



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE COMPUTACIÓN GRÁFICA Y GEOMETRÍA
APLICADA.

El Círculo Guía de una Cíclide.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por
el **Br. Carlos L. González R.** para optar al
título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Francisco Tovar.

Caracas, Venezuela
Mayo 2010.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**El Círculo Guía de una Cíclide**”, presentado por el **Br. Carlos L. González R**, titular de la Cédula de Identidad **17.980.310**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Francisco Tovar
Tutor

Dr. Tomás Guardia
Jurado

Dr. Julio Daza
Jurado

A mis abuelos..
Miriam, Silveria y Julian.

Agradecimiento

- A Dios por haber puesto las Matemáticas en el camino de mi vida.
- A mis Abuelas Rosa Miriam Salgado y Silveria de Jesús Barrios, por estar conmigo en todo momento y por el apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de mi vida.
- A la memoria de mi Abuelo Julian González por todos sus consejos, por su apoyo incondicional y por ser el MEJOR abuelo que alguien pudo haber tenido, siempre estarás en mi corazón.
- A la memoria de mi Abuelo Aristides Ramirez, ausente físicamente pero presente en mi corazón.
- A mi Madre Arismir Corina Ramirez, por haberme traído a este mundo y por darme su cariño infinito.
- A mi Padre Luis Emilio González, por el apoyo infinito en todo momento y por ser el pilar fundamental en mi formación académica como futuro matemático. Sin ti nada de esto sería posible.
- A mi Hermanita Daniela Carolina González, por ser la mejor hermana de este mundo y llenar mi vida de mucha alegría.
- A mi Tía Elimir Ramirez, por su apoyo incondicional y por tratarme como su hijo.
- A mi Padrino Kildare Alarcón, por estar siempre pendiente de cada paso que doy en mi vida. El mejor padrino que se puede tener.
- A mis tíos y tía: Jorge Ramirez, Angel González, Carlos González, Jesus González, Ana González por estar siempre pendiente de mí.
- A mis primos y primas: Genesis, Jonathan, Anderson, Cesar (El chino), Jesusito, Andreita, Natasha, Gabriela, Alejandro. Por haber compartido gran parte de mi vida con ellos y por servir de ejemplo a los más pequeños.
- Al Sr. Hector Herrera, que con el poco tiempo que llevas en nuestra familia has demostrado ser un gran ser humano.
- A Freysimar Solano, por haberme soportado durante toda la carrera y brindarme todo su apoyo incondicionalmente. Gracias por ser tan especial.
- Al Profesor Francisco Tovar, por haberme dado la oportunidad de trabajar bajo su tutoría.

- A los profesores, Mauricio Angel, Giovanni Figueroa, Marco Paluszny, Jocer Franquiz, Cristina Balderrama, Juan Guevara, Tomas Guardia, por todo el valioso conocimiento que me otorgaron durante mis cinco años de carrera.
- A mis amigos, Jonathan Otero, Angel Padilla, Mayerlin Galindez, Lorenzo Castagno, Ricardo Franquiz, Alejandra Granadillo, Natasha Egurrola, Sacha Oropeza, Adriana Padrón, Mariana Garcia, Edgar Leal, Eduardo Roa, Juan Becerra, Anderson De Araujo, por haber compartido con ellos parte importante de mi vida.
- A mis panas del CGGA, Arquimides, Daniel, Evelyn, Gustavo, Daniela, Julian, por todo el apoyo moral.

A todos, de verdad muchas muchas gracias.

Carlos Luis.

Índice general

Introducción	6
1. Preliminares	9
1.1. Polinomios de Bernstein	9
1.2. Curvas de Bézier Polinomiales	11
1.3. Algoritmo de de Casteljau	13
1.4. Rectas tangentes a una curva de Bézier.	15
1.5. Curvas de Bézier Racionales.	16
1.6. Superficie Envolvente	18
2. Modelo de Dan Pedoe.	19
2.1. Descripción del Modelo.	19
2.2. Ángulo de intersección entre 2 esferas.	22
2.3. Correspondencia de rectas y haces de esferas.	24
2.4. Correspondencia entre cónicas de Bézier y haces de esferas.	29
3. Cíclides Generales y el Círculo Guía.	31
3.1. Despliegue de una Cíclide General.	33
3.2. La recta conjugada de un 2-plano.	35
3.3. El Círculo Guía de una Cíclide.	41
3.4. Propiedades invariantes del círculo guía.	43
3.5. Splines Cuadráticos.	48
Conclusión	49
Bibliografía	51

Introducción

Una cíclide general es una superficie tubular definida por la envolvente de una familia cuadrática monoparamétrica de esferas en el espacio Euclídeo. Las Cíclides generales son las principales primitivas geométricas usadas en la modelación de estructuras tubulares de radio constante o variable y de conexión suave. Estas superficies han sido estudiadas por importantes geómetras en el área de C.A.G.D (Computer Aided Geometric Design) durante los últimos 20 años, cabe destacar a W. Boehm, Pottman, Larry Schumaker, entre otros. Diversos modelos matemáticos se emplean en el estudio de las cíclides, por ejemplo: el modelo propuesto por Dan Pedoe, el modelo de Moebius y el modelo de Laguerre. En este trabajo se emplea el modelo propuesto por Dan Pedoe el cual establece una correspondencia biyectiva entre puntos que yacen en el exterior de una cuádrica $\varphi \subset \mathbb{R}^4$, que denotaremos por φ^+ y esferas y/o puntos en el espacio 3D. A partir de esta correspondencia se establece también una correspondencia entre rectas que yacen en φ^+ con círculos en 3D.

Al considerar una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$, se obtiene una familia cuadrática monoparamétrica de esferas en $\mathbb{R}^3$ y la superficie envolvente de dicha familia será la cíclide asociada a la cónica $\mathbb{b}$. Las rectas tangentes a $\mathbb{b}$ se corresponden a las secciones circulares de la envolvente (ver Figura 1), las cuales serán de gran ayuda para el despliegue de su gráfico sin hacer uso su ecuación implícita.

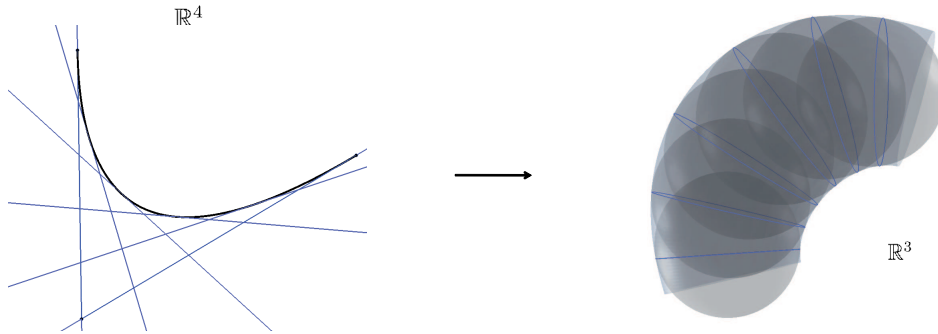


Figura 1: Rectas tangentes a la cónica $\mathbb{b}(t)$ y las secciones circulares de la cíclide.

Independientemente del modelo usado para construir una cíclide, esta superficie tiene asociado un círculo muy especial denominado *círculo guía*, ver [3], el cual aparece por la propiedad de ortogonalidad entre las esferas, ver [1]. Es nuestro interés estudiar este círculo y su relación con la forma de

la cíclice. Para ello, se llevó a cabo el diseño de una interfaz gráfica con el software MATLAB 2008 que permite la visualización de los resultados.

El manuscrito está estructurado de la siguiente forma:

1. En el Capítulo 1, se comienza con la definición de los polinomios de Bernstein y el estudio de algunas propiedades importantes de estos; A partir de estos polinomios se definen unas curvas muy importantes en la modelación geométrica que se denominan curvas de Bézier, estudiándose alguna de sus propiedades más importantes como por ejemplo la interpolación y la tangencia. Luego, se describe un algoritmo muy eficiente para el despliegue de estas curvas conocido como Algoritmo de de Casteljau. Por último se define superficie envolvente.
2. En el Capítulo 2, se describe el modelo de Dan Pedoe, extendiendo la idea original a una dimensión mayor, estableciendo una correspondencia biyectiva entre puntos de $\mathbb{R}^4$ que yacen en el exterior de una cuádrica muy particular (φ) y esferas y/o puntos de $\mathbb{R}^3$. A partir de esta correspondencia se establece también una correspondencia entre rectas de $\mathbb{R}^4$ que no cortan a φ y círculos en 3D.
3. En el Capítulo 3, se introduce la definición de cíclice general, como la superficie envolvente de una familia monoparamétrica de esferas en 3D. En este trabajo una cíclice se define como la envolvente de una familia monoparamétrica de esferas generada por una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$. Por último se define el círculo guía asociado a una cíclice el cual se corresponde con la recta conjugada del 2-plano que contiene a la cónica $\mathbb{b}(t) \subset \mathbb{R}^4$ y se estudian algunas propiedades interesantes que relacionan este círculo con la cíclice.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se definen los Polinomios de Bernstein¹ de grado n y se describen sus propiedades, usando estos polinomios se definen las curvas de Bézier Polinomiales. Se estudia el algoritmo de de Casteljau, el cual optimiza el despliegue de una curva de Bézier y permite calcular la recta tangente en cada punto de la curva de Bézier. Este cálculo será de gran importancia para la construcción de una cíclice. Por último se trata la definición de envolvente de una familia de superficies y como se determina su ecuación.

1.1. Polinomios de Bernstein

Definición 1.1 Sean n un número natural. Se denomina **Polinomios de Bernstein** de grado n , a las expresiones de la forma:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \text{ donde } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

Estos polinomios tienen las siguientes propiedades:

1. El conjunto

$$\mathbb{B}^n = \{B_i^n(t) : 0 \leq i \leq n\}$$

forma una base para los polinomios de grado menor o igual a n .

2. El conjunto $\mathbb{B}^n$ está relacionado de la siguiente manera con la base canónica de los polinomios de grado menor o igual a n :

$$t^i = \sum_{j=i}^n \frac{\binom{j}{i}}{\binom{n}{i}} B_j^n(t) \text{ y además, } B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j$$

¹S. Bernstein, (1880-1968), Matemático Ucraniano. Su tesis de doctorado presentada en la Sorbona en 1904 resolvía el 19º problema de Hilbert.

Demostración

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(t) &= \sum_{j=k}^n \frac{\frac{j!}{(j-k)!k!}}{\frac{n!}{(n-k)!k!}} \frac{n!}{(n-j)!j!} t^j (1-t)^{n-j} = \dots \\
\sum_{j=k}^n \frac{(n-k)!(1-t)^{n-j}}{(j-k)!(n-j)!} t^j &= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-j-k)!} t^{j+k} (1-t)^{n-j-k} = \dots \\
t^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} t^j (1-t)^{n-k-j} &= t^k (t + 1 - t)^{n-k} = t^k.
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i} t^i (t-1)^{n-i} \\
&= (-1)^{n-i} \binom{n}{i} t^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} t^j (-1)^{n-i-j} \\
&= (-1)^{n-i} \binom{n}{i} t^i \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{j-i} t^{j-i} (-1)^{n-j} \\
&= \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} t^{j-i} (-1)^{i-j}, \quad \text{ya que:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(j-i)!(n-j)!} = \frac{n!}{(j-i)!(n-j)!i!} \\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{j!}{i!(j-i)!} = \binom{n}{j} \binom{j}{i}
\end{aligned}$$

por lo tanto, se puede escribir:

$$B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} t^{j-i} (-1)^{i-j} = \sum_{j=i}^n (-1)^{i-j} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^{j-i}.$$

□

3. Son simétricos con respecto de t y de $(1-t)$, esto es:

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t).$$

4. $\mathbb{B}^n$ forma una partición de la unidad:

Demostración:

$$1 = (t + 1 - t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t).$$

□

5. Son recursivos:

$$B_i^{n+1}(u) = uB_{i-1}^n(u) + (1 - u)B_i^n(u),$$

donde:

$$B_{-1}^n(u) = B_{n+1}^n(u) = 0 \text{ y } B_0^0(u) = 1$$

En la Figura 1.1 se ilustran los polinomios de Bernstein para $n = 5$, $i = 0, 1, \dots, 5$

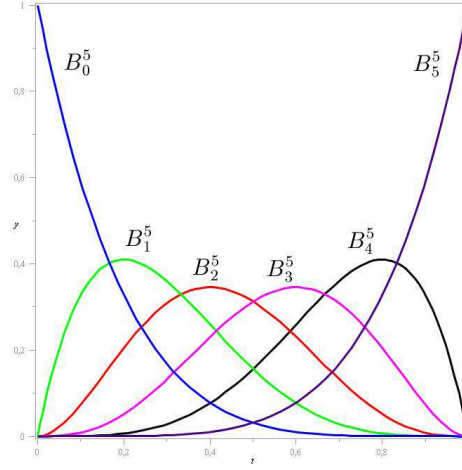


Figura 1.1: Polinomios de Bernstein de grado 5.

1.2. Curvas de Bézier Polinomiales

Definición 1.2 Una Curva de Bézier² es un segmento de curva paramétrica polinomial dada por una combinación lineal de los polinomios de Bernstein:

$$\mathbb{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i B_i^n(t)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y los $\mathbb{b}_i \in \mathbb{R}^m$ se denominan **puntos de control**.

²P. Bézier, (1910-1999) Fue un ingeniero y el creador de las llamadas curvas y superficies de Bézier. En la actualidad se usan de manera generalizada en la mayoría de los programas de diseño gráfico.

Propiedades:

- Dada la **simetría** de los polinomios de Bernstein, se tiene que

$$\mathbb{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_{n-i} B_i^n(1-t)$$

La diferencia entre uno y otro es el cambio en el recorrido de la traza de la curva.

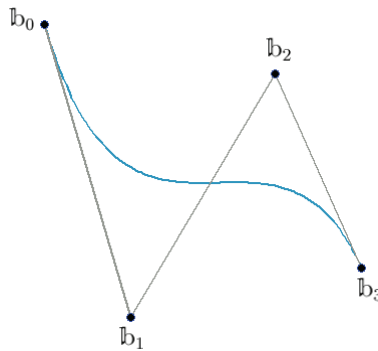


Figura 1.2: Interpolación de los puntos extremos.

- La curva de Bézier **interpola** el primer y el último punto de control (ver Figura 1.2). Es decir, si $\mathbb{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces:

$$\mathbb{b}(0) = \mathbb{b}_0 \quad y \quad \mathbb{b}(1) = \mathbb{b}_n$$

- Como la suma de los polinomios de Bernstein es igual a 1, $\mathbb{b}(t)$ es una combinación afín de sus puntos de control.
- La curva de Bézier **es invariante** bajo transformaciones afines, es decir, dada φ una aplicación afín, entonces:

$$\varphi(\mathbb{b}(t)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n \varphi(\mathbb{b}_i) B_i^n(t)$$

Esto significa que es suficiente aplicarle la transformación a los puntos de control de la curva $\mathbb{b}(t)$, para obtener la imagen de la curva sin tener que aplicar φ a cada punto (ver Figura 1.3).

- La curva de Bézier es una **combinación convexa** de los $\mathbb{b}_i$ por lo tanto el segmento de curva yace en la cápsula convexa que estos definen.

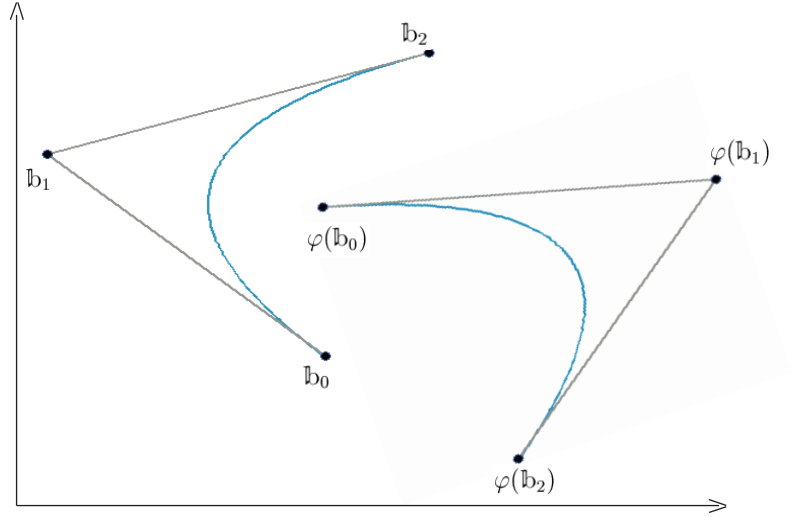


Figura 1.3: Invarianza afín de una curva de Bézier.

1.3. Algoritmo de de Casteljau

El algoritmo de de Casteljau³ es utilizado generalmente para obtener los puntos que yacen sobre una curva de Bézier. Este algoritmo consiste en una secuencia de interpolaciones lineales que se hacen a partir de los **puntos de control**, generándose así puntos intermedios los cuales son obtenidos para un valor fijo del parámetro t , la siguiente fórmula permite calcular los puntos intermedios del algoritmo de de Casteljau:

$$\mathbb{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbb{b}_i^{r-1} + t\mathbb{b}_{i+1}^{r-1}, \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq n \\ 0 \leq i \leq n-r \end{cases} \quad (1.1)$$

Observaciones:

- a) Los **puntos de control** son los $\mathbb{b}_i^0(t)$ con $0 \leq i \leq n$.
- b) Los puntos de la curva son de la forma $\mathbb{b}_0^n(t)$.

Los puntos intermedios $\mathbb{b}_i^k$ del algoritmo de de Casteljau pueden ser ordenados en una matriz triangular inferior de la siguiente manera:

³P. de Casteljau, nació en 1930, Físico y Matemático francés. Desarrolló un algoritmo para el despliegue de curvas de Bézier, el cual es uno de los métodos más estables numéricamente para la evaluación de estas curvas.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \mathbb{b}_0^0 \\
& & & & & & \mathbb{b}_1^0 & \mathbb{b}_0^1 \\
& & & & & & \mathbb{b}_2^0 & \mathbb{b}_1^1 & \mathbb{b}_0^2 \\
& & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
& & & & & & \mathbb{b}_n^0 & \mathbb{b}_{n-1}^1 & \mathbb{b}_{n-2}^2 & \cdots & \mathbb{b}_0^n
\end{array} \tag{1.2}$$

En el caso particular de $n = 2$ los puntos $\mathbb{b}_0^2(t)$ forman una parábola de Bézier donde $\mathbb{b}_0^0, \mathbb{b}_1^0$ y $\mathbb{b}_2^0$ son sus puntos de control. Ilustremos como se obtienen los puntos $\mathbb{b}_0^2(t)$ sobre la curva.

Donde cada una de las entradas de la matriz (1.2) viene dada por la expresión dada en (1.1). En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{b}_0^1(t) &= (1-t)\mathbb{b}_0 + t\mathbb{b}_1, \\
\mathbb{b}_1^1(t) &= (1-t)\mathbb{b}_1 + t\mathbb{b}_2, \\
\mathbb{b}_0^2(t) &= (1-t)\mathbb{b}_0^1 + t\mathbb{b}_1^1 = (1-t)^2\mathbb{b}_0 + 2t(1-t)\mathbb{b}_1 + t^2\mathbb{b}_2.
\end{aligned}$$

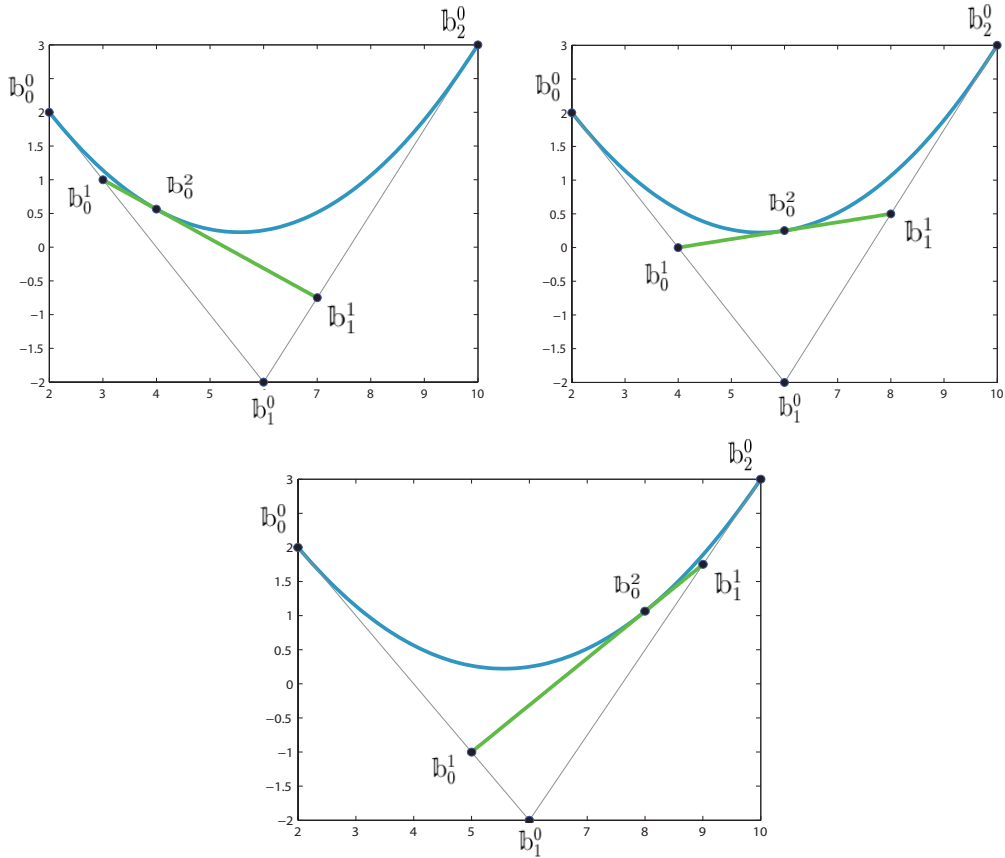


Figura 1.4: Algoritmo de de Casteljau. Caso $n = 2$

Definición 1.3 El polígono formado por los puntos de control, dados por los segmentos $\mathbb{b}_i \wedge \mathbb{b}_{i+1}$ con $0 \leq i \leq n-1$ se denomina **polígono de control**.

1.4. Rectas tangentes a una curva de Bézier.

Dado un polinomio de Bernstein B_i^n podemos calcular su derivada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= n \left[\binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \right] \\
&= n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada de un polinomio de Bernstein de grado n , se puede expresar como la diferencia de dos polinomios de Bernstein de grado $n-1$.

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)].$$

Ahora bien, dada una curva de Bézier $\mathbb{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i B_i^n(t)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbb{b}(t) &= \sum_{i=0}^n n \mathbb{b}_i [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] = n \sum_{i=0}^n \mathbb{b}_i [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] \\
&= n \sum_{i=1}^n \mathbb{b}_i B_{i-1}^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{b}_i B_i^{n-1}(t) \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{b}_{i+1} B_i^{n-1}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{b}_i B_i^{n-1}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i) B_i^{n-1}
\end{aligned}$$

De donde se concluye que:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{b}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i) B_i^{n-1} \quad (1.3)$$

Si se denota $\Delta \mathbb{b}_i = \mathbb{b}_{i+1} - \mathbb{b}_i$, se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbb{b}_j = \sum_{j=1}^n \mathbb{b}_j - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{b}_j = \Delta \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{b}_j$$

De la fórmula (1.3) y la propiedad anterior se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{b}(t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbb{b}_i B_i^{n-1} = n \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{b}_i B_i^{n-1} \\ &= n \Delta \mathbb{b}_0^{n-1}(t). \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que el vector director de la recta tangente a la curva $\mathbb{b}(t)$ para $t = t_0$ viene dado por:

$$\Delta \mathbb{b}_0^{n-1}(t_0) = \mathbb{b}_1^{n-1}(t_0) - \mathbb{b}_0^{n-1}(t_0) \quad (1.4)$$

Este resultado será de vital importancia en el desarrollo del trabajo, debido a que las rectas tangentes a una parábola de Bézier se corresponden con los perfiles circulares asociados a una superficie envolvente.

1.5. Curvas de Bézier Racionales.

Definición 1.4 Una curva de Bézier racional de grado n es un segmento de curva paramétrica determinado por la siguiente expresión:

$$\mathbb{x}(t) = \frac{\alpha_0 \mathbb{b}_0 B_0^n(t) + \cdots + \alpha_n \mathbb{b}_n B_n^n(t)}{\alpha_0 B_0^n(t) + \cdots + \alpha_n B_n^n(t)}. \quad (1.5)$$

donde los $\mathbb{b}_i$ yacen en $\mathbb{R}^m$ y los α_i son escalares positivos.

Es importante destacar que si todos los pesos $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ son iguales obtenemos una curva de Bézier polinomial de grado n .

En las curvas que están determinadas por (1.5) el algoritmo de de Casteljau está dado por la siguiente fórmula recursiva:

$$\mathbb{b}_i^r(t) = (1-t) \frac{\alpha_i^{r-1}}{\alpha_i^r} \mathbb{b}_i^{r-1} + t \frac{\alpha_{i+1}^{r-1}}{\alpha_i^r} \mathbb{b}_{i+1}^{r-1}.$$

con:

$$\alpha_i^r(t) = (1-t) \alpha_i^{r-1}(t) + t \alpha_{i+1}^{r-1}(t).$$

Los puntos intermedios que nos permiten obtener los puntos sobre la curva se expresan explícitamente de la siguiente forma:

$$\mathbb{b}_i^r(t) = \frac{\sum_{j=0}^r \alpha_{i+j} \mathbb{b}_{i+j} B_j^r(t)}{\sum_{j=0}^r \alpha_{i+j} B_j^r(t)}$$

Las curvas de Bézier Racionales, tienen ventajas sobre las polinomiales, ya que se puede modificar la forma de la curva al cambiar los pesos, preservando el polinomio de control, la interpolación y la tangencia.

Veamos un ejemplo de una curva de Bézier racional de grado 3 cuyos puntos de control son $\mathbb{b}_0^0 = (-1, -5)$, $\mathbb{b}_1^0 = (2, 2)$, $\mathbb{b}_2^0 = (6, -2)$, $\mathbb{b}_3^0 = (10, 3)$, en la Figura 1.5 los pesos son $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 1$ y en la Figura 1.6 α_2 se ha incrementado a 20.

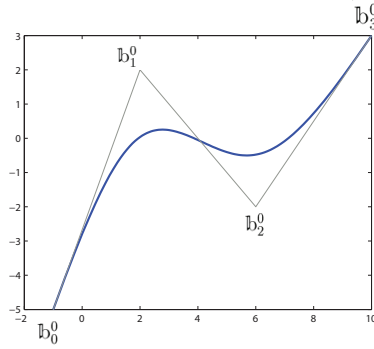


Figura 1.5: Curva de Bézier racional con cuatro puntos de control.

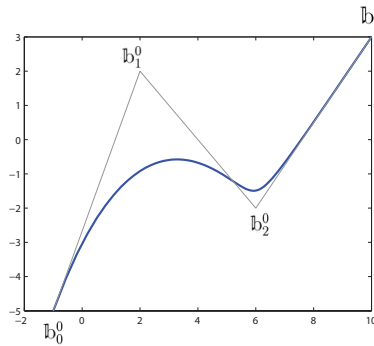


Figura 1.6: Curva racional de Bézier con $\alpha_2 = 20$.

1.6. Superficie Envolvente

Sea $f(x, y, z, t) = 0$ una familia de superficies implícitas indexadas por el parámetro t y sea $\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t)$ su derivada parcial con respecto a t .

Definición 1.5 Si la variable t puede ser eliminada del sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z, t) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = 0, \end{cases}$$

entonces, la solución del sistema es una superficie cuya ecuación implícita es de la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

la cual se denomina **envolvente**[5] de la familia de superficies.

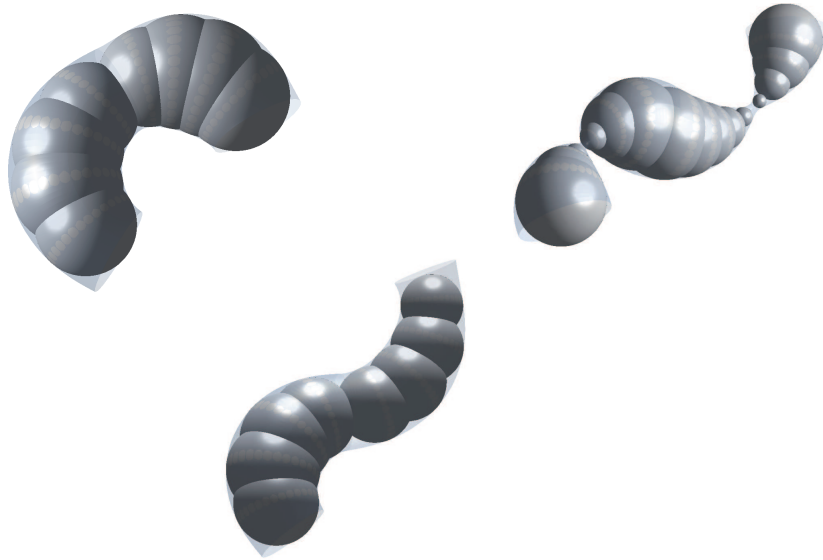


Figura 1.7: Envolvente de una familia de esferas.

El sistema anterior puede solucionarse utilizando teoría de eliminación, en particular utilizando el resultante de Sylvester⁴. En la Figura 1.7 se muestran ejemplos de familias de esferas junto con sus respectivas envolventes.

⁴Ver [6] página 1.

Capítulo 2

Modelo de Dan Pedoe.

En este capítulo se estudia una generalización del modelo presentado por Dan Pedoe.¹ Originalmente este modelo establece una correspondencia entre puntos del exterior de una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ con círculos en el plano, haces de círculos con rectas del espacio, relaciones entre círculos con el producto escalar de $\mathbb{R}^3$, caracterizando un modelo matemático que tiene muchas propiedades geométricas interesantes. En este caso particular generalizamos el modelo, estableciendo una biyección entre puntos del exterior de una cuádrica en $\mathbb{R}^4$ con esferas en 3-D. Extendiendo propiedades geométricas del modelo, tales como: la representación de diferentes haces de esferas, el concepto de ángulo entre dos esferas como el producto escalar de puntos de $\mathbb{R}^4$ y describimos la forma de una familia cuadrática monoparamétrica de esferas de acuerdo a la ubicación de una cónica de Bézier en $\mathbb{R}^4$, con la cuádrica en $\mathbb{R}^4$.

2.1. Descripción del Modelo.

Sean P y P' dos puntos de $\mathbb{R}^4$ y denotamos a $l_{PP'}$ la recta que pasa por ellos. Esta recta se puede parametrizar usando la razón simple entre P y P' mediante la parametrización:

$$\begin{aligned} l_{PP'} : \mathbb{R} - \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ l_{PP'}(t) &= \frac{1}{1+t}P + \frac{t}{1+t}P'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definición 2.1 Si $Q = l_{PP'}(t)$ y $Q' = l_{PP'}(-t)$ entonces los puntos Q y Q' son **armónicos conjugados** respecto a los puntos P y P' .

Esta relación así definida es simétrica, es decir, P y P' son armónicos conjugados respecto a los puntos Q y Q' .

¹D. Pedoe, (1910-1998), Matemático y geómetra inglés, nació en Londres y buena parte de su trabajo lo dedicó a las matemáticas de la ingeniería.

Definición 2.2 Sean:

$$\varphi = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w = 0 \}. \quad (2.2)$$

$$\varphi^+ = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w > 0 \}. \quad (2.3)$$

$$\varphi^- = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w < 0 \}. \quad (2.4)$$

Sean $P = (x_P, y_P, z_P, w_P) \in \varphi^+$ y $P' = (x, y, z, w)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^4$. Consideremos la recta $l_{PP'}$ que pasa por estos puntos dada en la expresión 2.1 y que intersecta a φ en los puntos Q y Q' . Es decir:

$$\{Q, Q'\} = \varphi \cap l_{PP'}.$$

Por lo tanto, existe $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ tal que:

$$Q = \left(\frac{x_P + tx}{1+t}, \frac{y_P + ty}{1+t}, \frac{z_P + tz}{1+t}, \frac{w_P + tw}{1+t} \right)$$

y además:

$$\left(\frac{x_P + tx}{1+t} \right)^2 + \left(\frac{y_P + ty}{1+t} \right)^2 + \left(\frac{z_P + tz}{1+t} \right)^2 - \left(\frac{w_P + tw}{1+t} \right) = 0.$$

Al agrupar convenientemente tenemos la siguiente expresión:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - w)t^2 + (2xx_P + 2yy_P + 2zz_P - w_P - w)t + \dots \\ x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P = 0 \quad (2.5)$$

Ahora bien, si Q y Q' son armónicos conjugados, entonces las soluciones de la ecuación 2.5 tienen igual módulo, pero signos opuestos, y esto ocurre si y sólo si:

$$\pi_P : 2xx_P + 2yy_P + 2zz_P - w_P - w = 0 \quad (2.6)$$

La expresión 2.6 indica que el conjunto de puntos armónicos conjugados de P respecto a φ yacen sobre el 3-plano π_P .

Definición 2.3 Dado un punto $P \in \varphi^+$. El **3-plano polar** asociado a P , viene dado por la ecuación

$$\pi_P : 2xx_P + 2yy_P + 2zz_P - w_P - w = 0$$

El punto P se denomina polo del plano π_P .

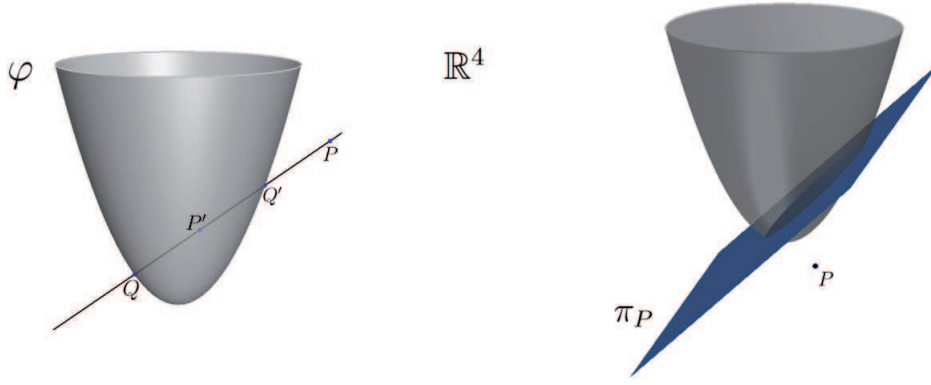


Figura 2.1: Puntos armónicos conjugados y su relación.

La Figura 2.1 ilustra un ejemplo del plano polar y su polo en el caso 3-D.

Proposición 2.1 *Dado un punto $P = (x_P, y_P, z_P, w_P) \in \varphi^+$. La proyección ortogonal de la intersección del plano polar π_P , asociado al punto P con φ es la esfera $(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P$.*

Demostración:

Sea $v = (x, y, z, w) \in \pi_P \cap \varphi$. Luego por definición de π_P y φ se tiene que:

$$\begin{cases} 2xx_P + 2yy_P + 2zz_P - w_P - w = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - w = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

El sistema anterior es, por sustitución equivalente a:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_P - 2yy_P - 2zz_P + w_P = 0. \quad (2.8)$$

Completando cuadrados en las variables x, y, z , se obtiene la expresión:

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P \quad (2.9)$$

Como $P = (x_P, y_P, z_P, w_P) \in \varphi^+$ entonces $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P > 0$, por lo tanto la ecuación 2.9 representa una esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro en (x_P, y_P, z_P) y radio $\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P}$.

□

Nótese que si $P \in \varphi$ entonces $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P = 0$, por lo tanto la ecuación 2.9 representa la proyección ortogonal del punto P en $\mathbb{R}^3$, y el plano polar asociado a éste coincide con el plano tangente a φ en P .

El caso donde $P \in \varphi^-$ no es de interés en este trabajo.

Recíprocamente si $(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = r^2$ es una esfera en 3-D, entonces el punto $(x_P, y_P, z_P, x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - r^2)$ representa un punto de φ^+ .

En conclusión el modelo de Pedoe permite establecer una biyección entre los puntos de φ^+ con esferas de $\mathbb{R}^3$ y puntos de φ con puntos de $\mathbb{R}^3$.

2.2. Ángulo de intersección entre 2 esferas.

Definición 2.4 *La ecuación normal de una esfera con centro en (x_C, y_C, z_C) y radio $R = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - w_C}$ con $w_C < x_C^2 + y_C^2 + z_C^2$ está dada por la expresión:*

$$E(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_C x - 2y_C y - 2z_C z + w_C = 0.$$

Nótese que por el recíproco de la proposición 2.1 se tiene que la esfera dada por $E(x, y, z) = 0$ se corresponde con el punto $(x_C, y_C, z_C, w_C) \in \varphi^+$.

Sean E_P, E_Q dos esferas dadas en forma normal, esto es:

$$\begin{aligned} E_P(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_P x - 2y_P y - 2z_P z + w_P &= 0 \\ E_Q(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_Q x - 2y_Q y - 2z_Q z + w_Q &= 0 \end{aligned}$$

Sean C_P y C_Q sus respectivos centros y A uno de los puntos de intersección, por la ley del coseno se tiene que:

$$|C_P C_Q|^2 = |C_P A|^2 + |C_Q A|^2 - 2 |C_P A| |C_Q A| \cos(\theta) \quad (2.10)$$

luego,

$$\begin{aligned} |C_P C_Q|^2 &= R_P^2 + R_Q^2 - 2 R_P R_Q \cos(\theta) \\ 2 R_P R_Q \cos(\theta) &= R_P^2 + R_Q^2 - |C_P C_Q|^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde:

$$\begin{aligned} R_P^2 &= x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 - w_P \\ R_Q^2 &= x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2 - w_Q \\ |C_P C_Q|^2 &= (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2.11 y simplificando se tiene la siguiente expresión:

$$2 R_P R_Q \cos(\theta) = 2 x_P x_Q + 2 y_P y_Q + 2 z_P z_Q - w_P - w_Q \quad (2.12)$$

Definición 2.5 *Dadas dos esferas que se intersectan:*

$$\begin{aligned} E_P(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_P x - 2y_P y - 2z_P z + w_P &= 0 \\ E_Q(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_Q x - 2y_Q y - 2z_Q z + w_Q &= 0 \end{aligned}$$

El ángulo de intersección viene dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{2 x_P x_Q + 2 y_P y_Q + 2 z_P z_Q - w_P - w_Q}{2 R_P R_Q} \quad (2.13)$$

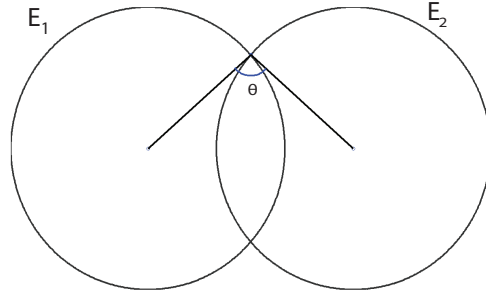


Figura 2.2: Ángulo entre dos esferas.

Proposición 2.2 *Dos esferas son ortogonales si y sólo si sus correspondientes puntos en $\mathbb{R}^4$ son armónicos conjugados con respecto a φ .*

Demostración

Sean E_P y E_Q dos esferas como las dadas en la definición 2.5 y sea θ el ángulo de intersección entre ellas. Supongamos que E_P y E_Q son ortogonales, entonces por definición:

$$2x_P x_Q + 2y_P y_Q + 2z_P z_Q - w_P - w_Q = 0 \quad (2.14)$$

Sean $P = (x_P, y_P, z_P, w_P)$ y $Q = (x_Q, y_Q, z_Q, w_Q)$ los puntos correspondientes a las esferas E_P y E_Q respectivamente y sean π_P, π_Q sus planos polares. Luego por 2.14, se tiene que $P \in \pi_Q$ y $Q \in \pi_P$, esto es P y Q son armónicos conjugados respecto a φ . El recíproco se cumple por la definición de armónicos conjugados respecto a φ . $\square$

Definición 2.6 *Sean E_P y E_Q dos esferas como las dadas en la definición 2.5, el producto interno entre esferas se define como:*

$$\begin{aligned} [E_P \cdot E_Q] &= \frac{1}{2}[2x_P x_Q + 2y_P y_Q + 2z_P z_Q - w_P - w_Q] \\ &= \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2 - D^2] \end{aligned}$$

donde D es la distancia entre sus centros.

Propiedades:

- Si E_P es tangente a E_Q entonces, $[E_P \cdot E_Q] = \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2 - (R_P + R_Q)^2]$, donde $[E_P \cdot E_Q] = -R_P R_Q$
- Si E_P es secante a E_Q entonces, $[E_P \cdot E_Q] = R_P R_Q \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo de intersección entre las esferas.
- Si E_P y E_Q son concéntricas entonces, $[E_P \cdot E_Q] = \frac{1}{2}[R_P^2 + R_Q^2]$.
- Si $E_P = E_Q$ entonces, $[E_P \cdot E_Q] = R_P^2$.
- Si E_P es ortogonal a E_Q entonces, $[E_P \cdot E_Q] = 0$.

2.3. Correspondencia de rectas y haces de esferas.

En la sección 2.1 se establece una correspondencia biyectiva entre los puntos de φ^+ y las esferas de $\mathbb{R}^3$, a cada punto $(x_O, y_O, z_O, w_O) \in \varphi^+$ le corresponde una esfera cuya ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 + (z - z_O)^2 = x_O^2 + y_O^2 + z_O^2 - w_O.$$

Ahora bien, considéremos dos puntos distintos de $\mathbb{R}^4$: $A = (x_A, y_A, z_A, w_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B, w_B)$. Sea l_{AB} la recta que pasa por éstos puntos parametrizada por:

$$\begin{aligned} l_{AB} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4, \text{ tal que:} \\ l_{AB}(t) &= (B - A) \cdot t + A. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta recta genera una familia lineal monoparamétrica de esferas ó **haz de esferas** que tiene por ecuación:

$$E_l(t) : (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 + (z - z(t))^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 - w(t) \quad (2.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_B - x_A) \cdot t + x_A = x_V \cdot t + x_A \\ y(t) &= (y_B - y_A) \cdot t + y_A = y_V \cdot t + y_A \\ z(t) &= (z_B - z_A) \cdot t + z_A = z_V \cdot t + z_A \\ w(t) &= (w_B - w_A) \cdot t + w_A = w_V \cdot t + w_A \end{aligned}$$

De acuerdo al tipo de incidencia de la recta l_{AB} con φ , intersecante, tangente o no intersecante, se tienen tres tipos de haces diferentes que se describen a continuación:

Proposición 2.3 *Si $l_{AB} \subset \varphi^+$ entonces el haz de esferas correspondientes se intersectan en un círculo fijo en 3-D (Ver Figura 2.5).*

Demostración

Veamos que $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} E_{l_{AB}}(t) \neq \emptyset$. Para esto basta demostrar que

$$E_{l_{AB}}(t_i) \cap E_{l_{AB}}(t_j) \neq \emptyset,$$

para cualesquiera $t_i, t_j \in \mathbb{R}$ con $t_i \neq t_j$, donde $E_{l_{AB}}(t_i)$ y $E_{l_{AB}}(t_j)$ son las esferas que corresponden a los puntos

$$l_{AB}(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i), w(t_i)) \text{ y } l_{AB}(t_j) = (x(t_j), y(t_j), z(t_j), w(t_j))$$

respectivamente. Considerensé las ecuaciones normales de dichas esferas:

$$\begin{aligned} E_{l_{AB}}(t_i) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x x(t_i) - 2y y(t_i) - 2z z(t_i) + w(t_i) &= 0 \\ E_{l_{AB}}(t_j) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x x(t_j) - 2y y(t_j) - 2z z(t_j) + w(t_j) &= 0, \end{aligned}$$

para que haya intersección no vacía entre las esferas es suficiente demostrar que:

$$\left| \frac{2x(t_i)x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)}{2R(t_i)R(t_j)} \right| < 1, \quad (2.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} R^2(t_i) &= x(t_i)^2 + y(t_i)^2 + z(t_i)^2 - w(t_i) \\ R^2(t_j) &= x(t_j)^2 + y(t_j)^2 + z(t_j)^2 - w(t_j) \end{aligned}$$

de esta forma está bien definido el ángulo θ de intersección entre las esferas $E_{l_{AB}}(t_i)$ y $E_{l_{AB}}(t_j)$, dado en 2.13 y por lo tanto las esferas se intersectan. Demostrar la condición 2.17 es equivalente entonces, a demostrar que

$$\begin{aligned} (2x(t_i)x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j))^2 \\ \leq 4R(t_i)^2 R(t_j)^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora bien, por hipótesis se tiene que $l_{AB} \subset \varphi^+$, y usando la parametrización dada en 2.1 se tiene que el discriminante Δ del polinomio de segundo grado:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= [x(t_i)^2 + y(t_i)^2 + z(t_i)^2 - w(t_i)]t^2 \dots \\ &\quad + [2x(t_i)x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)]t \dots \\ &\quad + x(t_j)^2 + y(t_j)^2 + z(t_j)^2 - w(t_j) \end{aligned} \quad (2.19)$$

es negativo, esto es:

$$\begin{aligned} \Delta &= [2x(t_i)x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)]^2 \dots \\ &\quad - 4[x(t_i)^2 + y(t_i)^2 + z(t_i)^2 - w(t_i)][x(t_j)^2 + y(t_j)^2 + z(t_j)^2 - w(t_j)] < 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

de donde:

$$\begin{aligned} [2x(t_i)x(t_j) + 2y(t_i)y(t_j) + 2z(t_i)z(t_j) - w(t_i) - w(t_j)]^2 \\ < 4R^2(t_i)R^2(t_j) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Así, pues queda demostrado que la intersección del haz de esferas generado por la recta l_{AB} es no vacía. Para ver que la intersección es un círculo común a todas las esferas del haz consideremos lo siguiente:

Sean P_1, P_2 dos puntos distintos sobre la recta l_{AB} . En lo que sigue se considerará la parametrización dada en (2.15), luego por definición existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$ tales que

$$\begin{aligned} P_1 &= l_{AB}(t_1) = (x(t_1), y(t_1), z(t_1), w(t_1)) \\ P_2 &= l_{AB}(t_2) = (x(t_2), y(t_2), z(t_2), w(t_2)). \end{aligned}$$

Considérese el vector director de la recta $l_{AB} : V = (x_V, y_V, z_V, w_V) = B - A$.

Dado que $l_{AB} \subset \varphi^+$ entonces, por la proposición 2.1 existen dos esferas correspondientes a los puntos P_1 y P_2 cuyas ecuaciones están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} E_1 : (x - x(t_1))^2 + (y - y(t_1))^2 + (z - z(t_1))^2 = r^2(t_1) \\ E_2 : (x - x(t_2))^2 + (y - y(t_2))^2 + (z - z(t_2))^2 = r^2(t_2) \end{cases} \quad (2.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} r^2(t_1) &= x(t_1)^2 + y(t_1)^2 + z(t_1)^2 - w(t_1) \\ r^2(t_2) &= x(t_2)^2 + y(t_2)^2 + z(t_2)^2 - w(t_2). \end{aligned}$$

Sea $Q = (x, y, z) \in E_1 \cap E_2$, luego las coordenadas del punto Q satisfacen las ecuaciones dadas en 2.22, lo que equivale a satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (2x_A + 2x_V t_1)x + (2y_A + 2y_V t_1)y \\ \quad + (2z_A + 2z_V t_1)z - w_A - w_V t_1 = 0 \\ (2x_A + 2x_V t_2)x + (2y_A + 2y_V t_2)y \\ \quad + (2z_A + 2z_V t_2)z - w_A - w_V t_2 = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Igualando las ecuaciones del sistema 2.23 se obtiene la siguiente expresión:

$$(t_1 - t_2)(2xx_V + 2yy_V + 2zz_V - w_V) = 0, \quad (2.24)$$

como $t_1 \neq t_2$ entonces la ecuación 2.24 es equivalente a:

$$\pi_R : 2xx_V + 2yy_V + 2zz_V - w_V = 0. \quad (2.25)$$

Esto quiere decir que el conjunto de puntos de la intersección de las esferas E_1 y E_2 está contenido en el 2-plano π_R ($E_1 \cap E_2 \subset \pi_R$). Por ende, el

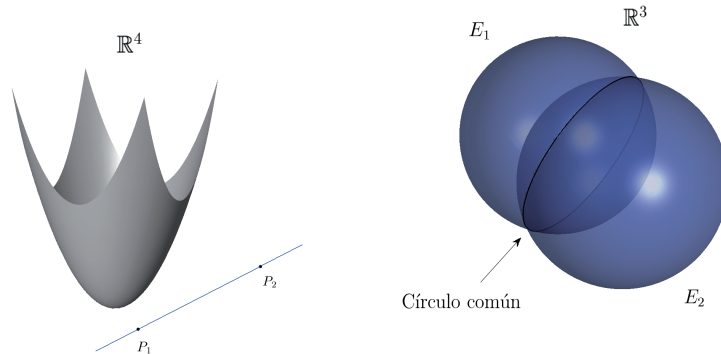


Figura 2.3: Intersección de las esferas E_1 y E_2 .

problema inicial de la intersección de dos esferas se resume a la intersección de un plano con una esfera, es decir la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} E_1 : (x - x(t_1))^2 + (y - y(t_1))^2 + (z - z(t_1))^2 = r^2(t_1) \\ \pi_R : 2x x_V + 2y y_V + 2z z_V - w_V = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

La representación gráfica de la solución del sistema anterior es una circunferencia en 3-D (ver Figuras 2.3 y 2.4). Nótese que el plano π_R no depende de la escogencia de los puntos sobre la recta, de donde se establece que el círculo no depende de los t_i, t_j seleccionados.

El radio y el centro de dicho círculo (ver figura 2.4) se calculan de la siguiente manera:

- **Centro:** El centro de la esfera E_1 es $C_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ y la distancia del plano π_R a C_1 viene dada por

$$d_{RE_1} = \frac{|2x(t_1)x_V + 2y(t_1)y_V + 2z(t_1)z_V - w_V|}{\sqrt{x_V^2 + y_V^2 + z_V^2}}.$$

Sea $\hat{v}$ el vector normal unitario del plano π_R . El centro del círculo viene dado por:

$$C = C_1 + d_{RE_1} \hat{v}$$

- **Radio:** El radio R del círculo viene dado por:

$$R = \sqrt{r^2(t_1) - d_{RE_1}^2}$$

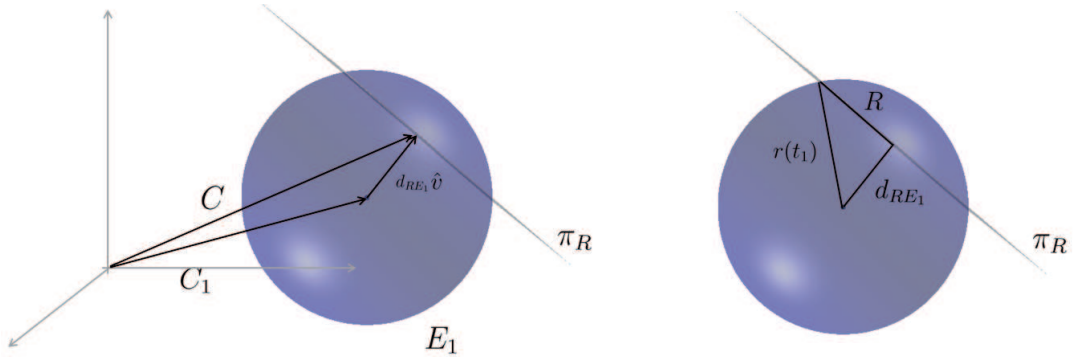


Figura 2.4: Centro y radio del círculo asociado a la recta L_{AB}

Nótese que el radio y el centro del círculo intersección no depende del punto elegido, es decir: si,

$$C' = C_2 + d_{RE_2} (-\hat{v})$$

entonces:

$$C - C' = C_1 - C_2 + (d_{RE_1} + d_{RE_2}) \hat{v}$$

y

$$C_2 = C_1 + \|C_2 - C_1\| \hat{v} = C_1 + (d_{RE_1} + d_{RE_2}) \hat{v},$$

de donde se deduce que $C = C'$. Por otra parte, la condición de que el radio tampoco dependa del punto seleccionado se sigue de que la intersección del haz de esferas es no vacía.

En la Figura 2.5 se muestra el haz de esferas asociado a una recta que no intersecta a φ y la intersección del haz. En la Figura 2.6 se muestra el haz de esferas asociado a una recta tangente a φ y el haz asociado a una recta secante a φ .

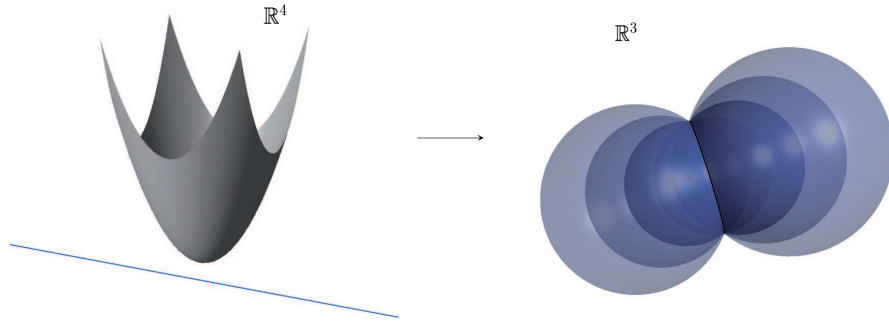


Figura 2.5: Haz de esferas asociado a una recta contenida en φ^+ .

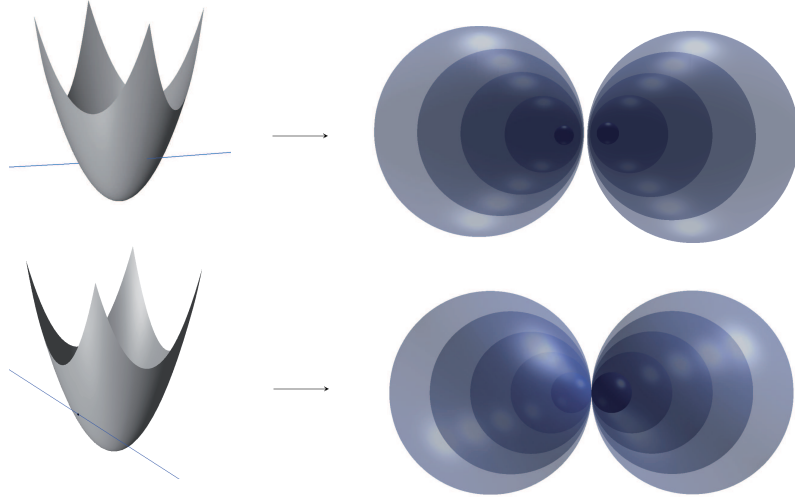


Figura 2.6: Haces de esferas asociados a una recta tangente y secante a φ .

Definición 2.7 *Dados dos puntos $A, B \in \mathbb{R}^4$ tales que la recta que pasa por estos puntos $l_{AB}(t)$ no intersecta a la cuádrica φ ($l_{AB} \subset \varphi^+$). La **esfera ecuatorial** del haz de esferas asociado a $l_{AB}(t)$ es aquella cuyo centro y radio coinciden con los del círculo asociado a la recta $l_{AB}(t)$.*

2.4. Correspondencia entre cónicas de Bézier y haces de esferas.

Sea $\mathbb{b}(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ una cónica de Bézier estandar dada en (1.2), entonces de acuerdo a la ubicación de $\mathbb{b}(t)$ respecto a φ se tienen los siguientes casos:

Caso 1: Supóngase que $\mathbb{b}(t)$ está contenida en φ^+ . En este caso por la proposición 2.1, a cada punto de la curva le corresponde una esfera cuya ecuación es:

$$(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 + (z - z(t))^2 = r^2(t)$$

con

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - w(t).$$

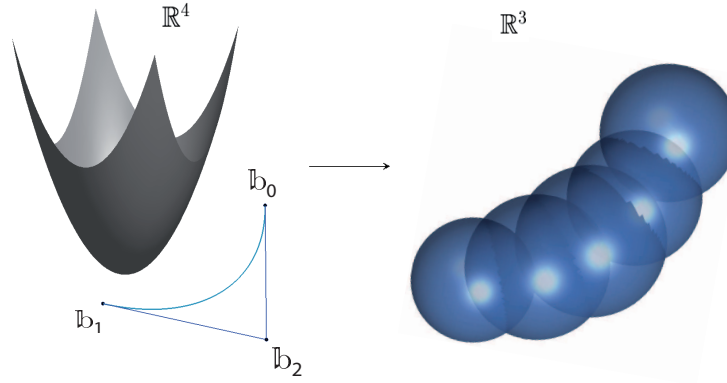


Figura 2.7: Familia de esferas correspondiente a una cónica de Bézier que yace en el exterior de φ .

La Figura 2.7 muestra un ejemplo de la familia de esferas asociada a una cónica de Bézier que yace en el exterior de φ .

Caso 2: Supóngase que la curva $\mathbb{b}(t)$ es secante a φ , aquí pueden ocurrir varios casos, por ejemplo, que $\mathbb{b}(t)$ sea secante en dos puntos, en este caso se generan esferas, correspondientes a la parte de la cónica que yace en φ^+ , cuyos radios decrecen hasta hacerse igual a cero, luego los puntos de la cónica que yacen en φ^- no están en correspondencia con ninguna esfera en 3D y finalmente se generan esferas de radio creciente partiendo de una esfera de radio cero, que se corresponde con el punto de intersección de la curva con el paraboloide (ver Figura 2.8). En conclusión si $\mathbb{b}(t)$ es secante a φ se generan esferas degeneradas que no son de interés para este trabajo.

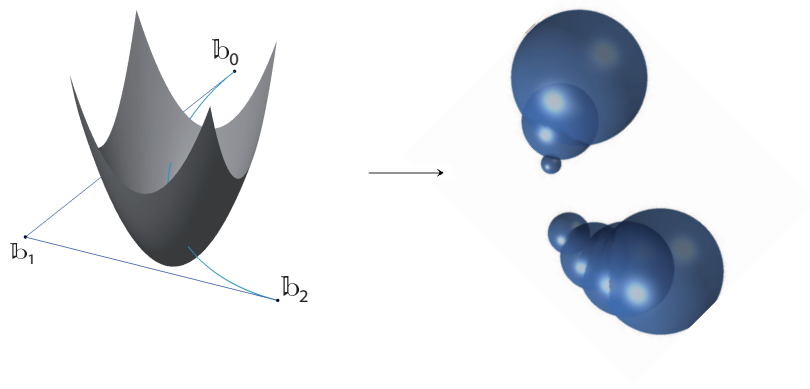


Figura 2.8: Familia de esferas correspondiente a una cónica de Bézier que es secante a φ en dos puntos.

Caso 3: Si $\mathbb{b}(t)$ es tangente a φ en uno o dos puntos, entonces el(los) punto(s) de tangencia se corresponde(n) con una esfera de radio cero y al resto de los puntos de la curva le corresponden esferas de radio positivo. La Figura 2.9 muestra un ejemplo del haz de esferas correspondiente a una cónica tangente en $\mathbb{b}_0$.

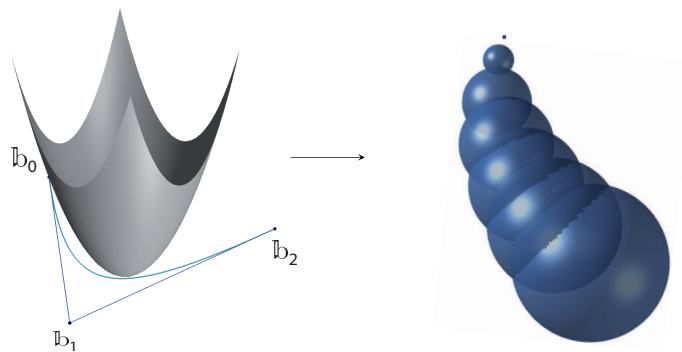


Figura 2.9: Familia de esferas correspondiente a una cónica de Bézier que es tangente a φ en un punto.

Capítulo 3

Cíclides Generales y el Círculo Guía.

Las cíclides generales son superficies tubulares, cuya expresión implícita es de grado algebraico a lo sumo 4 (Ver [4]). Estas superficies interpolan 2 círculos coesféricos y permiten conectar dos segmentos de manera suave (conexión G^1), es decir, con planos tangentes continuos (ver Figura 3.1). En este trabajo consideramos estas superficies determinadas por cónicas de Bézier contenidas en $\mathbb{R}^4$, usando la correspondencia propuesta por Dan Pedoe en [1]. Cada cíclide tiene asociado un círculo que se corresponde con la recta conjugada del 2-plano que contiene a la cónica de Bézier y es el objeto geométrico de estudio de este capítulo.

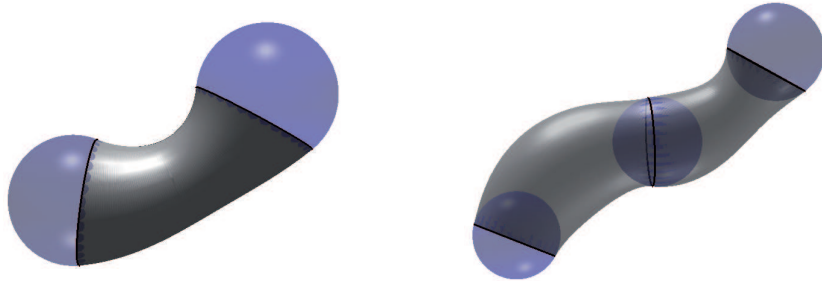


Figura 3.1: Interpolación de círculos y conexión G^1 de dos segmentos.

Definición 3.1 *Se denomina cíclide general a la superficie envolvente de una familia monoparamétrica cuadrática de esferas en $\mathbb{R}^3$.*

En la Figura 3.2 se muestran ejemplos de algunas cíclides generales.

Sea $\mathfrak{b}(t) \subset \varphi^+$ una cónica de Bézier dada por (1.5), con puntos de control $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \varphi^+$, $\mathfrak{b}_i = (x_i, y_i, z_i, w_i)$, y peso $\alpha > 0$, parametrizada por:

$$\mathfrak{b}(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)), \quad \text{con } t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

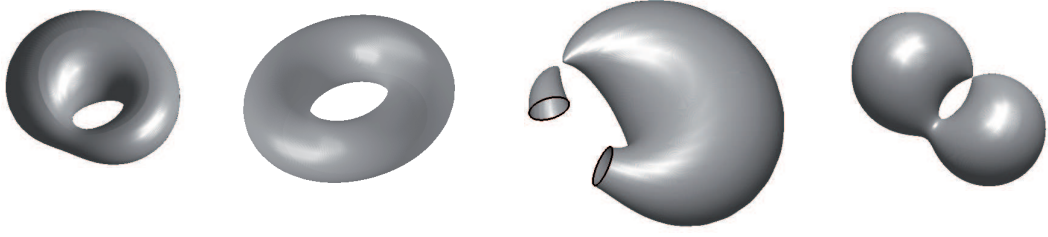


Figura 3.2: Ejemplos de Cíclides Generales

donde:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(1-t)^2 x_0 + 2\alpha t(1-t)x_1 + t^2 x_2}{(1-t)^2 + 2\alpha t(1-t) + t^2} \\ y(t) &= \frac{(1-t)^2 y_0 + 2\alpha t(1-t)y_1 + t^2 y_2}{(1-t)^2 + 2\alpha t(1-t) + t^2} \\ z(t) &= \frac{(1-t)^2 z_0 + 2\alpha t(1-t)z_1 + t^2 z_2}{(1-t)^2 + 2\alpha t(1-t) + t^2} \\ w(t) &= \frac{(1-t)^2 w_0 + 2\alpha t(1-t)w_1 + t^2 w_2}{(1-t)^2 + 2\alpha t(1-t) + t^2} \end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$, entonces, por la proposición 2.1, a cada punto de $\mathbb{b}(t)$ le corresponde una esfera en 3-D que tiene por ecuación:

$$E(x, y, z, t) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x x(t) - 2y y(t) - 2z z(t) + w(t) = 0,$$

luego, la familia monoparamétrica cuadrática de esferas correspondiente a la cónica $\mathbb{b}(t)$ es:

$$\mathcal{E} = \{E(x, y, z, t) = 0 : t \in \mathbb{R}\}$$

La cíclide general asociada a la cónica $\mathbb{b}(t)$ es entonces, por definición la envolvente de la familia $\mathcal{E}$.

Dicha envolvente viene dada por la eliminación del parámetro t en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} E(x, y, z, t) = 0 \\ 2x \frac{dx}{dt}(t) + 2y \frac{dy}{dt}(t) + 2z \frac{dz}{dt}(t) - \frac{dw}{dt}(t) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

donde:

$$\left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t), \frac{dz}{dt}(t), \frac{dw}{dt}(t) \right) = \frac{d\mathbb{b}}{dt}(t) = 2 \left[(\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_0)B_0^1(t) + (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)B_1^1(t) \right].$$

Usando la resultante de Sylvester se resuelve el sistema 3.2 y se tiene que la ecuación implícita de la envolvente viene dada por:

$$E_0 E_2 - \alpha^2 E_1^2 = 0, \quad (3.3)$$

donde $E_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2x x_i - 2y y_i - 2z z_i + w_i$, es la ecuación de la esfera correspondiente al punto de control $\mathbb{b}_i$ con $i = 0, 1, 2$. Obsérvese que esta superficie es de grado algebraico a lo sumo 4.

3.1. Despliegue de una Cíclide General.

Sea $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ una curva de Bézier dada por (3.1). En 1.4 se observó que la recta tangente a la curva $\mathbb{b}$ en $t = t_0$, está determinada por los puntos obtenidos con el algoritmo de Casteljau:

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_0^1(t_0) &= (1 - t_0)\mathbb{b}_0 + t_0\mathbb{b}_1 \\ \mathbb{b}_1^1(t_0) &= (1 - t_0)\mathbb{b}_1 + t_0\mathbb{b}_2, \end{aligned}$$

esta recta se puede parametrizar mediante la expresión:

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ l(s) &= (1 - s) \mathbb{b}_0^1(t_0) + s \mathbb{b}_1^1(t_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

De acuerdo a la incidencia de la recta $l(s)$ con la cuádrica φ se tienen dos casos: el primer caso es que la recta intersekte a la cuádrica en uno o dos puntos, y por ende el haz de esferas asociado es tangente en un punto o no se interseca.

Otro caso es que la recta no intersekte a la cuádrica φ . En este último caso se tiene que por la proposición (2.3) la recta $l(s)$ tiene asociado un haz de esferas que se interseca en un círculo fijo en 3D.

Si se considera una curva de Bézier cuyas rectas tangentes estén en φ^+ se deduce que la familia de rectas tangentes a la cónica tiene asociada una familia de círculos en 3D.

Esta familia de círculos representa los perfiles circulares de la cíclide asociada a la cónica $\mathbb{b}(t)$ los cuales son utilizados para su despliegue. La Figura 3.3 muestra un ejemplo de la familia de círculos asociada a una cónica $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ cuyas rectas tangentes yacen en φ^+ .

Para una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t)$ cuyas rectas tangentes yacen en φ^+ , considérese una partición finita $\mathcal{H}$ del intervalo $[0, 1]$:

$$\mathcal{H} = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 1\},$$

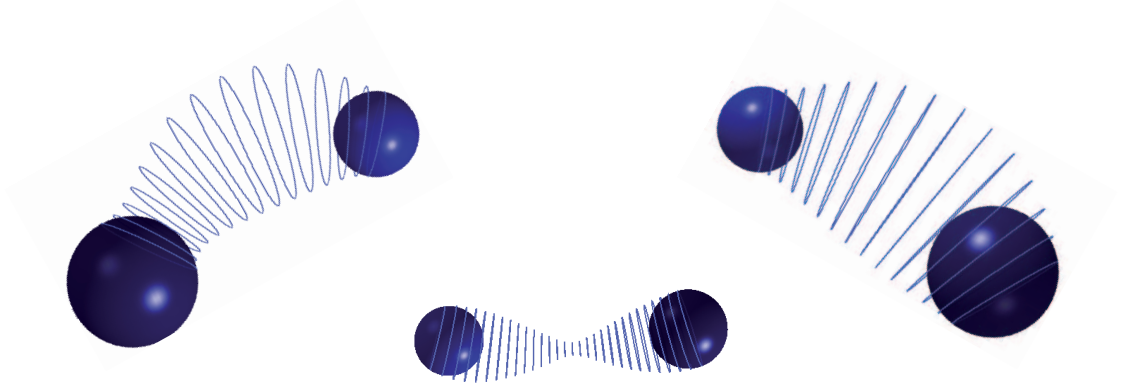


Figura 3.3: Perfiles Circulares asociados a curvas cuyas rectas tangentes yacen en φ^+

A esta partición le corresponden $n + 1$ círculos en 3D los cuales representan los perfiles de la cíclice asociada a la cónica $\mathbb{b}(t)$. Al calcular los centros y radios de estos círculos, como se indicó en la proposición 2.3, junto con los respectivos planos radicales se procede a triangular los segmentos de conos, determinados por círculos consecutivos (ver Figura 3.4).

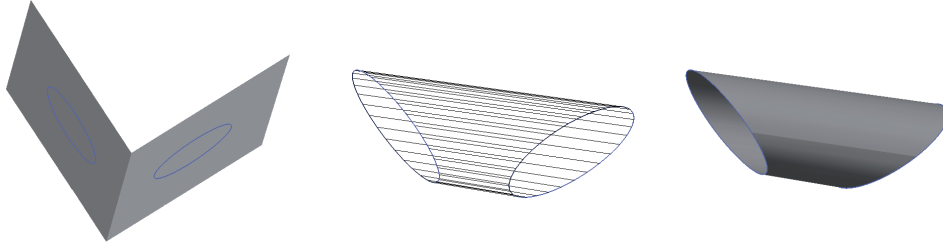


Figura 3.4: Conexión de dos círculos consecutivos

En resumen, dados los 3 puntos de control de una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ $\mathbb{b}_0$, $\mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ cuyas rectas tangentes yacen también en φ^+ , los pasos a seguir para el despliegue de una cíclice general son:

Se fija una partición finita del intervalo $[0, 1]$.

$$\mathcal{H} = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = 1\}.$$

- 1- Para $t_i \in \mathcal{H}$ se calcula la recta tangente a la curva $\mathbb{b}(t)$ en $t = t_i$, la cual está determinada por los puntos en el algoritmo de de Casteljau:

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_0^1(t_i) &= (1 - t_i)\mathbb{b}_0 + t_i\mathbb{b}_1 \\ \mathbb{b}_1^1(t_i) &= (1 - t_i)\mathbb{b}_1 + t_i\mathbb{b}_2. \end{aligned}$$

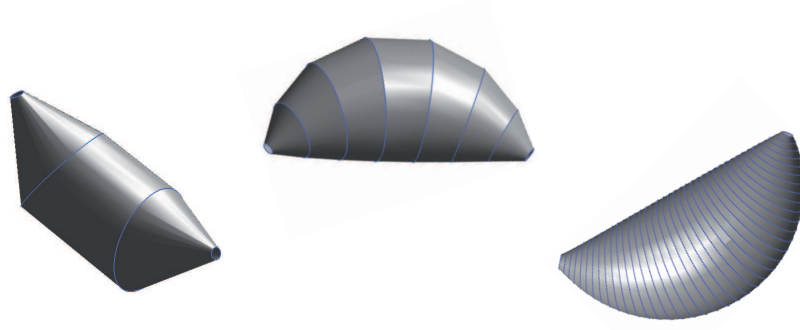


Figura 3.5: Despliegue de una ciclode con 3 particiones diferentes.

- 2- Se calcula el plano radical correspondiente con la recta tangente a la cónica y el círculo asociado a dicha recta como se estableció en la proposición 2.3.
- 3- A partir de $i = 1$ se triangula el segmento de cono que determina el círculo, que se calculó en la iteración anterior, con el círculo que se calculó en la iteración actual.

La Figura 3.5 muestra un ejemplo del despliegue de una misma ciclode fijando tres particiones diferentes.

3.2. La recta conjugada de un 2-plano.

Sean $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \varphi^+$ tres puntos no colineales y Π el 2-plano determinado por los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$.

Definición 3.2 *La recta conjugada de Π es la intersección de los 3-planos polares asociados a los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1$ y $\mathfrak{b}_2$.*

Proposición 3.1 *Dado un punto P en la recta conjugada de Π , se tiene que para todo $Q \in \Pi$ el punto P es armónico conjugado del punto Q .*

Demostración

Dado que P yace sobre la recta conjugada de Π entonces, por definición:

$$\begin{cases} 2x_P x_0 + 2y_P y_0 + 2z_P z_0 - w_P - w_0 = 0 \\ 2x_P x_1 + 2y_P y_1 + 2z_P z_1 - w_P - w_1 = 0 \\ 2x_P x_2 + 2y_P y_2 + 2z_P z_2 - w_P - w_2 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Sea $Q \in \Pi : Q = s(\mathbb{b}_0 - \mathbb{b}_1) + t(\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1) + \mathbb{b}_1$ con $s, t \in \mathbb{R}$ fijos. La ecuación del 3-plano polar asociado a Q está dada por:

$$\pi_Q : 2x x_Q + 2y y_Q + 2z z_Q - w_Q - w = 0 \quad (3.6)$$

Veamos que el plano polar asociado a Q contiene a P . Basta con verificar que las coordenadas del punto P satisfacen la ecuación 3.6.

$$2x_P[s(x_0 - x_1) + t(x_2 - x_1) + x_1] + 2y_P[s(y_0 - y_1) + t(y_2 - y_1) + y_1] + \cdots \\ 2z_P[s(z_0 - z_1) + t(z_2 - z_1) + z_1] - [s(w_0 - w_1) + t(w_2 - w_1) + w_1] - w_P =$$

$$s(2x_P x_0 + 2y_P y_0 + 2z_P z_0 - w_0) - s(2x_P x_1 + 2y_P y_1 + 2z_P z_1 - w_1) + \cdots \\ t(2x_P x_2 + 2y_P y_2 + 2z_P z_2 - w_2) - t(2x_P x_1 + 2y_P y_1 + 2z_P z_1 - w_1) + \cdots \\ 2x_P x_1 + 2y_P y_1 + 2z_P z_1 - w_P - w_1 = s(w_P - w_P) + t(w_P - w_P) + 0 = 0.$$

Esto es:

$$2x_P x_Q + 2y_P y_Q + 2z_P z_Q - w_Q - w_P = 0$$

□

De la definición 3.2 se observa que la recta conjugada del 2-plano Π se puede parametrizar calculando el espacio solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x x_0 + 2y y_0 + 2z z_0 - w - w_0 = 0 \\ 2x x_1 + 2y y_1 + 2z z_1 - w - w_1 = 0 \\ 2x x_2 + 2y y_2 + 2z z_2 - w - w_2 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La solución del sistema 3.7 viene dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\bar{x}(t)}{\zeta} & y(t) &= \frac{\bar{y}(t)}{\zeta} \\ z(t) &= \frac{\bar{z}(t)}{\zeta} & w(t) &= \frac{\bar{w}(t)}{\zeta} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) = & 2[y_0(z_2 - z_1) + y_1(z_0 - z_2) + y_2(z_1 - z_0)]t + \cdots \\ & y_0(w_1 - w_2) + y_1(w_2 - w_0) + y_2(w_0 - w_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) = & 2[x_0(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_0) + x_2(z_0 - z_1)]t + \cdots \\ & x_0(w_2 - w_1) + x_1(w_0 - w_2) + x_2(w_1 - w_0),\end{aligned}$$

$$\bar{z}(t) = 2[x_0(y_2 - y_1) + x_1(y_0 - y_2) + x_2(y_1 - y_0)]t,$$

$$\begin{aligned}\bar{w}(t) = & 4[y_0(x_1z_2 - x_2z_1) + y_1(x_2z_0 - x_0z_2) + y_2(x_0z_1 - z_0x_1)]t + \cdots \\ & 2[y_0(x_2w_1 - x_1w_2) + y_1(x_0w_2 - x_2w_0) + y_2(w_0x_1 - w_1x_0)],\end{aligned}$$

$$\zeta = x_1 y_2 - x_1 y_0 - x_0 y_2 + x_2 y_0 - x_2 y_1 + x_0 y_1,$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Al intersectar la recta dada por la solución anterior $L(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ con la cuádrica φ se obtiene un polinomio de segundo grado:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) = & [(2x_2y_0 - 2x_0y_2 - 2x_1y_0 + 2x_1y_2 + 2x_0y_1 - 2x_2y_1)^2 + \cdots \\ & 2(-2x_2z_0 - 2x_1z_2 - 2x_0z_1 + 2x_2z_1 + 2x_0z_2 + 2x_1z_0)^2]t^2 + \\ & [-4y_0x_1z_2 + 4z_0x_1y_2 + 4y_0x_2z_1 + 4y_1x_0z_2 - 4z_1x_0y_2 - 4y_1x_2z_0 + \\ & (4(x_2w_0 - x_1w_0 - x_2w_1 + x_0w_1 + x_1w_2 - x_0w_2)) \cdots \\ & (-2x_2z_0 - 2x_1z_2 - 2x_0z_1 + 2x_2z_1 + 2x_0z_2 + 2x_1z_0)]t + \cdots \\ & 2(x_2w_0 - x_1w_0 - x_2w_1 + x_0w_1 + x_1w_2 - x_0w_2)^2 \cdots \\ & - 2y_0x_2w_1 - 2y_1x_0w_2 + 2w_1x_0y_2 + 2y_1x_2w_0 + \cdots \\ & 2y_0x_1w_2 - 2w_0x_1y_2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Al analizar el discriminante del polinomio obtenido en 3.8 se obtienen condiciones para que la recta conjugada al plano Π sea intersecante, tangente o no intersecante a la cuádrica φ .

Determinar las condiciones sobre los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1$ y $\mathfrak{b}_2$ para saber si el polinomio $\mathcal{P}(t)$ tiene o no raíces reales, resulta ser muy engorroso desde un punto de vista netamente algebraico, debido a la complejidad de los coeficientes.

Desde un punto de vista geométrico, estas condiciones se pueden determinar más fácilmente, reduciendo el problema a la intersección de 3 esferas, en este caso la intersección de las esferas correspondientes a los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ yacen en φ^+ . Ver Figura 3.6.

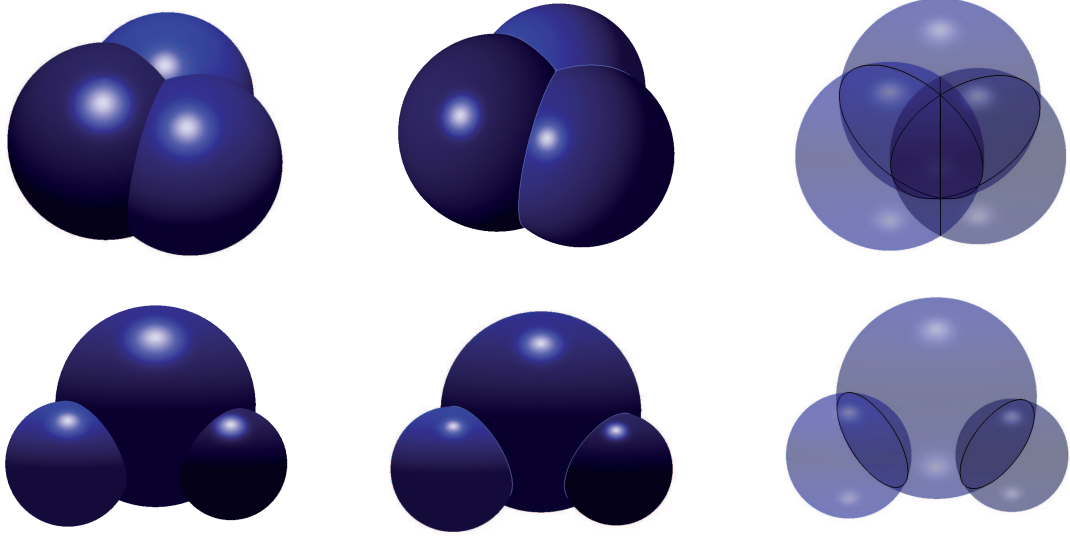


Figura 3.6: Intersección de 3 esferas.

Proposición 3.2 *La recta conjugada al 2-plano Π que pasa por los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ intersecta a la cuádrica φ si y sólo si, la intersección de las esferas correspondientes a los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ es no vacía.*

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que la recta conjugada a Π , $\overline{l}_\Pi$ intersecta a la cuádrica φ . Por definición $\overline{l}_\Pi$ está determinada por el espacio solución del sistema (3.7), por lo tanto si la intersección de dicha recta con la cuádrica φ es no vacía entonces, el siguiente sistema tiene al menos una solución:

$$\begin{cases} 2x x_0 + 2y y_0 + 2z z_0 - w - w_0 = 0 \\ 2x x_1 + 2y y_1 + 2z z_1 - w - w_1 = 0 \\ 2x x_2 + 2y y_2 + 2z z_2 - w - w_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - w = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

El sistema 3.9 es equivalente, por sustitución al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x x_0 - 2y y_0 - 2z z_0 + w_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x x_1 - 2y y_1 - 2z z_1 + w_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x x_2 - 2y y_2 - 2z z_2 + w_2 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Las ecuaciones que conforman el sistema 3.10 son las ecuaciones normales de las esferas correspondientes a los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1$ y $\mathfrak{b}_2$ respectivamente.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que la intersección de las esferas correspondientes a los puntos $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ es no vacía. Por otra parte, supongamos que $\overline{l}_\Pi$ no intersecta a la cuádrica, esto implica que el sistema 3.9 no tiene solución y

por lo tanto el sistema 3.10 tampoco, pero esto contradice la hipótesis de que la intersección de las esferas correspondientes a los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ es no vacía. Luego, se tiene que $\overline{l_\Pi}$ intersecta a la cuádrica. $\square$

Nótese que en el caso que la recta conjugada al 2-plano Π , $\overline{l_\Pi}$ generado por los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ no intersecte a la cuádrica entonces, el haz de esferas asociado a $\overline{l_\Pi}$ se intersecta en un círculo fijo en 3D. Este círculo yace sobre el plano que tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} \overline{\pi} : & (y_0 z_2 - y_0 z_1 - y_1 z_2 + z_0 y_1 + z_1 y_2 - z_0 y_2) x + \cdots \\ & (x_2 z_0 + x_1 z_2 - x_1 z_0 - x_0 z_2 - x_2 z_1 + x_0 z_1) y + \cdots \\ & (x_1 y_0 - x_1 y_2 + x_0 y_2 - x_2 y_0 + x_2 y_1 - x_0 y_1) z - \cdots \\ & z_1 x_0 y_2 + z_0 x_1 y_2 + y_1 x_0 z_2 - z_0 x_2 y_1 + \cdots \\ & z_1 x_2 y_0 - y_0 x_1 z_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Es fácil verificar que la proyección ortogonal de los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ sobre $\mathbb{R}^3$ satisfacen la ecuación del plano $\overline{\pi}$. Por ejemplo, para el punto $\mathbb{b}_0$, se tiene que su proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}^3$ es el punto (x_0, y_0, z_0) , sustituyendo sus coordenadas en la ecuación de $\overline{\pi}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & (y_0 z_2 x_0 - y_0 z_1 x_0 - y_1 z_2 x_0 + z_0 y_1 x_0 + z_1 y_2 x_0 - z_0 y_2 x_0) + \cdots \\ & (x_2 z_0 y_0 + x_1 z_2 y_0 - x_1 z_0 y_0 - x_0 z_2 y_0 - x_2 z_1 y_0 + x_0 z_1 y_0) + \cdots \\ & (x_1 y_0 z_0 - x_1 y_2 z_0 + x_0 y_2 z_0 - x_2 y_0 z_0 + x_2 y_1 z_0 - x_0 y_1 z_0) - \cdots \\ & z_1 x_0 y_2 + z_0 x_1 y_2 + y_1 x_0 z_2 - z_0 x_2 y_1 + z_1 x_2 y_0 - y_0 x_1 z_2 = 0 \end{aligned}$$

Análogamente ocurre para la proyección ortogonal de los puntos $\mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$.

De esta propiedad se deduce que el círculo guía yace en el plano generado por la proyección ortogonal de los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$.

Se puede verificar que, el centro del círculo correspondiente a la recta $\overline{l_\Pi}$ es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2(x_1 - x_0))x + (2(y_1 - y_0))y + (2(z_1 - z_0))z - w_1 + w_0 = 0 \\ (2(x_2 - x_1))x + (2(y_2 - y_1))y + (2(z_2 - z_1))z - w_2 + w_1 = 0 \\ [(\mathbb{b}_0 - \mathbb{b}_1) \times (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)] \cdot (x - x_2, y - y_2, z - z_2) = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

El sistema 3.12 representa la intersección de el plano $\overline{\pi}$ y los planos radicales que corresponden a las rectas tangentes a la curva en sus extremos. La Figura 3.7 representa el sistema 3.12.

El plano $\overline{\pi}$, además de contener al círculo que corresponde a la recta conjugada $\overline{l_\Pi}$ contiene a dos curvas importantes también, que son la curva

de centro de los perfiles c3rculares de la c3clide asociada y la proyecci3n sobre $\mathbb{R}^3$ de la c3nica. Esto hace que la c3clide correspondiente a la c3nica sea sim3trica con respecto a $\overline{\pi}$. (Ver Figura 3.8)

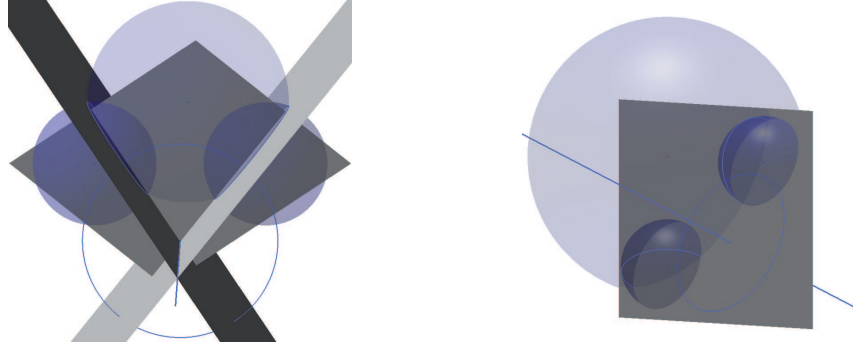


Figura 3.7: Centro del c3rculo correspondiente a $\overline{l}_{\Pi}$.

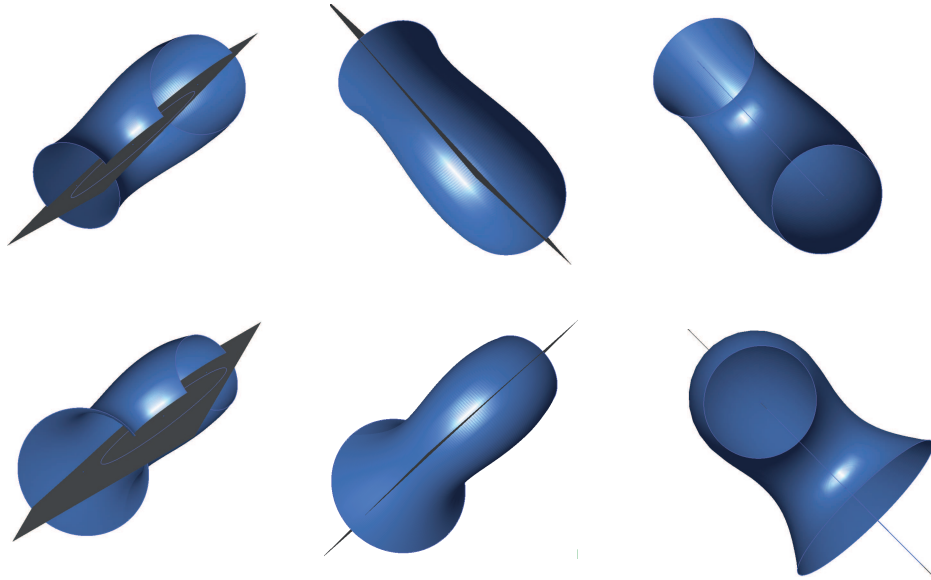


Figura 3.8: Simetria de una c3clide respecto de $\overline{\pi}$.

De ahora en adelante se considerarán las c3nicas de B3zier en $\varphi^+ \subset \mathbb{R}^4$ tales que sus rectas tangentes no intersecten a φ .

Proposici3n 3.3 *Dada una c3nica de B3zier $\mathfrak{b}(t)$ con puntos de control $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ se tiene que, si $l(t)$ es una recta tangente a $\mathfrak{b}(t)$ entonces el plano radical asociado a $l(t)$ y el plano $\overline{\pi}$ son ortogonales.*

Demostración

Si $l(t)$ es la recta tangente a $\mathbb{b}(t)$, entonces dicha recta está determinada según el algoritmo de de Casteljaun por los puntos:

$$\begin{aligned} P(t) &= (\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_0)t + \mathbb{b}_0 \\ Q(t) &= (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)t + \mathbb{b}_1 \end{aligned}$$

Luego, el vector director de la recta $l(t)$ es:

$$\begin{aligned} V(t) &= (\mathbb{b}_1 - \mathbb{b}_0)t + \mathbb{b}_0 - (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)t - \mathbb{b}_1 \\ &= ((2x_1 - x_0 - x_2)t + x_0 - x_1, (2y_1 - y_0 - y_2)t + y_0 - y_1, \dots \\ &\quad (2z_1 - z_0 - z_2)t + z_0 - z_1, (2w_1 - w_0 - w_2)t + w_0 - w_1) \end{aligned}$$

Ahora bien, en la proposición 2.3 se observó que, el vector normal al plano radical asociado a una recta no intersecante, coincide con la proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}^3$ del vector director de dicha recta en $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto, el vector normal al plano radical, correspondiente a la recta $l(t)$ es la proyección del vector $V(t)$ sobre $\mathbb{R}^3$, es decir:

$$\begin{aligned} N(t) &= ((2x_1 - x_0 - x_2)t + x_0 - x_1, \dots \\ &\quad (2y_1 - y_0 - y_2)t + y_0 - y_1, \dots \\ &\quad (2z_1 - z_0 - z_2)t + z_0 - z_1), \end{aligned}$$

es el vector normal a plano radical asociado a $l(t)$.

Por otra parte se sabe que el vector normal al plano $\bar{\pi}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \bar{N}(t) &= (y_0 z_2 - y_0 z_1 - y_1 z_2 + z_0 y_1 + z_1 y_2 - z_0 y_2, \dots \\ &\quad x_2 z_0 + x_1 z_2 - x_1 z_0 - x_0 z_2 - x_2 z_1 + x_0 z_1, \dots \\ &\quad x_1 y_0 - x_1 y_2 + x_0 y_2 - x_2 y_0 + x_2 y_1 - x_0 y_1) \end{aligned}$$

Al hacer el producto escalar entre N y $\bar{N}$ se tiene que:

$$N \cdot \bar{N} = 0$$

De donde, se deduce que los planos son ortogonales. □

3.3. El Círculo Guía de una Cíclide.

Sea $\mathbb{b}(t)$ una cónica de Bézier con puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ tal que la intersección de las esferas asociadas a los puntos de control (esferas de control) es vacía.

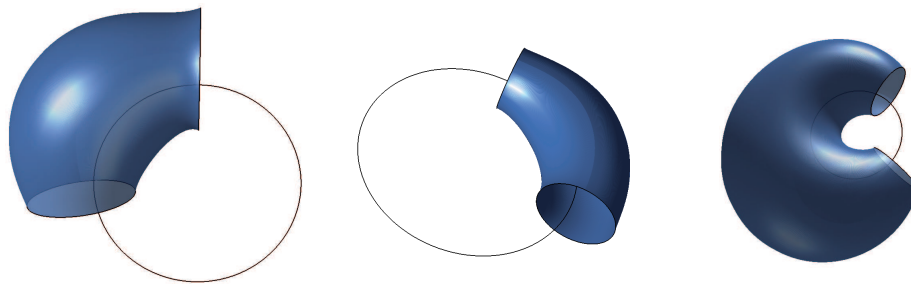


Figura 3.9: El círculo Guía.

Definición 3.3 El círculo Guía de la cíclice asociado a la cónica $\mathbb{b}(t)$ se corresponde con la recta conjugada del 2-plano Π generado por los puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$.

La Figura 3.9 muestra varios ejemplos de cíclices generales con sus respectivos círculos guías.

Nótese que si las esferas de control se intersectan entonces la recta conjugada del 2-plano que contiene a la cónica $\mathbb{b}(t)$, intersecta a la cuádrica φ y por lo tanto no existe el círculo guía.

Proposición 3.4 Dada una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ cuyas rectas tangentes no intersecten a φ . El círculo guía asociado a la cíclice correspondiente a $\mathbb{b}(t)$ anilla a la cíclice.

Demostración

Sea $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ una cónica de Bézier tal que sus rectas tangentes no intersectan a φ . Sea Π el 2-plano que contiene a $\mathbb{b}(t)$ y $\overline{l(t)}$ la recta conjugada de Π . Considérese $l(t)$, una recta tangente a la cónica $\mathbb{b}(t)$.

Sean $\overline{\mathbb{p}}, \mathbb{p}$ los puntos correspondientes a las esferas ecuatoriales asociadas a las rectas $\overline{l(t)}$ y $l(t)$ respectivamente. Por la proposición 3.1 se tiene que $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$ son armónicos conjugados y por la proposición 2.2 sus esferas correspondientes son ortogonales.

Sean $E_{\mathbb{p}}$ y $\overline{E_{\mathbb{p}}}$ las esferas asociadas a los puntos $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$, entonces por las propiedades del producto entre esferas dado en la sección 2.2 se tiene que $[E_{\mathbb{p}}, \overline{E_{\mathbb{p}}}] = 0$. Además por la proposición 3.3 se tiene que los círculos asociados a $\overline{l(t)}$ y $l(t)$ yacen en planos ortogonales.

Existen 4 casos posibles que se describen a continuación:

C1: Las esferas asociadas a $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$ son tangentes. En este caso se tiene que $[E_{\mathbb{p}}, \overline{E_{\mathbb{p}}}] = r_{\mathbb{p}} \cdot r_{\overline{\mathbb{p}}} = 0$, donde $r_{\mathbb{p}}$ y $r_{\overline{\mathbb{p}}}$ son los radios de $E_{\mathbb{p}}$ y $\overline{E_{\mathbb{p}}}$ respectivamente, pero esto no es posible ya que ninguno de estos puede ser nulo.

- C2:** Las esferas asociadas a $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$ son iguales. En este caso se tiene que $[E_{\mathbb{p}}, \overline{E_{\mathbb{p}}}] = r_{\mathbb{p}}^2 = 0$, esto tampoco es posible ya que $r_{\mathbb{p}} > 0$.
- C3:** Las esferas asociadas a $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$ no se intersectan. En este caso se tiene que no está definido el ángulo de intersección y por lo tanto contradice el hecho de que las esferas $E_{\mathbb{p}}$ y $\overline{E_{\mathbb{p}}}$ sean ortogonales.
- C4:** Las esferas asociadas a $\mathbb{p}$ y $\overline{\mathbb{p}}$ no se intersectan. En este caso se tiene que ambos círculos están anillados.

La Figura 3.10 ilustra como el círculo guía anilla a los perfiles circulares de la cíclice.

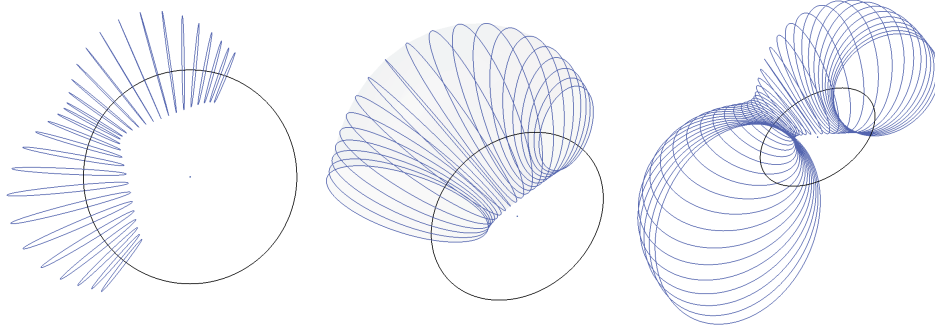


Figura 3.10: Relación entre el círculo guía y los perfiles circulares de la cíclice.

Proposición 3.5 *Al mover los puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ de la cónica $\mathbb{b}(t)$ sobre un mismo 2-plano de manera que se mantenga la no colinealidad entre estos puntos, el círculo guía de la cíclice asociada a la cónica se preserva.*

Demostración Se sigue de la proposición 3.1. □

De la proposición anterior se deduce que un círculo tiene asociada una familia infinita de cíclices generales (ver la Figura 3.11).

La proposición 3.5 permite cambiar la forma de la cíclice sin cambiar el círculo guía de la misma. Nótese que al cambiar el peso de la cónica los puntos de control se mantienen y por lo tanto el círculo guía también. La Figura 3.12 muestra como se cambia la forma de la cíclice al modificar el peso.

3.4. Propiedades invariantes del círculo guía.

Es interesante saber bajo que condiciones se pueden mover los puntos/esferas de control de una cíclice para mantener invariantes el centro o el radio del círculo guía de dicha superficie.

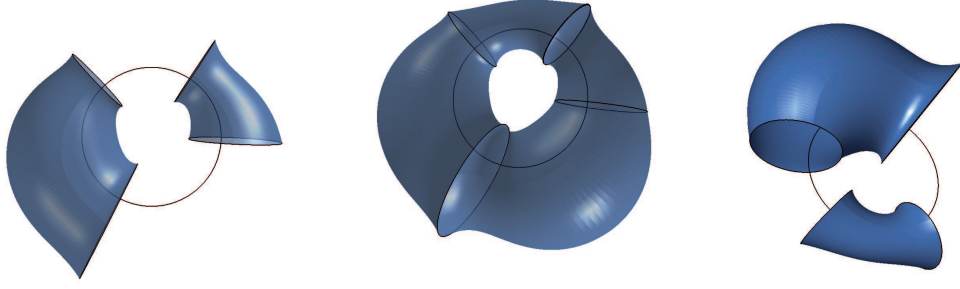


Figura 3.11: Cíclides que tienen el mismo círculo guía y puntos de control sobre el mismo 2-plano.

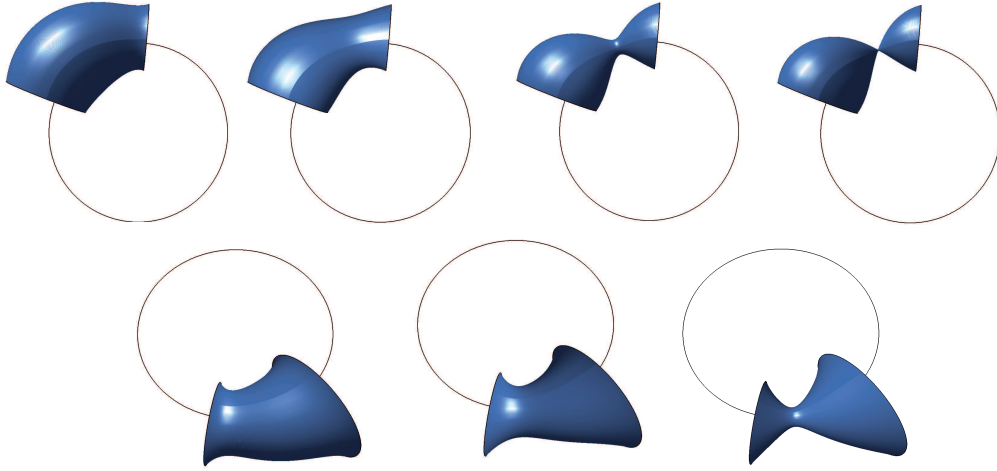


Figura 3.12: Modificación de la forma de una Cíclide General fijando el círculo guía.

En la sección 3.2, se caracterizó el centro del círculo asociado a la recta conjugada de un 2-plano en $\mathbb{R}^4$ en función de los puntos que definen a dicho plano. Ahora bien, dada una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t)$, con puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ se tiene que el centro del círculo guía asociado a la cíclide correspondiente, está dado por la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (2(x_1 - x_0))x + (2(y_1 - y_0))y + (2(z_1 - z_0))z - w_1 + w_0 = 0 \\ (2(x_2 - x_1))x + (2(y_2 - y_1))y + (2(z_2 - z_1))z - w_2 + w_1 = 0 \\ [(\mathbb{b}_0 - \mathbb{b}_1) \times (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)] \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

donde los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ son los puntos de control de una cónica en φ^+ cuyas rectas tangentes no intersectan a φ .

Al analizar el sistema anterior, se puede ver que si los puntos de control yacen en un 3-plano de la forma $w = \beta$, ie, $w_0 = w_1 = w_2 = \beta$ entonces, el

sistema se convierte en:

$$\begin{cases} (2(x_1 - x_0))x + (2(y_1 - y_0))y + (2(z_1 - z_0))z = 0 \\ (2(x_2 - x_1))x + (2(y_2 - y_1))y + (2(z_2 - z_1))z = 0 \\ [(\mathbb{b}_0 - \mathbb{b}_1) \times (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)] \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

y por lo tanto el centro del círculo guía sólo depende de la proyección ortogonal de los puntos de control $\mathbb{b}_0$, $\mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ sobre $\mathbb{R}^3$. De esta relación, se establece la siguiente proposición:

Proposición 3.6 *Al considerar dos cónicas de Bézier $\mathbb{b}(t), \mathbb{d}(t) \subset \mathbb{R}^4$ de manera que $\mathbb{b}(t)$ esté contenida en el 3-plano $w = w_{\mathbb{b}}$ y $\mathbb{d}(t)$ sea la proyección ortogonal de $\mathbb{b}(t)$ sobre el plano $w = w_{\mathbb{d}}$, se tiene que las cíclides correspondientes tienen círculos guías concéntricos, (ver Figura 3.5).*

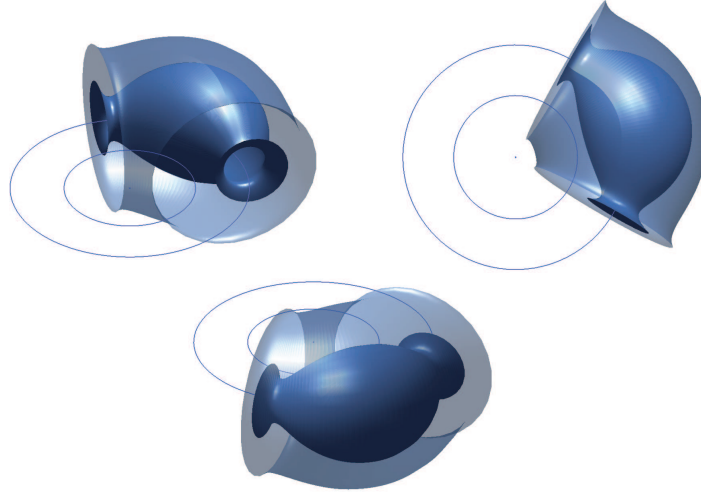


Figura 3.13: Círculos guías concéntricos.

Para caracterizar el radio del círculo guía asociado a una cíclide con puntos de control $\mathbb{b}_0$, $\mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ se considera la función $r(t)$ dada por:

$$r(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - w(t) \quad (3.15)$$

donde: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y $w(t)$ están dados por la solución del sistema 3.7. La función $r(t)$, representa los radios al cuadrado del haz de esferas asociado a la recta conjugada $\overline{l_{\Pi}}$, del 2-plano Π que contiene a la cónica.

El radio de la esfera ecuatorial del haz asociado a $\overline{l_{\Pi}}$ es el radio del círculo guía, y su cuadrado coincide con el mínimo de la función $r(t)$. Esta expresión resulta muy compleja debido a las expresiones de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ y $w(t)$, sin embargo bajo ciertas condiciones el problema de hallar dicho radio se reduce notablemente. La siguiente proposición ilustra un resultado importante:

Proposición 3.7 *Dada una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$ cuyas rectas tangentes no intersecten a φ^+ con puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in \varphi^+$ tales que:*

- *Los centros de las esferas asociadas a los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ yacen sobre el círculo en $\mathbb{R}^3$ dado por $\gamma(\theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 0)$. Esto es:*

$$(x_0, y_0, z_0) = (\rho \cos(\theta_0), \rho \sin(\theta_0), 0)$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (\rho \cos(\theta_1), \rho \sin(\theta_1), 0)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (\rho \cos(\theta_2), \rho \sin(\theta_2), 0)$$

- *Los puntos de control yacen en el 3-plano $w = W$, esto es*

$$w_0 = w_1 = w_2 = W,$$

entonces, se tiene que el radio del círculo guía asociado a la cíclice es igual a $\sqrt{W}$.

Demostración

Al sustituir las coordenadas de los puntos $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1$ y $\mathbb{b}_2$ en la ecuación 3.15, se tiene que:

$$r(t) = t^2 + W$$

El mínimo de la función $r(t)$ se alcanza en $t = 0$ y $r(0) = W$ es el cuadrado del radio del círculo guía, por lo tanto el radio es $\sqrt{W}$. $\square$

Corolario 3.1 *Si los puntos de control de una cónica en φ^+ yacen en el 3-plano $w = W$ y los centros de las esferas de control correspondientes yacen sobre un círculo de radio r centrado en el origen, entonces el radio del círculo guía es igual a $\sqrt{W}$.*

La demostración se sigue de la proposición 3.7, y del hecho que dos círculos en 3D de igual radio, centrados en el origen son iguales, salvo una isometría.

La Figura 3.14 muestra ejemplos de cíclices generales con círculos guías de igual radio.

A continuación se describen algunos ejemplos interesantes de cíclices con círculos guías diferentes:

Si se consideran dos cónicas de Bézier en $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{b}(t)$ y $\mathbb{d}(t)$ con puntos de control $\mathbb{b}_0, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2$ y $\mathbb{d}_0, \mathbb{d}_1, \mathbb{d}_2$ respectivamente, tales que la recta tangente a $\mathbb{b}(t)$ en $\mathbb{b}_2$ coincida con la recta tangente a $\mathbb{d}(t)$ en $\mathbb{d}_0$ y además $\mathbb{b}_2 \neq \mathbb{d}_0$, entonces las cíclices asociadas tienen un círculo de contacto en común como se ilustra en la Figura 3.15. Obsérvese que aunque las cónicas en $\mathbb{R}^4$ no se conectan,

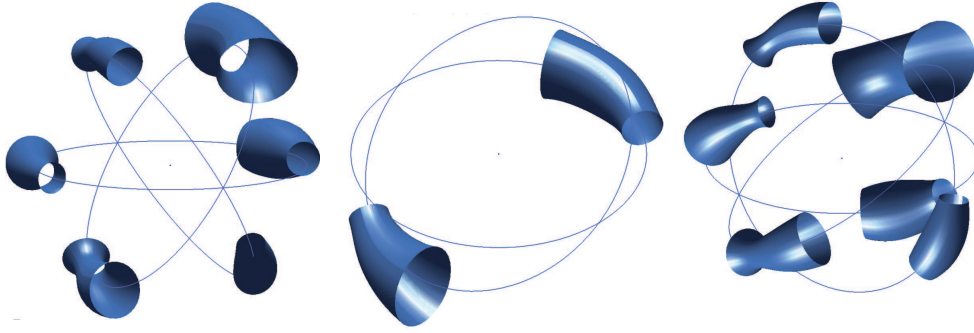


Figura 3.14: Círculos guías con el mismo radio.

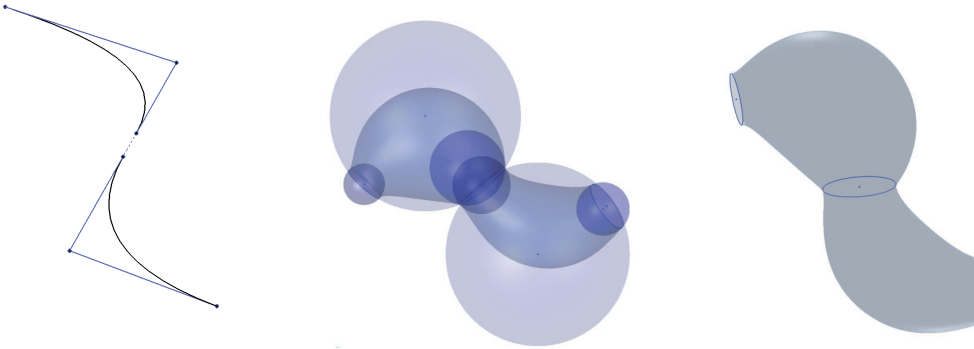


Figura 3.15: Cónicas que no se conectan, pero tienen la misma tangente en los extremos inicial y final.

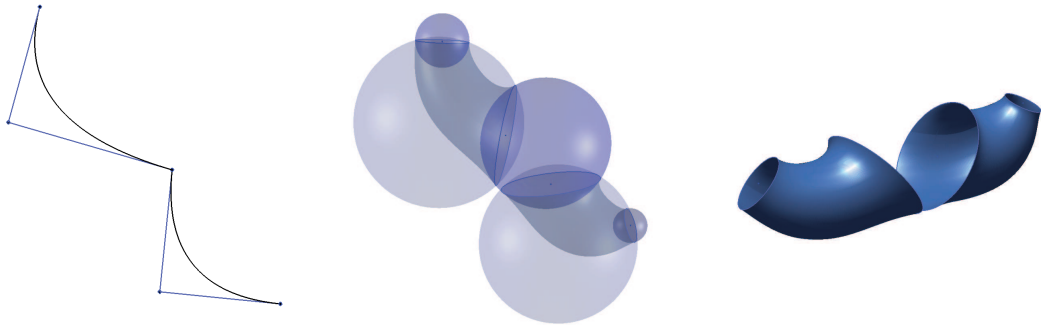


Figura 3.16: Cónicas que se conectan sin mantener la tangencia en el punto de conexión.

sus respectivas cícldes si lo hacen.

Si ahora se consideran las cónicas $\mathbb{b}(t)$ y $\mathbb{d}(t)$ tales que $\mathbb{d}_0 = \mathbb{b}_2$ pero con diferentes tangentes en el punto de conexión entonces las cícldes asociadas no se conectan. Al contrario que en el caso anterior, las cónicas se conectan en un punto, pero las cícldes asociadas no lo hacen (ver Figura 3.16).

3.5. Splines Cuadráticos.

Definición 3.4 *Dos cónicas de Bézier se conectan o tienen **continuidad** G^1 en un punto común, si tienen la misma recta tangente en ese punto. También se dice que dos cíclics generales tienen **continuidad** G^1 , si tienen el mismo plano tangente en cada punto a lo largo de un círculo de soporte en común.*

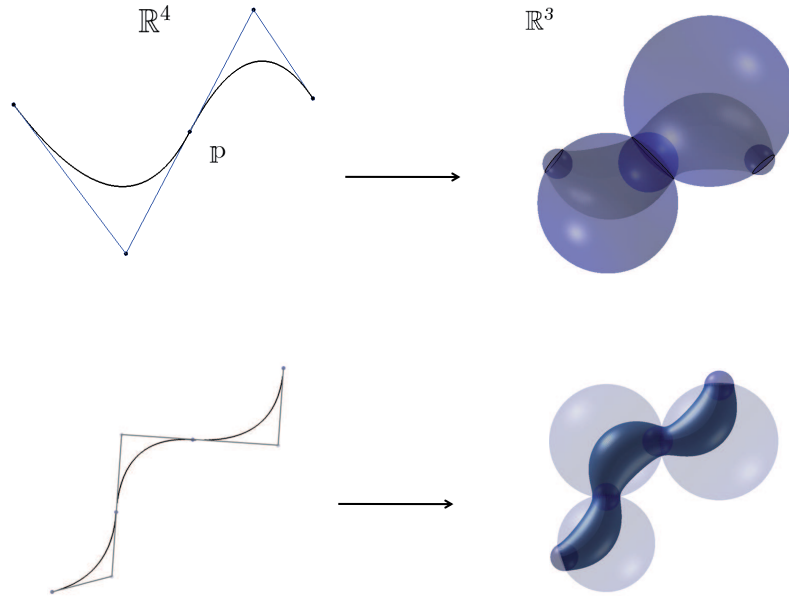


Figura 3.17: Conexión G^1 de dos cónicas y sus respectivas cíclics.

Definición 3.5 *Un **spline cuadrático** es una curva polinomial a trozos tal que:*

1. *Cada uno de sus tramos polinomiales es una curva de Bézier,*
2. *Dos trozos vecinos cualesquiera del spline se conectan con continuidad G^1 .*

Proposición 3.8 *Dado un spline cuadrático, las cíclics correspondientes a cada cónica tienen continuidad G^1 en sus círculos de contacto.*

Demostración

Para que la continuidad de las cíclics correspondientes a $C^i(t)$ y $C^{i+1}(t)$ sea G^1 en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de un círculo/recta de soporte, es necesario que los planos tangentes de las envolventes de estas cíclics (en cada uno de los puntos de este círculo) sean iguales.

Sean $C^i(t)$ y $C^{i+1}(t)$ dos cónicas de Bézier con puntos de control, $\mathbb{b}_{i0}, \mathbb{b}_{i1}, \mathbb{b}_{i2}$ y $\mathbb{b}_{(i+1)0}, \mathbb{b}_{(i+1)1}, \mathbb{b}_{(i+1)2}$ respectivamente, con conexión G^1 en el punto

$$\mathbb{p} = \mathbb{b}_{i2} = \mathbb{b}_{(i+1)0}.$$

El círculo de soporte correspondiente a la recta tangente a $C^i(t)$ en $\mathbb{p}$, está contenido en la esfera que corresponde a dicho punto. Por lo tanto, los planos tangentes a esta esfera, en los puntos del círculo soporte, son iguales a los planos tangentes de la envolvente de la familia de esferas correspondiente a $C^i(t)$.

Lo mismo sucede con la envolvente de $C^{i+1}(t)$. De aquí se deduce que los planos tangentes de $C^i(t)$ a lo largo del círculo de contacto son iguales a los planos tangentes a lo largo de la esfera correspondiente al punto $\mathbb{p}$, que a su vez son iguales a los planos tangentes a lo largo del círculo de contacto. (ver Figura 3.17) $\square$

La proposición 3.4 permite implementar un algoritmo para el despliegue de splines cuadráticos. Además se pueden conectar dos cíclicles de manera suave y que compartan el mismo círculo guía. La Figura 3.18 muestra algunos ejemplos de splines cuadráticos con el mismo círculo guía.

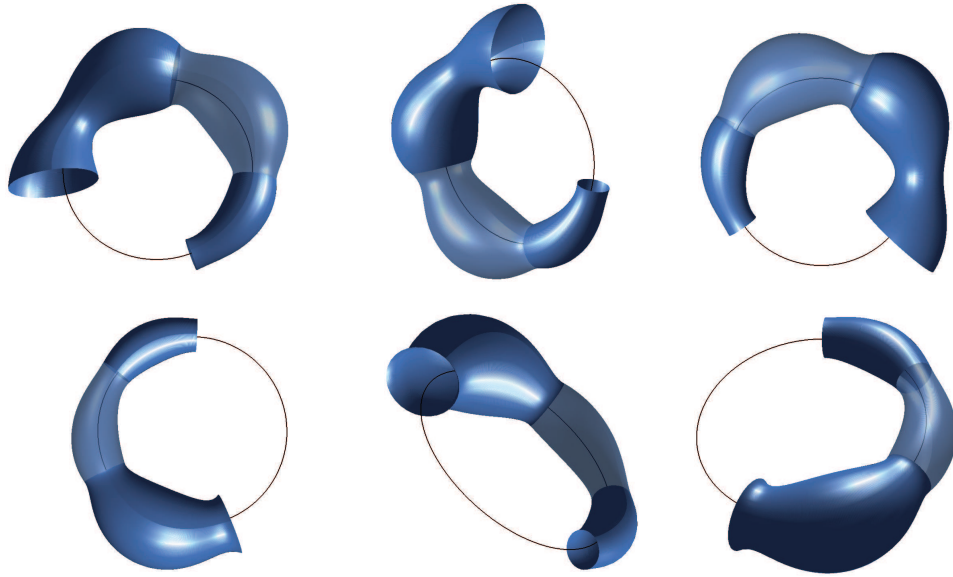


Figura 3.18: Splines con un Círculo Guía.

Conclusión

Una cónica de Bézier $\mathbb{b}(t) \subset \varphi^+$, cuyas rectas tangentes no corten a φ , está en correspondencia con una superficie envolvente denominada cíclice. La forma de dicha superficie, depende básicamente de 4 parámetros que son, las 3 esferas de control correspondientes a los puntos de control de la cónica $\mathbb{b}(t)$, y un escalar positivo α denominado peso. Por otra parte dicha superficie está anillada por un círculo, denominado **círculo guía** el cual depende del 2-plano $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ que contiene a $\mathbb{b}(t)$.

Al mover los puntos de control de la cónica $\mathbb{b}(t)$, sobre el mismo 2-plano Π , la forma de la cíclice cambia, pero se mantiene invariante el círculo guía. Entonces, un círculo en el espacio 3D tiene asociada una familia infinita de cíclices. En la Figura 3.8 del capítulo 3, se muestra un ejemplo de cíclices con diferentes formas e idéntico círculo guía.

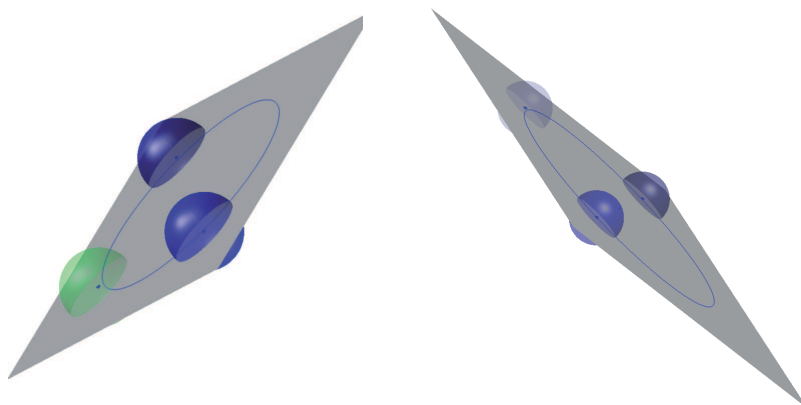


Figura 3.19: Círculo Guía sobre el plano definido por los centros de las esferas de control.

La proposición 3.7 permite construir ejemplos de cíclices cuyos círculos guías tengan el mismo centro, radio, incluso ambos, donde los círculos estén contenidos en planos diferentes. Por ejemplo, para construir cíclices con círculos guías concéntricos de igual radio procedemos de la siguiente manera:

1. Fijamos 3 esferas en 3D, E_1, E_2, E_3 de manera que sus centros estén sobre otra esfera fija E y que el plano que contiene a los centros de E_1, E_2 y E_3 pase a través del centro de E . Estas 3 esferas se corresponden con un círculo en 3D. Si se quiere mejor precisión se hacen los radios de las esferas E_1, E_2 y E_3 más pequeños. (Ver Figura 3.20).
2. Se fijan 3 esferas más, E_4, E_5, E_6 como en el paso anterior.

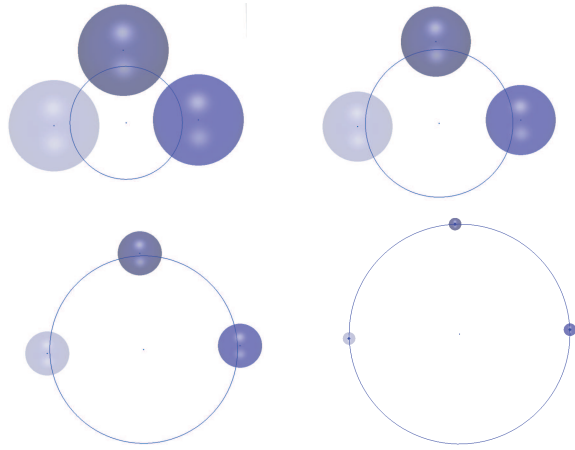


Figura 3.20: Círculo a través de 3 esferas en $\mathbb{R}^3$.

3. Por último se escogen los puntos de control sobre los 2-planos asociados a los círculos obtenidos en los pasos 1 y 2, para obtener 2 ciclides con círculos guías del mismo radio y concéntricos.

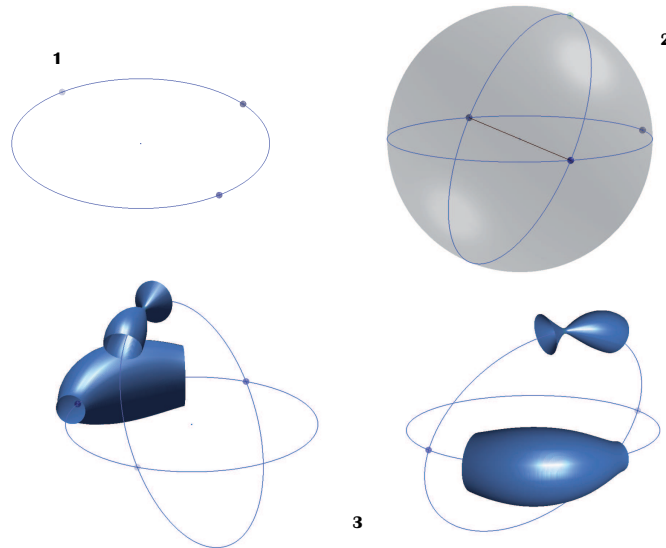


Figura 3.21: Construcción de ciclides con círculos guías de igual radio.

Para los ejemplos usados en el trabajo, se llevo a cabo el diseño y la programación de una interfaz gráfica realizada con el software MATLAB 2008. La Figura 3.22 muestra una imagen de la interfaz.

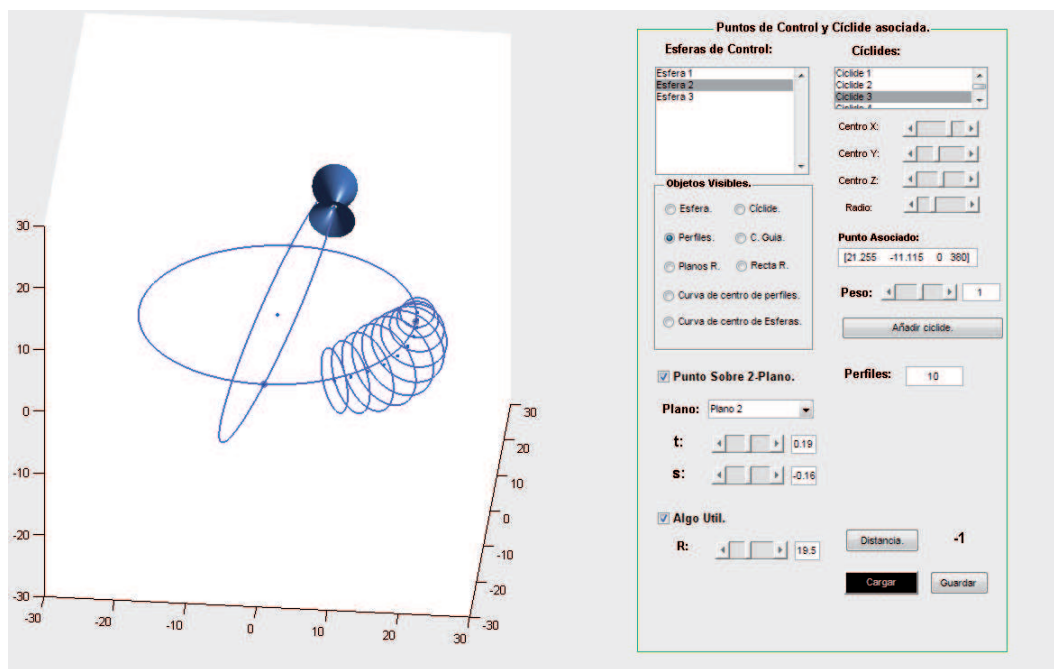


Figura 3.22: Interfaz Gráfica para la construcción de cíclides generales.

Bibliografía

- [1] D. Pedoe, Geometry a comprehensive course. Dover publications, INC, 1998.
- [2] Farin, Gerald E. (1992), Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A practical Guide, 3rd Edition, ISBN 0-12-249052-5.
- [3] J. Franquiz, M. Paluszny and F. Tovar. Cyclides and the guiding circle. ScienceDirect, Mathematics and computers in simulation, vol 73, pp 168 - 174 (2006).
- [4] M. Paluszny and W. Boehm, Bézier General Cyclides. Computer Aided Geometric Design, vol 15, pp 699 - 710 (1998).
- [5] Montesdeoca, Angel. Apuntes de Geometría diferencial de curvas y superficies. Universidad de La Laguna. España (2004).
- [6] Documento digital: http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws09_10/CGGC/Notes/Resultants.pdf