x_i, y_{i-1}), \tag{3.4}$$

$$X(R_j) = X(x_j, y_j) + X(x_{j-1}, y_{j-1}) - X(x_{j-1}, y_j) - X(x_j, y_{j-1}). \tag{3.5}$$

Como $X(R_1), \ldots, X(R_n)$ son variables aleatorias gaussianas, para ver la independencia de ellas es suficiente mostrar por la proposición 1.3 que para $i < j$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

la $cov(X(R_i), X(R_j)) = 0$. Lo cual es cierto pues utilizando (3.4), (3.5), linealidad de la esperanza y (iii) podemos obtener:

$$cov(X(R_i), X(R_j)){=}E[X(R_i)X(R_j)] - E[X(R_i)]E[X(R_j)] = E[X(R_i)X(R_j)] = 0,$$

análogamente se tiene si $i > j$. Con esto concluimos la primera implicación.

La otra parte de la demostración la obtenemos de manera análoga a la del teorema 2.1

3.4 Construcción.

El objetivo de ésta parte es dar una prueba constructiva de la existencia del movimiento Browniano en dos parámetros, basados en la existencia del movimiento Browniano de un parámetro. Para ello consideremos lo siguiente:

Sean $\{r_n\}$ una sucesión de números racionales diádicos positivos, $\{W_{r_n}(x)\}$ movimientos Brownianos de un parámetro independientes, con $x \in [0, \infty)$. Entonces consideramos:

i. $W(x, 0) = W_0(x) = 0$ y para todo entero no negativo k, definimos:

$$W(x, k) = W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_k(x), \; x \in [0, \infty). \tag{3.6}$$

Con ésta definición se tiene que $W(x, k)$ es:

- Normal por el teorema 1.1 ya que es la suma de movimientos Brownianos (gaussianos), de un parámetro e independientes.
- Es centrado por la linealidad de la esperanza y el hecho de que $\{W_{r_n}(x)\}$ son movimientos Brownianos de un parámetro, para todo $x \in [0, \infty)$.

- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ entonces por ser $\{W_{r_n}(x)\}$ movimientos Brownianos independientes y centrados; y por la linealidad de la esperanza, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&cov\,(W(x,k_1),W(x,k_2)) = E[(W(x,k_1)-E(W(x,k_1)))(W(x,k_2)-E(W(x,k_2)))]\\
&\quad = E[W(x,k_1)W(x,k_2)] = E[W_1^2(x)] + E[W_1(x)W_2(x)] + \cdots + E[W_1(x)W_{k_2}(x)] +\\
&\quad + E[W_2(x)W_1(x)] + E[W_2^2(x)] + \cdots + E[W_2(x)W_{k_2}(x)] +\\
&\quad \vdots\\
&\quad + E[W_{k_1}(x)W_1(x)] + E[W_{k_1}(x)W_2(x)] + \cdots + E[W_{k_1}^2(x)] + \cdots + E[W_{k_1}(x)W_{k_2}(x)]\\
&\quad = E[W_1^2(x)] + E[W_2^2(x)] + \cdots + E[W_{k_1}^2(x)]\\
&\quad = x + \cdots + x\\
&\quad = xk_1\\
&\quad = min(x,x)min(k_1,k_2).
\end{aligned}
$$

ii. Para los racionales de la forma $k + \frac{1}{2}$ con k entero no negativo definimos:

$$W\left(x, k+\frac{1}{2}\right) = \frac{W(x,k)+W(x,k+1)}{2} + \frac{W_{k+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{4}}, \tag{3.7}$$

- Normal por el teorema 1.1 ya que es la suma de movimientos Brownianos (gaussianos), de un parámetro e independientes.

- Es centrado por la linealidad de la esperanza y el hecho de que $\{W_{r_n}(x)\}$ son movimientos Brownianos en un parámetro, para todo $x \in [0,\infty)$.

- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ entonces por ser $\{W_{r_n}(x)\}$ movimientos Brownianos independientes y la linealidad de la esperanza, se tiene que:

$$E[W(x,k_1)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)] = E[W(x,k_1+1)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)] = E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)] = 0,$$

$$E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W(x,k_2)] = E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W(x,k_2+1)] = 0.$$

Así podemos obtener que:

$$\begin{aligned}
&cov\left(W\left(x,k_1+\frac{1}{2}\right),W\left(x,k_2+\frac{1}{2}\right)\right) = E\left[W\left(x,k_1+\frac{1}{2}\right)W\left(x,k_2+\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}E[W(x,k_1)W(x,k_2)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1)W(x,k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)]\\
&+ \frac{1}{4}E[W(x,k_1+1)W(x,k_2)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1+1)W(x,k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1+1)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)]\\
&+ \frac{1}{4}E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W(x,k_2)] + \frac{1}{4}E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W(x,k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W_{k_1+\frac{1}{2}}(x)W_{k_2+\frac{1}{2}}(x)]\\
&= \frac{1}{4}E[W(x,k_1)W(x,k_2)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1)W(x,k_2+1)] + \frac{1}{4}E[W(x,k_1+1)W(x,k_2)]\\
&+ \frac{1}{4}E[W(x,k_1+1)W(x,k_2+1)]\\
&= min(x,x)min\left(\left(k_1+\frac{1}{2}\right),\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

iii. Dada la construcción, se tiene de manera recursiva que hemos definido $W(x,k/2^n)$ para $k=1,2,\ldots$; y $n=1,2,\ldots,n_0$. Luego para $k=1,2,\ldots$, y $n=1+n_0$ definimos:

$$W\left(x,\frac{2k+1}{2^n}\right) = \frac{W\left(x,\frac{k}{2^{n_0}}\right)+W(x,\frac{k+1}{2^{n_0}})}{2} + \frac{W_{\frac{2k+1}{2^n}}(x)}{\sqrt{2^{n+1}}}.$$

Con ésta definición se tiene que $W\left(x,\frac{2k+1}{2^n}\right)$ satisface lo siguiente:

- Normal por el teorema 1.1 ya que es la suma de movimientos Brownianos (gaussianos), de un parámetro e independientes.
- Es centrado por la linealidad de la esperanza y el hecho de que $\{W_{r_n}(x)\}$ son movimientos Brownianos en un parámetro, para todo $x \in [0,\infty)$.
- Sea $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ entonces por ser $\{W_{r_n}(x)\}$ movimientos Brownianos independientes se tiene que:

$$E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]=E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]=0,$$
$$E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^{n_0}}}(x)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]=0,$$
$$E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^{n_0}}}(x)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]=E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^n}}(x)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]=0.$$

Luego por la linealidad de la esperanza y lo anterior podemos obtener que:

$$\begin{aligned}
cov\left(W\left(x,\frac{2k_1+1}{2^n}\right),W\left(x,\frac{2k_2+1}{2^n}\right)\right)&=E\left[W\left(x,\frac{2k_1+1}{2^n}\right)W\left(x,\frac{2k_2+1}{2^n}\right)\right]\\
=&\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]+\\
&+\frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^{n_0}}}(x)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{2^{n+1}}}E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^{n_0}}}(x)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2^{n+1}}E\left[W_{\frac{2k_1+1}{2^n}}(x)W_{\frac{2k_2+1}{2^n}}(x)\right]\\
=&\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2+1}{2^{n_0}}\right)\right]+\frac{1}{4}E\left[W\left(x,\frac{k_1+1}{2^{n_0}}\right)W\left(x,\frac{k_2}{2^{n_0}}\right)\right]\\
=&min(x,x)min\left(\left(\frac{2k_1+1}{2^n}\right),\left(\frac{2k_2+1}{2^n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Así por inducción hemos definido nuestro proceso que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema 3.1 para todo (x,r), donde $0\le x<\infty$ y r es un número racional diádico no negativo. Luego para un $0<y<\infty$ arbitrario, tenemos:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(y)}{2^k},$$

con $\varepsilon_0(y) = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon_k(y) = 0, 1$, para $k \in$N, definimos:

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \lim_{n\to\infty} W(x, y_n) \quad (c.s), \quad y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k(y)}{2^k} \\ &= W(x, \varepsilon_0(y)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (W(x, y_k) - W(x, y_{k-1})) \quad (c.s). \end{aligned}$$

Ahora bien, la existencia del límite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))$ se sigue del teorema de tres series de Kolmogorov. Para demostrarlo consideremos:

$$Y_k = W(x, y_k) - W(x, y_{k-1}),$$

así, E(Y_k)=0, luego por linealidad de la esperanza y la definición de varianza de la hoja Browniana que definimos a lo largo de los racionales diádicos no negativos en la segunda variable tenemos:

$$\begin{aligned} var(Y_k) &= var(W(x,y_k)) + var(W(x,y_{k-1})) - 2E(W(x,y_k)W(x,y_{k-1})) \\ &= \lambda((0,x] \times (0,y_k]) + \lambda((0,x] \times (0,y_{k-1}]) - 2min(x,x)min(y_k,y_{k-1}) \\ &= x(y_k - y_{k-1}), \quad con \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces, de lo anterior obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[Y_k] < \infty \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} var[Y_k] < \infty.$$

Así por el Teorema 1.3, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} Y_n$ converge casi seguramente, es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} W(x, y_k) - W(x, y_{k-1}) < \infty \quad (c.s).$$

Así $W(x,y) = \lim_{n\to\infty} W(x, y_n)$ está bien definido, ya que el límite existe. Ahora veamos que $W(x,y)$ converge uniformemente en y, para ello es suficiente probar que:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y) - W(x,y_r)| < \infty \quad (c.s), \quad y_r = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varepsilon_k(y)}{2^k}, \quad l^2 := [0,1] \times [0,1]. \tag{3.8}$$

Entonces veamos que (3.8) es cierto, para ello consideremos $K = 2^k$, $u_k = C\sqrt{2\log K}$, C=constante>1 con $k \in N$. Luego, como $W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}) \sim \mathcal{N}(0, x(y_k - y_{k-1}))$, es decir $W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}) \sim \sqrt{\frac{x}{2^k}}\mathcal{N}(0,1)$ y $(x,y) \in l^2$, tenemos utilizando la desigualdad del lema 1.1 y acotando que:

$$P\left[\sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y_k) - W(x,y_{k-1})| \geq u_k \frac{1}{\sqrt{K}}\right] \leq P\left[|\mathcal{N}| \geq u_k\right] \leq 2Ke^{-u_k^2/2}.$$

Luego aplicando un razonamiento similar al anterior y la continuidad de la medida:

$$P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y_k) - W(x,y_{k-1})| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\sqrt{K}}\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2Ke^{-u_k^2/2}.$$

Ahora sustituyendo el valor de u_k y llamando $L = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\log 2^k}{2^k}}$ tenemos:

$$P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y_k) - W(x,y_{k-1})| \geq LC\right] \leq \frac{2}{2^{(C^2-1)} - 1}.$$

Como $y_k \to y$ podemos acotar:

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{r=0}^{\infty} \sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y) - W(x,y_r)| \geq LC\right] &\leq P\left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y_k) - W(x,y_{k-1})| \geq LC\right] \\ &\leq \frac{2}{2^{(C^2-1)} - 1} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad C \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos,

$$\sup_{(x,y)\in l^2} |W(x,y) - W(x,y_r)| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad r \longrightarrow \infty, \quad (c.s).$$

es decir,

$$|W(x,y) - W(x,y_r)| \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad r \longrightarrow \infty, \quad \textit{para todo}\ (x,y) \in l^2 \quad (c.s).$$

Por lo tanto $W(x,y)$ converge uniformemente en y con probabilidad 1.

Ahora veamos que el proceso $\{W(x,y) : (x,y) \in \mathbf{R}^2_+\}$ con:

$$W(x,y) = W(x, \varepsilon_0(y)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (W(x,y_k) - W(x,y_{k-1})),$$

es una hoja Browniana, pues:

- $W(x,y)$ es gaussiano por el teorema 1.1, pues anteriormente demostramos que $W(x,r)$ con $0 \leq x \leq 1$ y r un racional diádico no negativo es un proceso construido a partir de movimientos Brownianos de un parámetro independientes y que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema 3.1, así estamos sumando variables aleatorias normales, centradas e independientes y que por lo tanto convergen a una variable aleatoria normal.

- $W(x,y)$ es centrado, utilizando la linealidad de la esperanza, el teorema de convergencia monótona y el hecho de que $W(x,r)$ con $0 \leq x \leq 1$ y r un racional diádico no negativo es un proceso construido a partir de movimientos Brownianos de un parámetro independientes y que satisface las condiciones (i)-(iii) del teorema3.1.

- Función de covarianza. Sean $y, z \in [0,\infty)$, tales que $y \leq z < \infty$ con $x \in [0,\infty)$ fijo, entonces por la independencia tenemos:

$$E[W(x,\varepsilon_0(y))(W(x,z_j) - W(x,z_{j-1}))] = 0,$$

$$E[(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))(W(x,z_j) - W(x,z_{j-1}))] = 0,$$

donde $k, j \geq 1$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned} cov\,(\,W(x,y), W(x,z)) &= E[W(x,y)W(x,z)] - E[W(x,y)]E[W(x,z)] \\ &= E[W(x,y)W(x,z)] \\ &= E\Bigg[\Bigg(W(x,\varepsilon_0(y)) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))\Bigg) \\ &\quad \Bigg(W(x,\varepsilon_0(z)) + \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(W(x,z_j) - W(x,z_{j-1}))\Bigg)\Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E[W(x,\varepsilon_0(y))W(x,\varepsilon_0(z))] + \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} E[W(x,\varepsilon_0(y))(W(x,z_j) - W(x,z_{j-1}))] + \\
&+ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E[W(x,\varepsilon_0(z))(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))] + \\
&+ \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))(W(x,z_j) - W(x,z_{j-1}))] \\
&= min(x,x)(\varepsilon_0(y),\varepsilon_0(z)) + \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n} E[W(x,\varepsilon_0(z))(W(x,y_k) - W(x,y_{k-1}))] \\
&= x\varepsilon_0(y) + x(y - \varepsilon_0(y)) \\
&= min(x,x)min(y,z).
\end{aligned}
$$

- El resto de la sección lo utilizaremos para demostrar la continuidad de las trayectorias de proceso $W(x,y)$ que hemos definido.

El siguiente lema nos permite ver que para casi todo ω, $W(x,y)$ es continuo en y $(0 \leq y \leq 1)$ con el usual módulo de continuidad $(2h\log(1/h))^{1/2}$ para todo $x \in [0,1]$.

Lema 3.1 Consideremos $g : (0,1] \to (0,\infty)$, $g(\delta) := \sqrt{2\delta\log(1/\delta)}, \delta > 0$,

$$
P\left[\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}} \sup_{0\leq x\leq 1} \max_{\substack{0\leq s<t\leq 1\\ t-s\leq\delta}} \frac{1}{g(\delta)} |W(x,t) - W(x,s)| = 1\right] = 1.
$$

<u>Demostración</u>: Este lema se demuestra de manera análoga la teorema 2.2 basándose en las propiedades del proceso, por lo cual omitiremos ésta vez la demostración. □

Ahora bien, el próximo lema nos permitirá obtener los resultados posteriores.

Lema 3.2 Sean $W_1(x)$, $W_2(x)$,..., una sucesión de movimientos Brownianos independientes. Entonces se tiene que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} \frac{|W_n(x)|}{\log n} = 0, \quad (c.s).$$

<u>Demostración:</u> Sabemos que por continuidad del movimiento Browniano, para cada $n \geq 1$ podemos escribir $|W_n(x)| = \lim_{h\longrightarrow 0} |W_n(x+h) - W_n(h)|$, luego por ser $\{W_n(x)\}_{n\geq 1}$ movimientos Brownianos independientes se tiene por el teorema 2.2 que:

$$0 \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |W_n(x)| \leq \lim_{h\longrightarrow 0} \sqrt{2h\log(1/h)}, \quad (c.s), \quad \forall \quad n \geq 1,$$

y como $\lim_{h\longrightarrow 0} \sqrt{2h\log(1/h)} = 0$, entonces,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sup_{0\leq x\leq 1} |W_n(x)|}{\log n} = 0, \quad (c.s),$$

con lo cual se demuestra el lema 3.2. □

Ahora bien, el siguiente lema nos permite ver que para casi todo ω, $W(x,y)$ es continuo en x e y, con $x \in [0,1]$ e y sobre los racionales diádicos de $(0,1]$.

Lema 3.3 Se tiene que:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{0\leq s\leq h} \sup_{\substack{x\in[0,1] \\ y\in I_r}} |W(x+s,y) - W(x,y)| = 0, \quad (c.s),$$

donde I_r es el conjunto de los racionales diádicos en (0,1].

<u>Demostración:</u> Este lema es una consecuencia de la construcción hecha para $W(x,y)$ y del lema 3.2, ya que:

$$W(x,y) = \lim_{n\longrightarrow\infty} W(x, \frac{[2^n y]}{2^n}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} W(x,y_n),$$

con $\quad y_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon_j(y)}{2^j}$.

Así podemos escribir,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \longrightarrow 0} \quad \sup_{0 \leq s \leq h} \quad \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in I_r}} |W(x+s,y) - W(x,y)| = \\
= \quad & \lim_{h \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq h} \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |W(x+s,y_n) - W(x,y_n)| \\
= \quad & \lim_{h \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq h} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sup_{0 \leq x \leq 1} |W(x+s,y_n) - W(x,y_n)|}{\log y_n} \lim_{n \longrightarrow \infty} \log y_n
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon_j(y)}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\leq \quad & \lim_{h \longrightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq h} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sup_{0 \leq x \leq 1} |W(x+s,y_n) - W(x,y_n)|}{\log(1/2^n)} . \lim_{n \longrightarrow \infty} \log y_n \\
= \quad & -0. \lim_{n \longrightarrow \infty} \log y_n = 0 \log y = 0 \quad (c.s).
\end{aligned}$$

con lo cual se demuestra el lema 3.3. □

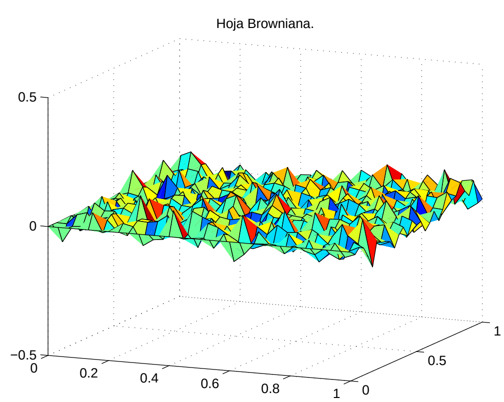
Los lemas 3.1 y 3.3 muestran que el proceso que hemos construido $W(x,y)$ es continuo con probabilidad 1. Por lo tanto $W(x,y)$ es una hoja Browniana. □

3.5 Representación.

Ahora representaremos en Matlab, la hoja Browniana. Claramente si pensamos en la hoja Browniana como una función de dos variables entonces tenemos que la superficie que ella define es extremadamente irregular y su restricción a alguna curva sería semejante a las trayectorias de un movimiento Browniano. Para representar la hoja consideramos el siguiente algoritmo:

```
T=1; N=30; dt=T/N;
[X,Y] = meshgrid(0:dt:1, 0:dt:1);
p=size(X); l=size(Y);
W=sqrt(dt*dt).*randn(p(1,1),l(1,2));
W(1,:)=0; W(:,1)=0;
surf(X,Y,W)
axis([0 1 0 1 -0.5 0.5])
title('Hoja Browniana.')
```

Donde definimos primero los parámetros, creamos un mallado en el plano para obtener los rectángulos independientes y luego generamos las variables aleatorias aplicadas a éstas regiones, que satisfacen la condición $W(\mathrm{R}) \sim \mathcal{N}(0, \lambda(\mathrm{R}))$ con R=$[x_1, x_2) \times [y_1, y_2)$, más las condiciones restantes de la definición 3.2. Así obtenemos:



3.6 Aplicaciones de la hoja Browniana.

En ésta parte mencionaremos algunas áreas de estudio donde se aplica la hoja Browniana.

- En áreas del análisis estocástico, como por ejemplo en el estudio de espacios de Wiener y en el cálculo de Malliavin, la hoja Browniana proporciona una representación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck sobre el espacio de Wiener como:

$$X_t(s) = e^{-t}W(s, e^{2t}), \quad s \geq 0, -\infty < t < \infty.$$

  donde ésta representación resulta ser más efectiva en el estudio de los procesos de Malliavin. Para obtener más información el lector puede consultar [3].

- La hoja Browniana es central en la teoría de integrales estocásticas multiparamétricas y es el ejemplo básico de una solución de una ecuación diferencial parcial estocástica de tipo hiperbólica perturbada por un ruido blanco de la forma:

$$\frac{\partial^2 W(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \dot{\eta}(t_1, t_2),$$

  donde $\dot{\eta}$ denota un ruido blanco de dos parámetros, con las condiciones iniciales $W(t_1, 0) = W(0, t_2) = 0$, para todo $t_1 \geq 0$ y $t_2 \geq 0$. Más información la podemos encontrar en [8].

- En estadística bivariada se hace uso la hoja Browniana, por ejemplo consideremos $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y que son uniformemente distribuidas sobre $[0, 1] \times [0, 1]$. Sea $F_n(t_1, t_2)$ el cual denota los números enteros $i \in \{1, \ldots n\}$ tal que $X_i \in [0, t_1] \times [0, t_2]$. Se puede mostrar que:

$$\frac{F_n(t_1, t_2) - nt_1t_2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathbf{W}(t_1, t_2).$$

  Donde $\mathbf{W}(t_1, t_2) = W(t_1, t_2) - t_1t_2W(1, 1)$. El proceso $(\mathbf{W}(t), t \in [0, 1] \times [0, 1])$ es conocido como pinned Brownian sheet y es análogo al puente Browniano de un parámetro, para más información el lector puede consultar [6].

Apéndice

Lema 3.1 *Sean $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $C > 1$, $K = 2^k, u_k = C\sqrt{2\log 2^k}$ y W un proceso estocástico definido sobre los racionales diádicos no negativos, entonces:*

$$P\left[\left|\sqrt{K}W\left(\frac{1}{K}\right)\right| \geq u_k\right] \leq 2Ke^{\frac{-u_k^2}{2}}.$$

<u>Demostración:</u>

Para todo $k \geq 1$ sabemos que $2^k \geq 2$, de aquí :

$$\sqrt{2\log 2^k} \geq \sqrt{2\log 2}$$

como $C > 1$ entonces $\sqrt{2\pi}C > \sqrt{2\pi}$, así $\sqrt{2\pi}C\sqrt{2\log 2} > \sqrt{2\pi 2\log 2}$, de donde

$$\sqrt{2\pi}\ C\sqrt{2\log 2^k}\ \geq\ \sqrt{2\pi}\ C\sqrt{2\log 2}\ >\ \sqrt{2\pi 2\log 2} > 1,$$

así

$$\frac{2e^{-u_k^2/2}}{\sqrt{2\pi}\ u_k} = \frac{2e^{-u_k^2/2}}{\sqrt{2\pi}\ C\sqrt{2\log 2^k}} < 2e^{-u_k^2/2} \leq 2^{k+1}e^{-u_k^2/2}.$$

Entonces por la desigualdad (1.1) de la normal y utilizando lo anterior tenemos:

$$P\left[\left|\sqrt{K}W\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \geq u_k\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_k}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,u_k}e^{-u_k^2/2} < 2^{k+1}e^{-u_k^2/2} = 2Ke^{-u_k^2/2}$$

que era lo que se quería demostrar. $\square$

Lema 3.2 *Sean i, j, tales que $0 < i < j \leq 2^n$, $0 < \theta < 1$, $k = j - i \leq 2^{n\theta}$, n natural y W un proceso estocástico definido sobre los racionales diádicos no negativos, entonces:*

$$P\left[\frac{\left|W\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|}{\sqrt{k/2^n}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)}\right] \leq \frac{Ctte}{\sqrt{n}}(k2^{-n})^{(1+\epsilon)^2}, \quad donde\, Ctte > 1.$$

Demostración:

Llamemos

$$x = (1+\epsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)}.$$

Utilizando la desigualdad (1.1) de la normal y simplificando, resulta que:

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\left|W\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|}{\sqrt{k/2^n}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2\log\left(\frac{1}{k2^{-n}}\right)}\right] &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\epsilon)\sqrt{n\log(2)-\log(k)}} \end{aligned}$$

y utilizando el hecho de que $k = j - i \leq 2^{\theta n}$ y acotando obtenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{n\log 2 - \log k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n(1-\theta)\log 2}}$$

considerando la desigualdad anterior y llamando $Ctte = \frac{1}{(1+\epsilon)\sqrt{\pi(1-\theta)\log(2)}}$ se tiene la desigualdad deseada. □

Lema 3.3 *Si existe un evento $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$, $P(\Omega_\theta)$=1, y una variable aleatoria entera N_θ tal que:*

$$2^{-(1-\theta)N_\theta(\omega)} \leq \frac{1}{e},\ para\ todo\ \omega \in \Omega_\theta \tag{3.9}$$

y

$$\max_{\substack{0<i<j\leq 2^n \\ k=j-i\leq 2^{n\theta}}} \frac{\left|W\left(\frac{j}{2^n},\omega\right) - W\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right|}{g(k/2^n)} < (1+\epsilon) \quad con\ n \geq N_\theta,\ \omega \in \Omega_\theta, \tag{3.10}$$

entonces para cada $\omega \in \Omega_\theta$ *y* $n \geq N_\theta$*, la desigualdad:*

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq (1+\epsilon)\left[2\sum_{j=n+1}^{\infty} g(2^{-j}) + g(t-s)\right] \tag{3.11}$$

es válida para todo par (s,t) *de racionales diádicos que satisfagan* $0 < t-s < 2^{-n(1-\theta)}$.

Demostración:

Consideremos el conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ *de racionales diádicos en [0,1], con* $D_n = \{k2^{-n}, k = 0,1,\ldots,2^n\}$ *y veamos que para cada* $m \geq n \geq N_\theta$ *se satisface que:*

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq (1+\epsilon)\left[2\sum_{j=n+1}^{m} g(2^{-j}) + g(t-s)\right]. \tag{3.12}$$

Procedamos por inducción:

Para $m = n+1$*, tenemos por (3.9) con* $t = (j/2^m), s = (i/2^m)$ *y* $0 < i < j < 2^m$ *que:*

$$\max|W(t,\omega) - W(s,\omega)| < (1+\epsilon)g(t-s)$$

con $t < s < 1$ *y* $t - s \leq 2^{-m(1-\theta)}$.

Así por propiedad del máximo, acotando y usando que $m \geq n$ *tenemos*

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq (1+\epsilon)\left[2\sum_{j=n+1}^{m} g(2^{-j}) + g(t-s)\right]$$

con $0 < t-s \leq 2^{-n(1-\theta)}$*. Así hemos probado que (3.12) es válida para* $m = n+1$.

Ahora supongamos que (3.12) se satisface para $m = n+1,\ldots,M-1$*, y consideremos* $s < t$ *con* $s,t \in D_M$*,* $0 < t-s < 2^{-n(1-\theta)}$ *y además los números:* t^1*=max{*$u \in D_M : u \leq t$*} y* s^1*=min{*$u \in D_{M-1} : u \geq s$*}. Luego* t^1 *y* s^1 *satisfacen las siguientes relaciones:*

$$s \leq s^1 \leq t^1 \leq t \quad , \quad s^1 - s \leq 2^{-M} \quad , \quad t^1 - t \leq 2^{-M},$$

y gracias a las consideraciones de que ($m \geq n \geq N_\theta$), ($0 < t - s < 2^{-n(1-\theta)}$) y (3.9)

$$0 \leq t^1 - s^1 \leq t - s < 2^{-n(1-\theta)} \leq \frac{1}{e}.$$

Así por la suposición de la inducción tenemos que:

$$\left| W(t^1, \omega) - W(s^1, \omega) \right| \leq (1+\epsilon) \left[2 \sum_{j=n+1}^{M-1} g(2^{-j}) + g(t^1 - s^1) \right], \tag{3.13}$$

y además por (3.10) con $s = i/2^M$ y $s^1 = j/2^{M-1}$ se tiene que:

$$\left| W(s^1, \omega) - W(s, \omega) \right| \leq (1+\epsilon) g(2^{-M}) \quad y \quad \left| W(t^1, \omega) - W(t, \omega) \right| \leq (1+\epsilon) g(2^{-M}). \tag{3.14}$$

Ya que g es creciente sabemos:

$$g(t^1 - s^1) \leq g(t - s). \tag{3.15}$$

Luego utilizando la desigualdad triangular podemos escribir:

$$|W(t) - W(s)| \leq \left| W(t) - W(t^1) \right| + \left| W(s) - W(s^1) \right| + \left| .W(t^1) - W(s^1) \right| \tag{3.16}$$

Entonces de (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) tenemos:

$$|W(t) - W(s)| \leq (1+\epsilon) \left[\sum_{j=n+1}^{M} g(2^{-j}) + g(t-s) \right].$$

Con lo cual concluimos que (3.12) se satisface para $m = M$. Por lo tanto, hemos demostrado (3.11), es decir, que:

$$|W(t) - W(s)| \leq (1+\epsilon) \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} g(2^{-j}) + g(t-s) \right],$$

es válida para todo par (s,t) de racionales diádicos que satisfagan $0 < t - s < 2^{-n(1-\theta)}$. □

Bibliografía

[1] KARATZAS I., SHREVE S. Elementary Stochastic Calculus with finance in view. (1991)

[2] KRYLOV N. Introduction to the Theory of Random Processes. (2000).

[3] MEYER P.A . (1982): Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sém. de Probabilités XVI 1980-81. Lect. Notes in Math. vol.920, pp.95-133. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[4] MIKOSCH T. Elementary Stochastic Calculus with finance in view. (1998).

[5] OKSENDAL B. Stochastic Differential Equations. An Introducción with Applications, Fifth Edition, Corrected Printing. Springer - Verlag, Heidelberg New York.

[6] PYKE R. (1984): Asymptotic results for empirical and partial sum processes: A review. Can. J. Statist. 12, 241-264.

[7] RESNICK S. A Probability Path. (1999)

[8] WALSH J.B. (1981), An introduction to stochastic partial differential equations, École de Prob. de St-Flour XIV, 1984, Lect. Notes in Math. 1180. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.