



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Solución del Problema de Elasticidad Plana mediante el uso del Método de Elemento Frontera

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Witnney Castillo**. para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dra. Mariela Castillo.

Caracas, Venezuela

Julio de 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Solución del Problema de Elasticidad mediante el uso del Método de Elemento Frontera**”, presentado por el **Br. Witnney Castillo**, titular de la Cédula de Identidad **17.100.199**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Profa.: Mariela Castillo
Tutor

Profa.: Maira Valera
Jurado

Profa.: Carmen Da Silva
Jurado

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo encontrar la solución de algunos problemas de elasticidad plana, aplicando el Método de Elemento Frontera. Además, se estudia la convergencia del método y la eficiencia de usar como elementos de discretización, elementos rectos de un nodo y curvos de tres nodos conocidos como, elementos constantes y cuadráticos, respectivamente, en un sistema global de coordenadas que luego serán transformadas a un sistema local. Para realizar este estudio era necesario tener una base teórica donde se muestran las ecuaciones básicas para problemas de elasticidad plana, se explica el Método de Elemento Frontera y los principales elementos de discretización. Se desarrollo y se aplicó un algoritmo en FORTRAN, para obtener resultados numéricos a tres ejemplos que se resolvieron aplicando el método. Los resultados numéricos son analizados y comparados con las soluciones analíticas, para saber que tan eficiente es el uso de los elementos constantes y cuadráticos como, elementos de discretización. De este análisis se deduce que, el método converge siempre que, se utilicen los elementos cuadráticos como elementos de discretización, ya que, estos se emplean sin importar la geometría o característica del problema.

Dedicatoria

Este Trabajo Especial de Grado va dedicado a la mujer que me dió su apoyo incondicional para culminar mis estudios con éxito, esa mujer que con unas pocas palabras, una mirada, un abrazo me daba fuerzas para continuar cuando pensaba desistir y abandonar todo. Este trabajo te lo dedico a ti máma, gracias por ser quien eres, por darme la vida y por haber hecho de mí la persona que soy hoy en día.

Agradecimiento

A **Dios** por darme la fortaleza que necesitaba para continuar.

A **La Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela** por brindarme un espacio educativo apto para desenvolverme durante toda mi formación académica.

A **la Escuela de Matemática** por tener personal capacitado y dispuesto a seguir formando buenos profesionales.

A una persona a la cual le tengo aprecio, le guardo respeto y la considero como un ejemplo a seguir la **Dra. Mariela Castillo** mi tutora por haberme permitido trabajar con ella como su tesista para realizar este trabajo.

A **Los Profesores** que formaron parte de este recorrido y contribuyeron a mi formación académica.

A **mi familia** por apoyarme y estar siempre conmigo.

A **mis compañeros y amigos** que estuvieron conmigo y me acompañaron durante todo este recorrido y paso por la universidad.

Índice general

Introducción	1
Preliminares	3
1 Nociones Básicas de Elasticidad	5
1.1 Notación Indicial	5
1.2 Estudio de las tensiones	6
1.3 Estudio de las deformaciones	12
1.4 Relaciones Constitutivas	15
2 Método de Elemento Frontera.	19
2.1 Antecedentes	19
2.2 Formulación Integral de Frontera	21
2.3 Identidad Somigliana	24
2.4 Solución Fundamental	30
2.5 Formulación del Método Numérico	35
3 Aplicación del método Numérico	43
3.1 Lenguaje de Programación FORTRAN	43
3.2 RUTINAS y SUBRUTINAS de los códigos usados en FORTRAN para resolver los problemas de elasticidad.	45
3.2.1 Código para calcular los Problemas de Elasticidad usando Elementos Constantes (ELCONBE)	45
3.2.1.1 Programa Principal	45
3.2.1.2 Subrutina INPUTEC	47
3.2.1.3 Subrutina GHMATEC	47
3.2.1.4 Subrutina EXTINEC	48

3.2.1.5	Subrutina LOCINEC	48
3.2.1.6	Subrutina SLNPD	48
3.2.1.7	Subrutina INTEREC	48
3.2.1.8	Subrutina SIGMAEC	49
3.2.2	Código para calcular los Problemas de Elasticidad usando Elementos Cuadráticos(ELQUABE)	50
3.2.2.1	Programa Principal	50
3.2.2.2	Subrutina INPUTEQ	51
3.2.2.3	Subrutina GHMATEQ	51
3.2.2.4	Subrutina EXTINEQ	52
3.2.2.5	Subrutina LOCINEQ	52
3.2.2.6	Subrutina SLNPD	52
3.2.2.7	Subrutina INTEREQ	52
3.2.2.8	Subrutina SIGMAEQ	53
3.2.2.9	Subrutina OUTPTEQ	53
3.3	Ejemplos	54
Conclusiones y Recomendaciones		67
Bibliografía		69

Introducción

El hombre en su constante necesidad de conocer y entender el por qué de los fenómenos naturales que lo rodean, ha impulsado el desarrollo de la ciencia. Es por ello que los investigadores han desarrollado diferentes métodos a los tradicionales para encontrar soluciones a estas interrogantes. Así pues, es como surgen los avances en muchos problemas de elasticidad. El comportamiento de un cuerpo elástico en el cual actúan ciertas fuerzas, depende de las características de los materiales del que está compuesto el cuerpo. Dado la existencia de diferentes tipos de materiales se han establecido una gran cantidad de modelos que intenta explicar el comportamiento de los cuerpos. Si las tensiones del cuerpo dependen de las deformaciones, sólo las deformaciones o las velocidades de deformación se tomarán en cuenta para dichos modelos. Los modelos matemáticos que resuelven este tipo de problemas son conocidos como problemas de valor de frontera, donde las restricciones constituyen sólo algunos de los parámetros establecidos sobre la frontera. Estos problemas nos llevan a describir el sistema a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales que son equivalentes a ecuaciones integrales. Estas ecuaciones tienen ciertas particularidades, con las cuales se hace difícil obtener una solución analítica, debido a esto es que muchos investigadores desarrollaron diferentes métodos numéricos para resolver estas expresiones.

Para encontrar soluciones numéricas a los problemas de elasticidad mediante el método numérico que se va a emplear, se debe calcular la ecuación integral que representan las ecuaciones diferenciales de Navier Stock propuesta originalmente por Somigliana (1886)[1]. Esta ecuación es la base del método directo de integrales de frontera. El estudio de las ecuaciones de frontera fue encabezado por Fredholm (1903)[2]. Los primeros intentos para resolver estas ecuaciones integrales usando una técnica numérica son relativamente recientes y muy posteriores al inicio de la era de las computadoras. La formulación del elemento frontera para elasticidad fue presentada por Rizzo en 1967 [3] siguiendo el trabajo de Jaswon[4]. Esta formulación fue extendida a elasticidad dinámica por Cruse y Rizzo [5] y Cruse [6].

Hoy en día existen muchos métodos para encontrar las soluciones a los problemas de este tipo. Entre los métodos que se emplean con mayor frecuencia están los métodos numéricos. Dentro de la primera generación de estos métodos se encuentran el *Método de las Diferencias Finitas* y el *Método de Elementos Finitos*. Entre sus ventajas está la factibilidad de poder ser aplicados a cualquier sistema de ecuaciones diferenciales, sin embargo su aspecto más débil es que conceptualmente un conjunto de esquemas de discretización inevitablemente conduce a grandes cantidades de elementos finitos, en donde las variables de solución no varían continuamente y muestran discontinuidades no reales en valores entre elementos contiguos. En los últimos 20 años aparece la segunda generación de métodos numéricos, en principio llamado: Métodos de Paneles, Métodos de Ecuaciones Integrales de Frontera, el cual definitivamente en 1975 obtuvo el nombre dado por P. K. Barnerjee y R. Butterfield Método de Elementos Frontera.

El Método de Elemento Frontera (conocido como **BEM** por sus siglas en inglés), surge como una poderosa alternativa en la resolución de problemas en donde existan concentración de fuerzas o en donde los dominios se extiendan hasta el infinito. La característica más importante del **BEM** es que sólo requiere de la discretización de la superficie y no de la geometría del problema. El método arroja mejores aproximaciones a la hora de trabajar o analizar problemas de concentración de fuerzas, a diferencia del Método de Elementos Finitos, ya que para este método es conveniente usar mallas uniformes que no permite ajustar la geometría del problema en forma adecuada.

Debido a la precisión del método, en este trabajo expondremos los resultados obtenidos de la aplicación del método de elemento frontera para problemas de elasticidad usando como elementos de discretización los elementos constantes y cuadráticos, así como la convergencia y eficiencia del **BEM**. A pesar de los avances logrados ningún autor muestra tener considerada la posibilidad de un algoritmo general único para resolver todos los problemas prácticos basados en el **BEM**.

Preliminares

Teorema 0.1 (Teorema de la Divergencia). Sea F un campo vectorial de clase C^1 en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F d\Omega = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} d\Omega,$$

siendo $\partial\Omega$ la superficie regular cerrada, frontera de Ω .

Definición 0.2 (Espacios Normados). En un espacio lineal podemos asignar a cada elemento x la noción de longitud por medio del número real $\|x\|$ que es llamado norma de x . En particular, la norma es una función de valor real definida en un espacio lineal $\mathbb{E}$ que satisface las siguientes condiciones o axiomas:

1. $\|x\| \geq 0$, con la particularidad de que $\|x\| = 0$ sólo si $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, donde α es un número real.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in \mathbb{E}$.

Con $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ (espacio de vectores n -dimensional) tenemos varias normas denominadas *normas-p*. Sea $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, entonces definamos las siguientes normas:

1. **norma-1:** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
2. **norma-2:** $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
3. **norma-p:** $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$
4. **norma- ∞ :** $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

No es complicado verificar que las normas anteriores efectivamente satisfacen las propiedades 1, 2 y 3 en la definición de norma. Para cuantificar la precisión de la aproximación se puede considerar un error absoluto y relativo en $\| \cdot \|_2$ de la siguiente manera:

$$\text{error absoluto} : \| \tilde{x} - x \|,$$

$$\text{error relativo} : \frac{\| \tilde{x} - x \|}{\| x \|},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada del problema y x la solución exacta. Consideraremos el error relativo, ya que en el análisis numérico es preferible cantidades relativas para cuantificar errores. Al multiplicar el error relativo por 100 se obtiene el error porcentual, es decir

$$\text{error porcentual} : 100 \cdot \frac{\| \tilde{x} - x \|}{\| x \|}.$$

Capítulo 1

Nociones Básicas de Elasticidad

La forma que toman los cuerpos depende de las acciones o tensiones que se puedan ejercer sobre ellos. Todos los cuerpos sólidos poseen una forma estable, reaccionando contra las fuerzas deformadoras o tensiones, recuperando la forma primitiva después de la acción de estas fuerzas (cuerpos elásticos) o bien no recuperándola (cuerpos inelásticos).

El objetivo de este capítulo, es mostrar una ecuación principal que nos ayude y sirva de base para resolver el problema de un material elástico que es modelado a través de las ecuaciones de elasticidad lineal. Presentaremos la notación indicial que se usará en reiteradas ocasiones en los planteamientos de muchas ecuaciones. Luego, daremos algunas definiciones que serán de gran utilidad para formular el modelo elástico. Para finalizar se mostrará la ecuación de Navier Stoke, la representación integral asociada a dicha ecuación y la solución fundamental para estos problemas de elasticidad.

1.1 Notación Indicial

Se entiende por notación indicial a la forma que se tiene de representar a un conjunto de números. Un índice es aquella letra minúscula o número que aparece como subíndice. Un subíndice es la letra o número que se coloca a la parte derecha e inferior de un símbolo matemático. Consideraremos que los índices tomarán los siguientes valores: 1, 2 y 3. Las coordenadas de un punto en $x \in \mathbb{R}^n$, en particular para $n = 3$ se representan como: x_1 , x_2 y x_3 , con la notación indicial esta coordenada se escribe: x_i , donde i toma los valores 1, 2 y 3.

En la notación indicial, vamos a considerar la divergencia de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$,

$\nabla \cdot U = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$ como $\nabla \cdot U = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$, donde i es un índice repetido. Además, se usa una coma para indicar derivadas, como por ejemplo en la expresión: $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, se escribe $U_{i,j}$ en donde el índice i es la componente en U , la coma $(,)$ indica derivadas y j corresponde al eje coordenado que se está considerando.

1.2 Estudio de las tensiones

Con el propósito de estudiar el comportamiento de un cuerpo elástico se requiere analizar los estados de tensión, que actúan en un dominio sometido a fuerzas. Estas fuerzas o tensiones pueden ser de dos tipos: tensiones de volumen o de superficie. Las tensiones de volumen actúan sin que exista ningún contacto con otros cuerpos, mientras que las tensiones de superficie se producen precisamente por el contacto físico entre otros cuerpos.

Definición de Tensión:

Se denomina tensión a la fuerza por unidad de área en el entorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo. En la Figura 1.1 podemos observar como actúa una fuerza F sobre un punto Q que se encuentra alrededor de una pequeña área ΔA en un plano, $\vec{n}$ es el vector normal exterior a la superficie. Esta fuerza genera el vector de tensión T .

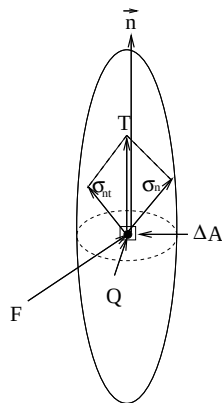


Figura 1.1: Tensiones en un punto Q.

El esfuerzo puede ser definido como el valor límite de la fuerza por unidad de área, cuando ésta tiende a cero. Sea p el esfuerzo, entonces:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Dependiendo de la orientación de un plano, el vector tensión puede no ser necesariamente perpendicular a ese plano, es decir, paralelo al vector $\vec{n}$, y puede descomponerse en dos vectores: un componente normal al plano, llamado *tensión normal* σ_n , y otra componente perpendicular a σ_n , denominado *tensión cortante* τ , esta componente se denota por: σ_{nt} .

Estados de Tensión

Los estados de tensión están relacionados con ciertos planos particulares que pasan a través de un punto, donde se descompone la tensión en sus dos componentes *normal* σ_n y *cortante* σ_{nt} . En un punto los estados de tensión pueden ser dados en coordenadas cartesianas. Si se toma un punto del elemento de un área diferencial que puede ser un cubo de dimensiones Δx_1 , Δx_2 y Δx_3 , tendremos que este punto tiene tres componentes en cada dirección como se muestra en la Figura 1.2:

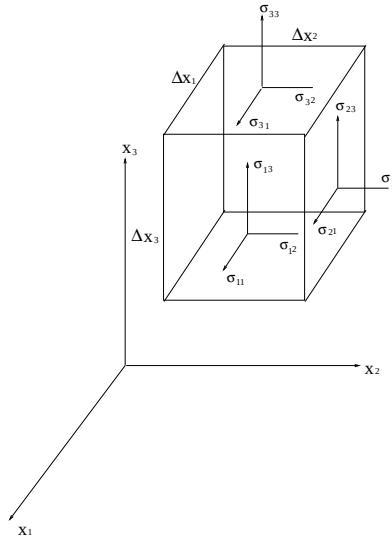


Figura 1.2: Tensiones internas en un punto del elemento de un área diferencial referidas a las coordenadas cartesianas x_1 , x_2 y x_3 .

en donde las tensiones normales serán: σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} y las tensiones cortantes son: σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} . El estado de esfuerzo en un punto P se puede expresar como un tensor de tensión o

tensor de tensiones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Estas componentes no son todas independientes, se puede ver que el tensor de tensión es simétrico y de las nueve componentes de tensión sólo tres de ellas son independientes. Así,

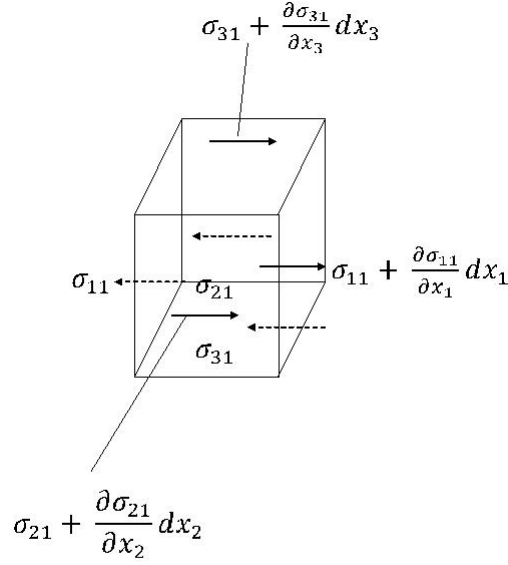
$$\sigma_{21} = \sigma_{12}; \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}; \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad (1.2)$$

de este modo las tensiones en un punto serán determinadas por seis componentes. Todas estas componentes están relacionadas con las ecuaciones de equilibrio.

Ecuaciones de equilibrio

Las tensiones en un cuerpo varían en cada punto y esa variación debe satisfacer ciertas condiciones de equilibrio. Las expresiones resultantes, denominadas ecuaciones de equilibrio, relacionan las derivadas parciales con respecto a la variable espacial con las distintas componentes de las tensiones. La derivada parcial representa el cambio infinitesimal o tendencia al cambio de la tensión respecto a la dirección. Las tensiones y sus derivadas primeras son funciones continuas. Las componentes de tensión en la dirección x_1 se pueden observar en la Figura 1.3 y se escriben de la siguiente manera:

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1; \quad \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2; \quad \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3. \quad (1.3)$$

Figura 1.3: Componentes de tensión en la dirección x_1 .

Si establecemos el equilibrio de fuerzas en las direcciones x_1 , x_2 , x_3 y realizamos la suma de estas fuerzas, haciendo uso de (1.3), obtenemos las ecuaciones de equilibrio igualadas a cero, de este modo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde los b_i son las fuerzas de los cuerpos o fuerzas de volumen.

La ecuación (1.4) se puede escribir en notación indicial como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad \text{o} \quad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.5}$$

Recordemos que, el subíndice i indica la dirección en la que se está trabajando y j la componente de tensión.

Fuerzas sobre la Superficie

Las fuerzas superficiales o tracciones son aquellas que actúan sobre un elemento diferencial de la frontera del medio a través del contacto directo. Denotaremos estas fuerzas por p_i , de modo que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ p_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ p_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde n_1, n_2, n_3 son los cosenos directores del vector normal exterior $\vec{n}$ con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 , es decir; $n_1 = \cos(\alpha)$, $n_2 = \cos(\beta)$ y $n_3 = \cos(\gamma)$. En la Figura 1.4 podemos ver como actúan estas fuerzas en un elemento diferencial respecto al vector normal.

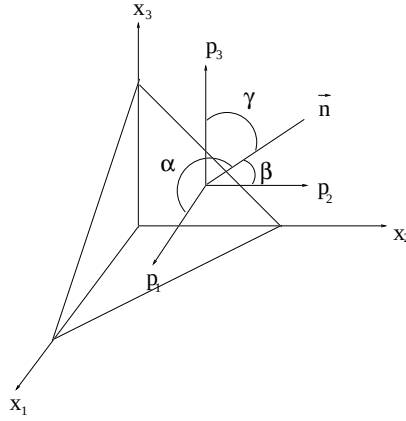


Figura 1.4: Fuerzas superficiales.

La ecuación (1.6) puede ser escrita en notación indicial como:

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.7}$$

donde Γ denota la frontera de un dominio Ω .

Condiciones de Contorno

Consideremos un dominio Ω limitado por una superficie Γ . Dicha superficie es la suma de dos curvas Γ_1 y Γ_2 , ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$); como se puede contemplar en la Figura 1.5:

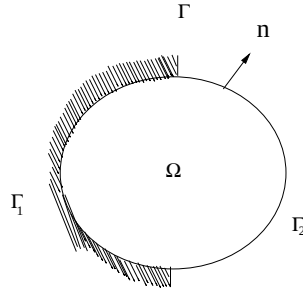


Figura 1.5: Definición geométrica del dominio y contorno de un cuerpo.

Asumiremos que las tracciones son los valores conocidos sobre la curva Γ_2 y desconocidos sobre Γ_1 . Los valores conocidos sobre Γ_2 son las condiciones de frontera "natural" para estos problemas. De aquí que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \overline{p_1}, \\ p_2 &= \overline{p_2}, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ p_3 &= \overline{p_3}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde la barra denota que p_i es un valor conocido.

Las tracciones aplicadas p_i tienen que estar en equilibrio con las componentes de tracciones obtenidas de las tensiones internas en la frontera, ya que las componentes de tensión son proyectadas en un elemento diferencial de la frontera y producen fuerzas de superficie o tracciones. De modo que,

$$p_i = \sigma_{ij}n_j = \overline{p_i}, \quad \text{sobre } \Gamma_2. \tag{1.9}$$

1.3 Estudio de las deformaciones

Un cuerpo que esté sometido a esfuerzos es deformable. Estas deformaciones causan que las posiciones de ciertos puntos sobre el cuerpo cambien respecto a los ejes coordenados. Hay desplazamientos que ocasionan el movimiento de un cuerpo rígido y desplazamientos que causan deformaciones. En el primer caso no se producen deformaciones en el cuerpo y estos desplazamientos se desechan en el estudio de las deformaciones.

Definición de Deformación:

La deformación es el cambio en el tamaño o forma de un cuerpo debido a tensiones internas producidas por una o más fuerzas aplicadas sobre el mismo. Las deformaciones están relacionadas con los desplazamientos correspondientes a las tensiones normales y cortantes. Al igual que para las tensiones las deformaciones se clasifican en: *deformaciones normales* ε y *deformaciones cortantes* $\frac{\gamma_{nt}}{2}$, estas deformaciones también se denotan, ε_{nt} . En la Figura 1.6, se puede ver las deformaciones resultantes producto de las tensiones que actúan en un elemento de área diferencial.

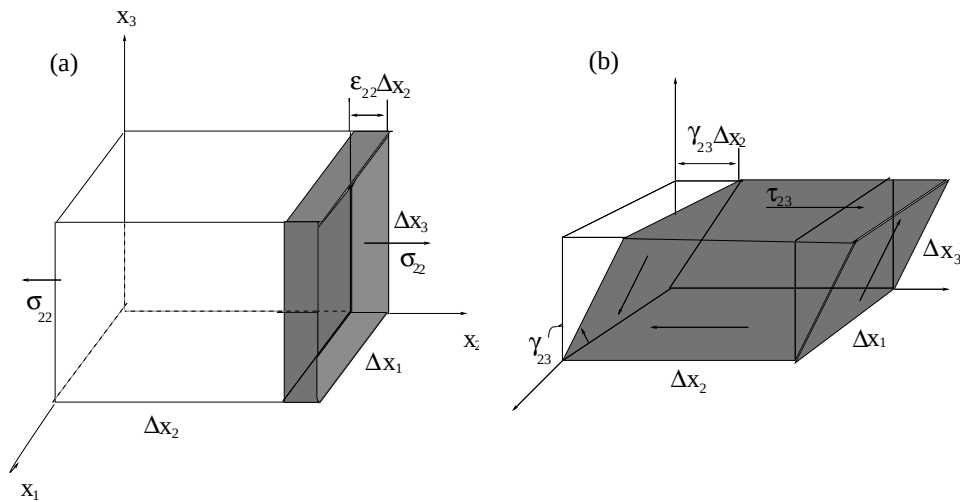


Figura 1.6: Deformaciones resultantes de las tensiones (a) normales y (b) cortantes que actúan en un elemento del área diferencial.

Estados de Deformación

Las deformaciones resultantes producto de las tensiones que actúan en un área del elemento diferencial, tendrá tres componentes en cada dirección, las componentes de deformaciones normales que son: ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} y la componentes de deformaciones cortantes, las cuales denotaremos por ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} . Estos estados de deformación se pueden expresar en forma de un tensor de deformación,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

De forma análoga a los estados de tensión se tendrá que no todas las componentes de deformación son independientes, sólo tres de ellas lo serán, así pues:

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}; \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}. \quad (1.11)$$

Las deformaciones producidas por las tensiones serán determinadas por seis componentes. De modo que, las componentes en (1.11) están relacionadas con las ecuaciones de deformación-desplazamiento que se presentan a continuación.

Relaciones de deformación-desplazamiento

Las deformaciones son funciones de los desplazamientos que tienen componentes u_1 , u_2 , u_3 en las direcciones x_1 , x_2 , x_3 . Puesto que las deformaciones pueden variar de un punto a otro, las definiciones de deformación deben relacionarse a un elemento infinitesimal. Las deformaciones normales en las direcciones de x_1 , x_2 , x_3 cuando $\Delta x_i \rightarrow 0$ se puede definir como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (1.12)$$

Si estas ecuaciones son positivas implica, un estiramiento en el punto del elemento al cual se le aplica una fuerza, mientras que si son negativas implica contracción.

Un elemento de área diferencial también experimenta deformaciones cortantes. Estas deformaciones se definen como el cambio angular entre dos líneas que originalmente eran perpendiculares, entonces para cambios de ángulos pequeños podemos escribir las deformaciones cortantes de la siguiente forma:

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \gamma_{13} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \gamma_{23} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \quad (1.13)$$

Si bien sabemos que los elementos deformados se obtienen girando un ángulo $\frac{\gamma_{ij}}{2}$ del elemento diferencial, como un cuerpo rígido, de aquí se sigue que:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2}. \quad (1.14)$$

Sustituyendo (1.13) en (1.14) se tiene que,

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \quad (1.15)$$

En este caso tenemos que la deformación cortante, es positiva cuando el ángulo entre dos ejes positivos decrece. En cualquier otro caso es negativa.

De igual forma a las componentes de tensión, las ecuaciones (1.12) y (1.15) se pueden escribir como sigue:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ó} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.16)$$

donde la coma(,) indica derivadas.

Las ecuaciones (1.12) y (1.15) son conocidas como *relaciones de deformación-desplazamiento*, ambas ecuaciones también se conocen como relaciones cinemáticas.

Si consideramos que sobre la curva Γ_1 los valores conocidos son los desplazamientos, denominados como condiciones de frontera "esencial" para estos problemas, tendremos que sobre la curva Γ_2 estos valores serán desconocidos, pues sobre esta curva se conocen las tracciones. De modo que, sobre Γ_1 , se definen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u_1 &= \overline{u_1}, \\ u_2 &= \overline{u_2}, \quad \text{en } \Gamma_1, \\ u_3 &= \overline{u_3}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

o escrita en notación indicial de la siguiente forma:

$$u_j = \overline{u_j}, \quad \text{en } \Gamma_1, \quad \text{donde, } (j = 1, 2, 3). \tag{1.18}$$

1.4 Relaciones Constitutivas

Las relaciones constitutivas o relaciones de tensión-deformación son ecuaciones que vinculan el campo de tensiones con la deformación, relacionando las componentes de los tensores tensión y deformación. Estas ecuaciones no son derivables de leyes de conservación y son específicas del tipo de material de problema estudiado.

Las ecuaciones de equilibrio para las tensiones (1.5) y las ecuaciones de cinemática o relaciones de deformación-desplazamiento (1.12) y (1.15) no dependen del tipo de material del cuerpo que estemos considerando. Mientras que, las relaciones de tensión-deformación si dependen del tipo de material del cuerpo. A lo largo de este trabajo supondremos que el material del cuerpo con el que estamos trabajando tiene las siguientes características:

- **Lineal:** Las deformaciones en el cuerpo producidos por las tensiones ejercidas, son proporcionales a dichas tensiones, de modo que se satisface la **Ley de Hooke**. Esta dice que: *El alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada* [14].
- **Homogéneo:** El material de un cuerpo es homogéneo si se encuentra distribuido uniformemente a través de su volumen, además de que las propiedades elásticas son las mismas en todos los puntos del cuerpo.
- **Elástico:** El material de un cuerpo es elástico cuando regresan a su estado original después de haber sido deformados por una fuerza externa.
- **Isótropo:** El material del cuerpo es isótropo cuando las propiedades elásticas se manifiestan en igual medida, cualquiera sea la dirección en la que se ha producido la deformación.

Ningún material satisface todas estas propiedades a la vez. Estas propiedades del cuerpo son definidas por medio de dos constantes que son independientes, conocidas como: constante de *Lame* λ y la constante μ que está asociada con el volumen del cuerpo. Ambas se escriben en términos del *módulo de elasticidad* E también conocido como *módulo de Young*, del *módulo de forma* G y del *módulo de Poisson* ν como se muestra a continuación:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (1.19)$$

El tensor de tensión y el tensor de deformación que fueron definidos en las secciones anteriores se encuentran relacionados entre sí, a través de las relaciones de tensión-deformación. Si consideramos que el material es elástico y lineal, las componentes de tensión y deformación se relacionan por medio de la ley de Hooke [14] generalizada la cual puede escribirse en notación indicial de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.20)$$

donde C es un tensor de orden cuatro con ochenta y un componentes [17], estas componentes representan los módulos de elasticidad. La constante C será un tensor simétrico en ij y kl , debido a que σ_{ij} y ε_{kl} son simétricos, reduciéndose las ochenta y un componentes sólo a

treinta y seis componentes independientes. Por otro lado, tenemos que por ser el material del cuerpo elástico, se admite la existencia de la función escalar de energía libre o energía de deformación U [17] tal que:

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{kl}, \quad (1.21)$$

donde la función U se representa de la siguiente forma $U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ y C_{ijkl} satisface que:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (1.22)$$

La igualdad de (1.22) trae como consecuencia que de las treinta y seis componentes del tensor C , sólo veinte y un son independientes. Si consideramos que el material del cuerpo es homogéneo se tiene que los C_{ijkl} son un grupo de constantes, pero si el material es isótropo podemos escribir las relaciones de tensión-deformación en el caso tridimensional, en forma matricial de esta manera,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

es decir,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1.24)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker definida como,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

además, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Por otro lado, si multiplicamos (1.23) por la inversa de la matriz asociada, podemos obtener las componentes de deformación, de manera que:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (1.25)$$

Ahora bien, considerando la ecuación de equilibrio (1.5), es decir:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad \text{sobre } \Omega. \quad (1.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.16) y (1.24) en (1.26) se obtiene,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{b_i}{\mu} = 0. \quad (1.27)$$

La expresión (1.27) se conoce como ecuación de Navier Stoke y con ella se obtienen los valores de los desplazamientos.

Los problemas de elasticidad lineal se pueden resolver de manera analítica o bien sea implementando algún método numérico. En este trabajo se desea encontrar soluciones a estos problemas aplicando el Método de Elemento Frontera, utilizaremos la ecuación de Navier Stoke y la ecuación (1.5) sujeta a las condiciones de contorno (1.8) y (1.17) para hallar una representación integral de frontera necesaria para implementar el método.

Capítulo 2

Método de Elemento Frontera.

2.1 Antecedentes

Los métodos numéricos se han usado durante mucho tiempo, para encontrar soluciones a muchas interrogantes que surgieron desde el principio de los tiempos. El ser humano en su afán de comprender el medio ambiente que lo rodea, ha impulsado el desarrollo de la ciencia y ha desarrollado los métodos numéricos, ya que estos métodos son distintos a los que se usan tradicionalmente, para resolver diferentes problemas. Así pues, es como surgen los avances en muchos problemas de elasticidad. Los métodos numéricos se emplean con frecuencia para hallar soluciones a estos problemas, los métodos de primera generación más significativos son: el Método de Diferencias Finitas y el Método de los Elementos Finitos (**FEM** [15] en inglés). El **FEM** es un método numérico generalmente utilizado para encontrar la solución de un problema con alto grado de dificultad, ya que involucran geometrías complejas, determinación de materiales y cargas no distribuidas. La idea básica de este método es el de dividir la región en un número finito de elementos, y resolver cada una de las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total. El aspecto mas débil de este método es que conceptualmente un conjunto completo de esquemas de discretización inevitablemente conduce a grandes cantidades de elementos finitos, especialmente cuando tratamos con problemas tridimensionales con límites distantes, en donde las variables de solución no cambian continuamente y frecuentemente muestran discontinuidades no reales en valores entre elementos contiguos. Debido a esto surge la segunda generación de métodos numéricos, en principio llamado: *Método de Paneles* y *Método de Ecuaciones Integrales de Frontera*. Durante la aparición de este método se desarrollaron distintos trabajos en donde se aplicaban técnicas de integración, Kellogg (1953) [9] fué uno de los pioneros en la aplicación

de las técnicas de integración para la solución de problemas que involucren la ecuación de Laplace, no obstante, su aplicación no fue muy popular y fueron utilizadas principalmente en la resolución de problemas de la mecánica del fluido y en problemas generales de potencial, por lo que tales técnicas eran conocidas como métodos "fuente" los cuales son métodos "indirectos" de análisis. En este campo destacan los aportes hechos por Jaswon (1963) [11], Symm (1963) [12], Massonet (1966), Hess y Smith (1967) [10]. Se podría considerar que Cruse y Rizzo (1968) [5] desarrollaron la primera versión directa del método, aplicada a problemas bidimensionales y basada en la solución fundamental de Lord Kelvin para un medio elástico, isótropo, homogéneo e infinito.

En los años setenta, otros investigadores Brebbia y Domínguez [8] contribuyeron al desarrollo del Método de Ecuaciones Integrales, finalmente en 1975 adquirió el nombre dado por P. K. Banerjee y R. Butterfield *Método de Elementos Frontera*, luego Rizzo (1977) [3], Shippy (1979) y Nakaguma (1979) [13], consideraron la influencia que tienen los pesos residuales en la formulación integral del método.

El **BEM** es un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, también es conocido como método de integral de frontera (**BIE** por sus siglas en inglés). Este método surge como una alternativa en la resolución de problemas en donde existan concentración de fuerzas o en donde los dominios se extiendan hasta el infinito. La característica más importante del método de elemento frontera es que sólo requiere de la discretización de la superficie y no de la geometría del problema. El **BEM** arroja mejores aproximaciones a la hora de trabajar o analizar problemas de concentración de fuerzas, a diferencia del **FEM**, ya que para este método es conveniente usar mallas uniformes que no permite ajustar la geometría del problema en forma adecuada.

Las bases matemáticas que son empleadas por el **BEM** ya eran conocidas a finales del siglo XIX. Fredholm cerca del año, 1905 publicó algunas de las fórmulas integrales lineales de frontera para: elasticidad, ondas, flujo de potencial y elastodinámica que han estado en la literatura científica desde hace por lo menos 50 años.

El desarrollo del **BEM** a logrado una etapa en la cual se puede intentar solucionar problemas realmente complejos, pero las aplicaciones de este método a problemas no lineales están en desarrollo. Si bien el **BEM** ya no es una técnica limitada a la solución de problemas,

sigue siendo el tipo de problemas para los que con más frecuencia se ha utilizado el método exitosamente. Ya existen procedimientos eficientes para algunos problemas no lineales como plasticidad y se siguen desarrollando soluciones no lineales para distintos problemas.

Durante este capítulo desarrollaremos la representación integral para los problemas de elasticidad lineal, conocida como *Identidad Somigliana*, así como la solución fundamental necesaria para esta representación.

2.2 Formulación Integral de Frontera

En vista de que el **BEM** trabaja con ecuaciones integrales de frontera, en esta sección nos preocuparemos por encontrar la representación integral que proviene de la ecuación diferencial de Navier Stoke.

Consideremos un dominio elástico, homogéneo e isótropo Ω , limitado por una frontera Γ , que esta en estado de equilibrio bajo algunas cargas y desplazamientos prescritos, (ver Figura 2.1). En este estado denotaremos por σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , p_i y b_i , las cargas y los desplazamientos. Ahora, consideremos que el dominio Ω está contenido en un dominio Ω^* con frontera Γ^* , ya que sobre este nuevo campo $*$ definiremos los pesos denotados por σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* y b_i^* . Este nuevo campo se puede extender al infinito y también se encuentra en equilibrio, además presenta las mismas características elásticas que Ω .

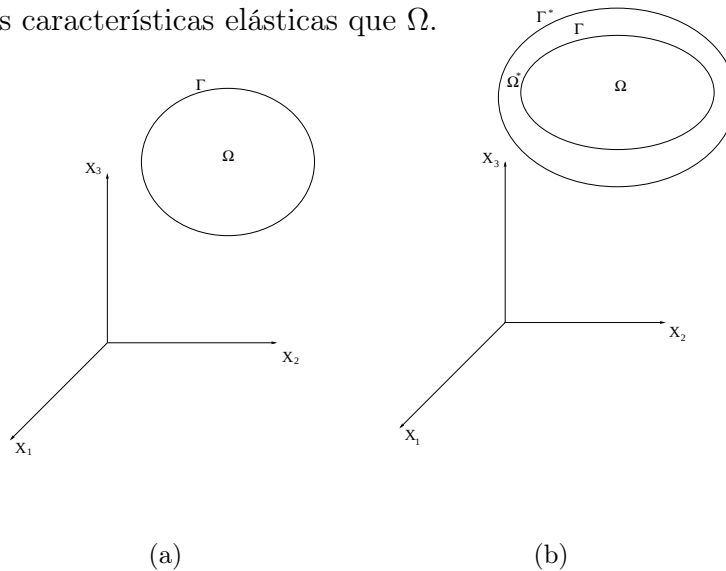


Figura 2.1: (a) Cuerpo finito, elástico, isótropo y homogéneo. (b) Región General contiene al dominio Ω con las mismas propiedades del cuerpo.

Ahora consideremos la ecuación diferencial de equilibrio para las tensiones expuesta en el capítulo anterior, es decir:

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k = 0 \quad \text{en } \Omega \subset \Omega^*, \quad (2.1)$$

que satisface las siguientes condiciones en la frontera:

(i) Esencial ó desplazamiento:

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{en } \Gamma_1, \quad (2.2)$$

(ii) Natural ó tracción:

$$p_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{p}_k \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (2.3)$$

donde la frontera Γ está dividida por dos curvas suaves ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$). Consideremos las funciones de peso residual de la forma u_k^* y p_k^* definidas sobre Ω^* . Multiplicando la ecuación (2.1) por u_k^* y luego integrando sobre Ω , se tiene:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k \right) u_k^* d\Omega = 0. \quad (2.4)$$

Aplicando la integración por partes al primer término de esta integral y considerando que:

$$\begin{aligned} u &= u_k^*, & dv &= \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j}, \\ du &= u_{k,j}^* d\Omega, & v &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{kj} n_j d\Gamma, \end{aligned}$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{kj} u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma_{kj} n_j u_k^* d\Gamma. \quad (2.5)$$

Considerando que $p_k = \sigma_{kj}n_j$, entonces de (2.5) se tiene que,

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj}\varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma, \quad (2.6)$$

siendo $\varepsilon_{kj}^* = u_{k,j}^*$.

Las componentes de tensión y deformación se relacionan por medio de la Ley de Hooke, [17], de esta manera:

$$\sigma_{kj} = C_{kjil}\varepsilon_{il}, \quad (2.7)$$

donde C es un tensor simétrico de orden cuatro en kj y il . Sustituyendo la ecuación (2.7) en la ecuación (2.6) tenemos:

$$-\int_{\Omega} C_{kjil}\varepsilon_{il}\varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma. \quad (2.8)$$

Integrando nuevamente por partes el primer término de la ecuación (2.8) y tomando en consideración el teorema de la divergencia, las fuerzas sobre la superficie como se hizo en (2.5) y el **Principio de Reciprocidad o Teorema de Maxwell-Betti que establece:** *El trabajo efectuado por la fuerzas correspondiente a un estado de carga $\vec{F}_i$ durante los desplazamientos originados por un segundo estado de carga $\vec{\phi}_i$, es igual a las fuerzas ejercidas por la carga $\vec{\phi}_i$ durante los desplazamientos de la carga $\vec{F}_i$ [16], debido a la simetría de C_{kjil} ,*

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj}\varepsilon_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{kj}\sigma_{kj}^* d\Omega, \quad (2.9)$$

se obtiene el siguiente expresión,

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma. \quad (2.10)$$

Ahora aplicando las condiciones de frontera dadas en (2.2) y (2.3), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = & - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Considerando que las fuerzas del cuerpo son funciones conocidas, la segunda integral del lado izquierdo de (2.11) no tiene valores desconocidos. Sin embargo, la primera integral tiene valores desconocidos de los desplazamientos en todo el dominio Ω , mientras que las integrales de frontera del lado derecho presentan valores conocidos y desconocidos de los desplazamientos y tracciones sobre la superficie externa del cuerpo. De aquí en adelante el propósito es transformar la integral sobre el dominio Ω de (2.11) en una integral de frontera, ya que el **BEM** trabaja con integrales sobre la frontera.

2.3 Identidad Somigliana

Consideremos un dominio elástico, homogéneo e isótropo $\Omega \subset \Omega^*$, con frontera Γ y Γ^* , respectivamente. Debido a que se quiere transformar la primera integral del lado izquierdo de la ecuación (2.11) asumiremos que existe una solución, [21], para σ_{ij}^* . Esta suposición es válida para aproximar soluciones, pues el estado de tensión sobre el cuerpo vendrá dado por una solución en términos del campo $*$ que se encuentra en equilibrio.

Si las propiedades del cuerpo elástico son válidas en ambos casos, la integral de reciprocidad (2.9) se deduce por simple simetría de los tensores involucrados.

Aplicando la integración por partes en ambos lados de la ecuación (2.9) y considerando

$$\begin{aligned}
u &= \sigma_{kj}, & dv &= u_{k,j}^*, \\
du &= \sigma_{kj,j} d\Omega, & v &= \int_{\Omega} u_{k,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_k^* n_j d\Gamma,
\end{aligned}$$

se obtiene,

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j} u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{kj} n_j u_k^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{kj}^* n_j u_k d\Gamma.$$

Considerando que, $\sigma_{kj,j} = b_k$ y $p_k = \sigma_{kj} n_j$, y sustituyéndolas en la ecuación anterior tenemos,

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (2.12)$$

esta expresión se conoce como el ***Segundo Teorema de Reciprocidad de Betti***. La ecuación (2.12) puede ser modificada asumiendo que las componentes de fuerzas del cuerpo b_k^* corresponde a una carga puntual unitaria aplicada en el punto i en cada una de las tres direcciones ortogonales dados por el vector unitario e_i , el cual puede representarse como

$$b_i^* = \Delta^i e_i, \quad (2.13)$$

donde Δ^i representa la contribución de una carga unitaria aplicada en el punto i , de modo que la primera integral de (2.12) para una dirección particular e_i de la carga unitaria se convierte en

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \Delta^i u_i e_i d\Omega = u_l^i e_i, \quad (2.14)$$

donde $u_l^i e_i$ representa el desplazamiento en la componente l en el punto de aplicación de la carga i . Además, si cada punto de carga es tomada como independiente, los desplazamientos

y tracciones se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_{lk}^* e_i, \\ p_k^* &= p_{lk}^* e_i, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde u_{lk}^* , p_{lk}^* son los desplazamientos y tracciones en la componente k debido a una carga unitaria en la dirección l respectivamente. Escribiendo la ecuación (2.12), pero ahora representando las tres componentes de los desplazamientos en el punto i independientemente, se tiene que,

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega, \quad (2.16)$$

donde el supraíndice representa la contribución de una carga unitaria aplicada en el punto i .

La expresión (2.16) es conocida como *Identidad Somigliana* y con ella se puede obtener los valores de los desplazamientos, en cualquier punto interno una vez conocidos los valores en la frontera u_k y p_k , las fuerzas a lo largo del dominio y la solución fundamental. La ecuación (2.16) es válida para cualquier punto particular i donde son aplicadas las fuerzas.

Identidad Somigliana para puntos en la Frontera

Con la identidad Somigliana se obtienen los valores de los desplazamientos en cualquier punto interno una vez conocidos los valores de u_k y p_k en todos los puntos de la frontera, en consecuencia, es sólo cuando se ha resuelto el problema de frontera es que podremos calcular valores en los puntos internos. Sin embargo, en vista de que la ecuación (2.16) es válida para cualquier punto en el dominio Ω incluyendo la frontera Γ , se puede obtener una expresión integral de frontera al tomar la ecuación (2.16) en Γ . Esta expresión es aplicada a diferentes puntos en la frontera, produciendo un sistema de ecuaciones que al ser resuelto se obtienen los valores de frontera.

Si tomamos un punto i sobre la frontera y coincide con el punto de integración tendremos, que las integrales presentan una singularidad y es necesario analizar su comportamiento de una manera especial. Si se considera que la frontera es suave en el punto i , se puede

suplementar la frontera con una semiesfera con centro en i y radio ε para el caso en tres dimensiones como se muestra en la Figura 2.2(a) o con un semicírculo para el caso en dos dimensiones Figura 2.2(b).

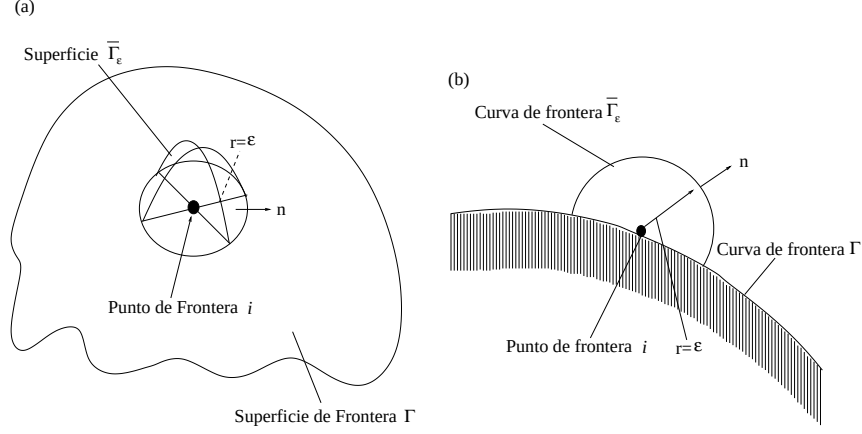


Figura 2.2: Aumento de la frontera para el análisis de puntos en la superficie en el caso (a) tridimensional y (b) bidimensional.

Esto se hace precisamente por la discontinuidad que se presenta en el punto i , debido a que se desea trabajar con puntos de contornos continuos se deben calcular las integrales de frontera sobre esta nueva superficie.

De este modo se tienen dos tipos de integrales de contorno, las integrales sobre Γ_1 y las integrales sobre Γ_2 . Primero consideremos la primera integral del lado derecho de la ecuación (2.16) en función de la superficie Γ_ε del semicírculo, es decir,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En la segunda igualdad del lado derecho de la ecuación (2.17), se puede demostrar, [18], que para una superficie cualquiera se tendrá que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma = 0, \quad (2.18)$$

de modo que, la expresión (2.17) se transforma en

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} \\ &= \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación (2.16) se comporta de una manera diferente. Escribiendo esta integral como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En la primera integral de la segunda igualdad de (2.20) debe ser considerada en el sentido del Valor Principal de Cauchy, [20], y su existencia se demuestra si u_k satisface la condición de Hölder en el punto i tal que

$$|u_k - u_k^i| \leq Br^\alpha,$$

donde B y α son constantes positivas y r es la distancia desde el punto de singularidad i a la frontera $\bar{\Gamma}_\varepsilon$. La segunda integral de la segunda igualdad de (2.20) se realiza sumando y restando la expresión

$$\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* u_k^i d\Gamma,$$

de donde, se puede escribir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* [u_k - u_k^i] d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* u_k^i d\Gamma. \quad (2.21)$$

Debido a que la función desplazamiento u_k es continua, se tendrá que la primera integral del lado derecho de (2.21) desaparece, obteniendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma = u_k^i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* d\Gamma. \quad (2.22)$$

Tomando en cuenta (2.19) y sustituyendo (2.22) en (2.16) se obtiene la identidad Somigliana para puntos en la frontera Γ

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega, \quad (2.23)$$

donde

$$c_{lk}^i = \delta_{lk} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* d\Gamma, \quad (2.24)$$

siendo δ_{lk} la delta de Kronecker. La frontera Γ es suave en i , por lo que, $c_{lk}^i = \frac{1}{2}\delta_{lk}$. La ecuación integral de frontera (2.23) permite resolver el problema general de valor de frontera en elasticidad.

Las funciones peso u_{lk}^* y p_{lk}^* se usaron para hallar la ecuación integral, pues con estas funciones se obtienen soluciones aproximadas a la solución exacta del problema. Debido a las diferentes posibilidades en la selección de funciones peso que pueden utilizar, existen diferentes métodos de pesos residuales: el método de colocación, el de colocación por sub-regiones, el método de mínimos cuadrados, el de Galerki, etc. El método que más se usa

en los problemas aplicados de elementos de frontera es el método de Galerki, la explicación en detalle de este método al igual que los mencionados se puede ver [21]. En vista de que se quiere encontrar una solución aproximada a la solución exacta, es conveniente estudiar la solución fundamental ya que esta solución será la solución aproximada de peso residual.

2.4 Solución Fundamental

Si observamos con detenimiento la representación integral (2.23) para los problemas de elasticidad, vemos que es necesario conocer el valor que tienen los pesos u_{lk}^* y p_{lk}^* que se encuentran en la ecuación integral, estos pesos son llamados soluciones fundamentales del problema de elasticidad.

Consideremos primero la ecuación de Navier Stoke

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{b_i}{\mu} = 0. \quad (2.25)$$

De la ecuación (2.25) se puede obtener la solución de Kelvin, [7], si analizamos la contribución de una carga unitaria aplicada en un punto i en la dirección del vector unitario e_l , es decir

$$b_l = \Delta^i e_l, \quad (2.26)$$

donde Δ^i representa la contribución de una carga unitaria aplicada en el punto i .

Para calcular la solución fundamental se usa la representación de los desplazamientos en términos del vector de Galerkin, [19]. Se asume la existencia de un vector $\mathbf{G}$ del cual se puede obtener las componentes de los desplazamientos como:

$$u_j = \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_m \partial x_m} - \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 G_m}{\partial x_j \partial x_m} \quad m, j = 1, 2, 3, \quad (2.27)$$

también se puede escribir en notación indicial de esta manera

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad m, j = 1, 2, 3. \quad (2.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.26) y (2.27) en (2.25) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^4 G_l}{\partial x_m^2 \partial x_j^2} + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (2.29)$$

o

$$G_{l,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0 \quad l, m, j = 1, 2, 3, \quad (2.30)$$

donde el supraíndice i representa el punto de aplicación de la carga.

La expresión (2.29) se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 F_l}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (2.31)$$

donde

$$F_l = \frac{\partial^2 G_l}{\partial x_m \partial x_m}. \quad (2.32)$$

La solución de la ecuación (2.31), se obtiene usando un razonamiento similar al que utiliza para hallar la solución fundamental de la ecuación de Laplace, [8], entonces para el caso tridimensional viene dada por:

$$F_l = \frac{1}{4\pi r \mu} e_l, \quad (2.33)$$

mientras que para el caso bidimensional será:

$$F_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln \left(\frac{1}{r} \right) e_l, \quad (2.34)$$

donde r es la coordenada radial del sistema de coordenada que tiene por origen el punto de aplicación de la carga como se puede apreciar en la Figura 2.3.:

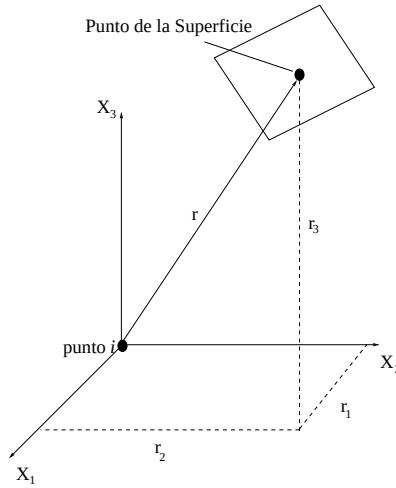


Figura 2.3: Componentes del vector distancia r .

Sustituyendo las ecuaciones (2.33) y (2.34) en la ecuación (2.32) se obtiene la siguiente expresión para el caso tridimensional:

$$\frac{\partial^2 G_l}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{1}{4\pi r \mu} e_l, \quad (2.35)$$

y para el caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 G_l}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{1}{2\pi\mu} \ln \left(\frac{1}{r} \right) e_l, \quad (2.36)$$

esta ecuación diferencial se resuelve de manera similar a la ecuación (2.32), y cuyas soluciones son de la forma:

$$G_l = G e_l, \quad (2.37)$$

donde G , tanto para el caso bidimensional como el caso tridimensional, es:

$$G = \begin{cases} \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(\frac{1}{r}), \\ \frac{1}{8\pi\mu} r, \end{cases} \quad (2.38)$$

donde r es la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Si se toman cargas independientes, se puede escribir:

$$G_{lk} = G \delta_{lk}, \quad (2.39)$$

donde G_{lk} es la k -ésima componente del vector de Galerkin en cualquier punto cuando se aplica una carga unitaria al punto i en la dirección l . El desplazamiento producido por una carga puntual en cualquier punto del dominio considerando cada dirección como independiente es de la forma:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l, \quad (2.40)$$

donde u_{lk}^* representa los desplazamientos en la dirección k cuando se aplica una carga unitaria en el punto i en la dirección l . Sustituyendo la expresión (2.40) en (2.28) se tiene:

$$u_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km}; \quad l, k, m = 1, 2, 3. \quad (2.41)$$

Finalmente, para un problema tridimensional, la solución fundamental para los desplazamientos se obtiene al sustituir las ecuaciones (2.38) (caso tridimensional) y (2.39) en la ecuación (2.41), originando como resultado:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right], \quad (2.42)$$

donde $r = \sqrt{r_l r_l}$, distancia entre dos puntos. Además, $r_l = x_l - y_l$, con $l = 1, 2, 3$. La expresión (2.42) se puede escribir en notación indicial de la siguiente manera

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}], \quad (2.43)$$

siendo,

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{r_l}{r},$$

análogo para $r_{,k}$.

Para los problemas de deformación plana la solución fundamental para los desplazamientos es

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{lk} + r_{,l}r_{,k} \right]. \quad (2.44)$$

Al considerar un subdominio arbitrario dentro del dominio total que es infinito alrededor del punto en el cual actúa la carga, aparecen las fuerzas de superficie o tracciones en la frontera Γ del subdominio cuya normal exterior es $\vec{n}$. La solución fundamental para las tracciones, se obtiene sustituyendo la solución fundamental para los desplazamientos en las relaciones de tensión-deformación y considerando que, $p_l = \sigma_{lk}n_k$, entonces para el caso tridimensional,

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right], \quad (2.45)$$

donde n_l y n_k son los cosenos directores del vector normal respecto a x_l y x_k . Además, $\frac{\partial r}{\partial n}$ es la derivada direccional de r en la dirección del vector normal $\vec{n}$. En el caso de problemas bidimensionales, es decir, deformaciones planas se tiene:

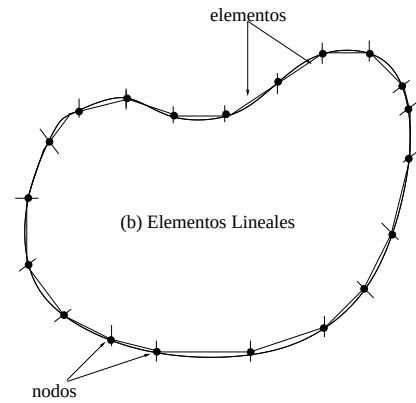
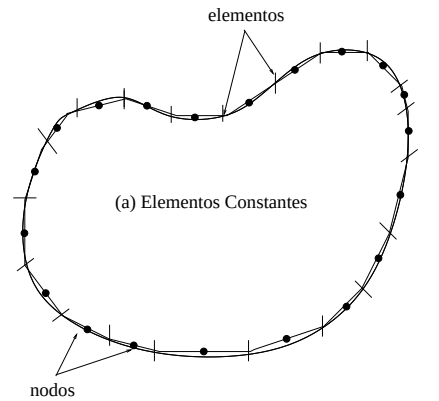
$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right]. \quad (2.46)$$

2.5 Formulación del Método Numérico

Con la finalidad de resolver la ecuación integral numéricamente, la frontera del cuerpo debe ser discretizada en una serie de elementos sobre los cuales los valores de los desplazamientos y tracciones se escriben en términos de una serie de puntos nodales. Por simplicidad consideraremos un cuerpo bidimensional. La frontera del cuerpo se divide en N elementos, los puntos en donde los valores son desconocidos se llaman "nodos". Existen varios tipos de elementos, los cuales se describen a continuación:

Elementos Constantes. Para este tipo de elementos tenemos un nodo ubicado en el centro, además las condiciones de frontera u y p tienen un valor constante a lo largo de todo el elemento.

Elementos Lineales. Para estos elementos se tienen dos nodos por cada elemento que se ubican a los extremos del mismo. A diferencia del caso anterior el comportamiento de u y p es lineal, y varían a lo largo del elemento. Para un mismo nodo se puede tener diferentes valores de tracción, pues p depende de la dirección del vector normal. Tanto u y p son valores conocidos y desconocidos sobre Γ_1 y Γ_2 , respectivamente.



Elementos Cuadráticos. Se tienen tres nodos por elemento, dos a los extremos y uno en el centro. Los desplazamientos y tracciones varían a lo largo del elemento. Los valores de u y p serán valores conocidos y desconocidos sobre Γ_1 y Γ_2 .

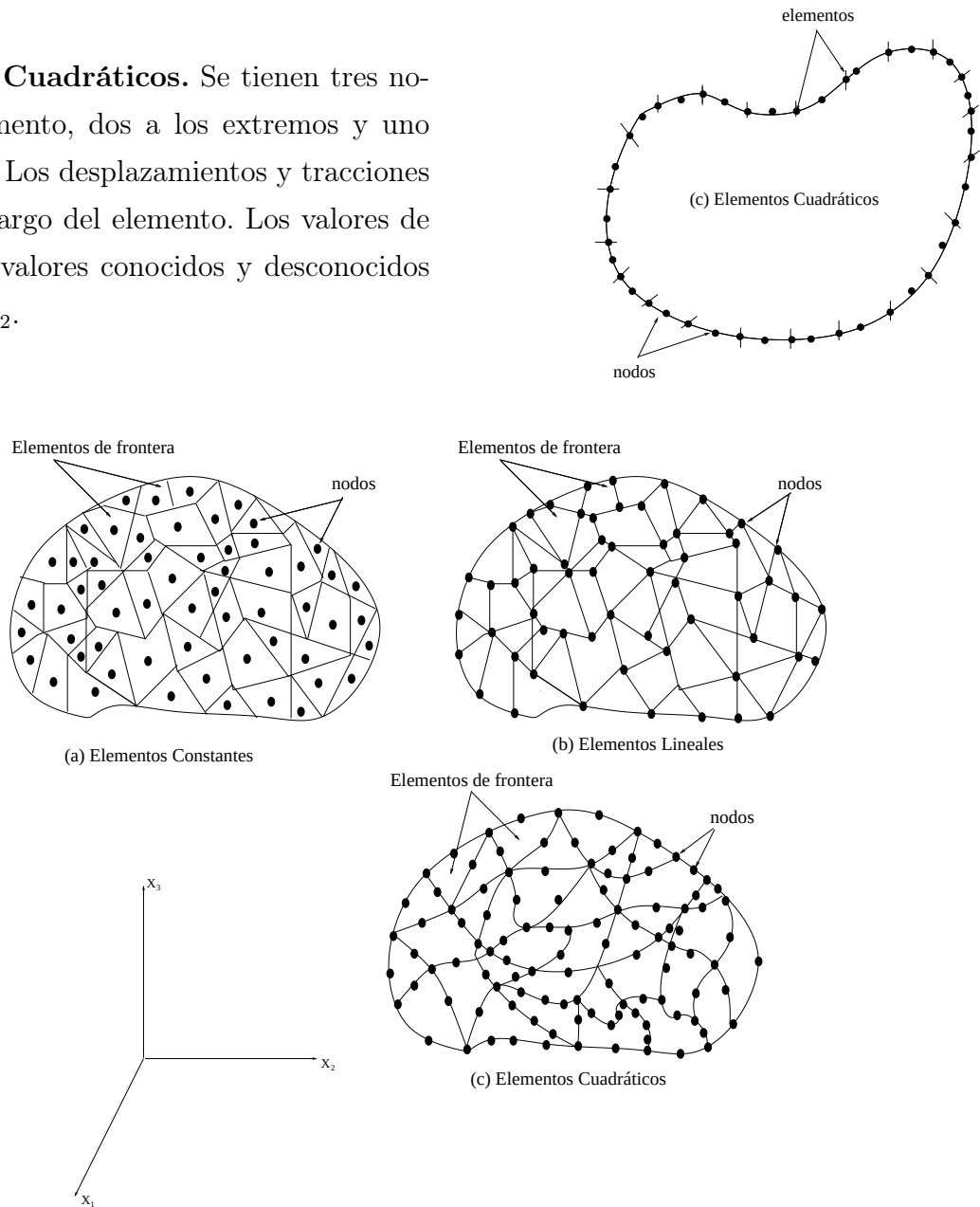


Figura 2.4: Tipos de Elementos de frontera en 3D: (a) Elementos constantes, (b) Elementos lineales, (c) Elementos cuadráticos.

En este trabajo utilizaremos elementos constantes y cuadráticos para resolver algunos problemas de elasticidad.

Estudio de los Elementos Constantes y Cuadráticos

Al escribir la discretización de la ecuación (2.23) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para cada punto nodal y una vez aplicadas las condiciones de frontera, este sistema puede ser resuelto obteniendo como resultado los valores desconocidos y, en consecuencia, se puede encontrar una solución aproximada del problema de valor de frontera.

En el caso en que se utilice elementos constantes para la discretización de la frontera, se tendrá que sobre cada elemento j los valores u y p serán constantes incluyendo en el nodo ubicado en el medio del elemento. Sin embargo, al discretizar la frontera con elementos cuadráticos los desplazamientos y tracciones sobre cada elemento j son aproximados a través de funciones de interpolación, es decir,

$$u = \Phi u^j \quad y \quad p = \Phi p^j, \quad (2.47)$$

donde Φ es una matrix de funciones de interpolación que es un arreglo de funciones de $3 \times 3n$ para el caso tridimensional y $2 \times 2n$ caso bidimensional, siendo n el número de nodos sobre el elemento, entonces

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_Q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_Q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_Q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Además, u^j y p^j son los valores nodales de los desplazamientos y tracciones respectivamente, u y p son los desplazamientos y tracciones en cualquier punto sobre la frontera Γ . Debido a que en los elementos cuadráticos se tienen tres nodos por elemento, sólo se emplearán tres funciones de interpolación ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 para aproximar los valores u y p . Estas funciones de interpolación son funciones cuadráticas y se denotan por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad \phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1); \quad \phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad (2.49)$$

donde ξ es una variable adimensional tal que $-1 \leq \xi \leq 1$.

Las fuerzas de los cuerpos en cualquier punto sobre el dominio Ω , tanto para elementos constantes como para elementos cuadráticos, se puede expresar en forma de vector, tal como

$$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.50)$$

Respectivamente u y p

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.51)$$

Los coeficientes de las soluciones fundamentales se pueden expresar como,

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

donde u_{lk}^* y p_{lk}^* son los desplazamientos y tracciones en la dirección k debido a una carga unitaria i actuando en la dirección l .

Discretizando la frontera en elementos constantes, y considerando que no existen fuerzas internas actuando dentro del cuerpo, es decir, que $b = 0$, la ecuación (2.23) para un punto nodal se expresa como:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p^j. \quad (2.53)$$

En el caso en que se consideran elementos cuadráticos se sustituyen las funciones de interpolación (2.49) en la ecuación (2.23), reordenando de tal manera que las funciones ϕ_i queden dentro de un arreglo Φ y considerando $b = 0$. Se obtiene la siguiente expresión para un punto nodal.

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} p^j. \quad (2.54)$$

En las ecuaciones (2.53) y (2.54) los valores c^i serán un arreglo (3×3 caso tridimensional o 2×2 caso bidimensional). Si la frontera es suave, los elementos de estas matrices valdrán cero salvo en la diagonal que tendrán un valor de $\frac{1}{2}$. En el caso en que la frontera no sea suave los elementos del arreglo c^i no son sencillos de calcular. La suma desde $j = 1$ hasta N indica la suma de todos los N elementos sobre la superficie y Γ_j es la frontera del elemento j . Los valores u^j y p^j son los desplazamientos y tracciones en el nodo j .

Transformación de Coordenadas

La transformación de coordenadas para una función u se relaciona a través de lo siguiente,

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} X^j = \Phi X^j, \quad (2.55)$$

donde X^j son los valores nodales de las coordenadas sobre el elemento cuando se considera elementos cuadráticos y Φ es la función de interpolación que fue descrita anteriormente. En el caso en que utilicemos elementos constantes esto no es necesario, pues u y p son constantes sobre todo el elemento.

La transformación en (2.55) conlleva a describir diferenciales de volumen o de superficie en términos de las coordenadas curvilíneas. El diferencial de volumen es:

$$d\Omega = |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \quad (2.56)$$

donde $\mathbf{J}$ es el jacobiano de la transformación. El diferencial de superficie en volumen es:

$$d\Gamma = |\mathbf{G}| d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.57)$$

donde $\mathbf{G}$ es el jacobiano. Tanto $\mathbf{J}$ como $\mathbf{G}$ se pueden obtener al derivar la ecuación (2.55) respecto de ξ . La deducción de estas expresiones se pueden observar en detalle en el Brebbia y Domínguez (1989) [8].

Luego de sustituir las ecuaciones (2.56) y (2.57) en (2.54) e integrando numéricamente, se obtiene

$$\begin{aligned} c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (p^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} u^j \\ = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (u^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} p^j, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde l es el número de puntos de integración sobre los elementos de la superficie y w_k son los pesos de estos puntos, r es el número de puntos de integración sobre las celdas, $(p^* \Phi)_k$ y $(u^* \Phi)_k$ significa que los puntos de integración serán evaluados en esas funciones.

Sistema de Ecuaciones

Las ecuaciones (2.53) y (2.54) corresponden a un nodo particular i y una vez calculadas las integrales se puede escribir en forma matricial como:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j, \quad (2.59)$$

donde N es el número de nodos, u^j y p^j son los desplazamientos y tracciones en el nodo j . Las influencias de las matrices $\hat{H}$ y G , son:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} p^* d\Gamma, \\ G^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} u^* d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.60)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{H}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} p^* \Phi_q d\Gamma, \\ G^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} u^* \Phi_q d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.61)$$

para elementos constantes y cuadráticos respectivamente. La suma se extiende a todos los elementos al cual pertenece el nodo j y q es el número de orden del nodo j dentro del elemento t .

Si ahora llamamos

$$H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{si } i \neq j, \\ \hat{H}^{ij} + c^i & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (2.62)$$

De este modo para un nodo particular i la ecuación (2.59) se convierte en:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j. \quad (2.63)$$

La contribución para todos los nodos i se pueden escribir en forma matricial originando un sistema global de ecuaciones; es decir,

$$HU = GP \quad (2.64)$$

donde H y G son matrices de dimensión $2N \times 2N$. Si consideramos los elementos cuadráticos, los vectores U y P representan los valores de los desplazamientos y tracciones antes de aplicar las condiciones de frontera, en donde, sobre Γ_1 los valores conocidos son los desplazamientos y en Γ_2 los valores conocidos serán las tracciones, los elementos de estos vectores son constantes cuando se trabaja con elementos constantes.

Ordenando las columnas de las matrices H y G , pasando todos los valores desconocidos a un vector X , se tiene el sistema final de ecuaciones:

$$AX = F, \quad (2.65)$$

donde A es una matriz de orden $2N \times 2N$, cuyos elementos son una combinación de los

elementos de las matrices H y G . El vector X es un vector de valores desconocidos de dimensión $2N$ y F es un vector de valores conocidos de dimensión $2N$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.1) por el método de eliminación de Gauss se determinan todos los valores en la frontera.

Puntos Internos

Si se considera la identidad Somigliana ecuación (2.16), como se hizo con las ecuaciones (2.53) y (2.54), se tiene,

$$u^i = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} p^j - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right\} u^j, \quad (2.66)$$

donde Γ_j es la superficie correspondiente al nodo j , además i ahora es un punto interno. Los desplazamientos de los puntos internos están dados por

$$u^i = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j - \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j. \quad (2.67)$$

Los términos G^{ij} y H^{ij} son integrales sobre los elementos al cual pertenece el nodo j . Estas integrales no contienen ninguna singularidad y se pueden calcular fácilmente usando integración numérica.

Capítulo 3

Aplicación del método Numérico

En este capítulo se expondrá una breve reseña del lenguaje de programación FORTRAN, usado para programar el método numérico y obtener la solución de las integrales introducidas en el capítulo anterior cuando se emplean elementos constantes y cuadráticos en problemas de elasticidad. Por último mostraremos algunos ejemplos que se implementaron en este programa.

3.1 Lenguaje de Programación FORTRAN

FORTRAN es un lenguaje de programación para el desarrollo de aplicaciones matemáticas, científicas y de ingeniería, su nombre proviene del inglés (Formula Translating System). Este lenguaje se utiliza principalmente para las aplicaciones científicas y el análisis numérico. FORTRAN desde sus inicios dominó el área de la programación y se ha mantenido su desarrollo y aplicación por más de 50 años en distintos segmentos de la ciencia. Es el más antiguo de los lenguajes de alto nivel, además de ser el más usado en la computación de alto rendimiento. Se utiliza para el desarrollo de programas que evalúan el desempeño y el posicionamiento de los supercomputadores.

A finales de 1953, John W. Backus sometió una propuesta a sus superiores en IBM para desarrollar una alternativa más práctica al lenguaje ensamblador, para programar el computador central IBM 704. El histórico equipo FORTRAN de Backus estuvo conformado por los programadores Richard Goldberg, Sheldon F. Best, Harlan Herrick, Peter Sheridan, Roy Nutt, Robert Nelson, Irving Ziller, Lois Haibt y David Sayre. Para 1954 fue terminada una

especificación del borrador para The IBM Mathematical Formula Translating System, pero no fue sino hasta 1956 cuando Backus y su equipo presentan a la directiva de IBM una alternativa al Lenguaje ensamblador para la computadora IBM 704. El lenguaje fue ampliamente adoptado por los científicos para escribir programas numéricamente intensivos, esto incentivó a los escritores de compiladores a producir compiladores que pudieran generar un código más rápido y eficiente. La inclusión en el lenguaje de un tipo de datos y de la aritmética de números complejos amplió la gama de aplicaciones para las cuales el lenguaje se adaptaba especialmente e hizo al FORTRAN especialmente adecuado para aplicaciones técnicas tales como la ingeniería eléctrica.

Este lenguaje se caracteriza por su potencia en los cálculos matemáticos, [22], pero está limitado en las aplicaciones de gestión, manejo de archivos, tratamiento de cadenas de caracteres y edición de informes, en él se puede expresar una ecuación con facilidad. Para el momento en que fue diseñado se tomo en cuenta el uso de la tarjeta perforada de 80 columnas, por lo que el orden de las instrucciones debía ser secuencial, es decir, la programación de los algoritmos era lineal, para producir cualquier alteración del orden de la lógica, se introduce la instrucción Goto. Debido al desarrollo de los métodos de programación FORTRAN también fue evolucionando de versión en versión, se le han incorporado nuevas funciones, estructuras de control y asignación dinámica de memoria, posee comandos breves para efectuar operaciones matemáticas con matrices, estas mejoras aportan información útil al compilador. Por estas razones FORTRAN no es muy usado fuera de los campos de la informática y el análisis numérico, pero permanece como el lenguaje a escoger para desempeñar tareas de computación numérica de alto rendimiento. El desarrollo del FORTRAN fue paralelo a la temprana evolución de la tecnología del compilador. De hecho, muchos avances en la teoría y el diseño de compiladores fueron motivados específicamente por la necesidad de generar código eficiente para los programas en FORTRAN.

3.2 RUTINAS y SUBRUTINAS de los códigos usados en FORTRAN para resolver los problemas de elasticidad.

Esta sección describe los códigos usados para calcular la solución de los problemas de elasticidad usando elementos constantes y cuadráticos. El código está escrito para problemas de deformación plana pero también es usado para tensiones planas, sólo con dar un valor equivalente del radio de Poisson ν . En estos códigos se calculan las integrales de frontera, resuelven el sistema de ecuaciones, se hallan los valores de los desplazamientos y tracciones en cada nodo así como, en los puntos internos. Debido a que se usaron elementos constantes y cuadráticos debemos separar las SUBRUTINAS en cada caso, ya que no son las mismas. Cada una de las RUTINAS y SUBRUTINAS que se describirán a continuación se pueden apreciar en el Brebbia y Domínguez (1989) [8].

3.2.1 Código para calcular los Problemas de Elasticidad usando Elementos Constantes (ELCONBE)

3.2.1.1 Programa Principal

ELCONBE es el programa principal del código que se utilizó para resolver problemas de elasticidad usando elementos constantes. En este programa se definen las variables que son utilizadas en reiteradas ocasiones por el programa, las dimensiones de las matrices de los desplazamientos y tracciones, las dimensiones de los vectores que almacenan las coordenadas de los nodos y puntos internos, las dimensiones de los vectores que contienen la solución de los puntos internos, además de leer y abrir los archivos de entrada y salida. Este programa realiza el llamado a cinco subrutinas las cuales son:

- **INPUTEC**: Esta subrutina lee todos los valores de entrada del programa.
- **GHMATEC**: Calcula las matrices G y H y forma el sistema de ecuaciones $AX = F$.
- **SLNPD**: Esta subrutina es empleada para resolver el sistema de ecuaciones.
- **INTEREC**: En esta subrutina calcula los valores de los desplazamientos y tensiones en los puntos internos.

- **OUTPTEC**: Imprime los valores de los desplazamientos y tracciones en los nodos, así como los valores de los desplazamientos y tracciones en los puntos internos.

Las variables usadas por el programa son las siguientes:

- **N** : Representa el número de los elementos de frontera (el número de los elementos de frontera es igual al número de nodos).
- **L** : Es el número de los puntos internos en donde los desplazamientos y tensiones son calculados.
- **M** : Es el número de los puntos extremos del elemento.
- **NC** : Es el valor del último extremo del elemento.
- **GE** : Es el módulo de forma.
- **XNU** : Es el radio de Poisson.
- **X, Y** : Es un arreglo unidimensional que almacena las coordenada de los puntos extremos del elemento frontera.
- **XM, YM** : Es un arreglo unidimensional que contiene las coordenadas del nodo J .
- **G** : Matriz de los desplazamientos de dimensiones $2N \times 2N$. Aquí se almacena la matriz A luego de aplicar las condiones de frontera.
- **H** : Es una matriz de dimensiones $2N \times 2N$, esta es la matriz de las tracciones.
- **$KODE$** : Arreglo unidimensional que contiene el tipo de frontera. Si $KODE = 0$ el valor conocido es el valor de los desplazamientos. Si $KODE = 1$ el valor conocido será el valor de la tracción.
- **FI** : Es un vector en donde se guardan las condiciones de frontera preescritas.
- **DFI** : Es el vector F del sistema global de ecuaciones. Luego de resolver el sistema este vector contendrá las soluciones de los valores desconocidos de u y p .
- **CX, CY** : Vector unidimensonal que guarda las coordenadas de los puntos internos (el máximo número de puntos internos es 20).

- **DSOL**: Valores de los desplazamientos en los puntos internos (tendremos dos desplazamientos por puntos internos).
- **SSOL**: Valores de las tracciones en los puntos internos (tendremos tres tracciones por puntos internos).

3.2.1.2 Subrutina INPUTEC

Esta subrutina lee el nombre del archivo requerido por el programa principal, así como las propiedades del material. Esta subrutina se presenta en el siguiente formato:

- *Línea de Título*: Línea que contiene el título del problema.
- *Línea de Parámetros Básicos*: Línea que contiene el número de elementos de frontera, el número de puntos extremo del elemento, el número del último extremo del elemento, el módulo de forma y radio de Poisson.
- *Línea de los puntos extremos del elemento frontera*: Lee las coordenadas de los puntos extremos del elemento en sentido contrario a las agujas del reloj y los puntos internos en sentido de las agujas del reloj.
- *Línea de las Condiciones de Frontera*: Contiene las condiciones de los valores conocidos y desconocidos sobre cada nodo en la frontera. Se conocerán los valores de los desplazamientos si $KODE = 0$ y los valores de las tracciones si $KODE = 1$.
- *Línea de las Coordenadas de los Puntos Internos*: Son leídas las coordenadas de los puntos internos.

Esta subrutina imprime el título del problema, las propiedades del material o parámetros básicos, las coordenada de los nodos y las condiciones de frontera.

3.2.1.3 Subrutina GHMATEC

Esta rutina calcula las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ y forma el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$, también hace el llamado a dos subrutinas conocidas como **EXTINEC** Y **LOCINEC** donde:

- **EXTINEC**: Calcula las entradas de las submatrices H^{ij} y G^{ij} . Ninguna de las entradas de estas matrices presentan singularidad, pues en este caso el punto de colocación no coincide con el nodo sobre elemento.

- **LOCINEC**: Calcula las entradas de la submatriz G^{ij} , cuando el punto de colocación coincide con el nodo sobre el elemento.

Luego de calcular las matrices generales $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ reordena las columnas del sistema de ecuaciones en concordancia con las condiciones de frontera para formar el sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{X}$ es un vector de valores desconocidos de dimensiones $2N$, siendo N el número de nodos, $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensiones $(2N \times 2N)$ cuyas entradas son una combinación de las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$; $\mathbf{F}$ es un vector de valores conocidos, en el código es llamado **DFI** y se obtiene al multiplicar las condiciones de fronteras preescritas por las filas de $\mathbf{G}$ o $\mathbf{H}$.

3.2.1.4 Subrutina EXTINEC

Esta subrutina calcula las submatrices H^{ij} y G^{ij} , cuando el punto de colocación no coincide con el nodo sobre el elemento. Los coeficientes son calculados por cuadratura de Gauss usando 4 puntos. Las coordenadas del punto de colocación son XP y YP .

3.2.1.5 Subrutina LOCINEC

En esta subrutina se calculan las entradas de la submatriz G^{ij} , cuando el punto de colocación coincide con el nodo sobre el elemento.

3.2.1.6 Subrutina SLNPD

Esta es una subrutina estandar que resuelve el sistema de ecuaciones general $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{F}$. Cuando la matriz $\mathbf{A}$ tiene ceros en la diagonal, la subrutina intercambia las filas de esta matriz para evitar que se encuentre un cero en los coeficientes de la diagonal de dicha matriz. Calcula los valores desconocidos y el valor del determinante de la matriz $\mathbf{A}$.

3.2.1.7 Subrutina INTEREC

Calcula los valores de los desplazamientos y tensiones en los puntos internos. Primero reordena los vectores **FI** y **DFI** de tal manera que los desplazamientos son almacenados

en **FI** y las tracciones en **DFI**. Los desplazamientos y tensiones en cualquier punto interno vienen dados por:

$$\begin{aligned} u^i &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} p^j - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma \right\} u^j, \\ \sigma_{kj}^i &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} D_{ikj} d\Gamma \right\} p^j - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} S_{ikj} d\Gamma \right\} u^j, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde

$$D_{ikj} = \frac{1}{r} \left\{ (1 - 2\nu) \left\{ \delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k} - \delta_{kj} r_{,i} \right\} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} S_{ikj} &= \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\nu) \delta_{kj} r_{,i} + \nu (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\ &\quad + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\ &\quad \left. + (1 - 2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $i, j, k = 1, 2$. Los desplazamientos u^i a lo largo de los elementos son calculados haciendo otro llamado a la subrutina **EXTINEC**. Las tensiones σ_{kj}^i son calculadas llamando a la subrutina **SIGMAEC**.

3.2.1.8 Subrutina SIGMAEC

Esta subrutina calcula los coeficientes D y S descritos en las ecuaciones (3.2) y (3.3). El proceso es similar al usado en la subrutina **EXTINEC**.

Subrutina OUTPTEC

Esta subrutina imprime los valores de los desplazamientos y tracciones en los nodos e imprime los valores de los desplazamientos y tracciones en los puntos internos.

3.2.2 Código para calcular los Problemas de Elasticidad usando Elementos Cuadráticos(ELQUABE)

3.2.2.1 Programa Principal

De igual manera que en el programa (ELCONBE), en este programa se definen las variables utilizadas estas son:

- ***N***: Representa el número de los elementos de frontera.
- ***L***: Es el número de los puntos internos en donde los desplazamientos y tensiones son calculados.
- ***GE***: Es el módulo de forma.
- ***XNU***: Es el radio de Poisson.
- ***X, Y***: Es un arreglo unidimensional que almacena las coordenada de los nodos sobre el elemento frontera.
- ***G***: Matriz de los desplazamientos de dimensiones $4N \times 6N$. Aquí se almacena la matriz ***A*** luego de aplicar las condiones de frontera.
- ***H***: Es una matriz de dimensiones $4N \times 4N$, esta es la matriz de las tracciones.
- ***KODE***: Arreglo unidimensional que contiene el tipo de frontera. Si ***KODE*** = 0 el valor conocido es el valor de los desplazamientos. Si ***KODE*** = 1 el valor conocido será el valor de la tracción.
- ***FI***: Es un vector en donde se guardan las condiciones de frontera preescritas.
- ***DFI***: Es el vector ***F*** del sistema global de ecuaciones. Luego de resolver el sistema este vector contendrá las soluciones de los valores desconocidos de ***u*** y ***p***.
- ***CX, CY***: Vector unidimensonal que guarda las coordenadas de los puntos internos (el máximo número de puntos internos es 20).
- ***DSOL***: Valores de los desplazamientos en los puntos internos (tendremos dos desplazamientos por puntos internos).
- ***SSOL***: Valores de las tracciones en los puntos internos (tendremos tres tracciones por puntos internos).

3.2.2.2 Subrutina INPUTEQ

Esta subrutina lee el nombre del archivo requerido por el programa principal, así como las propiedades del material. Esta subrutina se presenta en el siguiente formato:

- *Línea de Título*: Línea que contiene el título del problema.
- *Línea de Parámetros Básicos*: Línea que contiene el número de elementos de frontera, el número de nodos, el módulo de forma y radio de Poisson.
- *Línea de las Coordenadas de los nodos frontera*: Lee las coordenadas de los nodos en sentido contrario a las agujas del reloj y los puntos internos en sentido de las agujas del reloj.
- *Línea de las Condiciones de Frontera*: Contiene las condiciones de los valores conocidos y desconocidos sobre cada nodo en la frontera. Se conocerán los valores de los desplazamientos si $KODE = 0$ y los valores de las tracciones si $KODE = 1$.
- *Línea de las Coordenadas de los Puntos Internos*: Son leídas las coordenadas de los puntos internos.

Esta subrutina imprime el título del problema, las propiedades del material o parámetros básicos, las coordenada de los nodos y las condiciones de frontera.

3.2.2.3 Subrutina GHMATEQ

Esta rutina calcula las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ y forma el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{F}$, también hace el llamado a dos subrutinas conocidas como **EXTINEQ** Y **LOCINEQ** donde:

- **EXTINEQ**: Calcula las entradas de las submatrices $\mathbf{HW}$ y $\mathbf{GW}$ de dimensiones (2×6) , cuando el punto de colocación no coincide con los nodos sobre elemento.
- **LOCINEQ**: Calcula las entradas de la submatriz $\mathbf{GW}$, cuando el punto de colocación coincide con alguno de los nodos sobre el elemento.

Luego de calcular las matrices generales $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ se reordena las columnas del sistema de ecuaciones en concordancia con las condiciones de frontera para formar el sistema:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{X}$ es un vector de valores desconocidos. $\mathbf{A}$ es una combinación de las matrices $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$; $\mathbf{F}$ es un vector de valores conocidos, que se obtiene al multiplicar las condiciones de fronteras preescritas por las filas de $\mathbf{G}$ o $\mathbf{H}$.

3.2.2.4 Subrutina EXTINEQ

Esta subrutina calcula las submatrices $\mathbf{GW}$ y $\mathbf{HW}$ de dimensiones (2×6) , cuando el punto de colocación no coincide con ninguno de los nodos del elemento. Utiliza la cuadratura de Gauss con 10 puntos para calcular estas submatrices. Las coordenadas del punto de colocación son XP y YP . En esta subrutina se calculan los valores las funciones de interpolación, el jacobiano se calcula tomando la derivada de la transformación de la ecuación (2.55). Luego se procede a calcular las siguientes integrales de frontera:

$$\begin{aligned} GW &= \int_{\Gamma_j} u^* \phi d\Gamma = \int_{-1}^1 u^* \phi |G| d\xi, \\ HW &= \int_{\Gamma_j} p^* \phi d\Gamma = \int_{-1}^1 p^* \phi |G| d\xi. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2.2.5 Subrutina LOCINEQ

En esta subrutina se calculan las entradas de la submatriz $\mathbf{GW}$ de dimensiones (2×6) , cuando el punto de colocación coincide con uno de los nodos sobre el elemento.

3.2.2.6 Subrutina SLNPD

Esta subrutina es la misma a la descrita en ELCONBE.

3.2.2.7 Subrutina INTEREQ

Aquí se calculan los valores de los desplazamientos y tensiones en los puntos internos que vienen dados por:

$$\begin{aligned}
u^i &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \phi d\Gamma \right\} p^j - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \phi d\Gamma \right\} u^j, \\
\sigma_{kj}^i &= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} D_{ikj} \phi d\Gamma \right\} p^j - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} S_{ikj} \phi d\Gamma \right\} u^j,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde

$$D_{ikj} = \frac{1}{r} \left\{ (1 - 2\nu) \left\{ \delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k} - \delta_{kj} r_{,i} \right\} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)}, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
S_{ikj} &= \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\nu) \delta_{kj} r_{,i} + \nu (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\
&\quad + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\
&\quad \left. + (1 - 2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $i, j, k = 1, 2$. Los desplazamientos u^i son calculados haciendo otro llamado a la subrutina **EXTINEQ**. Para calcular las tensiones σ_{kj}^i se debe hacer el llamando a la subrutina **SIGMAEQ**.

3.2.2.8 Subrutina SIGMAEQ

Las integrales de los coeficientes D y S se multiplican por las funciones de forma y se calculan usando cuadratura de Gauss. El proceso es similar al que se uso en la subrutina **EXTINEQ**.

3.2.2.9 Subrutina OUTPTEQ

Esta subrutina imprime los valores de los desplazamientos y tracciones en los nodos e imprime los valores de los desplazamientos y tracciones en los puntos internos.

3.3 Ejemplos

Ejemplo 1. Lámina Rectangular

En este ejemplo se muestra el uso de los elementos constantes y cuadráticos, para un problema simple como es el caso de una lámina rectangular. Esta lámina esta sometida a una distribución de las tracciones de manera lineal en dirección horizontal, que representa la aplicación de dos momentos uno antes del nodo y otro después del nodo, ambos para las coordenadas X_1 y X_2 . Además se considera la lámina como un problema de tensiones planas, con un módulo de forma $\mu = G = 80,000 MPa$ (*megapascal*) y radio de Poisson $\nu = 0,2$. Discretizaremos la frontera de esta lámina, en elementos constantes y cuadráticos para comparar los resultados obtenidos de aplicar el **BEM** para resolver este problema de elasticidad. La frontera de la lámina rectangular se discretiza en seis elementos constantes Figura 3.1(a) y en seis elementos cuadráticos Figura 3.1(b) con los valores de las tracciones prescritas a lo largo de los elementos, y un punto interno como se puede apreciar en las siguientes figuras:

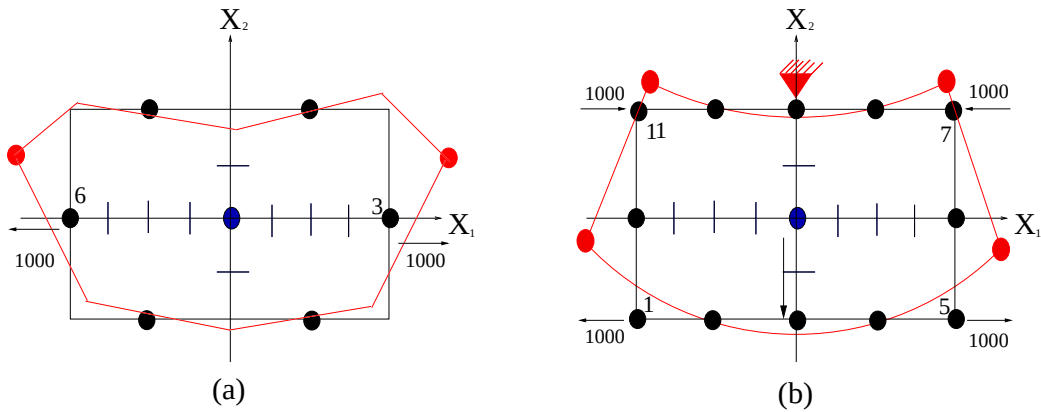


Figura 3.1: Discretización de lámina rectangular en: (a) 6 elementos constantes. (b) 6 elementos cuadráticos.

Las tracciones a lo largo de los elementos horizontales son ceros en ambas direcciones, excepto en aquellos nodos localizados en las esquinas de la lámina. El programa necesita leer un archivo de extensión *.dat* o *.doc* en donde se encuentran los datos del ejemplo a resolver, como lo son: la cantidad de los elementos, propiedades del material, coordenadas de los nodos, condiciones de frontera y coordenada de los puntos internos tal como se muestra en las

tablas 1 y 2.

En ambas tablas tendremos que si la condición de frontera es 0, el valor prescrito es el valor de los desplazamientos, y si la condición es 1, entonces el valor prescrito será el de las tracciones. También se puede observar en la Tabla 1 que en los elementos 3 y 6 el valor de la tracción es distinto de cero. En dichos elementos se tendrán nodos controles, en el caso de elementos constantes serán los nodos ubicados en las coordenadas $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ mientras que para los elementos cuadráticos son los nodos $(4, -2)$, $(4, 2)$, $(-4, 2)$ y $(-4, -2)$.

Prop. del material		Coord. Puntos internos				
$GE = 80000$		$\nu = 0,2$		$(0, 0)$		
Condiciones de Frontera						
Elem.	Coord.1	Coord.2	Cond. X		Cond. Y	
1	$(-4,-2)$	$(0,-2)$	1	0	1	0
2	$(0,-2)$	$(4,-2)$	1	0	1	0
3	$(4,-2)$	$(4,2)$	1	1000	1	0
4	$(4,2)$	$(0,2)$	1	0	1	0
5	$(0,2)$	$(-4,2)$	1	0	1	0
6	$(-4,2)$	$(-4,-2)$	1	-1000	1	0

Tabla 1. Condiciones sobre la frontera de la lámina rectangular (6 elementos constantes).

Prop. del material								Coord. Puntos internos								
$GE = 80000$						$\nu = 0,2$				$(0,0)$						
Condiciones de Frontera																
$Nodos = 12$		Nodo 1					Nodo 2					Nodo 3				
Elem.	Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y		
1	$(-4,-2)$	1	0	1	0	$(-2,-2)$	1	0	1	0	$(0,-2)$	0	0	1	0	
2	$(0,-2)$	0	0	1	0	$(2,-2)$	1	0	1	0	$(4,-2)$	1	0	1	0	
3	$(4,-2)$	1	1000	1	0	$(4,0)$	1	0	1	0	$(4,2)$	1	1000	1	0	
4	$(4,2)$	1	0	1	0	$(2,2)$	1	0	1	0	$(0,2)$	0	0	0	0	
5	$(0,2)$	0	0	0	0	$(-2,2)$	1	0	1	0	$(-4,2)$	1	0	1	0	
6	$(-4,2)$	1	-1000	1	0	$(-4,0)$	1	0	1	0	$(-4,-2)$	1	-1000	1	0	

Tabla 2. Condiciones sobre la frontera de la lámina rectangular (6 elementos cuadráticos).

Bajo las condiciones de fronteras mostradas en las Tablas 1 y 2 aplicamos el **BEM**, para hallar solución al problema de la lámina rectangular tanto para el caso en que se discretiza

la frontera con elementos constantes como, con elementos cuadráticos. Una vez aplicado el método de elemento frontera se obtienen los siguientes resultados para los desplazamientos u_1 y u_2 en los nodos controles $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ (caso elementos constantes), $(-4, -2)$, $(4, -2)$ (caso elementos cuadráticos):

Desplazamientos	6 Elem. Constantes	6 Elem. Cuadráticos
u_1	-0,00977	-0,02
u_2	0,00968	0,02

Tabla 3. Solución numérica del problema.

La solución para los desplazamientos en la lámina rectangular, se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$u_j = -w(x_1, x_2) \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \quad (3.8)$$

donde w es la flecha o descenso vertical en la lámina rectangular y se define como:

$$w(x_1, x_2) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right)}{\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]}, \quad (3.9)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$, a es la longitud y b el ancho de la lámina, q es la carga por unidad de área y,

$$D = \frac{Eh^3}{[12(1 - \nu)]}, \quad (3.10)$$

donde E es el módulo de elasticidad, h es el grosor de la lámina y ν el radio de Poisson. Debido a que la serie de la expresión (3.9) converge rápidamente, sólo basta con tomar seis elementos de la serie para aproximar la solución de los desplazamientos.

Ahora bien, con el objeto de analizar que tan eficiente es el método numérico empleado y comparar los resultados obtenidos cuando se usan elementos constantes y cuadráticos con la solución analítica, se debe calcular el error porcentual en norma euclídeana (norma 2). Los

resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.

Nodos(1 – 5) y (3 – 6)		6 Elem. Constantes		6 Elem. Cuadráticos	
Desplazamientos	Sol.Analítica	Valor	Error(%)	Valor	Error(%)
u_1	-0,02	-0,00977	51,15 %	-0,01999	0,05 %
u_2	0,02	0,00968	51,16 %	0,02	0 %

Tabla 4. Comparación del método numérico y solución analítica del problema.

En la Tabla 4 se puede apreciar los resultados que se obtienen al aplicar el método numérico con seis elementos constantes y cuadráticos, así como el valor exacto del desplazamiento del problema. También se puede observar que el error porcentual en el caso en que tenemos elementos constantes es de 51,15 % mientras que, para elementos cuadráticos no supera el 0,05 % dejando ver en este ejemplo que cuando se implementa el método de elemento frontera con seis elementos cuadráticos, la solución numérica se aproxima a la solución exacta del problema.

Se fue incrementando el número de elementos sin obtener buenos resultados, finalmente, se utilizaron 50 elementos constantes teniendo en este caso que sobre los nodos controles (-4,-1.84) y (4,1.84), el valor de los desplazamientos es: $u_1 = -0,0157$ y $u_2 = 0,0165$ con error de aproximación de 21,5 % y 17,5 % respectivamente. Comparando estos resultados con la solución exacta del problema se aprecia que la solución numérica que se obtiene cuando usamos 50 elementos constantes no se acerca a la solución analítica. Para saber que tan eficiente es el uso de los elementos constantes, conviene estudiar lo que ocurre con el puente voladizo (Viga Cantilever).

Ejemplo 2. Viga en Voladizo

Esta viga que ha sido discretizada usando doce elementos constantes y cuadráticos, se caracteriza por estar apoyada en el extremo izquierdo mediante un empotramiento, en dicho extremo se considera que el desplazamiento horizontal es nulo. Los desplazamientos de los nodos inferiores de las esquinas son ambos iguales a cero. La longitud de la viga es de

20cm, la fuerza aplicada $\tau_0 = 1500\text{Mpa}$, el módulo de elasticidad $G = 80,000\text{Mpa}$ y el radio de Poisson $\nu = 0,2$. Además, supondremos que la deformación debido a su propio peso es despreciable.

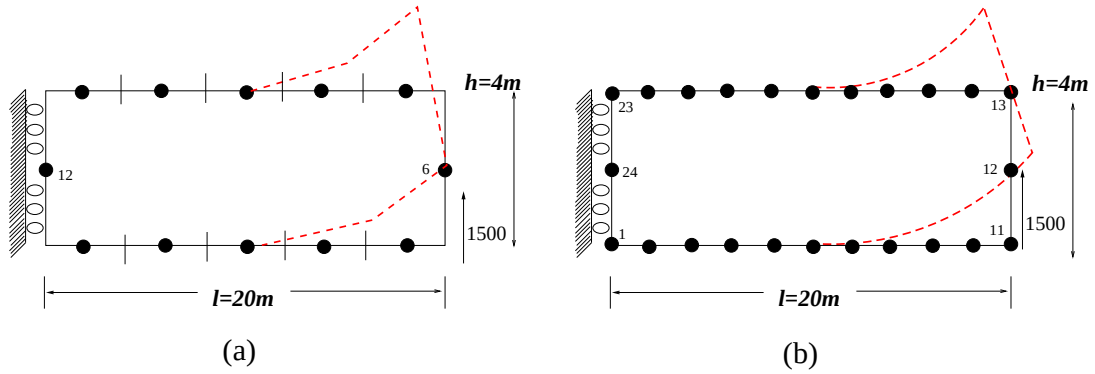


Figura 3.2: Discretización de viga Cantilever: (a) 12 elementos constantes. (b) 12 elementos cuadráticos.

El desplazamiento vertical máximo para la viga en voladizo se define de la siguiente manera:

$$u_2 = \frac{Pl^2}{3EI}, \quad (3.11)$$

donde:

- P es la carga máxima aplicada sobre la viga.
- l es la longitud de la viga.
- E es el módulo de elasticidad.
- I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, que está dado por:

$$I = \frac{h^3d}{12}, \quad (3.12)$$

dende h es la altura de la viga y d es la profundidad de la misma. La distribución de las tensiones a lo largo de la parte fija de la viga será lineal y se define como:

$$\sigma = \frac{Mh}{2I}, \quad (3.13)$$

en donde:

- M es el momento flector de la viga.
- h es la altura que existe entre la base de la viga y su parte superior.
- I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.

Las condiciones sobre la frontera para la viga vienen dadas en las tablas 5 y 6 que se muestran a continuación.

Prop. del material			Coord. Puntos internos			
$GE = 80000$		$\nu = 0,2$	$(10, 2)$			
Condiciones de Frontera						
Elem.	Coord.1	Coord.2	Cond. X		Cond. Y	
1	(0,0)	(4,0)	1	0	1	0
2	(4,0)	(8,0)	1	0	1	0
3	(8,0)	(12,0)	1	0	1	0
4	(12,0)	(16,0)	1	0	1	0
5	(16,0)	(20,0)	1	0	1	0
6	(20,0)	(20,4)	1	0	1	1500
7	(20,4)	(16,4)	1	0	1	0
8	(16,4)	(12,4)	1	0	1	0
9	(12,4)	(8,4)	1	0	1	0
10	(8,4)	(4,4)	1	0	1	0
11	(4,4)	(0,4)	1	0	1	0
12	(0,4)	(0,0)	0	0	1	-1500

Tabla 5. Condiciones de sobre la frontera de la viga Cantilever (12 elementos constantes)

Prop. del material						Coord. Puntos internos											
GE = 80000						ν = 0,2			(10, 2)								
Condiciones de Frontera																	
Nodos = 24	Nodo 1					Nodo 2					Nodo 3						
	Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y			
1	(0,0)	1	0	0	0	(2,0)	1	0	1	0	(4,0)	1	0	1	0		
2	(4,0)	1	0	1	0	(6,0)	1	0	1	0	(8,0)	1	0	1	0		
3	(8,0)	1	0	1	0	(10,0)	1	0	1	0	(12,0)	1	0	1	0		
4	(12,0)	1	0	1	0	(14,0)	1	0	1	0	(16,0)	1	0	1	0		
5	(16,0)	1	0	1	0	(18,0)	1	0	1	0	(20,0)	1	0	1	0		
6	(20,0)	1	0	1	0	(20,2)	1	0	1	1500	(20,4)	1	0	1	0		
7	(20,4)	1	0	1	0	(18,4)	1	0	1	0	(16,4)	1	0	1	0		
8	(16,4)	1	0	1	0	(14,4)	1	0	1	0	(12,4)	1	0	1	0		
9	(12,4)	1	0	1	0	(10,4)	1	0	1	0	(8,4)	1	0	1	0		
10	(8,4)	1	0	1	0	(6,4)	1	0	1	0	(4,4)	1	0	1	0		
11	(4,4)	1	0	1	0	(2,4)	1	0	1	0	(0,4)	1	0	1	0		
12	(0,4)	0	0	1	0	(0,2)	0	0	1	-1500	(0,0)	0	0	1	0		

Tabla 6. Condiciones sobre la frontera de la viga Cantilever (12 elementos cuadráticos)

El desplazamiento vertical y la tracción normal en los nodos controles, cuyas coordemadas son $(20, 2)$ y $(0, 2)$, respectivamente (caso elementos constantes), y $(20, 0)$, $(20, 2)$, $(20, 4)$ y $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 4)$ (caso elementos cuadráticos), se pueden calcular fácilmente por medio de las ecuaciones (3.11) y (3.13) obteniendo el siguiente resultado:

$$u_2 = \frac{Pl^2}{3EI} = 10mm, \quad \sigma = \frac{Mh}{2I} = 30Mpa. \quad (3.14)$$

La Tabla 7 muestra los resultados obtenidos de los desplazamientos y tracciones en los nodos controles de la solución analítica y la solución numérica.

12 Elem. Constantes								12 Elem. Cuadráticos									
Desp. Vert.				Trac. Normal				Desp. Vert.				Trac. Normal					
N.	S.A	S.N	E.(%)	N.	S.A	S.N	E.(%)	N.	S.A	S.N	E.(%)	N.	S.A	S.N	E.(%)		
						A.N	D.N								A.N	D.N	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	11	10,166	10,16643	0,004%	23	29,835	0	29,83500	0%
6	10,166	0,653	94,16	12	0	−0,0011	−0,0011	0	12	10,169	10,16922	0,002%	24	0	0	0	0%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	10,166	10,16643	0,004%	1	−29,853	−29,85300	0	0%

Tabla 7. Comparación del método numérico y solución analítica del problema.

En la Tabla 7, N es el nodo, S.A la solución analítica, S.N es la solución numérica, E.(%) es el error porcentual, A.N significa antes del nodo y D.N después del nodo. En dicha tabla se puede ver que el error porcentual que se obtiene cuando se trabaja con elementos cuadráticos no supera el 0,004 % mientras que si se usa elementos constantes este error es muy grande. Estos resultados sugieren que existe mejor aproximación a la solución analítica cuando se utiliza elementos cuadráticos. En vista de que existe una mejor aproximación de la solución del problema cuando se usa elementos cuadráticos, es interesante estudiar el caso en que se resuelve este mismo ejemplo pero ahora incrementando el número de elementos constantes. Consideremos ahora una discretización de la viga con veintidos elementos constantes con las condiciones de frontera dadas en la Tabla 8.

Prop. del material			Coord. Puntos internos			
$GE = 80000$		$\nu = 0,2$	$(10, 2)$			
Condiciones de Frontera						
Elem.	Coord.1	Coord.2	Cond. X		Cond. Y	
1	(0,0)	(2,0)	1	0	1	0
2	(2,0)	(4,0)	1	0	1	0
3	(4,0)	(6,0)	1	0	1	0
4	(6,0)	(8,0)	1	0	1	0
5	(8,0)	(10,0)	1	0	1	0
6	(10,0)	(12,0)	1	0	1	0
7	(12,0)	(14,0)	1	0	1	0
8	(14,0)	(16,0)	1	0	1	0
9	(16,0)	(18,0)	1	0	1	0
10	(18,0)	(20,0)	1	0	1	0
11	(20,0)	(20,4)	1	0	1	1500
12	(20,4)	(18,4)	1	0	1	0
13	(18,4)	(16,4)	1	0	1	0
14	(16,4)	(14,4)	1	0	1	0
15	(14,4)	(12,4)	1	0	1	0
16	(12,4)	(10,4)	1	0	1	0
17	(10,4)	(8,4)	1	0	1	0
18	(8,4)	(6,4)	1	0	1	0
19	(6,4)	(4,4)	1	0	1	0
20	(4,4)	(2,4)	1	0	1	0
21	(2,4)	(0,4)	1	0	1	0
22	(0,4)	(0,0)	0	0	1	-1500

Tabla 8. Condiciones sobre la frontera la viga Cantilever.(22 elementos constantes)

En este caso el valor del desplazamiento vertical en el nodo control con coordenadas (20, 2) es 1,156 y la tracción normal en el nodo control de coordenadas (0, 2) es 0. La tracción nor-

mal aumenta sólo en el caso en que se consideran elementos cuadráticos. El error porcentual es de 88,65 %, al comparar este resultado con el obtenido cuando usamos doce elementos constantes se observa, que si bien el error disminuyó los resultados aún siguen siendo pobres.

En estos ejemplos en donde una estructura sólida está sometida a deformación y deflección, los elementos cuadráticos arrojan resultados óptimos y muy aceptables cuando se comparan con la solución analítica del problema, esto no ocurre cuando se usan elementos constantes ya que en este caso se obtienen resultados no admisibles. A pesar de que al usar elementos constantes en estos ejemplos se tienen resultados pobres, no significa que no pueden dar buenos resultados cuando se aplican a otros problemas.

Ejemplo 3. Cavidad Circular

Consideremos un medio infinito en el cual se describe una cavidad circular de 1000m de diámetro y sometida a tensión radial en los puntos internos. La frontera es discretizada en veinticuatro elementos constantes y doce elementos cuadráticos con cinco puntos internos. El módulo de forma es $G = 94,500Mpa$ y el radio de poisson es $\nu = 0,1$. Tanto para el caso en que usemos elementos constantes y cuadráticos se supondrá que el desplazamiento vertical en el nodo 18 es cero, esto se hace para evitar el movimiento del cuerpo. En vista de que el dominio se encuentra sometido a presión interna, se va comparar el resultado en las tensiones de los puntos internos obtenidos de aplicar el método con la solución analítica. La figura de la cavidad circular se muestra a continuación:

Prop. del material			Coord. Puntos internos		
$GE = 94,500$		$\nu = 0,1$	$(-4, 0); (2,82, 2,82); (4, 0); (6, 0); (10, 0)$		
Condiciones de Frontera					
Elem.	Coord.1	Coord.2	Cond. X		Cond. Y
1	(-0.39,-2.97)	(-1.14,-2.77)	1	-25.88	1
2	(-1.14,-2.77)	(-1.82,-2.38)	1	-50	1
3	(-1.82,-2.38)	(-2.38,-1.82)	1	-70.71	1
4	(-2.38,-1.82)	(-2.77,-1.14)	1	-86.6	1
5	(-2.77,-1.14)	(-2.97,-0.39)	1	-96.59	1
6	(-2.97,-0.39)	(-2.97,0.39)	1	-100	0
7	(-2.97,0.39)	(-2.77,1.14)	1	-96.59	1
8	(-2.77,1.14)	(-2.38,1.82)	1	-86.6	1
9	(-2.38,1.82)	(-1.82,2.38)	1	-70.71	1
10	(-1.82,2.38)	(-1.14,2.77)	1	-50	1
11	(-1.14,2.77)	(-0.39,2.97)	1	-25.88	1
12	(-0.39,2.97)	(0.39,2.97)	0	0	1
13	(0.39,2.97)	(1.14,2.77)	1	25.88	1
14	(1.14,2.77)	(1.82,2.38)	1	50	1
15	(1.82,2.38)	(2.38,1.82)	1	70.71	1
16	(2.38,1.82)	(2.77,1.14)	1	86.6	1
17	(2.77,1.14)	(2.97,0.39)	1	96.59	1
18	(2.97,0.39)	(2.97,-0.39)	1	100	0
19	(2.97,-0.39)	(2.77,-1.14)	1	96.59	1
20	(2.77,-1.14)	(2.38,-1.82)	1	86.6	1
21	(2.38,-1.82)	(1.82,-2.38)	1	70.71	1
22	(1.82,-2.38)	(1.14,-2.77)	0	50	1
23	(1.14,-2.77)	(0.39,-2.97)	0	25.88	1
24	(0.39,-2.97)	(-0.39,-2.97)	0	0	1

Tabla 9. Condiciones sobre la frontera la cavidad circular.(24 elementos constantes)

Prop. del material						Coord. Puntos internos									
$GE = 94,500$				$\nu = 0,1$		$(-4, 0); (2,82, 2,82); (4, 0); (6, 0); (10, 0)$									
Condiciones de Frontera															
$Nodos = 24$	Nodo 1					Nodo 2					Nodo 3				
Elem.	Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y		Coord.	Cond. X		Cond. Y	
1	(-0.76,-2.87)	1	-25.88	1	-96.59	(-1.48,-2.57)	1	-50	1	-86.6	(-2.10,-2.10)	1	-70.71	1	-70.71
2	(-2.10,-2.10)	1	-70.71	1	-70.71	(-2.57,-1.48)	1	-86.6	1	-50	(-2.87,-0.76)	1	-96.59	1	-25.88
3	(-2.87,-0.76)	1	-96.59	1	-25.88	(-2.97,0)	1	-100	0	0	(-2.87,0.76)	1	-96.59	1	25.88
4	(-2.87,0.76)	1	-96.59	1	25.88	(-2.57,1.48)	1	-86.6	1	50	(-2.10,2.10)	1	-70.71	1	70.71
5	(-2.10,2.10)	1	-70.71	1	70.71	(-1.48,2.57)	1	-50	1	86.6	(-0.76,2.87)	1	-25.88	1	96.59
6	(-0.76,2.87)	1	-25.88	1	96.59	(0,2.97)	0	0	1	100	(0.76,2.87)	1	25.88	1	96.59
7	(0.76,2.87)	1	25.88	1	96.59	(1.48,2.57)	1	50	1	86.6	(2.10,2.10)	1	70.71	1	70.71
8	(2.10,2.10)	1	70.71	1	70.71	(2.57,1.48)	1	86.6	1	50	(2.87,0.76)	1	96.59	1	25.88
9	(2.87,0.76)	1	25.88	1	96.59	(2.97,0)	1	100	0	0	(2.87,-0.76)	1	96.59	1	-25.88
10	(2.87,-0.76)	1	96.59	1	-25.88	(2.57,-1.48)	1	86.6	1	-50	(2.10,-2.10)	1	70.71	1	-70.71
11	(2.10,-2.10)	1	70.71	1	-70.71	(1.48,-2.57)	1	50	1	-86.6	(0.76,-2.87)	1	25.88	1	-96.59
12	(0.76,-2.87)	1	25.88	1	-96.59	(0,-2.97)	0	0	1	-100	(-0.76,-2.87)	1	-25.88	1	-96.59

Tabla 10. Condiciones sobre la frontera de la cavidad circular (12 elementos cuadráticos)

Luego de implementar el método se obtienen los siguientes resultados:

24 Elem. Constantes				12 Elem. Cuadráticos			
Dist. centro	Sol. E	Sol. N	Err.(%)	Dist. centro	Sol. E	Sol. N	Err.(%)
4	-56,25	-57,234	1,75 %	4	-56,25	-55,275	1,73 %
6	-25,00	-25,295	1,18 %	6	-25,00	-24,565	1,74 %
10	-9,00	-9,106	1,17 %	10	-9,00	-8,844	1,73 %

Tabla 11. Comparación de las tensiones en los puntos internos del método numérico y solución analítica del problema.

En la Tabla 11 se observa que el error no supera el 1,75 % que es un error muy bajo comparado con los obtenidos en los ejemplos anteriores para el caso en que se usa elementos constantes, además las tensiones tienden a cero a medida que se incrementa la distancia del centro de la cavidad a los puntos internos debido a que en el centro es donde se concentra la mayor presión interna. Los elementos cuadráticos no dan una solución muy aproximada del problema como se vió en los ejemplos anteriores, aunque se tienen muy buenos resultados

tanto de estos elementos, como de los constantes cuando son comparados con la solución analítica del problema.

Como se pudo apreciar en este ejemplo, el uso de los elementos constantes arrojaron excelente resultados numéricos, debido a que las condiciones sobre la frontera están dispuesta de manera especial esto hace que, el ejemplo sea ideal para aplicar el BEM con elementos constantes. Si se resuelve el mismo ejemplo, pero con otras condiciones de frontera se tendrá que los resultados obtenidos no se aproximan a la solución analítica, ya que, los elementos constantes no se ajustan a la geometría del problema.

En los ejemplos estudiados en este capítulo se pudo comparar lo eficiente que es el método de elemento frontera cuando se usan elementos cuadráticos, para problemas en donde se requieran de fuerzas para deformar una estructura sólida, mientras que si se utilizan elementos constantes se tiene que el método no es muy efectivo pues no arrojan buenos resultados.

Conclusiones y Recomendaciones

Con este trabajo se quizó estudiar la eficiencia de la implementación del Método de Elemento Frontera para problemas de elasticidad plana usando elementos constantes y cuadráticos. El **BEM** sólo requiere de la discretización de la frontera del dominio, esto hace que el método sea idóneo para encontrar una solución numérica a los problemas de elasticidad que fueron presentados en este trabajo. Además, este método nos proporciona resultados en cualquier punto sobre el dominio cuando se conocen las condiciones de frontera.

Después de estudiar los ejemplos presentados en este trabajo, podemos concluir que cuando aplicamos el método de elemento frontera usando elementos constantes, hay que considerar que las características específicas del problema, juegan un rol muy importante a la hora de aplicar el **BEM**. Esto se debe a que esas características influyen en el resultado obtenido, se garantiza la convergencia del método con elementos constantes sólo en casos especiales, por ejemplo, la lámina rectangular y la viga se encuentran sometidas a deformación y deflexión, respectivamente, debido a los esfuerzos que se ejercen sobre ambas estructuras. Estas fuerzas producen un movimiento vertical que impiden que la aproximación de las soluciones sean precisas, pues estos elementos constantes no se ajustan perfectamente a la geometría del problema. Sin embargo, para la cavidad circular si se obtienen excelentes resultados de la solución del problema esto se debe a que en este caso las condiciones sobre la frontera están colocadas de manera especial, además el ejemplo esta hecho de tal manera que el método converga cuando se usan elementos constantes, pero si se modifican las condiciones sobre la frontera se tendrán resultados ineficientes. De todo esto, se deduce que el método no converge cuando se utilizan elementos constantes. Sin embargo, los cuadráticos se ajustan mejor a la geometría del problema esto permite que al implementar el método con estos elementos se obtengan resultados muy precisos, sin importar si el dominio está sometido a deformación, deflexión o tensiones internas. Si bien, en el caso de la cavidad circular no se tienen resultados tan exactos, los mismos son buenas aproximaciones de la solución, esto deja ver que siempre que se aplique el método utilizando elementos cuadráticos se asegura la convergencia

del método de elemento frontera. Si bien, el método converge cuando se utiliza elementos cuadráticos cabe destacar que esta convergencia se logra sin tener en cuenta la geometría del problema debido a que una de las ventajas del método es que permite modelar problemas con un dominio regular e irregular, así como, dominios finitos e infinitos.

Se recomienda aplicar el método de elemento frontera a problemas de elasticidad utilizando elementos cuadráticos, así como el uso de estos elementos o de orden superior para resolver problemas de potencial.

Bibliografía

- [1] C. Somigliana. *Sopra l'equilibrio de un corpo elastico isotrope. II Nuovo Ciminto*. Serie III, 20:181-185, 1886.
- [2] G. H. Fredholm. *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Math, 27:365-390, 1903.
- [3] Rizzo, F. J. *An integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. Quarterly of Applied Mathematic, 25, 83-95, 1967.
- [4] Jaswon, M. A. and Symm, G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press, London, 1977.
- [5] Cruse, T. A. and Rizzo. *A Direct Formulation and Numerical Solution of de General Transient Elastodynamic Problem I*, Journal of Math. Analysis and Applications, 22, 244, 1968.
- [6] Cruse, T. A. *A Direct Formulation and Numerical Solution of de General Transient Elastodynamic Problem II*, Journal of Math. Analysis and Applications, 22, 341, 1968.
- [7] Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York, 1944.
- [8] Brebbia, C y Dominguez, J. *Boundary Elements An Introductory Course*. Segunda Edición, 1989.
- [9] O. D Kellogg *Foundations of Potential Theory*. J. Springer, Berlin, 1929.
- [10] Hess, J. L. and Smith, A. M. O. *Calculation of Potencial Flow about Arbitrary Bodies*. Progress in Aeronautical Sciences Vol.8. Ed. D. Kuchemann, Pergamon Press, London, 1967.
- [11] Jaswon, M. *Integral Equation Methods in Potential Theory*. I. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 275, 23-32, 1963.

- [12] Symm, G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory*. I. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 275, 33-46, 1963.
- [13] Nakaguma, R. K. *Three dimensional elastostatics using the boundary element method*. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1979.
- [14] Wikipedia. [http : //es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke](http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke).
- [15] Pérez Gavilán, JJ. *Introducción a los Elementos de Frontera*. Centro de Investigaciones de Matemáticas, A.C, 2006.
- [16] Ocwus. [http : //ocwus.us.es/mecanica – de – medios – continuos – y – teoria – de – estructuras/calculo – de – estructuras – 1/apartados/apartado21.html](http://ocwus.us.es/mecanica-de-medios-continuos-y-teoria-de-estructuras/calculo-de-estructuras-1/apartados/apartado21.html).
- [17] Marante, M. E. *Evaluación de la seguridad estructural. Contribuciones a la teoría del daño concentrado, a la mecánica computacional de la fractura y a la teoría de localización*. Ph.D Tesis, Universidad de los Andes, 2004.
- [18] Hartmann F. *Computing the C-matrix in non-smooth boundary points*. In New Developments in BEM (Brebbia Ed.), Butterworths, London, 1980.
- [19] Kane J.H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [20] Wikipedia. [http : //es.wikipedia.org/wiki/Valor_principal_de_Cauchy](http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_principal_de_Cauchy).
- [21] Brebbia, C, Telles J. C y Wrobel L. C. *Boundary Elements Techniques*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.
- [22] Fortran. [http : //es.wikipedia.org/wiki/Fortran](http://es.wikipedia.org/wiki/Fortran).

Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.