

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE SUSPENSIÓN AUTOMOTRICES MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL

**Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Bachilleres:
ALVAREZ S., Siso A. A.
MORET M., Leonel E.
Para optar al título de
Ingeniero Mecánico.**

Caracas, 2.008.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE SUSPENSIÓN AUTOMOTRICES MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL

Tutor: Prof. Jorge E. Barillas P.

**Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Bachilleres:
ALVAREZ S., Siso A. A.
MORET M., Leonel E.
Para optar al título de
Ingeniero Mecánico.**

Caracas, 2.008.

Caracas, 06 de noviembre de 2008
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los Bachilleres Siso A. A. Alvarez S. y Leonel E. Moret M.
Titulado:

**“EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE SUSPENSION AUTOMOTRICES
MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por los autores:

Prof. Ing. Juan León
Jurado

Prof. Ing. José Gómez
Jurado

Prof. Ing. Jorge Barillas
Tutor Académico



“Aquel que sigue a otro siempre está detrás”

- Anónimo -

“Si no tienes confianza en ti mismo,
estás doblemente derrotado en la carrera de la vida.

Con confianza, has ganado
incluso antes de haber empezado”

- Marco Tulio Cicerón-

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi **Mamá**, a mi **Hermana**, y a mi **Abuela** por estar conmigo y preocuparse por mí en esta carrera de resistencia que llamamos vida. Gracias por no criticar [tanto] mis peculiaridades, manías, y necesidades.

Gracias al **Team Fórmula SAE-UCV** y a todos sus integrantes que han compartido conmigo, por darme la oportunidad de poner en práctica mi amor por los automóviles, y abrir la caja de pandora en mi mente que inspiro este trabajo

Gracias a **La Sinfonía del Caos** que lleva ordenadamente nuestro universo a su máxima entropía.

Gracias a todas aquellas personas en mi vida, por tolerarme

Quisiera finalizar dedicándole este trabajo a dos seres muy especiales de mi vida:

*Mañana será un nuevo día.
Intentaré lo que aun no he logrado
Montañas que aun no he escalado;
Océanos que aun no he cruzado.
Y siempre los recordaré.
Precioso fue el tiempo que pasamos juntos.
En mis recuerdos por siempre estarán.
Los ángeles nuestro reencuentro anunciarán,
Unidos estaremos... algún día.*

Siso A. A. Alvarez S.

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Agradezco a **la vida**, por haber establecido todas y cada una de las condiciones cuyo resultado es mi existencia, y por permitirme tomar y llevar a cabo las decisiones que en conjunto definen quien soy.

A **mis padres y hermanos**, por estar allí en buenas y malas, brindándome todo su apoyo.

A **mi compañero**, sin cuyo esfuerzo este proyecto no podría haber cristalizado, ni tendría continuación.

Y por último, pero no menos importante, a **la creatividad del hombre** por hacer creado aquello que sirvió de musa para la elaboración de este proyecto: **El Automóvil**.

Leonel E. Moret M

Alvarez S., Siso A. A. y Moret E., Leonel M.

**EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE SUSPENSIÓN AUTOMOTRICES
MEDIANTE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL.**

Tutor: Prof. Jorge E. Barillas P. Tesis, Caracas.

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
2.008**

Palabras Claves: Dinámica vehicular; Suspensiones; Vehículos; Neumáticos.

El objetivo de este trabajo es el estudio cinemático y dinámico de los sistemas de suspensión vehicular. El mismo tuvo como finalidad el desarrollo de un modelo matemático flexible, basado en los métodos analíticos y numéricos utilizados para resolver sistemas mecánicos discretos de varios grados de libertad, así como en estudios realizados por otros investigadores a nivel mundial, que describen la interacción neumático-suelo, el comportamiento de distintos sistemas de suspensiones utilizados en vehículos modernos, y el efecto que tienen estos dos grandes apartados en la dinámica vehicular. Para implementar dicho modelo matemático en la simulación de la suspensión de un vehículo, se diseñó un programa computarizado que le permite al usuario, evaluar los distintos factores de la dinámica vehicular que se ven afectados por el sistema de suspensión, así como información cuantitativa del comportamiento del automóvil simulado, en base a comportamientos y estudios explícitamente descritos por el usuario, que simulen condiciones reales. Dicho programa permite la evaluación rápida y precisa de estos parámetros en el vehículo, evitando así los altos costos asociados a realizar dichas pruebas físicas en la etapa de diseño del mismo, y ahorrando tiempo valioso en ésta etapa.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCION	1
CAPÍTULO I	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.1 ANTECEDENTES.....	3
1.1.1 Motivación	6
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	9
1.3 OBJETIVOS	10
1.3.1 Objetivo General	10
1.3.2 Objetivos Específicos.....	10
1.3.3 Alcances	11
CAPITULO II	
NEUMÁTICOS.....	13
2.1 GENERALIDADES	14
2.2 MECÁNICA DE LA GENERACIÓN DE FUERZAS.....	17
2.2.1 Adhesión	17
2.2.2 Histéresis.....	17
2.3 SISTEMA DE EJES COORDENADOS.	18
2.4 CONCEPTOS BÁSICOS	20
2.5 CARACTERÍSTICAS DE LAS FUERZAS Y MOMENTOS EN UN NEUMÁTICO.....	22
2.5.1 Fuerza Longitudinal y Lateral.....	22
2.5.1.1 Zona de Adhesión	23
2.5.1.2 Zona de Transición.....	24
2.5.1.3 Zona de Deslizamiento.....	24
2.5.2 Momento Autoalineante.....	25
2.5.2.1 Zona de Adhesión	27
2.5.2.2 Zona de Transición.....	28
2.5.2.3 Zona de Deslizamiento.....	28
2.5.3 Momento de Resistencia a la Rodadura.....	29
2.6 INFLUENCIA DE PARÁMETROS EXTERNOS.....	29
2.6.1 Carga	29
2.6.2 Ángulo de inclinación	30
2.6.3 Presión.....	33
2.6.4 Temperatura	33
2.6.5 Conicidad y Desviación de Dirección.....	34
2.6.6 Velocidad	35

2.7 COMPORTAMIENTO SOBRE SUPERFICIES HÚMEDAS Y MOJADAS	35
2.7.1 Hidrodeslizamiento (Aquaplaning).....	36
2.8 COMPORTAMIENTO EN SUPERFICIES DE BAJO COEFICIENTE DE FRICCIÓN	38
2.9 FUERZAS COMBINADAS	38
2.10 MODELOS MATEMÁTICOS	40
2.10.1 Modelo de Pacejka: Formula Mágica	41
2.10.1.1 Fuerza Longitudinal	43
2.10.1.2 Fuerza Lateral.....	44
2.10.1.3 Momento Autoalineante.....	45
2.10.1.4 Momento de Resistencia a la Rodadura.....	47
2.10.1.5 Fuerzas Combinadas	47
2.10.2 Modelo de Cepillo (Brush Model)	50
2.10.2.1 Fuerza Longitudinal	52
2.10.2.2 Fuerza Lateral y Momento Autoalineante.....	55
2.10.2.3 Fuerzas Combinadas	58
2.10.3 Adimensionalización.....	61
2.10.3.1 Fuerza Longitudinal vs Carga	62
2.10.3.2 Fuerza Lateral vs Carga	65
2.10.3.3 Fuerza Lateral vs Ángulo de Inclinación	67
2.10.3.4 Influencia combinada de la carga y el ángulo de inclinación	68
2.10.3.5 Momento AutoAlineante:	68
2.10.3.6 Fuerzas Combinadas	70

CAPITULO III

SUSPENSIONES.....	72
3.1 GENERALIDADES	73
3.2 CONCEPTOS BÁSICOS	74
3.3 TIPOS DE SUSPENSIÓN	79
3.3.1 Suspensiones Independientes.....	79
3.3.1.1 Dobles Brazos Desiguales.....	80
3.3.1.2 Mc Pherson	81
3.3.1.3 Brazos Seguidores.....	84
3.3.1.4 Multibrazo	85
3.3.1.5 Eje Pivotante (Swing Axle).....	87
3.3.2 Suspensiones No Independientes (Ejes Rígidos y Semi Rígidos)	87
3.3.2.1 Hotchkiss.....	89
3.3.2.2 Cuatro eslabones	90
3.3.2.3 Eje De Dion.....	94
3.4 Sistema de Ejes	95
3.5 CINEMÁTICA DE LA SUSPENSIÓN.....	98
3.5.1 Centros de balanceo y cabeceo cinemáticos.	98
3.5.2 Relaciones de Movimiento.....	103

3.5.3	Variación dinámica de parámetros geométricos	105
3.5.4	Elasticidad de los elementos	106
3.6	DINÁMICA DE LA SUSPENSIÓN	108
3.6.1	Definición dinámica de centros de balanceo y cabeceo	108
3.6.2	Levantamiento	110
3.6.3	Elementos elásticos:	112
3.6.4	Amortiguadores	113
3.6.5	Barras Anti-Balanceo	115
3.6.6	Fricción de Coulomb (Seca)	116
3.7	SISTEMAS ACTIVOS Y SEMI-ACTIVOS	117

CAPITULO IV

DINÁMICA VEHICULAR.....	118
4.1 DINÁMICA VERTICAL	119
4.1.1 Sistemas de Dos Grados de Libertad	119
4.2 DINÁMICA LATERAL Y LONGITUDINAL	123
4.2.1 Transferencia de Carga	124
4.2.2 Gradiente de subviraje	127
4.3 DIAGRAMA G-G.....	135

CAPITULO V

MODELO DE VEHÍCULO PROPUESTO.....	137
5.1 ECUACIONES DE DINÁMICA VERTICAL DEL MODELO	139
5.1.1 Ecuaciones del cuerpo.....	140
5.1.2 Ecuaciones de movimiento de las masas que representan las ruedas	150
5.1.2.1 Esquemas independientes.....	150
5.1.2.1 Ejes rígidos.....	151
5.2 ECUACIONES DE DINÁMICA LONGITUDINAL Y LATERAL DEL MODELO.....	153
5.2.1 Ecuaciones del cuerpo.....	153
5.2.2 Ecuaciones rotacionales de las ruedas	155
5.3 FUERZAS EXTERNAS APLICADAS AL CUERPO	156
5.4 SISTEMA DE DIRECCIÓN	157
5.4.1 Geometría de Ackermann	157
5.4.2 Cambio de Camber por Caster y KPI.....	158

CAPÍTULO VI

METODOLOGÍA	160
6.1 LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN UTILIZADO	161
6.2 MODELO DE NEUMÁTICOS	162
6.2.1 TirAna (Tire Analyser)	164

6.3	MODELO DE SUSPENSIONES	165
6.3.1	AutAna (Automobile Analyzer).....	167
6.4	SUSANA (SUSPENSION ANALYZER)	168

CAPÍTULO VII

RESULTADOS.....	174
7.1 VEHICULO DE ESTUDIO.....	175
7.2 RESULTADOS.....	189
7.2.1 Estudio de Aceleración y Frenado	189
7.2.2 Estudio de Policía Acostado	192
7.2.3 Estudio de Evasión de Accidente.....	195
7.2.4 Estudio de Giro en Ambos Sentidos	198
 ANÁLISIS DE RESULTADOS	 204
CONCLUSIONES.....	210
RECOMENDACIONES.....	212
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	213
ANEXOS	217
A.0 COMPARACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS CONFIGURACIONES DE VEHICULOS	217
A.1 CAPTURAS DE PANTALLA DEL PROGRAMA	246
A.2 CÓDIGO COMPUTACIONAL DEL SIMULADOR.....	24654

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1: Distintos efectos presentes en el gradiente de subviraje, modelo de bicicleta.	133
Tabla 5.1: Signos algebraicos para los términos de cabeceo y balanceo de cada rueda.	147
Tabla 5.2: Signos algebraicos para los términos de velocidad de cabeceo y balanceo de cada rueda.	149
Tabla 6.1: Parámetros geométricos variables en función del rebote de la rueda.	166
Tabla 6.2: Parámetros físicos variables con respecto a la posición relativa de las ruedas.	167
Tabla 7.1: Parámetros de la configuración base utilizada en la simulación.	175
Tabla 7.2: Parámetros de las ruedas y neumáticos utilizados en la simulación.	179
Tabla 7.3: Variación de parámetros de la configuración base para simular distintos vehículos.	182
Tabla 7.4: Configuración de entradas para el estudio de evasión de accidente.	185
Tabla 7.5: Configuración de entradas para el estudio de aceleración y frenada.	186
Tabla 7.6: Configuración de entradas para el estudio de policía acostado.	186
Tabla 7.7: Configuración de entradas para el estudio de evasión de accidente.	186
Tabla 7.8: Condiciones iniciales y tiempo total de cada estudio particular.	187
Tabla 7.9: Configuraciones utilizadas en los diversos estudios.	188
Tabla 7.10: Resultados numéricos de los estudios de aceleración y frenado.	189
Tabla 7.11: Resultados numéricos de los estudios de policía acostado.	192
Tabla 7.12: Resultados numéricos de los estudios de evasión de accidente.	195
Tabla 7.13: Resultados numéricos de los estudios de giro en ambos sentidos, estado estable.	198
Tabla 7.14: Resultados numéricos de los estudios de giro en ambos sentidos, estado transitorio.	200

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 Diagrama de construcción de un neumático de malla sesgada.....	16
Fig. 2.2 Diagrama de construcción de un neumático de malla radial.	16
Fig. 2.3 Mecanismos de la generación de fuerzas en el neumático.....	18
Fig. 2.4 Fuerzas y momentos en el neumático.....	19
Fig. 2.5 Fuerza del neumático vs deslizamiento, a distintas cargas.....	22
Fig. 2.6 Avance neumático en función del ángulo de deslizamiento.	26
Fig. 2.7 Distribución de fuerza lateral en el área de contacto.....	26
Fig. 2.8 Momento autoalineante vs ángulo de deslizamiento, a distintas cargas.	27
Fig. 2.9 Distintas representaciones de la resistencia a la rodadura.....	29
Fig. 2.10 Ángulo de inclinación.....	31
Fig. 2.11 Efecto del ángulo de inclinación en la fuerza lateral.....	32
Fig. 2.12 Efecto de la conicidad y de la desviación de dirección en la fuerza lateral.....	35
Fig. 2.13 Vista lateral del neumático desplazándose sobre una película de agua.....	37
Fig. 2.14 Circulo de fricción para un neumático de vehículo de pasajeros	39
Fig. 2.15 Características de las fuerzas bajo deslizamientos combinados.....	48
Fig. 2.16 Modelo de cepillo.....	51
Fig. 2.17 Comportamiento del modelo de cepillo bajo frenado.	53
Fig. 2.18 Vista superior y lateral del modelo de cepillo bajo un ángulo de deslizamiento puro.	55
Fig. 2.19 Diagrama vectorial y de deformación para el modelo de cepillo operando a un ángulo de deslizamiento dado para los casos de tracción y frenado.....	58
Fig. 2.20 Curva adimensional de fuerza lateral del neumático, según el método de Radt.	67
Fig. 2.21 Curva adimensional de momento autoalineante del neumático, según el método de Radt.	70
Fig. 3.1 Camber	75
Fig. 3.2 Caster.....	76

Fig. 3.3 Angulo de orientación	77
Fig. 3.4 Esquema de dobles brazos desiguales.	81
Fig. 3.5 Esquema mcpherson.	82
Fig. 3.6 Esquema de brazos seguidores.	84
Fig. 3.7 Esquema multibrazo.	85
Fig. 3.8 Influencia mutua de ambas ruedas en un eje rígido.	88
Fig. 3.9 Esquema hotchkiss.	89
Fig. 3.10 Esquema de cuatro barras.	90
Fig. 3.11 Esquema de cuatro barras con barra panhard.	91
Fig. 3.12 Trayectoria de un eje rígido con barra panhard, en desplazamiento vertical puro.	92
Fig. 3.13 Arreglo de watts, configuración opuesta.	92
Fig. 3.14 Arreglo de watts, configuración colateral.	93
Fig. 3.15 Longitudes relativas a los arreglos de watts.	94
Fig. 3.16 Eje de dion.	95
Fig. 3.17 Sistema de ejes utilizado en dinámica vehicular.	96
Fig. 3.18 Angulos de orientación, trayectoria y deriva.	97
Fig. 3.19 Centros instantáneos de rotación frontales y centro de balanceo para una configuración de dobles brazos.	98
Fig. 3.20 Movimiento del centro del balanceo con el recorrido vertical de las ruedas.	99
Fig. 3.21 Eje de balanceo.	100
Fig. 3.22 Centros instantáneos de rotación laterales.	101
Fig. 3.23 Angulos necesarios para el cálculo de las propiedades de anti-hundimiento y anti-levantamiento.	102
Fig. 3.24 Diferentes radios de acción para la rueda y el elemento activo.	103
Fig. 3.25 Desplazamiento longitudinal de la rueda debido a la elasticidad de los elementos estructurales.	107
Fig. 3.26 Fuerzas laterales actuando en el centro de balanceo de un vehículo.	108
Fig. 3.27 Proyección de las fuerzas laterales que producen levantamiento.	109

Fig. 3.28 Levantamiento producido por la proyección de las fuerzas laterales.....	110
Fig. 3.29 Diagrama de fuerzas sobre el centro de balanceo.	111
Fig. 3.30 Fuerza de levantamiento.....	111
Fig. 3.31 Curva no lineal de fuerza de un resorte.	113
Fig. 3.32 Corte longitudinal de un amortiguador típico.	114
Fig. 3.33 Curva de fuerza de un amortiguador.	115
Fig. 3.34 Barra antibalanceo.	116
Fig. 4.1 Cuarto de vehículo.....	120
Fig. 4.2 Modelo de dos grados de libertad para considerar movimientos de cabeceo del vehículo.	122
Fig. 4.3 Modelo simplificado para considerar transferencia de carga lateral.	125
Fig. 4.4 Geometría de transferencia de carga lateral	126
Fig. 4.5 Modelo de bicicleta realizando un giro en estado estable.	129
Fig. 4.6 Modelo de bicicleta realizando un giro en estado estable, considerando fuerzas de tracción.....	134
Fig. 4.7 Diagrama g-g.....	135
Fig. 5.1 Esquema del modelo de vehículo propuesto.	139
Fig. 5.2 Fuerzas y momentos actuando en la masa suspendida del modelo de vehículo propuesto.....	140
Fig. 5.3 Parámetros principales del modelo de vehículo propuesto.	143
Fig. 5.4 Centros instantáneos de rotación frontales y laterales del modelo de vehículo propuesto.....	144
Fig. 5.5 Diagrama de cuerpo libre de la rueda en el modelo de vehículo propuesto.....	150
Fig. 5.6 Diagrama de cuerpo libre de un eje rígido en el modelo de vehículo propuesto.....	152
Fig. 5.7 Fuerzas longitudinales y laterales en el modelo de vehículo propuesto.....	154
Fig. 5.8 Fuerzas y momentos actuando en la rueda del modelo de vehículo propuesto.	156
Fig. 6.1 Sistema de ecuaciones a ser resuelto por el módulo de dinámica vehicular.	173

Fig. 7.1 Herramienta de interpolación del modulo SusAna.....	185
Fig. 7.2 Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.....	190
Fig. 7.3 Aceleración longitudinal del vehículo en función del tiempo, vehículo base.	190
Fig. 7.4 Distancia recorrida del vehículo en función del tiempo, vehículo base.	191
Fig. 7.5 Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	193
Fig. 7.6 Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.....	193
Fig. 7.7 Velocidad vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	194
Fig. 7.8 Aceleración vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	194
Fig. 7.9 Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	196
Fig. 7.10 Angulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	196
Fig. 7.11 Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.....	197
Fig. 7.12 Angulo de deriva del vehículo en función del tiempo, vehículo base.....	197
Fig. 7.13 Angulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.	202
Fig. 7.14 Angulo de deriva del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.....	202
Fig. 7.15 Velocidad de giro del vehículo en función del tiempo, vehículo base.....	203
Fig. 7.16 g's centrípetas del vehículo en función del tiempo, vehículo base.	203

LISTADO DE SÍMBOLOS

A: Longitud del brazo en el arreglo de Watts. Distancia desde el eje frontal al centro de gravedad.

A_x : Área transversal del vehículo en el eje X .

a : Mitad de la longitud del área de contacto del neumático. Distancia desde el punto de pivote en el brazo hasta el punto de pivote en el eje para el arreglo de Watts. Aceleración lateral ó longitudinal aplicada al cuerpo. Coeficiente para la resolución de la ecuación de cambio de camber por caster e inclinación del eje de dirección.

a_s : Distancia entre el centro de gravedad de la masa suspendida al centro de gravedad de la masa no suspendida frontal.

a_x : Aceleración lateral del vehículo.

a_y : Aceleración lateral del vehículo.

B: Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica. Distancia desde el eje trasero al centro de gravedad. Longitud del brazo en el arreglo de Watts.

B_r : Factor de Rigidez, para el momento residual.

B_i : Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica, para el avance neumático.

B_x : Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

$B_{x\alpha}$: Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso longitudinal.

B_y : Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

$B_{y\kappa}$: Factor de Rigidez de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso lateral.

b : Coeficiente para la resolución de la ecuación de cambio de camber por caster e inclinación del eje de dirección. Distancia desde el punto de pivote en el brazo hasta el punto de pivote en el eje para el arreglo de Watts.

C: Camber de la rueda. Coeficiente de amortiguación de los amortiguadores del vehículo. Factor de Forma de la Fórmula Mágica.

C_0 : Camber de la rueda cuando la diferencia entre el ángulo de orientación actual y el ángulo de orientación inicial es igual a cero.

C_a : Caster de la rueda.

C_{aero} : Coeficiente aerodinámico en el eje respectivo.

C_i : Constante del amortiguador.

C_{mz} : Derivada de la curva de momento autoalineante evaluada en el origen.

C_t : Factor de Forma de la Fórmula Mágica, para el avance neumático.

C_x : Factor de Forma de la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

$C_{x\alpha}$: Factor de Forma de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso longitudinal.

C_y : Factor de Forma de la Fórmula Mágica, para la fuerza lateral.

$C_{y\kappa}$: Factor de Forma de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso lateral.

C_α : Rigidez lateral del neumático.

$C_{\alpha f}$: Rigidez lateral de los neumáticos frontales.

$C_{\alpha r}$: Rigidez lateral de los neumáticos traseros.

C_κ : Rigidez longitudinal del neumático.

CC_α : Gradiente de rigidez lateral del neumático.

CC_κ : Gradiente de rigidez longitudinal del neumático.

c : Coeficiente para la resolución de la ecuación de cambio de camber por caster e inclinación del eje de dirección

c_p : Rigidez por unidad de longitud de los elementos en el modelo de cepillo.

c_{px} : Rigidez longitudinal por unidad de longitud de los elementos en el modelo de cepillo.

c_{py} : Rigidez lateral por unidad de longitud de los elementos en el modelo de cepillo.

D : Máxima fuerza generada por el neumático según la Fórmula Mágica. Distancia horizontal desde el centro de gravedad la masa suspendida hasta el centro de balanceo o cabeceo. Distancia desde el centro de presión aerodinámico del vehículo al centro de gravedad.

D_r : Máximo momento residual del neumático.

- D_t : Máximo avance neumático del neumático según la Fórmula Mágica.
- $D_{x\alpha}$: Máximo de la función de peso, según la Fórmula Mágica, caso longitudinal.
- D_x : Máxima fuerza longitudinal generada por el neumático según la Fórmula Mágica.
- D_y : Máxima fuerza lateral generada por el neumático según la Fórmula Mágica.
- $D_{y\kappa}$: Máximo de la función de peso, según la Fórmula Mágica, caso lateral.
- d : distancia desde el centro de gravedad de la masa suspendida, hasta el eje de cabeceo o balanceo. Distancia horizontal desde el centro del área de contacto de la rueda hasta el centro de balanceo o cabeceo.
- df_z : Cambio normalizado de la carga sobre el neumático.
- d_π : Distancia horizontal desde el centro de contacto de la rueda o desde el centro de la rueda, según aplique, al centro de cabeceo.
- $d_{\pi i}$: Distancia de cada rueda a su respectivo centro de cabeceo.
- d_p : Distancia horizontal desde el centro de contacto de la rueda al centro de balanceo.
- d_{pi} : Distancia de cada rueda a su respectivo centro de balanceo.
- E : Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica. Deformación de los elementos en el modelo de cepillo, forma vectorial.
- E_t : Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica, para el avance neumático.
- E_x : Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.
- $E_{x\alpha}$: Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso longitudinal.
- E_y : Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica, para la fuerza lateral.
- $E_{y\kappa}$: Factor de Curvatura de la Fórmula Mágica, para la función de peso, caso lateral.
- e : Módulo del vector de deformación de los elementos en el modelo de cepillo.
- F_{aero} : Fuerza aerodinámica total generada en un sentido determinado.
- $F_{antibalanceo}$: Fuerza de antibalanceo.
- F_{ci} : Fuerza debida a cada amortiguador.
- F_d : Fuerza lateral generada por el neumático derecho de un eje.
- F_{ez} : Fuerzas externas aplicadas sobre la masa suspendida en dirección del eje Z.

- F_i : Fuerza lateral generada por el neumático izquierdo de un eje.
 F_{ki} : Fuerza debida a cada elemento elástico.
 $F_{\text{levantamiento}}$: Fuerza de levantamiento total.
 F_N : Fuerza lateral re-normalizada.
 $F_{\text{neumático}}$: Fuerza generada en el neumático.
 F_{ni} : Fuerza generada por el neumático.
 F_x : Fuerza longitudinal. Fuerza longitudinal combinada.
 F_{x0} : Fuerza longitudinal pura.
 F_{xi} : Fuerza que cada neumático desarrolla en la dirección del eje x anclado a la rueda.
 F_y : Fuerza lateral. Fuerza lateral combinada.
 F_{y0} : Fuerza lateral pura.
 F_{yi} : Fuerza que cada neumático desarrolla en la dirección del eje y anclado a la rueda.
 F_z : Fuerza normal sobre el neumático.
 F_{z0} : Carga Nominal del neumático.
 F_{z0}' : Carga Nominal modificada del neumático.
 F_{zd} : Fuerza de levantamiento generada por el neumático derecho de un eje.
 F_{zi} : Fuerza de levantamiento generada por el neumático izquierdo de un eje.
 $\bar{F}_y$: Fuerza lateral normalizada.
 $\bar{F}_x$: Fuerza longitudinal normalizada.
- G : Función de peso para determinar el comportamiento de las fuerzas combinadas del neumático. Rigidez del ángulo de inclinación.
 G_{α} : Función de peso para determinar el comportamiento de las fuerzas combinadas del neumático, caso longitudinal.
 G_{γ} : Función de peso para determinar el comportamiento de las fuerzas combinadas del neumático, caso lateral.
 g_x : Proyección de la gravedad en la dirección del eje X del vehículo.
 g_y : Proyección de la gravedad en la dirección del eje Y del vehículo.
 g_z : Proyección del vector gravedad en el eje Z del vehículo.

H : Distancia vertical al centro de cabeceo o balanceo.

h : Altura del centro de gravedad total del vehículo. Altura desde el centro del área de contacto de la rueda hasta el centro de balanceo o cabeceo.

h_2 : Distancia desde el centro de balanceo del vehículo hasta el centro de gravedad de la masa no suspendida del mismo.

h_{π} : Distancia vertical desde el centro de contacto de la rueda o desde el centro de la rueda, según aplique, al centro de cabeceo.

h_p : Distancia vertical desde el centro de contacto de la rueda al centro de balanceo.

I : Inercia polar alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad de la masa suspendida.

I^* : Inercia polar efectiva.

I_e : Inercia polar alrededor del eje X de un eje rígido.

I_r : Inercia polar de la rueda alrededor del eje y.

I_x : Momento de inercia de la masa suspendida alrededor del eje X.

I_{xx}^* : Inercia polar efectiva de la masa suspendida alrededor de un eje paralelo al eje X.

I_y : Momento de inercia de la masa suspendida alrededor del eje Y.

I_{yy}^* : Inercia polar efectiva de la masa suspendida alrededor de un eje paralelo al eje Y.

I_{zz} : Inercia polar del vehículo con respecto al eje Z.

K : Inclinação del eje de dirección. Gradiente de subviraje. Rigidez de los elementos elásticos del vehículo.

K_{db} : Contribución de la desviación de la orientación de las ruedas debido al balanceo.

K_e : Constante elástica efectiva de cada cuarto de vehículo.

K_{ef} : Constante elástica del eje frontal (ambas ruedas).

K_{et} : Constante elástica del eje trasero (ambas ruedas).

K_{gi} : Contribución del ángulo de inclinación de los neumáticos al gradiente de subviraje.

K_i : Constante elástica del elemento elástico.

K_{ma} : Efecto del momento autoalineante en el gradiente de subviraje.

K_n : Contribución de los neumáticos al gradiente de subviraje. Constante elástica del neumático.

K_{ni} : Constante elástica del neumático.

K_t : Constante elástica de la barra antibalanceo.

K_{tdc} : Efectos de la transferencia de carga en el gradiente de subviraje del vehículo.

K_{xk} : Rigidez lateral del neumático.

$K_{y\alpha}$: Rigidez lateral del neumático.

$K_{y\gamma 0}$: Rigidez del ángulo de inclinación del neumático.

$K_{z\alpha 0}$: Rigidez por momento autoalineante del neumático.

$K_{z\gamma 0}$: Rigidez por momento autoalineante del ángulo de inclinación del neumático.

K_{ϕ} : Sensibilidad al balanceo.

k : Deslizamiento combinado normalizado. Pendiente de la curva normalizada, evaluada en el origen. Radio de giro de la masa suspendida.

k_x : Rigidez lateral del neumático.

k_y : Rigidez lateral del neumático.

L : Batalla del vehículo.

$M_{aero,x}$: Momento aerodinámico total generado alrededor del eje X.

$M_{aero,y}$: Momento aerodinámico total generado alrededor del eje Y.

$M_{antibalanceo}$: Momento sobre el cuerpo debido a la acción de la barra antibalanceo sobre el cuerpo.

$M_{balanceo}$: Momento generado alrededor del eje de balanceo por la aceleración lateral aplicada a la masa suspendida.

M_{cabeceo} : Momento generado alrededor del eje de cabeceo por la aceleración longitudinal aplicada a la masa suspendida.

M_{ex} : Momentos externos aplicados sobre la masa suspendida en dirección del eje X.

M_{ey} : Momentos externos aplicados sobre la masa suspendida en dirección del eje Y.

M_s : Masa suspendida.

M_{sx} : Momento que ejerce el peso de la masa suspendida alrededor del eje de balanceo.

M_{sy} : Momento que ejerce el peso de la masa suspendida alrededor del eje de cabeceo.

M_t : Masa total del vehículo.

M_y : Momento de resistencia a la rodadura.

M_z : Momento autoalineante.

M_{z0}' : Momento autoalineante debido al desplazamiento (avance) de la fuerza lateral.

M_{zr0} : Momento autoalineante debido al torque residual (por efectos de conicidad y pseudo-deslizamiento).

$\overline{M}_z$: Momento autoalineante normalizado.

m : Masa no suspendida total del vehículo.

m_e : Masa no suspendida del eje rígido.

m_i : Masa no suspendida de la rueda.

P : Presión.

$p_{Cx1}, p_{Dx1}, p_{Dx2}, p_{Ex1}, p_{Ex2}, p_{Ex3}, p_{Ex4}, p_{Kx1}, p_{Kx2}, p_{Kx3}, p_{Hx1}, p_{Hx2}, p_{Vx1}, p_{Vx2}$: Parámetros que rigen el comportamiento de la fuerza longitudinal generada en el neumático según la Formula Magica.

$p_{Cy1}, p_{Dy1}, p_{Dy2}, p_{Dy3}, p_{Ey1}, p_{Ey2}, p_{Ey3}, p_{Ey4}, p_{Ky1}, p_{Ky2}, p_{Ky3}, p_{Hy1}, p_{Hy2}, p_{Hy3}, p_{Vy1}, p_{Vy2}, p_{Vy3}, p_{Vy4}$: Parámetros que rigen el comportamiento de la fuerza lateral generada en el neumático según la Formula Mágica.

Q : Fuerza horizontal actuando sobre la punta de los elementos en el modelo de cepillo.

Q_1 : Coeficiente para la resolución de la ecuación de cambio de camber por caster e inclinación del eje de dirección.

Q_2 : Coeficiente para la resolución de la ecuación de cambio de camber por caster e inclinación del eje de dirección.

$q_{Bz1}, q_{Bz2}, q_{Bz3}, q_{Bz4}, q_{Bz5}, q_{Bz6}, q_{Bz10}, q_{Dz1}, q_{Dz2}, q_{Dz3}, q_{Dz4}, q_{Dz5}, q_{Dz6}, q_{Dz7}, q_{Dz8}, q_{Dz9}, q_{Ez1}, q_{Ez2}, q_{Ez3}, q_{Ez4}, q_{Ez5}, q_{Hz1}, q_{Hz2}, q_{Hz3}, q_{Hz4}$: Parámetros que rigen el comportamiento del momento autoalineante generado en el neumático según la Formula Mágica.

q_{Sy1}, q_{Sy2} : Parámetros que rigen el comportamiento del momento de resistencia a la rodadura generado en el neumático.

R : Radio de giro. Fuerza combinada normalizada.

R_0 : Radio libre de la rueda.

R_c : Radio cargado de la rueda.

R_e : Radio efectivo de la rueda.

RB_i : Rebote de la rueda.

RB_i^* : Velocidad de rebote.

RM_i : Relación de movimiento del amortiguador con respecto a la rueda. Relación de movimiento del elemento elástico.

$r_{Bx1}, r_{Bx2}, r_{Cx1}, r_{Ex1}, r_{Ex2}, r_{Hx1}$: Parámetros que rigen el comportamiento de la función de peso longitudinal en el neumático según la Formula Mágica.

$r_{By1}, r_{By2}, r_{By3}, r_{Cy1}, r_{Ey1}, r_{Ey2}, r_{Hy1}, r_{Hy2}, r_{Vy1}, r_{Vy2}, r_{Vy3}, r_{Vy4}, r_{Vy5}, r_{Vy6}$: Parámetros que rigen el comportamiento de la función de peso lateral en el neumático según la Formula Mágica.

S : Relación de deslizamiento.

$\bar{S}$: Relación de deslizamiento normalizada

S_{Hx} : Desplazamiento horizontal de la curva generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

$S_{H\alpha}$: Desplazamiento horizontal de función de peso generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

S_{Hy} : Desplazamiento horizontal de la curva generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza lateral.

$S_{Hy\kappa}$: Desplazamiento horizontal de función de peso generada por la Fórmula Mágica, fuerza lateral.

S_{Vx} : Desplazamiento vertical de la curva generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza longitudinal.

S_{Vy} : Desplazamiento vertical de la curva generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza lateral.

$S_{Vy\kappa}$: Desplazamiento vertical de función de peso generada por la Fórmula Mágica, para la fuerza lateral.

S_x : Desplazamiento horizontal de la curva generada por la Fórmula Mágica.

S_y : Desplazamiento vertical de la curva generada por la Fórmula Mágica.

$s_{sz1}, s_{sz2}, s_{sz3}, s_{sz4}$: Parámetros que rigen el comportamiento del momento autoalineante generado en el neumático según la Fórmula Mágica, para el caso combinado.

T : Angulo de orientación de la rueda. Ancho de vías del vehículo.

T_f : Ancho de vías frontal del vehículo.

T_r : Ancho de vías trasero del vehículo.

T_z : Relación entre el momento autoalineante y la fuerza lateral para pequeños valores del ángulo de deslizamiento.

t : Avance neumático.

t_0 : Avance neumático.

u : Deflexión longitudinal de los elementos en el modelo de cepillo.

V : Velocidad.

V_0 : Velocidad de referencia de la rueda

V_c : Velocidad del centro de la rueda.

V_{cx} : Componente en x de la velocidad del centro de la rueda.

V_{cy} : Componente en y de la velocidad del centro de la rueda.

V_r : Velocidad lineal de rodadura.

V_s : Velocidad de deslizamiento del centro de la rueda.

V_{sx} : Componente en x de la velocidad de deslizamiento del centro de la rueda.

V_{sy} : Componente en y de la velocidad de deslizamiento del centro de la rueda.

V_x : Velocidad longitudinal de la rueda. Velocidad en la dirección del eje X del vehículo.

$V_{x,r}$: Velocidad del vehículo en el eje X , relativa al viento.

$\overset{*}{V}_x$: Aceleración en la dirección del eje X del vehículo.

V_y : Velocidad lateral de la rueda. Velocidad en la dirección del eje Y del vehículo.

$\overset{*}{V}_y$: Aceleración en la dirección del eje Y del vehículo.

v : Deflexión lateral de los elementos en el modelo de cepillo.

W : Peso del vehículo.

W_f : Peso del vehículo soportado por el eje frontal.

W_s : Peso suspendido del vehículo.

W_t : Peso del vehículo soportado por el eje trasero.

W_u : Peso no suspendido de cada eje.

X : Abscisa de la Fórmula Mágica, incluyendo desplazamientos horizontales.

X_i : Coordenada de las posiciones de las ruedas respecto al centro de gravedad del vehículo.

x : Abscisa de la Fórmula Mágica, sin incluir desplazamientos horizontales. Distancia desde el centro del área de contacto hasta un elemento particular, en el modelo de Cepillo.

x_m : Valor del deslizamiento normalizado al cual ocurre la fuerza máxima.

Y : Ordenada de la Fórmula Mágica.

Y_i : Coordenada de las posiciones de las ruedas respecto al centro de gravedad del vehículo.

y_a : Valor de la asíntota a la cual se aproximan los datos después de efectuada la normalización.

Z : Posición vertical de la masa suspendida.

$\dot{Z}$: Velocidad vertical de la masa suspendida.

**
 $\ddot{Z}$: Aceleración vertical de la masa suspendida.

Z_0 : Amplitud de la solución armónica del desplazamiento vertical, sistema de 2 grados de libertad.

Z_{0i} : Desplazamiento del perfil del pavimento.

Z_c : Posición del perfil del suelo en un instante determinado.

Z_{cb} : Altura del centro de balanceo de cada eje.

Z_{cc} : Altura del centro de cabeceo de cada eje.

$Z_{CG \text{ masa suspendida}}$: Desplazamiento vertical del centro de gravedad de la masa suspendida.

$\dot{Z}_{CG \text{ masa suspendida}}$: Velocidad vertical del centro de gravedad de la masa suspendida.

$\dot{Z}_{\text{cuerpo},I}$: Velocidad vertical del cuerpo en el extremo considerado.

Z_e : Posición vertical del eje.

*
 $\dot{Z}_e$: Velocidad vertical del eje.

**
 $\ddot{Z}_e$: Aceleración vertical del eje.

Z_i : Posición vertical de la rueda.

$\dot{Z}_i$: Velocidad vertical de la rueda.

**
 $\ddot{Z}_i$: Aceleración vertical de la rueda.

$Z_{i,\text{balanceo}}$: Desplazamiento vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo.

$\dot{Z}_{i,\text{balanceo}}$: Velocidad vertical del extremo de la barra antibalanceo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo.

$Z_{i,cabeceo}$: Desplazamiento vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo.

$\dot{Z}_{i,cabeceo}$: Velocidad vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo.

Z_r : Posición vertical de las ruedas del vehículo.

$\dot{Z}_r$: Velocidad vertical de las ruedas del vehículo.

Z_r : Aceleración vertical de las ruedas del vehículo.

$Z_{r,i}$: Desplazamiento relativo entre la rueda y el cuerpo.

$\dot{Z}_{r,i}$: Velocidad relativa entre la rueda y el cuerpo.

Z_w : Altura del centro de gravedad de cada eje.

α : Ángulo de deslizamiento.

$\bar{\alpha}$: Ángulo de deslizamiento normalizado.

α^* : Ángulo de deslizamiento modificado.

α_c : Ángulo de deslizamiento crítico en el modelo de cepillo.

α_f : Ángulo de deslizamiento de los neumáticos frontales para el modelo de bicicleta.

α_r : Ángulo de deslizamiento modificado, utilizado para determinar el momento residual.

α_s : Ángulo de deslizamiento modificado, utilizado para determinar la función de peso longitudinal.

α_t : Ángulo de deslizamiento modificado, utilizado para determinar el avance neumático. Ángulo de deslizamiento de los neumáticos traseros para el modelo de bicicleta.

β : Ángulo de deriva del vehículo.

$\bar{\beta}$: Ángulo de deslizamiento e inclinación combinados y normalizados.

γ : Ángulo de inclinación de la rueda.

γ^* : Ángulo de inclinación modificado.

$\bar{\gamma}$: Ángulo de inclinación normalizado.

ΔW : Transferencia de carga hacia un eje o rueda.

Δt : Delta de tiempo.

δ : Ángulo de Ackermann.

δ_i : Ángulo de orientación de las ruedas, medido entre la dirección del eje x anclado a la rueda y el eje X del vehículo. Ángulo de orientación de la rueda interna a una curva.

δ_e : Ángulo de orientación de la rueda externa a una curva.

ε : Coeficiente de dirección inducida por balanceo.

ζ : Factor de amortiguación del sistema.

η : Función multiplicadora de las fuerzas normalizadas, para determinar las fuerzas combinadas.

κ : Relación de deslizamiento.

κ_s : Relación de deslizamiento modificada, utilizado para determinar la función de peso lateral.

λ : Fracción de la longitud del área de contacto donde ocurre la transición entre la zona de adhesión y la zona de deslizamiento en el modelo de cepillo.

λ_{z0} : Constante multiplicadora de la carga nominal del neumático.

μ : Coeficiente de fricción del neumático.

μ_x : Coeficiente de fricción longitudinal del neumático.

μ_y : Coeficiente de fricción lateral del neumático.

v : Ángulo de trayectoria.

Π : Angulo de cabeceo de la masa suspendida.

*
 $\dot{\Pi}$: Velocidad angular de cabeceo de la masa suspendida.

**
 $\ddot{\Pi}$: Aceleración angular en el eje Y de la masa suspendida.

Π_0 : Amplitud de la solución armónica del ángulo de cabeceo, sistema de 2 grados de libertad.

P : Angulo de balanceo de la masa suspendida.

*
 $\dot{P}$: Velocidad angular de balanceo de la masa suspendida.

**
 $\ddot{P}$: Aceleración angular en el eje X de la masa suspendida.

P_e : Posición angular del eje.

*
 $\dot{P}_e$: Velocidad angular del eje.

**
 $\ddot{P}_e$: Aceleración angular del eje.

ρ : Densidad del aire.

Σ : Deslizamiento teórico de los elementos en el modelo de cepillo, forma vectorial.

σ_x : Deslizamiento longitudinal teórico en el modelo de cepillo.

σ_y : Deslizamiento lateral teórico en el modelo de cepillo.

τ : Torque aplicado a la rueda.

φ : Angulo del eje de balanceo con la vertical.

Ψ :Ángulo de orientación del vehículo.

*
 $\dot{\Psi}_z$: Velocidad angular en la dirección del eje Z del vehículo.

**
 $\ddot{\Psi}_z$: Aceleración angular alrededor del eje Z del vehículo.

Ω : Velocidad rotacional de la rueda.

Ω_0 : Velocidad rotacional de la rueda, bajo la condición de rodadura libre.

ω_a : Frecuencia amortiguada del sistema del sistema.

ω_n : Frecuencia natural del sistema.

*

ω_y : Aceleración angular de la rueda alrededor de su eje y .

INTRODUCCION

En el vehículo moderno es posible identificar varias áreas en las cuales podemos agrupar todo el desarrollo de un vehículo, como son: Tren de potencia y transmisión, aerodinámica, sistemas de suspensión, dirección, frenos, electrónica y ergonomía, para establecer una clasificación, la cual puede variar según el criterio de los fabricantes.

Con el fin de incrementar el conocimiento disponible en el país acerca de estos sistemas, y construir progresivamente una serie de herramientas enfocadas a facilitar el diseño y comprensión de un vehículo moderno, así como cultivar una cultura automovilística, se decidió desarrollar este trabajo especial de grado, para abarcar la simulación y evaluación de los sistemas de suspensión automotrices, con respecto a la forma en que estos alteran la dinámica vehicular. También es de particular interés construir esta herramienta con la finalidad de incrementar la competitividad de las agrupaciones estudiantiles que representan nuestra universidad en las competencias automovilísticas organizadas por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE).

En el desarrollo de este trabajo se presentan de forma resumida el comportamiento de los neumáticos contemporáneos, los distintos arreglos generales de suspensiones y los distintos parámetros que los representan, así como distintos modelos que simplifican la dinámica vertical a dos grados (máximos) de libertad para obtener una formulación sencilla y fácil de aplicar.

Habiendo presentado el marco contextual en el cual se describe la dinámica vehicular, se expone el modelo de vehículo de catorce grados de libertad propuesto por los autores, junto a la metodología empleada para la elaboración de la herramienta computacional utilizada para evaluar los sistemas de suspensión automotrices. Por último, se incluyen una serie de resultados que ilustran como variaciones en los parámetros de suspensión pueden cambiar el comportamiento general del vehículo.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

A través del desarrollo de la industria automotriz, así como de los deportes a motor, han surgido un gran número de modelos y simulaciones que intentan describir los movimientos que puede presentar los distintos tipos de automóviles. Los modelos varían en la cantidad de grados de libertad, resultados obtenidos, suposiciones y fundamentos teóricos (por ejemplo sistemas de comportamiento lineal vs. no-lineal) usualmente con el propósito de ajustarse a una aplicación particular y reducir la cantidad de cálculos involucrados.

Una gran cantidad de estos modelos son desarrollados por los departamentos internos de las más grandes compañías automotrices, y de los equipos deportivos (escuderías) más sofisticados. Estas simulaciones son altamente especializadas y tratados como secretos por las empresas, por lo que no son accesibles por un usuario externo.

Aunque es prácticamente imposible enumerar la cantidad de modelos y simulaciones existentes, un análisis de los procedimientos y formulación interna de los mismos, concluiría en la evidente simplicidad de la mayoría de los mismos, observado en las severas suposiciones y pocos grados de libertad utilizados.

Un criterio de selección más completo: que consista en una mejor representación de los fenómenos físicos mediante menos simplificaciones (como la no-linealidad de los sistemas de amortiguación) un mayor número de grados de libertad, y simulación del rango completo de aceleraciones y movimientos que afectan el vehículo (lo cual implica grandes amplitudes) nos permitirá observar que los modelos más avanzados, aquellos pocos que pueden ser corroborados satisfactoriamente mediante experiencias empíricas, son variaciones de los siguientes:

(a) McHenry

Desarrollado a mediados de los 60s por Raymond McHenry del Laboratorio Aeronáutico de Cornell o CAL por sus siglas en inglés (actualmente Calspan) y financiado en parte por el gobierno de EUA,

como parte del desarrollo de “*Simulación computarizada de la dinámica automotriz tridimensional general para el estudio de maniobras relacionadas a accidentes en terreno irregular* ¹”. Consiste en quince grados de libertad: seis grados para el cuerpo del vehículo (todos los grados posibles para un cuerpo rígido en un espacio tridimensional) un grado vertical y un grado rotacional para cada rueda, y por ultimo un grado representando la dirección de las ruedas delanteras.

Este modelo se generó utilizando una serie de formulas teóricas junto a una gran cantidad de correlaciones empíricas obtenidas durante 6 años de experimentación con vehículos reales. Eventualmente el modelo de McHenry culminó en el HVOSM (**H**ighway-**V**ehicle-**O**bject **S**imulation **M**odel) y aun se utiliza en software enfocado a la investigación de accidentes viales.

(b) DK-4

Luego de haber culminado HVOSM, Mc Henry junto a Douglas Roland y sus asociados en CAL, continuaron su trabajo, esta vez comisionado por Chevrolet entre 1967 y 1968. Este modelo, enfocado a “*la simulación de viraje transitorio no-lineal en vías que varían en elevación, inclinación y curvatura, para vehículos de suspensión de eje trasero y suspensión independiente trasera* ²”.

Es un modelo enfocado principalmente a obtener información referente a la estabilidad de la conducción del vehículo, por esta razón es capaz de tomar en cuenta datos empíricos, introducidos por el usuario, de elementos externos como por ejemplo las fuerzas aerodinámicas longitudinales y laterales, o fuerzas y momentos ejercidos sobre los neumáticos.

1. *Computer simulation of general three dimensional automobile dynamics for the study of accident related maneuvers on irregular terrain.*

2. *the simulation of transient nonlinear cornering on roadways which vary in elevation camber and curvature, for axle rear suspension and independent rear suspension vehicles.*

Sin embargo, su característica más resaltante es la simulación de un conductor utilizando las teorías de lazo abierto y lazo cerrado desarrolladas para controles automáticos.

(c) MMM

El **Método de Momentos de MRA**, utiliza las mismas ecuaciones básicas de DK-4 sin embargo este método no está basado en la variable temporal, lo que hace de este modelo un estudio cuasi-estático. Este modelo fue desarrollado por Bill Milliken a principios de los 80, al fundar su propia compañía (MRA) luego de partir de CAL.

(d) VDS

También desarrollado por MRA, el “**Vehicle Dynamics Simulation**” es el verdadero sucesor de DK-4. Es un método basado en la variable temporal, que incluye (opcionalmente) otro grado de libertad (para un total de dieciséis grados) que describe la dirección de las ruedas traseras. Este modelo es notable por su capacidad de resolver casi 200 parámetros distintos referentes al vehículo. Es actualmente utilizado por varios de los más grandes constructores de automóviles y por un gran número de escuderías en una amplia gama de categorías de carreras.

Todos los modelos anteriores están basados en sistemas discretos, otros tipos de software no se enfocan en modelar el vehículo, en cambio, adaptan la simulación de sistemas continuos al estudio cinemático, utilizando métodos como el análisis de elementos finitos. Por ejemplo el popular programa “MSC Adams” está basado en uno de los paquetes de elementos finitos más conocidos “MSC Nastran”. Aunque en teoría estos debieran dar mejores resultados, el tiempo invertido en el modelado de todos los componentes de la suspensión y bastidor del vehículo, así como la complejidad de la programación que debe llevar a cabo el usuario para simular las condiciones de terreno y manejo, ponen en desventaja este tipo de software en

comparación al anterior si este es usado solo para la conocer la dinámica vehicular, ya que su fuerte se encuentra en la predicción de esfuerzos que sufren los elementos individuales, más que en el comportamiento del vehículo completo.

Según MRA, en 1994, utilizando la vanguardia en instrumentos de medición, uno de sus clientes deportivos corroboró empíricamente con menos de 10% de error relativo máximo, en todo el rango de amplitudes, los resultados obtenidos por VDS. Esto comprueba que la simulación de los sistemas de suspensión de los automóviles puede ser lo suficientemente exacta para validar el diseño de dichos componentes antes de construir un prototipo.

1.1.1 Motivación

Durante el estudio de la carrera de Ingeniería Mecánica, es común hallar las palabras carro, vehículo, automóvil, etc. y es que sin lugar a dudas este medio de transporte es el ejemplo por excelencia de una gran cantidad de sistemas y elementos, por no decir de fenómenos físicos, e inclusive algunos químicos. La complejidad y cantidad de sistemas que se interrelacionan para concluir en dicha máquina la hacen objeto de un sin-numero de avances tecnológicos todos los años.

De todas las distintas áreas a las que se puede dedicar un ingeniero mecánico cuando es necesario diseñar o rediseñar los sistemas del automóvil, el sistema de suspensión es el que ofrece mayor diversidad de posibilidades en cuanto al tipo, dimensiones, y configuración. Según expertos en la materia existen más de 25 tipos distintos de suspensión aplicables a los automóviles comunes, además al tener tipos distintos de suspensión para cada eje, y considerando que el comportamiento de la misma va a variar considerablemente con tan solo unos pequeños cambios en los parámetros geométricos, la cantidad de alternativas de un equipo de diseño es muy grande.

Aunque un conductor solamente utiliza a lo sumo seis variables en el control de un automóvil (Acelerador, Freno, Embrague, Freno de emergencia, Selector de la transmisión, y Volante) y mas comúnmente solo tres, existen una cantidad grande de variables que determinan como se comportará el vehículo a dichos controles.

Mientras que los sistemas de potencia y eléctricos se encargan de controlar la energía que puede usar el automóvil, la suspensión es la que tiene las funciones de entregar dicha energía al suelo, produciendo así el movimiento de translación deseado, y de sostener el vehículo, a consecuencia de las cargas laterales, longitudinales y verticales. Un modelado más complejo exige considerar que el conductor, y por lo tanto el vehículo, tendrá la necesidad de realizar maniobras, por lo que la suspensión tendrá que guiar la máquina de manera satisfactoria y mantener al conductor en perfecto control sobre una enorme cantidad de masa.

Cuando consideramos la cantidad de factores variables y externos a los que puede estar sometido un automóvil, como son: fuerzas aerodinámicas longitudinales, laterales y verticales; condiciones irregulares del suelo, fuerzas inerciales laterales al virar, fuerzas longitudinales al acelerar y frenar; cargamento que puede transferir su masa como pasajeros inquietos o tanques de líquidos; elevaciones y trazados no planos. Es fácil ver que predecir el movimiento de un carro es un problema bastante complejo.

Los distintos tipos de suspensión se describen mediante muchos parámetros geométricos y dinámicos, y algunos de estos son comunes para todos. Eventualmente los sistemas de suspensión se pueden comparar y evaluar mediante el comportamiento variable de estos parámetros y su relación con la interacción rueda-suelo que definirán el nivel de rodamiento o deslizamiento, y la transferencia de las fuerzas al cuerpo del automóvil, en la forma de vibraciones mecánicas y cambio de las fuerzas inerciales.

Sin embargo después de todos los análisis físico-matemáticos e ingenieriles, la principal razón por la cual las suspensiones son difíciles de diseñar no estará en la complejidad de las ecuaciones, ni siquiera serán las cantidades de variables involucradas en dichas expresiones matemáticas. Al final el motivo por el cual estos sistemas son difíciles para el diseñador es que la gran cantidad de parámetros siempre representan balances y compromisos en el comportamiento del automóvil: aumentar un ángulo puede dar más agarre en rectas, pero se pierde rápidamente al virar; cambiar el avance de un eje con respecto a otro puede aumentar la estabilidad, pero

reducirá la capacidad de girar el carro; Reducir la flexibilidad del sistema mejorara la agilidad y respuesta a los cambios del volante, pero producirá un vehículo muy incomodo y de agarre inestable, etc.

Los cambios son tan importantes que la competitividad de los deportes a motor depende en gran medida del refinamiento de estos parámetros. Por ejemplo en la categoría de Formula 1 (la categoría más sofisticada del automovilismo) casi todos los parámetros cambian para cada circuito. Otro ejemplo se puede observar en la tendencia creciente de los automóviles de lujo que ofrecen suspensiones variables, que con la vuelta de una perilla o toque de un botón se convierte una experiencia de manejo de alta comodidad, a una de alta respuesta.

Aunque Venezuela es uno de los países a nivel mundial con mas densidad de automóviles, y uno de los pocos en los que se construyen (o ensamblan) los mismos, hasta la fecha no se ha diseñado y construido para fines comerciales masivos un vehículo completamente desarrollado en nuestro país. Cabe destacar que múltiples factores son responsables de esto, sin embargo han existido varias iniciativas como el proyecto del “Vehículo Urbano” que durante 20 años se desarrolló en la Universidad Simón Bolívar, o las agrupaciones estudiantiles de varias universidades como la nuestra que compiten en eventos ingenieriles organizados por la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE) entre ellas Formula SAE y Mini Baja SAE. Sin lugar a duda los sistemas de suspensión en estos proyectos han sido parte de un proceso de diseño adecuado a sus necesidades, sin embargo es discutible el nivel de su eficiencia si tomamos en cuenta las limitaciones económicas, tecnológicas y temporales que obstaculizan dichos proyectos en la completa evaluación de sus resultados, basadas en experimentación empírica a escala real.

Previo a las simulaciones por computadora, los fabricantes de autos se encontraban con la necesidad de construir un prototipo cada vez que se necesitaba estudiar un diseño de suspensión, acarreando grandes costos y tiempos de desarrollo, lo cual es común dado el complejo proceso iterativo del diseño de un vehículo. Hoy en día existe software especializado que facilita el diseño y validación de los sistemas automotrices, sin embargo estos presentan un alto grado de complejidad, son muy

costosos, y típicamente requieren que el usuario tenga disponible una enorme cantidad de información que solo puede ser recolectada en años de experiencia y experimentación especializada, lo que coloca estas alternativas fuera del alcance a las iniciativas antes expuestas

El tema de la simulación de los sistemas de suspensión vehiculares proporcionan un amplio campo de estudio para la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela, particularmente otorga oportunidades de desarrollo para el crecimiento académico de los estudiantes de las materias de Cinemática de Máquinas y Dinámica de Máquinas, así como una excelente herramienta para el mejoramiento de los productos desarrollados por las organizaciones estudiantiles Formula SAE y Mini Baja SAE de nuestra universidad.

1.2 Planteamiento del problema

El diseño de un automóvil es una de las mayores complejidades en el ejercicio de la ingeniería mecánica. Al igual que en todo diseño, lo más importante en el resultado del proceso intelectual y de construcción necesario para desarrollar un vehículo es satisfacer las demandas del usuario. En algunos casos esas demandas se pueden cumplir fácilmente, cuando están enfocadas en un solo objetivo, sin embargo más comúnmente, los conductores necesitan más de una característica deseable como lo son seguridad, agilidad, comodidad, economía, estabilidad y rendimiento; cuestión que se complica aun mas cuando se observa la necesidad de aumentar la eficiencia de las relaciones entre los distintos sistemas del automóvil y las diferencias tan marcadas que existen entre distintos usuarios como lo pueden ser una persona de camino a su trabajo en una ciudad, o un conductor de turismo en la Gran Sabana, sin hablar de las complicaciones de las competencias deportivas que pueden ser capaces de convertir el auto más rápido en un circuito, al más lento en otro.

Es virtualmente imposible obtener una solución universal, un vehículo que sea el mejor en todas las condiciones, por lo que es necesario dar prioridades y hacer compromisos. De todos los elementos de un carro, la suspensión (y sus subsistemas) es sin lugar a dudas el elemento más difícil de evaluar a nivel teórico; dos autos con

la misma potencia, sistema eléctrico, chasis, aerodinámica, y conductor, se sentirán y comportaran como dos máquinas completamente distintas aunque la única diferencia sea una configuración distinta del *mismo* sistema de suspensión. Es por lo tanto necesario un profundo estudio de este sistema antes del uso comercial o deportivo de estos aparatos.

Actualmente en nuestro país se desea mejorar la cultura automotriz mediante el desarrollo de varios proyectos de construcción de vehículos diseñados y construidos en nuestro territorio. Las organizaciones estudiantiles que participan mundialmente en el desarrollo deportivo de diferentes tipos de vehículos, ya se ven en la necesidad de obtener refinados sistemas de suspensión para ser competitivos. Es por ello que se desea diseñar un software de computación que, utilizando el modelado matemático de un automóvil mediante un sistema discreto de varios grados de libertad que sea capaz de evaluar los distintos aspectos cinemáticos y dinámicos del vehículo, realizando la simulación de los sistemas de suspensión, con la finalidad de predecir el comportamiento del mismo antes de construir un prototipo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar y ejecutar un modelo fisico-matemático que represente con un buen grado de exactitud los sistemas de suspensión de vehículos terrestres de cuatro ruedas y dos ejes, el cual se llevará posteriormente a un programa de computadora.

1.3.2 Objetivos Específicos

- (a) Realizar una extensa investigación bibliográfica con respecto a la dinámica vehicular y comportamiento de los sistemas de suspensión, tomando en cuenta los estudios complejos del comportamiento de los neumáticos y la no-linealidad de los elementos elásticos y de amortiguación.

- (b) Establecer, a partir de la información obtenida, los criterios y procedimientos más apropiados para establecer un modelo matemático que permita estudiar y analizar los sistemas de suspensión.
- (c) Seleccionar las mejores correlaciones que describen la compleja interacción neumático-suelo.
- (d) Diseñar un algoritmo flexible, capaz de procesar la información de una compleja cadena cinemática, mediante la filosofía de encapsulación.
- (e) Diseñar un programa de computación que le permita evaluar al usuario, los sistemas de suspensión más comunes, mediante varios de sus parámetros y fenómenos automotrices principales.
- (f) Diseñar el programa ergonómicamente, de tal manera que la relación humano-máquina sea fácil e intuitiva.
- (g) Comparar los resultados obtenidos mediante el programa con aquellos obtenidos experimentalmente y numéricamente.
- (h) Elaborar la documentación referente al programa de manera comprensible y de fácil acceso.

1.3.3 Alcances

- Simular de manera real el comportamiento de un automóvil, para permitir que un usuario con suficientes conocimientos de los sistemas de suspensión pueda evaluar su diseño.
- Predecir el desempeño dinámico del automóvil, de tal manera que se pueda obtener información útil para el diseñador y conductor, en distintos aspectos como la agilidad, agarre, comodidad, entre otras.
- Predecir múltiples condiciones críticas de estabilidad (seguridad) del vehículo. Así pues prevenir varios fenómenos indeseables como son el sobreviraje, subviraje, hundimiento, etc.
- Diseñar el programa de manera flexible, permitiendo al usuario extender o incluso modificar los sistemas de suspensión simulados, mediante comportamientos explícitamente descritos o configurados por el mismo.

- Evaluar y seleccionar el lenguaje más apropiado para realizar la programación, tomando en cuenta las ventajas y desventajas de los mismos, portabilidad y accesibilidad.
- Construir el programa de manera modular, permitiendo al usuario elegir la complejidad de la simulación y opciones disponibles para la utilización del programa.
- Obtener resultados que se cotejarán con datos empíricamente comprobados, que sean de relevancia tanto para la evaluación de diseños de carros comerciales de uso común, como para automóviles de competición.
- Tener en consideración las necesidades de los distintos usuarios que pueden verse involucrados en la evaluación de los sistemas de suspensión vehiculares.
- Asegurar la utilidad para las agrupaciones estudiantiles que actualmente diseñan y construyen vehículos en la universidad (Formula SAE-UCV y Mini Baja UCV) así como para servir de herramienta en la instrucción de las materias de Cinemática de Máquinas y Dinámica de Máquinas.

CAPITULO II

NEUMÁTICOS

2.1 Generalidades

El control del vehículo en marcha depende casi exclusivamente de las fuerzas y momentos que se generen en el neumático, estando estas influenciadas por la cinemática y dinámica, tanto del sistema de suspensión, como del vehículo en sí, y también por las características intrínsecas del neumático. El hecho de que un auto, o camión, o bus, pueda acelerar, frenar, completar una curva, etc., son efectos de las fuerzas generadas en el neumático, consecuencia de la deformación que se produce en el mismo a través de otros subsistemas del vehículo en cuestión; tales como torque a través del sistema de potencia y frenos, fuerzas y cambios de posición a través del sistema de dirección, son algunos de ellos.

Sin embargo, a pesar de la semejanza en la acción que dichos sub-sistemas ejercen sobre el neumático, existen diferencias de comportamiento notables de vehículo a vehículo, e incluso, un mismo auto equipado con distintos juegos de neumáticos tendrá diferencias de comportamiento, en algunos casos sutiles, en otros notables, debido a las características propias de los neumáticos, lo que permite inferir que la interacción de los neumáticos con el vehículo y con el pavimento es mucho más compleja de lo que habitualmente se considera. Antes de comenzar con los aspectos fundamentalmente teóricos acerca de los neumáticos, es necesario dedicar unas líneas a los aspectos cualitativos que los describen.

Un neumático es la parte de las ruedas de un vehículo que está en contacto con el pavimento, bajo condiciones normales de funcionamiento. Se caracteriza por ser un elemento compuesto principalmente de caucho sintético que contiene una cantidad finita de aire, y cuya función es sostener el vehículo, transmitir las fuerzas del vehículo al pavimento y viceversa, y proporcionar una manera eficiente para que el automóvil pueda ponerse en movimiento.

Un neumático moderno es una estructura de malla de acero de varias capas, cada una llamada hoja, envueltas por una capa gruesa de caucho sintético. Las hojas están compuestas de cordones o cuerdas, y la alineación de éstas con respecto a la línea media circunferencial del neumático son un factor importante para establecer las

características dinámicas de este último; en un neumático radial las cuerdas están orientadas de tal manera que forman un ángulo de noventa grados (90°) con respecto a esta línea, mientras que en los neumáticos sesgados dicho ángulo es de aproximadamente cuarenta grados (40°), con capas alternadas, una con las cuerdas orientadas de izquierda a derecha y la siguiente de derecha a izquierda y así sucesivamente. En los neumáticos radiales se añade una última hoja con las cuerdas orientadas de tal manera que forman un pequeño ángulo con la línea media circunferencial, típicamente veinte grados (20°). El agregado de caucho es una combinación de caucho natural con carbón negro, azufre, aceite, sílice y otros en cantidades variables de acuerdo a las propiedades específicas que se le quiera dar al neumático en cuestión, tales como alta durabilidad, alto desempeño, una solución intermedia, etc. Las funciones principales de esta capa es la de sellar el aire dentro del neumático y así proveer un elemento lo suficientemente rígido para soportar el peso del vehículo, sus ocupantes y cualquier carga adicional y transmitir de manera efectiva las fuerzas que se generan en él a causa de las deformaciones impuestas por las distintas condiciones de manejo, y que sea lo suficientemente elástico para absorber parte de dichas fuerzas, eventuales impactos e irregularidades que se presenten en el camino sin que por estas causas pierda funcionalidad. Dicha capa muchas veces se encuentra ranurada con un patrón particular para poder permitir la evacuación del agua cuando se transita por caminos mojados, y así garantizar que se efectúe el contacto entre el neumático y el pavimento sin que exista una capa sustancial de agua que perjudique la generación de fuerzas.

www.carbibles.com

Bias / Crossply construction

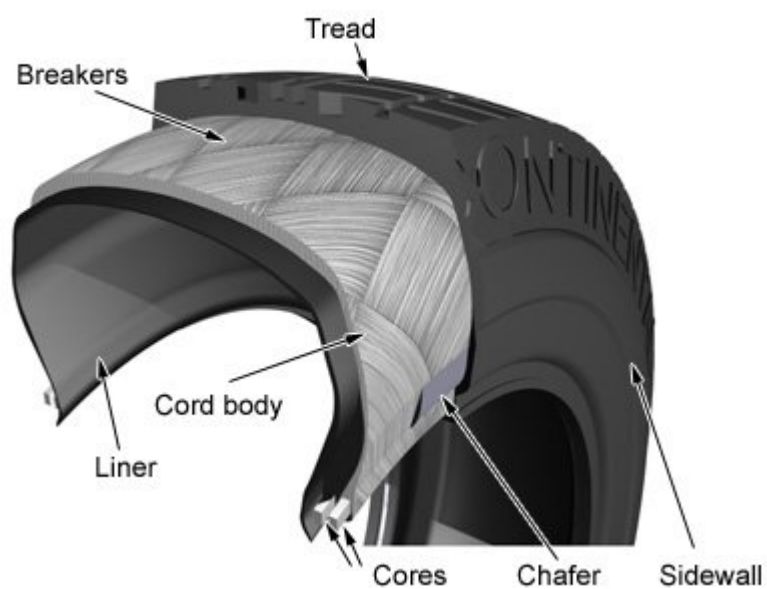


Fig. 2.1 Diagrama de construcción de un neumático de malla sesgada.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

www.carbibles.com

Radial construction

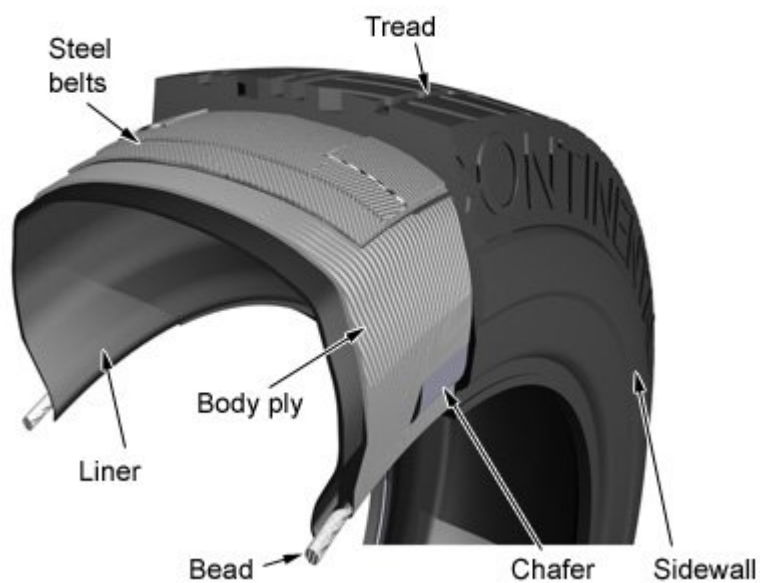


Fig. 2.2 Diagrama de construcción de un neumático de malla radial.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

2.2 Mecánica de la Generación de Fuerzas

Las fuerzas que se generan en un neumático, aunque puedan tratarse como una única fuerza o varias fuerzas aplicadas en un punto del mismo, en realidad es una única fuerza distribuida en toda la superficie de contacto del mismo. Dicha distribución no es uniforme, ya que depende principalmente de la fuerza vertical que se ejerza en cada diferencial de área de contacto (dA_{contacto}). Existen varias modalidades bajo las cuales un neumático en contacto con el pavimento genera fuerzas útiles, siendo las principales la adhesión entre ambas superficies, y la histéresis producto de la indentación de la superficie del pavimento en el neumático. A pesar de que dichos fenómenos no son muy bien entendidos en la actualidad, a continuación se hará una breve descripción cualitativa de ambos fenómenos.

2.2.1 Adhesión

Siempre que el neumático esté en contacto directo con el pavimento (sin que existan agentes intermedios que dificulten dicho contacto, tales como polvo, agua, aceite, etc.) entre ambas superficies existe cierta interacción a nivel molecular que ocasiona que la goma se “pegue” al pavimento momentáneamente, ya que se generan enlaces entre las moléculas de la superficie del neumático y aquellas en la superficie del pavimento. Este mecanismo es el principal responsable de la generación de fuerzas cuando el pavimento está seco; ésta es una de las razones por las cuales se pierde adherencia cuando se circula sobre pavimentos húmedos o mojados.

2.2.2 Histéresis

El mecanismo de la histéresis representa la pérdida de energía en la goma debido a la deformación que ocurre cuando ésta se desliza sobre el pavimento. La fricción por histéresis no es tan sensible al agua en el camino como lo es el componente de adhesión, por ello la tracción sobre pavimento mojado se ve beneficiada mientras más histéresis tenga la goma que lo compone. Este mecanismo, junto con la adhesión, son los responsables de la generación de fuerzas en un neumático.

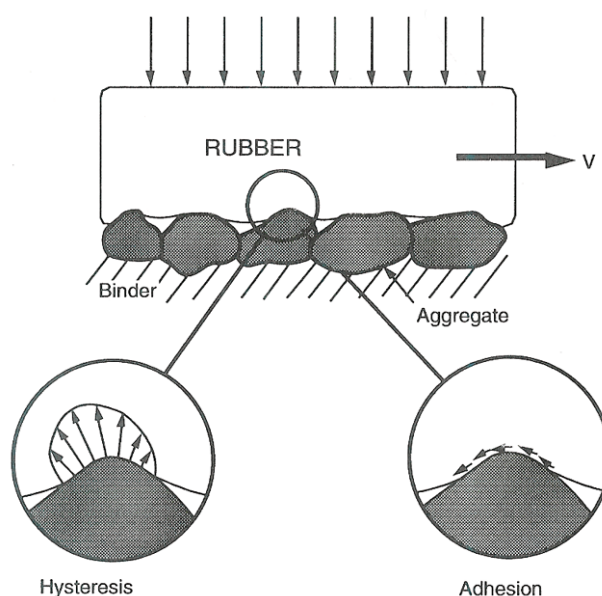


Fig. 2.3 Mecanismos de la generación de fuerzas en el neumático.
(Fuente: Gilliespie, Thomas. **“Fundamental of Vehicle Dynamics”**, 1992)

2.3 Sistema de Ejes Coordinados.

Para poder entender las direcciones en las cuales se generan las fuerzas y momentos en un neumático, y de ésta manera aplicar cualquiera de los modelos analíticos existentes, se han establecido algunos sistemas de ejes cartesianos bajo los cuales se referencian dichas fuerzas y momentos. Algunos de estos sistemas son: Sistema SAE, Sistema ISO, Sistema SAE Modificado, entre otros.

En el sistema de coordenadas SAE, los ejes están orientados según la regla de la mano derecha, con el eje x , apuntando hacia la parte frontal de la rueda, el eje y paralelo al eje de rotación de la misma y apuntando hacia la derecha, y el eje z ortogonal a estos ejes apuntando hacia abajo, con el origen ubicado en el Centro del Área de Contacto.

En el sistema de coordenadas ISO, los ejes están orientados según la regla de la mano derecha, con el eje x , apuntando hacia la parte frontal de la rueda, el eje y paralelo al eje de rotación de la misma y apuntando hacia la izquierda, y el eje z ortogonal a estos ejes apuntando hacia arriba, con el origen ubicado en el Centro del Área de Contacto.

En el sistema de coordenadas SAE Modificado, el marco de referencia es el mismo que el sistema de coordenadas SAE, la diferencia radica en cómo se referencian ciertas magnitudes particulares, como se explicará posteriormente.

En todos estos sistemas de coordenadas, la dirección de la Fuerza Longitudinal (F_x) es paralela al eje x , las direcciones de la Fuerza Lateral (F_y) y del Momento de Resistencia a la Rodadura son paralelas al eje y , y la Fuerza Normal (F_z) y el Momento Auto-Alineante (Self-Aligning Torque, M_z) son paralelas al eje z .

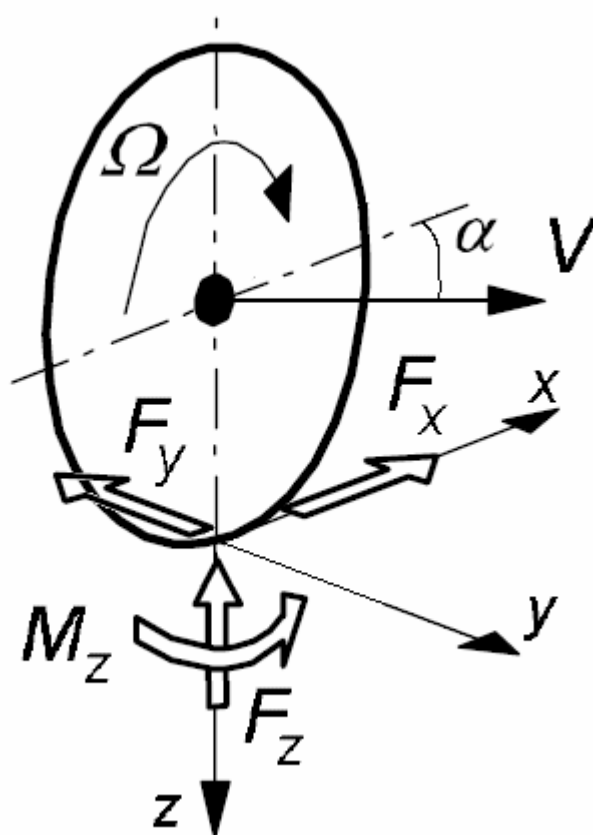


Fig. 2.4 Fuerzas y momentos en el neumático.
(Fuente: Pacejka, Hans “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002 [Modificado por los autores al sistema de ejes SAE])

2.4 Conceptos Básicos

Antes de estudiar de manera profunda el comportamiento del neumático y la manera en que se desarrollan las fuerzas en él, es necesario dar una serie de definiciones que ayudarán a comprender mejor el contexto en el cual se presenta la información:

- (a) Relación de Deslizamiento (κ): En inglés conocida como Slip Ratio o simplemente S.R., es la relación entre la velocidad lineal del centro de la rueda y la velocidad del centro del área de contacto de la rueda, todas en la dirección del eje x anclado a la rueda. Está definida de esta forma:

$$\kappa = -\frac{(V_x - R_e * \Omega)}{V_x} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.1)$$

Donde:

V_x es la componente de velocidad de la rueda en el eje x . [m/s]

R_e es el radio efectivo de la rueda. [m]

Ω es la velocidad angular de la rueda. [rad/s]

- (b) Ángulo de Deslizamiento (α): En inglés conocido como Slip Angle o simplemente S.A., es el ángulo formado entre la tangente a la trayectoria del centro del área de contacto de la rueda en un instante determinado y el eje x anclado a la rueda en ese mismo instante. Se expresa de la siguiente manera:

$$\tan \alpha = -\frac{V_y}{V_x} \quad [\alpha \text{ en radianes, Adimensional}] \quad (2.2)$$

Donde:

V_y es la componente de velocidad de la rueda en el eje y . [m/s]

V_x es la componente de velocidad de la rueda en el eje x . [m/s]

- (c) Plano Medio de la Rueda: Plano normal al eje de rotación del neumático que lo divide en 2 partes iguales (despreciando asimetrías de construcción).
- (d) Centro del Área de Contacto: Se define como la intersección del plano medio de la rueda y la proyección de su eje de giro en el plano del camino.

- (e) Fuerza Vertical: Es la carga que se le aplica al neumático en cualquier instante, en dirección normal al plano del camino. Además de la componente del peso, tanto de la rueda como la fracción del peso del vehículo que soporta, puede tener una componente debido a la carga aerodinámica sobre el vehículo y una componente adicional debido a condiciones dinámicas de funcionamiento del vehículo (reacción al torque motor, transferencia de carga, fuerzas instantáneas generadas por los componentes activos de la suspensión, etc.)
- (f) Ángulo de Inclinación (γ): Es el ángulo de inclinación del eje z de la rueda con respecto a la normal al pavimento donde esté transitando dicha rueda.
- (g) Radio Libre (R_0): Es el radio de la combinación rin-neumático, a una presión de inflado determinada, sin que soporte carga alguna.
- (h) Radio Cargado (R_c): Es el radio de la combinación rin-neumático, a una presión de inflado determinada, instalado en el vehículo correspondiente y soportando la fracción correspondiente del peso de dicho vehículo colocado en posición horizontal, bajo condiciones estáticas.
- (i) Radio Efectivo (R_e): Es el radio de la combinación rin-neumático, a una presión de inflado determinada, instalado en el vehículo correspondiente, bajo condiciones dinámicas (con el vehículo en movimiento, bajo la acción de las cargas que se presenten durante el funcionamiento del mismo). Debido a la dificultad en hallar este radio, se propone una definición alternativa, de la siguiente manera: Es la relación entre la componente de velocidad en el eje x de la rueda y la velocidad angular de la misma

$$R_e = \frac{V_x}{\Omega} \quad [\text{m}] \quad (2.3)$$

2.5 Características de las Fuerzas y Momentos en un Neumático

Como se explicó anteriormente, las deformaciones a las que se pueda someter un neumático generan fuerzas que pueden ser utilizadas para el control de un vehículo: aceleración y frenado, y cambios de dirección del mismo. Sin embargo, la forma típica de las curvas de fuerzas y momentos de un neumático no es semejante a la curva de fricción seca entre 2 superficies, aunque este mecanismo (fricción) esté presente. En ésta sección se explicará brevemente las características de cada una de dichas fuerzas y momentos.

2.5.1 Fuerza Longitudinal y Lateral

Estas fuerzas son consecuencia de las deformaciones longitudinal y lateral, respectivamente, de la banda de rodadura, debido a momentos de tracción, frenado y/o cambios de dirección. La forma de dichas curvas es la que se muestra en la figura (2.5):

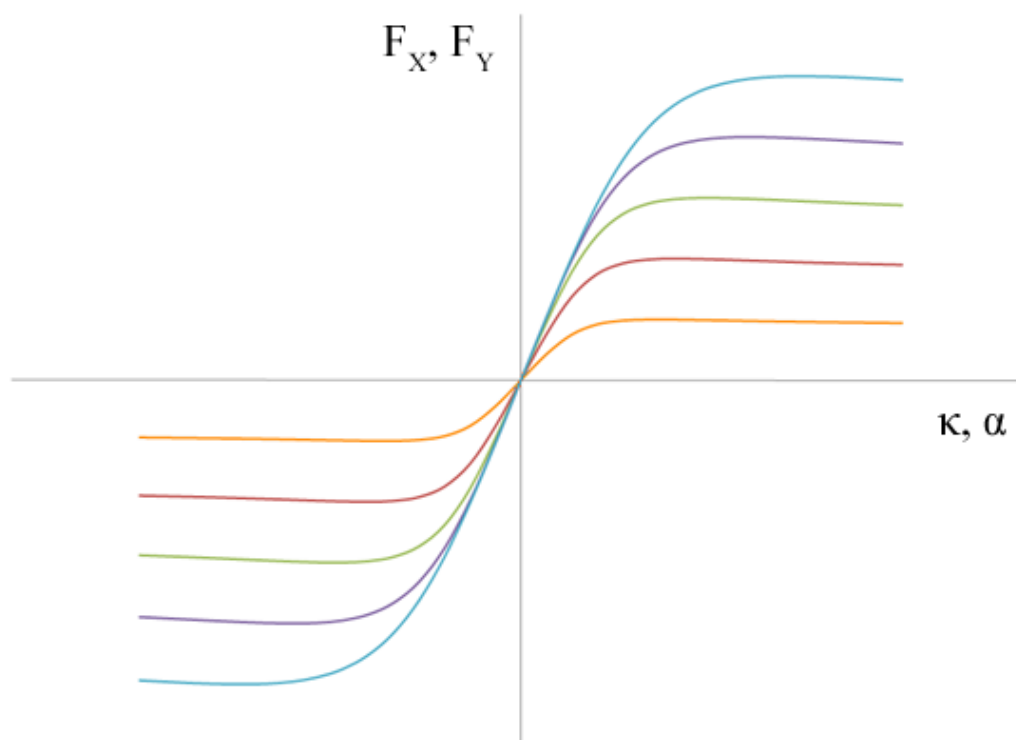


Fig. 2.5 Fuerza del neumático vs deslizamiento, a distintas cargas.
De naranja a azul, incremento de carga (F_z)
(Fuente: Elaboración Propia, 2008)

En el rango de uso normal de los neumáticos (de -1 a ∞ en el valor de la relación de deslizamiento para la fuerza longitudinal, y de -90 a 90 grados de ángulo de deslizamiento para la fuerza lateral) se pueden distinguir tres zonas: La zona de adhesión pura, la zona de transición y la zona de deslizamiento puro.

2.5.1.1 Zona de Adhesión

Esta zona se extiende desde un valor de la relación de deslizamiento o ángulo de deslizamiento igual a cero hasta unas pocas unidades de esta magnitud, dependiendo del neumático, este valor puede variar; como regla general dicha zona se extiende hasta aquellos valores de fuerza que sean capaces de generar aceleraciones de 3m/s^2 . Se caracteriza por ser una zona en la cual la fuerza aumenta de manera casi lineal con la magnitud de deslizamiento, por lo tanto cualquier análisis dinámico que implique las propiedades del neumático puede simplificarse enormemente si los valores absolutos de aceleración son menores a los anteriormente indicados.

Los parámetros más importantes en esta zona son la Rigidez Longitudinal o Rigidez Lateral respectivamente, que es la razón de cambio de la fuerza con respecto a la magnitud de deslizamiento:

$$C_{\kappa} = \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=0} \quad [\text{N}] \quad (2.4)$$

$$C_{\alpha} = \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad [\text{N/grado, N}] \quad (2.5)$$

Usualmente medida en el origen, y el Gradiente de Rigidez Longitudinal o Gradiente de Rigidez Lateral, que es la relación de cambio de la Rigidez respectiva con respecto a la Fuerza Vertical:

$$CC_{\kappa} = \frac{\partial C_{\kappa}}{\partial F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.6)$$

$$CC_{\alpha} = \frac{\partial C_{\alpha}}{\partial F_z} \quad [1/\text{grado, Adimensional}] \quad (2.7)$$

2.5.1.2 Zona de Transición

Es aquella zona que se extiende desde aquel valor de la magnitud de deslizamiento para la cual la fuerza generada es capaz de provocar una aceleración de aproximadamente 3m/s^2 a la masa que soporta dicho neumático, hasta aquel valor en el cual el neumático desarrolla la fuerza máxima que es capaz de generar. Esta zona se caracteriza por un aumento continuo no lineal de la fuerza con respecto a la magnitud de deslizamiento, hasta el punto en el cual se alcanza la fuerza máxima. Al contrario de la zona anterior, en la cual la generación de fuerzas se presenta con un deslizamiento del área de contacto casi nulo, en esta zona el deslizamiento de dicha zona se hace notable, y aumenta progresivamente hasta el punto de fuerza máxima, en el cual el mismo ocurre prácticamente en toda el área de contacto.

Como propiedades importantes de esta zona se pueden destacar el valor de magnitud de deslizamiento al cual se presenta la fuerza máxima, y el valor de dicha fuerza, que dividida entre la carga vertical da como resultado el coeficiente de fricción del neumático:

$$\mu_x = \frac{F_{x,\max}}{F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.8)$$

$$\mu_y = \frac{F_{y,\max}}{F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.9)$$

2.5.1.3 Zona de Deslizamiento

Una vez que el neumático llega a la máxima fuerza que puede generar, se dice que está saturado. Cualquier incremento de la magnitud de deslizamiento por encima del valor que produce dicha fuerza, causará una disminución en el valor de la fuerza que puede generar el neumático, además de un deslizamiento incontrolado del mismo. Esta zona se caracteriza debido a que prácticamente toda el área de contacto del neumático se encuentra en deslizamiento, y por la disminución de la fuerza después del máximo, lo que ocurre de manera gradual y no abrupta. Esta zona se extiende desde el valor que produce la fuerza máxima. No existen propiedades útiles que se puedan extraer de esta zona, y para fines netamente teóricos sólo es útil el valor de la

asíntota a la cual tienden los valores de la fuerza cuando se tienen valores altos de la magnitud de deslizamiento.

Cabe destacar que en el caso de la fuerza longitudinal, esta zona se extiende hasta una relación de deslizamiento infinita en el caso de aceleración, y para la rama de frenado hasta un valor de la relación de deslizamiento igual a -1 (que representa la condición en la cual una rueda está totalmente bloqueada debido a una frenada brusca). En el caso de la fuerza lateral esta zona se extiende hasta un deslizamiento perpendicular a la orientación de la rueda.

2.5.2 Momento Autoalineante

Aunque la curva de momento autoalineante se puede describir matemáticamente de la misma manera que las curvas anteriores, sus propiedades físicas son distintas a la de aquellas, por lo que se explicará en detalle sus características.

Se puede definir como momento autoalineante aquel momento que tiende a alinear la dirección del neumático con la dirección de su vector velocidad; dicho de otra manera, aquel momento que intenta llevar el ángulo de deslizamiento a un valor de cero. Se produce por la asimetría de la deformación que ocurre cuando el neumático se somete a un ángulo de deslizamiento; esto es debido a que la fuerza generada en el neumático no es una fuerza puntual, sino que es la suma de las fuerzas que genera cada diferencial de área de contacto, y a su vez esta fuerza es aproximadamente proporcional a la deformación que experimenta la banda de rodadura, inmediatamente después del borde de ataque del área de contacto la deformación es pequeña, y por lo tanto las fuerzas también lo son, sin embargo, a medida que nos alejamos del borde de ataque y nos acercamos al borde de salida de ésta área, la deformación aumenta progresivamente y con ello las fuerzas, esto origina que la resultante de fuerzas se desplace hacia atrás del origen del sistemas de coordenadas de la rueda, y por lo tanto genere un momento alrededor del eje Z. A esta distancia se le conoce como Avance Neumático (del inglés *pneumatic trail*), y tiene la siguiente forma:

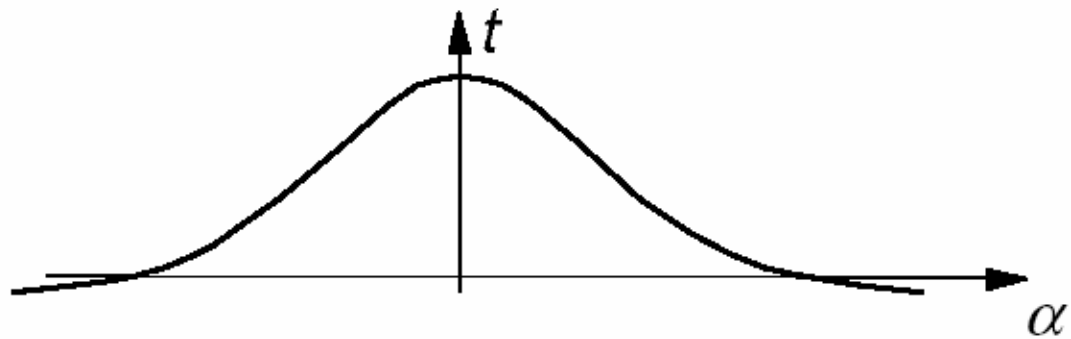


Fig. 2.6 Avance neumático en función del ángulo de deslizamiento.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2008)

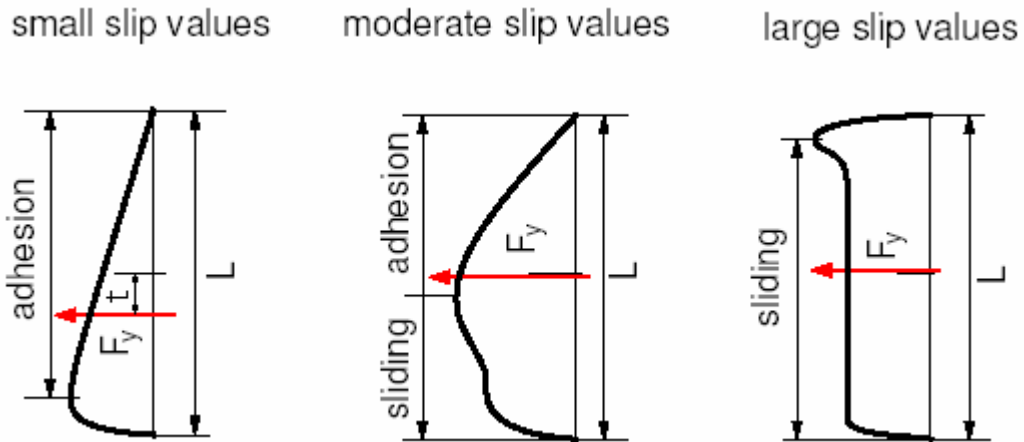


Fig. 2.7 Distribución de fuerza lateral en el área de contacto.
(Fuente: Rill, Georg. “**Vehicle Dynamics, Lecture Notes**”, 2006 [Modificado por los autores para seguir la nomenclatura])

El momento autoalineante puede expresarse en función de la curva de fuerza lateral y de la curva de avance neumático según la siguiente relación

$$M_z = -t * F_y \quad [\text{Nm}] \quad (2.10)$$

En este caso, para poder examinar la curva según las tres zonas que se mencionaron anteriormente, se necesita anclar esta curva a aquella de fuerza lateral en las mismas condiciones, ya que la curva de momento depende de la curva de fuerza, como se explicó antes.

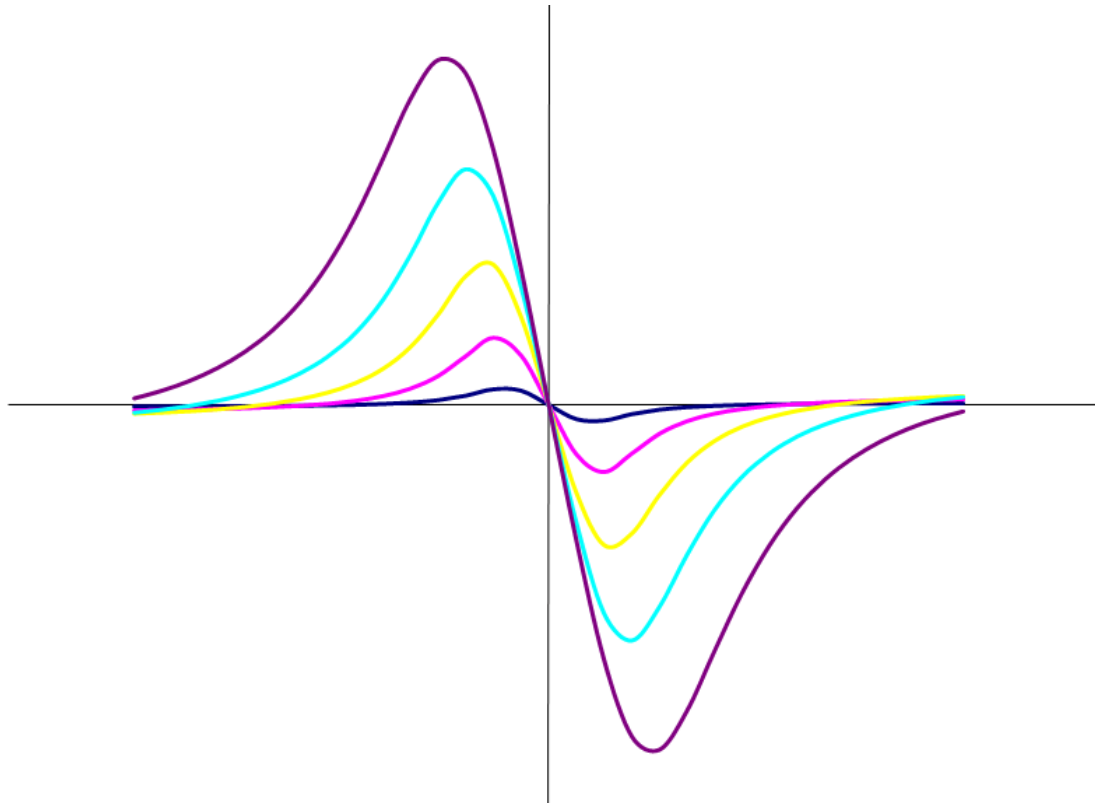


Fig. 2.8 Momento Autoalineante vs ángulo de deslizamiento, a distintas cargas.
De azul a violeta, incremento de carga (F_z)
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

2.5.2.1 Zona de Adhesión

Siendo aquella zona definida por las características de la curva de fuerza lateral, en esta zona el momento autoalineante no puede considerarse lineal, ya que, aunque existe una zona pequeña en la cual existe dicha linealidad, no resulta práctico tomar en cuenta sólo esta pequeña parte. Esta zona se caracteriza por un rápido aumento de los valores del momento según se incrementa el ángulo de deslizamiento hasta alcanzar su máximo o valores cercanos al mismo. Los parámetros de importancia netamente teórica, son la relación de la derivada de esta curva en el origen a la rigidez lateral del neumático bajo estas condiciones (parámetro extraído de la curva de fuerza lateral respectiva):

$$C_{MZ} = \frac{\partial M_z / \partial \alpha |_{\alpha=0}}{C\alpha} \quad [\text{Nm/N}] \quad (2.11)$$

Y el valor del ángulo de deslizamiento al cual ocurre el momento máximo, si se presenta en esta zona

2.5.2.2 Zona de Transición

Al contrario que las otras curvas ya estudiadas, en esta zona la magnitud del momento autoalineante disminuye de manera más o menos rápida hasta hacerse casi nulo o nulo, esto se debe a que aunque la fuerza aumenta hasta el punto de saturación del neumático, el avance neumático disminuye de manera progresiva debido al deslizamiento, puesto que éste se inicia en el borde de salida del área de contacto y se extiende hacia el borde de ataque conforme se incrementa el ángulo de deslizamiento, ya que las zonas que deslizan generan menos fuerza que las zonas que todavía tienen adherencia, la resultante se va desplazando hacia adelante conforme aumenta el ángulo de deslizamiento.

Los parámetros importantes de esta zona son los siguientes: el valor de ángulo de deslizamiento al cual se alcanza el momento máximo (si este no se presenta en la zona de adherencia) y el punto en el cual el momento se hace nulo.

2.5.2.3 Zona de Deslizamiento

Como se comentó anteriormente, mientras mayor es el ángulo de deslizamiento más hacia adelante se desplaza la resultante de fuerzas, llegando a un punto en el cual la resultante de fuerzas pasa por el origen del eje de coordenadas, haciéndose nulo el valor de momento autoalineante. Conforme aumenta el ángulo, aunque casi la totalidad del área de contacto se encuentra deslizándose, existe una pequeña área de la misma en la cual existe adhesión, por lo tanto la resultante de fuerzas se desplaza hacia delante del eje Z, originándose un momento que en vez de intentar reducir el ángulo de deslizamiento, contribuye con el aumento del mismo. Este fenómeno se puede observar en la curva de momento autoalineante como una inversión de los valores de momento en esta zona de deslizamiento, y cuyos valores, al igual que en las curvas ya mencionadas, tienden a una asíntota.

2.5.3 Momento de Resistencia a la Rodadura

Este momento se presenta opuesto al sentido de giro, con respecto al eje Y de la rueda. Existen varias maneras de representar dicho momento, en algunos modelos se considera como un momento opuesto al sentido de giro de la rueda, en otros como un desplazamiento de la fuerza vertical en el eje X de la rueda, algunos como una fuerza con cierto ángulo respecto al eje Z de la rueda y que pasa por el centro de la misma. Aunque no es de importancia para el estudio general de la dinámica del vehículo, dicho momento cobra importancia cuando se hacen estudios de economía de combustible y potencia del tren motriz.

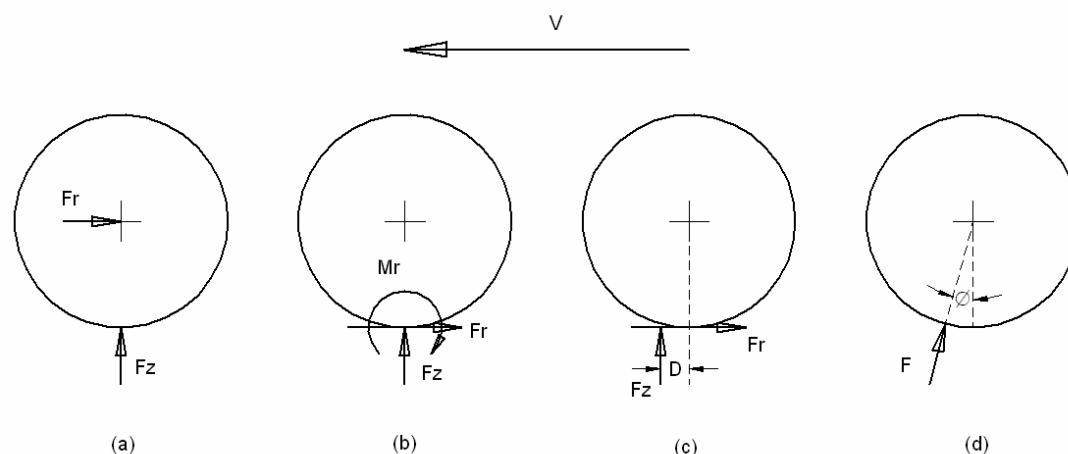


Fig. 2.9 Distintas representaciones de la resistencia a la rodadura.
(Fuente: Elaboración propia, basada en una imagen de Dixon, John. "Tires, Suspension and Handling", 1996)

2.6 Influencia de parámetros externos

En el apartado anterior se explicaron las características generales de las curvas de los neumáticos, sin embargo, existen variables externas (carga, ángulo de inclinación, entre otras) que modifican dichas curvas, y por lo tanto, el comportamiento de un neumático dado.

2.6.1 Carga

En primera instancia, mientras mayor sea la carga vertical que soporte el neumático, mayor será la fuerza que el mismo es capaz de generar, lo cual es cierto.

Sin embargo, el aumento en la fuerza no es proporcional a la carga, por lo tanto, mientras mayor sea la carga vertical, menor es la relación entre la fuerza generada y la fuerza vertical, en otras palabras, el coeficiente de fricción del neumático disminuye. Otra propiedad importante del neumático que se ve afectada por la carga es la rigidez, tanto lateral como longitudinal. Mientras ambas aumentan conforme la carga aumenta, lo hacen de distintas maneras; los coeficientes de rigidez (relación de la rigidez lateral ó longitudinal a la carga) pueden aumentar o disminuir de acuerdo al diseño específico del neumático. En cuanto al momento autoalineante y el momento de resistencia a la rodadura, estos también se hacen más grandes conforme aumenta la carga.

2.6.2 Ángulo de inclinación

La influencia de este parámetro se ve reflejada primordialmente en la generación de fuerzas. Este ángulo afecta de manera modesta la generación de fuerza lateral y por lo tanto, del momento autoalineante, mientras que la fuerza longitudinal no se ve afectada directamente a excepción de casos extremos en los cuales este ángulo modifique el tamaño y forma del área de contacto.

El ángulo de inclinación induce una deformación en la banda de rodadura, debido a que la proyección de la rueda inclinada sobre el plano del pavimento es una elipse, sin embargo, debido al fenómeno de rodadura y a la misma adherencia del neumático al pavimento, la banda de rodadura debe deformarse para seguir a una línea recta en el área de contacto; esta pequeña diferencia entre dichas trayectorias es la causante de la deformación antes mencionada. Como se dijo antes, toda deformación en un neumático origina una fuerza, por lo tanto dicha deformación también origina una fuerza en el neumático, que apunta en la dirección de la inclinación cuando éste no está sometido a ningún ángulo de deslizamiento, y es conocida como empuje de inclinación (Camber Thrust). Aunque dicha fuerza no es constante sino que disminuye conforme aumenta el ángulo de deslizamiento, hasta llegado el punto en el cual desaparece, durante las zonas de adhesión pura y transición del neumático, dicha fuerza mantiene valores apreciables. Como la

naturaleza de dicha fuerza es direccional, la curva se observa “desplazada” en las ordenadas, por lo tanto, el comportamiento del neumático es distinto dependiendo del sentido en que se analice; las fuerzas pueden ser mayores o menores que en el caso del neumático sin inclinación.

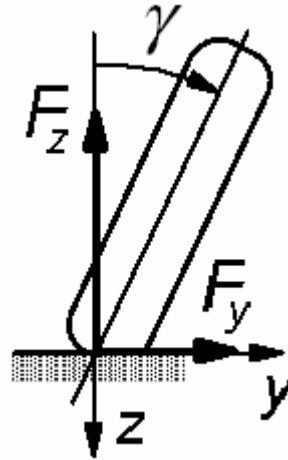


Fig. 2.10 Angulo de inclinación.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002)

Otro efecto importante del ángulo de inclinación es que, independientemente del sentido de inclinación, la rigidez lateral del neumático disminuye ligeramente conforme aumenta dicho ángulo. El momento autoalineante, aunque no se ve tan afectado por esta característica, si se ve afectado por el desplazamiento de la fuerza, por lo cual puede existir un pequeño torque en el neumático incluso cuando este no se encuentre sometido a ningún ángulo de deslizamiento.

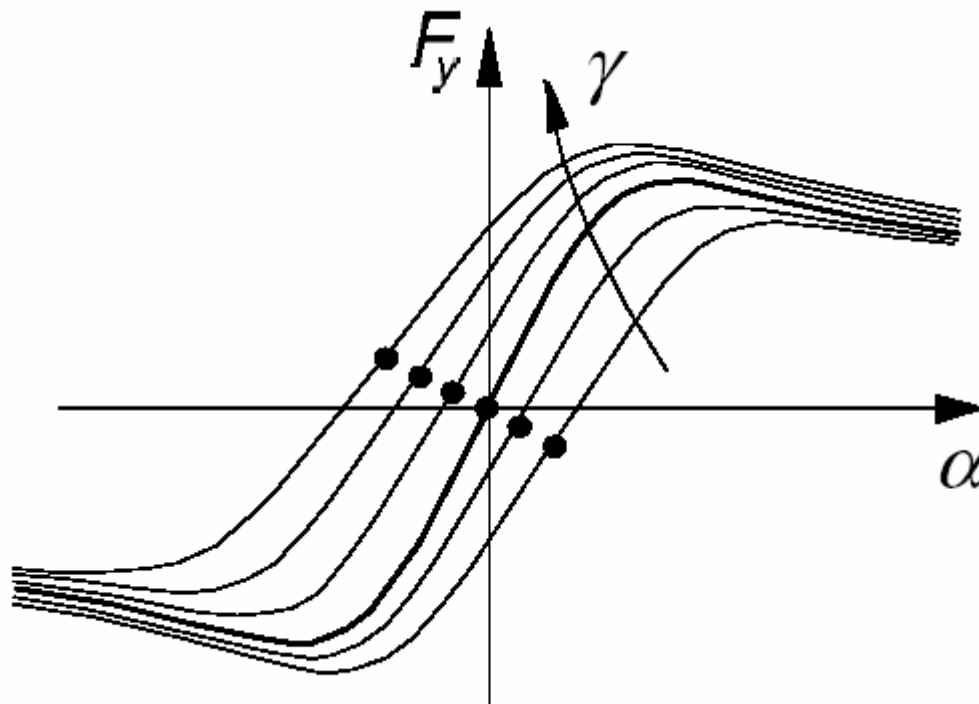


Fig. 2.11 Efecto del ángulo de inclinación en la fuerza lateral.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002)

Un aspecto negativo del ángulo de inclinación es que el uso de ángulos distintos a cero durante tiempos prolongados provoca el desgaste prematuro e irregular del neumático. Como información adicional existe un ángulo de inclinación óptimo bajo el cual se tiene que el empuje de inclinación es máximo. Aunque teóricamente mientras más alto es el grado de inclinación de la rueda con respecto al pavimento mayor es el empuje de inclinación, existen factores tales como la reducción del área de contacto y la desigual distribución de presiones en la misma, entre otros, que hacen que superado dicho ángulo la fuerza disminuya en vez de aumentar.

2.6.3 Presión

Este parámetro cambia las propiedades de un neumático de forma distinta a como los demás parámetros intervienen. Sus efectos principales se pueden observar tanto en el comportamiento como en el coeficiente de roce del neumático. Una presión por encima de la recomendada por el fabricante eleva la rigidez general del neumático, siendo más sensible a los cambios de dirección y aceleración angular y disminuyendo el valor de las magnitudes de deslizamiento al cual el mismo genera las fuerzas máximas, pero al mismo tiempo reduce el valor del coeficiente de fricción, y por lo tanto, el valor de dicha fuerza, y también disminuye el valor del momento de resistencia a la rodadura, además también incrementa la constante de elasticidad (K) del neumático, haciendo que sea más rígido y por lo tanto, transmitiendo mayores cargas hacia los elementos de suspensión. Por el contrario una presión baja disminuye los valores de rigidez del neumático, pero aumentan los coeficientes de fricción del mismo y el momento de resistencia a la rodadura. Ambas condiciones no son recomendables ya que disminuyen la vida del neumático y promueven el desgaste irregular, además de empeorar las características del neumático bajo pavimento mojado, por lo tanto, lo mejor es ajustar las presiones de los neumáticos de acuerdo a las recomendaciones del fabricante.

2.6.4 Temperatura

Los efectos por temperatura son complejos, ya que además de modificar las propiedades físicas de los neumáticos, también modifican otros parámetros, siendo el efecto final una combinación de varios de los efectos descritos anteriormente.

Una temperatura alta hasta cierto punto mejora el coeficiente de fricción del neumático, haciendo que éste genere más fuerza (tanto longitudinal como lateral) a las mismas condiciones. Sin embargo, como la temperatura también afecta la presión del aire atrapado entre el neumático y la rueda, se presentan los efectos explicados anteriormente. Después de cierta temperatura que es la óptima, las propiedades del neumático empiezan a degradarse junto con él; a temperaturas muy altas existe el riesgo de explosión del mismo.

Una temperatura muy baja disminuye el coeficiente de fricción del neumático, haciendo que éste genere menos fuerza (tanto longitudinal como lateral) a las mismas condiciones, sumados a los efectos por el cambio de presión.

2.6.5 Conicidad y Desviación de Dirección

Estos dos efectos, aunque de naturaleza distinta, tienen características similares en el comportamiento del neumático y por ello se incluyen en la misma sección.

La conicidad es un defecto de construcción del neumático en el cual el mismo no tiene una forma cilíndrica, sino que como su nombre lo dice, posee una pequeña conicidad. Las consecuencias de este efecto son similares al del ángulo de inclinación, ya que la fuerza lateral resultante siempre apunta en una dirección (dirección de la conicidad), pero en una menor escala, por ello también este efecto es conocido como pseudo-inclinación. Un hecho interesante de la conicidad es que debido a esto, los efectos de conicidad de un par de neumáticos en un mismo eje siempre pueden minimizarse e incluso anularse si se instalan los mismos de tal manera que las fuerzas sean opuestas.

La Desviación de Dirección (ply steer) no es más que la generación de un pequeño ángulo de deslizamiento por parte del mismo neumático, debido al ángulo de las cuerdas de la última capa de refuerzo del neumático. Este efecto se refleja en una fuerza dependiente del sentido de giro del neumático: cuando el neumático gira en una dirección la fuerza lateral apunta en una dirección definida, cuando se invierte la dirección de giro también se invierte la dirección de la fuerza. Este efecto también es conocido como pseudo-ángulo de deslizamiento, debido a la semejanza en los efectos de ambos. Al contrario que la conicidad, los efectos de este fenómeno no siempre pueden minimizarse o anularse debido al cambio de dirección de la fuerza con el sentido de giro.

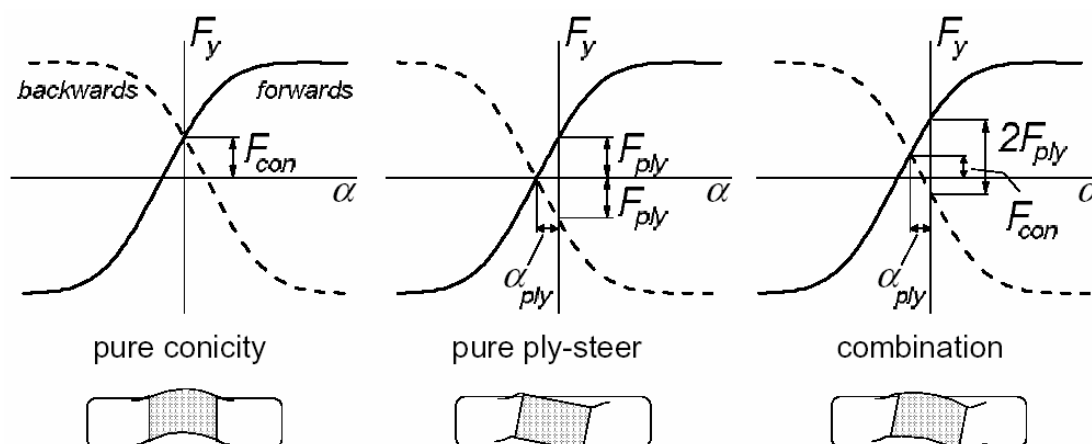


Fig. 2.12 Efecto de la conicidad y de la desviación de dirección en la fuerza lateral.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002)

Ambos efectos, debido a la pequeña magnitud de los mismos, pueden plantearse como un solo efecto de desplazamiento de la curva de fuerza lateral en los ejes de abscisas y ordenadas; un desplazamiento vertical debido a la conicidad y un desplazamiento horizontal debido al pseudo-ángulo de deslizamiento.

2.6.6 Velocidad

Las características de desempeño de un neumático varían con la velocidad. Por lo general, el desempeño disminuye conforme aumenta la velocidad, sin embargo, dicha tendencia varía de modelo a modelo: En algunos casos la disminución es gradual, en otra es abrupta en un rango de velocidades. En algunos casos, contrario a esta tendencia, el desempeño mejora una vez que se sobrepasa cierta velocidad. Por lo tanto, es difícil generalizar el efecto de la velocidad en el desempeño de los neumáticos.

2.7 Comportamiento sobre superficies húmedas y mojadas

A pesar de que todas las propiedades que se han descrito aquí han sido descritas tomando en cuenta condiciones en seco, el neumático también debe operar y ser seguro bajo condiciones de pavimento húmedo ó mojado. Aunque no es tan

eficiente bajo estas condiciones, debe retener un mínimo de las propiedades que posee cuando opera en pavimento seco.

Una de las principales características de desempeño que se degradan en pavimento mojado es el coeficiente de fricción. La componente de adhesión del agarre se ve drásticamente disminuida cuando se interpone un agente adicional (en este caso el agua) a la interfaz neumático-pavimento, con lo que se dispone principalmente del mecanismo de histéresis para lograr los niveles de agarre deseados. Aunque el componente de histéresis no es tan sensitivo a la pérdida de contacto directo entre el neumático y el pavimento, es necesario que exista un mínimo contacto entre ambos, es por ellos que a los neumáticos se los provee de canales de drenaje, cuya función es simplemente permitir la evacuación del agua bajo la superficie de contacto conforme ésta avanza sobre áreas del pavimento cubiertas por el agua, y con ello, asegurar un mínimo contacto del neumático con el pavimento.

2.7.1 Hidrodeslizamiento (Aquaplaning)

Dicho fenómeno ocurre cuando el neumático pierde todo contacto con el pavimento, encontrándose entre éstos una capa de agua que lo impide. Como consecuencia, se pierde toda la capacidad de generar fuerza en el neumático, y con ello puede sobrevenir la pérdida de control del vehículo.

Si bien el comportamiento del neumático en mojado se ve afectado por la presencia de agua en el pavimento, la degradación en dicho desempeño depende de la velocidad, presión de inflado del neumático, y profundidad de la capa de agua en el pavimento. También estos factores afectan al hidrodeslizamiento.

El coeficiente de fricción de un neumático cualquiera sufre una pequeña disminución en su magnitud conforme aumenta la velocidad lineal del mismo, sin embargo, para fines prácticos dicho coeficiente puede considerarse constante durante todo el rango de velocidad al cual va a estar sometido; en mojado dicho coeficiente de fricción disminuye de manera más abrupta.

Los efectos tanto de la presión de inflado y velocidad de los neumáticos se observan en la propensión del mismo a sufrir hidrodeslizamiento. En un neumático

sobre pavimento mojado, se puede dividir el área de contacto en tres tercios aproximadamente, de los cuales el primer tercio se encarga de evacuar la mayor cantidad de agua posible, el segundo rompe la pequeña capa de agua que queda sobre el pavimento, de manera que sólo el tercio final es el que dispone de contacto efectivo con la superficie del pavimento. Conforme aumenta la velocidad, se crea presión hidrodinámica en el seno del fluido que va levantando gradualmente el neumático, y por lo tanto, aumentando el área de las dos primeras zonas a expensas de reducir la tercera, hasta que eventualmente la presión distribuida en la superficie iguala la fuerza vertical ejercida sobre el neumático y se pierde todo contacto del neumático con el pavimento.

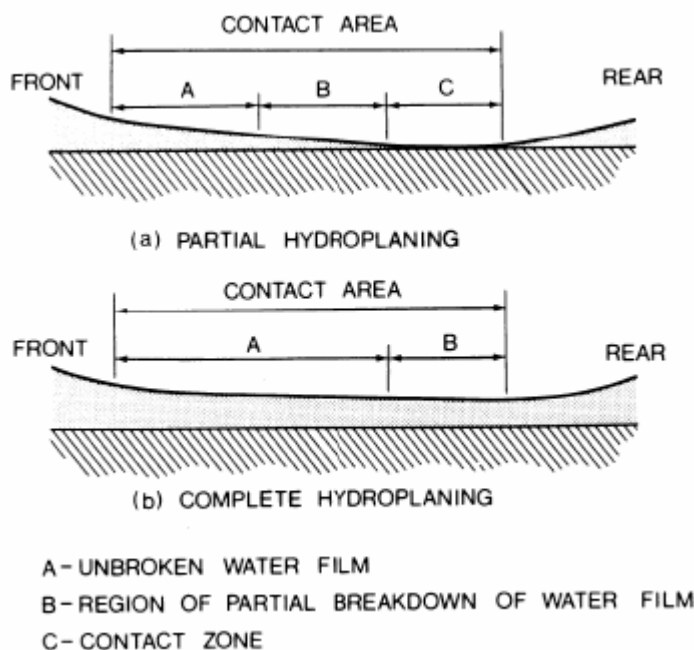


Fig. 2.13 Vista lateral del neumático desplazándose sobre una película de agua
(Fuente: Wong, J. Y. “**Theory of Ground Vehicles**”, 2001)

De acuerdo a Wong (2001) la siguiente fórmula fue propuesta por Horne y Joyner (1965) de acuerdo al razonamiento y experimentación hecha por ellos, para predecir la velocidad a la cual se presenta el hidroleslizamiento:

$$V = 6,34\sqrt{P} \quad [\text{km/h}] \quad (2.12)$$

donde P es la presión de inflado del neumático, en kPa.

Los efectos de la profundidad de la capa de agua sobre el pavimento se evidencian sólo cuando dicha profundidad es mayor a la profundidad de los surcos de evacuación del agua, en cuyo caso se sumergen dichos surcos, dificultando la salida de la misma y reduciendo la velocidad a la cual se presenta el hidrodeshlizamiento. También se ve afectado el momento de resistencia a la rodadura en todo instante, aumentando conforme se incrementa la profundidad de dicha capa.

2.8 Comportamiento en superficies de bajo coeficiente de fricción

Como se comentó anteriormente, los neumáticos funcionan eficazmente sólo cuando el contacto de éstos y el pavimento se efectúa sin que existan agentes extraños en esta interfaz. Aunque en la realidad esto no se puede asegurar totalmente, existe suficiente contacto directo entre estos dos elementos para poder garantizar altos niveles de agarre con cualquier neumático moderno. Sin embargo, eventualmente, los neumáticos también deben encarar condiciones adversas, tales como la presencia de agua en el pavimento como ya se comentó antes, y además hielo, polvo, hojas secas, aceites, entre otros, que al igual que el agua, deterioran el desempeño de los mismos. Los mecanismos son similares, ya que vienen dados por la pérdida de contacto directo entre el neumático y el camino, el movimiento relativo de las partículas entre sí, ya sea a nivel macroscópico (hojas, polvo) como a nivel microscópico (agua, aceite, fluidos en general). Como hecho curioso vale la pena destacar que, contrario a la lógica, los neumáticos tienen un alto coeficiente de fricción cuando operan en contacto directo con hielo, sin embargo, el bajo agarre se explica por la fusión parcial del mismo conforme el neumático va haciendo contacto con él.

2.9 Fuerzas Combinadas

A pesar que por simplicidad la fuerza que se genera en un neumático tiende a descomponerse en vectores paralelos a los ejes de interés, y los deslizamientos de igual manera se tratan por separado, en realidad en el neumático se desarrolla una sola fuerza, producto de un único deslizamiento. A esta situación se le conoce como

Efectos Combinados, y es la base del llamado Circulo de Fricción, el cual no es más que la representación gráfica de la fuerza límite que puede generar el neumático en cualquier dirección bajo una condición dada, y posteriormente del diagrama G-G, el cual es básicamente un círculo de fricción de un vehículo entero.

Passenger car tire: $F_z = 3.2 \text{ kN}$

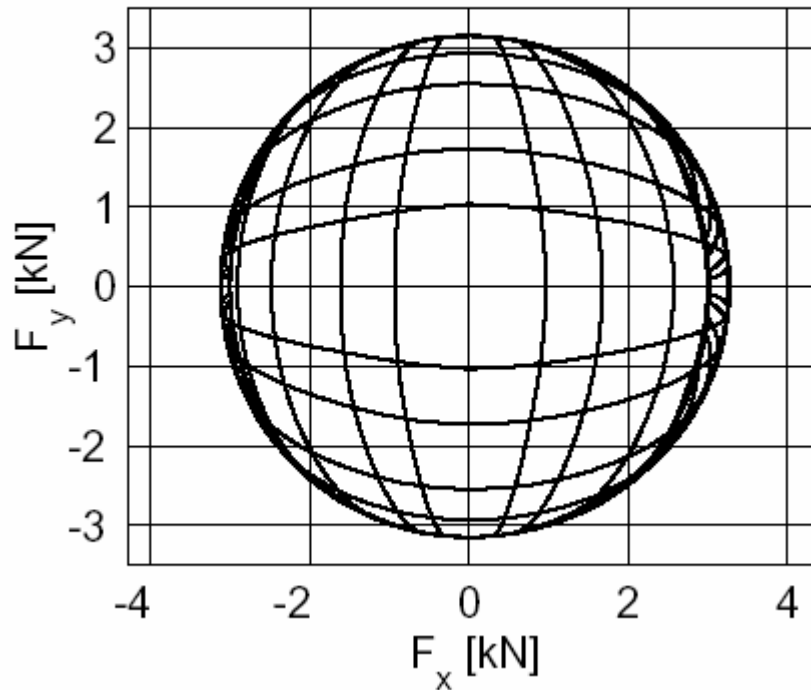


Fig. 2.14 Círculo de fricción para un neumático de vehículo de pasajeros
(Fuente: Rill, Georg. “**Vehicle Dynamics, Lecture Notes**”, 2002)

Contrario a lo que podría pensarse, la suma vectorial de las fuerzas generadas por cada deslizamiento individual no es igual a la fuerza efectiva que desarrolla el neumático bajo las mismas condiciones, esto debido a que las fuerzas son interdependientes, y bajo las mismas condiciones, un incremento en la fuerza en una dirección implica una disminución de la fuerza en la otra dirección. Aun así, es importante cuantificar la fuerza total generada en el neumático y la dirección en la que se genera dicha fuerza, con el objetivo de modelar con precisión dicho comportamiento. Aunque algunos modelos matemáticos son capaces de modelar este comportamiento de manera adecuada, la información que se presenta acerca de los

neumáticos viene expresada en función de sus componentes longitudinal y lateral, por lo que el tratamiento de dicho comportamiento combinado debe hacerse mediante un modelo compatible con los datos presentes en las tablas, o en última instancia, expresar éstos últimos en función del primero.

2.10 Modelos Matemáticos

Tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, algunos investigadores se han dado a la tarea de desarrollar modelos matemáticos que expliquen satisfactoriamente el comportamiento de los neumáticos bajo cualquier situación, sin embargo, debido a la complejidad inherente al modelado de los neumáticos bajo las variedades de condiciones que puedan presentarse durante su funcionamiento normal, algunos han tenido mayor éxito que otros, muy pocos se han convertido en referencia obligada a la hora de modelar el comportamiento de un neumático, y otros solo han sido meras aproximaciones de dicho comportamiento.

Como una manera de categorizar los distintos modelos que existen, se pueden clasificar de acuerdo a cuatro grandes categorías:

- (a) La primera categoría es aquella perteneciente a aquellos modelos empíricos, cuya fundamentación se basa en el ajuste de curvas mediante métodos regresivos a partir de datos reales de los neumáticos, con el fin de encontrar el mejor ajuste posible a los mismos. Entre ellos están el modelo de Pacejka, mejor conocido como la “Fórmula Mágica”.
- (b) La segunda categoría pertenece a aquellos modelos que, aun basándose en curvas de neumáticos reales, distorsionan, reescalan y combinan las características básicas de los neumáticos con el fin de generar nuevas curvas a distintas condiciones. Entre ellos están la adimensionalización de curvas.
- (c) En la tercera categoría se encuentran aquellos modelos que se basan en un modelo físico simple para representar las características de un neumático cualquiera, ya sea mediante una solución analítica cerrada o incluso con la

ayuda de métodos numéricos. Como ejemplos de esta clase tenemos al modelo de cepillo (Brush model)

- (d) En la cuarta categoría se encuentran aquellos modelos basados en un modelo físico complejo que exhibe un alto nivel de detalle, y cuya solución requiere del Método de los Elementos Finitos cuyo estudio escapa al alcance de este trabajo.

A continuación se dará una descripción detallada de los modelos aquí expuestos.

2.10.1 Modelo de Pacejka: Formula Mágica

Este modelo, desarrollado por Hans Pacejka a mediados de los años 80, en colaboración con TU-Delft y Volvo, es uno de los modelos más utilizados hoy en día debido a su gran exactitud y a su relativa simplicidad. Se basa en aplicar una regresión estadística para encontrar el mejor ajuste por una curva a una serie de datos experimentales. En este caso, se tiene la ventaja de que todas las curvas (F_x , F_y y M_z) se representan mediante una fórmula general, lo que simplifica los análisis de las características de un neumático al tratar las propiedades de dicha fórmula y luego adaptarlas al caso particular.

La fórmula general tiene la siguiente forma:

$$y = D \operatorname{seno}(C \arctan(BX - E(BX - \arctan(BX)))) + S_y \quad [\text{N}] \quad (2.13)$$

$$X = x + Sh \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.14)$$

donde B , C , D , E , S_x y S_y son parámetros que dependen del tipo de curva que se está tratando, y varían según las condiciones de funcionamiento del neumático. Estos coeficientes tienen un significado físico directo, el cual es:

- (a) D representa el valor máximo de la fuerza generada por el neumático, bajo cualquier carga y con un valor de deslizamiento nulo. Representa, si se divide entre la carga, el coeficiente de roce del neumático con el asfalto.

- (b) C es denominado Factor de Forma, controla los límites del rango de la función senoidal presente en esta fórmula, y por lo tanto, la forma de la curva, de aquí su nombre.
- (c) B es llamado Factor de Rigidez, ya que la derivada de la función evaluada en el origen (rigidez del neumático), equivale al producto de los factores B , C y D .
- (d) E es el Factor de Curvatura, y controla tanto la curvatura de la curva, como la ubicación en el eje horizontal del pico de la misma.
- (e) S_x y S_y son desplazamientos horizontales y verticales respectivamente, y representan la influencia directa de los efectos de resistencia a la rodadura, conicidad y pseudo-ángulo de deslizamiento.

Estos parámetros, a su vez, dependen de otra serie de parámetros carentes de significado físico, cuya función es ajustar la curva general a los datos dados.

Los parámetros generales necesarios para poder ingresarlos en dichas fórmulas como variables de entrada son:

- (a) La carga nominal del neumático:

$$F_{z0}' = \lambda_{Fz0} F_{z0} \quad [\text{N}] \quad (2.15)$$

donde:

F_{z0} es la carga nominal real del neumático. [N]

λ_{Fz0} es una constante multiplicadora de la carga nominal (permite simular distintas cargas nominales).

- (b) El cambio normalizado en la carga vertical:

$$df_z = \frac{F_z - F_{z0}'}{F_{z0}'} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.16)$$

donde:

F_z es la carga vertical sobre el neumático [N]

- (c) El ángulo de deslizamiento modificado:

$$\alpha^* = \tan(\alpha) \operatorname{sgn}(V_{cx}) = -\frac{V_{cy}}{|V_{cx}|} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.17)$$

donde:

V_{cx} es la componente en el eje x de la velocidad del centro de la rueda. [m/s]

V_{cy} es la componente en el eje y de la velocidad del centro de la rueda. [m/s]

(d) El ángulo de inclinación modificado:

$$\gamma^* = \text{seno}(\gamma) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.18)$$

donde:

γ es el ángulo de inclinación de la rueda. [rad]

(e) La relación de deslizamiento:

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{|V_{cx}|} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.19)$$

donde:

V_{sx} es la componente en el eje x de la velocidad de deslizamiento del área de contacto de la rueda. [m/s]

(f) El factor $\cos\alpha$ presente en las ecuaciones de momento autoalineante, para poder manejar grandes ángulos de deslizamiento y la reversión del sentido de las velocidades (por ejemplo, en condiciones de retroceso) se redefine de la siguiente forma:

$$\cos'(\alpha) = \frac{V_{cx}}{V_c} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.20)$$

donde:

V_c es la velocidad del centro de la rueda. [m/s]

2.10.1.1 Fuerza Longitudinal

Como se comento antes, las fuerzas y momentos siguen una única fórmula general, que en el caso de la fuerza longitudinal pura se expresa de la siguiente manera:

$$F_{x0} = D_x \text{seno}(C_x \arctan(B_x \kappa_x - E_x (B_x \kappa_x - \arctan(B_x \kappa_x)))) + S_{V_x} \quad [\text{N}] \quad (2.21)$$

Donde los parámetros de dicha fórmula vienen expresados por:

$$\kappa_x = \kappa + S_{Hx} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.22)$$

$$C_x = p_{Cx1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.23)$$

$$D_x = \mu_x F_z \quad [\text{N}] \quad (2.24)$$

$$\mu_x = p_{Dx1} + p_{Dx2} df_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.25)$$

$$E_x = (p_{Ex1} + p_{Ex2} df_z + p_{Ex3} df_z^2) \{1 - p_{Ex4} \text{sgn}(\kappa_x)\} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.26)$$

$$K_{x\kappa} = F_z (p_{Kx1} + p_{Kx2} df_z) \exp(p_{Kx3} df_z) \quad [\text{N}] \quad (2.27)$$

$$B_x = \frac{K_{x\kappa}}{C_x D_x} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.28)$$

$$S_{Hx} = p_{Hx1} + p_{Hx2} df_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.29)$$

$$S_{Vx} = F_z * (p_{Vx1} + p_{Vx2} df_z) \quad [\text{N}] \quad (2.30)$$

Donde $K_{x\kappa}$ es la rigidez longitudinal del neumático, y los parámetros p_{Cx1} , p_{Dx1} , p_{Dx2} , p_{Ex1} , p_{Ex2} , p_{Ex3} , p_{Ex4} , p_{Kx1} , p_{Kx2} , p_{Kx3} , p_{Hx1} , p_{Hx2} , p_{Vx1} , p_{Vx2} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.1.2 Fuerza Lateral

Al igual que en el caso anterior, la curva de fuerza lateral pura se expresa mediante la siguiente expresión:

$$F_{y0} = D_y \text{seno}(C_y \arctan(B_y \alpha_y - E_y (B_y \alpha_y - \arctan(B_y \alpha_y)))) + S_{Vy} \quad [\text{N}] \quad (2.31)$$

Y los parámetros que la rigen son:

$$\alpha_y = (\alpha^*) + S_{Hy} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.32)$$

$$C_y = p_{Cy1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.33)$$

$$D_y = \mu_y F_z \quad [\text{N}] \quad (2.34)$$

$$\mu_y = (p_{Dy1} + p_{Dy2} df_z) (1 - p_{Dy3} (\gamma^*)^2) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.35)$$

$$E_y = (p_{Ey1} + p_{Ey2} df_z) \{1 - (p_{Ey3} + p_{Ey4} (\gamma^*)^2) \text{sgn}(\alpha_y)\} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.36)$$

$$K_{y\alpha 0} = p_{Ky1} F_{z0} ' \text{seno} \left(2 \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ky2} F_{z0}'} \right\} \right) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.37)$$

$$K_{y\alpha} = K_{y\alpha 0} (1 - p_{Ky3} (\gamma^*)^2) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.38)$$

$$B_y = \frac{K_{y\alpha}}{C_y D_y} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.39)$$

$$S_{Hy} = p_{Hy1} + p_{Hy2} df_z + p_{Hy3}(\gamma^*) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.40)$$

$$S_{Vy} = F_z \{ (p_{Vy1} + p_{Vy2} df_z) + (p_{Vy3} + p_{Vy4} df_z)(\gamma^*) \} \quad [\text{N}] \quad (2.41)$$

$$K_{y\gamma 0} = p_{Hy3} K_{y\alpha 0} + F_z (p_{Vy3} + p_{Vy4} df_z) \quad [\text{N}] \quad (2.42)$$

Donde $K_{y\alpha}$ es la rigidez lateral del neumático ($= \partial F_{y0} / \partial \alpha_y |_{\alpha=\gamma=0}$), $K_{y\gamma 0}$ es la rigidez del ángulo de inclinación del neumático ($= \partial F_{y0} / \partial \gamma |_{\alpha=\gamma=0}$) y los parámetros p_{Cy1} , p_{Dy1} , p_{Dy2} , p_{Dy3} , p_{Ey1} , p_{Ey2} , p_{Ey3} , p_{Ey4} , p_{Ky1} , p_{Ky2} , p_{Ky3} , p_{Hy1} , p_{Hy2} , p_{Hy3} , p_{Vy1} , p_{Vy2} , p_{Vy3} , p_{Vy4} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.1.3 Momento Autoalineante

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del momento autoalineante puro son:

$$M_{z0} = M_{z0}' + M_{zr0} \quad [\text{Nm}] \quad (2.43)$$

y los parámetros que intervienen en ella son

$$M_{z0}' = -t_0 F_{y0} \quad [\text{Nm}] \quad (2.44)$$

$$t_0 = D_t \cos(C_t \arctan(B_t \alpha_t - E_t (B_t \alpha_t - \arctan(B_t \alpha_t)))) \cos'(\alpha) \quad [\text{m}] \quad (2.45)$$

$$\alpha_t = (\alpha^*) + S_{Ht} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.46)$$

$$S_{Ht} = q_{Hz1} + q_{Hz2} df_z + (q_{Hz3} + q_{Hz4} df_z)(\gamma^*) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.47)$$

$$M_{zr0} = D_r \cos(\arctan(B_r \alpha_r)) \quad [\text{Nm}] \quad (2.48)$$

$$\alpha_r = (\alpha^*) + S_{Hr} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.49)$$

$$S_{Hr} = S_{Hy} + \frac{S_{Vy}}{K_{y\alpha}} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.50)$$

$$B_t = (q_{Bz1} + q_{Bz2} df_z + q_{Bz3} df_z^2)(1 + q_{Bz4}(\gamma^*) + q_{Bz5} |(\gamma^*)|) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.51)$$

$$C_t = q_{Cz1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.52)$$

$$D_{t0} = F_z \left(\frac{R_0}{F_{z0}} \right) (q_{Dz1} + q_{Dz2} df_z) \operatorname{sgn}(V_{cx}) \quad [\text{m}] \quad (2.53)$$

$$D_t = D_{t0} (1 + q_{Dz3} (\gamma^*) + q_{Dz4} (\gamma^*)^2) \quad [\text{m}] \quad (2.54)$$

$$E_t = (q_{Ez1} + q_{Ez2} df_z + q_{Ez3} df_z^2) * \{1 + (q_{Ez4} + q_{Ez5} (\gamma^*)) \frac{2}{\pi} \arctan(B_t C_t \alpha_t)\} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.55)$$

$$B_r = q_{Bz10} B_y C_y \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.56)$$

$$D_r = F_z R_0 \{q_{Dz6} + q_{Dz7} df_z + (q_{Dz8} + q_{Dz9} df_z)(\gamma^*)\} \cos'(\alpha) \operatorname{sgn}(V_{cx}) \quad [\text{Nm}] \quad (2.57)$$

$$K_{z\alpha 0} = D_{t0} K_{y\alpha 0} \quad [\text{Nm}] \quad (2.58)$$

$$K_{z\gamma 0} = F_z R_0 (q_{Dz8} + q_{Dz9} df_z) - D_{t0} K_{y\gamma 0} \quad [\text{Nm}] \quad (2.59)$$

Donde:

M_{z0} : Momento autoalineante debido al desplazamiento (avance) de la fuerza lateral.

M_{zr0} : Momento autoalineante debido al torque residual (por efectos de conicidad y pseudo-deslizamiento).

t_0 : Avance neumático.

R_0 : Radio libre del neumático. [m]

$K_{z\alpha 0}$: Rigidez por momento autoalineante del neumático $(= -\partial M_{z0} / \partial \alpha_y |_{\alpha=\gamma=0})$.

$K_{z\gamma 0}$: Rigidez por momento autoalineante del ángulo de inclinación del neumático $(= -\partial M_{z0} / \partial \gamma |_{\alpha=\gamma=0})$.

Los parámetros q_{Bz1} , q_{Bz2} , q_{Bz3} , q_{Bz4} , q_{Bz5} , q_{Bz6} , q_{Bz10} , q_{Dz1} , q_{Dz2} , q_{Dz3} , q_{Dz4} , q_{Dz5} , q_{Dz6} , q_{Dz7} , q_{Dz8} , q_{Dz9} , q_{Ez1} , q_{Ez2} , q_{Ez3} , q_{Ez4} , q_{Ez5} , q_{Hz1} , q_{Hz2} , q_{Hz3} , q_{Hz4} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.1.4 Momento de Resistencia a la Rodadura

La ecuación que modela el momento de resistencia a la rodadura es:

$$M_y = -F_z R_0 \left\{ q_{Sy1} \arctan\left(\frac{V_r}{V_0}\right) + q_{Sy2} \frac{F_x}{F_{z0}} \right\} \quad [\text{Nm}] \quad (2.60)$$

donde:

V_r es la velocidad de la rueda [m/s]

V_0 es la velocidad de referencia de la rueda [m/s]

q_{Sy1} , q_{Sy2} son parámetros adimensionales.

2.10.1.5 Fuerzas Combinadas

El modelo de Pacejka también es capaz de modelar con bastante precisión el comportamiento de los neumáticos bajo condiciones de deslizamiento combinados. El método fué desarrollado por Michelin y publicado por Bayle, Forissier y Lafon (1993). Dicho método describe la influencia del deslizamiento longitudinal en la fuerza lateral, y el ángulo de deslizamiento en la fuerza longitudinal mediante funciones de peso, que multiplican las funciones de deslizamiento puro originales, por lo tanto, describiendo de manera efectiva dichas interacciones.

Dichas funciones de peso son descritas mediante la version cosenoidal de la Fórmula Mágica:

$$G = D \cos(C \arctan(Bx - E(Bx - \arctan(Bx)))) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.61)$$

La cual multiplica a las funciones de deslizamiento puro:

$$F = GF_0 + S_x \quad [\text{N}] \quad (2.62)$$

Donde S_x es un desplazamiento original que puede tomar la curva bajo ciertas condiciones, por ejemplo, bajo frenado. Dichas funciones son decrecientes, es decir, a medida que se incrementa el valor de la variable complementaria el valor de la función de peso disminuye, y junto al mismo, el valor de la función que multiplica.

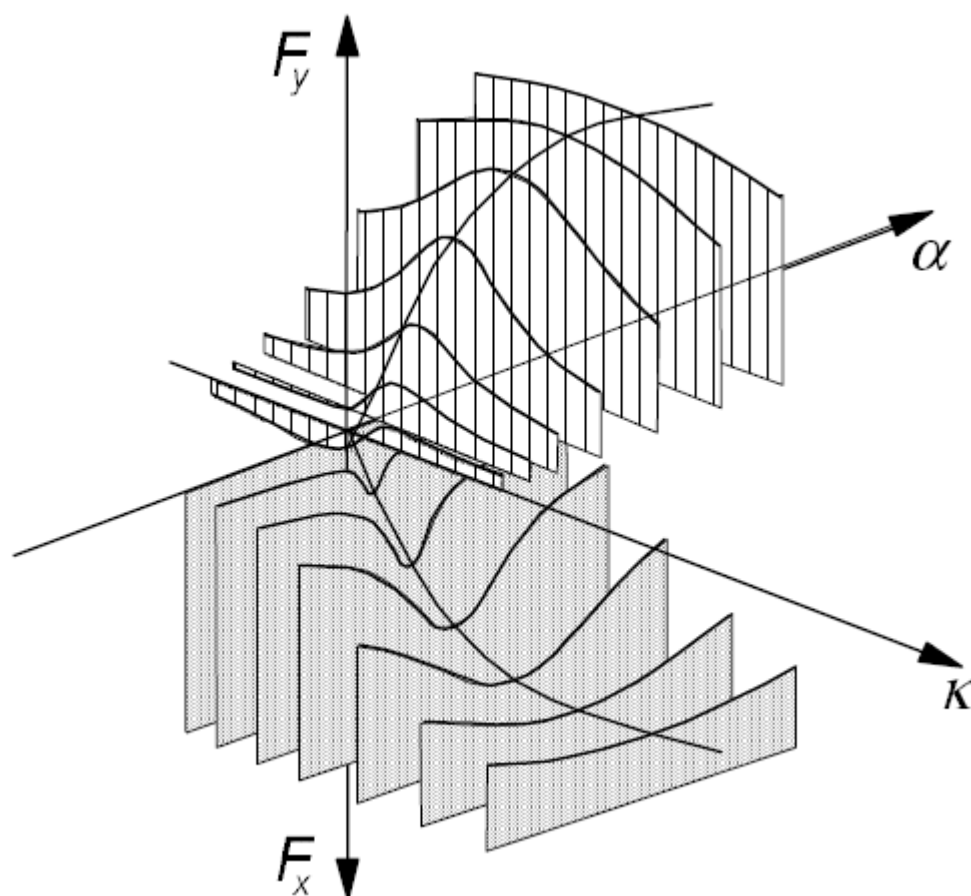


Fig. 2.15 Características de las fuerzas bajo deslizamientos combinados.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002)

A continuación se presenta un resumen de las fórmulas matemáticas que rigen el comportamiento de estas funciones, para los casos ya estudiados.

2.10.1.5.1 Fuerza Longitudinal

$$F_x = G_{x\alpha} F_{x0} \quad [\text{N}] \quad (2.63)$$

$$G_{x\alpha} = \frac{\cos[C_{x\alpha} \arctan\{B_{x\alpha} \alpha_S - E_{x\alpha} (B_{x\alpha} \alpha_S - \arctan(B_{x\alpha} \alpha_S))\}]}{G_{x\alpha 0}} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.64)$$

$$G_{x\alpha 0} = \cos[C_{x\alpha} \arctan\{B_{x\alpha} S_{Hx\alpha} - E_{x\alpha} (B_{x\alpha} S_{Hx\alpha} - \arctan(B_{x\alpha} S_{Hx\alpha}))\}] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.65)$$

$$\alpha_S = (\alpha^*) + S_{Hx\alpha} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.66)$$

$$B_{x\alpha} = r_{Bx1} \cos[\arctan(r_{Bx2})] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.67)$$

$$C_{x\alpha} = r_{Cx1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.68)$$

$$E_{x\alpha} = r_{Ex1} + r_{Ex2} df_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.69)$$

$$S_{Hx\alpha} = r_{Hx1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.70)$$

Donde los parámetros r_{Bx1} , r_{Bx2} , r_{Cx1} , r_{Ex1} , r_{Ex2} , r_{Hx1} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.1.5.2 Fuerza Lateral

$$F_y = G_{y\kappa} F_{y0} + S_{ly\kappa} \quad [\text{N}] \quad (2.71)$$

$$G_{y\kappa} = \frac{\cos[C_{y\kappa} \arctan\{B_{y\kappa} \kappa_S - E_{y\kappa} (B_{y\kappa} \kappa_S - \arctan(B_{y\kappa} \kappa_S))\}]}{G_{y\kappa 0}} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.72)$$

$$G_{y\kappa 0} = \cos[C_{y\kappa} \arctan\{B_{y\kappa} S_{Hy\kappa} - E_{y\kappa} (B_{y\kappa} S_{Hy\kappa} - \arctan(B_{y\kappa} S_{Hy\kappa}))\}] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.73)$$

$$\kappa_S = \kappa + S_{Hy\kappa} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.64)$$

$$B_{y\kappa} = r_{By1} \cos[\arctan\{r_{By2}((\alpha^*) - r_{By3})\}] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.74)$$

$$C_{y\kappa} = r_{Cy1} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.75)$$

$$E_{y\kappa} = r_{Ey1} + r_{Ey2} df_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.76)$$

$$S_{Hy\kappa} = r_{Hy1} + r_{Hy2} df_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.77)$$

$$S_{ly\kappa} = D_{ly\kappa} \text{seno}[r_{ly5} \arctan(r_{ly6} \kappa)] \quad [\text{N}] \quad (2.78)$$

$$D_{Vy\kappa} = \mu_y F_z (r_{Vy1} + r_{Vy2} df_z + r_{Vy3}(\gamma^*)) \cos[\arctan(r_{Vy4}(\alpha^*))] \quad [\text{N}] \quad (2.79)$$

Donde los parámetros r_{By1} , r_{By2} , r_{By3} , r_{Cy1} , r_{Ey1} , r_{Ey2} , r_{Hy1} , r_{Hy2} , r_{Vy1} , r_{Vy2} , r_{Vy3} , r_{Vy4} , r_{Vy5} , r_{Vy6} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.1.5.3 Momento AutoAlineante

$$M_z = M_z' + M_{zr} + sF_x \quad [\text{Nm}] \quad (2.80)$$

$$M_z' = -tF_y' \quad [\text{Nm}] \quad (2.81)$$

$$t = D_t \cos[C_t \arctan\{B_t \alpha_{t,eq} - E_t (B_t \alpha_{t,eq} - \arctan(B_t \alpha_{t,eq}))\}] \cos'(\alpha) \quad [\text{m}] \quad (2.82)$$

$$F_y' = F_y - S_{Vy\kappa} \quad [\text{N}] \quad (2.83)$$

$$M_{zr} = D_r \cos[C_r \arctan(B_r \alpha_{r,eq})] \quad [\text{Nm}] \quad (2.84)$$

$$s = R_0 \left\{ s_{sz1} + s_{sz2} \left(\frac{F_y}{F_{z0}} \right) + (s_{sz3} + s_{sz4} df_z)(\gamma^*) \right\} \quad [\text{m}] \quad (2.85)$$

$$\alpha_{t,eq} = \sqrt{\alpha_t^2 + \left(\frac{K_{x\kappa}}{K_{y\alpha}} \right)^2} \kappa^2 \operatorname{sgn}(\alpha_t) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.86)$$

$$\alpha_{r,eq} = \sqrt{\alpha_r^2 + \left(\frac{K_{x\kappa}}{K_{y\alpha}} \right)^2} \kappa^2 \operatorname{sgn}(\alpha_r) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.87)$$

Donde los parámetros s_{sz1} , s_{sz2} , s_{sz3} , s_{sz4} son una serie de parámetros adimensionales que definen el comportamiento de la curva.

2.10.2 Modelo de Cepillo (Brush Model)

Este modelo pertenece a la categoría de aquellos semi empíricos-numéricos, trata la rueda como un disco rígido, a cuyo borde van anclados infinitos elementos (cerdas) en representación de la banda de rodadura. Desarrollado por Fromm y Julien (Hadekel, 1952), este modelo fue luego modificado por Fiala(1954) y Freudenstein(1961), tomando en cuenta una deflexión parabólica y simétrica de la carcasa. Posteriormente Böhm(1963) y Borgmann(1963) por separado, introdujeron

un perfil de deformación asimétrico; el último sin tomar en cuenta los elementos (cerdas).

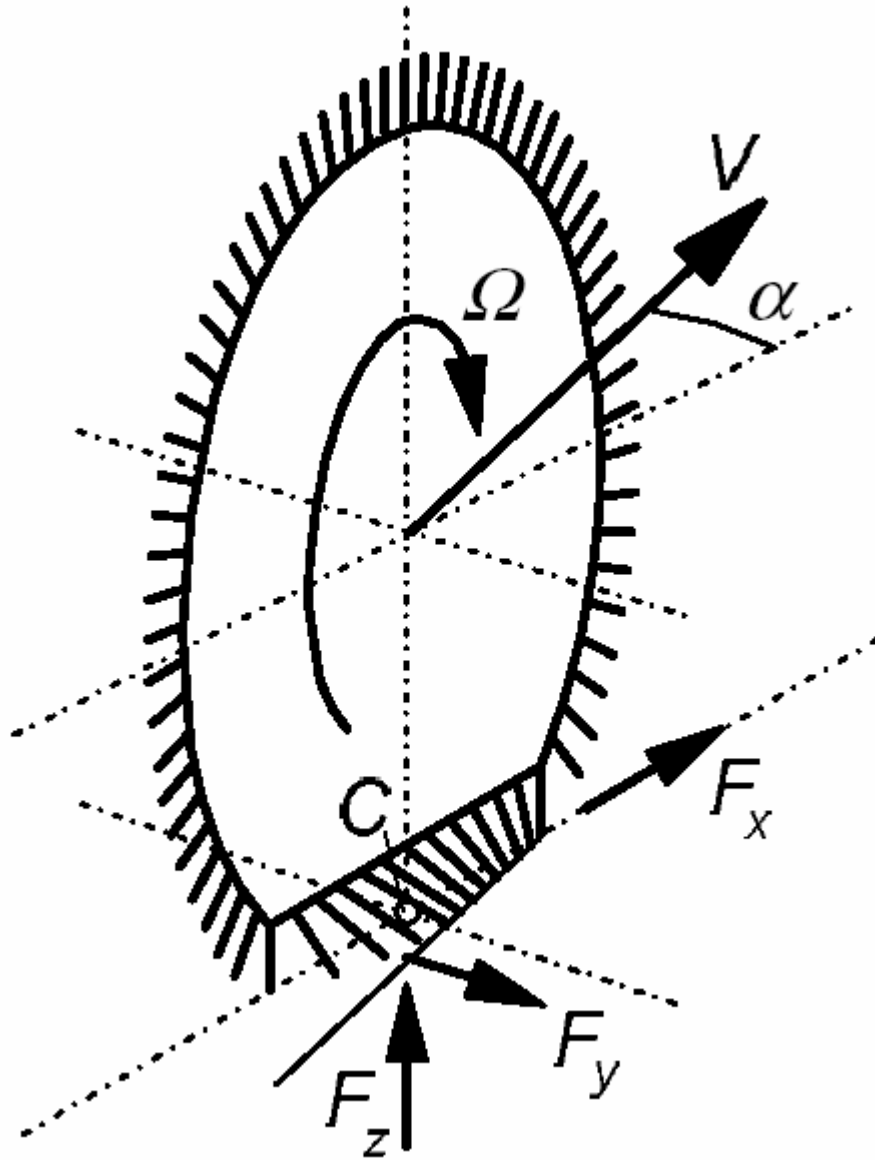


Fig. 2.16 Modelo de cepillo.
(Fuente: Pacejka, Hans. “Tyre and Vehicle Dynamics”, 2002)

El método se basa en la deformación de dichas cerdas en una superficie paralela a la superficie del pavimento, como método para predecir las fuerzas que

generará el neumático en respuesta a dicha deformación. Entre las condiciones que se toman para la representación del modelo se consideran las siguientes:

- (a) La rigidez de las cuerdas es la rigidez combinada de la carcasa, el cinturón y la banda de rodadura del neumático que se quiere modelar.
- (b) Cualquier elemento que entra al área de contacto se supone perpendicular a la superficie del pavimento en ese momento.
- (c) Bajo las condiciones de rodadura libre (ningún torque aplicado a la rueda, sin presencia de deslizamiento lateral ni ángulo de inclinación) dicha rueda se mueve en una línea recta paralela a la superficie del camino y en la dirección del plano de la rueda
- (d) Se desprecia la existencia de cualquier fuerza que oponga resistencia a la rodadura.

Es importante resaltar que existen numerosas variantes de este modelo, siendo la modificación más común aquella en la cual el disco en el cual están empotrados los elementos o cerdas, es también flexible.

2.10.2.1 Fuerza Longitudinal

Para poder desarrollar las expresiones correspondientes a la fuerza longitudinal generada en función de la relación de deslizamiento, es necesario definir los parámetros que gobiernan este modelo bajo estas condiciones. En la figura (2.17) se muestra la vista lateral del modelo de cepillo.

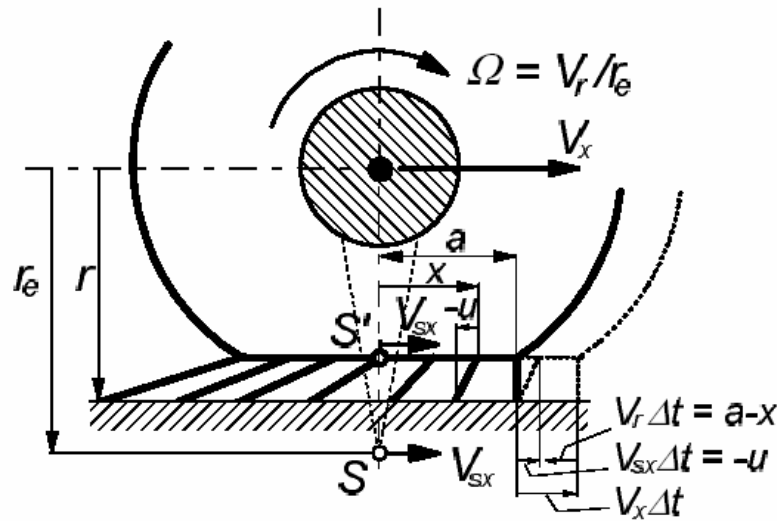


Fig. 2.17 Comportamiento del modelo de cepillo bajo frenado.
(Fuente: Pacejka, Hans. "Tyre and Vehicle Dynamics", 2002)

Aquí se introduce un punto de deslizamiento S , el cual va anclado a la rueda y está localizado justo debajo del centro de la rueda, a una distancia igual al radio efectivo R_e (definido bajo condiciones de rodadura libre como V_x/Ω). Cuando hay rodadura libre, por definición, este punto tiene una velocidad igual a cero, por lo tanto, es el centro instantáneo de rotación de la rueda. Bajo condiciones de deslizamiento (tracción o frenado) dicho punto se mueve con una velocidad igual a la velocidad de deslizamiento V_{sx} . En este modelo también se define un punto S' , anclado a la base de las cerdas, justo por debajo del centro de la rueda. Por definición, este punto tiene la misma velocidad del punto S . Cuando existe rodadura libre, la orientación de los elementos permanece vertical conforme se mueven desde la parte anterior de la zona de contacto hasta la parte posterior de la misma, por lo tanto, no se genera ninguna fuerza longitudinal, y se tiene una velocidad de revolución de la rueda dada por:

$$\Omega = \Omega_0 = \frac{V_x}{r_e} \quad [1/s] \quad (2.88)$$

Cuando Ω difiere de su valor a la velocidad de rodadura libre Ω_0 , se dice que la rueda está bajo tracción o frenado, y la velocidad de deslizamiento V_{sx} se convierte en:

$$V_{sx} = V_x - \Omega_0 r_e \quad [\text{m/s}] \quad (2.89)$$

En el modelo, todos los puntos de la base se mueven con la misma velocidad V_{sx} . Un punto cualquiera de la base se mueve a través de la zona de contacto con una velocidad V_r , llamada velocidad lineal de rodadura:

$$V_r = \Omega r_e = V_x - V_{sx} \quad [1/\text{s}] \quad (2.90)$$

Un elemento cuya punta se adhiera a la superficie del camino y cuya base se desplace hacia atrás una distancia $a-x$ desde el borde anterior del área de contacto (para lo cual se define un tiempo $\Delta t = (a-x)/V_r$), ha desarrollado una deflexión en la dirección longitudinal igual a:

$$u = -V_{sx} \frac{(a-x)}{V_r} \quad [\text{m}] \quad (2.91)$$

La cual se puede expresar en función de la relación de deslizamiento κ :

$$u = -(a-x) \frac{V_{sx}}{V_x - V_{sx}} = (a-x) \frac{\kappa}{1+\kappa} \quad [\text{m}] \quad (2.92)$$

En términos de la definición alternativa del deslizamiento longitudinal, el “deslizamiento teórico”, a ser usado cuando existe deslizamiento combinado, se expresa como:

$$\sigma_x = -\frac{V_x}{V_r} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.93)$$

Y se obtiene:

$$u = (a-x)\sigma_x \quad [\text{m}] \quad (2.94)$$

Se considera que el deslizamiento comienza en:

$$\sigma_x = \frac{\kappa}{1+\kappa} = -\frac{1}{1 \pm \theta_x} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.96)$$

$$\theta_x = \frac{2 c_{px} a^2}{3 \mu F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.97)$$

Donde c_{px} es la rigidez longitudinal por unidad de longitud de los elementos [N/m].

Linealizando la deflexión para pequeños valores de κ , se obtiene:

$$u = (a - x)\kappa \quad [\text{m}] \quad (2.98)$$

Y la expresión de la fuerza longitudinal en función del deslizamiento longitudinal es:

$$F_x = 2c_{px}a^2\kappa \quad [\text{N}] \quad (2.99)$$

2.10.2.2 Fuerza Lateral y Momento Autoalineante

Para la deducción de las expresiones que rigen estos comportamientos, nos referimos a la figura (2.18), donde se representa el modelo de cepillo sometido a un ángulo de deslizamiento, en el cual se muestra una línea de deflexión recta, paralela al vector Velocidad en la zona de adhesión, y una línea de deflexión curva en la zona de deslizamiento, donde la fuerza de fricción es más baja que la fuerza requerida para que la punta de los elementos continúen sobre la línea recta mencionada anteriormente.

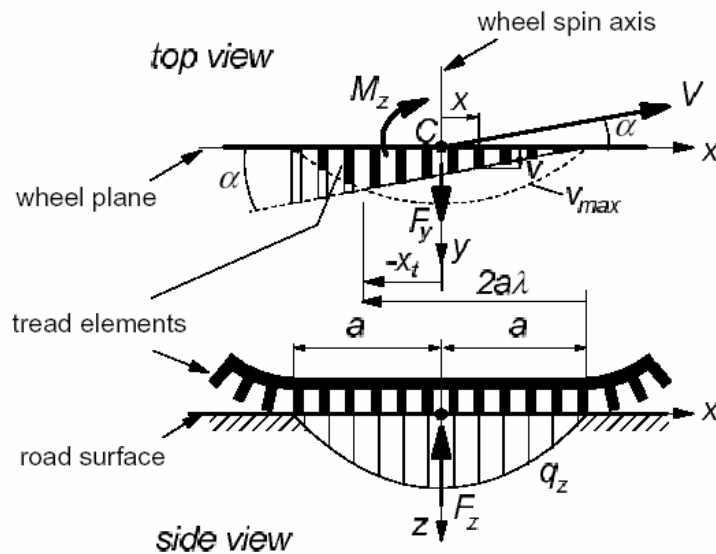


Fig. 2.18 Vista superior y lateral del modelo de cepillo bajo un ángulo de deslizamiento puro.
(Fuente: Pacejka, Hans. "Tyre and Vehicle Dynamics", 2002)

Para este modelo simple, la deformación del borde anterior de la zona de contacto se desprecia. Consecuentemente, la deformación lateral es:

$$v = (a - x) \tan \alpha \quad [\text{N}] \quad (2.100)$$

Donde a denota la mitad de la longitud de contacto.

En el caso de deslizamiento despreciable, los cuales ocurren bajo condiciones de $a \rightarrow 0$ ó $\mu \rightarrow \infty$, esta expresión es válida para toda el área de contacto.

Definiendo como c_{py} la rigidez lateral por unidad de longitud de los elementos $[\text{N/m}]$, se obtienen las siguientes expresiones para F_y y M_z :

$$F_y = c_{py} \int_{-a}^a v dx = 2c_{py} a^2 \alpha \quad [\text{N}] \quad (2.101)$$

$$M_z = c_{py} \int_{-a}^a vx dx = -\frac{2}{3} c_{py} a^3 \alpha \quad [\text{N}] \quad (2.102)$$

Si se considera una distribución de presiones que gradualmente disminuya hasta cero en ambos bordes del área de contacto y un coeficiente de fricción finito, en la cual, para mantener cierta simplicidad, se escogerá una distribución parabólica de fuerza vertical por unidad de longitud, expresada por:

$$q_z = \frac{3F_z}{4a} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} \quad [\text{N/m}] \quad (2.103)$$

Por lo tanto, la distribución de fuerzas de máximo valor es:

$$|q_{y,\max}| = \mu q_z = \frac{3}{4} \mu F_z \left(\frac{a^2 - x^2}{a^3} \right) \quad [\text{N/m}] \quad (2.104)$$

Para abreviar las siguientes ecuaciones, se define el siguiente parámetro:

$$\theta_y = \frac{2c_{py} a^2}{3\mu F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.105)$$

La distancia a la cual ocurre la transición entre la adhesión y el deslizamiento se denota por $2a\lambda$, de donde podemos encontrar λ , observando que las ecuaciones que rigen la zona de adhesión y la zona de deslizamiento tienen un punto en común justo a esta distancia:

$$|q_y| = c_{py}(a - x_t) |\tan \alpha| = |q_{y,\max}| = \mu q_z = \frac{c_{py}}{2a\theta_y}(a - x_t)(a + x_t) \quad [\text{N/m}] \quad (2.106)$$

$$\lambda = 1 - \theta_y |\tan \alpha| \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.107)$$

Y de esta última ecuación, el ángulo de deslizamiento crítico ($\lambda=0$) puede ser cuantificado mediante:

$$\tan \alpha_c = \frac{1}{\theta_y} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.108)$$

Ya que se han establecido correctamente los límites de cada zona dentro del área de contacto, se pueden ahora encontrar las expresiones correctas para F_y y M_z . Por conveniencia, se expresa el deslizamiento de la siguiente manera:

$$\sigma_y = \tan \alpha \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.107)$$

Y la fuerza y momento resultantes se expresan mediante:

$$|\alpha| \leq \alpha_c$$

$$F_y = \mu F_z (1 - \lambda^3) \text{sgn}(\alpha) = 3\mu F_z \theta_y \sigma_y \left\{ 1 - |\theta_y \sigma_y| + \frac{1}{3}(\theta_y \sigma_y)^2 \right\} \quad [\text{N}] \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} M_z &= -\mu F_z \lambda^3 a (1 - \lambda) \text{sgn}(\alpha) = \\ &= -\mu F_z \theta_y \sigma_y a \left\{ 1 - 3|\theta_y \sigma_y| + 3(\theta_y \sigma_y)^2 - 3|\theta_y \sigma_y|^3 \right\} \quad [\text{Nm}] \quad (2.109) \end{aligned}$$

$$\alpha_c \leq |\alpha| < \pi/2$$

$$F_y = \mu F_z \text{sgn}(\alpha) \quad [\text{N}] \quad (2.110)$$

$$M_z = 0 \quad [\text{Nm}] \quad (2.111)$$

La expresión para el avance neumático, viene dada por:

$$t = -\frac{M_z}{F_y} \quad [\text{m}] \quad (2.112)$$

donde F_y y M_z se sustituyen por las expresiones (2.108) y (2.109) ó (2.110) y (2.111), según sea el caso.

2.10.2.3 Fuerzas Combinadas

Para el análisis de la influencia de la fuerza longitudinal en la generación de fuerzas y momentos laterales se restringirá el estudio a un modelo isotrópico, el cual implica las siguientes simplificaciones:

- (a) La rigidez lateral de los elementos es igual a la rigidez longitudinal de los mismos ($c_{py}=c_{px}=c_p$)
- (b) El coeficiente de fricción es igual en cualquier dirección ($\mu_x=\mu_y=\mu$)

La figura (2.19) muestra la situación bajo la cual el modelo se ve sometido a condiciones simultáneas de fuerza longitudinal y lateral. Debido a la isotropía, las deflexiones son de sentido opuesto al vector de velocidad de deslizamiento; el proceso de deformación de un elemento individual es un proceso unidimensional en una dirección paralela al vector V_s .

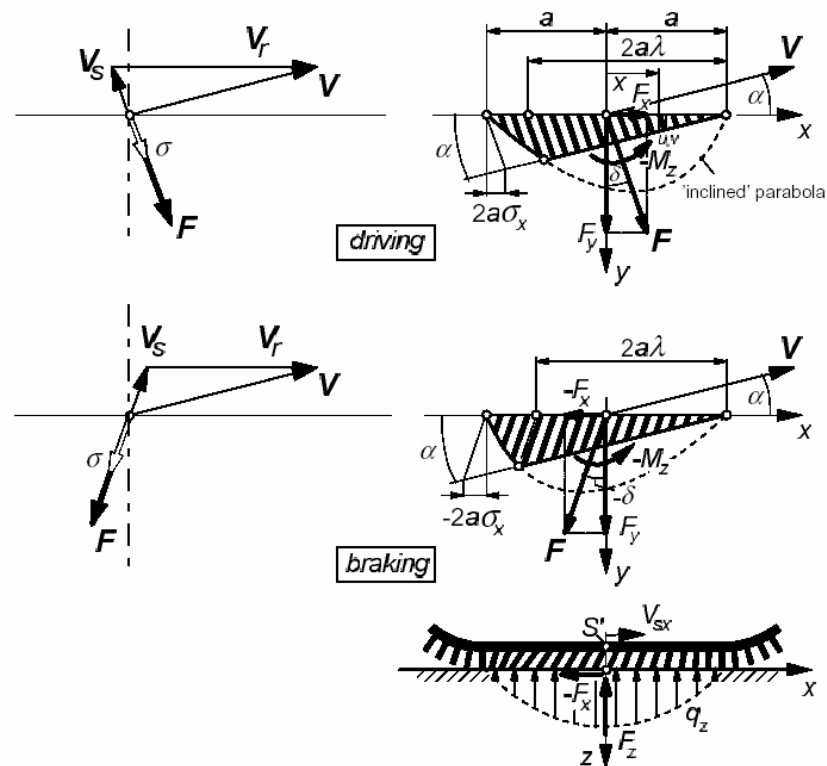


Fig. 2.19 Diagrama vectorial y de deformación para el modelo de cepillo operando a un ángulo de deslizamiento dado para los casos de tracción y frenado.

(Fuente: Pacejka, Hans. “Tyre and Vehicle Dynamics”, 2002)

La velocidad a la que avanza cualquier punto de la base dentro del área de contacto es la velocidad de rodadura lineal V_r , los elementos dentro del área de contacto en la zona de adhesión se deforman a una velocidad V_s , y el tiempo que transcurre desde que un elemento entra en el área de contacto hasta que recorre una distancia x dentro de la misma es:

$$\Delta t = \frac{a - x}{V_r} \quad [\text{m}] \quad (2.113)$$

Bajo esta suposición, la deflexión de un elemento que se encuentra aún adherido al pavimento es, en forma vectorial:

$$E = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = V_s \Delta t = -\frac{V_s}{V_r} (a - x) \quad [\text{m}] \quad (2.114)$$

Introduciendo los deslizamientos teóricos, en forma vectorial:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = -\frac{V_s}{V_r} = -\frac{1}{V_r} \begin{pmatrix} V_{sx} \\ V_{sy} \end{pmatrix} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.115)$$

Las relaciones entre los deslizamientos teóricos y los deslizamientos prácticos κ ($= -V_{sx}/V_x$) y $\tan \alpha$ ($= -V_{sy}/V_x$) es:

$$\sigma_x = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.116)$$

$$\sigma_y = \frac{\tan \alpha}{1 + \kappa} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.117)$$

Y la deflexión ahora se convierte en:

$$E = (a - x)\Sigma \quad [\text{m}] \quad (2.118)$$

La fuerza horizontal actuando en la punta de cada elemento es:

$$Q = c_p (a - x)\Sigma \quad [\text{N}] \quad (2.119)$$

Una vez que el elemento entra en la zona de deslizamiento, se tiene que:

$$q = |Q| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} > \mu q_z \quad [\text{N}] \quad (2.120)$$

y entonces:

$$Q = \frac{\Sigma}{\sigma} \mu q_z \quad [\text{N}] \quad (2.121)$$

De manera similar, se tiene que la deflexión de un elemento es:

$$e = |E| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad [\text{m}] \quad (2.122)$$

El punto de transición de la zona de adhesión a la zona de deslizamiento viene dado por:

$$c_p e = \mu q_z \quad [\text{N}] \quad (2.123)$$

$$c_p \sigma (a - x_t) = \frac{3}{4} \mu F_z \left(\frac{a^2 - x_t^2}{a^3} \right) \quad [\text{N}] \quad (2.124)$$

Lo cual arroja como resultado

$$x_t = \frac{4}{3} \frac{c_p a^3 \sigma}{\mu F_z} - a = a(2\theta\sigma - 1) \quad [\text{m}] \quad (2.125)$$

O, de otra manera

$$\lambda = 1 - \theta\sigma \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.126)$$

Donde:

$$\theta_y = \theta_x = \theta = \frac{2c_p a^2}{3\mu F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.127)$$

Se demuestra que el valor de la cantidad de deslizamiento es:

$$\sigma_c = \frac{1}{\theta} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.128)$$

Y la magnitud de la fuerza total F viene dado por:

$$\sigma \leq \sigma_c$$

$$f = \mu F_z (1 - \lambda^3) = \mu F_z \theta \sigma \{ 3\theta_y \sigma_y - 3(\theta_y \sigma_y)^2 + (\theta_y \sigma_y)^3 \} \quad [\text{N}] \quad (2.129)$$

$$\sigma_c \leq \sigma$$

$$f = \mu F_z \quad [\text{N}] \quad (2.130)$$

Cuya dirección es:

$$F = f \frac{\Sigma}{\sigma} \quad [\text{N}] \quad (2.131)$$

Para los cálculos del momento autoalineante se tiene que

$$M_z = t(\sigma)F_y \quad [\text{Nm}] \quad (2.132)$$

Donde $t(\sigma)$ es la formula (2.110), cambiando los parámetros $\theta_y\sigma_y$ por $\theta\sigma$ en las expresiones respectivas.

2.10.3 Adimensionalización

Este método se basa en la observación de que las curvas de fuerza con respecto a una magnitud de deslizamiento puro, conservan su forma general modificada a las condiciones a las cuales opere dicho neumático, y se apoya en los principios de los aerodinamicistas de reducir una gran cantidad de datos de fuerzas y momentos provenientes de ensayos aeronáuticos, a una forma adimensionalizada más sencilla de abordar.

Este modelo fue desarrollado por Pacejka(1958); fué posteriormente mejorado por Radt y Pacejka(1963), y las demostraciones de su exactitud fueron dadas por Radt y Milliken(1983), y luego por Milliken y Milliken(1995). Como resultado de esto, parte del método se fundamenta en la Fórmula Mágica, desarrollada por Pacejka.

Debido a la complejidad ligada al hecho de probar las fuerzas y momentos que genera un neumático bajo condiciones variables (ángulo de inclinación, carga, velocidad, etc), y a lo costoso que resulta hacer dichas pruebas, este método resulta ser particularmente útil cuando se quieren obtener resultados de exactitud aceptable sin tener que incurrir en los detalles técnicos y económicos que implica hacer un análisis mediante cualquier otro modelo.

Las ventajas que tiene la utilización de este método con respecto a cualquier otro, son las siguientes:

- (a) Tiempo de prueba y costos reducidos.
- (b) Menos desgaste (de los neumáticos) durante la prueba, debido a que se hacen un menor número de pruebas.
- (c) Mejoramiento de la precisión de los datos debido al suavizado de los mismos para condiciones combinadas y al menor número de cambios de neumáticos durante la prueba

- (d) Provee una representación simple y suficientemente precisa del comportamiento del neumático para ser usada en simulaciones vehiculares.
- (e) Provee el potencial para incluir variaciones de la fricción superficial
- (f) Provee una interpolación directa y suficientemente precisa de los datos entre las cargas utilizadas, y dispone del potencial para extrapolar los datos a cargas más altas o bajas que aquellas usadas durante la prueba.
- (g) Permite la comparación del comportamiento no-lineal de diferentes neumáticos, o del mismo neumático bajo distintas condiciones de operación.

2.10.3.1 Fuerza Longitudinal vs Carga

En el caso que se que se disponga de datos correspondientes a la fuerza longitudinal que se genera en función de la relación de deslizamiento, a un ángulo de deslizamiento igual a cero (0) para varias cargas. La metodología a seguir es la siguiente:

- (a) Se promedian los valores absolutos de las fuerzas de la rama negativa y de la rama positiva de la curva. Este proceso elimina los efectos de moemento de rodadura que puedan estar presentes en el neumático ensayado.
- (b) Se define una fuerza normalizada, la cual es:

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{\mu_x F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.133)$$

y un deslizamiento longitudinal normalizado:

$$\bar{S} = \frac{k_x S}{\mu_x F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.134)$$

donde:

F_x es la fuerza longitudinal [N].

k_x es la pendiente inicial de la curva de fuerza longitudinal vs relación de deslizamiento, conocida también como rigidez longitudinal del neumático, definida de la siguiente manera:

$$k_x = \frac{F_x(S_1) - F_x(0)}{S_1 - 0} \quad [\text{N}] \quad (2.135)$$

Donde S_1 es la relación de deslizamiento más próxima al origen.

μ_x es el coeficiente de roce longitudinal, definido de la siguiente manera:

$$\mu_x = \frac{F_{x,\max}}{F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.136)$$

S es la relación de deslizamiento, definida de la siguiente manera:

$$S = \frac{\Omega R_0}{V} - 1 \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.137)$$

(c) Se grafican los puntos resultantes de fuerza normalizada vs el deslizamiento normalizado. Al llegar a este punto la influencia de la carga desaparece, y los puntos de las distintas series de datos quedan bastante cercanos entre sí, y se puede hallar una curva que representa el mejor ajuste a dichos datos. Por lo general, dicho ajuste se hace empleando la Formula Mágica, aunque también se pudiese emplear otras curvas de ajuste de datos, tales como polinomios. En el caso de emplear dicha fórmula, la metodología a seguir es la siguiente:

(d) La fórmula que rige el comportamiento de la curva es la siguiente:

$$y = D \text{seno}(C \arctan(BX - E(BX - \arctan(BX)))) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.138)$$

donde B, C, D y E son los parámetros que rigen el comportamiento de la curva, y por lo tanto, determinarán el ajuste.

Para este caso $D=1$, ya que dicho parámetro representa el máximo valor de la curva.

El parámetro C se obtiene según la siguiente relación:

$$C = 2 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{y_a}{D}\right) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.139)$$

Donde y_a es el valor de la asíntota a la cual se aproximan los datos. Una aproximación razonable es 0,9; aunque el valor puede oscilar entre 0 y 1.

El parámetro B se encuentra según la siguiente relación:

$$B = \frac{k}{C * D} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.140)$$

Donde k representa la pendiente cercana al origen, la cual puede ser calculada promediando las pendientes que arrojan los puntos más cercanos al origen de las curvas a distinta carga:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.141)$$

El parámetro E viene dado por:

$$E = \frac{Bx_m - \tan(\pi/2C)}{Bx_m - \arctan(Bx_m)} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.142)$$

Donde X_m es el valor del deslizamiento normalizado al cual ocurre la fuerza máxima. De nuevo, se puede tomar como el valor de dicho parámetro el promedio de dichos valores en las distintas curvas:

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{mi} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.143)$$

- (e) Los parámetros físicos involucrados, como son la rigidez y el coeficiente de fricción longitudinales, se grafican en función de la carga, y luego se encuentra el mejor ajuste a ellos mediante el método que más convenga: mínimos cuadrados, splines, etc.

Una vez que se completa este proceso, se puede expresar la fuerza en cualquier estado intermedio distinto a aquellos a los que fueron tomados los datos, siguiendo los siguientes pasos:

- (a) Se normaliza la relación de deslizamiento a la carga especificada según lo explicado anteriormente, pero valiéndose para ello del ajuste hecho a la curva de rigidez longitudinal:

$$\bar{S} = \frac{k_x(F_z)S}{\mu_x(F_z)F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.144)$$

- (b) Se encuentra la fuerza normalizada para este deslizamiento normalizado.
- (c) Se encuentra la fuerza real multiplicando la fuerza normalizada hallada por la carga normal y el coeficiente de fricción a ésta carga:

$$F_x = \bar{F}_x \mu_x (F_z) F_z \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.145)$$

2.10.3.2 Fuerza Lateral vs Carga

Este caso es muy similar al caso de fuerza longitudinal vs carga; se tienen datos correspondientes a la fuerza lateral que se genera en el neumático en función del ángulo de deslizamiento, con una relación de deslizamiento y ángulo de inclinación iguales a cero (0) para varias cargas. La metodología a seguir es la siguiente:

- (a) Se promedian los valores absolutos de las fuerzas de la rama negativa y de la rama positiva de la curva. Este proceso elimina los efectos de conicidad y pseudo-ángulo de deslizamiento que puedan estar presentes en el neumático ensayado.
- (b) Se define una fuerza normalizada, la cual es:

$$\bar{F}_y = \frac{F_y}{\mu_y F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.146)$$

y un deslizamiento lateral normalizado:

$$\bar{\alpha} = \frac{k_y \tan(\alpha)}{\mu_y F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.147)$$

donde:

F_y es la fuerza lateral.

α es el ángulo de deslizamiento [rad].

k_y es la pendiente inicial de la curva de fuerza lateral vs ángulo de deslizamiento, conocida también como rigidez lateral del neumático, definida de la siguiente manera

$$k_y = \frac{F_y(\alpha_1) - F_y(0)}{\alpha_1 - 0} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.148)$$

Donde aquí α_1 es el ángulo de deslizamiento más próximo al origen.

μ_y es el coeficiente de roce lateral, definido de la siguiente manera:

$$\mu_y = \frac{F_{y,\max}}{F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.149)$$

(c) Se grafican los puntos resultantes, y se obtiene la fuerza normalizada vs el deslizamiento normalizado. Al llegar a este punto la influencia de la carga desaparece, y los puntos de las distintas curvas quedan bastante cercanos a una curva, que representa el mejor ajuste a dichos datos. Por lo general dicho ajuste se hace empleando la Formula Mágica, aunque también se pudiese emplear otras curvas de ajuste de datos, tales como polinomios. En el caso de emplear dicha fórmula, la metodología a seguir es la misma que la explicada para el caso de fuerza longitudinal vs relación de deslizamiento.

(d) Los parámetros físicos involucrados, como son la rigidez y el coeficiente de fricción laterales, se grafican en función de la carga, y luego se encuentra el mejor ajuste a ellos mediante el método que más convenga: mínimos cuadrados, splines, etc.

Una vez que se completa este proceso, se puede expresar la fuerza en cualquier estado intermedio distinto a aquellos a los que fueron tomados los datos, siguiendo los siguientes pasos:

(e) Se normaliza el ángulo de deslizamiento a la carga especificada según lo explicado anteriormente, pero valiéndose para ello del ajuste hecho a la curva de rigidez lateral.

$$\bar{\alpha} = \frac{k_y(F_z) \tan(\alpha)}{\mu_y(F_z) F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.150)$$

(f) Se encuentra la fuerza normalizada para este deslizamiento normalizado.

(g) Se encuentra la fuerza real multiplicando la fuerza normalizada hallada por la carga normal y el coeficiente de fricción a ésta carga:

$$F_y = \bar{F}_y * \mu_y(F_z) * F_z \quad [\text{N}] \quad (2.151)$$

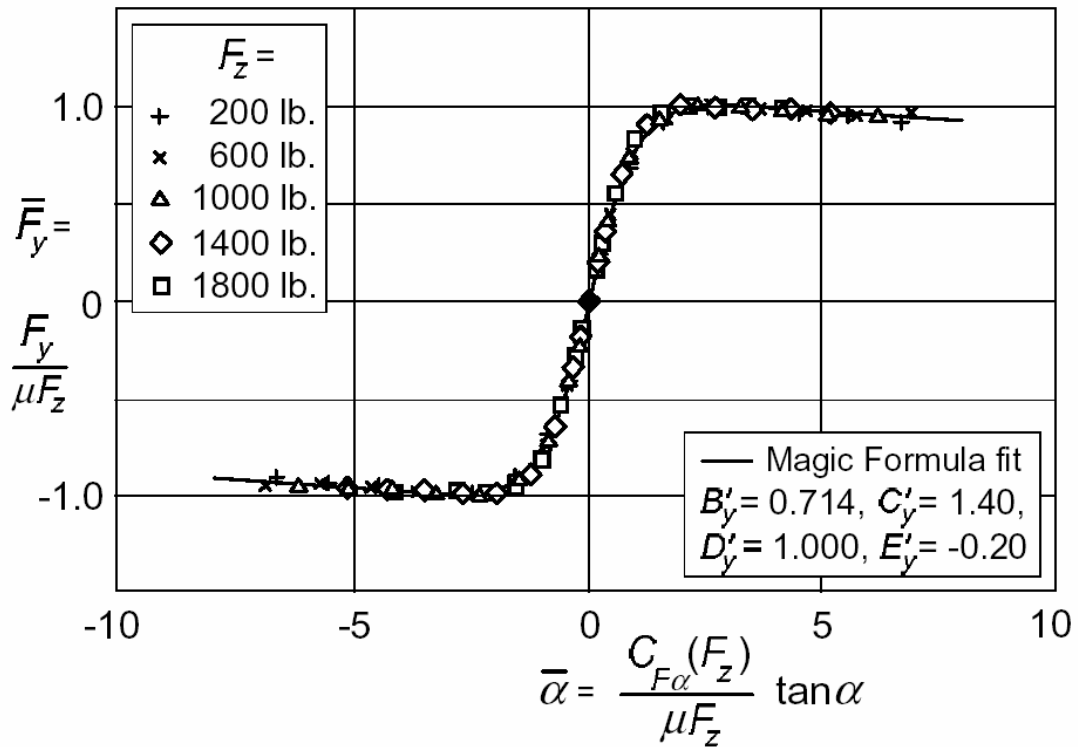


Fig. 2.20 Curva adimensional de fuerza lateral del neumático, según el método de Radt.
(Fuente: Pacejka, Hans. “Tyre and Vehicle Dynamics”, 2002)

2.10.3.3 Fuerza Lateral vs Ángulo de Inclinación

Cuando se necesita caracterizar el comportamiento del neumático tomando en cuenta ángulos de inclinación distintos a cero (0), el procedimiento a seguir es el siguiente:

- Si se tienen varias curvas de fuerza lateral vs ángulo de deslizamiento, es importante aislar aquellas fuerzas que ocurren a un ángulo de deslizamiento igual a cero (0).
- Una vez que se tienen dichas fuerzas, se define un ángulo de inclinación normalizado:

$$\bar{\gamma} = \frac{G * \sin(\gamma)}{\mu_y F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.152)$$

Donde G es la rigidez de inclinación, o la relación del empuje producido por inclinación al ángulo de inclinación, y se calcula como sigue, para cada ángulo de inclinación:

$$G = \frac{F_y(0)}{\gamma} \quad [\text{N}] \quad (2.153)$$

- (c) Se grafica la fuerza lateral normalizada vs el ángulo de inclinación normalizado.

2.10.3.4 Influencia combinada de la carga y el ángulo de inclinación

Una vez que se tienen las curvas normalizadas de fuerza vs carga y fuerza vs ángulo de inclinación, se define un nuevo ángulo de deslizamiento/inclinación combinado:

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\gamma} \operatorname{sgn}(\alpha)} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.154)$$

Y una nueva fuerza normalizada

$$F_N = \frac{\bar{F}_y - \bar{\gamma}}{1 - \bar{\gamma} \operatorname{sgn}(\alpha)} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.155)$$

y se grafica esta fuerza normalizada vs el nuevo deslizamiento combinado.

De esta manera, se combinan las características separadas de las curvas de fuerza vs carga y fuerza vs ángulo de inclinación en una nueva macro curva que define el mejor ajuste a los datos que se tienen, y que es una mejor manera de representar el comportamiento de un neumático.

2.10.3.5 Momento AutoAlineante:

En el caso del momento autoalineante, la metodología a seguir es similar a la de casos anteriores:

- (a) Se promedian los valores absolutos de los momentos de la rama negativa y de la rama positiva de la curva
- (b) Se define un momento normalizado, el cual es:

$$\overline{M}_z = \frac{M_z}{T_z \mu_y F_z} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.156)$$

donde:

M_z es el momento autoalineante.

T_z es la relación entre el momento autoalinente y la fuerza lateral para pequeños valores del ángulo de deslizamiento, y está definida de la siguiente manera:

$$T_z = \frac{M_z(\alpha_1) - M_z(0)}{F_y(\alpha_1) - F_y(0)} \quad [\text{m}] \quad (2.157)$$

Donde aquí α_1 es el ángulo de deslizamiento más próximo al origen.

Para el momento autoalineante la variable independiente es el deslizamiento normalizado $\overline{\alpha}$.

- (c) Se grafican los puntos resultantes de momento normalizado vs deslizamiento normalizado. Al llegar a este punto se aplica la metodología explicada anteriormente para encontrar el mejor ajuste de la curva definida por la Fórmula Mágica, con ciertos cambios:
- (d) D ahora es el máximo valor de la curva. Para tener una mejor aproximación se puede tomar los máximos de cada curva y promediarlos:

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i,\max} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.158)$$

- (e) El valor de la asíntota y_a ahora es negativo, y puede variar entre 0 y $-\infty$.

Una vez que se completa este proceso, se puede expresar el momento en cualquier estado intermedio distinto a aquellos a los que fueron tomados los datos, siguiendo pasos similares a los ya explicados anteriormente. Sin embargo, debido a que la dispersión de los datos es mucho mayor para el momento autoalineante que para el resto de las curvas, se puede incurrir en una magnitud de error relativamente grande.

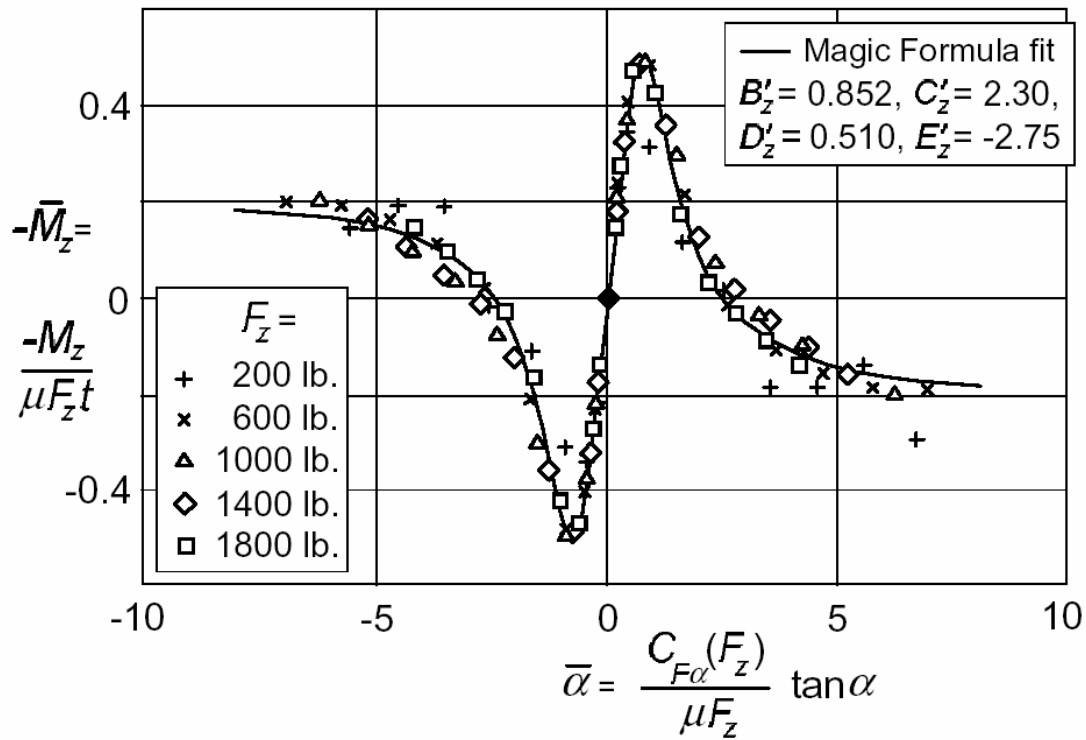


Fig. 2.21 Curva adimensional de momento autoalineante del neumático, según el método de Radt.
(Fuente: Pacejka, Hans. “**Tyre and Vehicle Dynamics**”, 2002)

Para el momento autoalineante también son válidos los procedimientos descritos anteriormente para hallar la influencia del ángulo de inclinación y ángulo de deslizamiento e inclinación combinados.

2.10.3.6 Fuerzas Combinadas

Una vez que se tienen las características de las fuerzas y momentos (tanto la longitudinal como la lateral) en función de sus respectivos deslizamientos, es necesario combinar las características de ambas en función de un único deslizamiento para poder representar de manera adecuada el comportamiento del neumático bajo éstas condiciones, sin embargo, debido a que sólo se tienen éstos datos por separado, es necesario definir la siguiente metodología:

- (f) Se define un deslizamiento combinado normalizado:

$$k = \sqrt{\bar{S}^2 + \bar{\alpha}^2} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.159)$$

(g) Se define un fuerza resultante normalizada:

$$R = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.160)$$

A partir de aquí se puede encontrar la mejor aproximación a la curva de R vs k , sin embargo, dicha curva no es completamente útil para calcular los componentes de la fuerza por separado. Para poder hacerlo es necesario basarse en la siguiente ecuación:

$$\bar{F}_y S = \eta(k) \bar{F}_x \tan(\alpha) \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.161)$$

la cual es obtenida del análisis de los datos tomados.

El multiplicador presente en ésta ecuación ($\eta(k)$) es necesario para hacer que la misma sea válida para valores pequeños y grandes de ángulos y relaciones de deslizamiento. Su forma es:

$$\eta(k) = \begin{cases} 0,5[1 + \eta_0] - 0,5[1 - \eta_0] \cos(k/2) & |k| \leq 2\pi \\ 1 & |k| > 2\pi \end{cases} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.162)$$

η_0 se determina de la siguiente manera:

$$\eta_0 = \frac{k_y \mu_x}{k_x \mu_y} \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.163)$$

Observando que:

$$\frac{F_y}{k_y \tan(\alpha)} = \frac{F_x}{k_x S} \quad [\text{N}] \quad (2.164)$$

Se obtiene:

$$\bar{F}_x = R(k) \left[\frac{S}{\sqrt{S^2 + \eta(k)^2 \tan^2 \alpha}} \right] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.165)$$

$$\bar{F}_y = \eta(k) R(k) \left[\frac{\tan \alpha}{\sqrt{S^2 + \eta(k)^2 \tan^2 \alpha}} \right] \quad [\text{Adimensional}] \quad (2.166)$$

Luego éstas fuerzas pueden ser reconstruidas utilizando los procedimientos específicos explicados en cada apartado.

CAPITULO III

SUSENSIONES

3.1 Generalidades

El sistema de suspensión de un automóvil consiste principalmente en una cadena cinemática de elementos conectados al bastidor o chasis del mismo, sobre cuyos elementos se anclan tanto los elementos elásticos (Resortes, ballestas, etc.), como los elementos disipadores de energía (Amortiguadores viscosos ó de fricción seca). Entre otras funciones, es el encargado de:

- (a) Absorber las irregularidades del camino y permitir al chasis la elasticidad suficiente para poder conducir al automóvil con seguridad y comodidad.
- (b) Mantener los neumáticos en el suelo en todo momento, bajo condiciones óptimas de funcionamiento.
- (c) Soportar y transmitir las fuerzas que se originan por las distintas maniobras a la cual puede verse sometido el vehículo (aceleración, frenado, cambios de dirección).
- (d) Aislar, hasta cierto límite, a los ocupantes del vehículo de las irregularidades presentes en el camino.

Aunque parezca sencillo, es complejo lograr integrar estos objetivos en un solo sistema, en el cual existe una multitud de parámetros a controlar, y es por ello que es necesario su estudio detallado, con el fin de determinar las características óptimas de acuerdo al diseño y la aplicación particular del vehículo en el cual se instale un esquema u otro.

Como se dijo anteriormente, el sistema de suspensión consiste en una serie de elementos, tanto pasivos (brazos, balancines, varillas) como activos (Elementos elásticos, amortiguadores viscosos) que se encargan de mantener cierto aislamiento entre el chasis del vehículo y la carretera, además de controlar el movimiento de las ruedas conforme éstas siguen las irregularidades del camino y transmitir las fuerzas generadas por los neumáticos al chasis. Aunque la disposición y cantidad de estos elementos varía según el diseño y la aplicación particular, todos los diseños deben cumplir estos requisitos. Sin embargo, debido a que muchas veces los requerimientos de diseño son bastante conflictivos entre sí, es difícil lograr satisfacer todos los

requerimientos o lograr una geometría “perfecta”, capaz de mantener todos los parámetros en su punto óptimo independientemente de las condiciones de funcionamiento, por ello los esquemas de suspensión pueden reflejar una solución compromiso, la cual es capaz de enfrentar una variedad de condiciones sin destacarse especialmente en ninguna, o un esquema de suspensión altamente especializado capaz de otorgar las mejores prestaciones posibles al vehículo bajo condiciones particulares. Multitud de esquemas y diseños han sido desarrollados hoy en día, así como muchas versiones de cada esquema general, las cuales claman ser la mejor solución entre las ya existentes, o de otorgar ciertas y determinadas características de manejo al vehículo en el cual se implementaron. Si bien hoy en día aun se invierte tiempo y esfuerzo estudiando los esquemas ya existentes con el fin de mejorar sus características, ya sea con el empleo de nuevos materiales que lleven a esquemas más ligeros, distintas configuraciones dentro de un mismo esquema, entre otros, la vanguardia está en los sistemas de suspensión activos y semi-activos, que si bien escapan al alcance de este trabajo, vale la pena mencionarlos como referencia.

3.2 Conceptos Básicos

Antes de poder estudiar a fondo el comportamiento de los sistemas de suspensión y la manera en la cual influencia el desempeño de todo el vehículo, es necesario dar una serie de definiciones que ayudarán a comprender mejor el contexto en el cual se presenta la información:

- (a) Camber: Algunas veces referido en castellano como caída o inclinación. Se define como el ángulo de inclinación que presentan las ruedas con respecto a un plano vertical fijo al vehículo. Su importancia radica en que el agarre lateral del auto se ve fuertemente influenciado por las variaciones de este ángulo con respecto a dicha vertical. Bajo condiciones ideales este debe ser el necesario para mantener un ángulo de inclinación del neumático igual a 0° con la finalidad de mantener las ruedas perpendiculares al pavimento y maximizar el área de contacto de las ruedas, además de reducir y uniformizar el desgaste del neumático, si bien en realidad las fuerzas laterales y la

deformación del neumático dictan la necesidad de que las ruedas no estén perpendiculares al suelo. Como este ángulo por lo general cambia con el recorrido de la suspensión, es parte de un buen diseño conseguir una cinemática tal que se conserven las mejores condiciones en todo momento. Un ángulo de camber muy pronunciado puede generar un desgaste prematuro de los neumáticos, o inclusive generar un pliegue indeseado en los mismos.

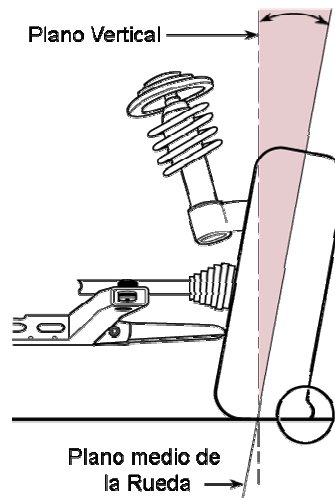


Fig. 3.1 Camber
(Fuente: www.carbibles.com, 2006)

- (b) **Caster:** A grandes rasgos, el caster es el ángulo de inclinación existente entre la línea que pasa por los puntos de agarre del soporte de las ruedas de dirección y una vertical, desde una perspectiva lateral del vehículo. Aunque no tiene efecto directo sobre el agarre del automóvil, influye notablemente en la estabilidad en recta del mismo, al conceder un efecto auto-enderezante mediante el avance (se explicará posteriormente). Otro aspecto clave se encuentra en la influencia que ejerce sobre el comportamiento dinámico del camber, a medida que las ruedas giran sobre su eje de pivote o dirección, lo que influye en el agarre del vehículo en las curvas.

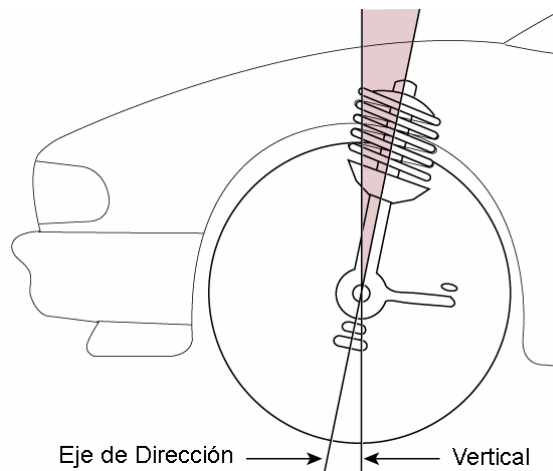


Fig. 3.2 Caster
(Fuente: www.carbibles.com, 2006)

- (c) Avance Mecánico: Es la distancia entre el punto de contacto de la rueda con el suelo, y el punto de corte del eje de dirección y el suelo. Comúnmente solo se toma en cuenta la proyección lateral de dicha distancia; lo correcto también sería considerar su proyección frontal. Este parámetro define la característica auto-enderezante de las ruedas de dirección, lo cual le da su nombre en castellano, ya que en todos los automóviles comerciales su proyección lateral se encuentra adelantada a las ruedas. Poseer un avance mecánico retrasado lateralmente ocasionaría una fuerte inestabilidad en todo momento y aumentaría considerablemente el desgaste de los neumáticos. Es importante destacar que este parámetro, junto al avance neumático, conforman el Avance Total, responsable en gran medida del momento autoalineante total en las ruedas, y del respectivo torque de auto-centrado observado en el volante de dirección.
- (d) Inclinación del eje de dirección (SAI por sus siglas en inglés): Este término no es muy popular por acarrear confusiones con el caster, así que también se conoce como Kingpin, o KPI, La inclinación del eje de dirección se define de manera similar a este otro ángulo, solo que esta inclinación se observa desde el frente del vehículo. Como en el caso anterior, este ángulo influye sobre la

estabilidad en recta del automóvil, así como en los comportamientos dinámicos del Camber y Orientación.

- (e) Angulo de Orientación: Puede definirse como el ángulo que forma el plano medio de la rueda con el plano lateral del vehículo, visto desde una vista en planta. Comúnmente en los vehículos comerciales se escoge una solución compromiso que garantice convergencia cero cuando el mismo está en movimiento rectilíneo, manteniendo en un mínimo el desgaste de los neumáticos, aunque algunos fabricantes de vehículos familiares prefieren utilizar convergencia por razones psicológicas altamente relacionadas con la seguridad.

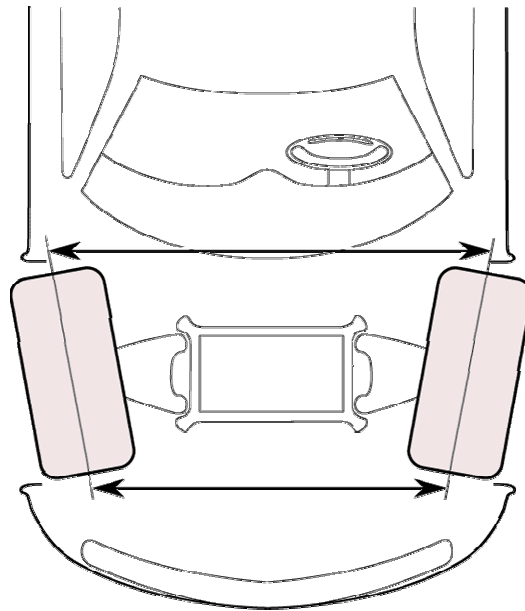


Fig. 3.3 Angulo de orientación
(Fuente: www.carbibles.com, 2006)

- (f) Distancia entre Ejes: También se conoce como “batalla” y como su nombre lo dice, es la distancia entre el eje delantero y el eje trasero de un vehículo de 2 ejes. Mientras menor sea esta distancia, el vehículo se mostrará muy inestable en las rectas, pero será especialmente apto para tomar las curvas, mientras que con una batalla elevada se gana estabilidad en rectas a expensas de perder la capacidad de tomar las curvas fácilmente. También afecta la transferencia de cargas longitudinales durante aceleración y frenado.

- (g) Vías, Ancho de Vías: Es la distancia entre el plano medio de las ruedas de un mismo eje, perpendicular a su eje de rotación. Este parámetro adquiere importancia al momento de evaluar la transferencia de cargas a cada rueda durante una curva, y así establecer características de desempeño y seguridad en el vehículo como lo son el subviraje o sobreviraje del mismo, que se explicarán posteriormente.
- (h) Centro de Balanceo (Roll Center): Desde el punto de vista cinemático, se establece que es el punto que representa el Centro Instantáneo de Rotación del chasis con respecto a la suspensión. De cualquier manera, estos puntos los definen los elementos de la suspensión de cada eje del vehículo, por lo que en vehículos de 2 ejes, existen 2 centros de balanceo; estos puntos definen el Eje de Balanceo (Roll Axis), que es el eje sobre el cual el chasis del auto no giraría si se aplicara una fuerza normal a dicho eje. Debido a que los elementos de la suspensión cambian de posición conforme cambia el recorrido de la misma, de igual manera cambian de posición los centros de balanceo, y consecuentemente el eje de balanceo. Como las fuerzas inerciales del vehículo pueden suponerse aplicadas sobre el centro de gravedad del vehículo, la ubicación relativa de este con respecto al eje de balanceo determina cuanto girará el chasis del auto en una curva, ya que teóricamente este último gira sobre dicho eje.
- (i) Ángulo de Ackermann: Es el ángulo de orientación de la rueda frontal requerido para que un vehículo (simplificado a modelo de bicicleta) de batalla L sea capaz de girar en un círculo de radio R a bajas velocidades, donde las fuerzas externas debido a las aceleraciones son despreciables. Este ángulo cobra gran importancia al momento de definir el comportamiento simple de un vehículo, como se verá a continuación.
- (j) Subviraje, Sobreviraje y Neutralidad: Se dice que un vehículo es neutral cuando en presencia de una aceleración o fuerza lateral no se desvía de la trayectoria geométrica definida por el Ángulo de Ackermann. Si el vehículo se desvía de la misma, siguiendo una trayectoria con un radio de giro mayor al

establecido por el Ángulo de Ackermann, se dice que el vehículo es Subvirante, y si por el contrario, la desviación se caracteriza por un radio de curvatura menor, el vehículo es Sobrevirante.

- (k) Peso Suspendido: Se define como peso suspendido a todo aquel peso soportado por el sistema de suspensión, incluyendo una fracción del peso de los miembros de suspensión.
- (l) Masa Suspendida: Es considerado como aquel cuerpo rígido con igual masa, el mismo centro de gravedad, y los mismos momentos de inercia sobre los mismos ejes que el peso suspendido.
- (m) Peso no suspendido: Todo aquel peso que no es soportado por el sistema de suspensión, sino por el conjunto de la rueda ó el neumático, y que se considera se mueve con ella.
- (n) Masa no suspendida: Son las masas equivalentes que reproducen las mismas fuerzas de inercia producidas por los correspondientes partes no suspendidas.

3.3 Tipos de Suspensión

Para tratar con el problema de cumplir con todos los requisitos que debe tener un sistema de suspensión eficaz, existen distintos esquemas que cumplen con dichas exigencias, algunos de mejor manera que otros, dependiendo del uso al cual se destine el vehículo en el cual se instalará.

3.3.1 Suspensiones Independientes

Estas suspensiones, anteriormente utilizadas en sedanes de lujo y autos con pretensiones deportivas, ahora ampliamente utilizadas en vehículos de todo tipo, ofrecen flexibilidad en el diseño para adaptarse a una variedad de condiciones con simples cambios en la disposición de los elementos. Entre los tipos más comunes están: El esquema de dobles brazos desiguales (Short-Long Arms, SLA en inglés), el esquema McPherson, Brazos (Trailing Arms), Multibrazo, Eje Oscilante.

3.3.1.1 Dobles Brazos Desiguales

Este esquema, consta de dos estructuras o brazos anclados en dos puntos al chasis del vehículo, y en un punto a la estructura que sujeta la rueda, formando un triángulo. Su nombre proviene del hecho que, debido a consideraciones de diseño, en estas suspensiones el elemento de arriba se hace más corto que el de abajo. Otros nombres bajo los cuales se conoce este tipo de suspensión es de Triángulos Superpuestos, debido a la forma particular de los brazos, o de Paralelogramo Deformable, ya que vista según el eje longitudinal del vehículo el esquema de esta suspensión es idéntico al de un mecanismo cinemático de 4 barras. Los elementos activos de este sistema de suspensión son usualmente actuados a través de varillas y balancines, por lo tanto, pueden disponerse convenientemente según requerimientos de diseño y/o espacio. Una variación particular de este esquema consiste en disponer los elementos activos de tal manera que sean los mismos brazos de suspensión los encargados de actuarlos (esquema a veces conocido como Pseudo McPherson).

Las principales ventajas de este esquema de suspensión son las posibilidades cinemáticas que ofrece, ya que con sólo cambiar las posiciones relativas de los brazos se pueden alterar las características de funcionamiento de dicho esquema en un amplio rango, en función de las características de manejo que se deseen, aunque su principal desventaja radica en la imposibilidad de optimizar todos los parámetros de funcionamiento para un caso particular, por lo que siempre el diseño de este esquema de suspensión está predeterminado según las características de desempeño que se quieran extraer del mismo.

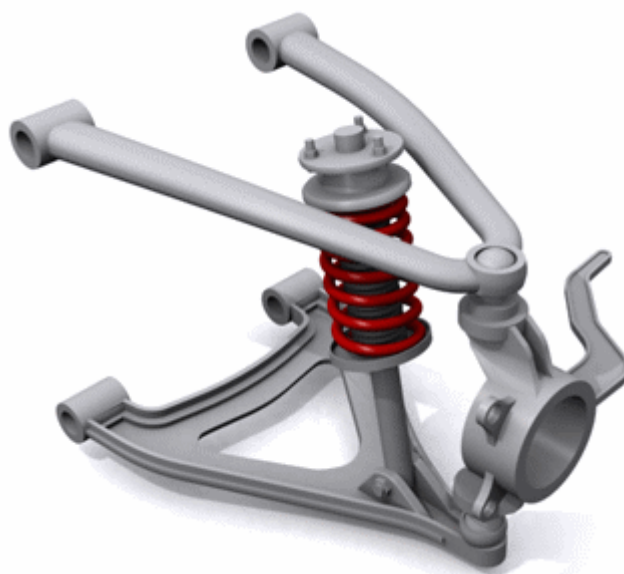


Fig. 3.4 Esquema de doubles brazos desiguales.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

3.3.1.2 Mc Pherson

Este esquema es una evolución del esquema de doble brazo, en el cual el brazo superior es reemplazado directamente por una unidad de resorte-amortiguador (Coil-over), la cual pivota en la parte superior en el chasis.



Fig. 3.5 Esquema McPherson.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

Las ventajas de este sistema son:

- (a) Las partes que controlan tanto la dinámica como la cinemática de la suspensión están integradas en una unidad compacta.
- (b) El recorrido del elemento elástico es mayor que en otros esquemas de suspensión.
- (c) Mas flexibilidad en el diseño de la zona frontal.
- (d) Este esquema de suspensión ocupa menos espacio lateral que otros esquemas, y hace posible el diseño de un espacio amplio para el motor y/o la carga (en el caso de vehiculos utilitarios o familiares).

Sin embargo, dicho diseño tiene las siguientes desventajas:

- (a) Concentración de fuerzas en el punto de pivote de la unidad resorte-amortiguador, lo cual trae como consecuencia que se generen esfuerzos de flexión en el eje del amortiguador. Para minimizar los efectos indeseados de cambio de camber y caster por elasticidad, se debe incrementar el diámetro estándar del pistón del amortiguador.
- (b) Es más difícil el aislamiento del ruido (vibraciones de alta frecuencia) proveniente del camino, por lo que se requiere de un soporte superior para la torre (Coil-over), que debe tener una transmisibilidad tan baja como sea posible.
- (c) Características cinemáticas menos favorables que en otros diseños.
- (d) Introducción de fuerzas y vibraciones en el panel interior del alojamiento de la rueda, y por lo tanto, en un área relativamente elástica de la parte frontal del vehículo.
- (e) Se introduce una gran magnitud de fricción entre el eje del amortiguador y su guía, por lo cual es necesario reducirla creando un ángulo entre el eje del elemento elástico y el amortiguador y/o reduciendo la distancia entre el punto de anclaje inferior y el centro del área de contacto del neumático.
- (f) Gran sensibilidad del esquema frente a desbalances en la rueda y a excentricidad de la misma.
- (g) Espacio limitado entre la rueda y el elemento disipador de energía, lo que en muchos casos limita la posibilidad de instalar ruedas más anchas al vehículo, y en caso de hacer esta modificación, obliga el uso de separadores, lo cual afecta negativamente el desempeño de los sistemas de suspensión y dirección al alterar sus parámetros de funcionamiento.

3.3.1.3 Brazos Seguidores

Este esquema consiste en uno o dos brazos paralelos al sentido de marcha del vehículo en cuestión (de allí su nombre) y anclados en un extremo al chasis del vehículo, mientras que el extremo libre está unido a la rueda. Este esquema de suspensión es popular en los ejes traseros de vehículos de tracción delantera, debido a que permiten un área de carga baja y plana. Otra de sus ventajas radica en que, si el eje de pivote se sitúa paralelo al eje de rotación de las ruedas no existen cambios de camber, ni de ancho de vías, ni en la divergencia con respecto al recorrido de la suspensión. El centro de balanceo a nivel del pavimento, la probabilidad remota de influenciar la posición de la rueda mediante la cinemática del esquema, la tendencia a sobrevirar como consecuencia de la deformación del brazo o brazos, y la inclinación de las ruedas en el mismo sentido del balanceo durante las curvas son algunas de las desventajas inherentes a este esquema de suspensiones.

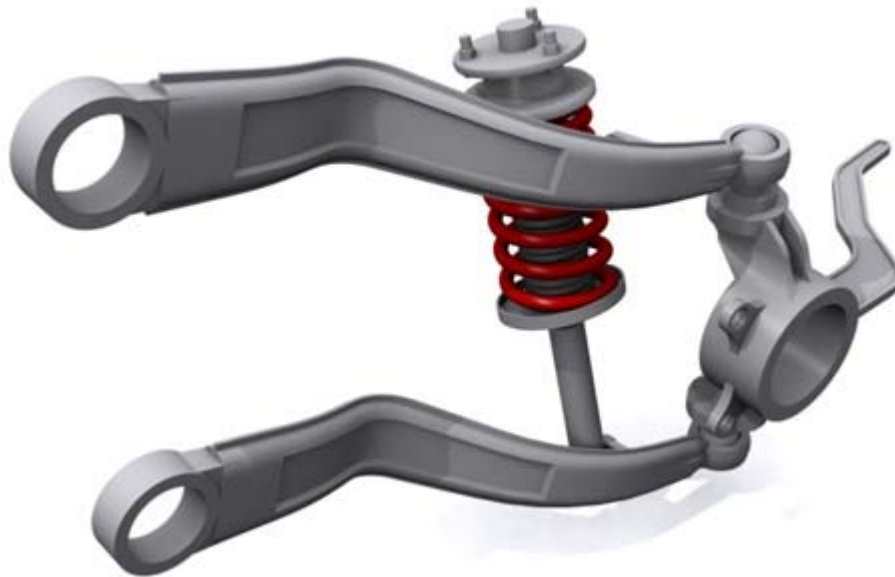


Fig. 3.6 Esquema de Brazos Seguidores.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

Una variante de este esquema son los Brazos Semi-seguidores, en el cual el eje de pivote tiene una inclinación con el eje de rotación de las ruedas que va desde

10° hasta 25° visto desde la parte superior del vehículo, y aproximadamente 5° cuando se ve desde la parte posterior del mismo. Cuando dicho brazo tiene cierta longitud, los parámetros de funcionamiento pueden ser alterados positivamente con el recorrido de la suspensión, entre ellos:

- (a) La altura del centro de balanceo.
- (b) Cambio de camber.
- (c) Cambio de convergencia-divergencia.

Al igual que en los brazos seguidores, este esquema destaca por su tendencia al sobreviraje.

3.3.1.4 Multibrazo

Estos esquemas son relativamente recientes, el primero conocido data de 1982, desde entonces éste esquema se ha ido desarrollando e implementando tanto para ejes motrices como para ejes no motrices. En éstos esquemas se usan hasta 5 eslabones para controlar las fuerzas y momentos presentes en cada rueda, dependiendo de la geometría, cinemática, elasto-cinemática y la configuración de fuerzas presentes en cada caso particular.



Fig. 3.7 Esquema Multibrazo.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

Si bien muchas veces el arreglo de los eslabones es dependiente del espacio disponible para su configuración, este esquema ofrece extraordinaria flexibilidad en el diseño, y junto a las ventajas inherentes a los esquemas de suspensiones independientes, también ofrecen las siguientes ventajas:

- (a) Oportunidades considerables de neutralizar los movimientos de cabeceo del vehículo durante aceleración y frenado (hasta más del 100% de anti-hundimiento y anti-levantamiento).
- (b) Control ventajoso del movimiento de la rueda con respecto a convergencia-divergencia, camber y ancho de vías desde el punto de vista del desarrollo de las fuerzas en el neumático.
- (c) Definición virtualmente libre del centro de balanceo.
- (d) Altas probabilidades de balancear las propiedades de desviaciones inducidas en la dirección.

Sin embargo, al igual que los otros sistemas también presenta una serie de desventajas, las cuales son:

- (a) Costo más alto comparado a los otros esquemas, debido al mayor número de eslabones y cojinetes.
- (b) Altos costos de producción y ensamblaje.
- (c) La posibilidad de sobrecompensación cinemática trae como consecuencia el desgaste de los cojinetes durante los movimientos normales de los eslabones.
- (d) Mayor sensibilidad al desgaste de los eslabones y cojinetes.
- (e) Requisitos más altos con respecto a las tolerancias exigidas tanto para la geometría como para la rigidez del esquema.

3.3.1.5 Eje Pivotante (Swing Axle)

Este esquema, el cual se cree fue inventado por Edmund Rumpler a comienzos de siglo, es uno de los esquemas de suspensión existentes más simples: Utilizado en suspensiones traseras de autos con tracción trasera, este esquema consta del propio semi-eje actuando como brazo de suspensión, con su pivote ubicado en su junta respectiva adyacente al diferencial, y algún otro elemento encargado de otorgar soporte longitudinal. Este esquema, si bien es simple y economico, se caracteriza por sus numerosas desventajas, entre las que se destacan:

- (a) El pequeño radio de giro de la rueda debido a que su pivote, y por lo tanto, centro de rotación, es la junta ubicada en el diferencial, origina grandes cambios en el ángulo de inclinación de las ruedas durante el recorrido de la suspensión.
- (b) Alto centro de balanceo del vehículo, debido a ésta configuración particular. Por lo tanto, el efecto de levantamiento es acentuado en este tipo de ejes.
- (c) Por las razones anteriores, durante una curva los efectos combinados de ambas características levantan la parte trasera del auto y orientan las ruedas en un ángulo de inclinación desfavorable, reduciendo la capacidad del eje de generar fuerzas laterales y ocasionando problemas serios de estabilidad direccional y control.

3.3.2 Suspensiones No Independientes (Ejes Rígidos y Semi Rígidos)

Estos esquemas de suspensión se encuentran entre los más antiguos, incluso algunos heredados directamente de la época en las cuales los vehículos eran carretas tiradas por caballos, Si bien no son esquemas altamente especializados ni tecnológicamente vanguardistas, cuentan entre sus ventajas el ser económicos y simples. Si bien se utilizaron ampliamente en tiempos pasados, hoy en día su uso está limitado a vehículos comerciales, todo terreno y utilitarios de gama baja, aunque progresivamente se están abandonando estos esquemas a favor de las suspensiones independientes.

Las ventajas inherentes a este tipo de suspensiones son:

- (a) Simplicidad y economía en el diseño y manufactura.
- (b) No hay cambio en la anchura de vías, ni cambio en la convergencia-divergencia, ni en el camber de las ruedas durante el recorrido de la suspensión.
- (c) Debido a ésta razón, el desgaste de los neumáticos es muy bajo.
- (d) Como no hay cambio en el camber de las ruedas durante una curva, la generación de fuerzas en los neumáticos sólo se ve afectada por la transferencia de carga.
- (e) Óptima transferencia de fuerzas debido a la gran distancia entre los elementos elásticos.
- (f) Las propiedades de elasticidad del esquema bajo una fuerza lateral pueden ser ajustadas para causar tendencias subvirantes o sobrevirantes, según convenga.

Sin embargo, como se mencionó anteriormente, existen una serie de desventajas típicas de estos sistemas de suspensión, aunque los diseños modernos han podido minimizarlas con la finalidad de mejorar su comportamiento. Entre ellas están:

- (a) Influencia mútua entre las ruedas de un mismo eje.

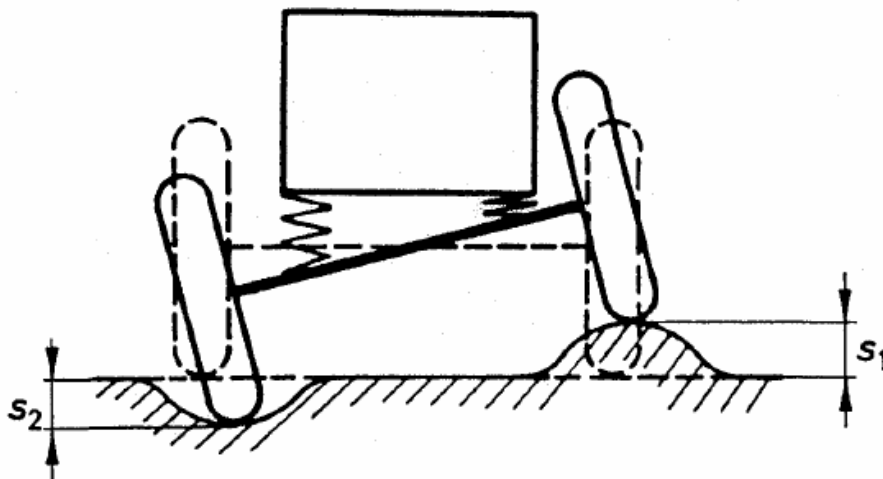


Fig. 3.8 Influencia mutua de ambas ruedas en un eje rígido.
(Fuente: Reimpell. "The Automotive Chassis: Engineering Principles", 2001)

- (b) Un gran espacio requerido sobre el eje para permitir el libre movimiento del mismo durante el recorrido de la suspensión.
- (c) Potencial limitado para ajustar finamente la cinemática y elasto-cinemática del sistema.
- (d) Masa no suspendida elevada, especialmente si el diferencial forma parte del esquema, lo cual deteriora el comportamiento del vehículo, especialmente en pavimento ondulado.
- (e) La carga sobre los neumáticos cambia durante la aceleración del vehículo si el diferencial forma parte del eje.

3.3.2.1 Hotchkiss

Este esquema particular consta del eje rígido, ya sea motriz o no, y los elementos activos del mismo, amortiguadores y dos ballestas longitudinales, las cuales además de cumplir las funciones de elemento elástico, son las encargadas de mantener el eje restringido en las direcciones longitudinal y lateral y de absorber las fuerzas y momentos provenientes de los neumáticos.

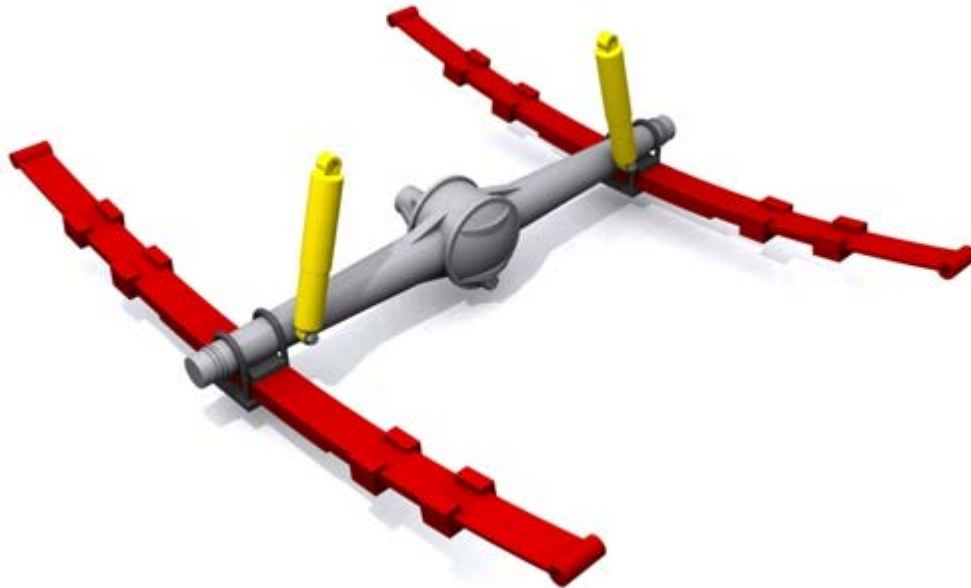


Fig. 3.9 Esquema Hotchkiss.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

3.3.2.2 Cuatro eslabones

En este esquema, a diferencia del anterior, si existen eslabones que conectan al eje con el chasis del vehículo, y los cuales son responsables de controlar los movimientos del mismo, y de absorber las fuerzas y momentos reactivos provenientes de los neumáticos y debido a la aceleración, frenado y virado del vehículo.



Fig. 3.10 Esquema de cuatro barras.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

Una variante de este arreglo reduce los dos puntos centrales de anclaje a uno sólo, con lo cual los dos eslabones centrales pasan a convertirse en un solo elemento triangulado.

Si bien en éste sistema la particular posición de los elementos permite que las fuerzas laterales sean efectivamente transmitidas al chasis, en ocasiones existen configuraciones que no permiten la transmisión de dichas fuerzas al chasis y, por lo tanto, el eje es libre de moverse lateralmente. Para evitar eso y restringir al eje lateralmente, existen otras configuraciones adicionales a las ya descritas que solventan este inconveniente. Entre ellas están la barra Panhard y el arreglo de Watts.

3.3.2.2.1 Barra Panhard

En este arreglo, además de los eslabones ya mencionados, se añade al sistema un quinto elemento: Una barra transversal, anclada en un extremo al chasis del vehículo y en el otro extremo al eje rígido, es la encargada de recibir las fuerzas laterales reactivas y de restringir al eje lateralmente.



Fig. 3.11 Esquema de cuatro barras con barra Panhard.
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

El comportamiento de un esquema equipado con esta barra es asimétrico; debido a que está anclada al chasis en uno de sus extremos, la barra pivota sobre éste, haciendo que el extremo anclado al eje y, por lo tanto, el eje se mueva siguiendo un arco de círculo y no una línea vertical como se desearía. Este comportamiento característico de los arreglos con barras Panhard hacen que el comportamiento del vehículo en las curvas sea asimétrico, dependiendo del sentido de la curva, por lo cual los diseños modernos incluyen barras de la mayor longitud posible con la finalidad de aumentar el radio del arco y así asegurar la mínima desviación posible con respecto a la línea vertical antes comentada.

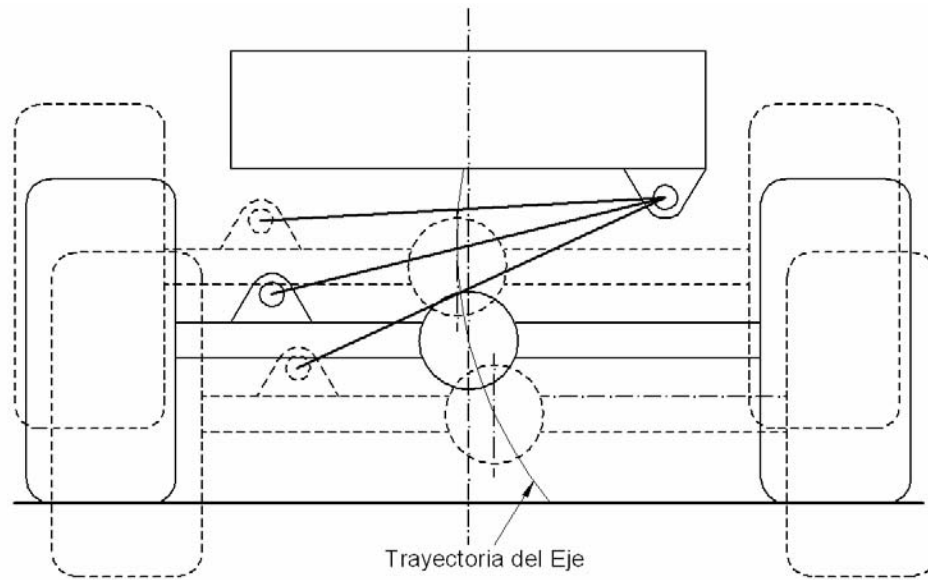


Fig. 3.12 Trayectoria de un eje rígido con barra Panhard, en desplazamiento vertical puro.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

3.3.2.2 Arreglo de Watts

En este arreglo la solución es distinta, aunque la finalidad es la misma; se agregan dos eslabones más un tercer elemento que pivota en la parte central del eje y está anclado a los extremos de los dos eslabones, pivotantes en el chasis. Existen dos configuraciones, una de eslabones opuestos, y otra de eslabones colaterales.

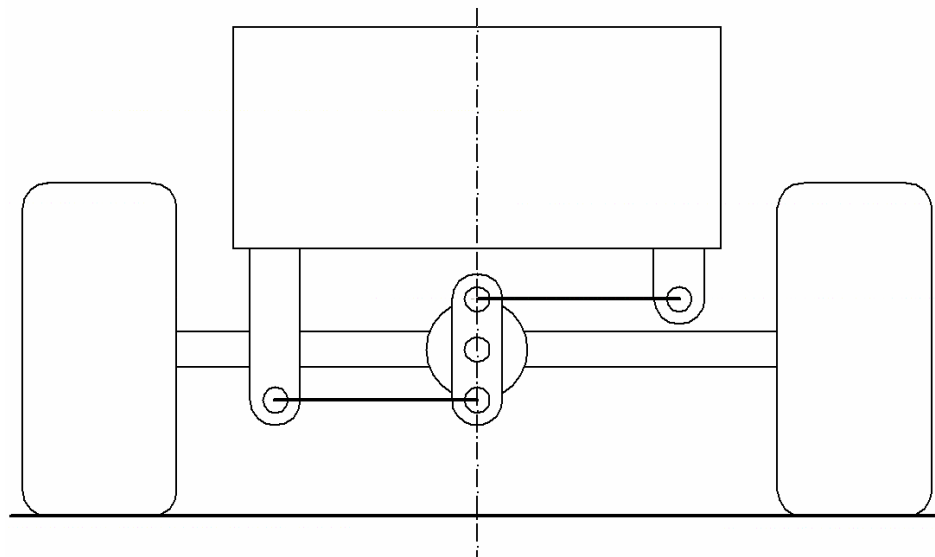


Fig. 3.13 Arreglo de Watts, configuración opuesta.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

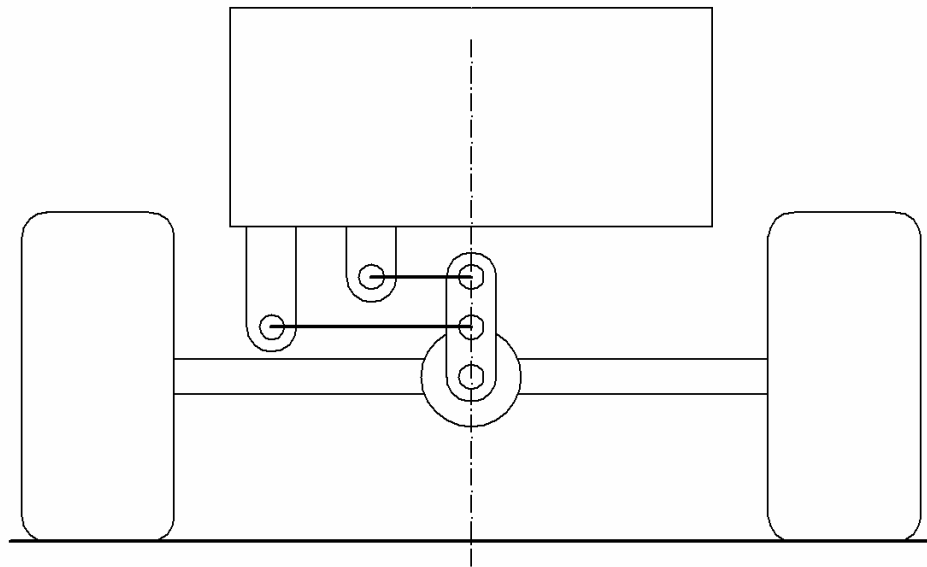


Fig. 3.14 Arreglo de Watts, configuración colateral.
(Fuente: Elaboración, propia 2008)

Esta disposición presenta ventajas con respecto a la barra Panhard, ya que en la proximidad del centro del recorrido de la suspensión, cuando los brazos son casi paralelos, la trayectoria descrita por el mismo tiene una desviación despreciable con respecto a una línea recta vertical, pero cuando los brazos están apreciablemente inclinados uno con respecto al otro, la desviación con respecto a dicha vertical empieza a ser de importancia. Para ambos esquemas, la condición que garantiza este comportamiento es que la relación que deben seguir las distancias del pivote ubicado en el eje a los pivotes en los eslabones, denotadas como a y b , y las longitudes de los eslabones, denominadas A y B , es la siguiente: El cociente entre las longitudes a y b debe ser igual al cociente entre las longitudes A y B ; dicho de otra forma: $a/b = A/B$.

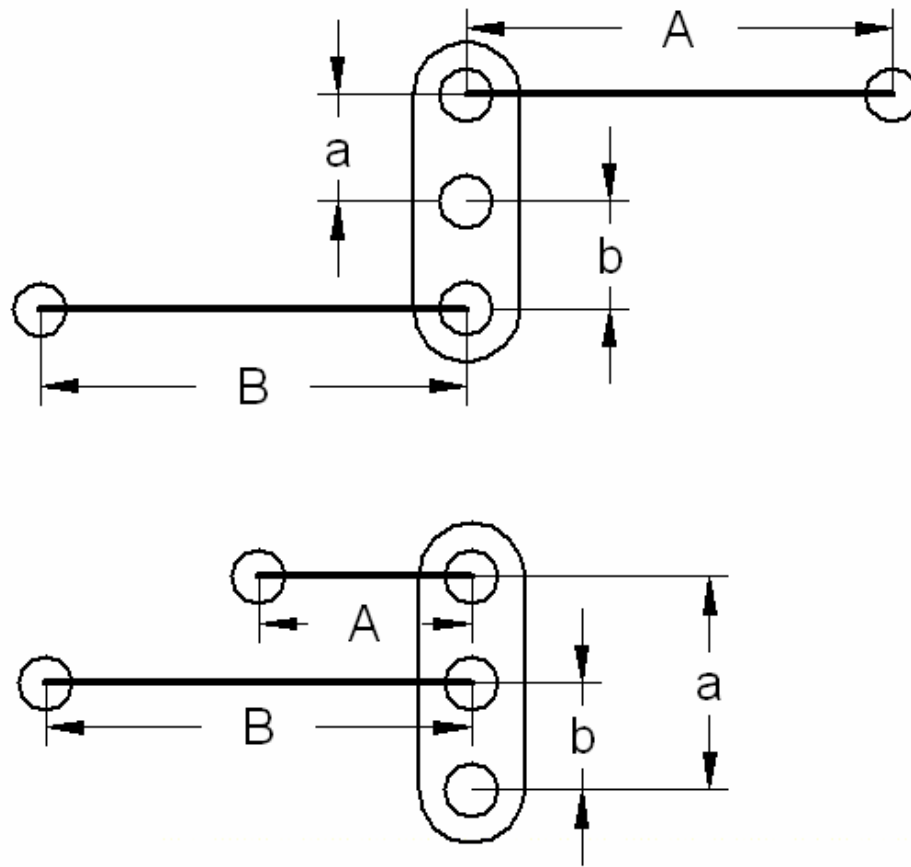


Fig. 3.15 Longitudes relativas a los arreglos de Watts
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

3.3.2.3 Eje De Dion

En este esquema particular de suspensión, el diferencial ya no forma parte del esquema sino que está fijo al chasis, sin embargo, aún existe conexión física entre las ruedas, mediante un eje (Eje De Dion) que se encarga también de restringirlas en el sentido longitudinal y lateral. La única ventaja que presenta éste diseño con respecto a los ejes rígidos convencionales es la reducción de la masa no suspendida, por la exclusión del diferencial del esquema de suspensión. Sin embargo, debido a que el eje debe pivotar en el chasis, este elemento puede contribuir de manera negativa agregando una magnitud significativa de fricción.



Fig. 3.16 Eje De Dion
(Fuente: www.carbibles.com, 2007)

3.4 Sistema de Ejes

Con la finalidad de establecer un estándar para el estudio de la dinámica vehicular en general, al igual que en el caso de los neumáticos se define un sistema de coordenadas ortogonal para la masa suspendida del vehículo. La convención de ejes SAE establece que el eje X apunta hacia la parte frontal del vehículo, el eje Y apunta a la derecha del vehículo, y el eje Z siguiendo la regla de la mano derecha, apunta hacia la parte inferior del vehículo. En el sistema ISO, el eje Y apunta a la izquierda del vehículo, y el eje Z siguiendo la regla de la mano derecha, apunta hacia la parte superior del vehículo. Por lo general, el origen de éste sistema de coordenadas se ubica en la intersección del eje de balanceo con el plano transversal en el cual está ubicado el Centro de Gravedad del vehículo, sin embargo, por razones de conveniencia, puede ubicarse dicho origen en cualquier otro lugar.

Bajo este sistema de coordenadas, los movimientos y fuerzas que ocurren en la dirección del eje X representan la dinámica longitudinal del vehículo; la dinámica lateral del mismo viene representada por los movimientos y fuerzas que ocurren en la dirección del eje Y y aquellos que tienen la dirección del eje Z se le conocen como dinámica vertical del vehículo; De manera similar, a las rotaciones cuyas direcciones

son paralelas a los de los ejes X , Y y Z se le denominan respectivamente Balanceo, Cabeceo y Giro. En lo sucesivo, se utilizara el sistema de ejes SAE como referencia.

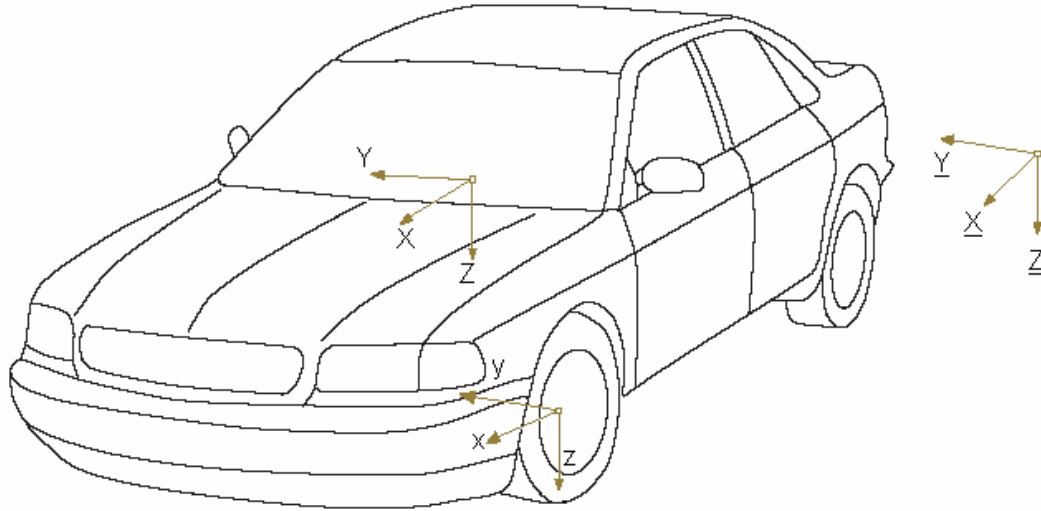


Fig. 3.17 Sistema de ejes utilizado en dinámica vehicular.
(Fuente: Rill, Georg. **“Vehicle Dynamics, Lecture Notes”**, 2001
[Modificado por los autores al sistema de ejes SAE])

Adicional a este sistema de coordenadas anclado al vehículo, es necesario definir un sistema de coordenadas fijo a tierra, bajo el cual se referenciarán los movimientos del vehículo. Éste se ubica en cualquier lugar que sea de conveniencia, respetando la regla de la mano derecha y con el eje $\underline{Z}$ apuntando hacia abajo; incluso puede ser coincidente con el origen de coordenadas del vehículo en un instante determinado, p. ej., al inicio de la observación y/o estudio que se desee realizar. Con respecto a este sistema de coordenadas, se definen los siguientes ángulos:

- (a) Ángulo de Orientación del vehículo (Ψ): Es aquel ángulo comprendido entre la proyección del eje X del vehículo en el plano $\underline{X}$ - $\underline{Y}$ del sistema fijo a tierra, y el eje $\underline{X}$ de éste último. Es positivo en sentido anti-horario.
- (b) Ángulo de Trayectoria (v): Es el ángulo comprendido entre la proyección del vector velocidad del vehículo en el plano $\underline{X}$ - $\underline{Y}$ del sistema fijo a tierra, y el eje $\underline{X}$ de éste último. Es positivo en sentido anti-horario.

- (c) Ángulo de Deriva (β): Es el ángulo comprendido entre la proyección del vector velocidad del vehículo en el plano $\underline{X}$ - $\underline{Y}$ del sistema fijo a tierra, y el eje X del vehículo. Es positivo en sentido horario, y siempre se cumple que:

$$\nu = \psi + \beta \quad [\text{radianes}] \quad (3.1)$$

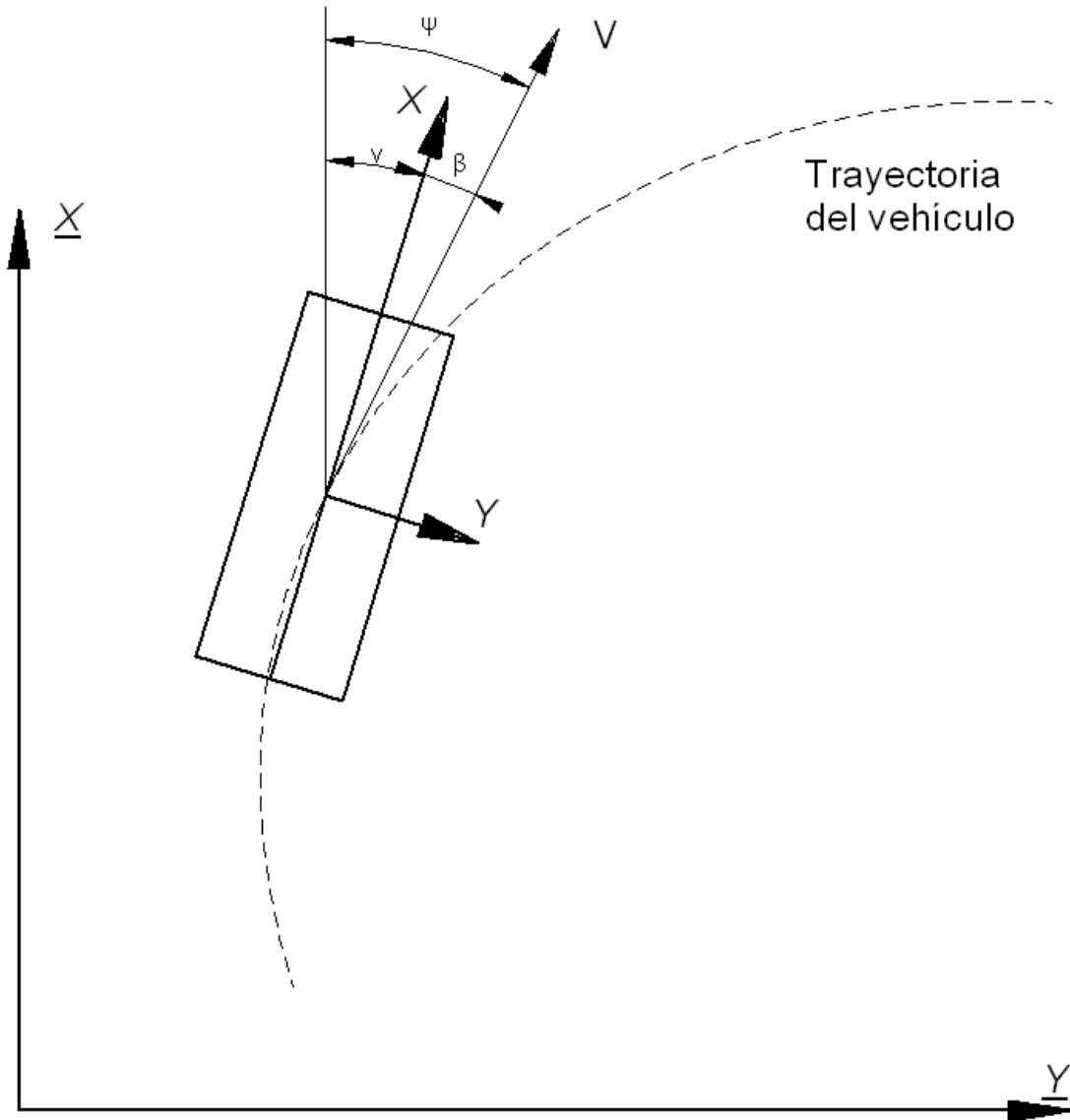


Fig. 3.18 Ángulos de orientación, trayectoria y deriva

(Fuente: Elaboración propia, basada en “[SAE J670e] Vehicle Dynamics Terminology”, 1976)

3.5 Cinemática de la Suspensión

Como se comentó antes, una de las funciones del sistema de suspensión es controlar el movimiento de las ruedas debido a las variaciones de carga y a las variaciones en el perfil del camino, y mantener la posición de la rueda respecto al pavimento dentro de un rango óptimo de funcionamiento de los neumáticos, con la finalidad de asegurar un comportamiento adecuado del vehículo y maximizar la capacidad de adherencia del mismo bajo toda circunstancia. Sin embargo, antes de poder escoger determinado esquema asegurando que es el que otorgará mejores prestaciones dinámicas al vehículo, es necesario comprender la manera en la cual éstos sistemas cumplen sus funciones.

3.5.1 Centros de balanceo y cabeceo cinemáticos.

Como ya se definió antes, el centro de balanceo de un sistema de suspensión puede considerarse como el centro instantáneo de rotación de la masa no suspendida con respecto al pavimento. Ya que las suspensiones están ancladas al chasis y mediante un análisis cinemático de los elementos que componen dicho sistema se puede conseguir el centro instantáneo de rotación de cada rueda con respecto al chasis; el teorema de Kennedy-Arronhold nos permite conseguir el centro instantáneo de rotación de cada uno de los extremos del chasis con la intersección de las rectas que se producen conectando los centros instantáneos de rotación de cada rueda con el centro del área de contacto de la rueda respectiva.

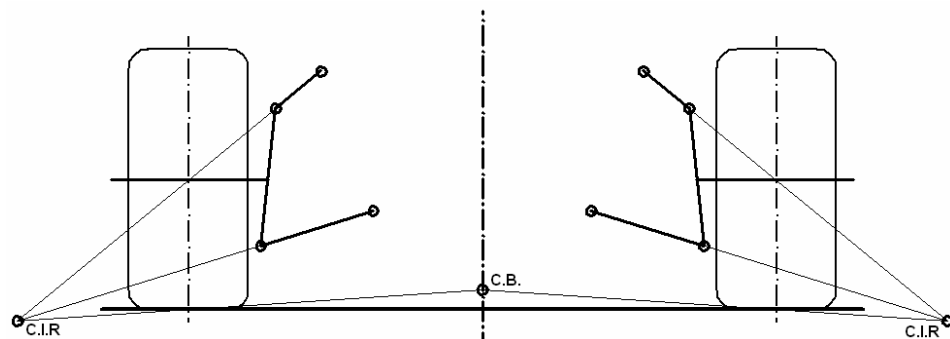


Fig. 3.19 Centros Instantáneos de Rotación Frontales y Centro de Balanceo para una configuración de dobles brazos.

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

En el caso de ejes rígidos, despreciando la rotación que pueda presentarse en el eje debido a la elasticidad de los neumáticos, el centro de balanceo del vehículo coincide con el centro instantáneo de rotación del chasis con respecto al eje, el cual es el mismo que el centro instantáneo de rotación del eje con respecto al vehículo, y puede determinarse siguiendo un análisis detallado de la cinemática de los elementos que componen el esquema particular. Es importante destacar que dicho centro de balanceo siempre se supondrá ubicado en un plano transversal frontal que pase por el centro de las ruedas de un mismo eje del vehículo, y es libre de moverse en este plano. El centro de balanceo de cualquiera de los ejes del vehículo no es estático, sino que cambia con el recorrido de la suspensión, tanto para suspensiones independientes como para ejes rígidos.

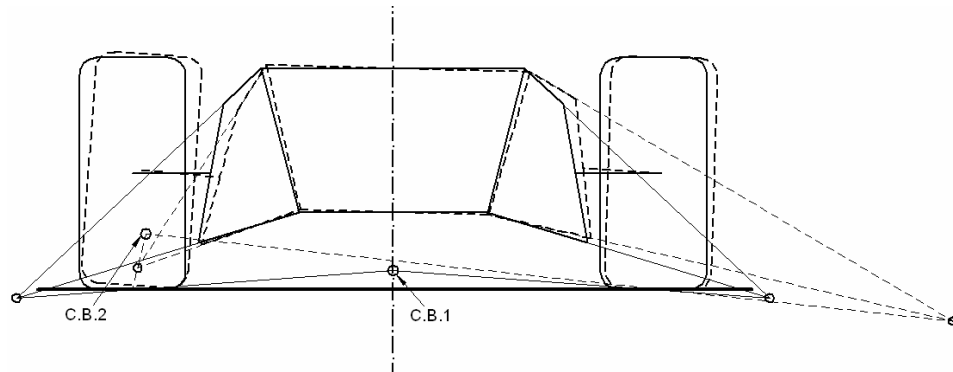


Fig. 3.20 Movimiento del centro del balanceo con el recorrido vertical de las ruedas.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Como se mencionó anteriormente, en realidad más que un centro de balanceo para cada uno de los ejes de un vehículo, existe un eje de balanceo, sobre el cual el auto se balancea cuando se aplica una fuerza lateral, debido a la aceleración centrípeta en una curva o de cualquier perturbación externa (vientos, inclinación lateral del camino, etc). Si bien la importancia de este parámetro en el diseño de suspensiones cobra relevancia cuando se consideran fuerzas, cinemáticamente es importante establecer una geometría de suspensión tal que, en vista de la imposibilidad de fijarlo y hacerlo inamovible, tenga desplazamientos acordes con la aplicación que se le dará al vehículo, considerando la transmisión de fuerzas a través

de los elementos de suspensión al chasis, debido a la función que desempeña este parámetro en dicho fenómeno, como se explicará posteriormente.

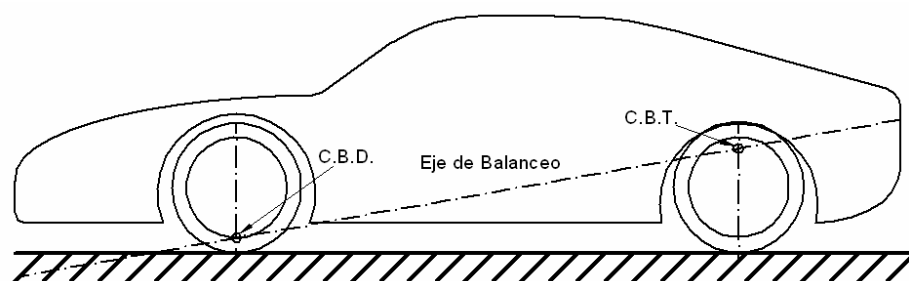


Fig. 3.21 Eje de balanceo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Al igual que en el caso de los centros de balanceo en un plano transversal frontal al vehículo, también existen centros de cabeceo en planos laterales transversales al eje del vehículo, debido a que las ruedas tienen un movimiento tridimensional más que bidimensional. En este caso los centros instantáneos de rotación de las ruedas existen en un plano longitudinal paralelo al plano de simetría del vehículo y que pasa por el centro de las áreas de contacto de las ruedas de un mismo lado del vehículo, en caso de vehículos que no tienen igual ancho de vías, se escoge un plano que esté ubicado a igual distancia del centro de las áreas de contacto. Al igual que los centros de balanceo, los centros de cabeceo se consiguen intersecando las rectas que unen dichos centros instantáneos de rotación con el centro del área de contacto de la respectiva rueda, y de igual manera, existe un eje de cabeceo del vehículo, sobre el cual la masa suspendida del mismo gira cuando se le aplica una fuerza longitudinal como consecuencia de una acción de aceleración o frenado. Al contrario del eje de balanceo, éste eje es horizontal cuando el vehículo está en reposo ó a velocidad constante ó cuando se somete a una fuerza longitudinal pura y la suspensión de cada lado del vehículo tiene el mismo recorrido, si no se cumple esto, dicho eje puede tomar cualquier orientación relativa al vehículo.

Cuando el centro de cabeceo se mantiene horizontal (bajo condiciones de fuerzas longitudinales puras), se definen las configuraciones Anti-Cabeceo. Estas configuraciones se refieren a la orientación relativa de los eslabones y/o brazos de

suspensión para evitar o minimizar los movimientos de cabeceo provocados por fuerzas longitudinales actuando en el vehículo (aceleración o frenado); por esta misma razón se la denomina antis: *anti-hundimiento*, para evitar el movimiento descendente de la parte frontal del vehículo en frenado, y en la parte trasera en vehículos de tracción trasera bajo aceleración; y *anti-levantamiento*, para evitar el movimiento ascendente de la parte trasera de los vehículos bajo frenado, y en la parte frontal de los vehículos de tracción delantera bajo aceleración.

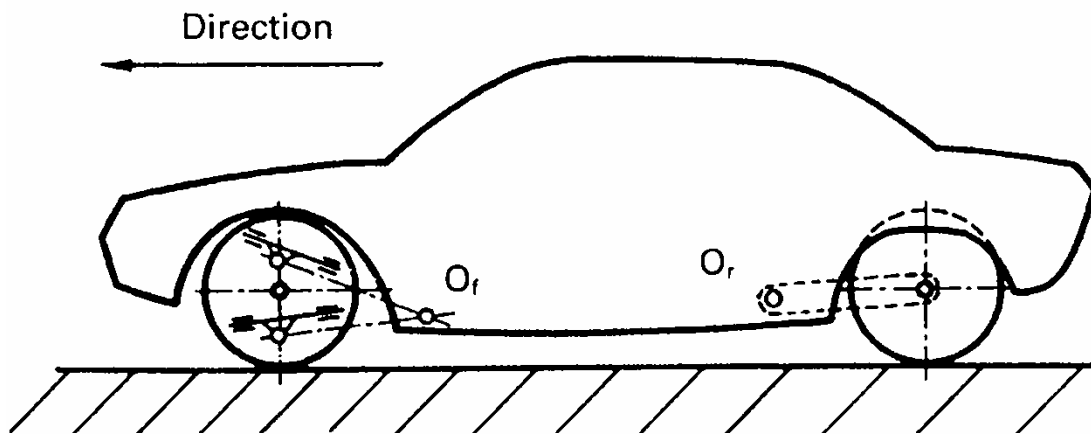


Fig. 3.22 Centros Instantáneos de Rotación Laterales
(Fuente: Reimpell. “**The Automotive Chassis: Engineering Principles**”, 2001)

Debido a la presencia de dicho eje de cabeceo, y al igual que ocurre con el eje de balanceo, las fuerzas reactivas debido a fuerzas longitudinales creadas en la rueda serán absorbidas tanto por los elementos pasivos de suspensión (brazos), como por los elementos activos de la misma (elementos elásticos y amortiguadores) en la proporción que dicho efecto anti-cabeceo esté presente.

Para el caso de esquemas de suspensión que absorban torques de manejo y/o frenado (vehículos con ejes motrices rígidos o frenos montados en la suspensión), estos efectos se calculan con respecto al centro instantáneo de rotación relativo al centro del área de contacto de la rueda. Si por el contrario el esquema sólo absorbe fuerzas longitudinales (si los frenos están montados en el chasis o el eje motriz tiene

esquemas de suspensión independientes), el efecto se calcula relativo al centro de la rueda.

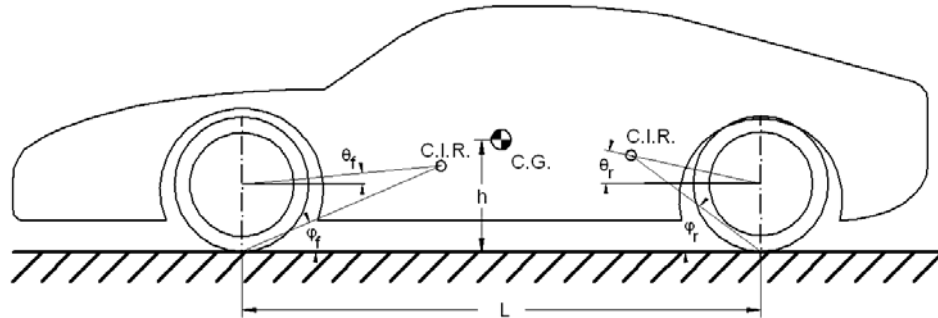


Fig. 3.23 Ángulos necesarios para el cálculo de las propiedades de anti-hundimiento y anti-levantamiento.

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

En cualquier caso, la formulación que permite el cálculo de las propiedades de anti-hundimiento y anti-levantamiento es la siguiente:

$$\%anti - levantamiento (frontal) = \frac{L \tan(\alpha_f^*)}{h} \quad [\%] \quad (3.2)$$

$$\%anti - hundimiento (frontal) = \frac{L \tan(\alpha_f^*)}{h} \%dist \text{ frenado delantera} \quad [\%] \quad (3.3)$$

$$\%anti - levantamiento (trasero) = \frac{L \tan(\alpha_r^*)}{h} \%dist \text{ frenado trasera} \quad [\%] \quad (3.4)$$

$$\%anti - hundimiento (trasero) = \frac{L \tan(\alpha_r^*)}{h} \quad [\%] \quad (3.5)$$

Donde:

α_f y α_r dependen del tipo de configuración particular, como se explicó anteriormente (θ para esquemas de suspensión que no absorben torques de aceleración y/o frenado; ϕ para esquemas que sí lo hagan) [rad].

h es la altura del centro de gravedad de la masa suspendida del vehículo. [m]

L es la batalla de vehículo. [m]

El centro de cabeceo en la vista lateral del vehículo, así como el centro de balanceo, dependen de cada esquema particular. Sin embargo, mediante

procedimientos cinemáticos es posible hallar dichos centros fácilmente para cada esquema.

3.5.2 Relaciones de Movimiento

En los esquemas de suspensión actuales, debido a requisitos de espacio y distribución de los elementos, los elementos activos no actúan directamente sobre la rueda, sino que lo hacen con un brazo de palanca con respecto a la rueda, por lo general, inferior al brazo de palanca de la rueda misma.

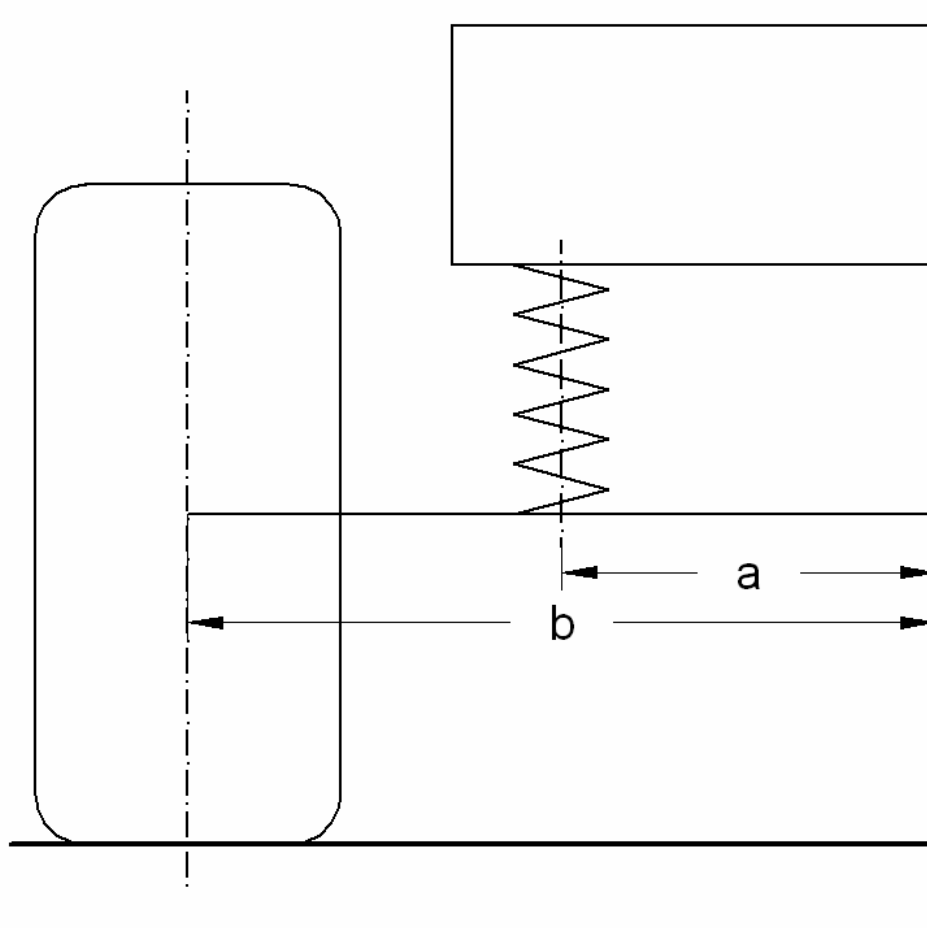


Fig. 3.24 Diferentes radios de acción para la rueda y el elemento activo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tomando en cuenta un esquema de suspensión simple, como muestra la figura anterior, se tiene que la distancia desde el pivote hasta la rueda es b , mientras que la distancia desde el pivote hasta el elemento elástico es a , donde $b > a$, un desplazamiento vertical de la rueda originará un desplazamiento en el elemento elástico, dado por la relación:

$$\Delta y_{resorte} = \Delta y_{rueda} \frac{a}{b} \quad [\text{m}] \quad (3.6)$$

Tomando en cuenta que el trabajo efectuado por la fuerza en la rueda es el mismo que el efectuado por la fuerza del resorte, la fuerza respectiva aplicada en la rueda debido al desplazamiento del resorte viene dada por:

$$F_{rueda} \Delta y_{rueda} = F_{resorte} \Delta y_{resorte} \quad [\text{Nm}] \quad (3.7)$$

$$F_{rueda} = \frac{F_{resorte} \Delta y_{resorte}}{\Delta y_{rueda}} \quad [\text{N}] \quad (3.8)$$

$$F_{rueda} = \frac{F_{resorte} \Delta y_{rueda} \frac{a}{b}}{\Delta y_{rueda}} \quad [\text{N}] \quad (3.9)$$

$$F_{rueda} = F_{resorte} \frac{a}{b} \quad [\text{N}] \quad (3.10)$$

Sin embargo, el punto de interés es la relación entre la constante elástica del elemento elástico, con la constante elástica del mismo medida en la rueda:

$$\Delta y_{rueda} = \Delta y_{resorte} \frac{b}{a} \quad [\text{m}] \quad (3.11)$$

Combinando las ecuaciones, y tomando que la constante de elasticidad es el cociente de la fuerza entre el desplazamiento, tenemos que:

$$K_{rueda} = \frac{F_{rueda}}{\Delta y_{rueda}} = \frac{F_{resorte} \frac{a}{b}}{\Delta y_{resorte} \frac{b}{a}} = K_{resorte} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad [\text{N/m}] \quad (3.12)$$

donde a la relación a/b se le denomina Relación de Movimiento(RM).

Para sistemas de suspensión reales, la relación de movimiento cambia con el desplazamiento de la rueda. Aunque en ciertas aplicaciones, como por ejemplo, en los

vehículos de carreras, el recorrido de la suspensión puede ser tan reducido como para considerar la relación de movimiento constante, en otras, tomar esta aproximación llevaría a un resultado erróneo como consecuencia de las diferencias significativas entre las relaciones de movimiento supuestas y las reales. En este caso, la relación entre la constante elástica del resorte y su equivalente en la rueda viene dada por:

$$K_{rueda} = F_{resorte} \left(\frac{\Delta RI}{\Delta y_{rueda}} \right) + K_{resorte} RM^2 \quad [\text{N/m}] \quad (3.13)$$

donde el término $\Delta RI/\Delta y_{rueda}$ es el cambio en el radio de instalación con respecto al desplazamiento de la rueda. Al primer término de esta ecuación se le denomina Relación Geométrica.

3.5.3 Variación dinámica de parámetros geométricos

Aunque en la práctica muchas veces los parámetros cinemáticos y geométricos del esquema de suspensión de un vehículo dado vienen establecidos y referenciados a la condición estática del vehículo, los mismos cambian conforme cambia el recorrido de la suspensión. Así, dichos parámetros, tales como la caída, avance, convergencia, entre otros, se ven alterados dinámicamente conforme cambie la posición relativa de la rueda al chasis, ya sea en altura debido al recorrido de la suspensión, o en orientación debido a un cambio proveniente del sistema de dirección del vehículo.

Los parámetros que cobran más relevancia conforme cambia la posición de la rueda al chasis son:

- (a) Variación de camber respecto al recorrido de suspensión.
- (b) Variación en el ángulo de orientación debido al recorrido vertical paralelo de ambas suspensiones, o rebote.
- (c) Variación en el ángulo de orientación debido al balanceo.

Éstos comportamientos por lo general se expresan como la desviación de dicho parámetro de su condición estática en función del recorrido de la suspensión.

3.5.4 Elasticidad de los elementos

Si bien lo expuesto hasta ahora tiene validez y es perfectamente aplicable a un sistema de suspensión real para su diseño y estudio, existe otro factor que aleja aún más a las suspensiones de un comportamiento ideal, y que tiene influencia en el desempeño general del vehículo. Los esquemas de suspensión, por razones de comodidad y criterios de ruido, vibraciones y aspereza (NVH por sus siglas en inglés) se aíslan del chasis del vehículo, instalando en los anclajes del mismo cojinetes e insertos de goma, de tal manera que éstos absorban en cierta medida vibraciones de alta frecuencia, y en general, proporcionan a los ocupantes del vehículo mayor comodidad de marcha. Dichos componentes se deforman conforme se aplican fuerzas a los mismos como consecuencia de las fuerzas generadas en los neumáticos, sin embargo, debido a las propiedades del material con el que están fabricados, su deformación es apreciable comparándola con la deformación de cualquier otro elemento pasivo de suspensión, tales como los brazos o eslabones, y por lo tanto, cambian la geometría de suspensión conforme ésta reacciona contra las variaciones de fuerzas en los neumáticos, en algunos casos levemente, en otros considerablemente

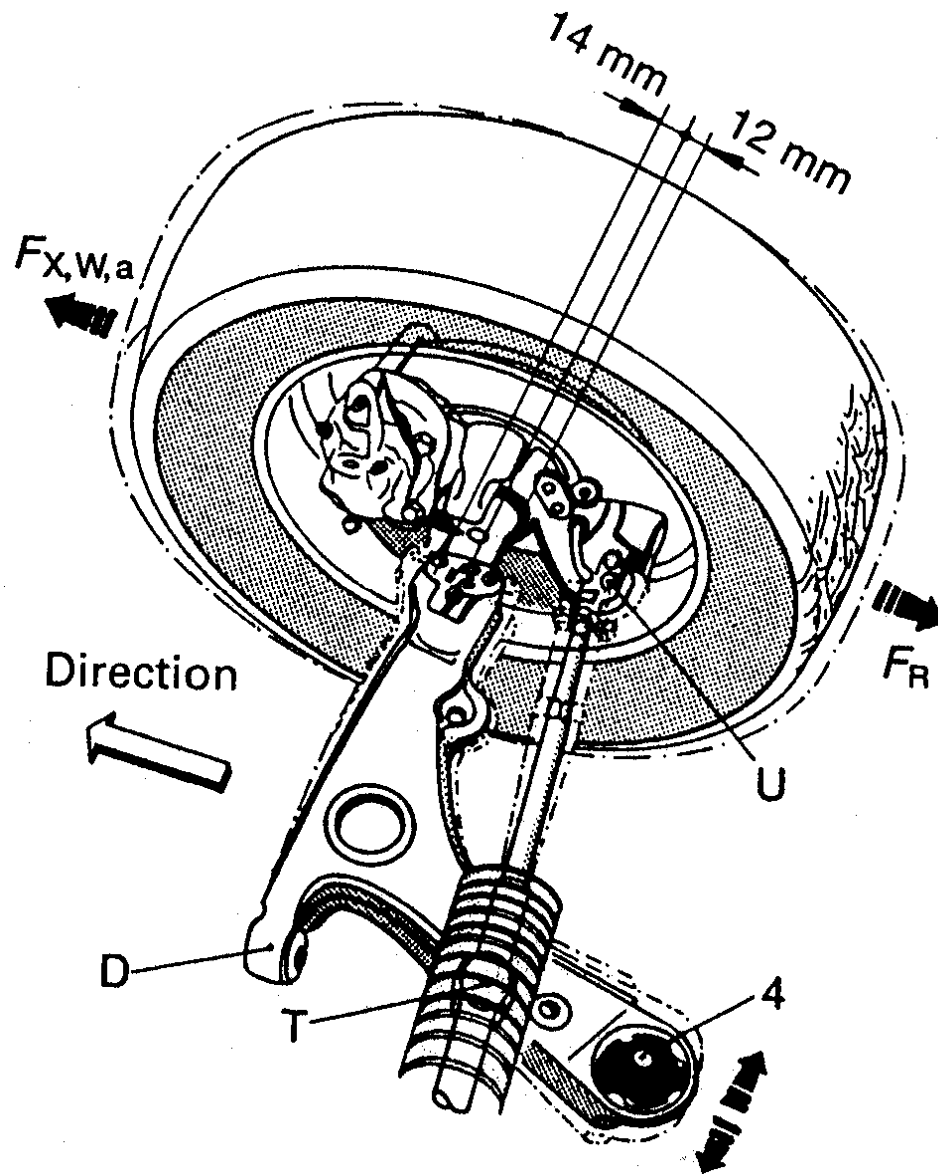


Fig. 3.25 Desplazamiento longitudinal de la rueda debido a la elasticidad de los elementos estructurales.

(Fuente: Reimpell. "The Automotive Chassis: Engineering Principles", 2001)

Aunque en algunos casos dicha elasticidad no es deseada por la manera en que afecta el desempeño del sistema de suspensión, en otros casos, el esquema cuenta como otro de sus parámetros a dicha elasticidad, ajustando ventajosamente comportamientos de dicho esquema que de otra manera no podrían ser alterados.

3.6 Dinámica de la suspensión

Hasta ahora se han definido de manera general los parámetros cinemáticos del sistema de suspensión y la manera en que éstos controlan el movimiento de las ruedas del vehículo con el fin de crear un comportamiento determinado en el mismo, también la suspensión se encarga de transmitir y controlar las fuerzas que se generan en el neumático y con ello aprovecharlas para dirigir el vehículo, por ello, es igualmente importante estudiar el comportamiento de los parámetros que influyen en dicha dinámica.

3.6.1 Definición dinámica de centros de balanceo y cabeceo.

Habiendo estudiado de forma general los centros de balanceo y cabeceo por medio de la cinemática y la influencia que tienen en el movimiento de la suspensión y del vehículo en una curva, es preciso ahora dar la definición de dichos centros mediante fuerzas.

Centro de balanceo: Es el punto en el plano transversal frontal que pasa a través del centro de contacto del par de ruedas de un mismo eje, y a su vez contenido en el plano medio del vehículo, en el cual las fuerzas laterales pueden ser aplicadas a la masa suspendida sin producir un desplazamiento angular (balanceo) de la misma.

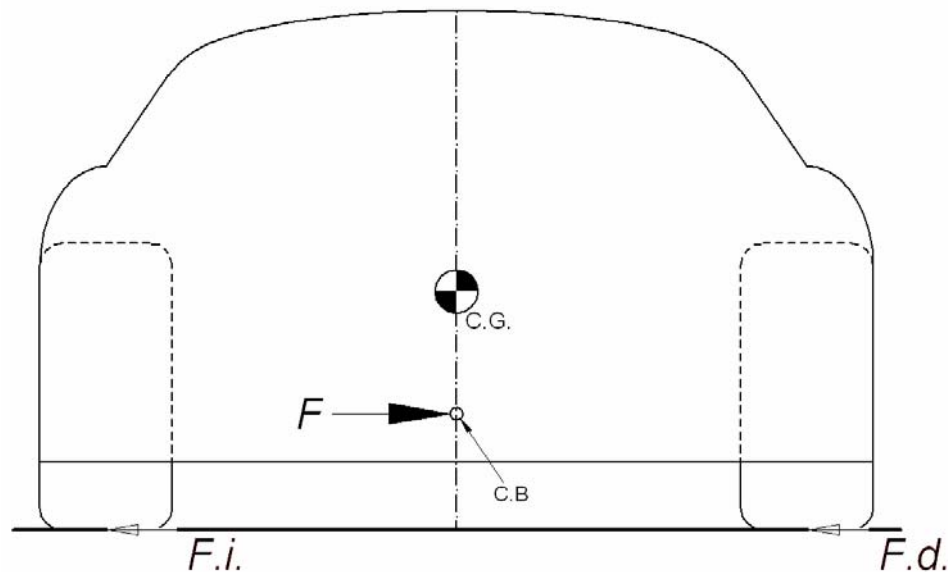


Fig. 3.26 Fuerzas laterales actuando en el centro de balanceo de un vehículo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Si bien esta definición establece que el centro de balanceo está equidistante de los centros de las ruedas, como se observó anteriormente, el centro de balanceo de un sistema de suspensión puede moverse lateralmente en el plano transversal, además también puede moverse verticalmente, por lo que es necesario tener cierta precaución al realizar la simplificación de suponer fijo el centro de balanceo en el plano de simetría del vehículo.

Una de las características fundamentales del centro de balanceo es que también es el punto a través del cual las fuerzas generadas en los neumáticos se transfieren a la masa suspendida del vehículo, y por lo tanto, además de determinar sobre que punto pivota el carro en un determinado instante, también determina cómo el mismo será afectado por las fuerzas laterales originadas por los neumáticos en una curva.

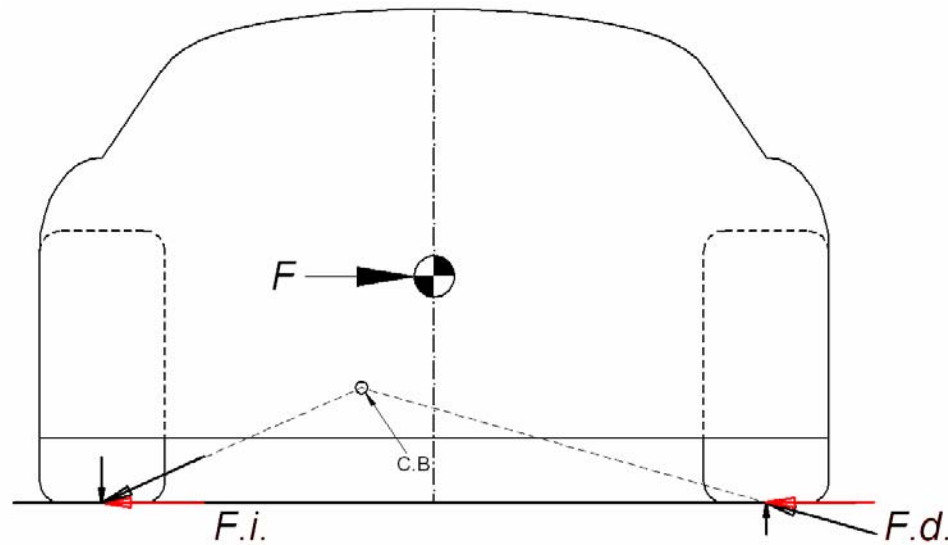


Fig. 3.27 Proyección de las fuerzas laterales que producen levantamiento.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Para el centro de cabeceo de cada lado del vehículo, como siguen el mismo comportamiento de los centros de balanceo, todo lo explicado aquí relativo a éstos últimos son aplicables a los primeros, tomando en cuenta que los centros de cabeceo se definen en planos longitudinales equidistantes al par de ruedas ubicados en un mismo lado del vehículo. Por lo tanto, su efecto se presenta bajo la presencia de fuerzas longitudinales.

3.6.2 Levantamiento

Este efecto consiste en el desplazamiento del chasis en función de una fuerza longitudinal o lateral aplicada al vehículo, como consecuencia de la altura de los centro de cabeceo o balanceo sobre el pavimento. Debido a su comportamiento análogo, sólo se explicará el efecto de los centros de balanceo. Si se considera el centro de balanceo del vehículo como el punto de aplicación de las fuerzas generadas en los neumáticos, cualquier fuerza lateral generada en los mismos será la componente horizontal de una fuerza resultante equivalente en dirección del centro de balanceo, con su componente vertical asociada; éstas fuerzas verticales son las responsables del desplazamiento vertical del chasis del vehículo, ya que dichas componentes tienen sentido opuesto según estén referidas a un lado u otro del auto, la diferencia entre el ángulo horizontal de la línea que une el centro de balanceo con el centro del área de contacto de cada neumático y la fuerza generada en cada neumático en función de sus condiciones (carga, ángulo de inclinación, etc) hacen que una de la componentes sea de mayor magnitud que la otra, originándose una fuerza neta que desplaza la masa en sentido vertical, por lo general hacia arriba; de allí el nombre que adopta este efecto.

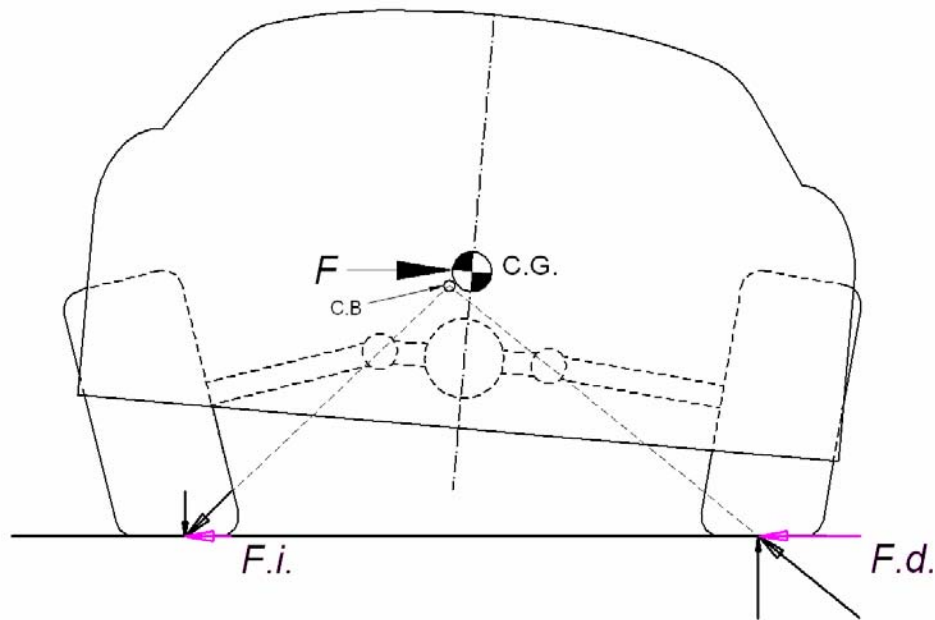


Fig. 3.28 Levantamiento producido por la proyección de las fuerzas laterales.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

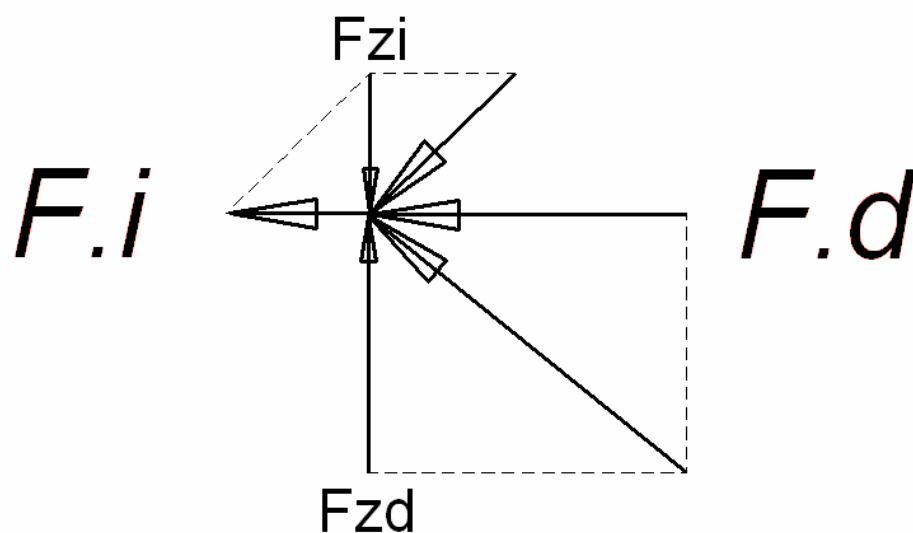


Fig. 3.29 Diagrama de fuerzas sobre el centro de balanceo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Como lo muestran la figuras (3.29) y (3.30), debido a las fuerzas generadas en los neumáticos, las fuerzas verticales difieren en magnitud, dando lugar a una fuerza resultante F en dirección ascendente en este caso, que levanta el chasis del vehículo.

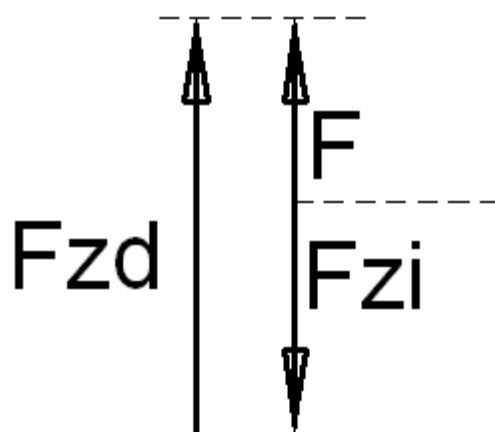


Fig. 3.30 Fuerza de levantamiento.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

3.6.3 Elementos elásticos:

Además de la importancia que tiene el control del movimiento de las ruedas conforme cambian las condiciones del terreno y la adecuada transmisión de fuerzas de los neumáticos al chasis para lograr un comportamiento determinado del vehículo, es también importante absorber las irregularidades del terreno y permitir cierta elasticidad en el sentido vertical de las ruedas del vehículo con el fin de permitir los comportamientos descritos anteriormente y generar comodidad en el vehículo, ya que éste si bien es un aspecto subjetivo, en algunos casos cobra relevancia a la hora de escoger un modelo de vehículo u otro, además de incrementar el nivel de confianza que el usuario pone en el vehículo, y por lo tanto, la seguridad del mismo. Aunque actualmente los elementos elásticos vienen en una variedad de diseños y configuraciones, su finalidad es la misma: proveer al vehículo de la elasticidad vertical requerida para su funcionamiento deseado. Actualmente se utilizan tres diseños: resortes helicoidales, barras de torsión ó resortes de hojas.

A pesar de que se considera que los elementos elásticos poseen una constante elástica lineal en todo su recorrido; en los extremos de desplazamiento del mismo se tiene que la constante elástica de los mismos cambia, ya sea aumentando o disminuyendo, e incluso pueden encontrarse dispositivos en los cuales las características no lineales de su curva de fuerza vs desplazamiento forman parte de los criterios bajo los cuales fueron diseñados y de sus características esenciales de funcionamiento.

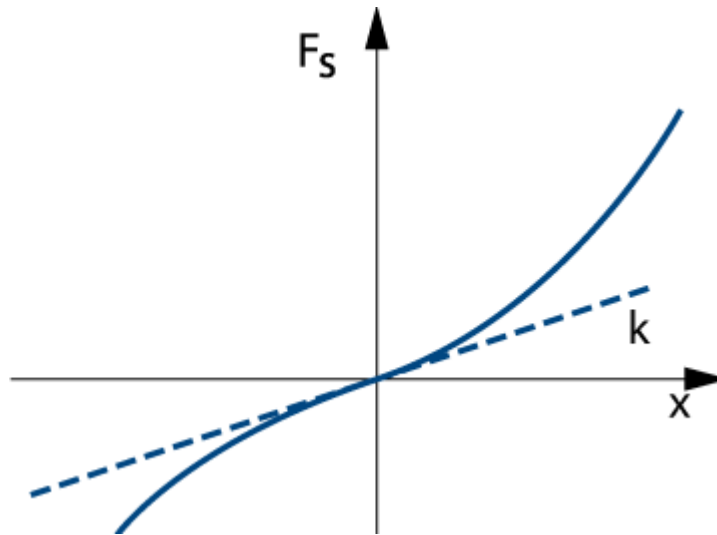


Fig. 3.31 Curva no lineal de fuerza de un resorte.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

3.6.4 Amortiguadores

Los amortiguadores son los dispositivos activos del sistema de suspensión encargados de disipar la energía cinética asociada a los desplazamientos de la rueda, y controlar dichos desplazamientos. Aunque en sus principios fueron construidos con discos de goma a presión que disipaban energía mediante la fricción seca existente entre dichos discos, actualmente los amortiguadores son exclusivamente hidráulicos, y consisten de un cilindro lleno de aceite, en cuyo interior se aloja un pistón provisto de varias válvulas por los cuales circula el aceite conforme el pistón se desplaza en el interior del cilindro. La circulación forzada del aceite por dichas válvulas es lo que le otorga a éstos amortiguadores hidráulicos sus características de generar una fuerza en función de la velocidad relativa entre sus extremos.

Existen varios diseños de amortiguadores, todos ellos con sus características particulares de funcionamiento que los hace más o menos indicados bajo ciertas condiciones; estos diseños son: Amortiguadores de doble tubo y amortiguadores monotubo, ambos presurizados o no presurizados.

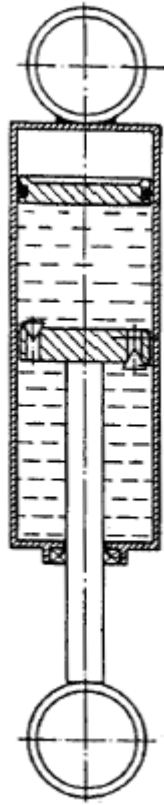


Fig. 3.32 Corte longitudinal de un amortiguador típico.
(Fuente: Reimpell. **“The Automotive Chassis, Engineering Principles”**, 2001
[Modificado por los autores para eliminar información no pertinente])

Teóricamente se considera a los amortiguadores como dispositivos que generan una fuerza proporcional a la velocidad relativa entre sus extremos; esto no es más que una suposición, ya que en la práctica difícilmente hay amortiguadores con características lineales. Por lo general, las características de fuerza de un amortiguador varían en función del sentido en el cual se desplazan, y debido a las características de las válvulas, se tiene una variedad de curvas características de amortiguadores, incluso hay modelos que varían la fuerza que generan en función del desplazamiento y la aceleración, además de la velocidad.

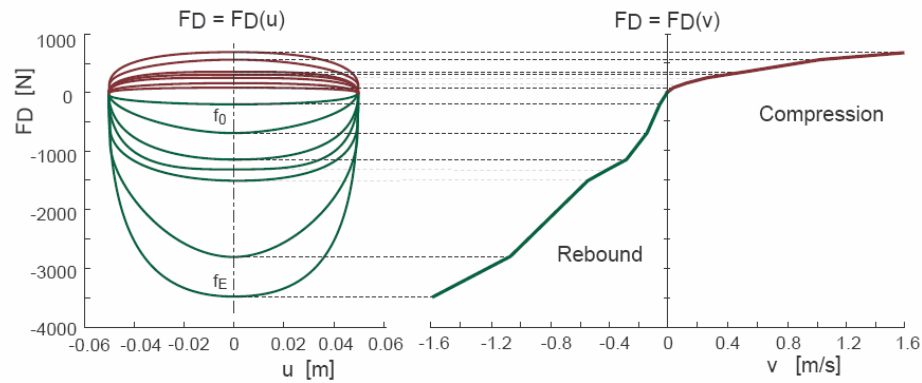


Fig. 3.33 Curva de fuerza de un amortiguador.
(Fuente: Rill, Georg. “**Vehicle Dynamics, Lecture Notes**”, 2001)

3.6.5 Barras Anti-Balanceo

Conocidas como barras estabilizadoras, las barras anti-balanceo, como su nombre lo dice, se utilizan para reducir el balanceo del vehículo en las curvas, y como un medio secundario de alterar el desempeño en curva de un vehículo.

Las barras estabilizadoras consisten en una barra de torsión transversal, anclada en ambos extremos a un elemento de la suspensión de cada lado, y en su parte intermedia al bastidor. Aunque la misma no cumple función alguna cuando las ruedas se mueven en el mismo sentido, como ocurre cuando se carga el vehículo, la barra entra en funcionamiento cuando las ruedas no tienen los mismos desplazamientos, como es, por ejemplo, cuando el vehículo entra en una curva.

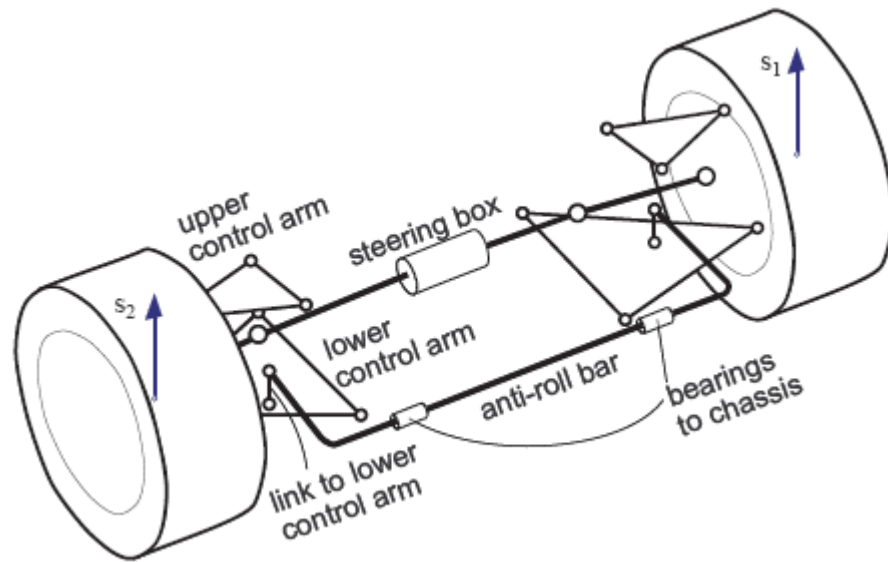


Fig. 3.34 Barra Antibalanceo.

(Fuente: Rill, Georg. “**Vehicle Dynamics, Lecture Notes**”, 2006)

Éstas barras, además de reducir el balanceo del vehículo en una curva, también alteran las cualidades dinámicas de un vehículo, modificando las características de subviraje o sobreviraje del mismo, como se verá más adelante.

3.6.6 Fricción de Coulomb (Seca)

Hasta ahora el análisis de los elementos se ha hecho ignorando los efectos de la fricción entre los distintos elementos que componen el sistema de suspensión, la misma siempre estará presente en todo esquema de suspensión, en mayor o menor medida, de acuerdo a las características particulares de cada sistema. Sin embargo, es tarea del diseñador mantener lo más baja posible la magnitud de las fuerzas de fricción seca, ya que tienen un efecto negativo en el comportamiento y correcto funcionamiento de todo sistema de suspensión, además de acelerar el desgaste de los distintos componentes conforme aumenta la magnitud de dicha fuerza.

3.7 Sistemas Activos y Semi-Activos

La única diferencia entre un sistema de suspensión convencional y aquellos activos y semi-activos, es que los elementos activos ajustan sus parámetros esenciales de funcionamiento conforme cambian las condiciones del terreno y la condición general del vehículo.

De manera general, los sistemas de suspensión pueden dividirse en 4 grandes grupos:

- (d) Suspensiones Pasivas: Disponen de elementos activos cuyas propiedades son invariantes en el tiempo.
- (e) Suspensiones Auto-Nivelantes: En estas suspensiones, los elementos elásticos son sustituidos por elementos neumáticos, los cuales ajustan sus propiedades elásticas en función de la carga aplicada sobre ellos.
- (f) Suspensiones Semi-Activas: Esta clase de suspensión posee elementos activos capaces de cambiar sus propiedades mediante controles externos al sistema. Estas suspensiones, también conocidas como adaptativas, por lo general disponen de varios ajustes discretos, sin embargo, aunque son capaces de ajustar sus propiedades automáticamente bajo ciertas condiciones, no lo hacen continuamente.
- (g) Suspensiones Activas: Al igual que las suspensiones semi-activas, en esta configuración los elementos activos cambian sus propiedades de acuerdo a las condiciones, sin embargo, lo hacen automática y continuamente. Esto se logra mediante actuadores hidráulicos en sustitución de éstos elementos (elementos elásticos y amortiguadores).

La ventaja de estos sistemas frente a los sistemas convencionales es que tienen la capacidad de mejorar notablemente la dinámica del vehículo en todas las condiciones. Sin embargo tienen como desventajas el peso añadido, su complejidad, alto costo, y baja confiabilidad.

CAPITULO IV

DINÁMICA VEHICULAR

Aunque todos los parámetros explicados hasta ahora tienen un efecto más o menos notable en la dinámica y comportamiento general del vehículo, no es el simple efecto que ejerce cada uno de ellos por separado en dicha dinámica lo que la define, sino la interacción entre todos y cada uno de ellos conforme cambian las condiciones de funcionamiento del vehículo como sistema, ésta combinación de parámetros es lo que define dicha dinámica, y determina el comportamiento característico de cada vehículo. Incluso cambios sutiles, y hechos comunes como cambiar de modelo de neumáticos pudiese tener efectos notables en la dinámica del vehículo, por lo que es importante cuantificar la magnitud de dichos cambios en función de la alteración realizada a éstos parámetros, decisivos y fundamentales al momento de abordar un problema de dinámica vehicular.

4.1 Dinámica Vertical

Este concepto engloba el estudio de las vibraciones en el vehículo y sus efectos en la comodidad de marcha de los ocupantes, en especial aquellas vibraciones asociadas con fuerzas y desplazamientos en la dirección vertical del vehículo. A pesar de que existen vibraciones en otras direcciones asociadas a distintos componentes del vehículo, tales como el conjunto motor-transmisión, este estudio se limitará a aquellas que afectan o son afectadas por el sistema de suspensión del vehículo.

4.1.1 Sistemas de Dos Grados de Libertad

Cualquier vehículo es un sistema de múltiples grados de libertad, a nivel básico el análisis de dinámica vertical se puede obtener de un sistema de dos grados de libertad, representado por dos masas conectadas entre sí por un resorte y un amortiguador viscoso, y una de esas masas conectada a tierra mediante un elemento elástico. Este modelo es también conocido como Modelo de Cuarto de Vehículo, y es utilizado para estudiar la influencia de las características de los elementos activos en el movimiento de la rueda.

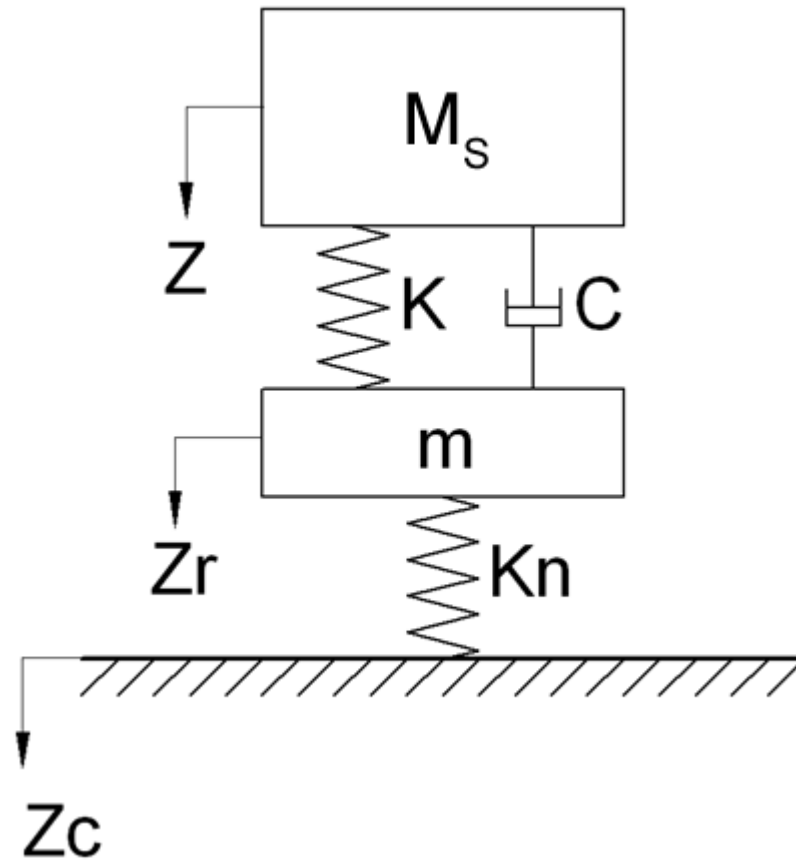


Fig. 4.1 Cuarto de vehículo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Aplicando diagramas de cuerpo libre a cada uno de las masas se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan este sistema:

$$M_s \ddot{Z} + C \dot{Z} + KZ = C \dot{Z}_r + KZ_r \quad [\text{N}] \quad (4.1)$$

$$m \ddot{Z}_r + C \dot{Z}_r + (K + K_n)Z_r = C \dot{Z} + KZ + K_n Z_c \quad [\text{N}] \quad (4.2)$$

donde:

M_s = Masa suspendida del vehículo (porcentaje de la misma soportada por dicha rueda). [kg]

C = Constante viscosa del amortiguador, medida en la rueda. [Ns/m]

K = Constante elástica del elemento elástico en la suspensión, medida en la rueda. [N/m]

K_n = Constante elástica del neumático. [N/m]

m = Masa no suspendida del vehículo, correspondiente a la rueda en estudio.
[kg]

De este modelo puede extraerse la siguiente información cuantitativa:

(e) La constante elástica efectiva para cada cuarto de vehículo:

$$K_e = \frac{KK_n}{K + K_n} \quad [\text{N/m}] \quad (4.3)$$

(f) La frecuencia natural vertical de cada cuarto de vehículo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_e}{M}} \quad [\text{rad/s}] \quad (4.4)$$

(g) La frecuencia natural amortiguada vertical:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad [\text{rad/s}] \quad (4.5)$$

donde ξ es el factor de amortiguación y viene dado por:

$$\xi = \frac{C}{\sqrt{4K_e M}} \quad [\text{Adimensional}] \quad (4.6)$$

Es importante destacar que en vehículos modernos la frecuencia natural varía entre 1Hz para sedanes grandes hasta 2,5Hz en deportivos, y la relación de amortiguamiento desde 0,2 a 0,4 respectivamente.

Aunque en este modelo sólo se puede estudiar la dinámica vertical de una parte del vehículo, es útil para determinar la respuesta del sistema a fuerzas externas aplicadas en cualquiera de los cuerpos (masas suspendida, masa no suspendida), así como a variaciones de cualquier tipo en el perfil del pavimento y su efecto en ambos. Sin embargo, como no describe por completo los distintos movimientos que tiene el vehículo como cuerpo rígido, es necesario complementarlo con otro sistema de 2 grados de libertad (uno vertical y uno rotacional), el cual considera al vehículo como un cuerpo rígido, soportado por dos resortes en sus extremos, ignorando masas no suspendidas y efectos de amortiguación, con el fin de considerar en conjunto los movimientos verticales puros y los de cabeceo. La figura (4.2) muestra el modelo:

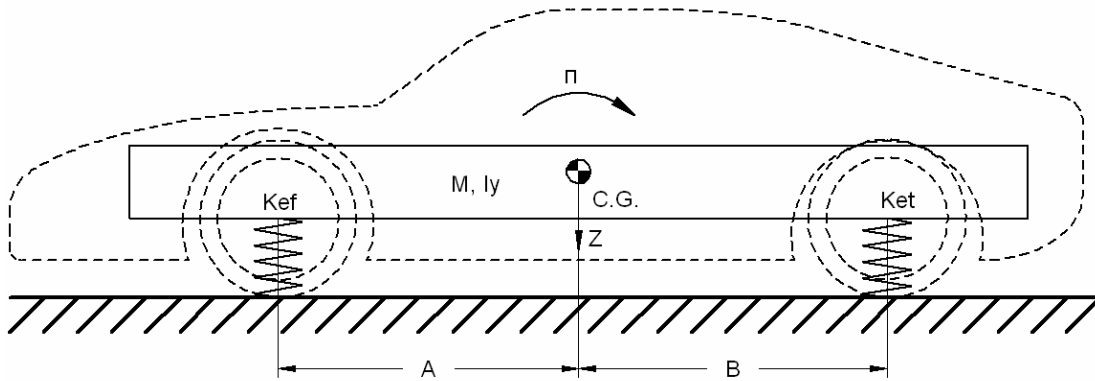


Fig. 4.2 Modelo de dos grados de libertad para considerar movimientos de cabeceo del vehículo.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

donde los parámetros de importancia son:

M = Masa del vehículo. [kg]

I_y = Inercia de la masa suspendida alrededor del eje Y. [kg m²]

A = Distancia desde el eje frontal al centro de gravedad. [m]

B = Distancia desde el eje trasero al centro de gravedad. [m]

K_{ef} = Constante elástica del eje frontal (ambas ruedas). [N/m]

K_{et} = Constante elástica del eje trasero (ambas ruedas). [N/m]

k = Radio de giro de la masa suspendida = $\sqrt{\frac{I_y}{M}}$ [m]

De nuevo, aplicando diagrama de cuerpo libre al sistema considerado, se obtienen las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema:

**

$$Z + \alpha Z + \beta \Pi = 0 \quad [m/s^2] \quad (4.7)$$

**

$$\Pi + \beta Z / k^2 + \gamma \Pi = 0 \quad [rad/s^2] \quad (4.8)$$

donde:

$$\alpha = (K_{ef} + K_{et}) / M \quad [1/s^2] \quad (4.9)$$

$$\beta = (K_{et} * B - K_{ef} * A) / M \quad [m/s^2] \quad (4.10)$$

$$\gamma = (K_{ef} * B^2 + K_{et} * C^2) / M * k^2 \quad [1/s^2] \quad (4.11)$$

Suponiendo soluciones armónicas de la forma $Z = \mathbf{Z}_0 \text{ seno } (\omega t)$ y $\Pi = \mathbf{\Pi}_0 \text{ seno } (\omega t)$, se obtienen los siguientes resultados para las frecuencias naturales del sistema:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} + \frac{\beta}{k^2}}} \quad [\text{rad/s}] \quad (4.12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{2} - \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} + \frac{\beta}{k^2}}} \quad [\text{rad/s}] \quad (4.13)$$

Los cuales son parámetros de importancia que se consideran para hallar los centros de oscilación para los modos de cabeceo y movimiento vertical; ubicados a una distancia igual a $\mathbf{Z}_0/\mathbf{\Pi}_0$ delante del centro de gravedad si esta cantidad es positiva, y detrás del mismo si es negativa. Por lo general, se escogen las características elásticas de los elementos activos de suspensión en ambos ejes de tal manera que la frecuencia natural del eje trasero sea mayor que la del eje delantero, con la finalidad de garantizar una convergencia hacia el movimiento vertical aunque una perturbación genere movimientos de cabeceo, por razones de comodidad.

Como se puede apreciar, dependiendo del modelo que se utilice (que incluya o no rotaciones del cuerpo), los desplazamientos de los elementos activos dependen de distintos movimientos relativos. Para uniformizar el vocabulario, se define la posición relativa de una rueda con respecto a su ubicación en el vehículo como Rebote. Cabe destacar que no existe una convención de signos definida para este parámetro, y distintos autores eligen su signo a conveniencia del modelo.

4.2 Dinámica Lateral y Longitudinal

Bajo este apartado se engloba el estudio de todas aquellas fuerzas y movimientos en el vehículo que tengan influencia directa en el desempeño del mismo, tal como su capacidad para desarrollar fuerzas laterales en una curva o longitudinales, bajo condiciones de aceleración y frenado. Si bien la dinámica de un vehículo real se caracteriza por la interacción recíproca que existe entre la dinámica vertical y lateral/longitudinal, en muchos casos el estudio de esos apartados se hace en forma separada.

Todos los modelos aquí presentados han sido derivados bajo la suposición de que el vehículo se encuentra en estado estable, es decir, las fuerzas que actúan en el mismo y sus parámetros no varían en función del tiempo. Debido a la relativa simplicidad de las ecuaciones que derivan de esta suposición, y además por la complejidad que involucra tratar el estado transitorio del vehículo, en el cual las fuerzas y los parámetros geométricos cambian con el tiempo, afectándose mutuamente, muchos estudios de dinámica vehicular se limitan a esta suposición. A los estudios que intentan describir el estado transitorio con este modelo, se les conocen como estudios en estado pseudo-estable.

4.2.1 Transferencia de Carga

Este fenómeno se presenta siempre que se someta al vehículo a una aceleración longitudinal o lateral, debido al efecto que tiene dicha fuerza en la carga que soporta cada eje en un momento determinado.

Considerando un modelo simple de un vehículo como cuerpo rígido, al cual se le aplica una fuerza en su centro de gravedad como consecuencia de la aceleración a la cual se ve sometido el cuerpo, y realizando un diagrama de cuerpo libre al sistema involucrado, se tiene que la transferencia de carga viene dada por:

$$\Delta W = \frac{W a_y h}{L} \quad [\text{N}] \quad (4.14)$$

donde:

W = Peso del vehículo. [N]

a_y = Aceleración, en g's. [Adimensional]

L = Distancia entre ruedas. [m]

h = Altura del centro de gravedad. [m]

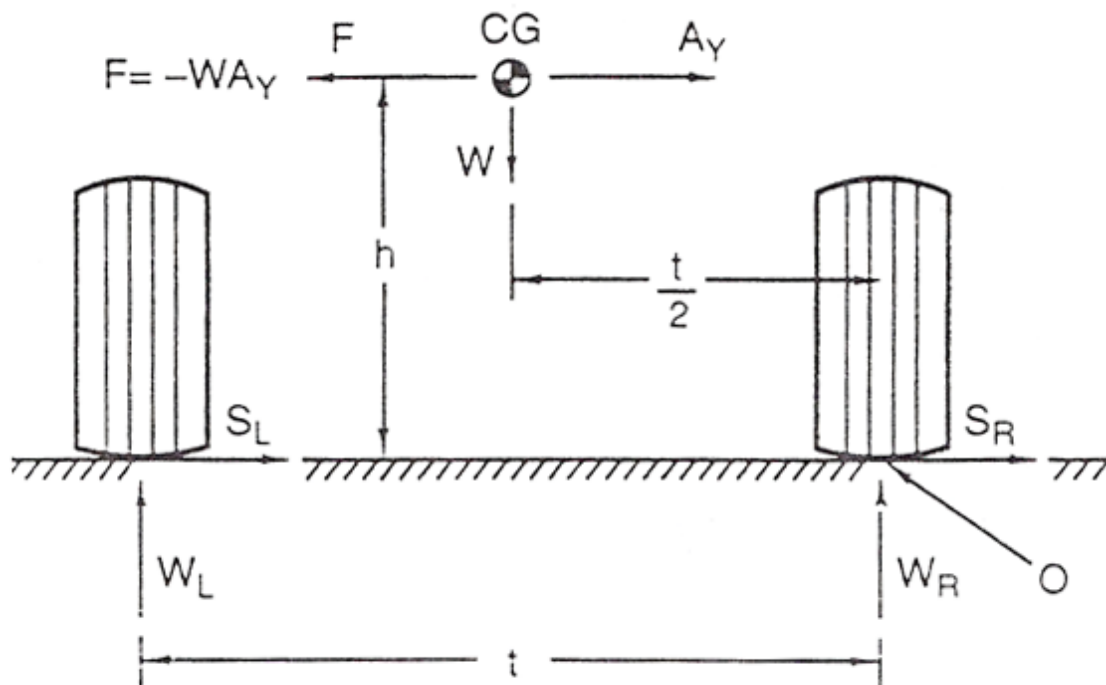


Fig. 4.3 Modelo simplificado para considerar transferencia de carga lateral.
(Fuente: Milliken y Milliken. “**Race Car Vehicle Dynamics**”, 1995)

Este modelo es válido tanto para la transferencia de carga en la dirección longitudinal y lateral. Aunque el peso del vehículo sigue siendo el mismo, debido a las reacciones que genera la fuerza inercial asociada a la aceleración, un extremo del vehículo soporta una carga menor, mientras que el extremo opuesto soporta una carga mayor, comparadas con aquellas que soportan en condiciones de aceleración longitudinal o lateral nula. En casos extremos, el primero puede descargarse por completo, mientras que el segundo soporta todo el peso del vehículo.

Aunque este modelo suele ser suficiente para el cálculo de la transferencia de carga longitudinal, da un resultado aproximado de la transferencia de carga lateral, y existen modelos más complejos que permiten cálculos más precisos de esta modalidad de transferencia de carga. Milliken y Milliken (1995) proponen el siguiente modelo de tres masas, el cual incluye efectos relativos a la suspensión tales como la presencia de un eje de balanceo y la consideración del chasis del vehículo y los ejes del mismo como masas separadas:

Las suposiciones hechas en el análisis del sistema son las siguientes:

- (a) Cualquier fuerza transversal (perpendicular al plano mostrado) aplicada en cualquier punto sobre el eje de balanceo no produce balanceo sobre la masa suspendida.
- (b) Las constantes elásticas de balanceo delantera y trasera son determinadas independientemente.
- (c) La constante elástica de los neumáticos está incluida en la constante de balanceo.
- (d) El balanceo de un eje rígido con respecto al pavimento no está incluido en el análisis.
- (e) El centro de gravedad del vehículo y los centros de balanceo están en el plano medio longitudinal del vehículo (plano de simetría).

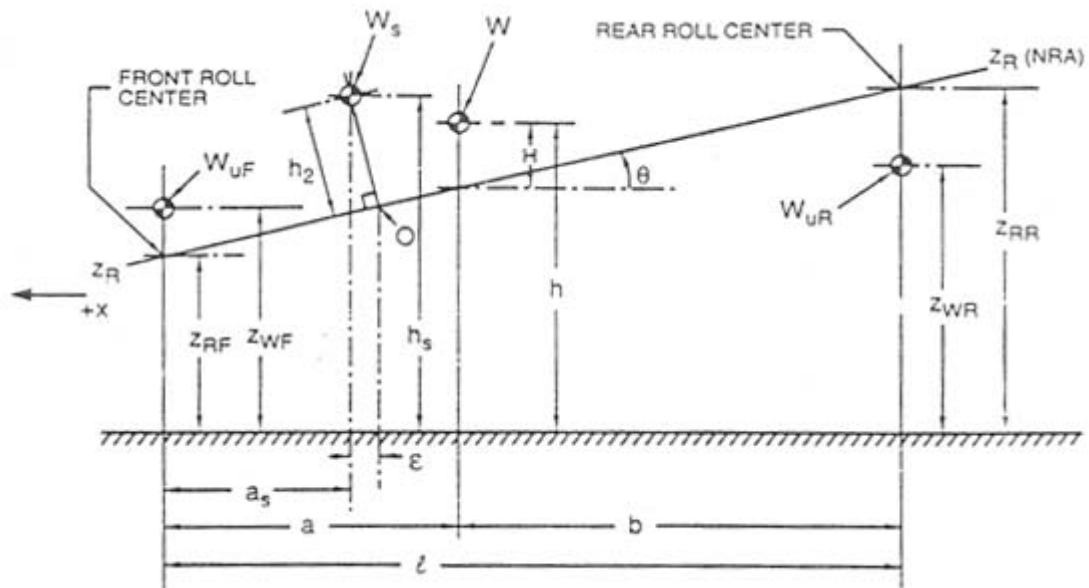


Fig. 4.4 Geometría de transferencia de carga lateral
(Fuente: Milliken y Milliken, **"Race Car Vehicle Dynamics"**, 1995)

Tomando en cuenta estas consideraciones, las ecuaciones que gobiernan la transferencia de carga con respecto a la aceleración lateral en cada uno de los ejes es:

$$\frac{\Delta W_f}{a_y} = \frac{W_s}{t_f} \left(\frac{h_2 * (K_f - (L - a_s) W_s h_s / L)}{K_f + K_t - W_s h_2} + \frac{L - a_s}{L} Z_{cbf} \right) + \frac{W_{nsf}}{t_f} Z_{wf} \quad [\text{N}] \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta W_t}{a_y} = \frac{W_s}{t_t} \left(\frac{h_2 (K_r - a_s W_s h_s / L)}{K_f + K_t - W_s h_2} + \frac{a_s}{L} Z_{cbt} \right) + \frac{W_{nst}}{t_t} Z_{wt} \quad [\text{N}] \quad (4.16)$$

Donde:

W_s = Peso suspendido. [N]

t = Ancho de vías de cada uno de los ejes. [m]

h_2 = distancia del centro de gravedad de la masa suspendida al eje de balanceo. [m]

K = Constante elástica de balanceo de cada eje. [Nm/radián]

L = Batalla del vehículo. [m]

a_s = Distancia entre el centro de gravedad de la masa suspendida al centro de gravedad de la masa no suspendida frontal. [m]

Z_{cb} = Altura del centro de balance de cada eje. [m]

W_u = Pseo no suspendido de cada eje. [m]

Z_w = Altura del centro de gravedad de cada eje. [m]

Además se considera un parámetro adicional que es la Sensibilidad al Balanceo, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\varphi}{a_y} = K_\varphi = \left(\frac{-W_s h_2}{K_f + K_t - W_s h_2} \right) \quad [\text{rad/g}] \quad (4.17)$$

Donde φ es el ángulo del eje de balanceo con la vertical.

4.2.2 Gradiente de subviraje

Este es uno de los parámetros esenciales que define el comportamiento de un vehículo en todo el rango de aceleración lateral que pueda experimentar, además de ser uno de los principales indicadores cualitativos del comportamiento de un vehículo.

Considerando un modelo elemental de un vehículo (modelo de Bicicleta), en el cual las ruedas de ambos ejes se simplifican por una rueda con las características

combinadas de ambas ruedas, sin considerar transferencia de carga ni efectos de elasticidad de la suspensión, la ecuación que rige la respuesta direccional en estado estable del mismo es:

$$\delta = 57,3L / R + \alpha_f - \alpha_t = 57,3L / R + K a_y \quad [\text{grados}] \quad (4.18)$$

donde:

δ = Ángulo de Ackermann. [grados]

L = Batalla del vehículo. [m]

R = Radio de giro. [m]

a_y = Aceleración lateral, en g's. [Adimensional]

K = Gradiente de subviraje, expresado por:

$$K = \frac{(\alpha_f - \alpha_t)}{a_y} = \frac{Mg}{2L} \left(\frac{B}{C_{af}} - \frac{A}{C_{at}} \right) = \frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \quad [\text{grados/g}] \quad (4.19)$$

donde:

M = Masa total del vehículo. [kg]

B = Distancia desde el eje trasero al C.G. del vehículo. [m]

A = Distancia desde el eje delantero al C.G. del vehículo. [m]

C_{af} = Rigidez lateral de los neumáticos frontales. [N/grado]

C_{at} = Rigidez lateral de los neumáticos traseros. [N/grado]

α_f = Ángulo de deslizamiento de los neumáticos frontales. [grados]

α_t = Ángulo de deslizamiento de los neumáticos traseros. [grados]

W_f = Peso del vehículo soportado por el eje frontal. [N]

W_t = Peso del vehículo soportado por el eje trasero. [N]

g = Constante de aceleración debida a la gravedad = 9,80665 m/s²

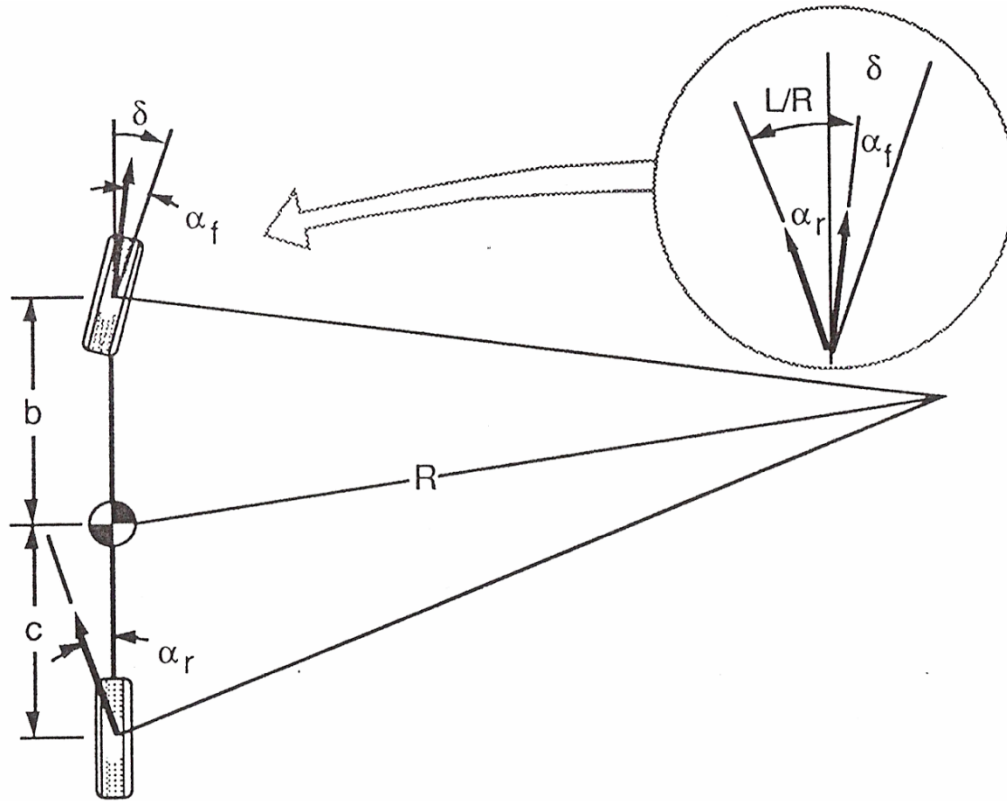


Fig. 4.5 Modelo de bicicleta realizando un giro en estado estable.
(Fuente: Gilliespie. “**Fundamental of Vehicle Dynamics**”, 1992)

Para un análisis en el rango lineal de los neumáticos (hasta 3m/s^2), esta ecuación es válida, sin embargo, conforme los niveles de aceleración lateral aumentan y la no-linealidad se hace presente en el comportamiento de los distintos subsistemas que componen el vehículo, es necesario incluir modelos más complejos. Gilliespie (1992) propone la siguiente modificación a la ecuación constitutiva para calcular K :

$$K_T = K_n + K_{tlc} + K_{db} + K_{gi} + K_{ma} \quad [\text{grados/g}] \quad (4.21)$$

K_n es el valor que representa la contribución de los neumáticos al gradiente de subviraje, ocasionada por el ángulo de deslizamiento que éstos generan. Su expresión fue estudiada en el apartado anterior como la única contribución al gradiente de sobreviraje en regímenes de aceleración donde se conserva la linealidad.

K_{tlc} es el término que engloba los efectos de la transferencia de carga en el gradiente de subviraje del vehículo. Dicho término incluye los efectos de distintos parámetros tales como la presencia de un eje de balanceo y diferente resistencia al

balanceo para cada eje por separado. Las ecuaciones (4.15) y (4.16) describen la transferencia de carga para eje, y la ecuación (4.17) determina el ángulo de balanceo en función de la aceleración. Considerando un modelo cuadrático para la variación de la rigidez lateral del neumático en función de la carga vertical que actúa sobre el mismo:

$$F_y = C_\alpha \alpha = (c_1 F_z - c_2 F_z^2) \alpha \quad [\text{N}] \quad (4.22)$$

De ésta manera, la fuerza generada en cada eje viene dada por:

$$F_y = (c_1 F_{ze} - c_2 F_{ze}^2 + c_1 F_{zi} - c_2 F_{zi}^2) \alpha \quad [\text{N}] \quad (4.23)$$

Sustituyendo los valores de carga de cada rueda en ésta ecuación y simplificando, se obtiene que:

$$F_y = (C_\alpha - c_2 \Delta F_z^2) \alpha \quad [\text{N}] \quad (4.24)$$

De ésta manera, los ángulos de deslizamiento de cada rueda vienen dados por:

$$\alpha_f = \frac{W_f a_y}{C_{af} - 2c_1 \Delta F_{zf}^2} \approx a_y \left(\frac{W_f}{C_{af}} + \frac{W_f}{C_{af}} \frac{2c_1 \Delta F_{zf}^2}{C_{af}} \right) \quad [\text{grados}] \quad (4.25)$$

$$\alpha_t = \frac{W_t a_y}{C_{at} - 2c_1 \Delta F_{zt}^2} \approx a_y \left(\frac{W_t}{C_{at}} + \frac{W_t}{C_{at}} \frac{2c_1 \Delta F_{zt}^2}{C_{at}} \right) \quad [\text{grados}] \quad (4.26)$$

Sustituyendo en la ecuación ()

$$\delta = 57,3L/R + a_y \left[\left(\frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \right) + \left(\frac{W_f}{C_{af}} \frac{2c_1 \Delta F_{zf}^2}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \frac{2c_1 \Delta F_{zt}^2}{C_{at}} \right) \right] \quad [\text{grados}] \quad (4.27)$$

De donde se concluye que la contribución de la transferencia de carga al gradiente de subviraje viene dada por:

$$K_{tlc} = \frac{W_f}{C_{af}} \frac{2c_1 \Delta F_{zf}^2}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \frac{2c_1 \Delta F_{zt}^2}{C_{at}} \quad [\text{grados/g}] \quad (4.28)$$

K_{db} representa la contribución de la desviación de la orientación de las ruedas debido al balanceo, ya que como se mencionó anteriormente, la cinemática de la suspensión puede ser tal que se altere la orientación de las ruedas conforme cambia la posición de la rueda relativa al vehículo. Definiendo como “ ε ” el coeficiente de dirección inducida por balanceo en cada eje medidos en ángulo de dirección/ángulo

de balanceo, y como $\partial P/\partial a_y$ el cambio en el ángulo de balanceo del vehículo con respecto a la aceleración normalizada del vehículo, el efecto que tiene dicha desviación en el coeficiente de subviraje es:

$$K_{db} = (\varepsilon_f - \varepsilon_t) \frac{\partial P}{\partial a_y} \quad [\text{grados/g}] \quad (4.29)$$

K_{gi} es el término que representa la contribución del ángulo de inclinación de los neumáticos al gradiente de subviraje, debido al efecto que tiene éste sobre la fuerza que se genera en los neumáticos. En los ejes rígidos se puede despreciar esta influencia debido a que el cambio del ángulo de inclinación con el balanceo del vehículo es muy pequeño, sin embargo, al considerar suspensiones independientes este parámetro es importante al momento de determinar la fuerza efectiva neta en cada rueda.

El ángulo efectivo de inclinación en cada rueda viene dado por:

$$\gamma_a = \gamma_r + P \quad [\text{radianes}] \quad (4.30)$$

Donde

γ_a = Ángulo de inclinación absoluto.

γ_r = Ángulo de inclinación de las ruedas con respecto al chasis.

P = Ángulo de balanceo del vehículo.

Aunque ésta simple relación tiene validez en todo instante de tiempo, el interés se centra en el cambio del ángulo de inclinación absoluto en función del ángulo de balanceo, $\partial \gamma / \partial P$, el cual es función de la geometría particular del sistema de suspensión del vehículo bajo estudio y de la geometría del vehículo mismo.

Para encontrar la fuerza generada en el neumático debido a los ángulos de deslizamiento de los mismos, se toma en cuenta la influencia del ángulo de inclinación:

$$F_y = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma \quad [\text{N}] \quad (4.31)$$

Donde C_γ es la rigidez de inclinación, como se definió anteriormente. Despejando y sustituyendo, se obtiene que el ángulo de deslizamiento para cada uno de los ejes viene dado por:

$$\alpha_f = a_y \left(\frac{W_f}{C_{af}} - \frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \frac{\partial \gamma_f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} \right) \quad [\text{grados}] \quad (4.32)$$

$$\alpha_t = a_y \left(\frac{W_t}{C_{at}} - \frac{C_{\gamma t}}{C_{at}} \frac{\partial \gamma_t}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} \right) \quad [\text{grados}] \quad (4.33)$$

cuando ésta ecuación se sustituye en la ecuación (4.18), resulta:

$$\delta = 57,3L/R + a_y \left[\left(\frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \right) - \left(\frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \frac{\partial \gamma_f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} - \frac{C_{\gamma t}}{C_{at}} \frac{\partial \gamma_t}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} \right) \right] \quad [\text{grados}] \quad (4.34)$$

de donde se concluye que la contribución al gradiente de subviraje dada por el ángulo de inclinación de las ruedas es:

$$K_{gi} = - \left(\frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \frac{\partial \gamma_f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} - \frac{C_{\gamma t}}{C_{at}} \frac{\partial \gamma_t}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial a_y} \right) \quad [\text{grados/g}] \quad (4.35)$$

K_{ma} es el término que representa el efecto del momento autoalineante en el gradiente de subviraje. Ya que la resultante de fuerzas en el neumático no se encuentra en el centro del área de contacto, sino a una distancia t (Avance neumático) detrás del mismo, las ecuaciones pueden plantearse de nuevo, y se obtiene:

$$K_{ma} = W \frac{t}{L} \frac{(C_{af} + C_{at})}{C_{af} C_{at}} \quad [\text{grados/g}] \quad (4.36)$$

Los distintos K_i y sus efectos se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Distintos efectos presentes en el gradiente de subviraje, modelo de bicicleta.

Componente de sobreviraje	Fuente
$K_n = \frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}}$	Rígidez de los neumáticos
$K_{tlc} = \frac{W_f}{C_{af}} \frac{2a\Delta F_{zf}^2}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \frac{2a\Delta F_{zt}^2}{C_{at}}$	Transferencia lateral de carga
$K_{gi} = \left(\frac{C_{yf} \partial \gamma_f}{C_{af} \partial \phi} - \frac{C_{yt} \partial \gamma_t}{C_{at} \partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial a_y}$	Empuje debido al grado de inclinación
$K_{db} = (\varepsilon_f - \varepsilon_t) d\phi / da_y$	Desviación por balanceo
$K_{ma} = W \frac{t(C_{af} + C_{at})}{LC_{af} C_{at}}$	Momento Autoalineante

(Fuente: Gilliespie. “**Fundamental of Vehicle Dynamics**”, 1992)

Adicionalmente, el gradiente de subviraje se modifica por la presencia de fuerzas longitudinales en el vehículo, no consideradas en el análisis previo.

Considerando el mismo modelo de bicicleta anterior, con la presencia de fuerzas longitudinales en cada una de las ruedas:

Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección lateral tenemos que:

$$W_f a_y = F_{yf} \cos(\alpha_f + \delta) + F_{xf} \sin(\alpha_f + \delta) \quad [\text{N}] \quad (4.37)$$

$$W_t a_y = F_{yt} \cos(\alpha_t) + F_{xt} \sin(\alpha_t) \quad [\text{N}] \quad (4.38)$$

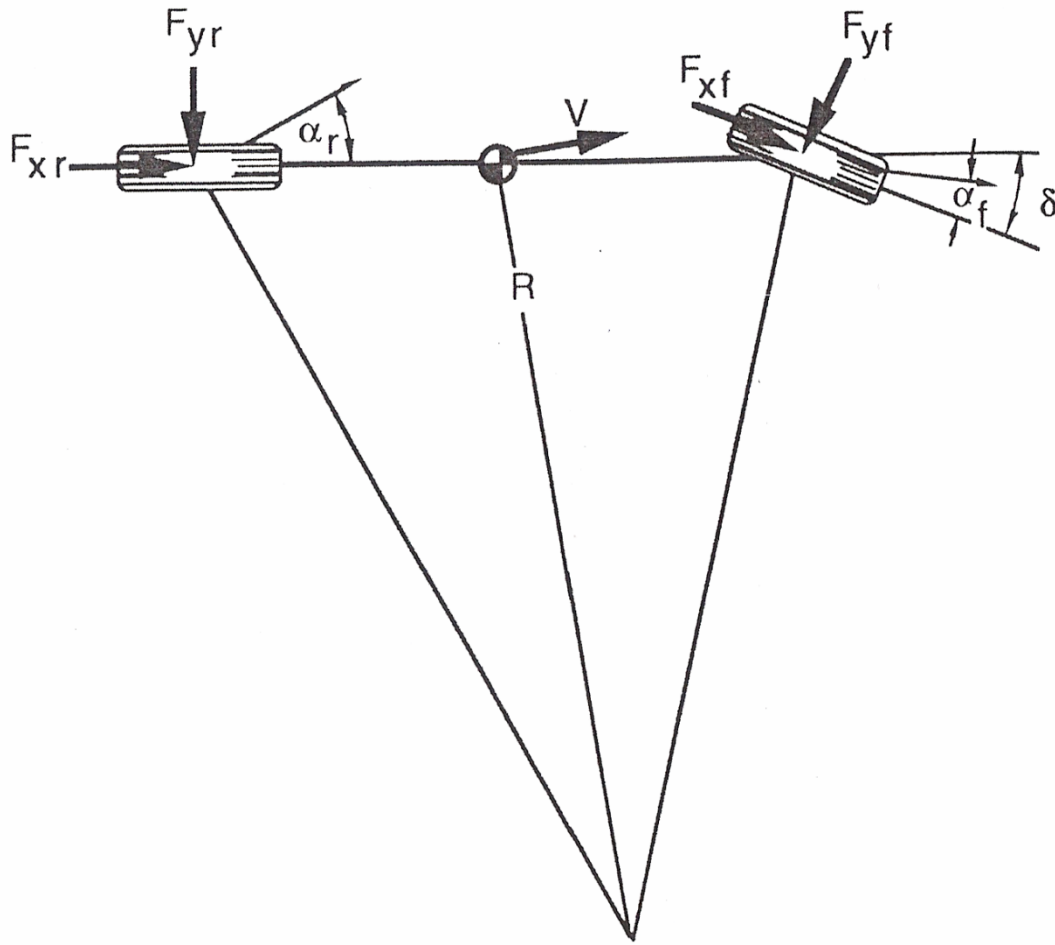


Fig. 4.6 Modelo de bicicleta realizando un giro en estado estable, considerando fuerzas de tracción.
(Fuente: Gilliespie. **"Fundamental of Vehicle Dynamics"**, 1992)

Suponiendo ángulos pequeños ($\cos(\alpha) = 1$ y $\sin(\alpha) = \alpha$), despejando α y sustituyendo, la ecuación final es:

$$\delta = \frac{57,3L/R + a_y}{1 + F_{xf}/C_{af}} \left[\left(\frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \right) - \left(\frac{W_f}{C_{af}} \frac{F_{xf}}{C_{af}} - \frac{W_t}{C_{at}} \frac{F_{xt}}{C_{at}} \right) \right] \quad [\text{grados}] \quad (4.39)$$

Donde aquí el primer término se ve alterado por la presencia de fuerzas longitudinales sólo en el eje delantero, ya que el mismo representa el ángulo de Ackermann generado por las ruedas delanteras cuando cambian de orientación, mientras que el segundo término entre paréntesis representa la influencia general de dichas fuerzas en el comportamiento del vehículo.

4.3 Diagrama G-G

La finalidad del diagrama G-G es el de conocer los límites de desempeño del vehículo en cuanto a la adherencia que es capaz de generar en cierto y determinado momento. Conceptualmente hablando, no es más que un círculo de fricción del vehículo entero, en función del círculo de fricción de todos y cada uno de los neumáticos que el mismo lleve equipados y de los efectos que causen los distintos parámetros de suspensión en ellos.

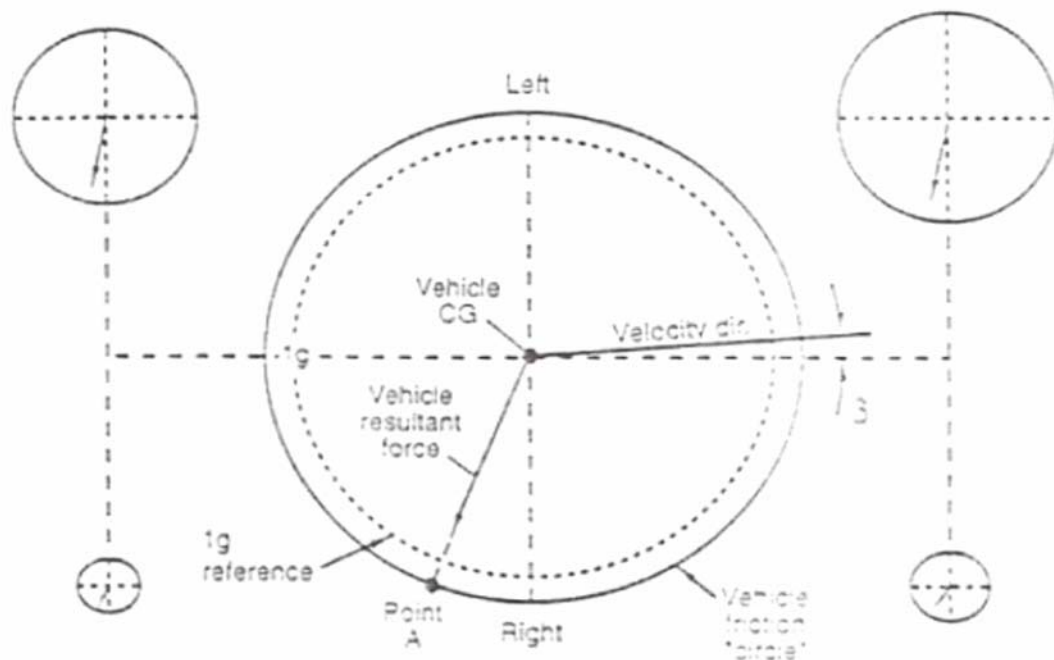


Fig. 4.7 Diagrama G-G
(Fuente: Milliken y Milliken. **"Race Car Vehicle Dynamics"**, 1995)

La metodología detrás de la construcción de este diagrama es la que sigue:

- (a) Se calcula la fuerza máxima en las direcciones lateral y longitudinal que puede generar cada rueda en función de sus parámetros de funcionamiento: ángulo de inclinación, carga soportada, relación y ángulo de deslizamiento, entre otros, y en función de las condiciones del vehículo: aceleración lateral y longitudinal del mismo, cargas aerodinámicas, entre otros.

- (b) Se suman escalarmente las magnitudes de la fuerza máxima generada por cada neumático en cada dirección.
- (c) Se construye el denominado círculo de fricción, con un radio igual al de la suma de las componentes de fuerza mencionadas antes. Aunque se le denomine así, difícilmente tendrá forma de circunferencia, y se asemejará más a una elipse, cuyos ejes serán las componentes longitudinales y laterales de las fuerzas generadas por los neumáticos.
- (d) Adicionalmente, se puede considerar la representación vectorial de las fuerzas instantáneas generadas por los neumáticos, y sumarlas vectorialmente para obtener la fuerza resultante actuante sobre el vehículo y de ésta manera determinar el porcentaje de la capacidad de adherencia del vehículo entero que se está aprovechando en dicho momento.

Adicionalmente, dicho diagrama puede variar debido a la velocidad, por efectos aerodinámicos, disminuyendo o aumentando según sea el caso. Estos efectos deben ser considerados para maniobras efectuadas a alta velocidad, como por ejemplo, la evasión de un accidente ó un obstáculo, para evaluar la capacidad del vehículo de responder en este tipo de situaciones.

CAPITULO V

MODELO DE VEHÍCULO PROPUESTO

Tomando en cuenta los aspectos explicados en el marco teórico, se desarrolló un modelo que representa el vehículo, con las siguientes características:

- (a) Este modelo consta de varias masas; una masa principal, representando la masa suspendida del vehículo, con tres grados de libertad: Traslación en el eje Z , rotación alrededor del eje X y rotación alrededor del eje Y .
- (b) Conectadas a esta masa por medio de elementos elásticos y amortiguadores, se encuentran cuatro masas adicionales, en representación de las ruedas; cada una de estas masas tiene un grado de libertad en la dirección vertical, cuando se consideran suspensiones independientes dentro de la configuración del vehículo.
- (c) Si se consideran ejes rígidos, dos de las masas anteriores, correspondientes a las ruedas de un mismo eje, pasan a ser sustituidas por una masa con dos grados de libertad: traslación vertical, y rotación alrededor del eje X .

De ésta manera, el modelo básico puede constar de tres masas, cuatro masas o cinco masas, de acuerdo a la configuración de suspensión elegida: tres masas si los esquemas de suspensión delantero y trasero son de eje rígido, cuatro masas si al menos uno de dichos ejes tiene esquemas de suspensión independiente, y cinco masas si ambos ejes equipan suspensiones independientes, y tiene siete grados de libertad en todos los casos anteriores. A discreción del usuario, las ruedas de un mismo eje pueden estar elásticamente vinculadas o no, como se explicará más adelante.

Adicionalmente, se le otorga a dicho modelo siete grados de libertad más, con la finalidad de obtener un modelo más completo y realista. Los grados de libertad adicionales son los siguientes:

- (a) Rotación de todo el conjunto alrededor del eje Z .
- (b) Traslación de todo el conjunto en los ejes X y Y .
- (c) Rotación independiente alrededor del eje y para cada una de las ruedas del vehículo.

De ésta manera se tienen catorce grados de libertad para el modelo.

5.1 Ecuaciones de Dinámica Vertical del modelo

Estas ecuaciones son aquellas que resultan de aplicar diagramas de cuerpo libre para cada una de las masas involucradas en el sistema, tomando en cuenta sólo aquellas fuerzas que actúan en sentido vertical, y todos los momentos en el sistema, independientemente de la orientación de la fuerza que genere dicho momento. Estas ecuaciones describe la dinámica vertical del modelo, tomando en cuenta la interacción con los efectos producidos por la dinámica longitudinal y lateral en el mismo.

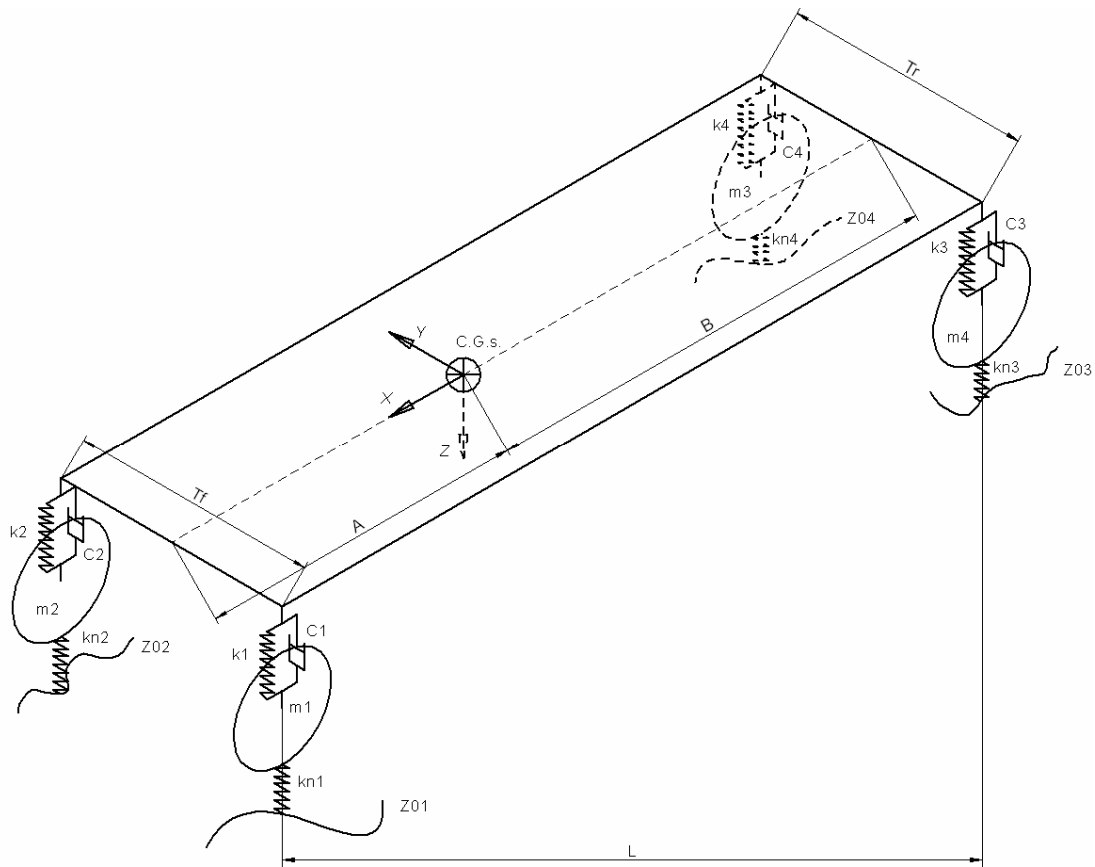


Fig. 5.1 Esquema del modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

5.1.1 Ecuaciones del cuerpo

Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del cuerpo son:

$$Z_s^{**} = \frac{-(F_{k1} + F_{k2} + F_{k3} + F_{k4} + F_{c1} + F_{c2} + F_{c3} + F_{c4} - F_{ez})}{M_s} \quad [m/s^2] \quad (5.1)$$

$$\Pi_s^{**} = \frac{(F_{k1} + F_{c1})d_{\pi1} + (F_{k2} + F_{c2})d_{\pi2} - (F_{k3} + F_{c3})d_{\pi3} - (F_{k4} + F_{c4})d_{\pi4} + M_{ey}}{I_{yy}^*} \quad [1/s^2] \quad (5.2)$$

$$P_s^{**} = \frac{(F_{k1} + F_{c1})d_{\rho1} - (F_{k2} + F_{c2})d_{\rho2} + (F_{k3} + F_{c3})d_{\rho3} - (F_{k4} + F_{c4})d_{\rho4} + M_{ex}}{I_{xx}^*} \quad [1/s^2] \quad (5.3)$$

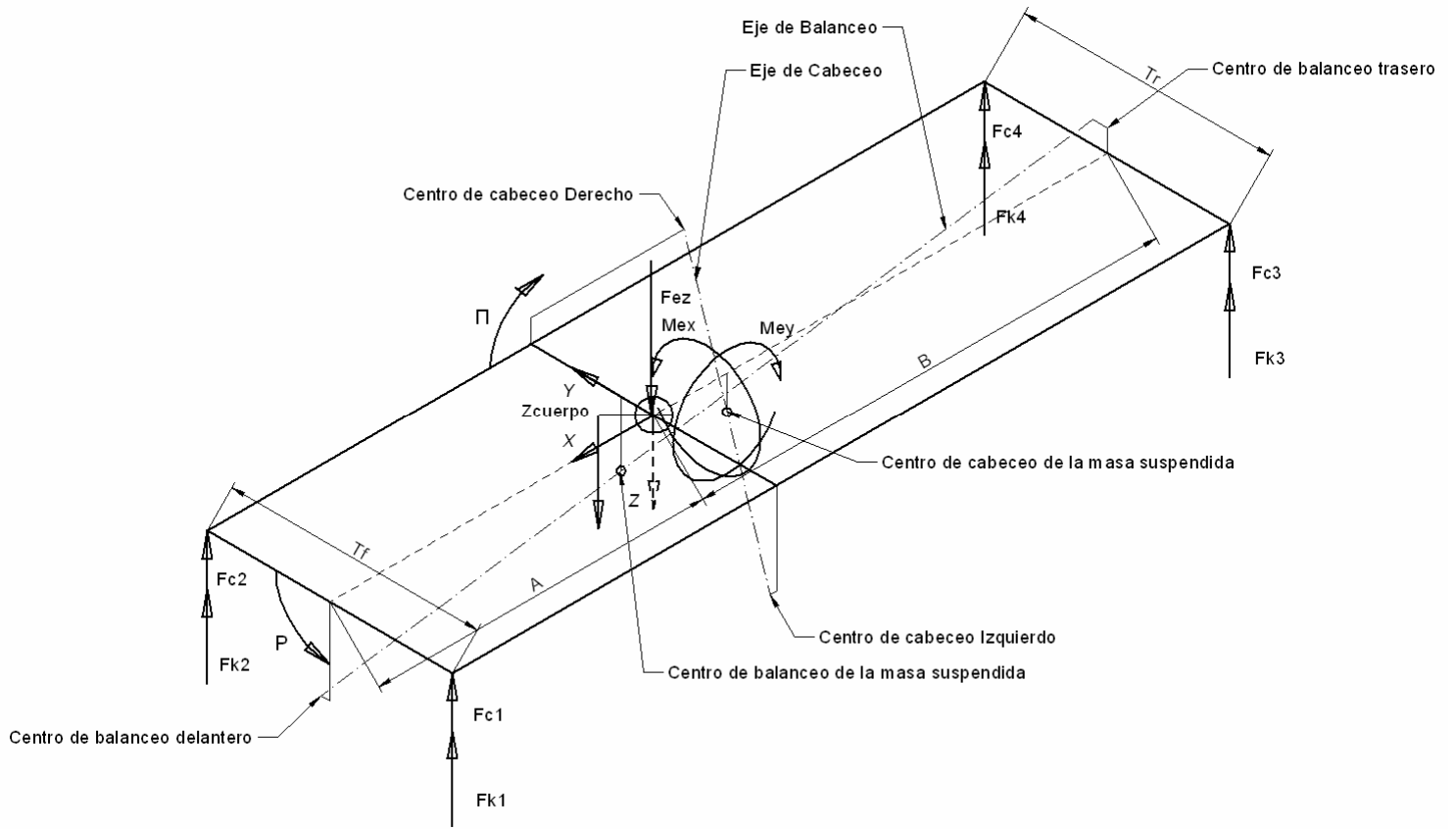


Fig. 5.2 Fuerzas y momentos actuando en la masa suspendida del modelo de vehículo propuesto
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Donde:

^{**}
 Z_s es la aceleración vertical de la masa suspendida. [m/s^2]

^{**}
 Π_s es la aceleración angular en el eje Y de la masa suspendida. [$1/\text{s}^2$]

^{**}
 P_s es la aceleración angular en el eje X de la masa suspendida. [$1/\text{s}^2$]

F_{ki} es la fuerza debido a cada elemento elástico. [N]

F_{ci} es la fuerza debido a cada amortiguador. [N]

M_s es la masa suspendida. [kg]

I_{xx}^* es la inercia polar efectiva de la masa suspendida alrededor de un eje paralelo al eje X . [kg m^2]

I_{yy}^* es la inercia polar efectiva de la masa suspendida alrededor de un eje paralelo al eje Y . [kg m^2]

$d_{\pi i}$ es la distancia de cada rueda a su respectivo centro de cabeceo. [m]

$d_{\rho i}$ es la distancia de cada rueda a su respectivo centro de balanceo. [m]

M_{ex} representa el total de momentos externos aplicados sobre la masa suspendida en dirección del eje X . [Nm]

M_{ey} representa el total de momentos externos aplicados sobre la masa suspendida en dirección del eje Y . [Nm]

F_{ez} representa el total de fuerzas externas aplicadas sobre la masa suspendida en dirección del eje Z . [N].

i son los subíndices que identifican a cada rueda:

- (a) 1 para la rueda delantera izquierda.
- (b) 2 para la rueda delantera derecha.
- (c) 3 para la rueda trasera izquierda.
- (d) 4 para la rueda trasera derecha.

En éste modelo simple se hacen las siguientes suposiciones:

- (a) Las fuerzas generadas por los elementos activos de la suspensión actúan en una dirección paralela al eje Z , y cuyo eje de acción pasa por el centro del área de contacto de la rueda.

- (b) Los momentos alrededor del eje X y Y causados por las fuerzas generadas por los elementos activos del sistema de suspensión se aplican con un brazo de palanca igual a la distancia horizontal entre el centro del área de contacto de cada rueda y el correspondiente centro de balanceo y cabeceo, por ejemplo, para la rueda izquierda delantera los brazos de palanca calculan con respecto al centro de balanceo frontal y al centro de cabeceo izquierdo.
- (c) Debido a que la masa suspendida gira con respecto al eje de cabeceo y de balanceo, los cuales no pasan por el centro de gravedad de dicha masa, las inercias efectivas se calculan mediante el teorema de Steiner de los ejes paralelos:

$$I^* = I + M_s d^2 \quad [1/s^2] \quad (5.4)$$

Donde:

I^* es la inercia polar efectiva. $[kg \ m^2]$

I es la inercia polar alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad de la masa suspendida. $[kg \ m^2]$

M_s es el valor de la masa suspendida $[kg]$

d es la distancia desde el centro de gravedad de la masa suspendida, hasta el eje respectivo (cabeceo ó balanceo) medida en el plano longitudinal y transversal en el cual se encuentra ubicado dicho centro de gravedad. $[m]$

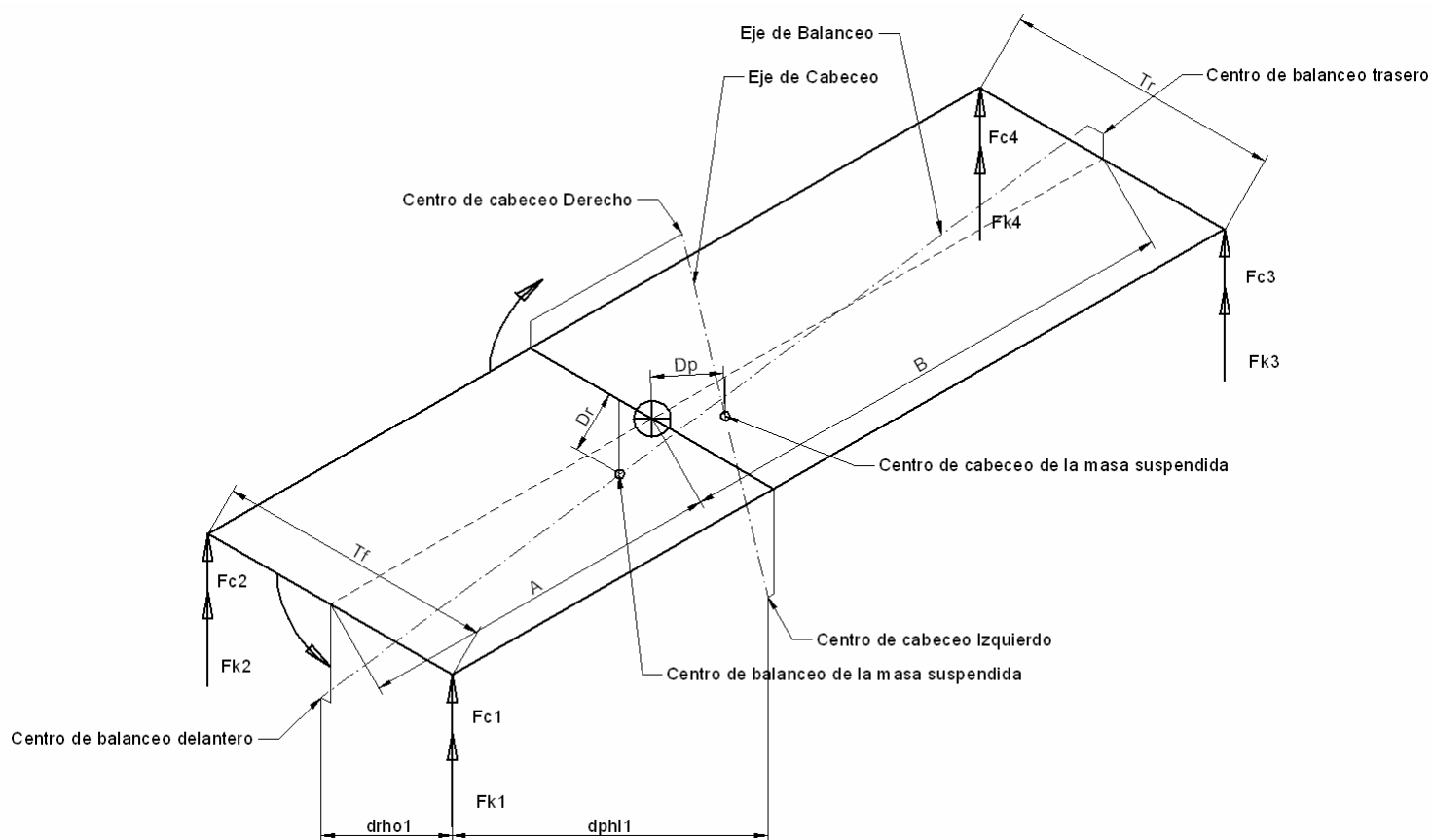


Fig. 5.3 Parámetros principales del modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Adicionalmente, las fuerzas y momentos externos se desglosan de la siguiente manera:

$$F_{ez} = M_s g_z + F_{aero} + \sum F_{levantamiento} \quad [N] \quad (5.5)$$

$$M_{ey} = M_{aero,y} + M_{Sy} + M_{cabeceo} \quad [Nm] \quad (5.6)$$

$$M_{ex} = M_{aero,x} + M_{Sx} + M_{balanceo} + M_{antibalanceo,f} + M_{antibalanceo,t} \quad [Nm] \quad (5.7)$$

Donde:

g_z es la proyección del vector gravedad en el eje Z del vehículo $[m/s^2]$

F_{aero} es la fuerza aerodinámica total generada en sentido vertical, detallada más adelante. [N]

$M_{aero,y}$ es el momento aerodinámico total generado alrededor del eje Y, detallado más adelante. [Nm]

$M_{aero,x}$ es el momento aerodinámico total generado alrededor del eje X , detallado más adelante. [Nm]

$F_{levantamiento}$ es la contribución de las fuerzas longitudinales y laterales en cada una de las ruedas a la fuerza de levantamiento total, debido al efecto geométrico del los centros de balanceo y cabeceo, como se explicó anteriormente. Cada término se expresa por:

$$F_{levantamiento,i} = F_{neumático,i} \tan\left(\frac{h}{d}\right) \quad [N] \quad (5.8)$$

Donde:

$F_{neumático}$ es la fuerza generada en el neumático de interés, en un sentido determinado (longitudinal o lateral). [N]

h es la altura desde el centro del área de contacto de la rueda hasta el centro de balanceo en el caso de fuerza laterales, o al centro de cabeceo, en el caso de fuerzas longitudinales. [m]

d es la distancia horizontal desde el centro de contacto de cada rueda hasta el centro (balanceo o cabeceo) respectivo, considerada positiva para las ruedas delanteras e izquierdas y negativa para las ruedas traseras y derechas. [m]

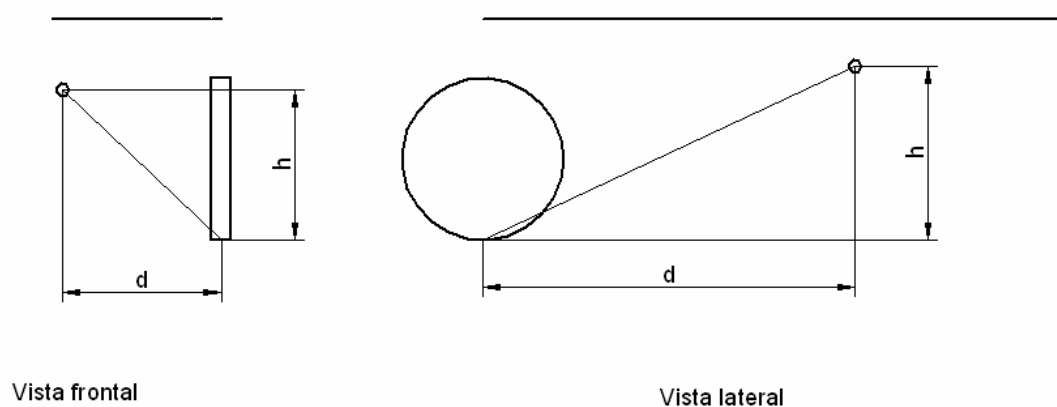


Fig. 5.4 Centros instantáneos de rotación frontales y laterales del modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

M_{sx} y M_{sy} son los momentos que ejerce el peso de la masa suspendida alrededor de los ejes de cabeceo y balanceo, respectivamente, debido a que no se encuentran ubicados sobre la misma línea vertical en el que está ubicado el centro de gravedad de dicha masa, y están dados por la siguiente ecuación:

$$M_s = W_s D \quad [\text{Nm}] \quad (5.9)$$

Donde W_s es el peso de la masa suspendida [N] y D la distancia horizontal desde el centro de gravedad de dicha masa hasta el centro de interés (balanceo o cabeceo). [m]
 $M_{cabeceo}$ y $M_{balanceo}$ son los momentos generados alrededor de los ejes de cabeceo y balanceo por la aceleración longitudinal y/o lateral, aplicadas a la masa suspendida, según la siguiente fórmula:

$$M = a M_s H \quad [\text{Nm}] \quad (5.10)$$

Donde:

a es la aceleración lateral ó longitudinal aplicada al cuerpo. [m/s^2]

H es la distancia vertical al centro respectivo. [m]

$M_{antibalanceo}$ representa el momento sobre el cuerpo debido a la acción de la barra antibalanceo sobre el cuerpo, la cual se calcula de la siguiente manera:

$$M_{antibalanceo} = T F_{antibalanceo} \quad [\text{Nm}] \quad (5.11)$$

Donde $F_{antibalanceo}$ es la fuerza de antibalanceo en cada rueda [N], y T es el ancho de vías de cada eje [m].

Las fuerzas generadas en los elementos elásticos se calculan con el desplazamiento relativo entre las ruedas y el cuerpo (rebote), el radio de instalación efectivo y la constante elástica:

$$RB_i = (Z_{cuerpo} - Z_i) \quad [\text{m}] \quad (5.12)$$

$$F_{ki} = K_i R M_i R B_i \quad [\text{Nm}] \quad (5.13)$$

Donde:

K_i es la constante elástica del elemento elástico, en función de la distancia entre sus extremos. [N/m]

$R M_i$ es la relación de movimiento del elemento elástico con respecto a la rueda, en función de la posición relativa de la rueda respecto al cuerpo. [Adimensional]

RB_i es el rebote de la rueda.

Z_i es el desplazamiento vertical de la rueda [m]

$Z_{cuerpo,i}$ es el desplazamiento vertical del cuerpo, dado por:

$$Z_{cuerpo,i} = Z_{CG \text{ masa suspendida}} + Z_{i,balanceo} + Z_{i,cabeceo} \quad [m] \quad (5.14)$$

Donde:

$Z_{CG \text{ masa suspendida}}$ es el desplazamiento vertical del centro de gravedad de la masa suspendida. [m]

$Z_{i,balanceo}$ es el desplazamiento vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo, y está dado por la siguiente expresión:

$$Z_{i,balanceo} = 2\sqrt{(d_\rho^2 + h_\rho^2)} \sin(P/2) \cos[\arctan(h_\rho / d_\rho) - P/2] \quad [m] \quad (5.15)$$

Donde d_ρ y h_ρ son la distancia horizontal y vertical respectivamente, desde el centro de contacto de la rueda al centro de balanceo, en función del desplazamiento relativo de la misma con respecto a la masa suspendida. [m]

P es el ángulo de balanceo, medido desde un plano horizontal. [rad]

$Z_{i,cabeceo}$ es el desplazamiento vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo, y está dado por una expresión similar a la (5.16):

$$Z_{i,cabeceo} = 2\sqrt{(d_\pi^2 + h_\pi^2)} \sin(\Pi/2) \cos[\arctan(h_\pi / d_\pi) - \Pi/2] \quad [m] \quad (5.16)$$

Donde d_π y h_π son la distancia horizontal y vertical respectivamente, desde el centro de contacto de la rueda o desde el centro de la rueda, según aplique, al centro de cabeceo, en función del desplazamiento relativo de la rueda con respecto a la masa suspendida. [m]

Π es el ángulo de cabeceo, medido desde un plano horizontal. [rad]

La tabla (5.1) resume los distintos signos algebraicos para la contribución por cabeceo y balanceo, en función de la rueda a la cual se referencien, tomando en cuenta ángulos positivos, y centros de balanceo y cabeceo dentro del vehículo:

Tabla 5.1: Signos algebraicos para los términos de cabeceo y balanceo de cada rueda.

Rueda y subíndice identificador	Signo del término de cabeceo	Signo del término de balanceo
Frontal Izquierda (1)	Negativo	Negativo
Frontal Derecha (2)	Negativo	Positivo
Trasera Izquierda (3)	Positivo	Negativo
Trasera Derecha (4)	Positivo	Positivo

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Los términos de fuerza generada en el amortiguador se calculan con la velocidad relativa entre la rueda y el cuerpo, el radio de instalación efectivo y la constante del amortiguador:

$$RB_i^* = (Z_{cuerpo,i}^* - Z_i^*) \quad [\text{m/s}] \quad (5.17)$$

$$F_{ci} = C_i R M_i^* RB_i^* \quad [\text{Nm}] \quad (5.18)$$

Donde

C_i es la constante del amortiguador, en función de la velocidad entre sus extremos. [Ns/m]

$R M_i$ es la relación de movimiento del amortiguador con respecto a la rueda, en función de la posición relativa de la rueda respecto al cuerpo. [Adimensional]

RB_i^* es la velocidad de rebote.

$\dot{Z}_i$ es la velocidad vertical de la rueda [m]

$\dot{Z}_{cuerpo,i}$ es la velocidad del cuerpo, dada por la derivada de la expresión (5.15):

$$\dot{Z}_{cuerpo,i}^* = \dot{Z}_{CG\ masa\ suspendida}^* + \dot{Z}_{i,balanceo}^* + \dot{Z}_{i,cabeceo}^* \quad [\text{m}] \quad (5.19)$$

Donde:

$\dot{Z}_{CG\ masa\ suspendida}$ es la velocidad vertical del centro de gravedad de la masa suspendida. [m]

$\dot{Z}_{i,balanceo}$ es la velocidad vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo, y está dada por la derivada de la expresión (5.16):

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_{i,balanceo}^* &= \frac{2}{\sqrt{(d_\rho^2 + h_\rho^2)}} \left(d_\rho \frac{d(d_\rho)}{dZ_{r,i}} + h_\rho \frac{d(h_\rho)}{dZ_{r,i}} \right) \dot{Z}_{r,i}^* \sin(P/2) \cos[\arctan(h_\rho / d_\rho) - P/2] + \\
 &+ 2\sqrt{(d_\rho^2 + h_\rho^2)} \frac{P}{2} \cos(P/2) \cos[\arctan(h_\rho / d_\rho) - P/2] - \\
 &- 2\sqrt{(d_\rho^2 + h_\rho^2)} \sin(P/2) \sin[\arctan(h_\rho / d_\rho) - P/2] \left[\frac{1}{1 + (h_\rho / d_\rho)^2} \left(\frac{\frac{d(h_\rho)}{dZ_{r,i}} d_\rho - \frac{d(d_\rho)}{dZ_{r,i}} h_\rho}{d_\rho^2} \right) \dot{Z}_{r,i}^* - \frac{P}{2} \right] \\
 &[m/s] \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Donde d_ρ y h_ρ son la distancia horizontal y vertical respectivamente, desde el centro de contacto de la rueda al centro de balanceo, en función del desplazamiento relativo de la misma con respecto a la masa suspendida. [m]

P es el ángulo de balanceo, medido desde un plano horizontal. [rad]

$\dot{P}$ es la velocidad angular de balanceo. [1/s]

$\dot{Z}_{r,i}$ es la velocidad relativa entre la rueda y el cuerpo, dada por:

$$\dot{Z}_{r,i}^* = \dot{Z}_{cuerpoi}^* - \dot{Z}_i^* \quad [m/s] \quad (5.21)$$

$\dot{Z}_{i,cabeceo}$ es la velocidad vertical del extremo anclado a la rueda, debido al balanceo del cuerpo, y está dada por la derivada de la expresión (5.17), similar a la (5.20):

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_{i,cabeceo}^* &= \frac{2}{\sqrt{(d_\pi^2 + h_\pi^2)}} \left(d_\pi \frac{d(d_\pi)}{dZ_{r,i}} + h_\pi \frac{d(h_\pi)}{dZ_{r,i}} \right) \dot{Z}_{r,i}^* \sin(\Pi/2) \cos[\arctan(h_\pi / d_\pi) - \Pi/2] + \\
 &+ 2\sqrt{(d_\pi^2 + h_\pi^2)} \frac{\Pi}{2} \cos(\Pi/2) \cos[\arctan(h_\pi / d_\pi) - \Pi/2] - \\
 &- 2\sqrt{(d_\pi^2 + h_\pi^2)} \sin(\Pi/2) \sin[\arctan(h_\pi / d_\pi) - \Pi/2] \left[\frac{1}{1 + (h_\pi / d_\pi)^2} \left(\frac{\frac{d(h_\pi)}{dZ_{r,i}} d_\pi - \frac{d(d_\pi)}{dZ_{r,i}} h_\pi}{d_\pi^2} \right) \dot{Z}_{r,i}^* - \frac{\Pi}{2} \right] \\
 &[m/s] \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Donde d_π y h_π son la distancia horizontal y vertical respectivamente, desde el centro de contacto de la rueda o desde el centro de la rueda, según aplique, al centro de

cabeceo, en función del desplazamiento relativo de la rueda con respecto a la masa suspendida. [m]

*
 Π es la velocidad angular de cabeceo. [1/s]

La tabla (5.2) resume los distintos signos algebraicos para la contribución por cabeceo y balanceo, en función de la rueda a la cual se referencien, tomando en cuenta velocidades angulares positivas, y centros e balanceo y cabeceo dentro del vehículo:

Tabla 5.2: Signos algebraicos para los términos de velocidad de cabeceo y balanceo de cada rueda.

Rueda y subíndice identificador	Signo del término de cabeceo	Signo del término de balanceo
Frontal Izquierda (1)	Negativo	Negativo
Frontal Derecha (2)	Negativo	Positivo
Trasera Izquierda (3)	Positivo	Negativo
Trasera Derecha (4)	Positivo	Positivo

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

$F_{antibalanceo}$ es la fuerza generada en el chasis debido a la acción de la barra antibalanceo, cuando se vinculan ambas ruedas mediante ésta. La expresión para el cálculo de dicha fuerza viene dada por:

$$F_{antibalanceo,i} = K_t [RB_i - RB_{ii}] \quad [\text{m/s}] \quad (5.23)$$

Donde:

K_t es la constante elástica de la barra antibalanceo, en función del desplazamiento relativo entre sus dos extremos. [N/m]

Los subíndices i y ii hacen referencia a ambos extremos de un eje, así, para la fuerza generada en el extremo izquierdo del vehículo, i representaría este extremo y ii representaría el extremo derecho, mientras que para la fuerza en el extremo derecho sería todo lo contrario. Para este término en la ecuación (5.11), se toma en cuenta la fuerza producida por la rueda izquierda de cada eje, así, un ángulo de balanceo positivo produce un momento negativo y viceversa.

5.1.2 Ecuaciones de movimiento de las masas que representan las ruedas

Si bien las ecuaciones de las masas que representan las ruedas varían en función de la independencia o no de las ruedas de un mismo eje, la metodología aplicada para hallar dichas ecuaciones son las mismas.

5.1.2.1 Esquemas independientes

Haciendo un diagrama de cuerpo libre a una masa en representación de una rueda perteneciente a un sistema de suspensión independiente, la ecuación que rige el movimiento de dicha rueda es:

$$Z_i^{**} = - \frac{[-F_{ki} - F_{ci} + F_{ni} - F_{antibalaceo}]}{m_i} \quad [\text{m/s}^2] \quad (5.24)$$

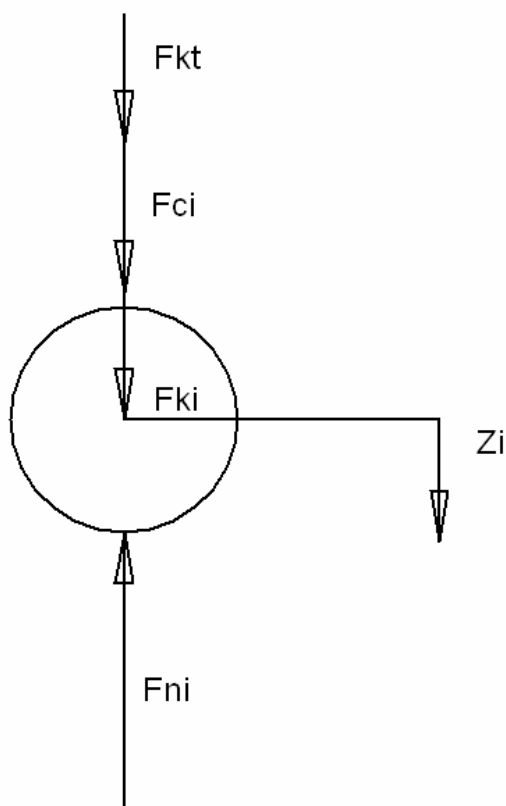


Fig. 5.5 Diagrama de cuerpo libre de la rueda en el modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Donde:

Z_i es la aceleración vertical de la rueda considerada. $[m/s^2]$

m_i es la masa no suspendida de la rueda considerada $[kg]$

F_{ni} es la fuerza generada por el neumático, dada por:

$$F_{ni} = K_{ni}(Z_i - Z_{0i}) \quad [N] \quad (5.25)$$

Donde:

K_{ni} es la constante elástica del neumático a la presión de inflado de interés (constante) $[N/m]$.

Z_{0i} es el desplazamiento del perfil del pavimento $[m]$.

Z_i es el desplazamiento de la rueda considerada $[m]$.

5.1.2.1 Ejes rígidos

Haciendo un diagrama de cuerpo libre a una masa en representación de un eje rígido, las ecuaciones que rigen el movimiento de dicho eje son:

$$Z_e = - \frac{[-F_{ki} - F_{ci} + F_{ni} - F_{kii} - F_{cii} + F_{nii}]}{m_e} \quad [m/s^2] \quad (5.26)$$

$$P_e = - \frac{\left[\frac{(F_{ki} + F_{ci} - F_{ni} - F_{kii} - F_{cii} + F_{nii})T}{2} + M_{antibalaceo} \right]}{I_e} \quad [m/s^2] \quad (5.27)$$

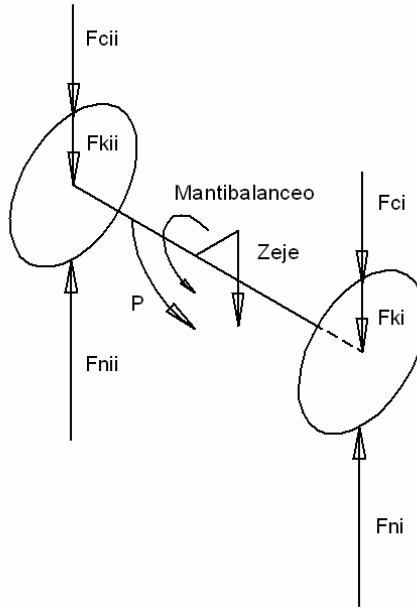


Fig. 5.6 diagrama de cuerpo libre de un eje rígido en el modelo de vehículo propuesto
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Donde:

^{**}
 Z_e es la aceleración vertical del eje considerado. [m/s^2]

m_e es la masa no suspendida del eje considerado [kg]

^{**}
 P_e es la aceleración angular del eje considerado. [$1/\text{s}^2$]

I_e es la inercia polar alrededor del eje X del eje considerado [kg m^2].

El movimiento del eje se relaciona con el movimiento en cada rueda de la siguiente manera:

$$Z_i = Z_e - \frac{T}{2} \sin(P_e) \quad [\text{m}] \quad (5.28)$$

$$Z_d = Z_e + \frac{T}{2} \sin(P_e) \quad [\text{m}] \quad (5.29)$$

$$Z_i^* = Z_e^* - \frac{P_e^* T}{2} \cos(P_e) \quad [\text{m/s}] \quad (5.30)$$

$$Z_d^* = Z_e^* + \frac{P_e^* T}{2} \cos(P_e) \quad [\text{m/s}] \quad (5.31)$$

$$Z_i^{**} = Z_e^{**} - \frac{P_e^{**} T}{2} \cos(P_e^*) + \frac{P_e^{*2} T}{2} \sin(P_e^*) \quad [\text{m/s}^2] \quad (5.32)$$

$$Z_d^{**} = Z_e^{**} + \frac{P_e^{**} T}{2} \cos(P_e^*) - \frac{P_e^{*2} T}{2} \sin(P_e^*) \quad [\text{m/s}^2] \quad (5.33)$$

Donde los subíndices i y d están referenciados a las ruedas izquierda y derecha, respectivamente

Z^*, Z^{**}, Z^{***} son la posición, velocidad y aceleración verticales de la rueda, respectivamente [m, m/s y m/s²]

$Z_e^*, Z_e^{**}, Z_e^{***}$ son la posición, velocidad y aceleración verticales del eje, respectivamente [m, m/s y m/s²]

$P_e^*, P_e^{**}, P_e^{***}$ son la posición, velocidad y aceleración angulares del eje, respectivamente [rad, rad/s y rad/s²]

5.2 Ecuaciones de Dinámica Longitudinal y Lateral del modelo

Adicionales a las ecuaciones expuestas anteriormente, se añaden las ecuaciones de dinámica longitudinal y lateral del cuerpo, que toman en cuenta los efectos que produce la dinámica vertical del vehículo sobre su comportamiento en estas direcciones. A continuación se describen las ecuaciones diferenciales que describen dicha dinámica.

5.2.1 Ecuaciones del cuerpo

Considerando el modelo expuesto anteriormente como un todo (un solo cuerpo rígido representando el vehículo) con tres grados de libertad: Dos traslaciones, en los ejes X y Y , y una rotación alrededor del eje Z , y expuesto a las fuerzas generadas en el neumático; cuando se aplica un diagrama de cuerpo libre al mismo se tiene que las ecuaciones que gobiernan su movimiento son:

$$\overset{*}{V}_x = \frac{\sum [F_{xi} \cos \delta_i - F_{yi} \sin \delta_i] + V_y \omega + \sum F_{x,aero} + g_x}{M_t} \quad [\text{m/s}^2] \quad (5.34)$$

$$\overset{*}{V}_y = \frac{\sum [F_{yi} \cos \delta_i - F_{xi} \sin \delta_i] - V_x \omega + \sum F_{y,aero} + g_y}{M_t} \quad [\text{m/s}^2] \quad (5.35)$$

$$\overset{**}{\Psi}_z = \frac{\sum [X_i (F_{yi} \cos \delta_i + F_{xi} \sin \delta_i) - Y_i (F_{xi} \cos \delta_i - F_{yi} \sin \delta_i)] + \sum M_{z,aero}}{I_{zz}} \quad [1/\text{s}^2] \quad (5.36)$$

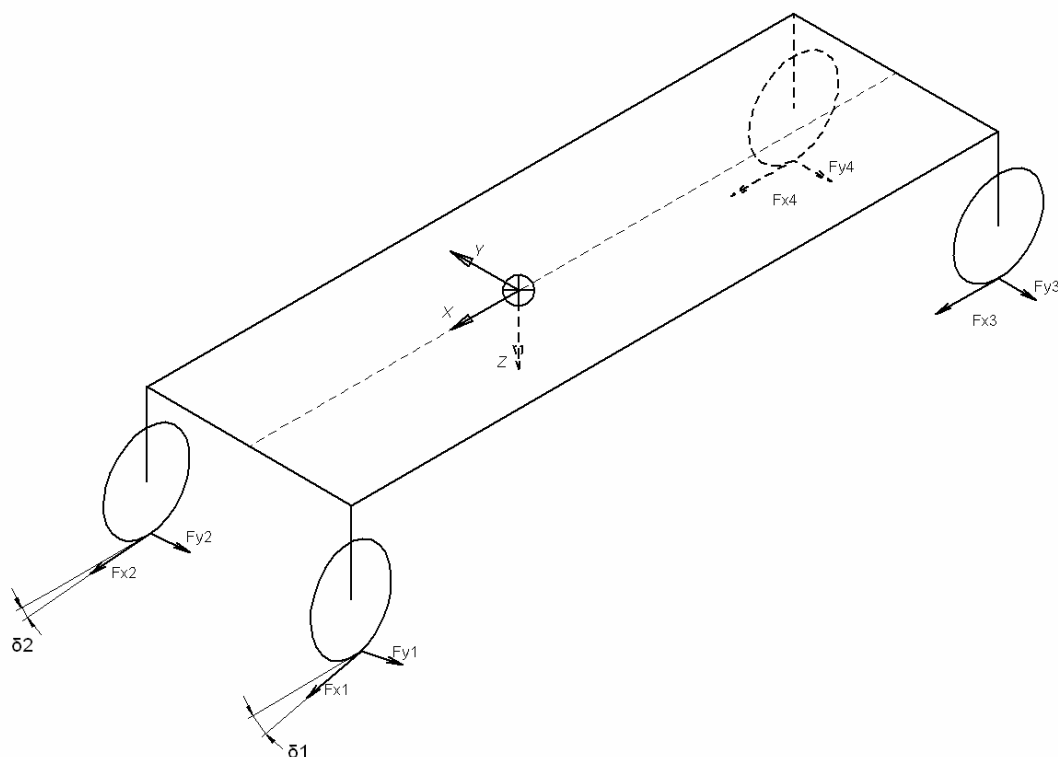


Fig. 5.7 Fuerzas longitudinales y laterales en el modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Donde:

g_x es la proyección de la gravedad en la dirección del eje X del vehículo. $[\text{m/s}^2]$

g_y es la proyección de la gravedad en la dirección del eje Y del vehículo. $[\text{m/s}^2]$

$\overset{*}{V}_x$ es la aceleración en la dirección del eje X del vehículo. $[\text{m/s}^2]$

$\overset{*}{V}_y$ es la aceleración en la dirección del eje Y del vehículo. $[\text{m/s}^2]$

V_x es la velocidad en la dirección del eje X del vehículo. [m/s]

V_y es la velocidad en la dirección del eje Y del vehículo. [m/s]

$\dot{\Psi}_z$ es la velocidad angular en la dirección del eje Z del vehículo. [1/s]

$\ddot{\Psi}_z$ es la aceleración angular alrededor del eje Z del vehículo. [1/s²]

F_{xi} es la fuerza que cada neumático desarrolla en la dirección del eje x anclado a la rueda. [N]

F_{yi} es la fuerza que cada neumático desarrolla en la dirección del eje y anclado a la rueda. [N]

δ_i es el ángulo de orientación de las ruedas, medido entre la dirección del eje x anclado a la rueda y el eje X del vehículo. [rad]

X_i, Y_i son las coordenadas de las posiciones de las ruedas respecto al centro de gravedad del vehículo. [m]

M_t es la masa total del vehículo. [kg]

I_{zz} es el momento polar de inercia del vehículo con respecto al eje Z . [kg m²]

5.2.2 Ecuaciones rotacionales de las ruedas

Adicionales a las ecuaciones que describen el movimiento vertical de las ruedas, es necesario conocer la rotación de las mismas en el eje y para conocer la relación de deslizamiento. Cuando se consideran las fuerzas longitudinales generadas en el neumático, y se efectúa un diagrama de cuerpo libre a cada una de las ruedas, la ecuación que describe su rotación alrededor de dicho eje es:

$$\dot{\omega}_y = \frac{\tau - R_e F_x}{I_r} \quad [1/s^2] \quad (5.36)$$

Donde:

$\dot{\omega}_y$ es la aceleración angular de la rueda alrededor de su eje y . [1/s²]

τ es el torque aplicado a la rueda, en función del tiempo. [Nm]

R_e es el radio efectivo de la rueda [m]

I_r es la inercia polar de la rueda alrededor del eje y . [kg m²]

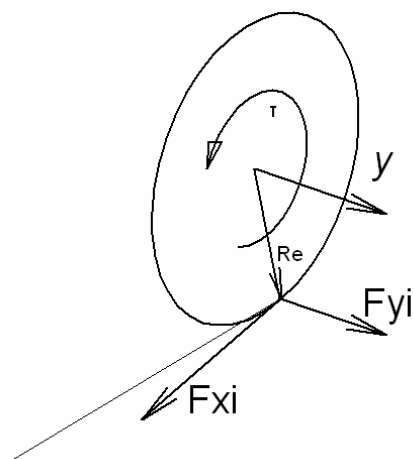


Fig. 5.8 Fuerzas y momentos actuando en la rueda del modelo de vehículo propuesto.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

5.3 Fuerzas externas aplicadas al cuerpo

Entre estas fuerzas se encuentran las fuerzas y momentos aerodinámicos aplicados al cuerpo, las cuales siguen la siguiente formulación:

$$F_{aero} = 0,5 \rho C_{aero} A_x V_{x,r}^2 \operatorname{sgn}(V_{x,r}) \quad [\text{N}] \quad (5.37)$$

$$M_{aero} = F_{aero} D \quad [\text{Nm}] \quad (5.38)$$

Donde

C_{aero} es el coeficiente aerodinámico en el eje respectivo [Adimensional]

A_x es el área transversal del vehículo en el eje X . [m^2]

$V_{x,r}$ es la velocidad del vehículo en el eje X , relativa al viento. [m/s]

ρ es la densidad del aire [kg/m^3]

Vale la pena destacar que para la fuerza aerodinámica en los ejes Y y Z del vehículo, se utiliza el área transversal y la velocidad en el eje X del mismo, ya que dicha fuerza representa la fuerza de asentamiento o la fuerza lateral generada en el vehículo como consecuencia de la velocidad a la que viaja.

D es la distancia en metros desde el centro de presión del vehículo (punto de aplicación de la resultante de fuerzas aerodinámicas) al centro de gravedad, medida de forma ortogonal al eje de interés. Así, por ejemplo, si se desea saber la

contribución de la fuerza aerodinámica lateral al momento de balanceo de la masa suspendida, sólo se toma la componente en Z de la ubicación del centro de presión.

5.4 Sistema de Dirección

Con la finalidad de incluir un sistema de dirección básico, capaz de establecer las condiciones adecuadas para que el modelo propuesto sea capaz de iniciar un viraje y detener los mismos, es necesario describir las ecuaciones que modelan dicho sistema.

5.4.1 Geometría de Ackermann

Para un vehículo de cuatro ruedas en una curva, debido a que las mismas no tienen el mismo radio de giro, es necesario implementar un sistema tal que les permita adaptarse a la diferencia de ángulos de orientación ocasionada por éstos radios, especialmente a bajas velocidades. Si bien las ruedas traseras no sufren de este problema, debido a que ambas se consideran ubicadas sobre la misma dirección radial, esto no es así para las ruedas delanteras, y sí presentan éste problema. Para solventar éste, la cinemática del mecanismo de dirección se dispone de tal manera que ambas ruedas tengan una orientación distinta conforme se gira el volante, en la mayoría de los casos, la rueda interna a la curva tiene un ángulo de orientación mayor que la externa a la curva. A esta geometría se le denomina Geometría de Ackermann, en honor a Rudolph Ackermann, quien la utilizó por primera vez en 1810.

La ecuación que rige la cantidad de ángulos extra que debe recorrer la rueda interna a la curva, en función de los grados que recorre la rueda externa es:

$$\cot(\delta_E) - \cot(\delta_I) = \frac{T}{L} \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.38)$$

Donde:

δ_E es el ángulo de orientación de la rueda externa. (Rad)

δ_I es el ángulo de orientación de la rueda interna. (Rad)

5.4.2 Cambio de Camber por Caster y KPI

Debido a la inclinación que tiene el eje de soporte de las ruedas a los brazos de dirección, cada vez que se cambia la orientación de las ruedas se tiene un cambio en el camber de las mismas, que ha de tomarse en cuenta para poder calcular correctamente la fuerza que generan los neumáticos.

La fórmula que rige el cambio de dicho ángulo en función de los parámetros ya mencionados anteriormente es:

$$\sin(C) = \tan K(\cos(C_0) - \cos(C) \tan(T)) - \cos(C) \sin(T) \tan(Ca) + \sin(C_0) \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.40)$$

Donde:

C es camber de la rueda de interés. (Rad)

K es la inclinación del eje de dirección de dicha rueda. (Rad)

T es el ángulo de orientación de dicha rueda. (Rad)

Ca es el caster de dicha rueda. (Rad)

C₀ es el camber de la rueda cuando la diferencia entre el ángulo de orientación actual y el ángulo de orientación inicial es igual a cero. (Rad)

Como no se puede despejar el parámetro de interés (Camber) en función de los demás parámetros, es necesario tomar una metodología alternativa: Se reordena la ecuación (5.40):

$$\sin(C) + \cos(C)(\cos(T) \tan(K) + \sin(T) \tan(Ca)) - \cos(C_0) \tan(K) - \sin(C_0) = 0 \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.41)$$

Y se definen los siguientes coeficientes:

$$Q_1 = 1/(\cos(T) \tan(K) + \sin(T) \tan(Ca)) \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.42)$$

$$Q_2 = Q_1(\cos(C_0) \tan(K) + \sin(C_0)) \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.43)$$

Sustituyendo (5.42) y (5.43) en (5.41), y reorganizando las variables, se obtiene:

$$(Q_1^2 + 1)\sin^2(C) + (-2Q_1Q_2)\sin(C) + (Q_2^2 - 1) = 0 \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.44)$$

La cual es una ecuación cuadrática para la variable $\sin(C)$. Definiendo como coeficientes de dicha ecuación cuadrática:

$$a = Q_1^2 + 1 \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.45)$$

$$b = -2Q_1Q_2 \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.46)$$

$$c = Q_2^2 - 1 \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.47)$$

Donde las raíces de dicha ecuación son:

$$\sin(C) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.48)$$

$$\sin(C) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [\text{Adimensional}] \quad (5.49)$$

La ecuación (5.48) es válida sólo para inclinaciones positivas del eje de dirección, mientras que la ecuación (5.49) es válida sólo para inclinaciones negativas del eje de dirección.

CAPÍTULO VI

METODOLOGÍA

Considerando los aspectos teóricos que rigen la dinámica vehicular y la interacción neumático-suelo expuestos anteriormente, se puede desarrollar un modelo matemático que permita predecir el comportamiento de un vehículo bajo diversas condiciones. Para ello en este trabajo especial de grado se desarrolló un modelo físico-matemático basado en ecuaciones diferenciales, obtenidas mediante el análisis detallado de cada una de las variables que afectan dicho modelo, y basadas en los modelos simplificados de autores como Milliken, Gilliespie, Dixon, Pacejka, y otros.

6.1 Lenguaje de programación utilizado

Al momento de seleccionar el lenguaje a utilizar para realizar la programación, se consideraron las siguientes características:

- (a) Facilidad de Programación: Refiriéndose a la dificultad de realizar un determinado bloque de código, que funcione de manera apropiada.
- (b) Facilidad de Aprendizaje del lenguaje: En caso de seleccionar un lenguaje no utilizado en las cátedras del pensum de ingeniero mecánico de la UCV, ¿Con que velocidad y facilidad puede ser comprendido el lenguaje por programadores no profesionales?
- (c) Portabilidad del programa: ¿Es necesario realizar grandes cambios en el código para poder construir el programa para su uso en múltiples plataformas?
- (d) Flexibilidad: En cuanto a el abanico de posibilidades que otorga el lenguaje para la resolución de un determinado problema.
- (e) Independencia: ¿Es necesario instalar un programa previo para poder ejecutar la aplicación a realizar? Ejemplo: MatLab.

Tomando en cuenta estos criterios, se selecciono el lenguaje C $\square$, el cual ofrece la mejor relación de flexibilidad y rapidez de aprendizaje, por su similitud con C++. Además de lo anterior, este lenguaje permite compilar una aplicación completamente independiente, pero específica a un sistema operativo, o en lenguaje

interpretado, que puede ser utilizado en distintos sistemas operativos mientras se tenga instalada la plataforma correspondiente.

6.2 Modelo de neumáticos

Debido a la necesidad de incluir un modelo que representara de manera precisa el comportamiento de los neumáticos bajo la influencia de sus principales variables de funcionamiento, no se desarrolló un modelo que simulara éstas interacciones, bastantes complejas y que escapan al alcance de éste trabajo, por lo tanto, basándose en factores tales como que dicho modelo haya sido comprobado y utilizado ampliamente, que tenga un grado de precisión alto comparado a otros modelos, y que sea fácil de implementar. Tomando en cuenta los criterios mencionados, se encontró que el modelo de Hans B. Pacejka, la Fórmula Mágica, es un modelo ampliamente utilizado por industrias de neumáticos alrededor del mundo entero para presentar los datos relativos a sus neumáticos, y también en simuladores, ya sean de análisis de dinámica vehicular, o de carácter recreativo, para simular el comportamiento de un vehículo real. Sin embargo, la información de los neumáticos necesaria para poder utilizar este modelo no es de fácil obtención, por lo tanto, es necesario incluir un método alternativo; el método escogido fue el de adimensionalización, basado en la Fórmula Mágica. El modelo de Cepillo (Brush Model), no fue incluido por alejarse del comportamiento real de un neumático al considerarlo isotrópico, y al simplificar el comportamiento en la zona de deslizamiento como la simple saturación del neumático, los cuales arrojan un comportamiento idealizado de lo que ocurre en el mismo.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, las ecuaciones que rigen el modelo de Pacejka son las ecuaciones (2.13) a (2.87), en cuyo caso se hacen 2 subdivisiones:

- (a) El denominado modelo de Pacejka Básico, el cual representa las fuerzas generadas en el neumático independientes unas de otras, es decir, sin tomar en cuenta efectos combinados, y se basa en las ecuaciones (2.13) a (2.60).

- (b) El Modelo de Pacejka Extendido, que además del juego de ecuaciones mencionado anteriormente, le añade las ecuaciones (2.61) a (2.87), con lo cual es capaz de describir también el comportamiento del neumático tomando en cuenta efectos combinados.

Adicionalmente, las ecuaciones que rigen el modelo de adimensionalización de datos son las ecuaciones (2.133) a (2.158), con las siguientes modificaciones:

- (a) Debido a la gran dispersión que genera la adimensionalización del momento autoalineante en función del grado de inclinación y la carga, sólo se toma en cuenta dicho momento bajo condiciones de cero (0) grados de inclinación, y la predicción del mismo se hace considerando el avance neumático, ec. (2.10):

$$M_{z0} = -t_0 F_{y0} \rightarrow t_0 = -\left(\frac{M_{z0}}{F_{y0}} \right) \quad [\text{m}] \quad (5.1)$$

y se considera independiente del ángulo de inclinación. La expresión del momento autoalineante, considerando el ángulo de inclinación, se convierte en:

$$M_z = -t_0 F_y = -\left(\frac{M_{z0} F_y}{F_{y0}} \right) \quad [\text{Nm}] \quad (5.2)$$

Donde:

M_z es el momento autoalineante bajo cualquier condición de carga y ángulo de inclinación. [Nm]

F_y es la fuerza lateral bajo cualquier condición de carga y ángulo de inclinación. [N]

M_{z0} es el momento autoalineante bajo cualquier condición de carga y a un ángulo de inclinación nulo. [Nm]

F_{y0} es la fuerza lateral bajo cualquier condición de carga y a un ángulo de inclinación nulo. [N]

t_0 es el avance mecánico bajo cualquier carga, a un ángulo de inclinación igual a cero. [m]

Dichas ecuaciones son la base del primer módulo del programa elaborado, el cual se encarga de procesar toda la información referente a los neumáticos.

6.2.1 TirAna (Tire Analyser)

TirAna es el nombre que lleva el módulo encargado de procesar la información referente a los neumáticos, siendo su estructura la que sigue:

- a. Sección encargada de recibir la información general del neumático, donde se solicitan:
 - El radio y anchura del neumático, los cuales pueden ingresarse directamente o mediante el serial representativo del mismo (Según la European Tire and Rim Technical Organization [ETRTO]).
 - Masa de la rueda (conjunto rin-neumático)
 - Momento de inercia de la rueda.
 - Presión de inflado del neumático.
 - Constante elástica del neumático, a la presión de inflado antes especificada.
 - Carga nominal del neumático.
 - Velocidad de referencia del neumático.
 - Comentarios (opcional).
- b. Sección encargada de recibir la información del neumático por el modelo de Pacejka, donde se solicitan los coeficientes que luego se utilizarán en las ecuaciones (2.21) a (2.59). Adicionalmente, y a discreción del usuario, pueden introducirse coeficientes adicionales referentes al comportamiento bajo fuerzas combinadas en el neumático, regido por las ecuaciones (2.63) a (2.87).
- c. Sección encargada de recibir la información del neumático para ser procesada mediante el método de Adimensionalización. En esta sección se encuentran tres divisiones, cada una encargada de procesar la información referente a un tipo de fuerza (longitudinal y lateral) y momento autoalineante.

Cabe destacar que no es necesario introducir la información referente a la sección (c) cuando se ha completado la información de la sección (b) y viceversa. Éste módulo, además, dispone de una herramienta que permite graficar el comportamiento de las fuerzas del neumático final a distintas cargas y ángulos de inclinación, con el fin de proporcionar al usuario del mismo una manera fácil de observar el comportamiento de los mismos y verificar que las entradas al programa hayan sido las correctas.

6.3 Modelo de suspensiones

Debido al sinnúmero de esquemas de suspensiones existentes hoy en día y a la dificultad que representa el poder modelar todos y cada uno de ellos al detalle, el modelo de simulación de suspensiones utilizado se basa en la variación de los parámetros importantes en función de la posición y velocidad de la rueda con respecto al vehículo. Dichos parámetros están representados en la tabla (6.1) en función de aquellos parámetros con respecto a los cuales varían:

Tabla 6.1: Parámetros geométricos variables en función del rebote de la rueda

Parámetro dependiente	Parámetro independiente
Relación de movimiento del elemento elástico	Rebote de la rueda
Relación de movimiento del amortiguador	Rebote de la rueda
Ángulo de Camber	Rebote de la rueda
Convergencia	Rebote de la rueda
Ángulo de Caster	Rebote de la rueda
Posición en <u>X</u> y <u>Y</u> del centro instantáneo de rotación de las ruedas en la vista frontal	Rebote de la rueda
Posición en <u>X</u> y <u>Z</u> del centro instantáneo de rotación de las ruedas en la vista lateral	Rebote de la rueda

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Debido a que estas variaciones son relativas a la condición estática de cada uno de dichos parámetros, es necesario indicar dicha condición para cada uno de los mismos. De esta manera, el comportamiento de cada esquema de suspensión es explícitamente descrito por el usuario, y no se tienen limitaciones en la simulación detallada de los distintos tipos de suspensión existentes, y en aquellos que estén bajo desarrollo. Adicionalmente, y siguiendo la misma filosofía, se definen la rigidez del elemento elástico, la rigidez del amortiguador para cada rueda, en función de la posición de la misma, además del valor de dichos parámetros en la condición estática del vehículo. También se define la rigidez de la barra antibalanceo en cada eje, en función de la diferencia total de alturas entre las ruedas de un mismo eje.

Tabla 6.2: Parámetros físicos variables con respecto a la posición relativa de las ruedas.

Parámetro dependiente	Parámetro independiente
Rigidez del elemento elástico (K)	Rebote de la rueda
Rigidez del amortiguador (C)	Rebote de la rueda
Rigidez de la barra antibalanceo (K_t)	Diferencia de alturas entre la ruedas

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

6.3.1 AutAna (Automobile Analyzer)

AutAna es el nombre del módulo encargado de la configuración del automóvil y de los esquemas de suspensión que éste lleve equipado. Los datos configurables en este módulo son:

Datos generales:

- Masa total y posición del centro de gravedad del automóvil.
- Momentos de inercia polares alrededor de los ejes X , Y para la masa suspendida, y alrededor del eje Z para el automóvil como un todo.
- Distancia entre ejes (batalla) del automóvil.
- Ancho de cada uno de los ejes (vías) del automóvil.
- Área transversal, normal al eje X del automóvil.
- Coordenadas del centro de presión aerodinámico del automóvil.
- Coefficientes aerodinámicos en los ejes X , Y , Z del automóvil.

Éste módulo toma como el origen del sistema de coordenadas el lugar geométrico de la intersección de las diagonales del polígono conformado por los centros de las ruedas del vehículo.

También es necesario cargar los archivos de ruedas preprocesadas por el módulo TirAna, con el fin de definir las ruedas y neumáticos a ser utilizados por el automóvil.

Ejes Delantero y Trasero:

- Masa no suspendida de cada eje, excluyendo la masa de las ruedas.

- i. Altura del centro de gravedad de la masa no suspendida de cada eje, excluyendo la masa de las ruedas.
- j. Tipo de suspensión (independiente ó de eje rígido) y tipos de frenos (internos ó externos).
- k. Inercia polar alrededor del eje X , si es tipo de suspensión de eje rígido.
- l. Ángulos de rueda estáticos (Camber y orientación).
- m. Coordenadas de los centros instantáneos de rotación de las ruedas, en la condición estática del vehículo (X y Z para la vista lateral de los mismos; Y y Z para la vista frontal).
- n. Rigidez del elemento elástico, constante de amortiguación para cada rueda, y rigidez de la barra antibalanceo para cada eje.
- o. Variación de ángulos (Camber, Caster y Orientación) en función del rebote de la rueda.
- p. Movimiento de los Centros Instantáneos de rotación en función del rebote de la rueda.
- q. Relaciones de movimiento para el elemento elástico y el amortiguador, en función del rebote de la rueda.
- r. Sistema de Dirección (opcional para el eje trasero)
- s. Ángulos del sistema de dirección (Caster e inclinación del eje de dirección).
- t. Avance frontal del eje de dirección y separación lateral del eje de dirección.
- u. Geometría de los ángulos de Orientación: Geometría de Ackermann ó personalizable.
- v. Relación de dirección (ángulos de volante/ángulos de rueda).

6.4 SusAna (Suspension Analyzer)

Las ecuaciones (5.1) a (5.49) son la base de éste módulo, cuya función es analizar el comportamiento de cualquier vehículo configurado previamente a las perturbaciones configuradas aquí.

Las perturbaciones con las que cuenta el módulo son:

- (a) Dirección y velocidad del viento, en función del tiempo.
- (b) Condiciones de suelo: Se pueden configurar unas condiciones generales, por lado, o individuales a cada rueda. La información del perfil del suelo se puede describir explícitamente, o también se cuenta con un asistente, que permite introducir perturbaciones bajo un perfil predeterminado (armónico o trapezoidal) y perturbaciones al azar. Además, puede definirse el coeficiente de fricción de la superficie, relativo al utilizado en la información de los neumáticos.
- (c) Torque de propulsión: Puede configurarse de manera general, aplicado a las 2 ruedas de un eje particular ó a las 4 ruedas mediante una distribución de torque a cada eje definida por el usuario, o torque individual a cada rueda.
- (d) Torque de frenado: Puede configurarse de manera general, aplicado a las 4 ruedas mediante una distribución de torque a cada eje definida por el usuario, o torque individual a cada rueda.
- (e) Volante: Se configura el desplazamiento angular del volante.

Todas éstas variables, con excepción de las referidas al viento, pueden ser configuradas en función del tiempo o de la distancia recorrida por el vehículo, al momento de ejecutarse el módulo. Adicionalmente, para estudios basados en tiempo y con perfiles de suelo general ó iguales por lado, puede configurarse un retraso de tiempo de dichas perturbaciones para el eje trasero.

Entre otras variables configuradas por el usuario en cada estudio, figuran:

- (f) Frecuencia de la simulación.
- (g) Tiempo total de la simulación.
- (h) Condiciones iniciales de la simulación:
 - (a) Posición y velocidad en el eje Z, para cada una de las ruedas.
 - (b) Posición y velocidades angulares para cada una de las ruedas
 - (c) Posición y velocidad en los ejes X, Y, Z del vehículo.
 - (d) Posición y velocidades angulares en los ejes X, Y, Z del vehículo.

Las cuales pueden ser ingresadas por el usuario o cargadas desde un estudio previo.

Además, el usuario dispone de opciones para la simulación, tales como:

- (i) Estudio completo, de sólo vibraciones (se restringe al automóvil de moverse en las direcciones X y Y) ó sólo desempeño (Se ignora la dinámica vertical, ángulos de cabeceo y balanceo del modelo).
- (j) Simulación de fenómenos complejos, tales como:
 - a. Levantamiento.
 - b. Momentos Aerodinámicos.
 - c. Circulo de fricción de los neumáticos, en el caso de aquellos neumáticos procesados mediante el método de adimensionalización o mediante la Fórmula Mágica sin describir fuerzas combinadas.
 - d. Cambio de Camber por caster e inclinación del eje de dirección.
 - e. Efecto de peraltes y pendientes.
- (k) 14 grados de libertad o 10 grados de libertad (supresión de los grados de libertad rotacionales de las ruedas).
- (l) Opciones de simulación de neumáticos:
 - (a) Banda proporcional para la fuerza longitudinal, lateral y/o la fuerza de empuje producida por el grado de inclinación de los neumáticos.
 - (b) Filtro de baja velocidad en frenado.

Algunas de estas opciones se originan de la necesidad de poder realizar una simulación tan sencilla o compleja como se requiera, otorgándole al usuario la facilidad de incluir cuantos fenómenos considere necesarios en los estudios que desee hacer. Otras, sin embargo, se originan por las limitaciones intrínsecas a los modelos ya descritos, y entre ellas están:

- (a) Efecto de peraltes y pendientes: Si bien las ecuaciones del modelo fueron desarrolladas para tomar en cuenta las proyecciones del vector gravedad sobre el sistema de ejes anclado al vehículo, en estudios particulares, la gravedad genera efectos no deseados para evaluar los sistemas de

suspensión. Por ello se le da la opción al usuario para activar o desactivar los efectos de la misma.

- (b) Banda proporcional de fuerzas, filtro de frenado a bajas velocidades. Los modelos de neumáticos aquí mencionados, describen de manera adecuada el comportamiento del neumático a velocidades moderadas y altas. Sin embargo, se puede dar la situación en la que se genere una fuerza en el neumático superior a la que los mecanismos de adherencia e histéresis pueden producir a bajas velocidades. Para solucionar esta situación, se multiplican las fuerzas que genera el neumático por una banda lineal proporcional, que varía desde un valor igual a cero a velocidad cero, hasta un valor igual a uno, a una velocidad igual o superior a la velocidad de referencia indicada para el neumático en cuestión. En el caso del filtro de frenado, mientras exista un torque de frenado superior al torque propulsor, la velocidad longitudinal del vehículo este por debajo un centímetro por segundo y esta sea superior a la velocidad lateral, se detiene el movimiento traslacional del cuerpo, así como su velocidad de giro y las velocidades rotacionales de las ruedas.
- (c) Supresión de los grados de libertad rotacionales en las ruedas: Al desarrollar este modelo, se observó que la ecuación de relación de deslizamiento, que controla las fuerzas longitudinales en el neumático, posee una indeterminación (Cero/cero) en situaciones de puesta en marcha del vehículo y detención del mismo. En estudios preliminares, se encontró que por debajo de cierta velocidad crítica, dependiente de la frecuencia de simulación utilizada y de las características particulares de cada curva de fuerzas, estos modelos de neumáticos fallan en establecer una fuerza que represente la realidad, al generar fuerzas de magnitudes muy elevadas e incluso de direcciones contrarias a las esperadas. Para reemplazar este grado de libertad por rueda, se calcula la fuerza longitudinal del neumático como la sumatoria de torques aplicados a una rueda y dividido entre el radio equivalente de la misma, mientras esta fuerza no supere el máximo

que puede generar a las condiciones en el instante de tiempo analizado, y luego se determina la relación de deslizamiento necesaria para producir esta fuerza, y con ella se consigue la velocidad de rotación de la rueda.

En resumen, para describir la simulación del vehículo (ejemplo dado para suspensiones independientes) SusAna tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales. Se puede observar a simple vista la dificultad que entraña la resolución de este sistema de ecuaciones mediante los métodos analíticos convencionales, por ello para poder resolver este sistema, se utiliza el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$\left\{ \begin{array}{l}
Z_s^{**} = \frac{-(F_{k1} + F_{k2} + F_{k3} + F_{k4} + F_{c1} + F_{c2} + F_{c3} + F_{c4} - F_{ez})}{M_s} \\
\Pi_s^{**} = \frac{(F_{k1} + F_{c1})d_{\pi1} + (F_{k2} + F_{c2})d_{\pi2} - (F_{k3} + F_{c3})d_{\pi3} - (F_{k4} + F_{c4})d_{\pi4} + M_{ey}}{I_{yy}^*} \\
P_s^{**} = \frac{(F_{k1} + F_{c1})d_{\rho1} - (F_{k2} + F_{c2})d_{\rho2} + (F_{k3} + F_{c3})d_{\rho3} - (F_{k4} + F_{c4})d_{\rho4} + M_{ex}}{I_{xx}^*} \\
Z_1^{**} = -\frac{[-F_{k1} - F_{c1} + F_{n1} + F_{antibalancedelantera}]}{m_1} \\
Z_2^{**} = -\frac{[-F_{k2} - F_{c2} + F_{n2} - F_{antibalancedelantera}]}{m_2} \\
Z_3^{**} = -\frac{[-F_{k3} - F_{c3} + F_{n3} + F_{antibalancedeotrasera}]}{m_3} \\
Z_4^{**} = -\frac{[-F_{k4} - F_{c4} + F_{n4} - F_{antibalancedeotrasera}]}{m_4} \\
V_x^* = \frac{\sum [F_{xi} \cos \delta_i - F_{yi} \sin \delta_i] + V_y \omega + \sum F_{x,aero} + g_x}{M_t} \\
V_y^* = \frac{\sum [F_{yi} \cos \delta_i - F_{xi} \sin \delta_i] - V_x \omega + \sum F_{y,aero} + g_y}{M_t} \\
\Psi_z^{**} = \frac{\sum [X_i (F_{yi} \cos \delta_i + F_{xi} \sin \delta_i) - Y_i (F_{xi} \cos \delta_i - F_{yi} \sin \delta_i)] + \sum M_{z,aero}}{I_{zz}} \\
\omega_{y1}^* = \frac{\tau_1 - R_{e1} F_{x1}}{I_{r1}} \\
\omega_{y2}^* = \frac{\tau_2 - R_{e2} F_{x2}}{I_{r2}} \\
\omega_{y3}^* = \frac{\tau_3 - R_{e3} F_{x3}}{I_{r3}} \\
\omega_{y4}^* = \frac{\tau_4 - R_{e4} F_{x4}}{I_{r4}}
\end{array} \right.$$

Fig. 6.1 Sistema de ecuaciones a ser resuelto por el módulo de dinámica vehicular.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

CAPÍTULO VII

RESULTADOS

Para poder evaluar el modelo propuesto anteriormente, se diseñó una serie de estudios que tienen como objetivo observar el comportamiento dinámico del vehículo en distintos escenarios al variar algunos parámetros importantes de los sistemas de suspensión. Dichos estudios fueron diseñados para comparar como afectan dichos cambios a las distintas respuestas de un vehículo en las áreas de comodidad, seguridad y desempeño.

7.1 Vehículo de estudio

Debido a la poca cantidad de información referente a un vehículo completo encontrada en la literatura, se recurrió a tomar valores recomendados y/o promedios de los parámetros para una clase de vehículos establecida, la cual fue un sedan de tamaño medio, de buen desempeño. De tal forma, se tiene un vehículo promedio entre automóviles de bajo costo para pasajeros, y vehículos deportivos de calle.

Las propiedades características del vehículo representativo del segmento de vehículos descrito anteriormente, se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 7.1: Parámetros de la configuración base utilizada en la simulación.

Parámetro	Valor
Masa total [kg]	1500
Ubicación del centro de gravedad total	En el plano medio del vehículo, a igual distancia de los ejes delantero y trasero, a 0,5m del suelo
Momentos de inercia de la masa suspendida, I_{xx} , I_{yy} [kg/m ²]	573,44 1787,66
Momento de inercia del vehículo completo, I_{zz} [kg/m ²]	1983,75
Distancia entre ejes [m]	2,54
Ancho de vías delantero y trasero [m]	1,397
Área transversal en el eje X del vehículo	0 (para despreciar efectos

[m ²]	aerodinámicos)
Coordenadas del centro de presión aerodinámico del vehículo [m]	Ubicado en el centro de gravedad (para despreciar efectos aerodinámicos)
Coeficientes aerodinámicos del vehículo	0,0,0 (para despreciar efectos aerodinámicos)
Eje delantero	
Masa no suspendida total [kg]	50
Altura del centro de gravedad de la masa suspendida [m]	0,15m por encima del suelo
Tipo de suspensión	Independiente
Tipo de frenos	Externos
Camber estático de ambas ruedas [grados]	0
Angulo de orientación estático de ambas ruedas [grados]	0
Ubicación de los centros instantáneos de rotación de las ruedas en la vista frontal [m]	A 0,15m encima del suelo, en el plano de simetría del vehículo
Ubicación de los centros instantáneos de rotación de las ruedas en la vista lateral [m]	A 0,05m encima del suelo, a igual distancia de los ejes delantero y trasero
Rigidez del elemento elástico [N/m]	45000
Coeficiente del amortiguador [Ns/m]	4500
Rigidez de la barra estabilizadora [N/m]	0
Relaciones de movimiento para el elemento elástico y amortiguador	1
Variación de camber con el rebote de la rueda [grados/m]	0
Variación del ángulo de orientación con el	0

rebote de la rueda [grados/m]	
Variación de caster con el rebote de la rueda [grados/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación frontal en el eje Y con el rebote de la rueda [m/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación frontal en el eje Z con el rebote de la rueda [m/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación lateral en el eje X con el rebote de la rueda [m/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación lateral en el eje Z con el rebote de la rueda [m/m]	0
Dirección	Si
Inclinación del eje de dirección [grados]	0
Avance frontal del eje de dirección [m]	0
Separación lateral del eje de dirección [m]	0
Caster [grados]	0
Geometría tipo Ackermann	Si
Porcentaje	0 (geometría paralela)
Relación de volante/ruedas [grados/grados]	1 (para controlar directamente la orientación de las ruedas)
Eje trasero	
Masa no suspendida total [kg]	50
Altura del centro de gravedad de la masa suspendida [m]	0,15m por encima del suelo
Tipo de suspensión	Independiente

Tipo de frenos	Externos
Camber estático de ambas ruedas [grados]	0
Angulo de orientación estático de ambas ruedas [grados]	0
Ubicación de los centros instantáneos de rotación de las ruedas en la vista frontal [m]	A 0,15m encima del suelo, en el plano de simetría del vehículo
Ubicación de los centros instantáneos de rotación de las ruedas en la vista lateral [m]	A 0,05m encima del suelo, a igual distancia de los ejes delantero y trasero
Rigidez del elemento elástico [N/m]	45000
Coeficiente del amortiguador [Ns/m]	4500
Rigidez de la barra estabilizadora [N/m]	0
Relaciones de movimiento para el elemento elástico y amortiguador	1
Variación de camber con el rebote de la rueda [grados/m]	0
Variación del ángulo de orientación con el rebote de la rueda [grados/m]	0
Variación de caster con el rebote de la rueda [grados/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación frontal en el eje Y con el rebote de la rueda [m/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de rotación frontal en el eje Z con el rebote de la rueda [m/m]	0
Movimiento del centro instantáneo de	0

rotación lateral en el eje X con el rebote de la rueda [m/m]	
Movimiento del centro instantáneo de rotación lateral en el eje Z con el rebote de la rueda [m/m]	0
Dirección	No

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Adicionalmente, las propiedades de la rueda y los coeficientes de los neumáticos utilizados en la simulación de este modelo se resumen la siguiente tabla:

Tabla 7.2: Parámetros de las ruedas y neumáticos utilizados en la simulación.

Parámetro	Valor
Radio [m]	0.3
Anchura [m]	0.2
Masa [kg]	5
Momento de inercia [kg/m^2]	1
Constante de elasticidad del neumático [N/m]	300000
Velocidad de referencia [m/s]	10
Presión de inflado [kPa]	200
Carga nominal del neumático [N]	3000
Fuerza Longitudinal	
Pcx1	1,65
Pdx1	1
Pdx2	0
Pex1	-0,5
Pex2	0
Pex3	0
Pex4	0

Pkx1	12
Pkx2	10
Pkx3	-0,6
Phx1	0
Phx2	0
Pvx1	0
Pvx2	0
Fuerza Lateral	
Pcy1	1,3
Pdy1	-1
Pdy2	0
Pdy3	0
Pey1	-1
Pey2	0
Pey3	0
Pey4	0
Phy1	0
Phy2	0
Phy3	-0,25
Pky1	-10
Pky2	1.5
Pky3	0
Pvy1	0
Pvy2	0
Pvy3	0,15
Pvy4	0
Momento Autoalineante	
Qbz1	6
Qbz2	-4

Qbz3	0,6
Qbz4	0
Qbz5	0
Qbz9	0
Qbz10	0,7
Qcz1	1,05
Qdz1	0,12
Qdz2	-0,03
Qdz3	0
Qdz4	-1
Qdz6	0
Qdz7	0
Qdz8	0,6
Qdz9	0,2
Qez1	-10
Qez2	0
Qez3	0
Qez4	0
Qez5	0
Qhz1	0
Qhz2	0
Qhz3	0
Qhz4	0
Qvz1	0

(Fuente: Pacejka, Hans. “Tyre and Vehicle Dynamics”, 2002)

A dicha configuración, se le hicieron las siguientes variaciones (Sólo una variación a la vez):

Tabla 7.3: Variación de parámetros de la configuración base para simular distintos vehículos.

Variación	Parámetro	Valor
A-1	Altura del centro de balanceo	Al nivel del suelo.
A-2		0.3m por encima del suelo.
B-1	Camber estático	+3 grados
B-2		-3 grados
C-1	Geometría de dirección	Pro Ackermann (100%)
C-2		Anti Ackermann (-100%)
D-1	Distinta rigidez de elementos elásticos, por eje	K delantera: 54000 N/m K trasera: 36000 N/m
D-2		K delantera: 36000 N/m K trasera: 54000 N/m
E-1	Distinto coeficiente de amortiguación general	5400 Ns/m
E-2		3600 Ns/m
F-1	Presencia de barras antibalanceo, por eje	K_t delantera: 4500 N/m
F-2		K_t trasera: 1000 N/m
G-1	Distinta masas no suspendidas, general	84kg por eje
G-2		116kg por eje
H-1	Distinta distancia entre ejes	2,794 m
H-2		2,286 m
I-1	Distinta anchura de vías	1,524 m
I-2		1,27 m

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Las pruebas diseñadas fueron las siguientes:

- (a) Aceleración y frenado: La fase de aceleración se compone de una rampa decreciente, iniciando con 3000Nm de potencia a 0s, y finalizando a 10s con un torque nulo, siempre distribuidos entre las ruedas traseras del modelo. La fase de frenado incluye una rampa creciente, que va desde 0Nm de torque total de frenado a 15s, hasta un máximo de 5000Nm de torque de frenado a 20s, con una distribución de frenado de 70% hacia las ruedas delanteras. No existen perturbaciones de volante, ni cambios en la configuración del suelo. La finalidad de este estudio es evaluar el desempeño longitudinal del vehículo. La duración del mismo es de 25s.
- (b) Policía acostado: Se simuló un policía acostado de perfil armónico, de 10cm de alto por 1,5m de longitud, a una velocidad de 3m/s (10,8km/h). No se aplica torque motriz ni torque de frenado a las ruedas, ni existe perturbación alguna de volante. La perturbación está hecha de forma tal que la misma se presente a los 5s de iniciado el estudio. Con este estudio se evalúa la comodidad del conductor y pasajeros del vehículo. La duración del estudio es de 10s.
- (c) Policía acostado a distintas velocidades: Este estudio se hace con la finalidad de evaluar la comodidad del usuario al recorrer la perturbación de suelo anterior a distintas velocidades longitudinales, por ello, la única diferencia en este estudio y el anterior, es la velocidad a la cual viaja el vehículo, las cuales son de 7m/s (25,2km/h) y 11m/s (39,6km/h).
- (d) Evasión de Accidentes: Se hace una simulación básica de lo que podrían ser las maniobras bruscas de evasión de un objeto a 23m/s (82,8km/h). Existen varias perturbaciones del volante, expresadas por rampas crecientes y decrecientes según los siguientes puntos:
 - 0 grados a 1s.
 - 15 grados a 1,5s; mantenido hasta 1,75s.
 - -7,5 grados a 2,5s.
 - 0 grados a 2,75s.

Adicionalmente, se aplican los frenos según una rampa creciente que comienza a los 1,25s, y que alcanza su valor máximo de 3000Nm a 1,5s; se mantiene dicho torque de frenado hasta los 2s y luego se retira con una rampa decreciente hasta torque nulo a 2,5s. No se aplica torque motriz al vehículo, ni se cambian las condiciones del pavimento. Con este estudio se evaluarán parámetros referentes a la seguridad del vehículo. El mismo tiene una duración de 5s

(e) Giro en ambos sentidos: Dicho estudio se compone de 2 fases simétricas de giro de volante, con el fin de evaluar el manejo del automóvil y su comportamiento en un giro o curva. Las entradas para este estudio son:

- Volante: Rampa creciente hasta 20 grados de giro de volante, comenzando en 0s y finalizando en 5s, manteniendo dicha perturbación constante hasta los 30s. Luego un cambio de posición angular del volante, desde 20 grados a -20 grados, iniciando en 30s y finalizando a los 40s, manteniendo el giro de volante constante hasta los 65s. Por último, rampa decreciente de giro de volante, hasta 0 grados, iniciando en 65s y finalizando en 70s.
- Torque motriz: 500Nm repartidos entre las ruedas traseras, constantes durante todo el estudio.
- Velocidad inicial del vehículo: 14m/s (50,4km/h)

En este estudio no se aplica torque de frenado al vehículo, como tampoco se cambian las condiciones del pavimento.

En las tablas (7.4) a (7.8) se resumen las entradas en función del tiempo, de manera idéntica a como se ingresaron las mismas en el módulo SusAna, mediante la herramienta de interpolación integrada al programa, para cada estudio particular.

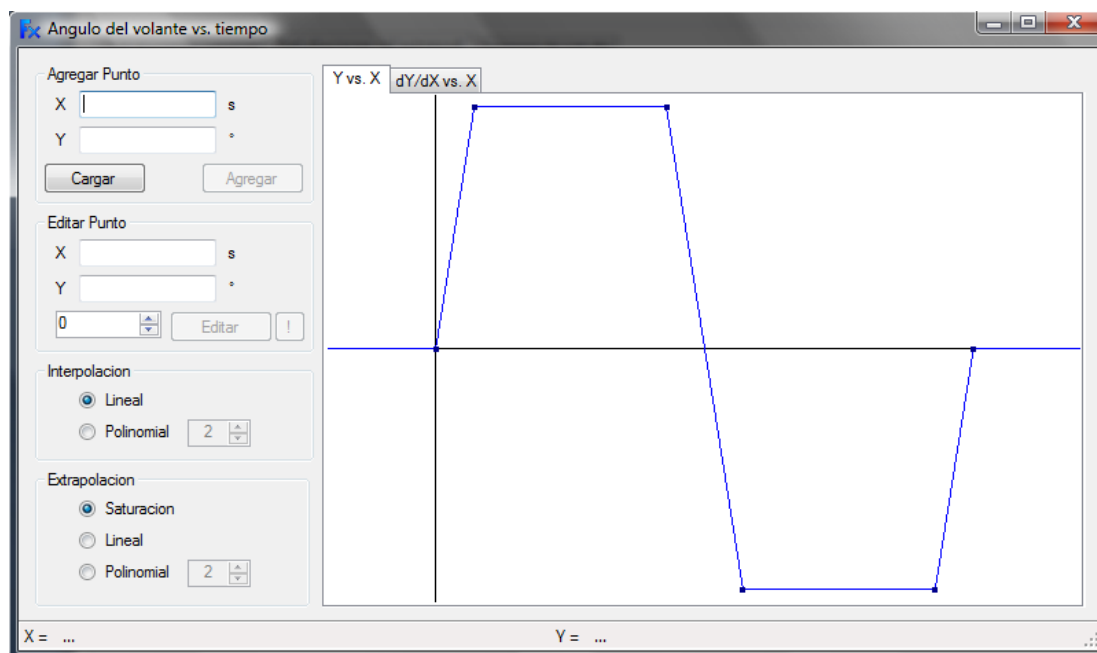


Fig. 7.1 Herramienta de interpolación del modulo SusAna.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.4: Configuración de entradas para el estudio de Evasión de Accidente.

Tiempo (s)	Torque Motriz Total (Nm)	Torque de frenado total (Nm)	Giro de volante (Grados)
0	0	-	-
1	-	-	0
1,25	-	0	-
1,5	-	3000	15
1.75	-	-	15
2	-	3000	-
2.5	-	-	-7.5
2.75	-	0	0

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.5: Configuración de entradas para el estudio de Aceleración y Frenada.

Tiempo (s)	Torque Motriz Total (Nm)	Torque de frenado total (Nm)	Giro de volante (Grados)
0	3000	-	0
10	0	-	-
15	-	0	-
20	-	5000	-

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.6: Configuración de entradas para el estudio de Policía Acostado.

Tiempo (s)	Torque Motriz Total (Nm)	Torque de frenado total (Nm)	Giro de volante (Grados)
0	0	0	0

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.7: Configuración de entradas para el estudio de Evasión de Accidente.

Tiempo (s)	Torque Motriz Total (Nm)	Torque de frenado total (Nm)	Giro de volante (Grados)
0	500	0	0
5	-	-	20
30	-	-	20
40	-	-	-20
65	-	-	-20
70	-	-	0

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.8: Condiciones iniciales y tiempo total de cada estudio particular

Estudio	Velocidad en X del cuerpo (m/s)	Velocidad de rotación de ruedas (grados/s)	Tiempo total de estudio (s)
Evasión de Accidente	23	4393	5
Aceleración y frenado	0	0	25
Giro en ambos sentidos	14	2674	70
Policía Acostado (3m/s)	3	573	10
Policía Acostado (7m/s)	7	1337	10
Policía Acostado (11m/s)	11	2101	10

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Para cada estudio particular se incluyeron sólo determinadas configuraciones de vehículos, como se detallará en la tabla (7.9). Cabe destacar que todos los estudios también fueron hechos con el vehículo base, para tener un punto de comparación.

Tabla 7.9: Configuraciones utilizadas en los diversos estudios.

Estudio	Configuraciones estudiadas
Aceleración y frenado	G-1, G-2. H-1, H-2.
Policía acostado, distintas velocidades	Solo base.
Policía acostado a 3m/s	D-1, D-2. E-1, E-2. G-1, G-2.
Evasión de accidente	G-1, G-2. H-1, H-2. I-1, I-2.
Giro en ambos sentidos	A-1, A-2. B-1, B-2. C-1, C-2. F-1, F-2. H-1, H-2. I-1, I-2.

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

7.2 Resultados

7.2.1 Estudio de Aceleración y Frenado

Tabla 7.10: Resultados numéricos de los estudios de Aceleración y Frenado.

	Distancia recorrida en aceleración [m]	Distancia recorrida en frenado [m]	Tiempo de frenado [s]	Velocidad máxima alcanzada [m/s]	Aceleración máxima [m/s ²]	Desaceleración máxima [m/s ²]	Angulo de Cabeceo máximo [°]	Máximo desplazamiento vertical del cuerpo [mm]
Base	180.1	99.6	5.438	29.19	5.697	9.388	-1.345	9.778
G-1	179.6	99.2	5.42	29.2	5.699	9.396	-1.33	9.666
G-2	180.7	100	5.46	29.17	5.695	9.369	-1.35	9.867
H-1	177.4	98.3	5.453	28.86	5.629	9.109	-1.076	8.792
H-2	183.6	101.2	5.434	29.59	5.781	9.753	-1.73	11

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

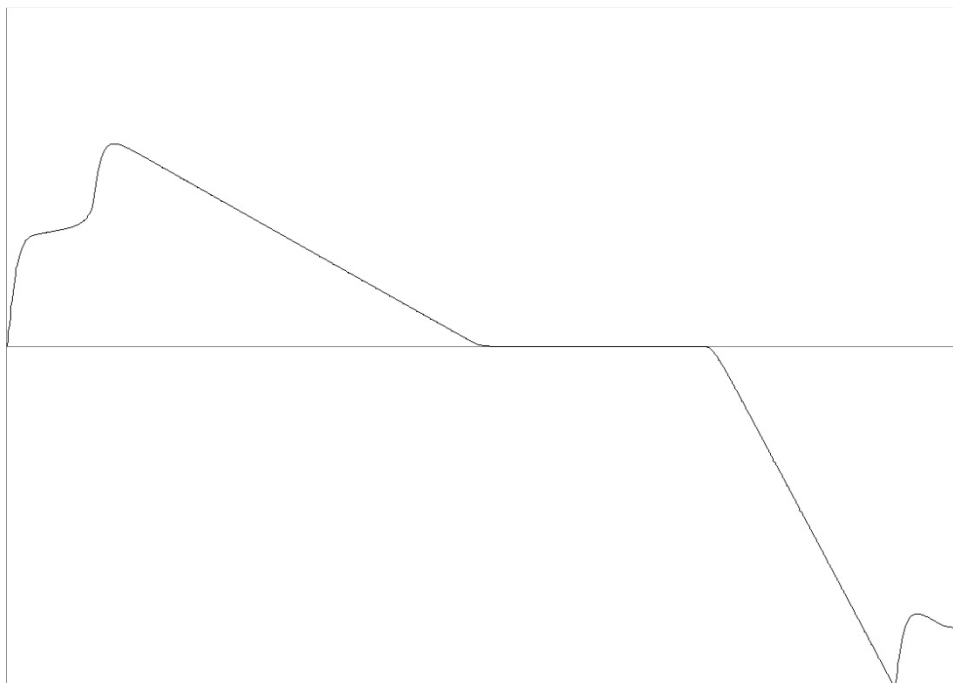


Fig. 7.2 Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Aceleración longitudinal del vehículo en función del tiempo, vehículo base:

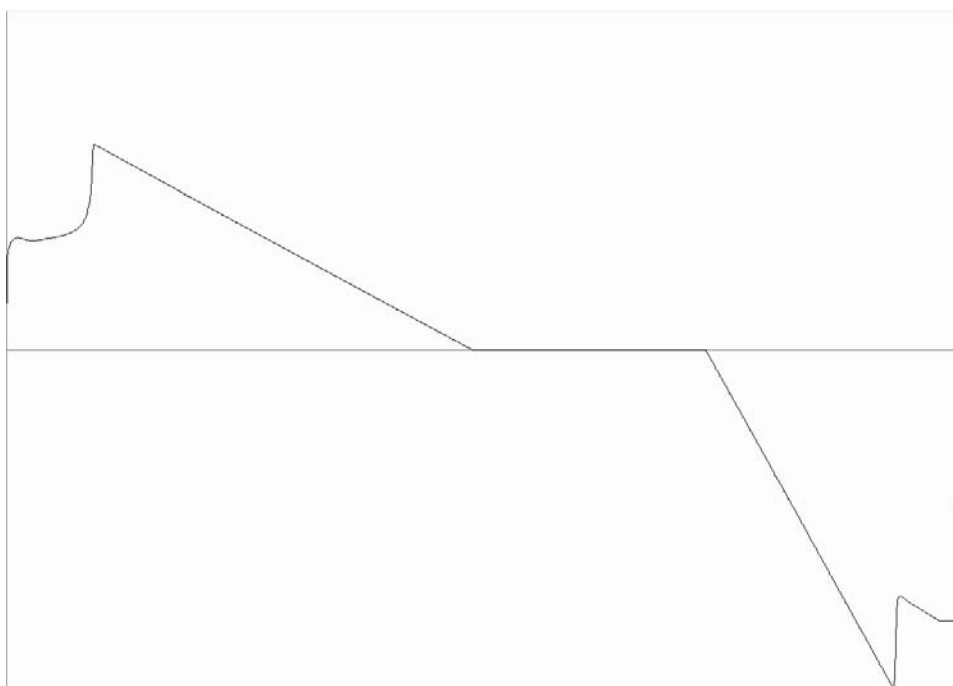


Fig. 7.3 Aceleración longitudinal del vehículo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Distancia recorrida del vehículo en función del tiempo, vehículo base:

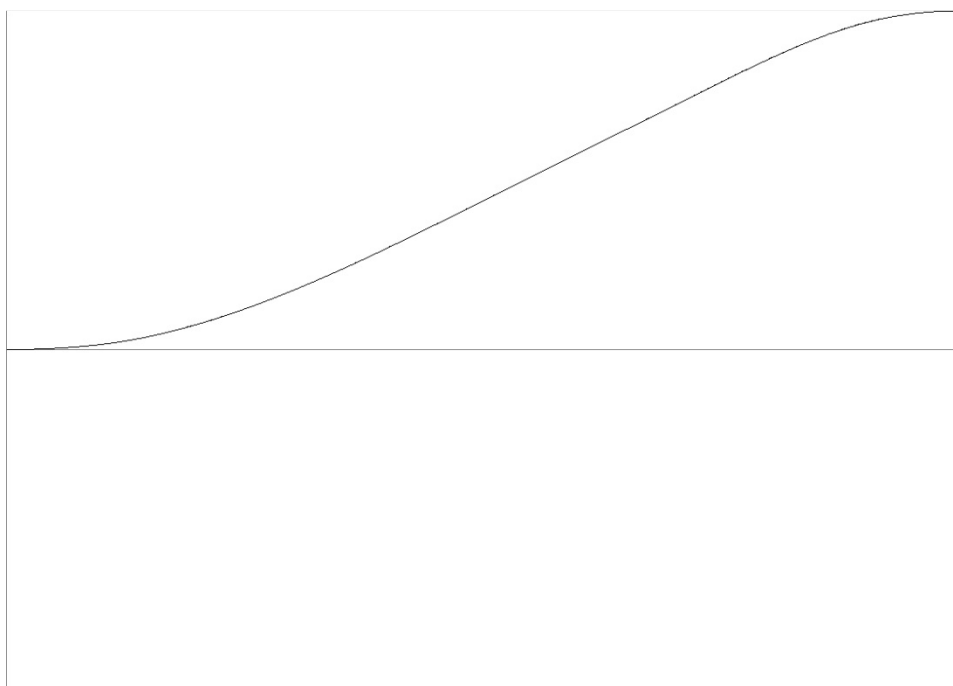


Fig. 7.4 Distancia recorrida del vehículo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

7.2.2 Estudio de Policía Acostado

Tabla 7.11: Resultados numéricos de los estudios de Policía Acostado.

	Máximo desplazamiento vertical del cuerpo [mm]	Máxima velocidad vertical del cuerpo [m/s]	Máxima aceleración vertical del cuerpo [m/s ²]	Máximo recorrido del elemento elástico [mm]	Máxima velocidad del amortiguador [m/s]	Ángulo de cabeceo máximo [°]	Tiempo de establecimiento [s]
Base 11m/s	-44.3	0.5183	15.57	68.48	1.75	1.756	0.76
Base 7m/s	-52.33	0.5627	12.36	78.72	1.37	1.59	0.79
Base 3m/s	-64.19	0.4372	3.665	36.42	0.7495	1.963	0.637
D-1	-67.25	0.4694	3.88	33.57	0.7802	1.986	0.637
D-2	-67.49	0.4666	3.887	38.48	0.7081	1.973	0.637
E-1	-62.37	0.4137	4.011	33.23	0.6549	1.852	0.582
E-2	-66.27	0.4692	3.47	40.84	0.8811	2.112	0.914
G-1	-64.03	0.4354	-3.664	36.07	0.7409	1.961	0.637
G-2	-64.36	0.4388	-3.672	36.77	0.7558	1.964	0.637

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

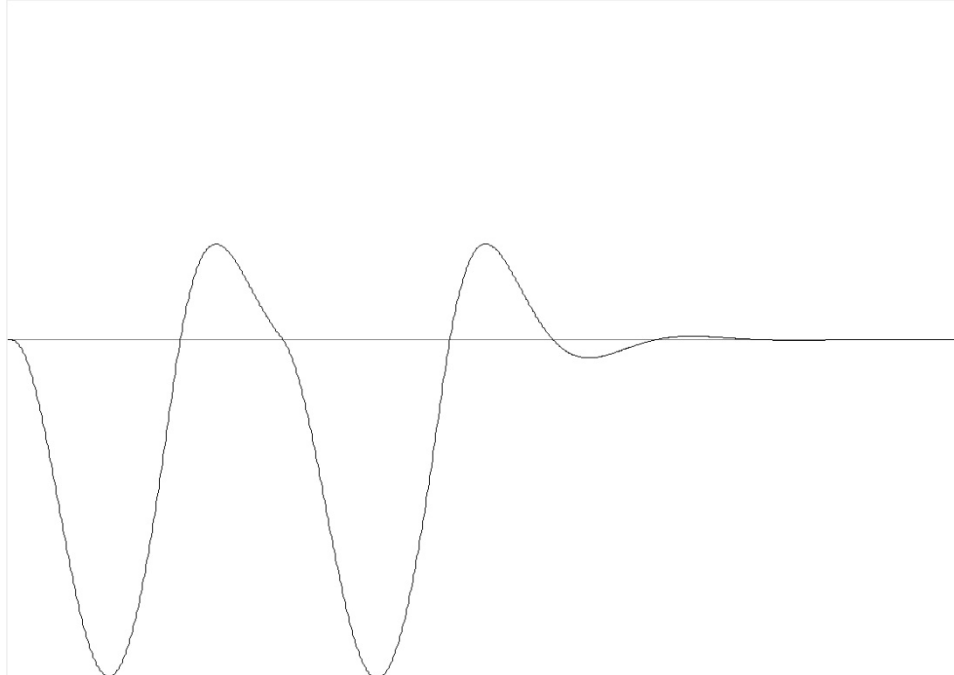


Fig. 7.5 Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

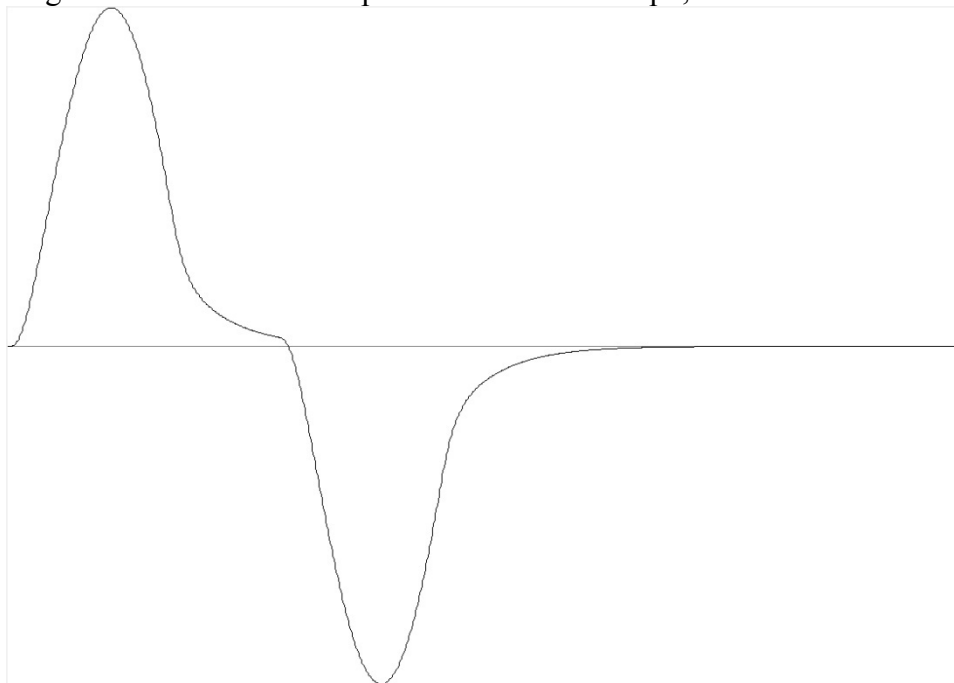


Fig. 7.6 Angulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Velocidad vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

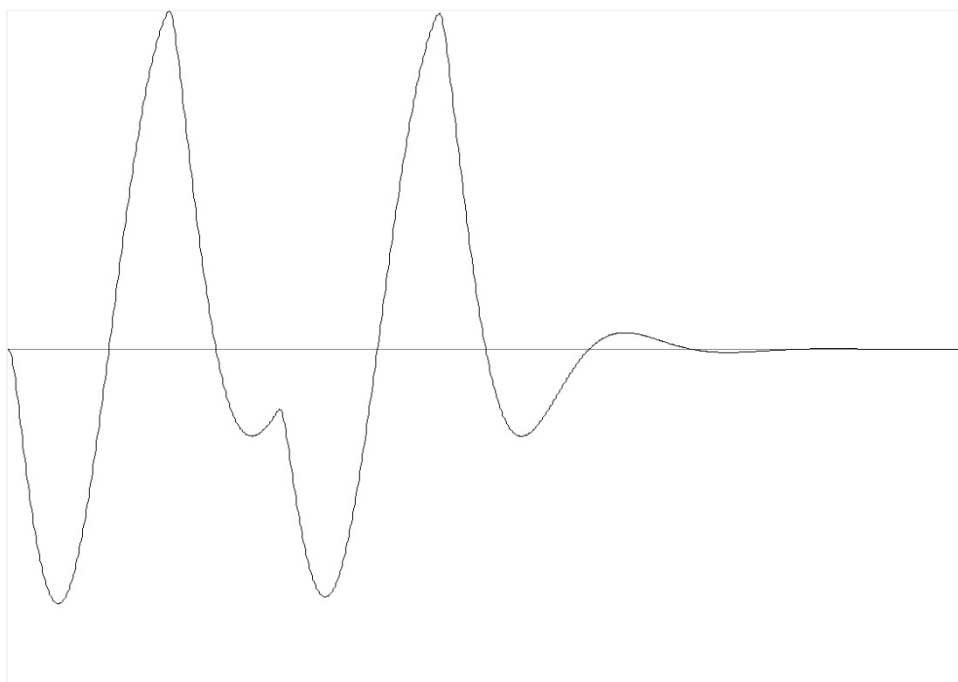


Fig. 7.7 Velocidad vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Aceleración vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:



Fig. 7.8 Aceleración vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

7.2.3 Estudio de Evasión de Accidente

Tabla 7.12: Resultados numéricos de los estudios de Evasión de Accidente.

	Distancia recorrida[m]	Desviación total [m]	Orientación [°]	Velocidad tangencial [m/s]	Máximo desplazamiento vertical del cuerpo [mm]	Ángulo de balanceo máximo [°]	Ángulo de cabeceo máximo [°]	Ángulo de Deriva máximo [°]
Base	94.74	4.74	0	16.66	-9.644	-2.025	-	-10.25
G-1	94.61	3.71	-1	16.6	-9.486	-2.007	-0.9651	-10.14
G-2	94.83	5.76	2	16.72	-9.8	-2.042	-0.9579	-10.36
H-1	94.73	2.72	-2	16.66	-9.601	-2.051	-0.8007	-9.697
H-2	94.51	8.09	5	16.68	-10.21	-1.991	-1.165	-10.82
I-1	94.38	4.74	0	16.56	-8.523	-1.729	-0.9639	-10.31
I-2	95.19	4.54	0	16.79	-11.01	-2.409	-0.9627	-10.07

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

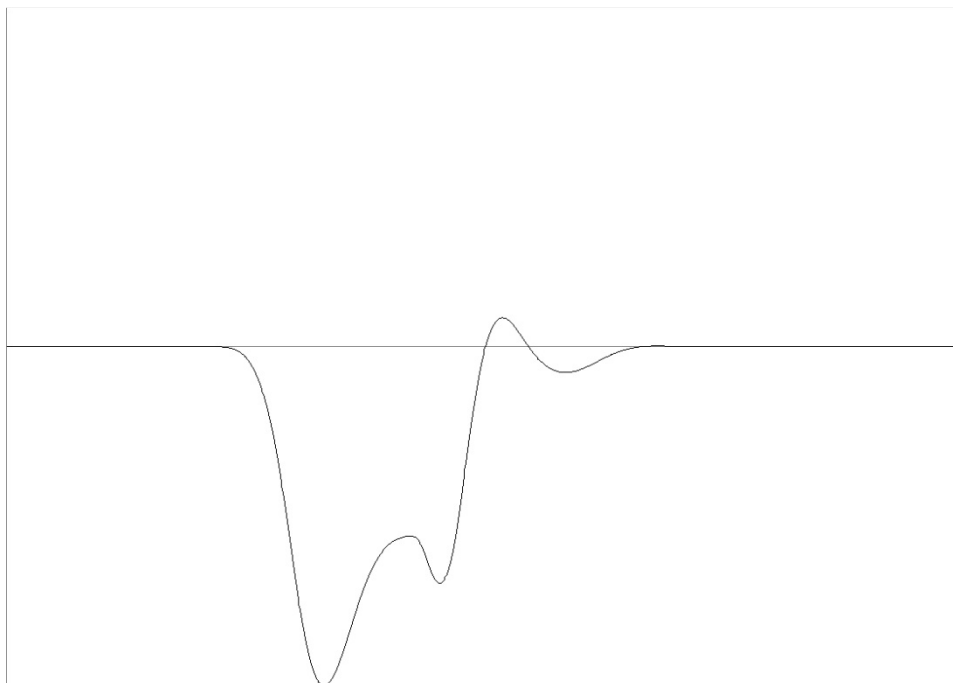


Fig. 7.9 Desplazamiento vertical del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Ángulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

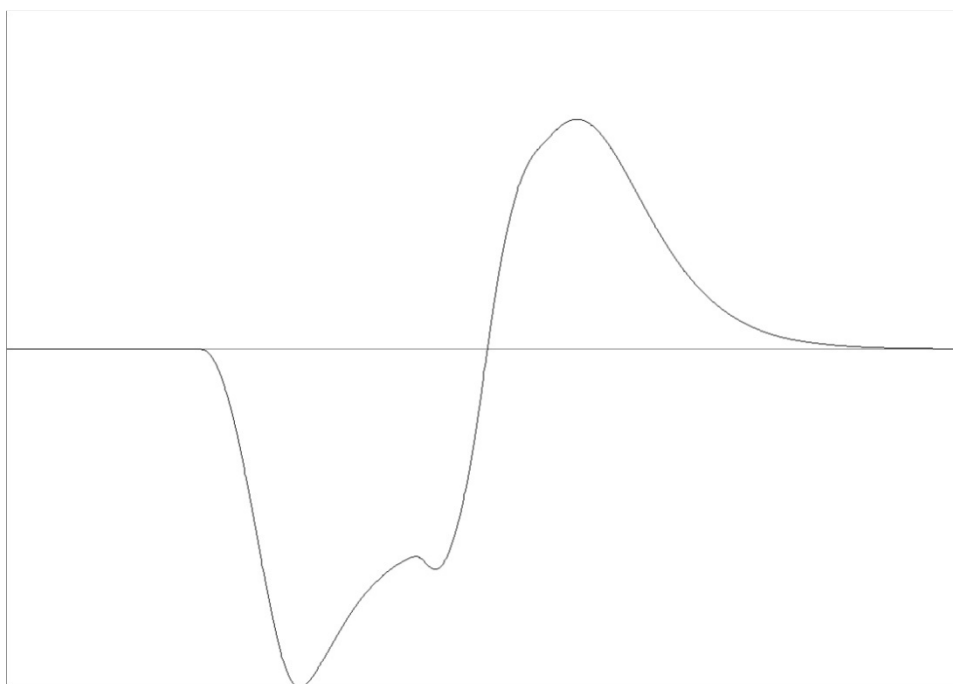


Fig. 7.10 Ángulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Ángulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

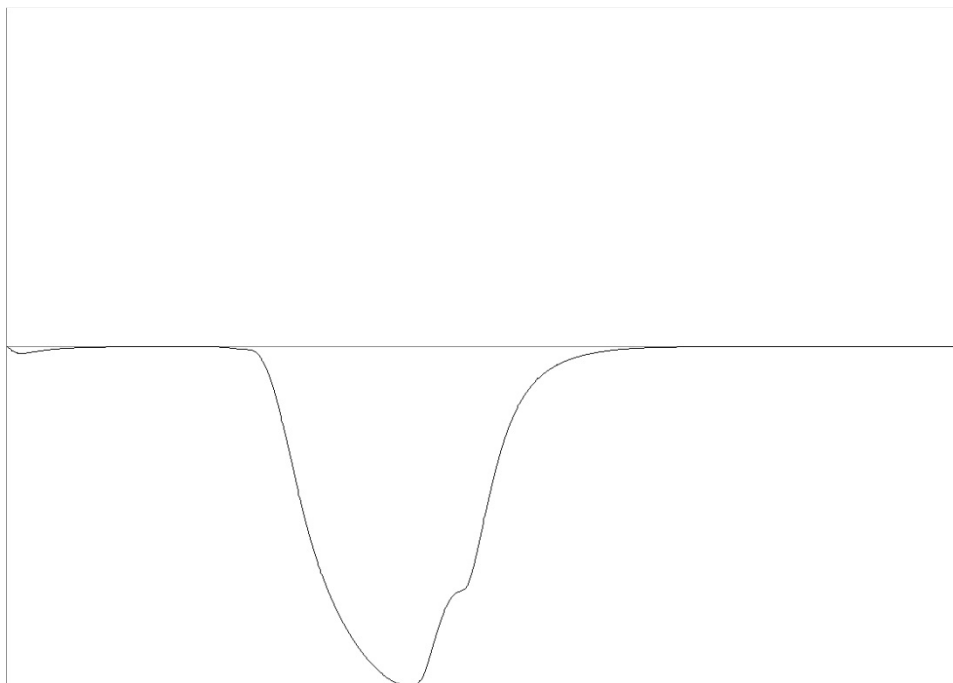


Fig. 7.11 Ángulo de cabeceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Ángulo de deriva del vehículo en función del tiempo, vehículo base:

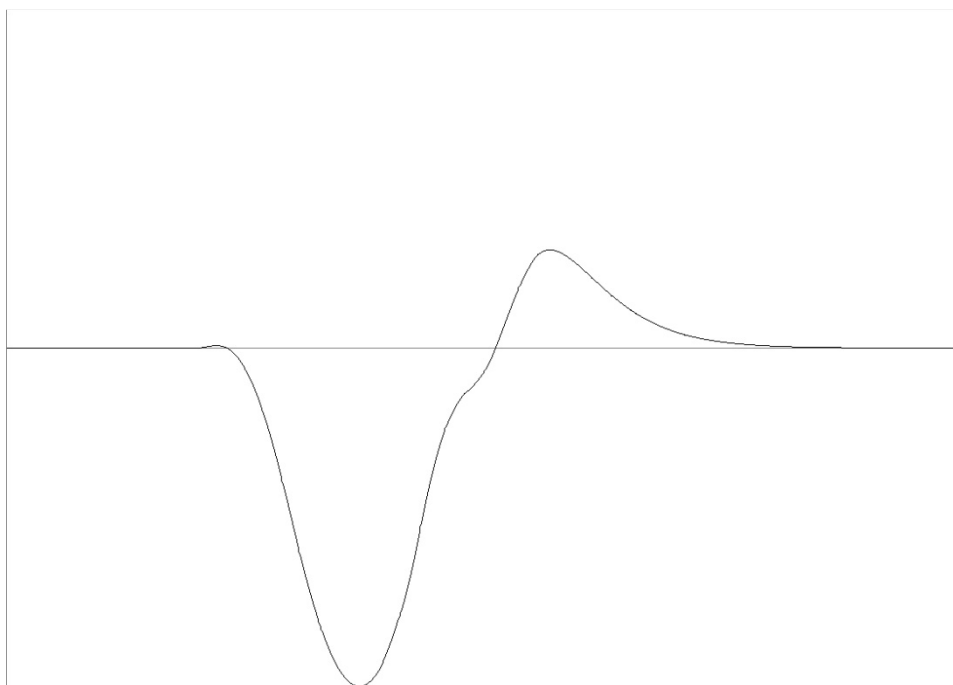


Fig. 7.12 Ángulo de deriva del vehículo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

7.2.4 Estudio de Giro en Ambos Sentidos

Tabla 7.13: Resultados numéricos de los estudios de Giro en Ambos Sentidos, estado estable.

	Transferencia de carga en la rueda frontal izquierda [N]	Transferencia de carga en la rueda frontal derecha [N]	Transferencia de carga en la rueda trasera izquierda [N]	Transferencia de carga en la rueda trasera derecha [N]	Angulo de deslizamiento, extremo frontal [°]	Angulo de deslizamiento, extremo trasero [°]	G's centrípetas
Base	1057.36	-2004.147	1092.119	-1969.388	10.83461	-8.482047	0.6964543
A-1	1890.269	-1817.787	1836.593	-1871.464	11.51112	-8.543124	0.7258086
A-2	386.0366	-2071.031	579.2066	-1877.861	9.312171	-7.868941	0.6683904
B-1	1100.399	-1927.815	1134.813	-1893.401	10.95454	-8.936349	0.6886519
B-2	1016.82	-2069.447	1044.191	-2042.076	10.67363	-8.057376	0.7022637
C-1	1112.811	-1432.308	1047.747	-1497.372	15.89568	-5.889667	0.5624801
C-2	-1163.635	-997.0974	-30.57737	135.9598	0.2985455	0.3858574	-0.031843
F-1	1119.661	-2201.765	1063.82	-1707.122	9.8313	-7.421319	0.6943195
F-2	1044.757	-1969.572	1094.501	-2013.218	11.00199	-8.678212	0.6961206
H-1	1061.136	-2007.29	1085.03	-1983.396	10.86354	-8.579116	0.6970889
H-2	1052.98	-1999.73	1100.655	-1952.054	10.79698	-8.361796	0.6956051
I-1	1038.288	-1828.63	1082.136	-1784.782	10.99367	-8.251532	0.7119968
I-2	1058.166	-2212.204	1071.756	-2198.615	10.64603	-8.83357	0.6756716

	Ángulo de deriva [°]	Desplazamiento vertical del cuerpo [mm]	Ángulo de balanceo [°]	Ángulo de cabeceo [°]	Velocidad de giro [°/s]	Velocidad tangencial [m/s]
Base	1.210353	-4.13	2.677	0.002815	54.84379	7.14162
A-1	1.530405	3.119	3.842	-0.02879	57.08666	7.15403
A-2	0.7380842	-8.5	1.604	0.05749	50.58966	7.422297
B-1	1.040125	-3.281	2.649	0.003975	55.34841	6.995594
B-2	1.343717	-4.938	2.698	-0.0006	54.2222	7.285248
C-1	5.188751	-0.2495	2.219	-0.05124	52.91557	6.071841
C-2	0.3422017	-5.339	-0.14	0.391726	-0.79162	22.98555
F-1	1.232727	-3.805	2.377	0.062803	51.70122	7.552553
F-2	1.196849	-4.206	2.627	-0.00741	55.35367	7.072321
H-1	1.175739	-4.408	2.682	0.000242	52.4873	7.468668
H-2	1.252276	-3.789	2.672	0.006397	57.5363	6.799535
I-1	1.410486	-2.967	2.3	0.004131	55.35866	7.235397
I-2	0.9329327	-5.732	3.142	-0.00192	54.2391	7.003263

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Tabla 7.14: Resultados numéricos de los estudios de Giro en Ambos Sentidos, estado transitorio.

	Máxima transferencia de carga en la rueda frontal izquierda [N]	Máxima transferencia de carga en la rueda frontal derecha [N]	Máxima transferencia de carga en la rueda trasera izquierda [N]	Máxima transferencia de carga en la rueda trasera derecha [N]	Máximo ángulo de deslizamiento, extremo frontal [°]	Máximo ángulo de deslizamiento, extremo trasero [°]
Base	991.553	-2455.387	1325.254	-2378.643	-11.70446	-16.92989
A-1	2414.191	-2399.708	2449.774	-2362.37	-12.72316	-20.17988
A-2	618.5185	-2361.492	1002.035	-2223.609	-7.957319	-12.1919
B-1	1060.474	-2439.685	1422.736	-2365.728	-12.97292	-18.33946
B-2	928.8504	-2470.502	1230.353	-2390.86	-10.60983	-15.6611
C-1	1036.034	-2451.672	1326.421	-2380.066	-12.98954	-18.59785
C-2	920.7792	-2452.43	1320.897	-2351.517	-9.94723	-14.81392
F-1	1059.447	-2599.29	1236.409	-1921.787	-5.004316	-9.477007
F-2	975.7195	-2421.832	1339.016	-2428.882	-15.59174	-21.65265
H-1	1010.476	-2449.714	1307.565	-2393.085	-13.71032	-19.90502
H-2	965.3534	-2461.059	1349.328	-2348.359	-10.40227	-14.89076
I-1	955.2888	-2269.142	1272.736	-2173.45	-9.794176	-14.98063
I-2	2035.7	-2662.588	-2584.941	1381.077	-84.65254	-85.21335

	G centrípet a máxima	Máximo ángulo de deriva [°]	Máximo desplazamiento vertical del cuerpo [mm]	Ángulo de balanceo máximo [°]	Ángulo de cabeceo máximo [°]	Máximo momento de giro (Nm)
Base	0.7317	-14.34762	-8.481	-2.882	0.16193	939.4847
A-1	0.9013	-16.52336	-3.812	-4.966	0.16699	789.2294
A-2	0.6703	-10.08852	-12.66	-1.637	0.191578	789.6992
B-1	0.7301	-15.69146	-8.328	-2.875	0.168907	1010.342
B-2	0.7331	-13.16148	-8.644	-2.889	0.165207	844.2566
C-1	0.7253	-15.83258	-8.561	-2.874	0.16681	1321.285
C-2	0.7299	-12.40329	-9.036	-2.888	0.179093	-1831.02
F-1	0.7271	-7.232742	-6.855	-2.535	0.183829	781.3219
F-2	0.7346	-18.67631	-8.6	-2.828	0.167189	1466.667
H-1	0.7016	-16.85835	-8.756	-2.882	0.138072	1322.356
H-2	0.7286	-12.66626	-8.115	-2.882	0.206471	851.7289
I-1	0.7556	-12.41322	-6.942	-2.513	0.167216	790.047
I-2	0.6931	-84.94842	-11.46	-3.323	0.356936	-16099.3

(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Ángulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

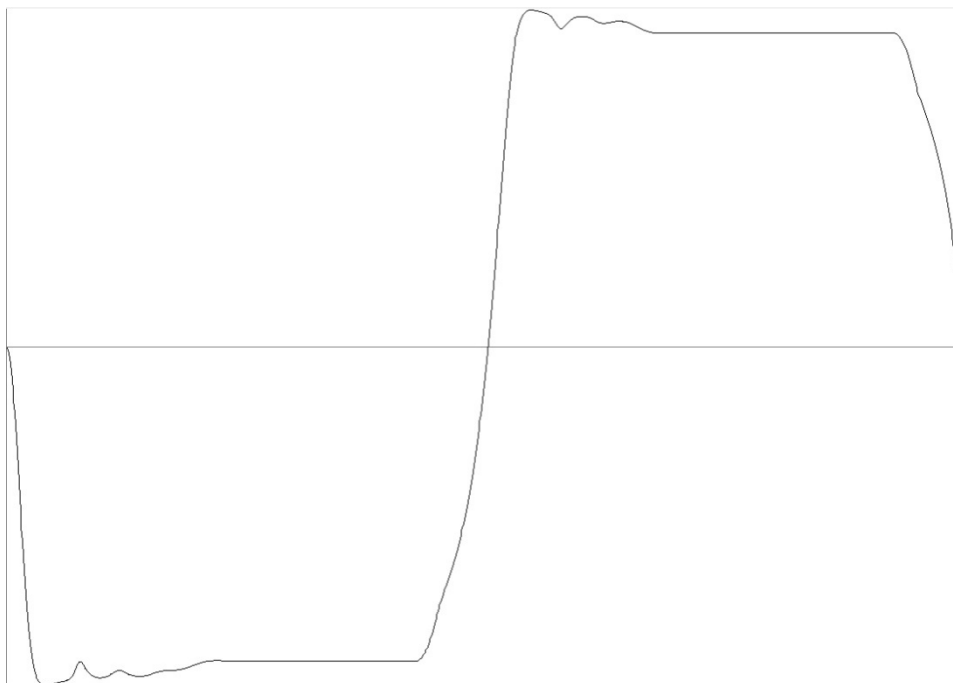


Fig. 7.13 Ángulo de balanceo del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Ángulo de deriva del cuerpo en función del tiempo, vehículo base:

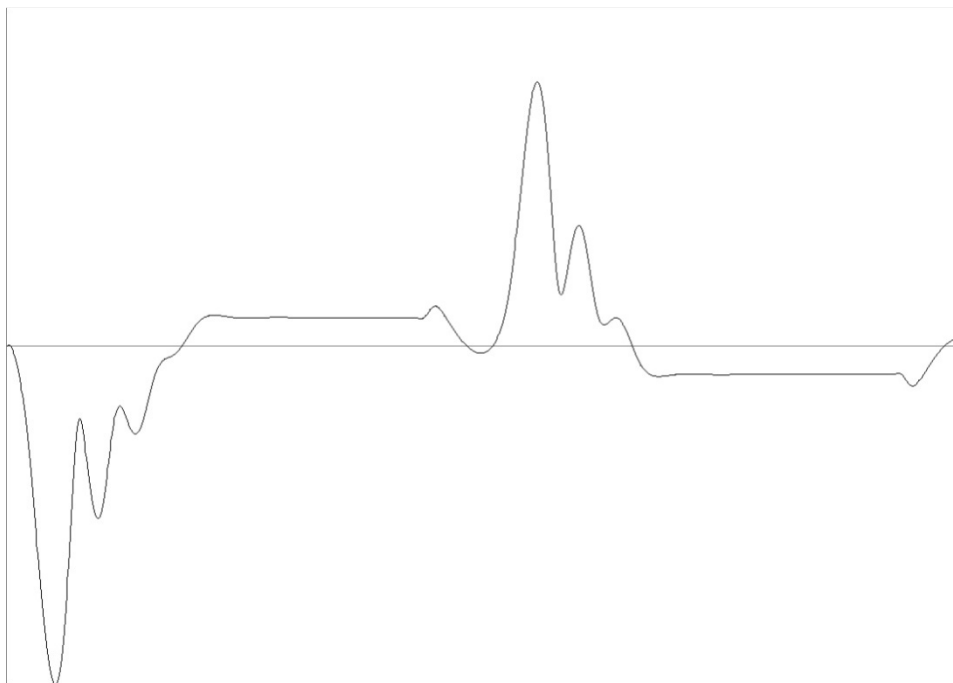


Fig. 7.14 Ángulo de deriva del cuerpo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

Velocidad de giro del vehículo en función del tiempo, vehículo base:

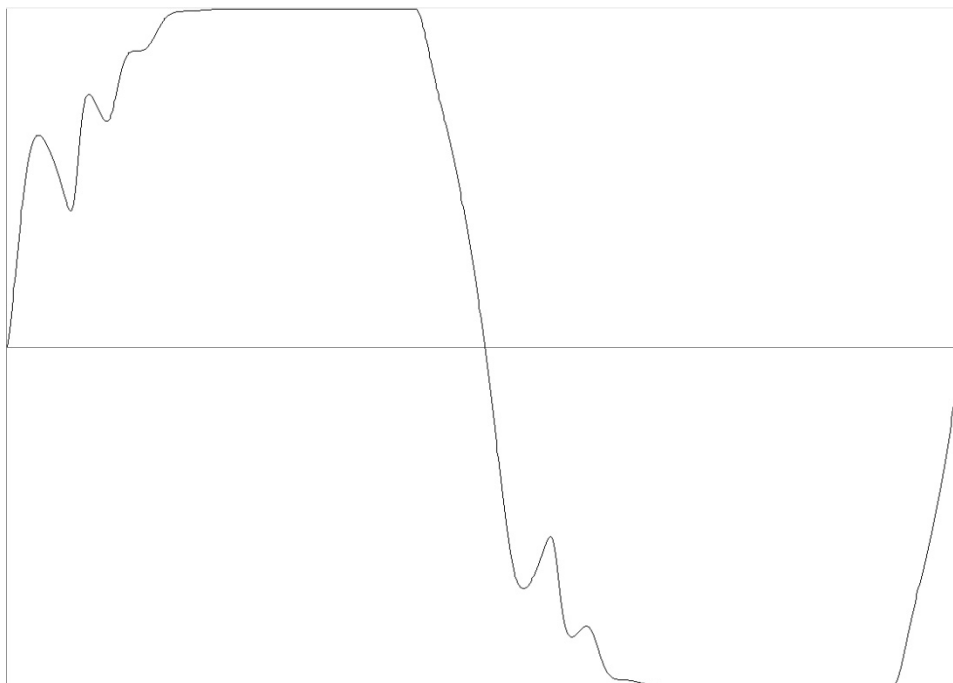


Fig. 7.15 Velocidad de giro del vehículo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

g's centrípetas del vehículo en función del tiempo, vehículo base:



Fig. 7.16 g's centrípetas del vehículo en función del tiempo, vehículo base.
(Fuente: Elaboración propia, 2008)

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Observando las graficas y valores correspondientes a la comparación de los vehículos con masa no suspendida más liviana y más pesada junto al vehículo base, se evidencia que aquel de masa no suspendida más pesada alcanza los mismos de aceleración antes que los otros vehículos, mientras que el vehículo de masa no suspendida más liviana alcanza una aceleración pico superior. Sin embargo en la fase de frenado, el vehículo con masa no suspendida menor alcanza valores más altos de desaceleración, y antes que los otros vehículos. Siguiendo el sentido de estos resultados, la distancia recorrida tanto en aceleración como en desaceleración es superior para el vehículo más pesado, contrario a lo que sucede en el vehículo más liviano, en el cual dichas distancias son menores, todo esto debido a la menor masa que tiene que moverse en este último, mientras que la aceleración temprana del vehículo más pesado se puede explicar por la mayor carga en las ruedas motrices durante dicha fase. Es notable que el vehículo ligero desacelera desde una velocidad más alta, en una distancia menor, lo cual le otorga una clara ventaja desde el punto de vista de seguridad. Las ventajas a nivel de comodidad favorecen al modelo más ligero, cuyos desplazamientos, tanto verticales como angulares (cabeceo) son menores al automóvil más pesado.

Cuando se estudian aquellas graficas referentes a las variaciones en la distancia entre ejes, se observa claramente que el vehículo con una distancia entre ejes menor alcanza valores de aceleración y desaceleración más altos que las otras configuraciones estudiadas, además de alcanzar una velocidad mayor durante la fase de aceleración, sin embargo, la distancia recorrida durante la fase de frenado es mayor para este vehículo; se adjudica esta diferencia a la transferencia de carga superior en este modelo, y a la velocidad superior al inicio de dicha fase. También los desplazamientos verticales y angulares fueron mayores para este automóvil, debido a la menor distancia entre ejes.

Estudiando los comportamientos relativos a las variaciones en la rigidez de los elementos elásticos para cada eje, se puede observar que tanto los desplazamientos (vertical y angular, es decir, cabeceo), como las velocidades y aceleraciones son mayores cuando la perturbación excita al eje cuyas constantes elásticas son más rígidas, mientras que ocurre todo lo contrario cuando se trata del eje cuyas constantes elásticas son menos rígidas. Cuando se varía el coeficiente de amortiguación, tanto la velocidad como los desplazamientos, son menores cuanto más alto sea dicho coeficiente, mientras que una disminución en el mismo ocasiona que los parámetros antes mencionados alcancen magnitudes más altas. En cuanto a la aceleración, la misma es dependiente del sentido, las aceleraciones positivas (es decir, aquellas que van en sentido descendente) son más altas cuanto más bajo es dicho coeficiente, mientras que las aceleraciones negativas son más altas cuanto más alto es éste; este fenómeno ocurre por razones asociadas a la transmisibilidad. También el tiempo de establecimiento varía con este parámetro, siendo dicho tiempo más alto cuando el coeficiente de amortiguación es más bajo, y viceversa.

Cuando se consideran vehículos con distintas masas no suspendidas, los desplazamientos angulares, velocidades y aceleraciones son más bajas en el caso del vehículo equipado con masas no suspendidas más ligeras, mientras que sucede todo lo contrario con el automóvil que posee masas suspendidas más pesadas, que presenta magnitudes más grandes de los parámetros mencionados. Esto se debe a que el vehículo con una mayor masa no suspendida presenta mayor influencia hacia la masa suspendida, que se mantuvo constante, que aquel vehículo con una masa no suspendida más ligera.

Considerando el efecto de velocidades de paso distintas sobre el policía acostado, tomando como configuración de control el estudio del automóvil base a 3m/s, mientras más alta es la velocidad menor es el desplazamiento vertical que tiene la masa suspendida; para las velocidades de 7m/s y 11m/s el desplazamiento angular es menor, y el mínimo desplazamiento angular se presenta a 7m/s. A pesar de esto, las velocidades verticales del cuerpo son mayores, donde de nuevo el máximo se presenta a una velocidad de 7m/s, y las aceleraciones son marcadamente superiores

mientras crece la velocidad. Adicionalmente, los desplazamientos de los elementos elásticos y las velocidades de los amortiguadores son mayores conforme la velocidad aumenta, lo cual es debido directamente a la velocidad de paso más elevada, que ocasiona perturbaciones más bruscas a las ruedas, que influyen en los resultados aquí expuestos. Estos estudios demuestran la existencia de múltiples frecuencias naturales, al poner en evidencia que un aumento proporcional de la velocidad no genera una tendencia unidireccional en todas las respuestas del sistema.

Como se aprecia en las graficas de comparación, a manera general los vehículos de dimensiones más grandes presentan variaciones menores en las magnitudes estudiadas (Desplazamiento vertical, ángulos de balanceo, cabeceo y deriva), lo que significa que los mismos son más estables en las condiciones descritas por el estudio, mientras que aquellos vehículos de dimensiones reducidas presentan variaciones más grandes en dichas magnitudes, lo cual los hace menos estables y más difíciles de conducir y controlar bajo esta situación particular, además de brindarle menos confianza al conductor por la manera como le presenta la información; un ángulo de deriva elevado significaría que el automóvil no está yendo a donde el conductor así lo quiere, y por lo tanto, es menos seguro desde el punto de vista psicológico. Esto es de esperarse al analizar rápidamente las ecuaciones de transferencia de carga, donde aquellos vehículos de dimensiones más grandes sufren menos de este fenómeno. También se observa que aquellos vehículos de grandes dimensiones sobre-compensan la perturbación inicial, con respecto al ángulo de deriva y, para el caso de la configuración con una mayor distancia entre ejes, también el ángulo de balanceo, debido a la menor transferencia de carga que tienen que soportar sus ruedas, pueden generar mayores aceleraciones laterales.

Cuando se considera la influencia de la masa no suspendida en el comportamiento de un automóvil bajo estas condiciones, se observa que aquel vehículo equipado con masas no suspendidas más bajas también presenta un valor más bajo de las magnitudes estudiadas, sin embargo, de manera parecida al estudio anterior, se observa que esta configuración, bajo las mismas entradas, sobrecompensa

la perturbación inicial en cuanto a los ángulos de balanceo y deriva en la segunda parte del estudio, debido a la mayor respuesta del vehículo por ser más ligero.

Podemos observar en las graficas correspondientes a los vehículos con distintas alturas de centros de balanceo, que el vehículo con el centro de balanceo a nivel del suelo presenta un mejor comportamiento, al generar aceleraciones centrípetas transitorias y estables mucho más altas que cualquier otra configuración, y necesitando de menores tiempos para establecerse en el giro deseado, debido a la ausencia de efectos de levantamiento. Sin embargo, presenta mayores ángulos de balanceo y de deriva durante el estudio; esto se debe a la mayor distancia existente entre el centro de gravedad y el centro de balanceo, que provoca directamente mayores ángulos de balanceo, y a las aceleraciones laterales más altas que generan velocidades laterales elevadas y a su vez esto genera mayores ángulos de deriva, además de mayores ángulos de balanceo. También se observa que dicha configuración alcanza velocidades de giro más altas, lo que significa que puede completar una vuelta completa sobre la trayectoria escogida en un menor tiempo.

Con respecto a aquellas configuraciones que tienen como variación el camber estático, se observa que aquellas con camber negativo generan mayores aceleraciones laterales en estado estable y en estado transitorio con respecto a aquellas con las cuales se hace la comparación, también los ángulos de balanceo son mayores, debido a la mayor aceleración lateral generada por este vehículo. Sin embargo, a pesar de esto y al hecho de que la velocidad tangencial de este es más grande, el vehículo con una configuración de camber positivo desarrolla una mayor velocidad de giro; los efectos de la dirección sobre el sentido de las fuerzas relativo al vehículo, especialmente durante la fase transitoria del giro, son los responsables de este fenómeno.

Para aquellos vehículos con distinta geometría de dirección, el desempeño de los mismos fue inferior en todos los apartados a la configuración base, especialmente con la configuración de geometría anti-Ackermann, cuyos resultados simplemente no satisfacen las expectativas, debido al comportamiento dinámico de los ángulos de

dirección, ilógicos para un vehículo de calle, y por ello no se comentaran en lo sucesivo. Con respecto a la configuración Pro-Ackermann, se debe tomar en consideración que la misma se define desde un punto de vista solo cinemático, lo cual no es adecuado al análisis de un vehículo real, y para la configuración aquí estudiada la implementación de la misma no reporta ningún beneficio con respecto a la configuración base.

En los estudios de las configuraciones con distintas barras anti-balanceo, como es de esperarse, la aplicación de las mismas reduce efectivamente el ángulo de balanceo del vehículo con respecto a la configuración base, en mayor medida cuando va aplicada en el eje delantero que en el trasero, debido a la mayor rigidez de la barra delantera. Sin embargo, debido a la influencia de estas en el comportamiento dinámico del vehículo, se observa claramente que cuando va instalada delante el vehículo realiza giros más estables, aunque el tiempo de establecimiento que necesita es mayor. Cuando la misma se instala en la parte posterior del vehículo, la respuesta a los cambios de orientación se incrementa notablemente, sin embargo, el giro puede tornarse inestable debido a que la misma incrementa la tendencia al sobreviraje cuando va instalada en el eje trasero, contrario a lo que sucede cuando se instala en el eje delantero, en cuyo caso incrementa la tendencia al subviraje. Por esta misma razón, se observan velocidades de giro mayores para la configuración con barra antibalanceo trasera, y menores para aquella configuración con barra delantera.

Cuando se consideran distintas dimensiones del ancho de vías y batalla del vehículo, se observa que el incremento de dichas medidas hace al vehículo más estable, y a su vez reduciendo los desplazamientos angulares (cabeceo y balanceo), además de la transferencia de carga de las ruedas y aumentando la aceleración lateral que dichos vehículos pueden generar, sin embargo, la velocidad de giro en ambos casos es menor debido a que la respuesta del vehículo a las distintas perturbaciones disminuye conforme aumentan dichas proporciones. En el extremo contrario se tiene que la respuesta del vehículo se hace mayor conforme disminuyen dichas proporciones, sin embargo, por debajo de cierta dimensión crítica, dependiente de la configuración particular del vehículo, el mismo se hace inestable frente a los cambios

de orientación, como se puede apreciar en las graficas en las cuales se comparan los vehículos con distinta anchura de vías, donde aquel vehículo con el ancho de vías más estrecho pierde el control al inicio de los virajes, expresado en las graficas por un cambio brusco de dirección.

CONCLUSIONES

Las siguientes conclusiones fueron hechas en base a los estudios realizados con el programa desarrollado por los autores, y a las variaciones de vehículos establecidas en la metodología. Por lo tanto estas conclusiones son validas sólo para el modelo propuesto.

- (a) El modelo aquí propuesto otorga la visualización de 155 parámetros distintos, además de su grafica en el tiempo, otorgando mas información que aquella que se puede extraer del modelo de bicicleta, modelos de dos grados de libertad o formulas de estado estable.
- (b) Para poder simular completa y correctamente la dinámica de un vehículo es necesaria una gran cantidad de información acerca de los neumáticos, características generales y de la suspensión y condiciones a las cuales opera, como se demuestra con la información necesaria para poder configurar el vehículo base.
- (c) Como se puede observar en los estudios de evasión de accidente y aceleración y frenado, para simular de manera completa un vehículo, se debe completar la simulación de sistemas de suspensión con simulaciones de aerodinámica y del sistema de propulsión del mismo.
- (d) La dinámica vertical del vehículo afecta directamente al desempeño, al condicionar la capacidad de los neumáticos de producir fuerzas; esto se aprecia claramente en los estudios de giro en ambos sentidos, donde se observan distintos valores de aceleración centrípeta, los cuales se ven directamente afectados por los desplazamientos verticales y angulares relativos a la dinámica vertical del vehículo.
- (e) Observando los resultados de los estudios de giro en ambos sentidos, en el cual variaciones como el cambio de geometría de dirección ocasiono un comportamiento totalmente distinto en la trayectoria del vehículo, mientras que en otras variaciones al vehículo base, como el cambio en la

masa no suspendida del vehículo, solo se afectaron los valores pico y estables de dicha respuesta, mas no su forma, podemos concluir que: algunos parámetros modelados afectan de manera considerable el comportamiento, modificando tanto la magnitud como la forma de la respuesta, mientras que otros solo afectan levemente, cambiando la magnitud de la respuesta

- (f) Para evaluar los sistemas de suspensión automotrices y/o un vehículo completo, en los apartados de comodidad, seguridad, desempeño, es necesario no observar un punto específico en el tiempo, sino analizar todo el rango de comportamientos para llegar a la mejor solución compromiso, según lo requiera la aplicación. Se puede observar como es necesario tomar en consideración una gran cantidad de resultados para evaluar los vehículos en el estudio de giro en ambos sentidos, además de analizar dichos resultados tanto en estado estable como en estado transitorio.
- (g) El desempeño del vehículo afecta la comodidad, mientras más ágil es el vehículo tiende a ser mas incomodo, y en algunos casos, inseguro para el conductor promedio, como se reflejan en los ángulos obtenidos en los estudios de giro en ambos sentidos y evasión de accidentes; mientras más grandes sean las aceleraciones del vehículo, las personas dentro del mismo se someten a fuerzas y desplazamientos mayores, que ocasionan incomodidad.
- (h) Los efectos del levantamiento sobre el desempeño del vehículo pueden modificar considerablemente el comportamiento del mismo, como lo demuestran los vehículos con distinta altura de centro de balanceo.

RECOMENDACIONES

- (a) Proponer un Trabajo Especial de Grado para la escuela de Ingeniería Mecánica, cuyo objetivo principal sea estudiar la exactitud de este modelo en distintos rangos de operación, con base en una adquisición de datos empírica.
- (b) Proponer un Trabajo Especial de Grado para la escuela de Ingeniería Mecánica, cuyo objetivo principal sea realizar una simulación detallada de los sistemas de potencia y suspensión vehiculares.
- (c) Proponer un Trabajo Especial de Grado para la escuela de Ingeniería Mecánica, cuyo objetivo principal sea realizar una simulación detallada del sistema de frenos de un vehículo.
- (d) Proponer un Trabajo Especial de Grado para la escuela de Ingeniería Mecánica, cuyo objetivo principal sea realizar una simulación detallada de la aerodinámica del vehículo y sus efectos en la dinámica vehicular.
- (e) Utilizar los trabajos especiales de grado antes mencionados para desarrollar un simulador integral que permita evaluar el automóvil de forma completa, en función de la dinámica vehicular.
- (f) Proponer la creación de una materia electiva para el pensum del Ingeniero Mecánico, en la cual se estudien los aspectos teóricos y prácticos concernientes a la dinámica vehicular desarrollados en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. ACKERMANN J., Bunte T. 1995, **“Automatic Car Steering Control Bridges Over the Driver Reaction Time”**. German Aerospace Research Establishment, Institute for Robotics and System Dynamics, Wessling, Alemania.
2. BUTZ, T. 2004; **“A Realistic Road Model for Real-Time Vehicle Dynamics Simulation”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
3. CHAPRA, Steven C / CANALE Raymond P. 2003; **“Métodos Numéricos para Ingenieros”**. 4ta Edición, McGraw-Hill Interamericana Editores, México DF.
4. CRAHAN, Thomas C. 1994; **“Modeling Steady-State Suspension Kinematics and Vehicle Dynamics of Road Racing Cars – Part I: Theory and Methodology”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
5. CRAHAN, Thomas C. 1994; **“Modeling Steady-State Suspension Kinematics and Vehicle Dynamics of Road Racing Cars – Part I: Theory and Methodology”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
6. DIXON, John C. 1996; **“Tires, Suspension and Handling”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
7. GAFFNEY E., F. III / SALINAS A, R. 1996; **“Introduction to Formula SAE Suspension and Frame Design”**. Universidad de Missouri – Rolla, Rolla, Estados Unidos.
8. GERALD, Curtis F. 1991; **“Análisis Numérico”**. 2da Ed, Alfaomega, México DF.
9. GERALD, Curtis F. / WHEATLEY, Patrick O. 2000; **“Análisis Numérico con Aplicaciones”**. 6ta Ed, Pearson Education, México DF.
10. GILLIESPIE, Thomas D. 1992; **“Fundamental of Vehicle Dynamics”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
11. HALLUM, Chuck. 1998; **“Understanding Race Tires”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.

12. JANUARY, Daniel B. 1999; **“Steering Geometry and Caster Measurement”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
13. LOWNDES, Erik M. 1998; **“Development of an Intermediate DOF Vehicle Dynamics Model for Optimal Design Studies”**. (Tesis). Universidad del Estado de Carolina del Norte, Departamento de Ingeniería Mecánica y Aeroespacial, Raleigh, Estados Unidos.
14. MILLIKEN, William F. / MILLIKEN, Douglas L. 1995; **“Race Car Vehicle Dynamics”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
15. NIEVES, Antonio / DOMINGUEZ, Federico C. 1998; **“Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería”**. Compañía Editorial Continental, México DF.
16. PACEJKA, Hans B. 2002; **“Tyre and Vehicle Dynamics”**. Butterworth-Heinemann, Oxford.
17. PAIS J., A., 2000, **“Diseño de la Suspensión y el Chasis para un Vehículo de Propósito Múltiple”**. (Tesis). Universidad Simón Bolívar, Facultad de Ingeniería, Caracas.
18. RADT, Hugo S. Jr. **“An Efficient Method for Treating Race Tire Force-Moment Data”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
19. RATTI, P. 1988; **“Tire Model and Vehicle Handling”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
20. REIMPELL, Jörsen / STOLL, Helmut / BETZLER, Jürgen W. 2001; **“The Automotive Chassis: Engineering Principles”**. 2da ed. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
21. RILL, Georg. 2006; **“First Order Tire Dynamics”**. Facultad de Ciencias Aplicadas de la Universidad de Regensburg, Alemania.
22. RILL, Georg. 2007; **“Vehicle Dynamics; Lecture Notes”**. Facultad de Ciencias Aplicadas de la Universidad de Regensburg, Alemania.
23. SAE J670e. 1978; **“Vehicle Dynamics Terminology”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.
24. SALAANI K. M., *et al*, 2006; **“Measurement and Modeling of Tire Forces on a Low Coefficient Surface”**. Society of Automotive Engineers, Warrendale, Estados Unidos.

25. SAYERS, Michael W. 1990; **“Symbolic Computer Methods to Automatically Formulate Vehicle Simulation Codes”** (Tesis). Universidad de Michigan, Michigan, Estados Unidos.
26. SCHWAB, A., L. 2002; **“Dynamics of Flexible Multibody Systems; Small Vibrations Superimposed on a General Rigid Body Motion”**. Universidad de Tecnología de Delft, Delft, Holanda.
27. SCHWARZ M., L. 1981; **“Suspensión Trasera en el Vehículo Urbano”**. (Tesis). Universidad Simón Bolívar, Facultad de Ingeniería Caracas.
28. SCIAMANNA, Rosalba / BLANCO, Berenice. 2003; **“Aspectos Teórico Prácticos sobre las Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”**. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Caracas.
29. SCIAMANNA, Rosalba / BLANCO, Berenice. 2003; **“Aspectos Teórico Prácticos sobre Aproximaciones por Mínimos Cuadrados”**. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Caracas.
30. SMITH, Carroll. 1975; **“Prepare to Win”**. Aero Publishers Inc., Fallbrook, Estados Unidos.
31. SMITH, Carroll. 1978; **“Tune to Win”**. Aero Publishers Inc., Fallbrook, Estados Unidos.
32. SMITH, Carroll. 1984; **“Engineer to Win”**. Motorbooks Internacional, Osceola, Estados Unidos.
33. STEIDEL R., F. 1989; **“An Introduction to Mechanical Vibrations”**. Wiley, New York.
34. TAMAYO FAJARDO, Manuel H / BORGES TRENARD Miguel A. 1984; **“Métodos Numéricos en Ecuaciones Diferenciales y Ajustes de Curvas”**. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
35. TIELKING, John T. / MITAL, Naveen K. 1974; **“A Comparative Evaluation of Five Tire Traction Models”**. Universidad de Michigan, Highway Safety Research Institute, Estados Unidos.
36. WONG, J. Y. 2001; **“Theory of Ground Vehicles”**, 3ra edición. Wiley, Universidad de Carleton, Ottawa, Canadá.

37. WOODS, Robert L. / LAWRENCE, Kent L. 1999; **“Modeling and Simulation of Dynamic Systems”**. Prentice Hall Inc, New Jersey, Estados Unidos.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

1. http://www.carbibles.com/tyre_bible.html
2. http://www.carbibles.com/suspension_bible.html
3. http://www.carbibles.com/suspension_bible_pg2.html
4. <http://www.racer.nl/>
5. <http://www.chaney.eclipse.co.uk/>
6. http://phors.locost7.info/files/Beckman_-_The_Physics_of_Racing.pdf

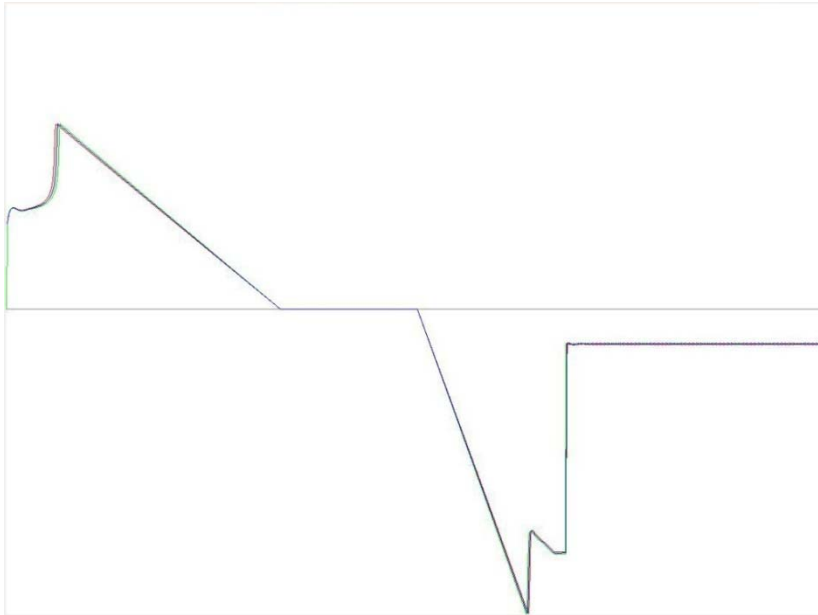
ANEXOS

A.0 COMPARACIÓN ENTRE LAS DISTINTAS CONFIGURACIONES DE VEHICULOS

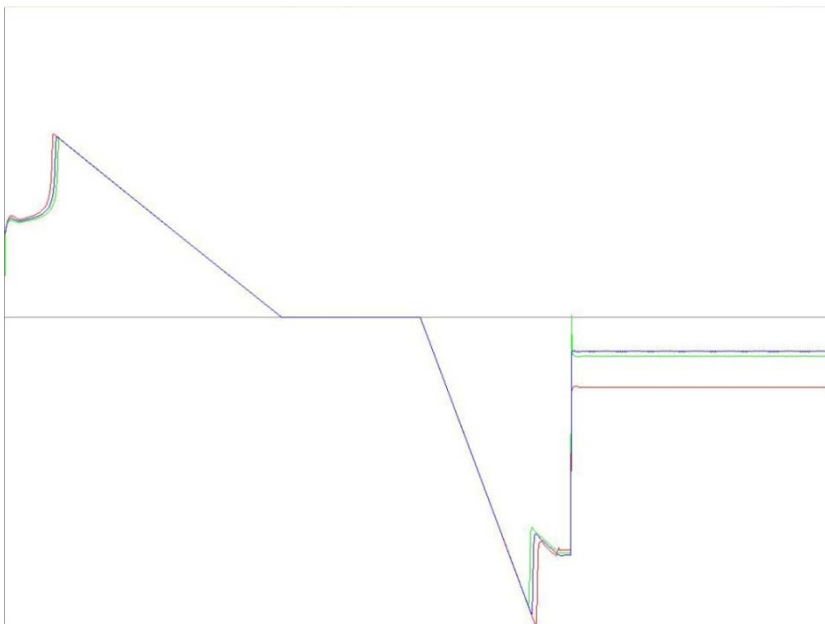
Leyenda: Azul: configuración base; Verde: variación 1, Rojo: variación 2.

Estudios de aceleración y frenado

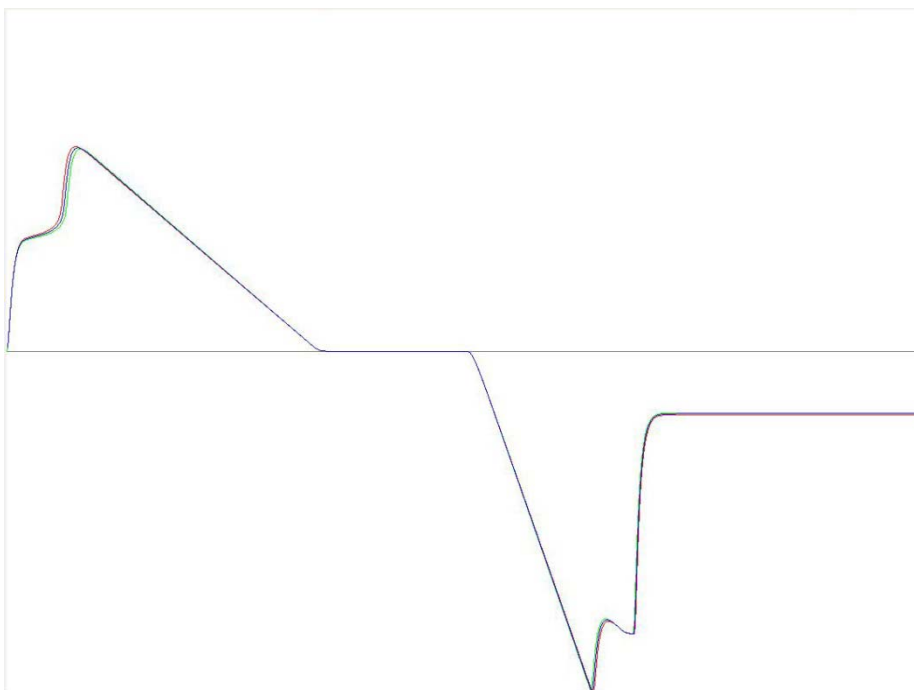
Aceleración longitudinal, auto base vs variaciones de masa no suspendida.



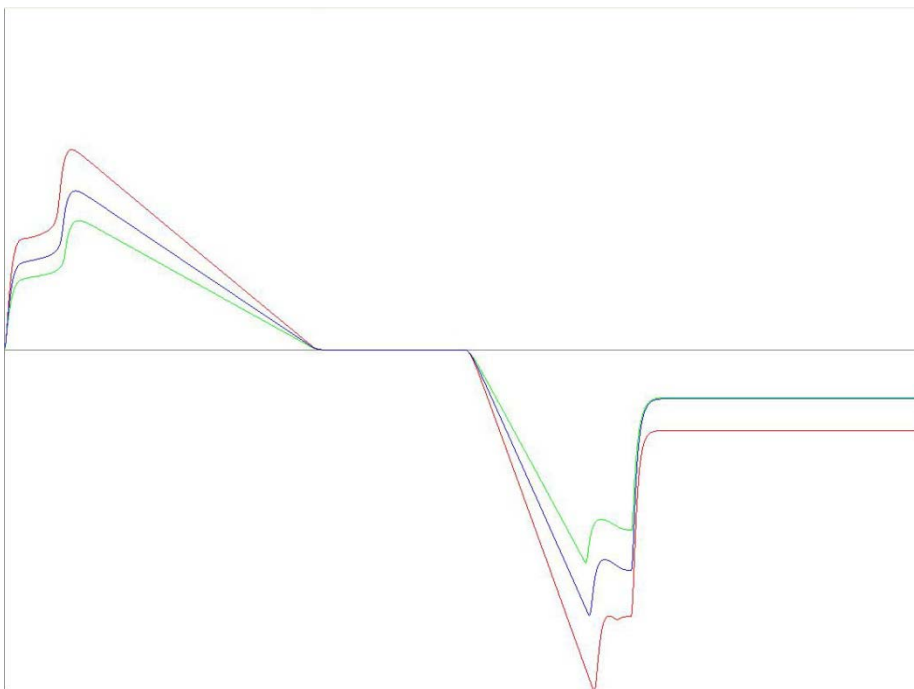
Aceleración longitudinal, auto base vs variaciones de batalla.



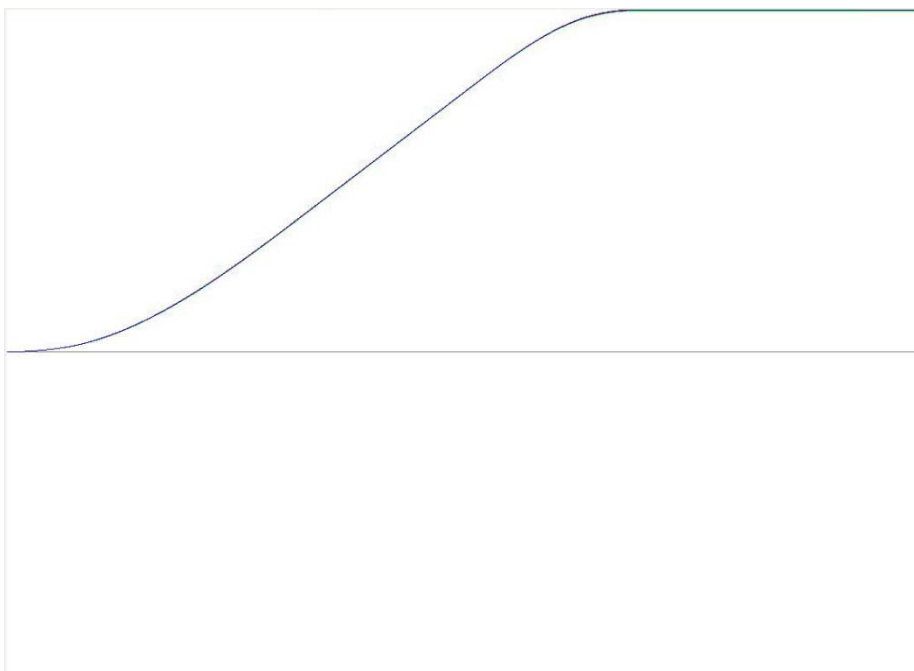
Angulo de cabeceo, auto base vs variaciones de masa no suspendida.



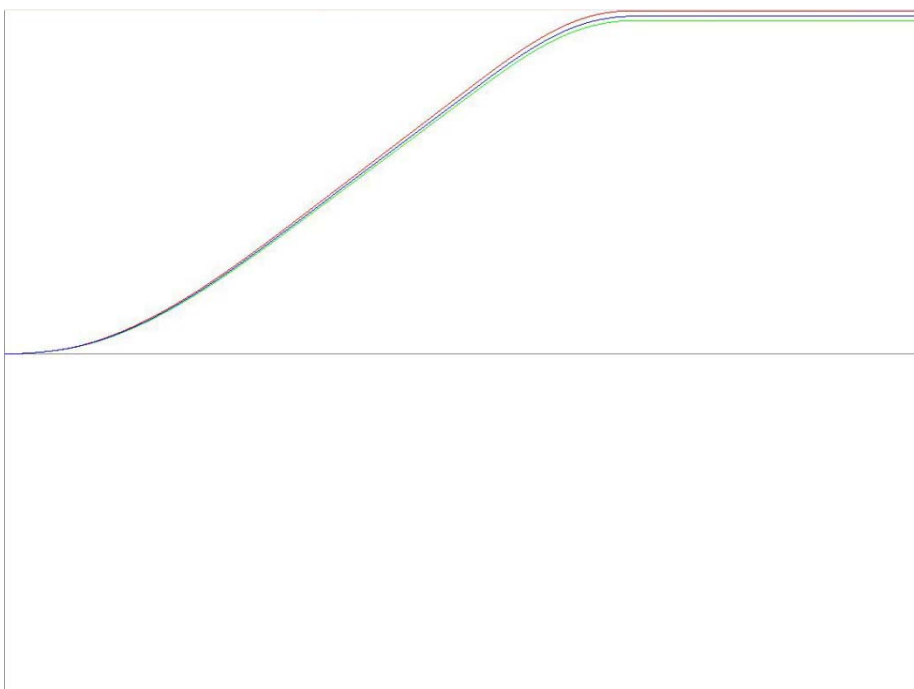
Angulo de cabeceo, auto base vs variaciones de batalla.



Distancia recorrida, auto base vs variaciones de masa no suspendida.

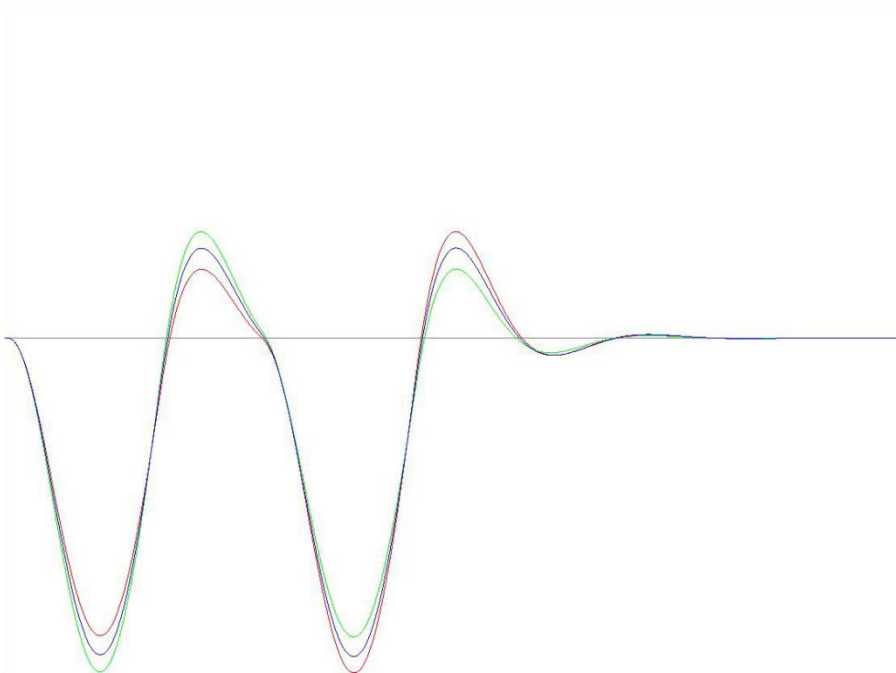


Distancia recorrida, auto base vs variaciones de batalla

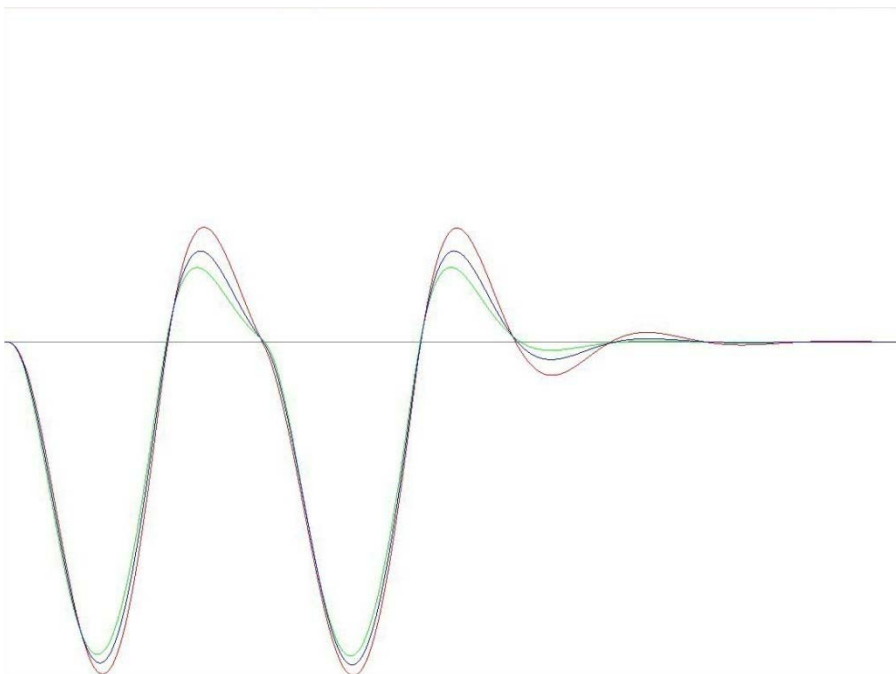


Estudios de policía acostado

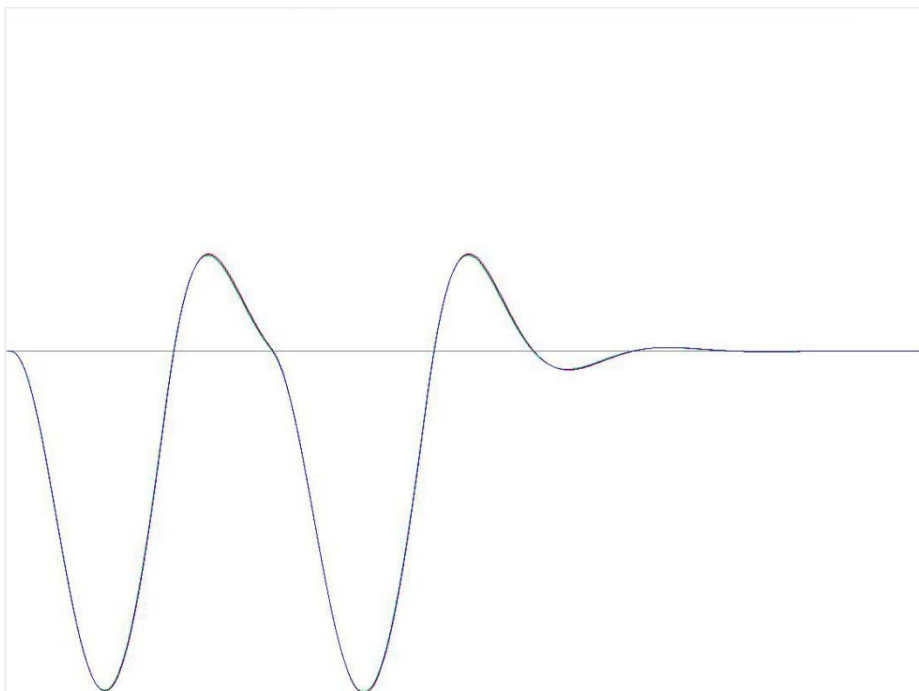
Desplazamiento vertical, auto base vs variaciones en la constante de rigidez de los ejes.



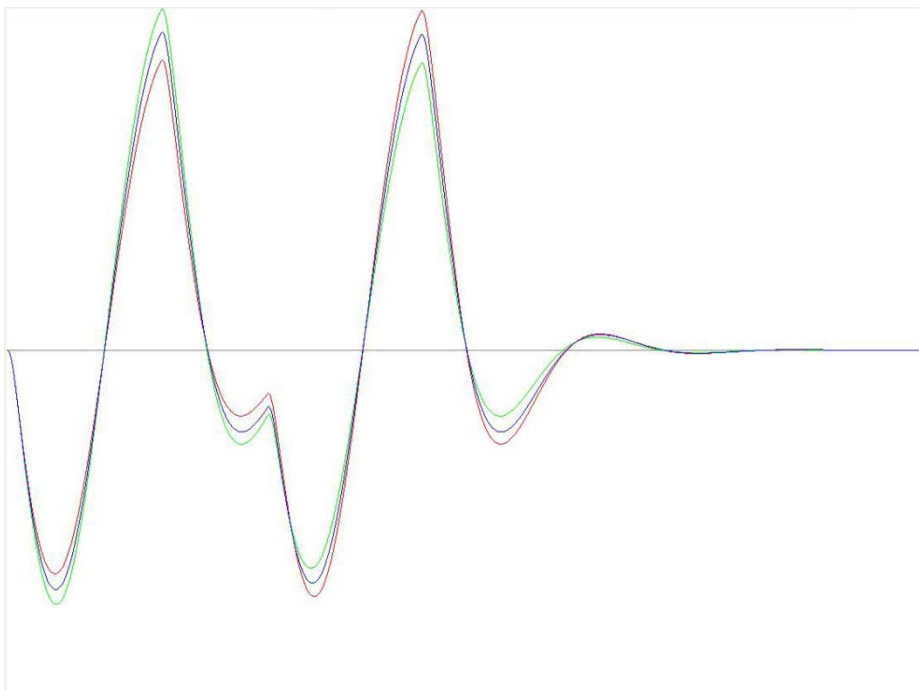
Desplazamiento vertical, auto base vs variaciones en el coeficiente de amortiguación de los amortiguadores.



Desplazamiento vertical, auto base vs variaciones en la masa no suspendida.



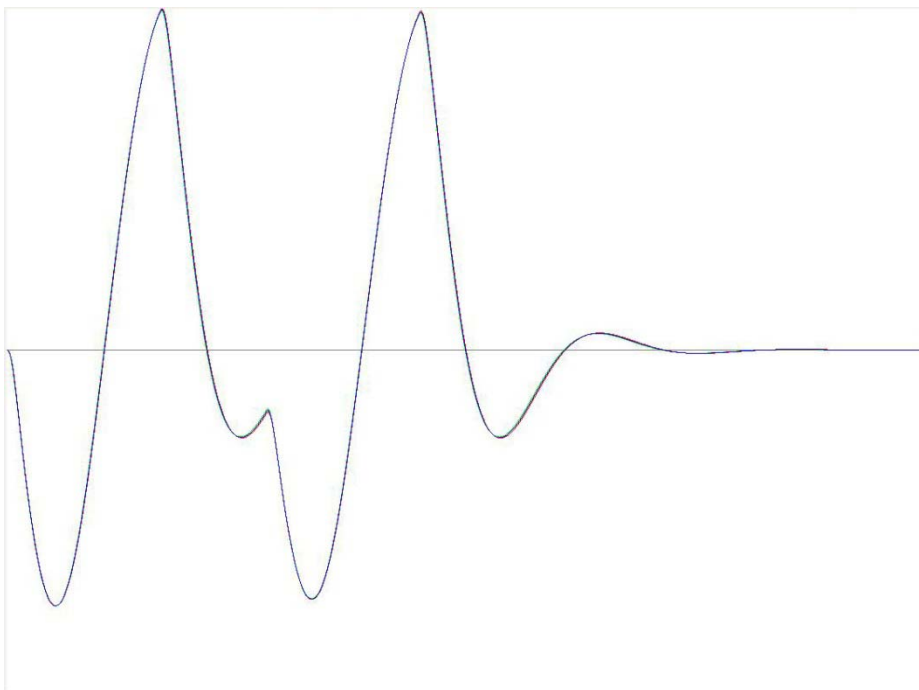
Velocidad vertical, auto base vs variaciones en la constante de rigidez de los ejes.



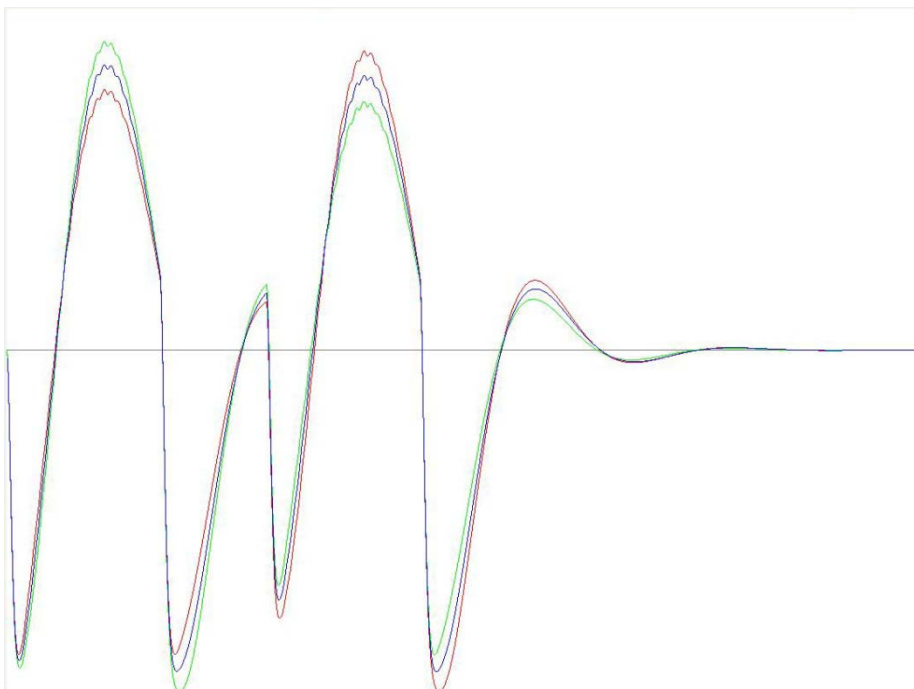
Velocidad vertical, auto base vs variaciones en el coeficiente de amortiguación de los amortiguadores.



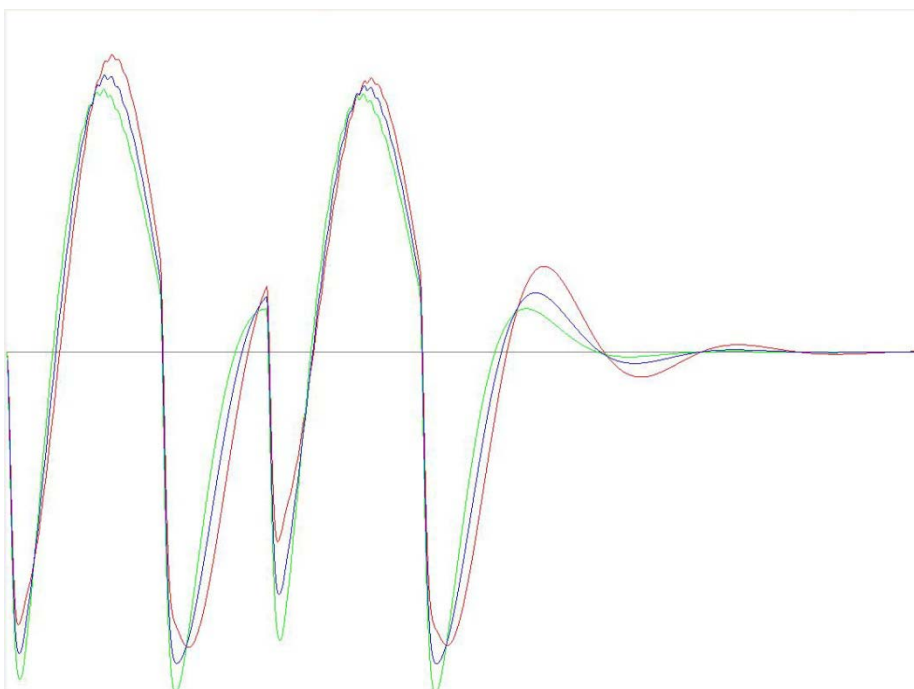
Velocidad vertical, auto base vs variaciones en la masa no suspendida.



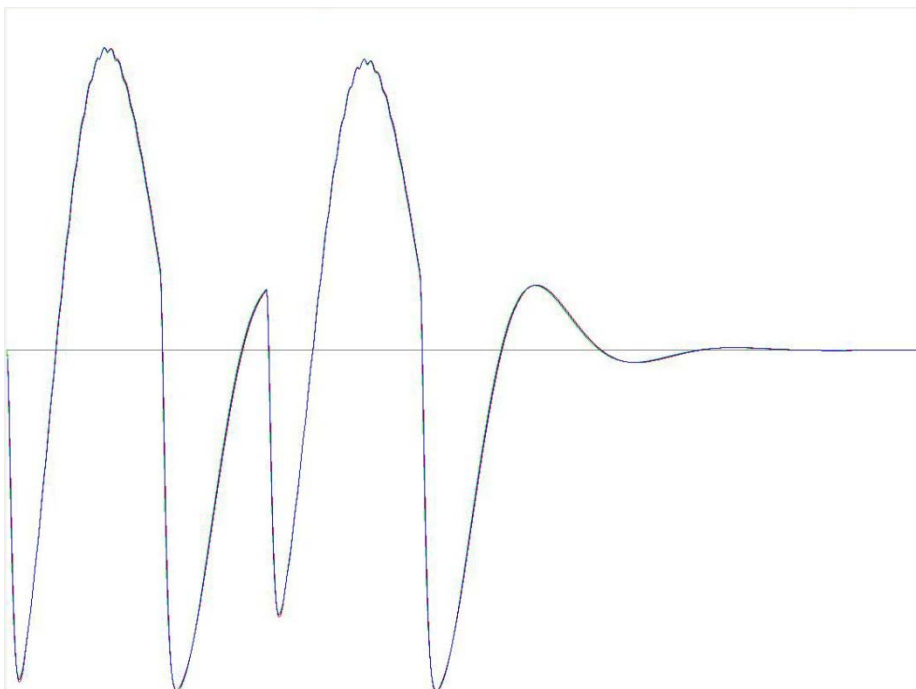
Aceleración vertical, auto base vs variaciones en la constante de rigidez de los ejes.



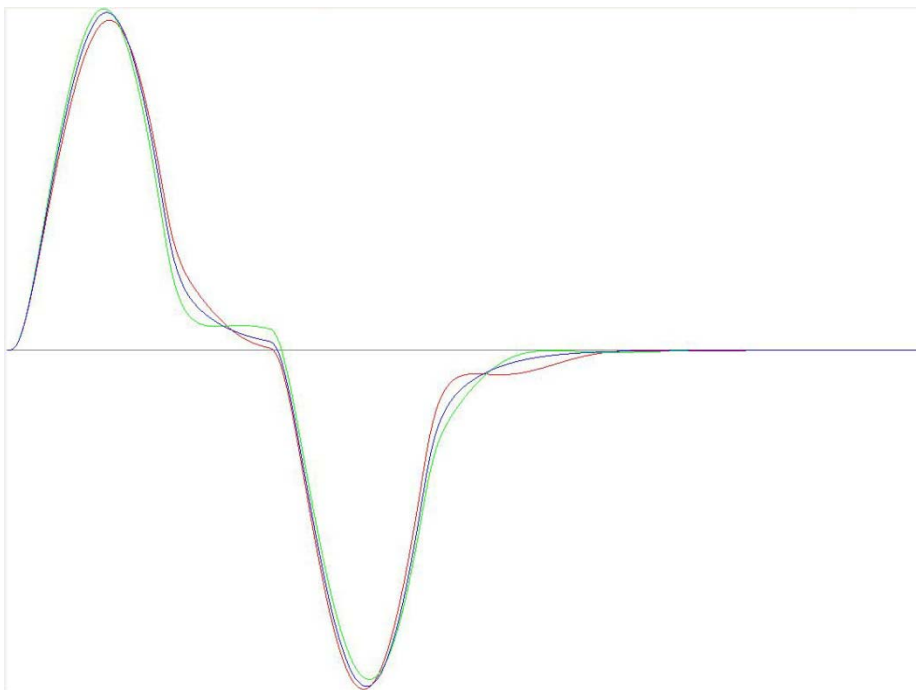
Aceleración vertical, auto base vs variaciones en el coeficiente de amortiguación de los amortiguadores.



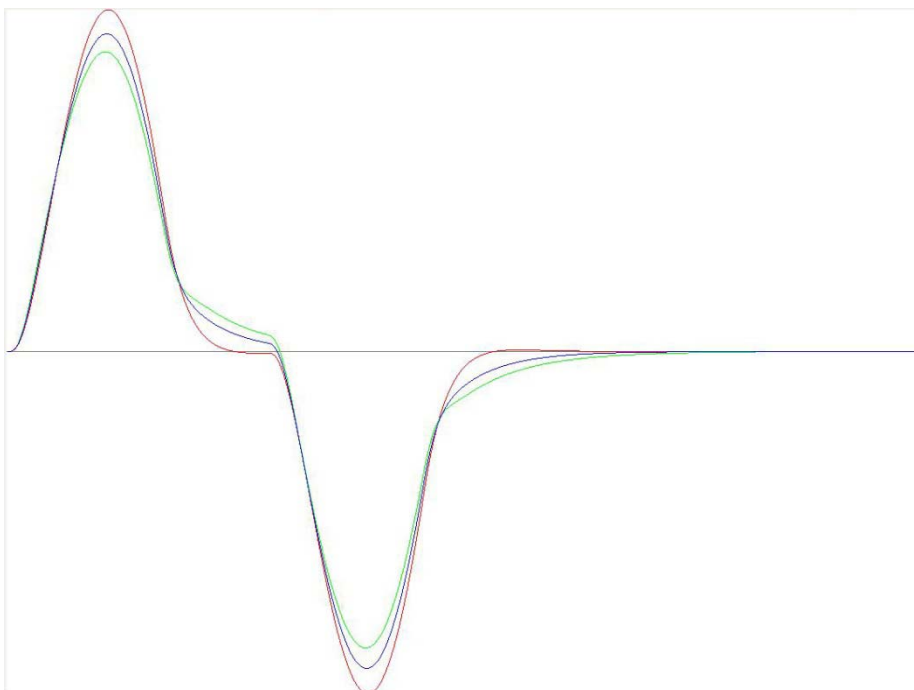
Aceleración vertical, auto base vs variaciones en la masa no suspendida.



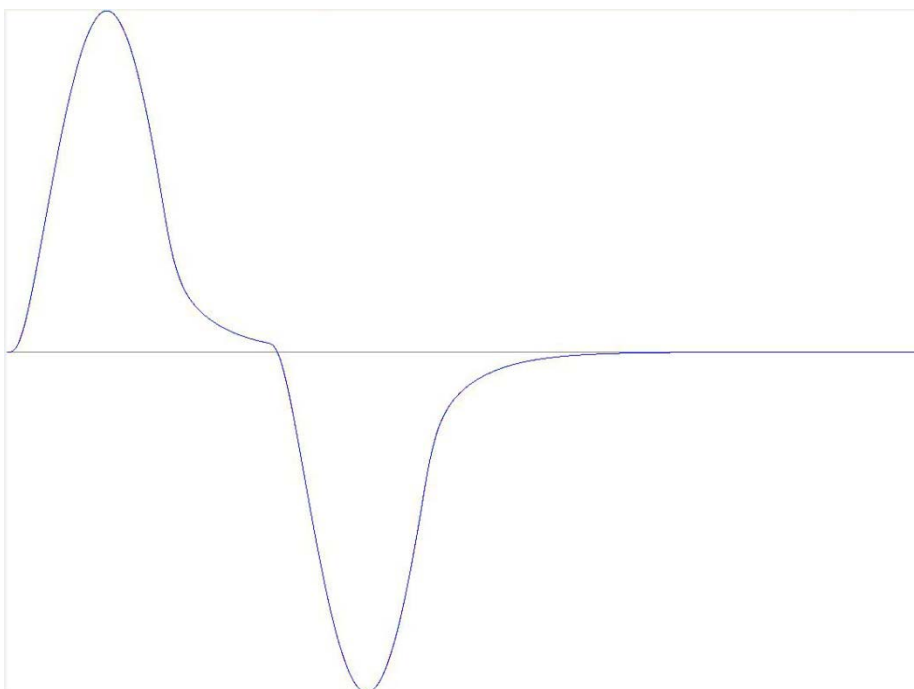
Angulo de cabeceo, auto base vs variaciones en la constante de rigidez de los ejes.



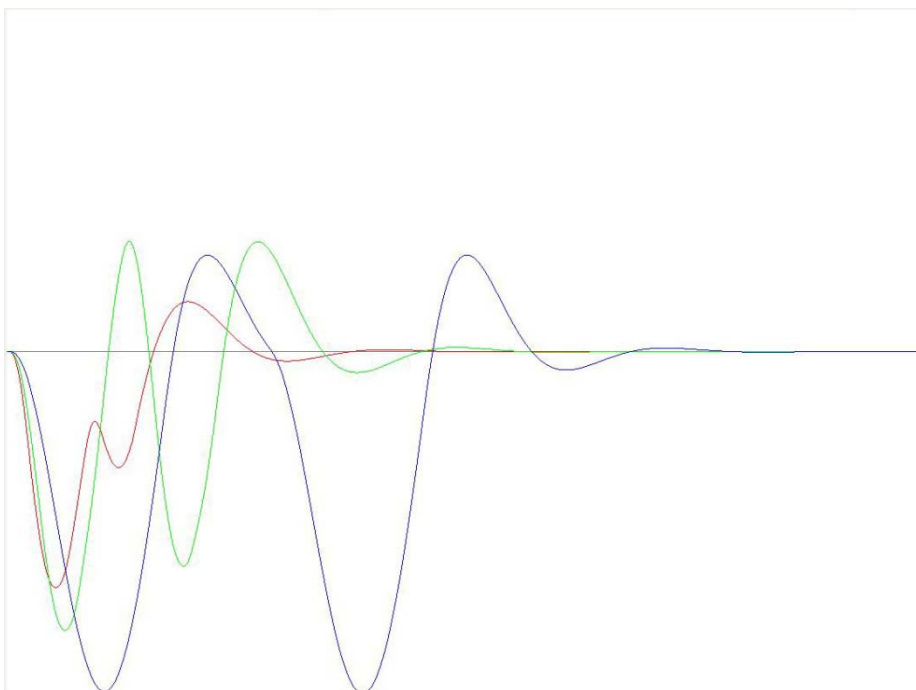
Angulo de cabeceo, auto base vs variaciones en el coeficiente de amortiguación de los amortiguadores.



Angulo de cabeceo, auto base vs variaciones en la masa no suspendida.



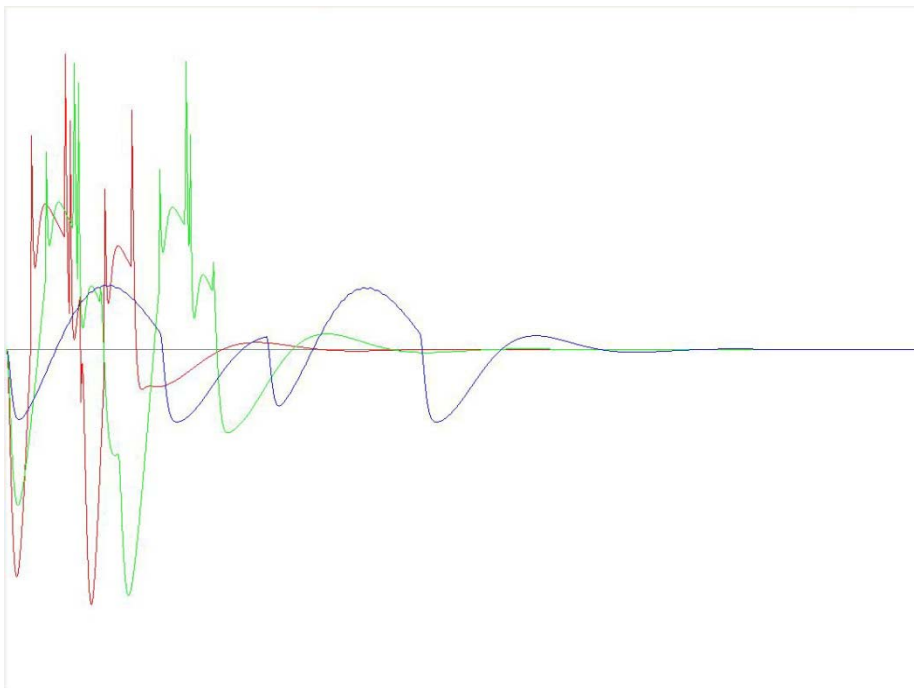
Desplazamiento vertical, auto base a distintas velocidades (azul: 3m/s; verde: 7m/s; roja: 11m/s).



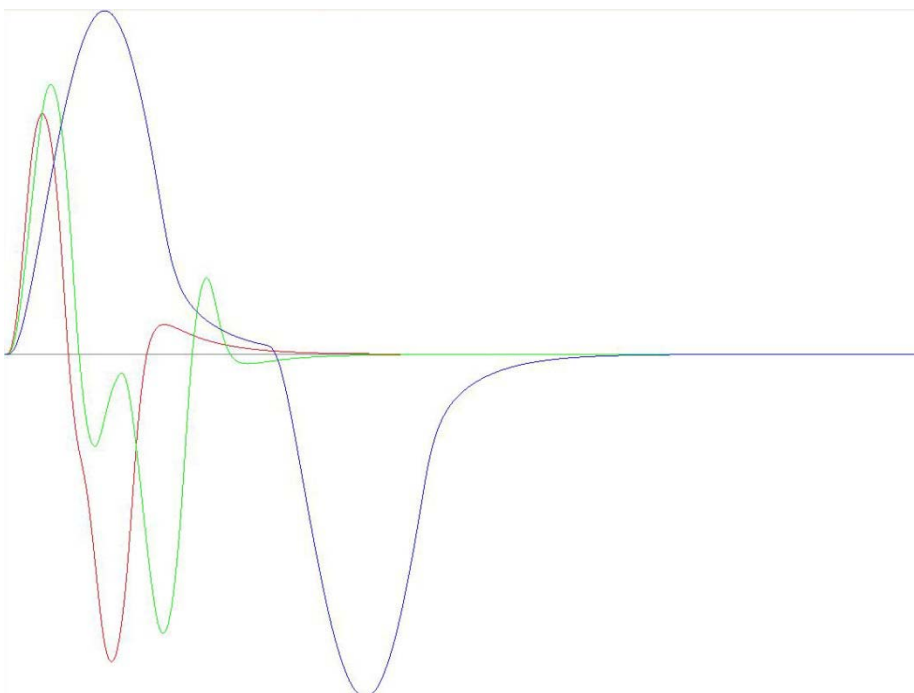
Velocidad vertical, auto base a distintas velocidades (azul: 3m/s; verde: 7m/s; roja: 11m/s).



Aceleración vertical, auto base a distintas velocidades (azul: 3m/s; verde: 7m/s; roja: 11m/s).

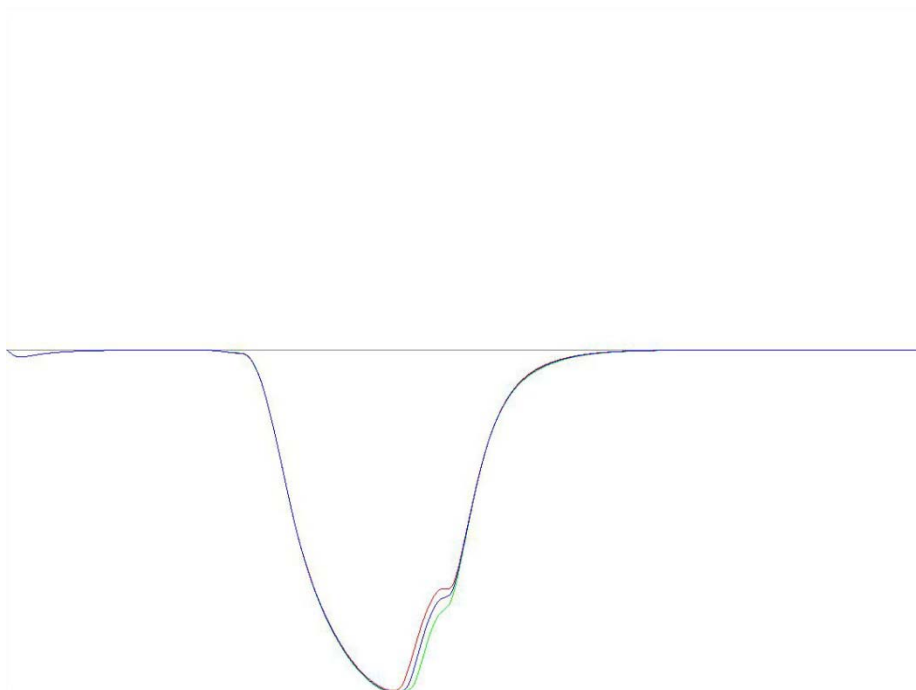


Angulo de cabeceo, auto base a distintas velocidades (azul: 3m/s; verde: 7m/s; roja: 11m/s).

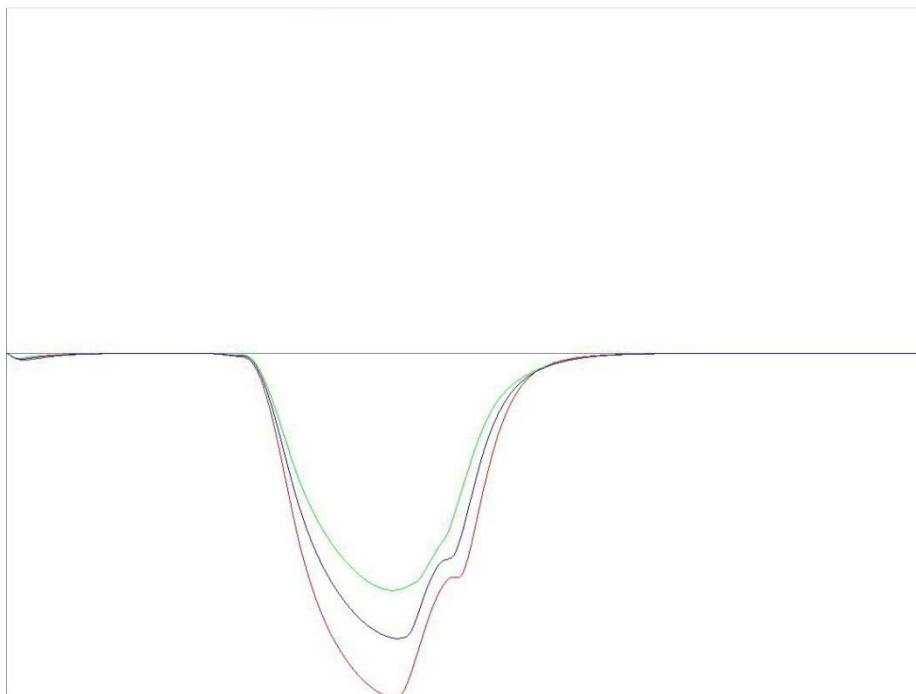


Estudio de evasión de accidente

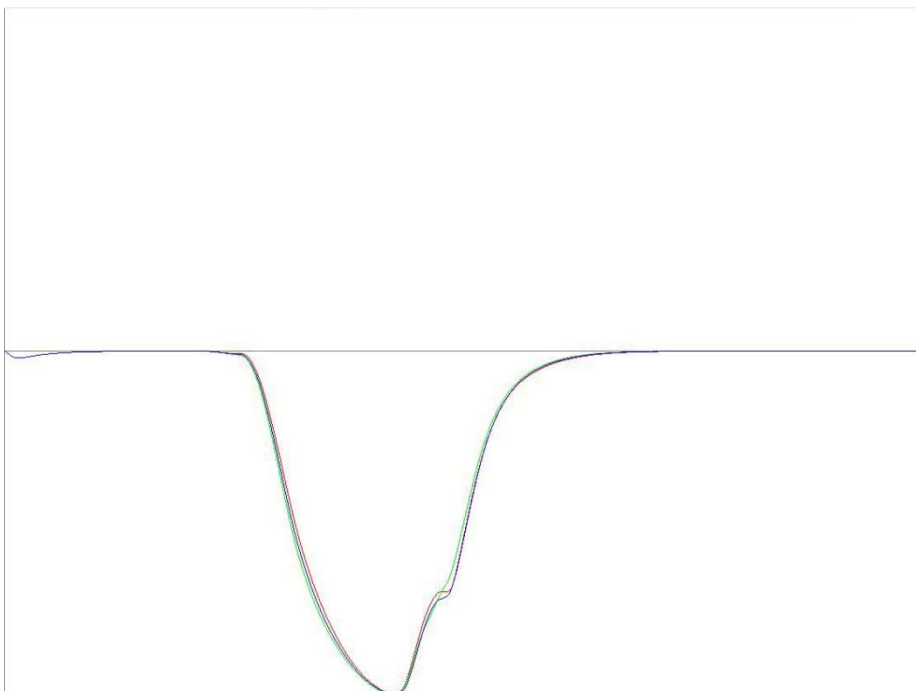
Angulo de cabeceo, configuración base vs variación en masas no suspendidas.



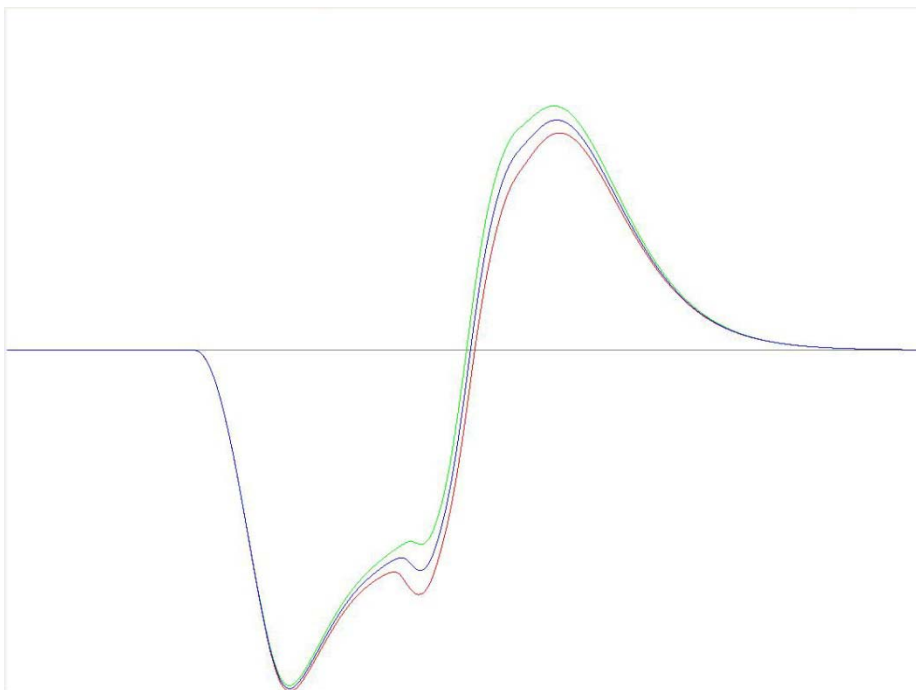
Angulo de cabeceo, configuración base vs variación en batalla.



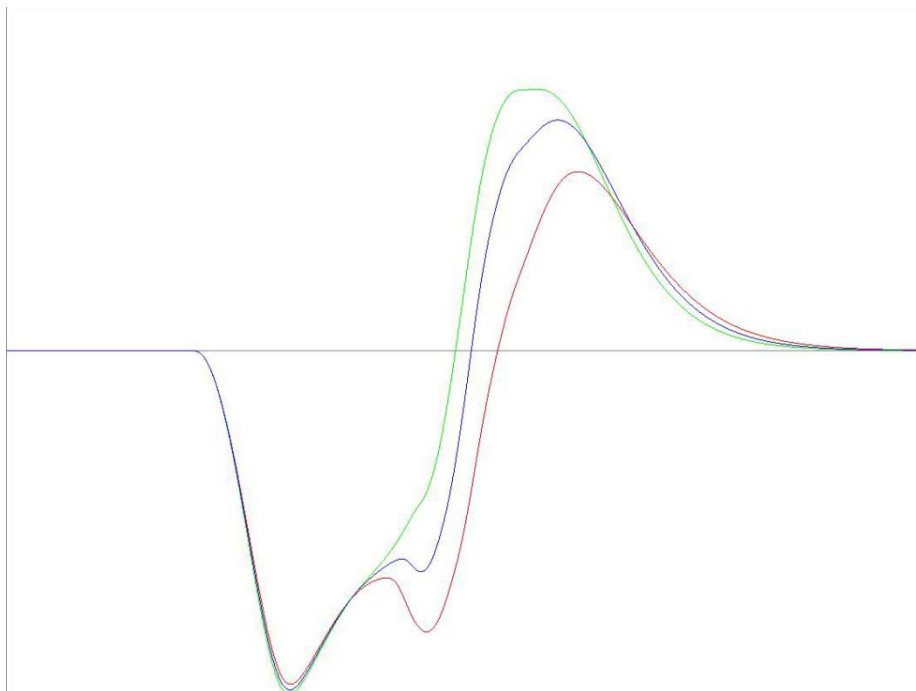
Angulo de cabeceo, configuración base vs variación en ancho de vías.



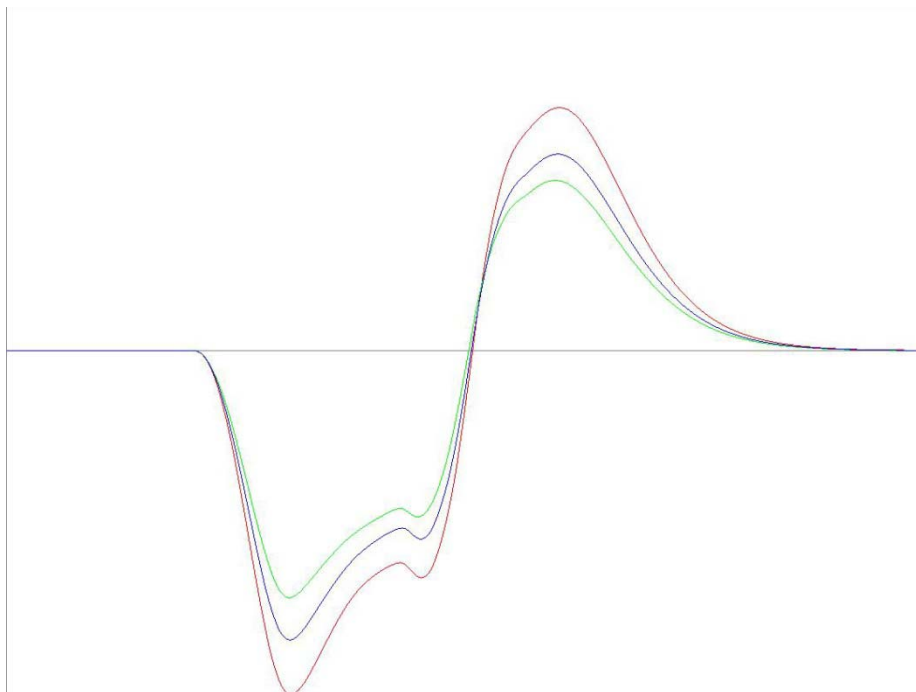
Angulo de balanceo, configuración base vs variación en masas no suspendidas.



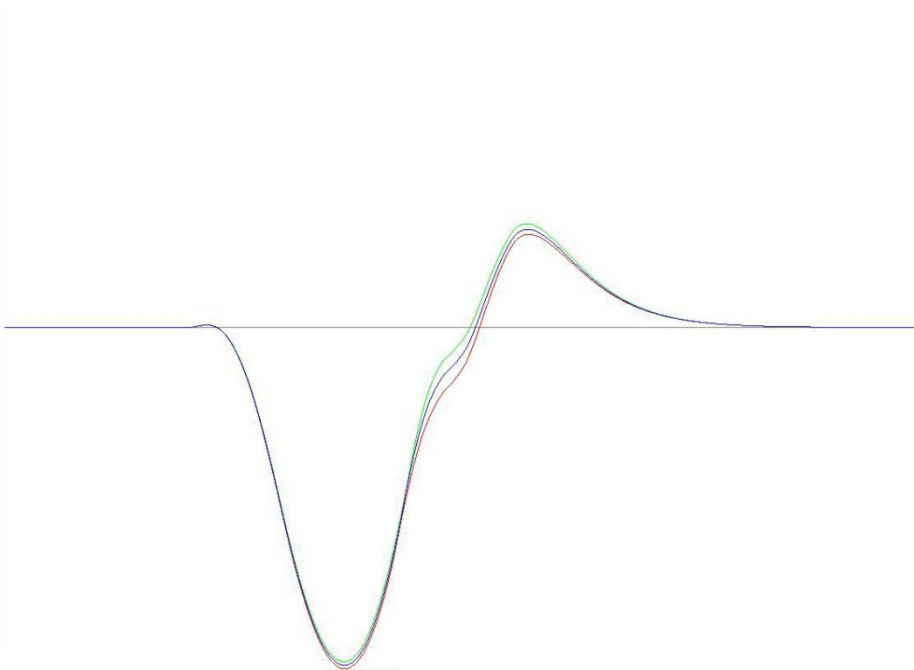
Angulo de balanceo, configuración base vs variación en batalla.



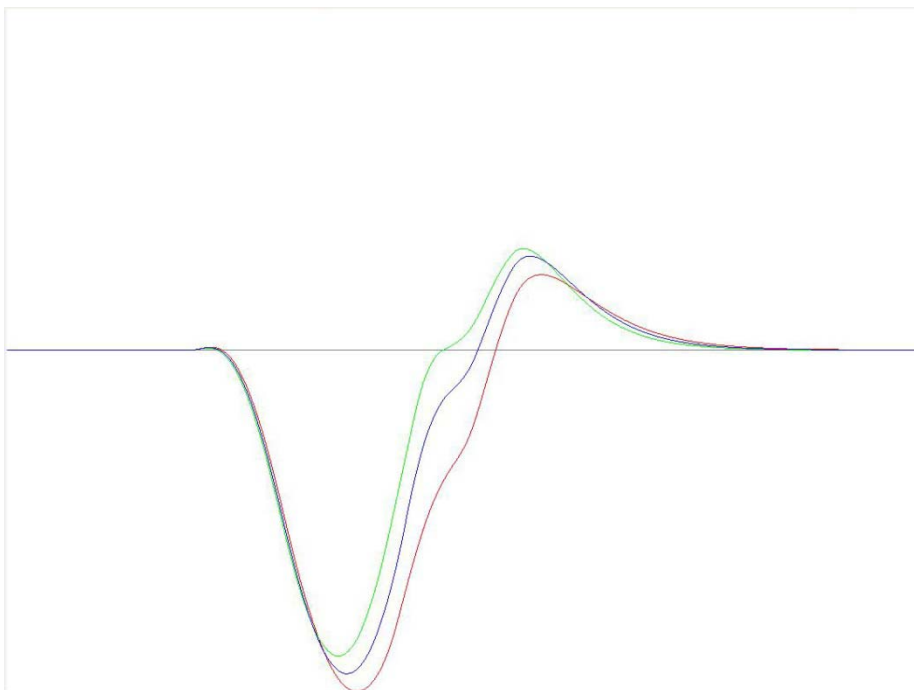
Angulo de balanceo, configuración base vs variación en ancho de vías.



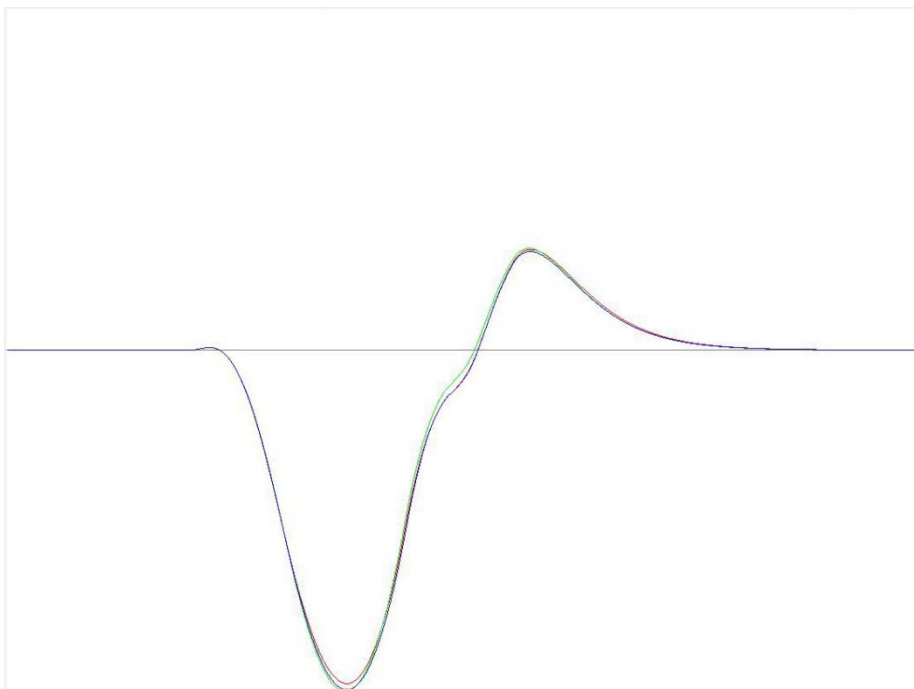
Angulo de deriva, configuración base vs variación en masas no suspendidas.



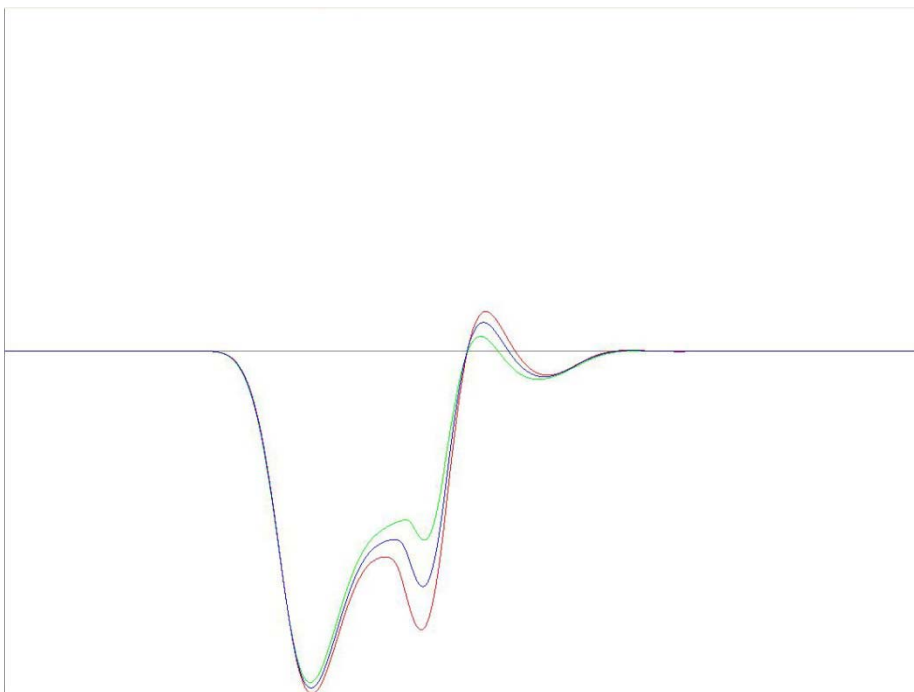
Angulo de deriva, configuración base vs variación en batalla.



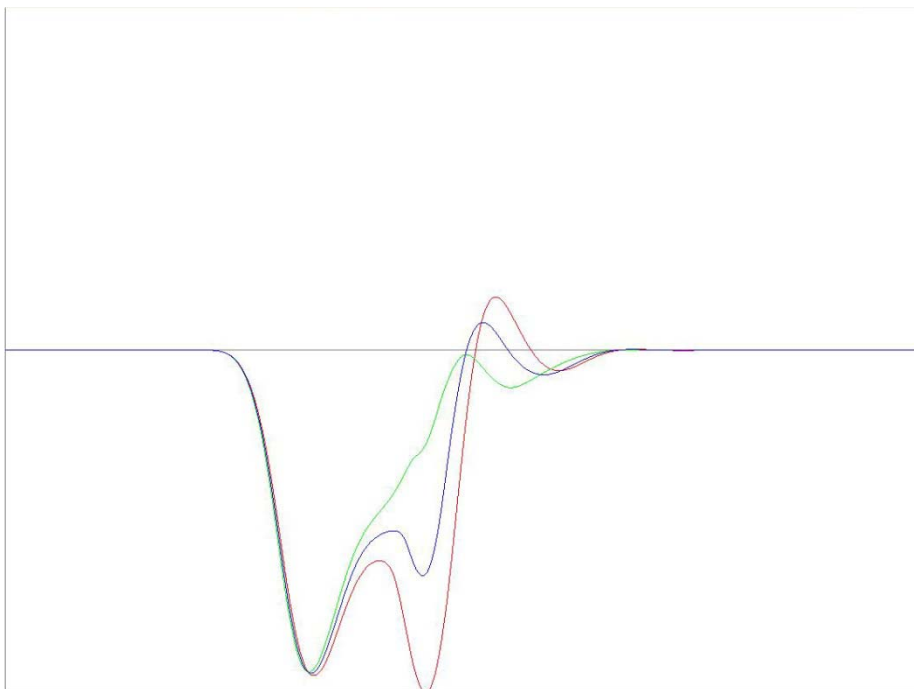
Angulo de deriva, configuración base vs variación en ancho de vías.



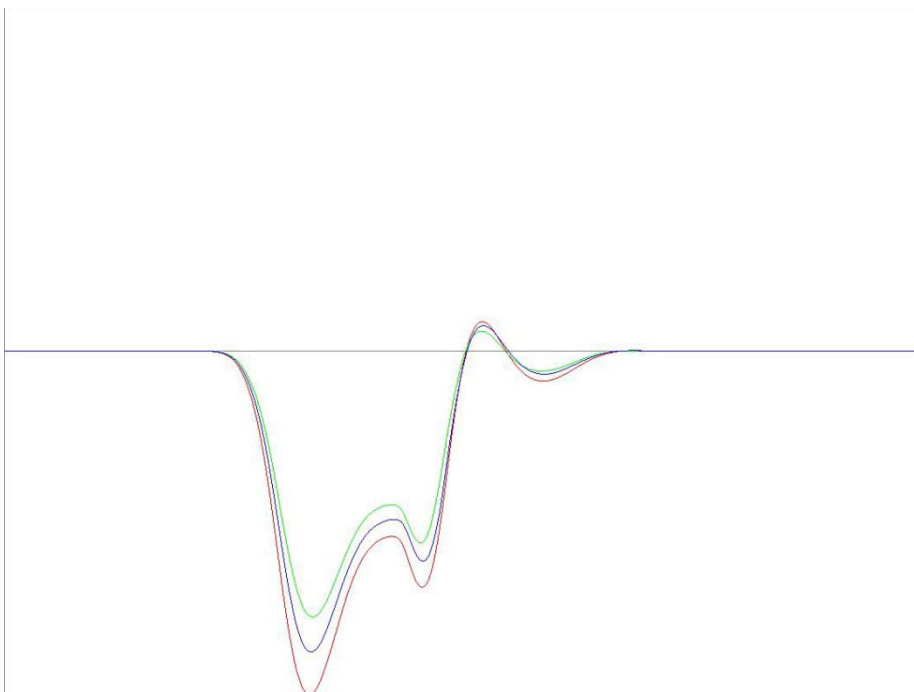
Desplazamiento vertical, configuración base vs variación en masas no suspendidas.



Desplazamiento vertical, configuración base vs variación en batalla.



Desplazamiento vertical, configuración base vs variación en ancho de vías.



Estudios de giro en ambos sentidos

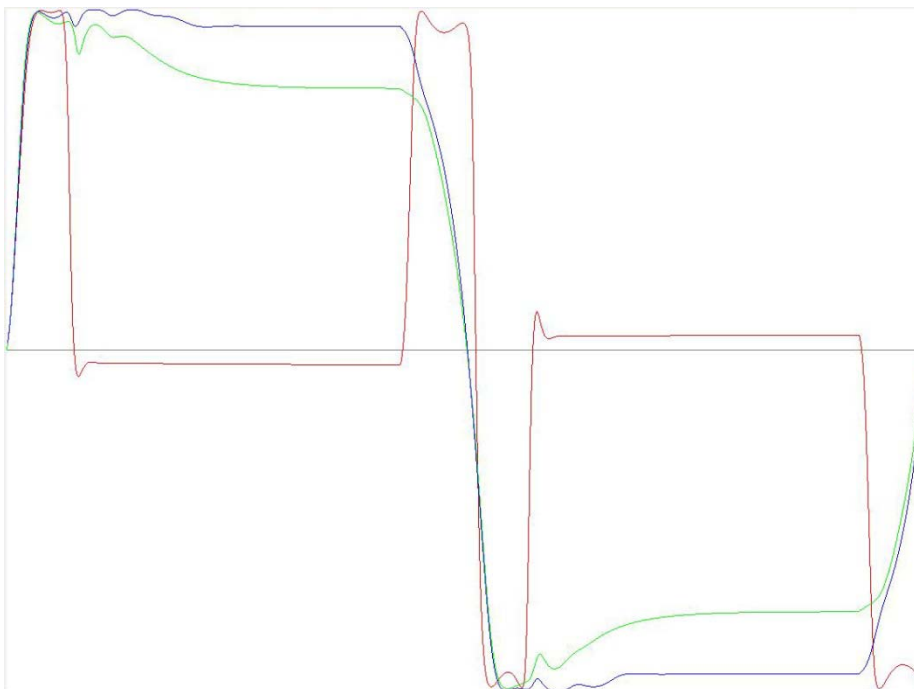
Gs centrípetas, configuración base vs variación en la altura de los centros de balanceo.



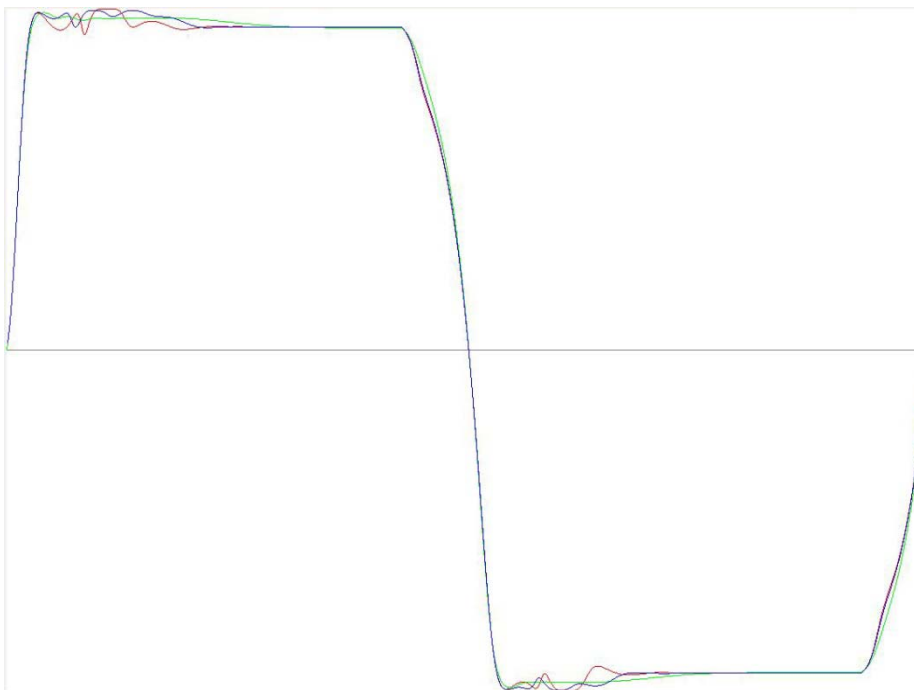
Gs centrípetas, configuración base vs variación en el camber estático.



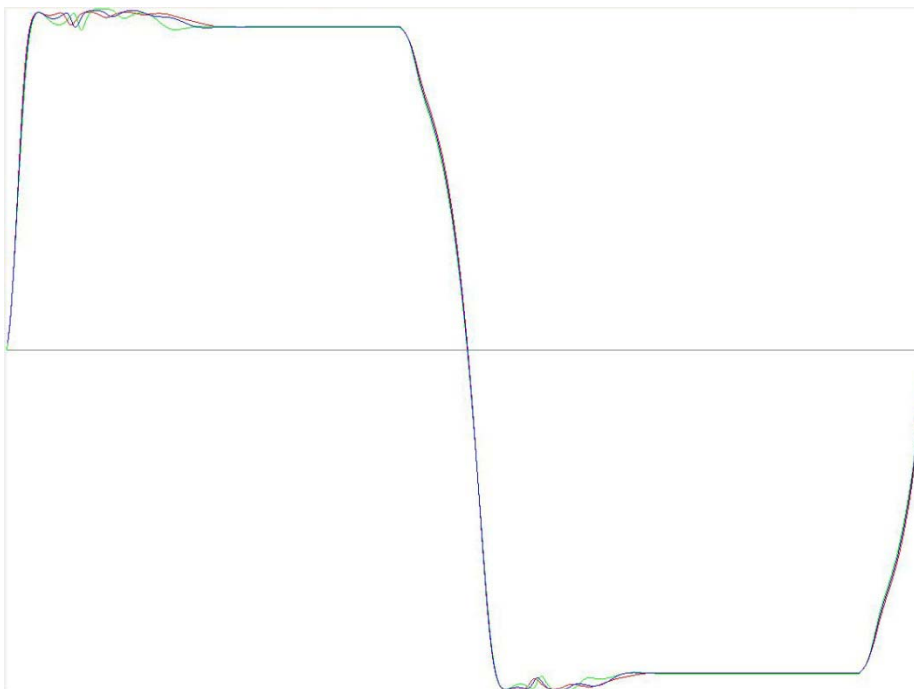
Gs centrípetas, configuración base vs variación en la geometría de dirección.



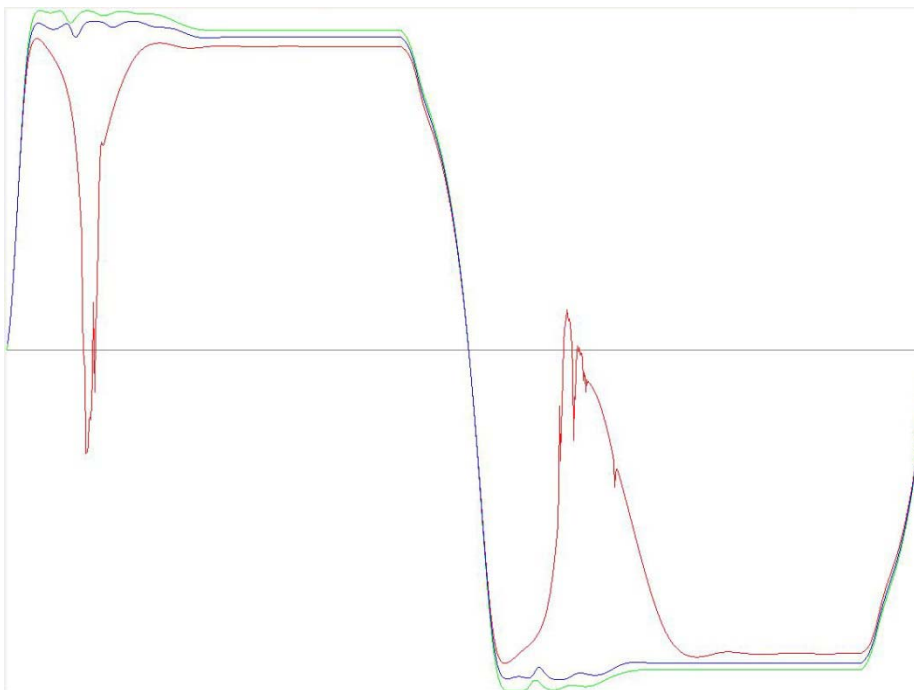
Gs centrípetas, configuración base vs variación en la rigidez de la barra antibalaneo.



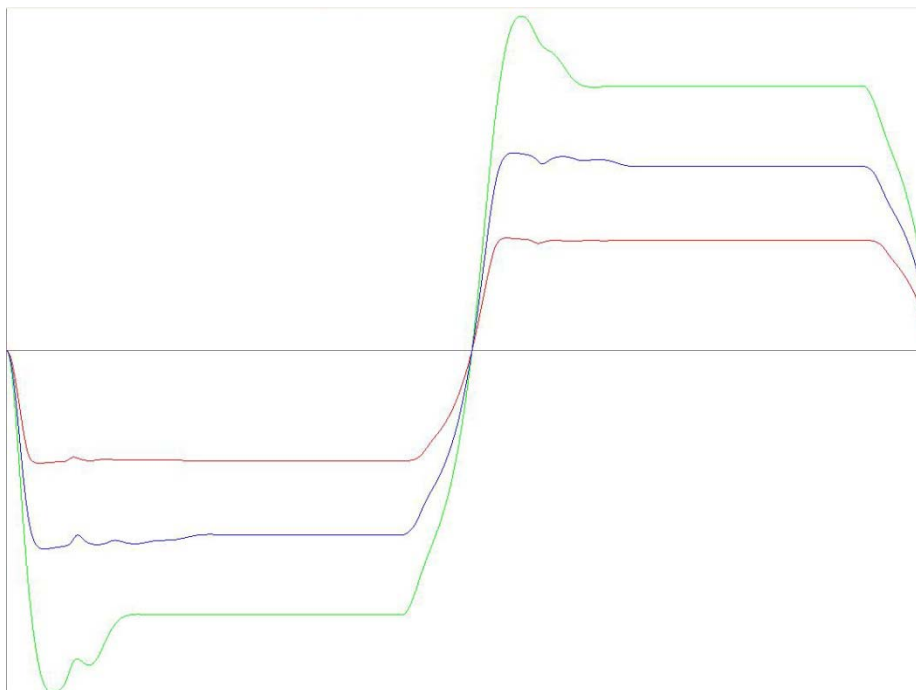
Gs centrípetas, configuración base vs variación en la batalla.



Gs centrípetas, configuración base vs variación en el ancho de vías.



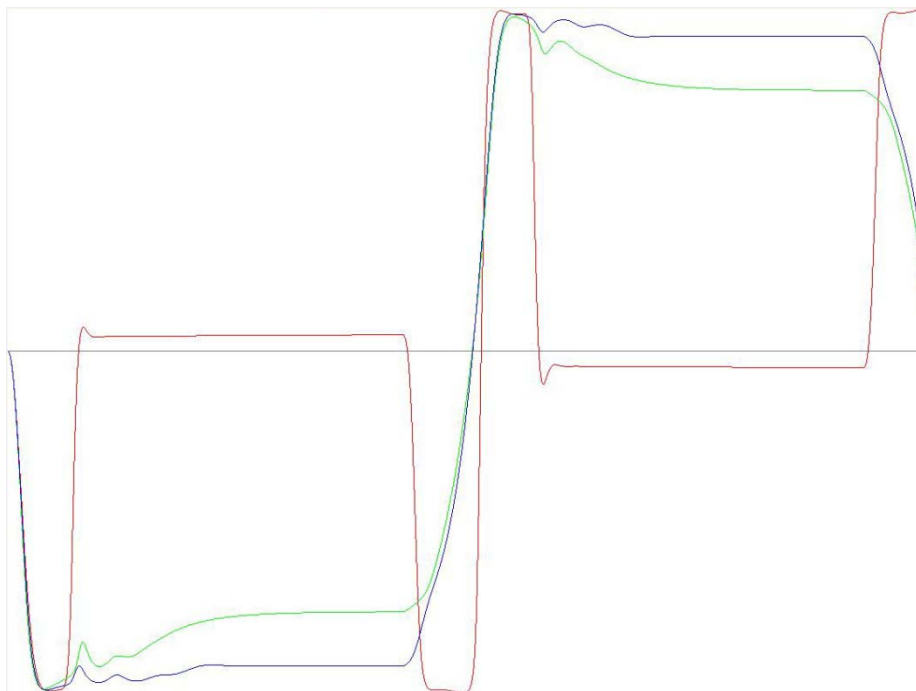
Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en la altura de los centros de balanceo.



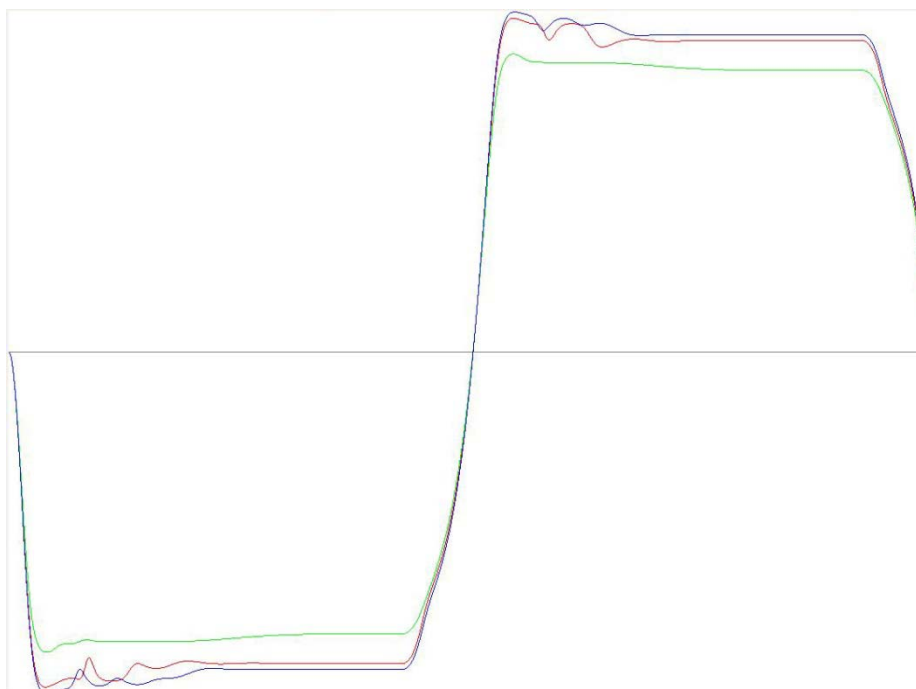
Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en el camber estático.



Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en la geometría de dirección.



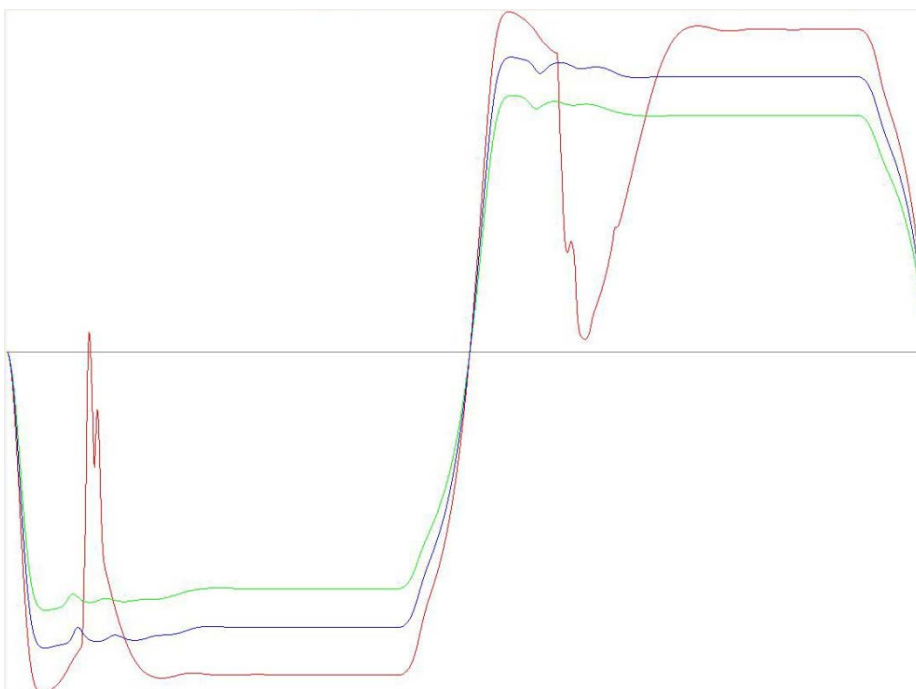
Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en la rigidez de la barra antibalanceo.



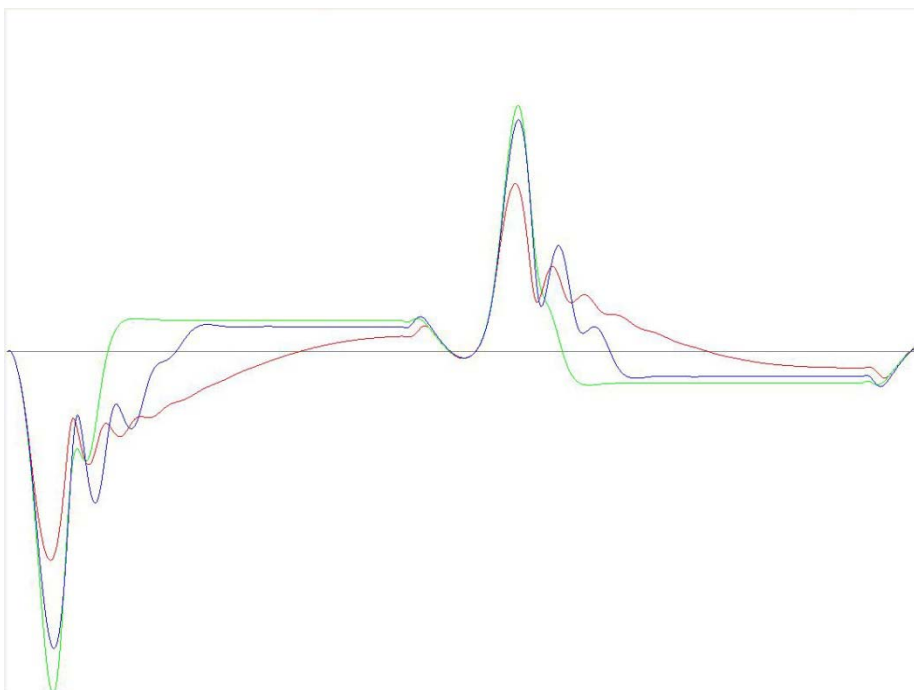
Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en la batalla.



Ángulo de balanceo, configuración base vs variación en el ancho de vías.



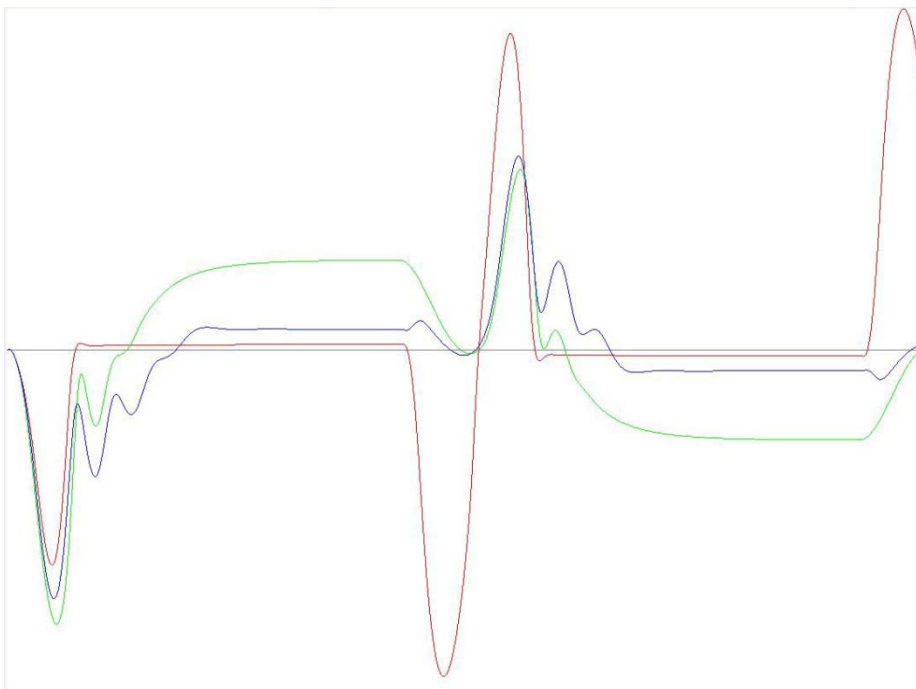
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en la altura de los centros de balanceo.



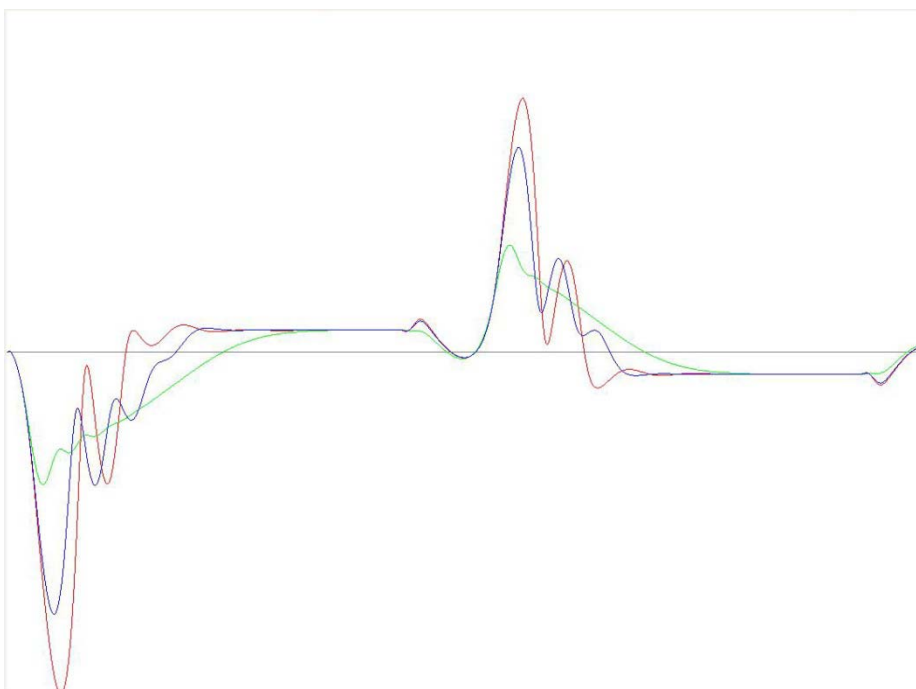
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en el camber estático.



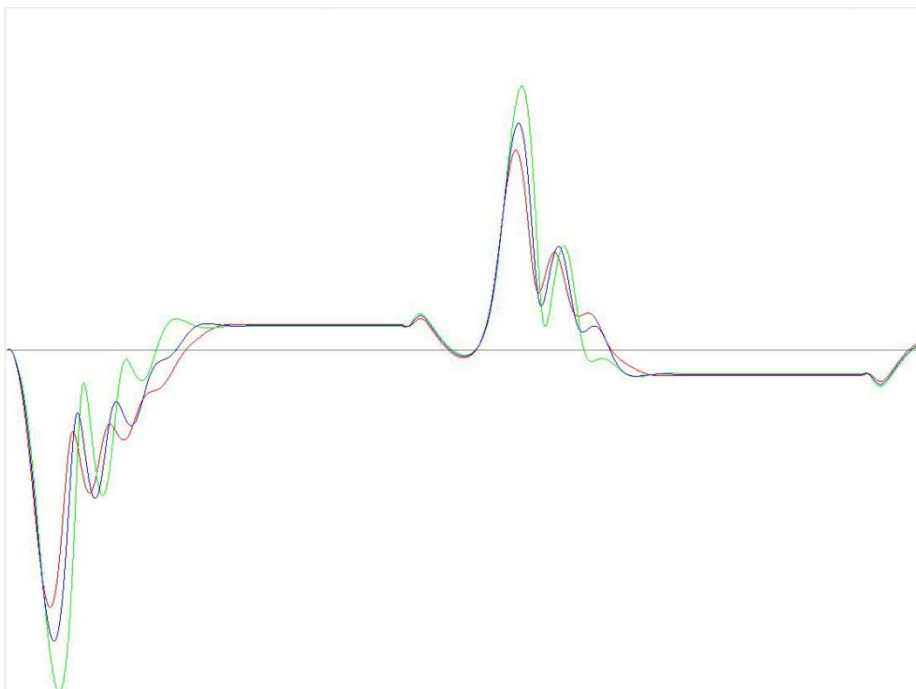
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en la geometría de dirección.



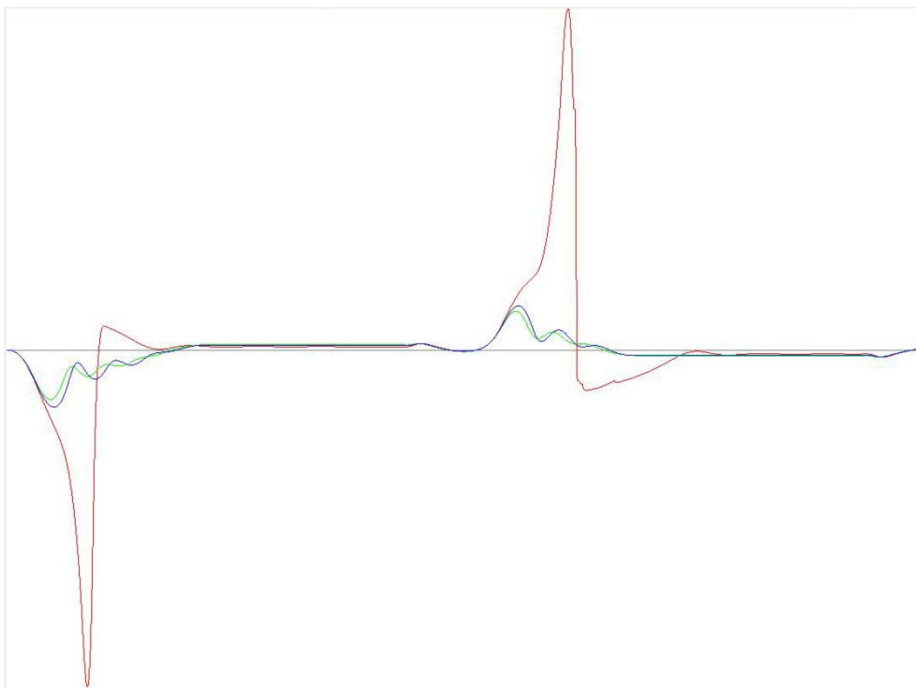
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en la rigidez de la barra antibalaneo.



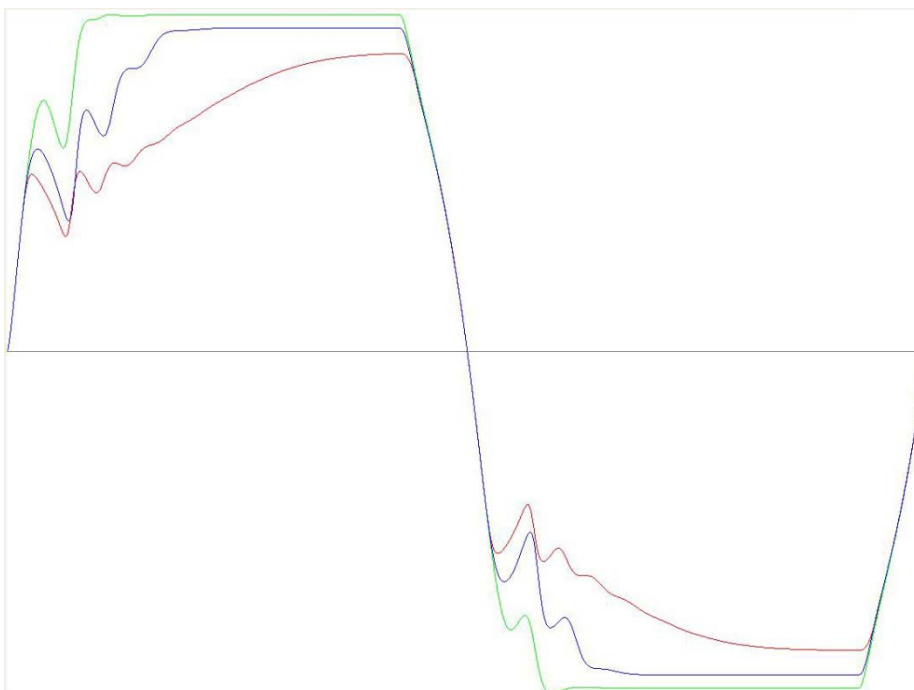
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en la batalla.



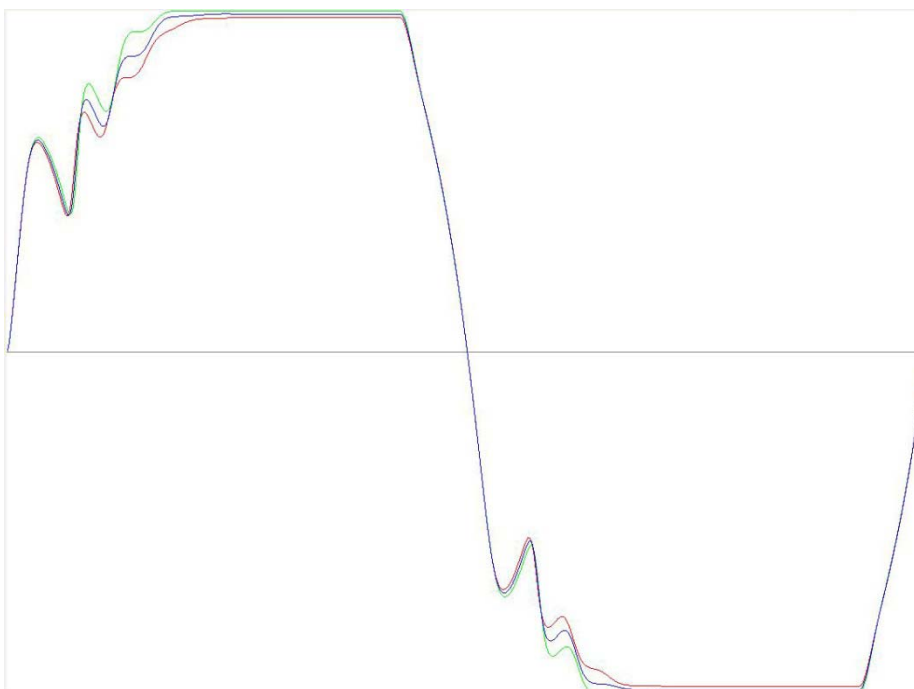
Ángulo de deriva, configuración base vs variación en el ancho de vías.



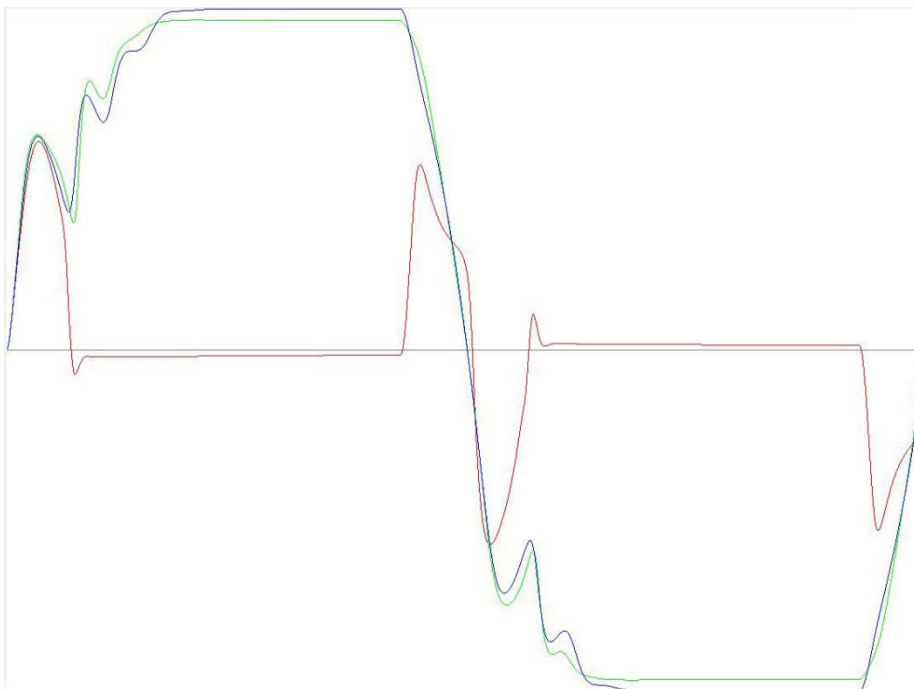
Velocidad de giro, configuración base vs variación en la altura de los centros de balanceo.



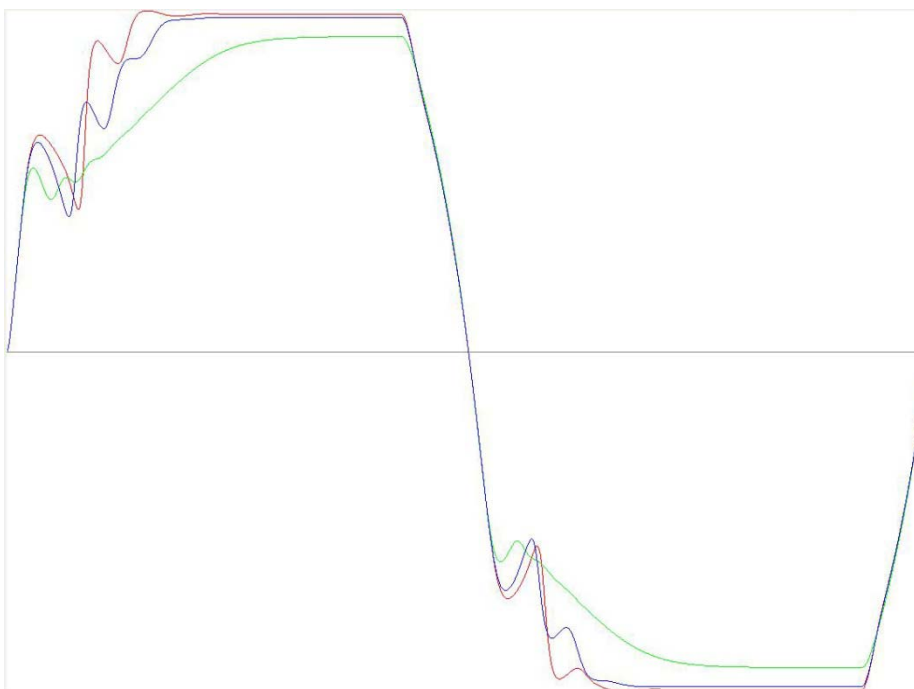
Velocidad de giro, configuración base vs variación en el camber estático.



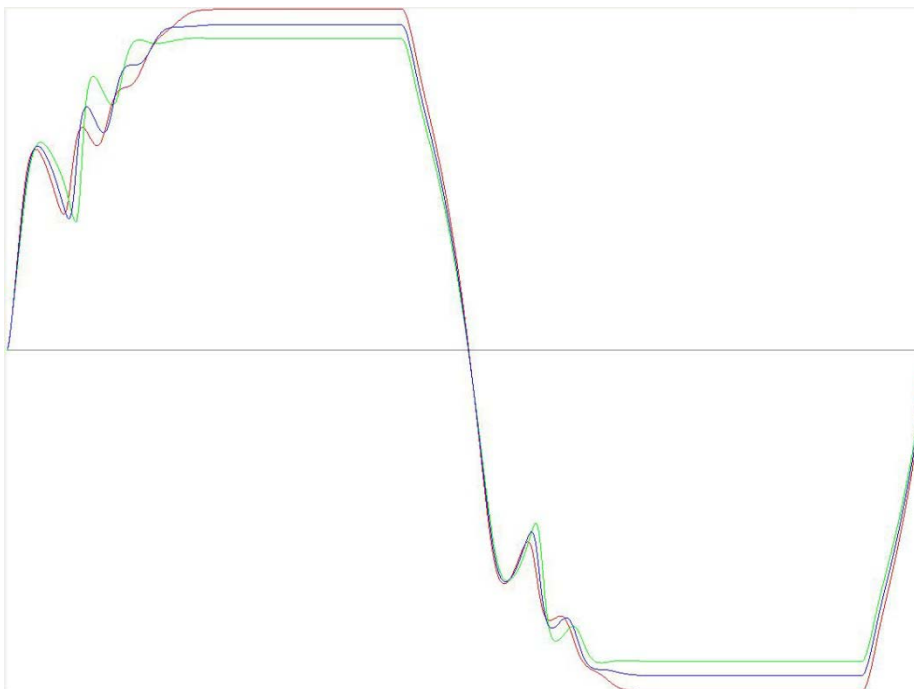
Velocidad de giro, configuración base vs variación en la geometría de dirección.



Velocidad de giro, configuración base vs variación en la rigidez de la barra antibalaneo.



Velocidad de giro, configuración base vs variación en la batalla.



Velocidad de giro, configuración base vs variación en el ancho de vías.



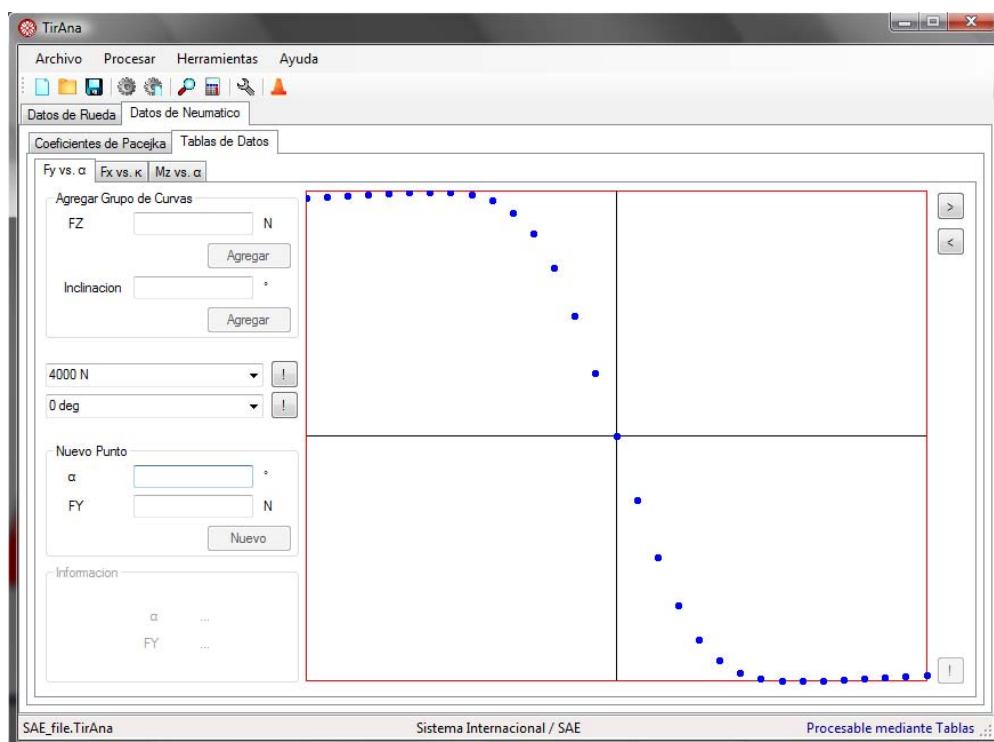
A.1 CAPTURAS DE PANTALLA DEL PROGRAMA

Ventana inicial del programa.

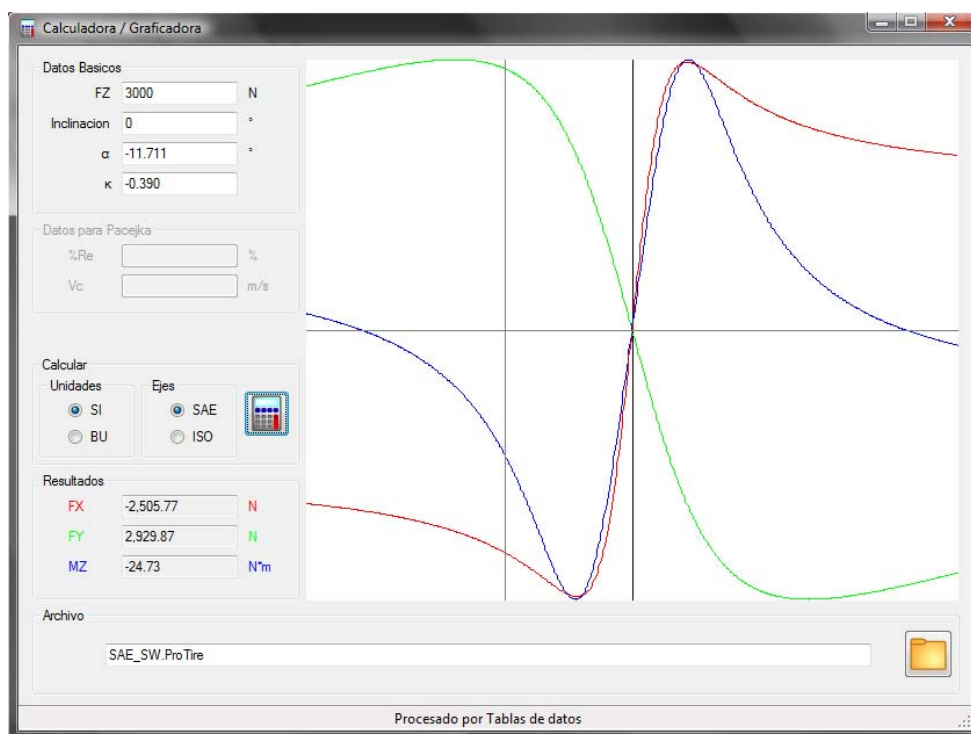


Módulo TirAna. Configuración de neumáticos mediante coeficientes de Pacejka

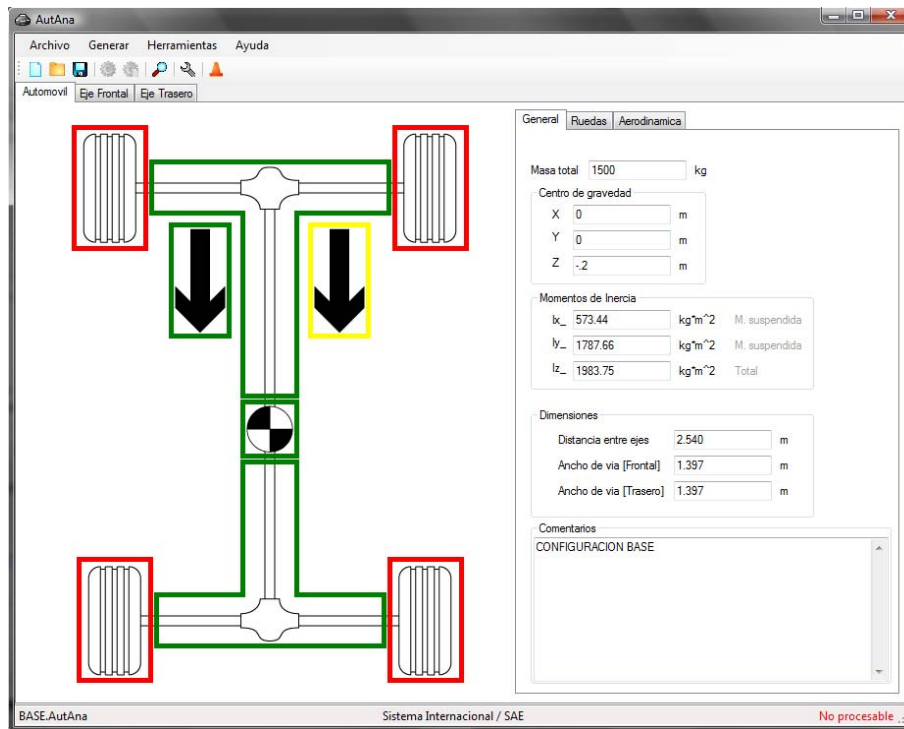
Módulo TirAna. Configuración de neumáticos mediante tablas



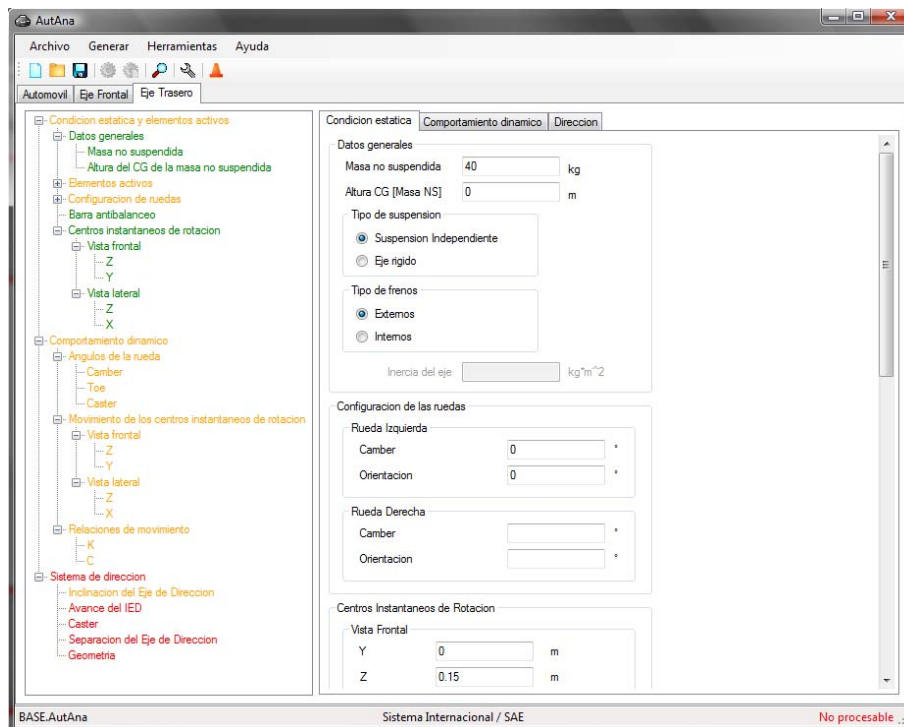
Módulo TirAna. Calculadora de neumáticos.



Módulo AutAna. Configuración general del vehículo.



Módulo AutAna. Configuración del sistema de suspensión del vehículo.



Módulo SusAna. Plantilla de configuración de las perturbaciones de viento y suelo.

SusAna

Archivo Estudios Herramientas Ayuda

Automóvil

C:\Users\Siso A A Alvarez S\Documents\TESIS Test files\ToED\CARS\BASE.ProCar

☒ Interpretar como cargado

Perturbaciones externas **Perturbaciones del automóvil** **Opciones de estudio**

Información de viento

Velocidad

☒ Constante 0 m/s

☐ Interpolación Fx m/s = F(s)

Angulo

☐ Constante 0

☒ Interpolación Fx * = F(s)

☒ Angulo relativo al automóvil

☐ Angulo relativo a tierra

Densidad del aire 1.225 Kg/m³

Información de superficie

Delantera Izquierda

☒ Asistente Asistente

☐ Interpolación Fx m = F(s)

☐ Cambiar fricción Fx % = F(s)

Delantera Derecha

☐ Asistente Asistente

☒ Interpolación Fx m = F(s)

☒ Cambiar fricción Fx % = F(s)

Trasera Izquierda

☒ Asistente Asistente

☐ Interpolación Fx m = F(s)

☒ Cambiar fricción Fx % = F(s)

Trasera Derecha

☐ Asistente Asistente

☒ Interpolación Fx m = F(s)

☐ Cambiar fricción Fx % = F(s)

Forma de datos

☐ Perfil universal

☐ Perfiles distintos por lado

☒ Perfiles independientes en cada rueda

Skidpad.SusAna Sistema Internacional / Basado en tiempo No procesable

Módulo SusAna. Plantilla de configuración de las entradas del vehículo.

SusAna

Archivo Estudios Herramientas Ayuda

Automóvil

C:\Users\Siso A A Alvarez S\Documents\TESIS Test files\ToED\CARS\BASE.ProCar

☒ Interpretar como cargado

Perturbaciones externas **Perturbaciones del automóvil** **Opciones de estudio**

Información de torque motriz

Forma de datos

☒ Información general

☐ Información detallada

Traccion ...

☒ Trasera

☐ Integral

☐ Delantera

MOTOR y Transmision

N*m = F(s)

Volante

Fx * = F(s)

Información de torque de frenada

1 2

N*m = F(s) N*m = F(s)

% de distribución [hacia el frente]

70

3 4

N*m = F(s) N*m = F(s)

Forma de datos

☒ Información general

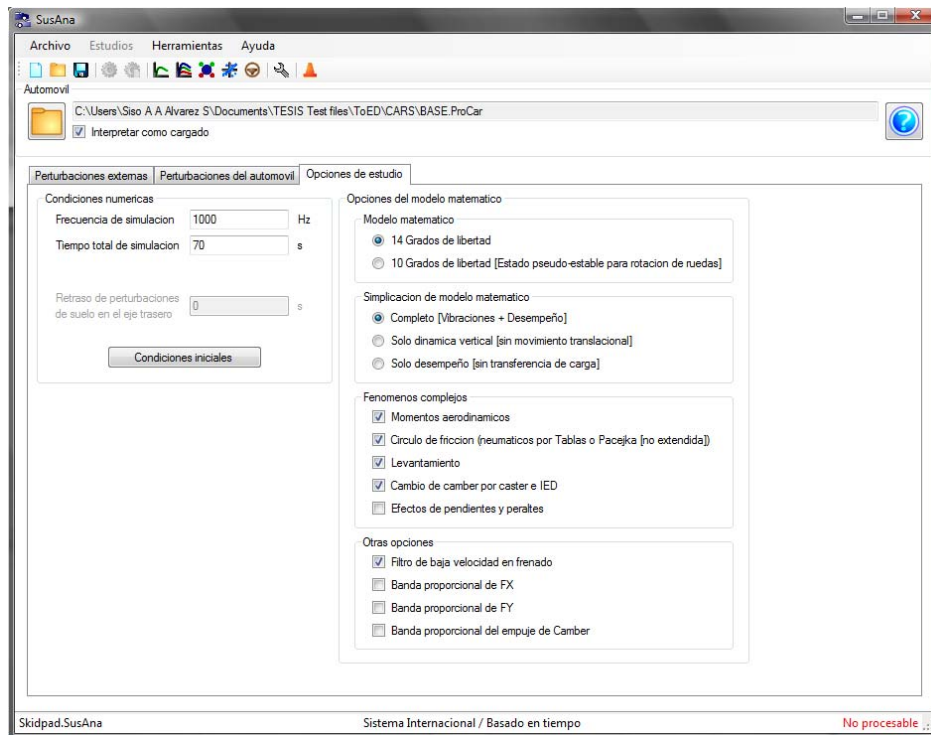
☐ Información detallada

Torque General

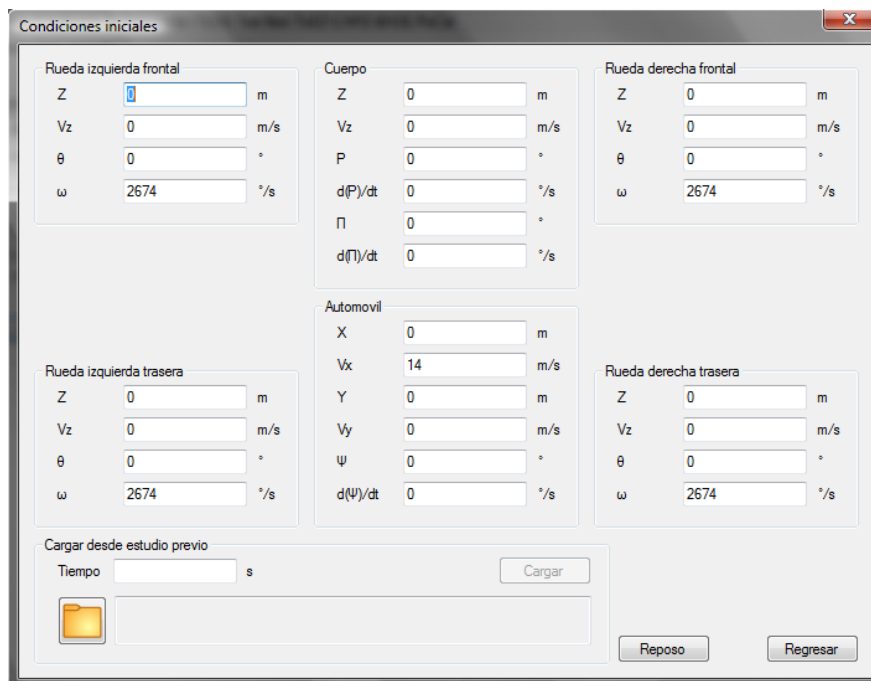
N*m = F(s)

Skidpad.SusAna Sistema Internacional / Basado en tiempo No procesable

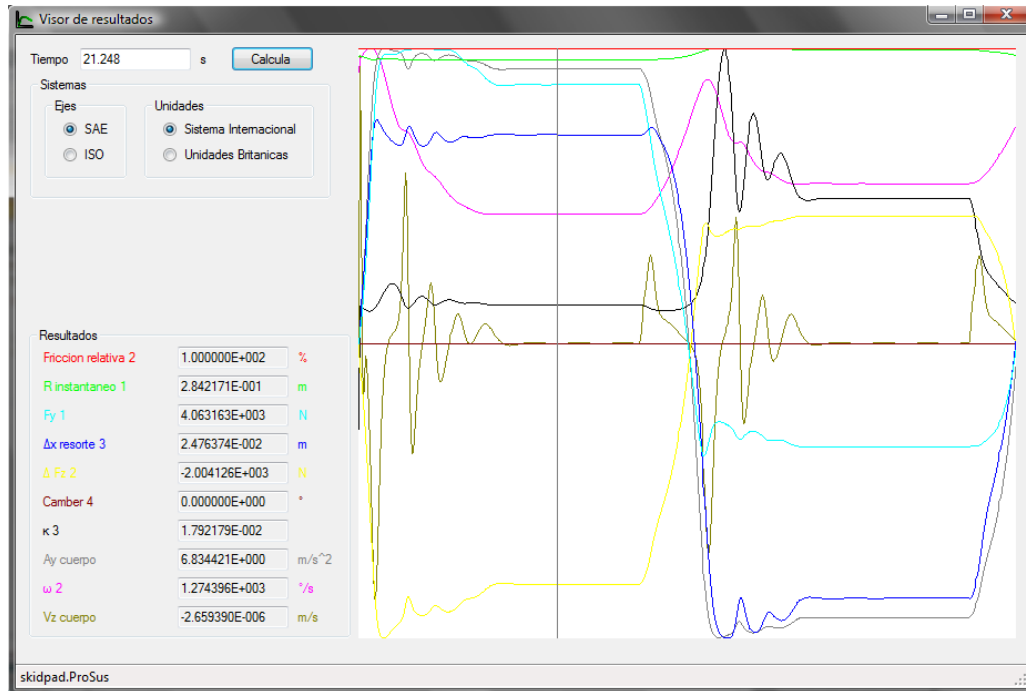
Módulo SusAna. Plantilla de configuración de las opciones.



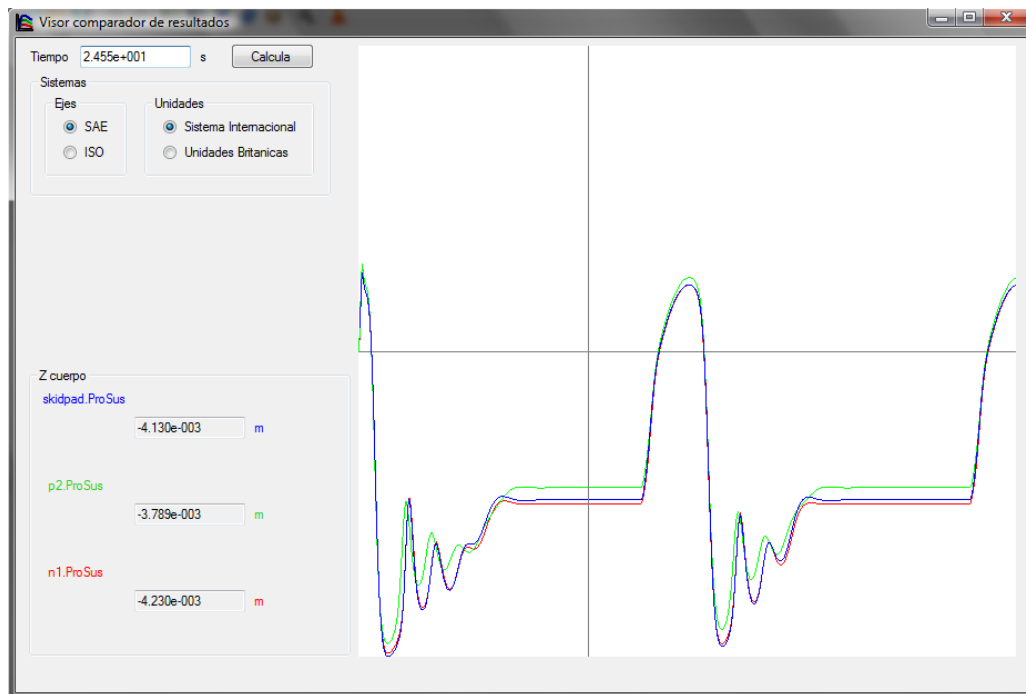
Módulo SusAna. Plantilla de configuración de las condiciones iniciales del vehiculo.



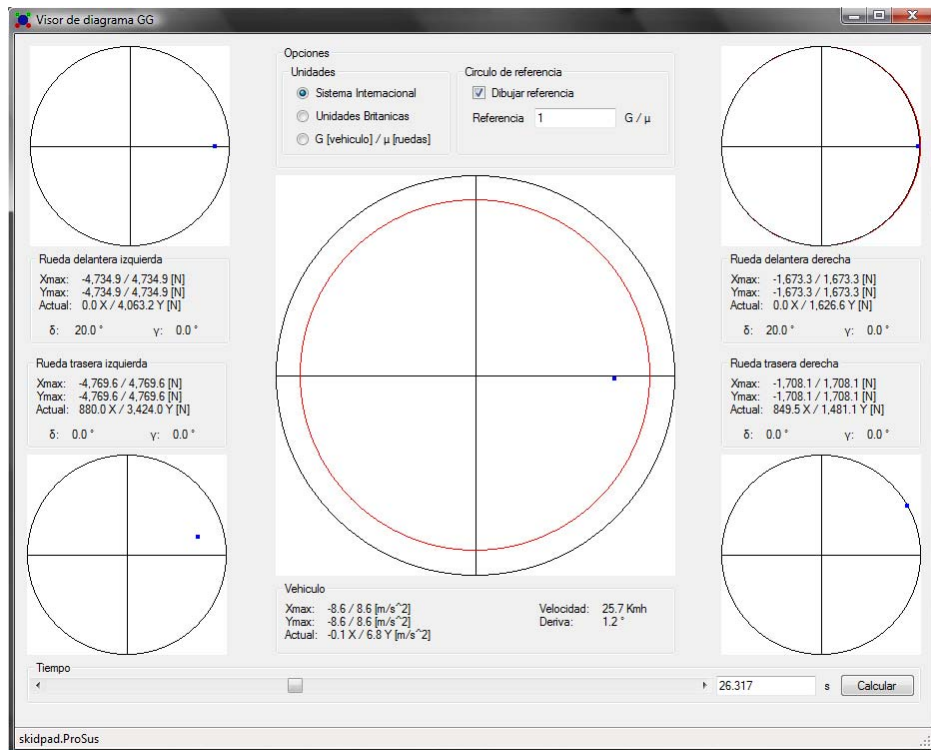
Módulo SusAna. Visor de resultados.



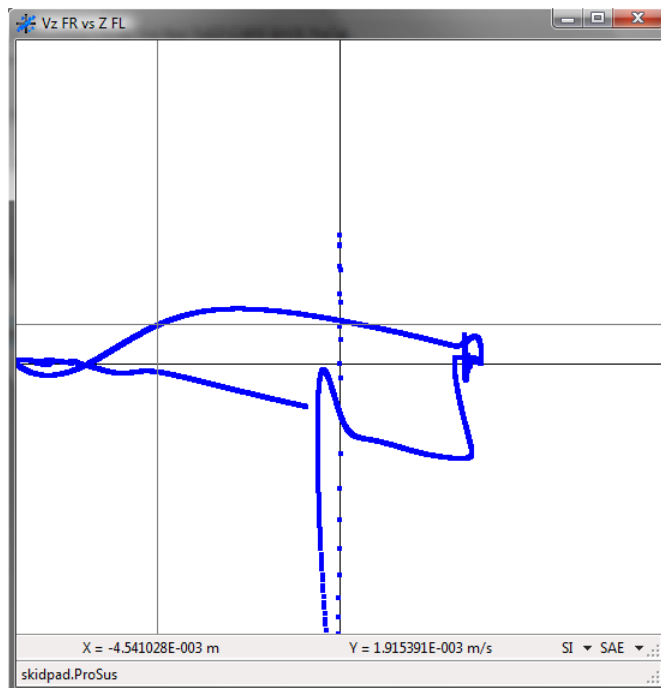
Módulo SusAna. Visor comparador de resultados.



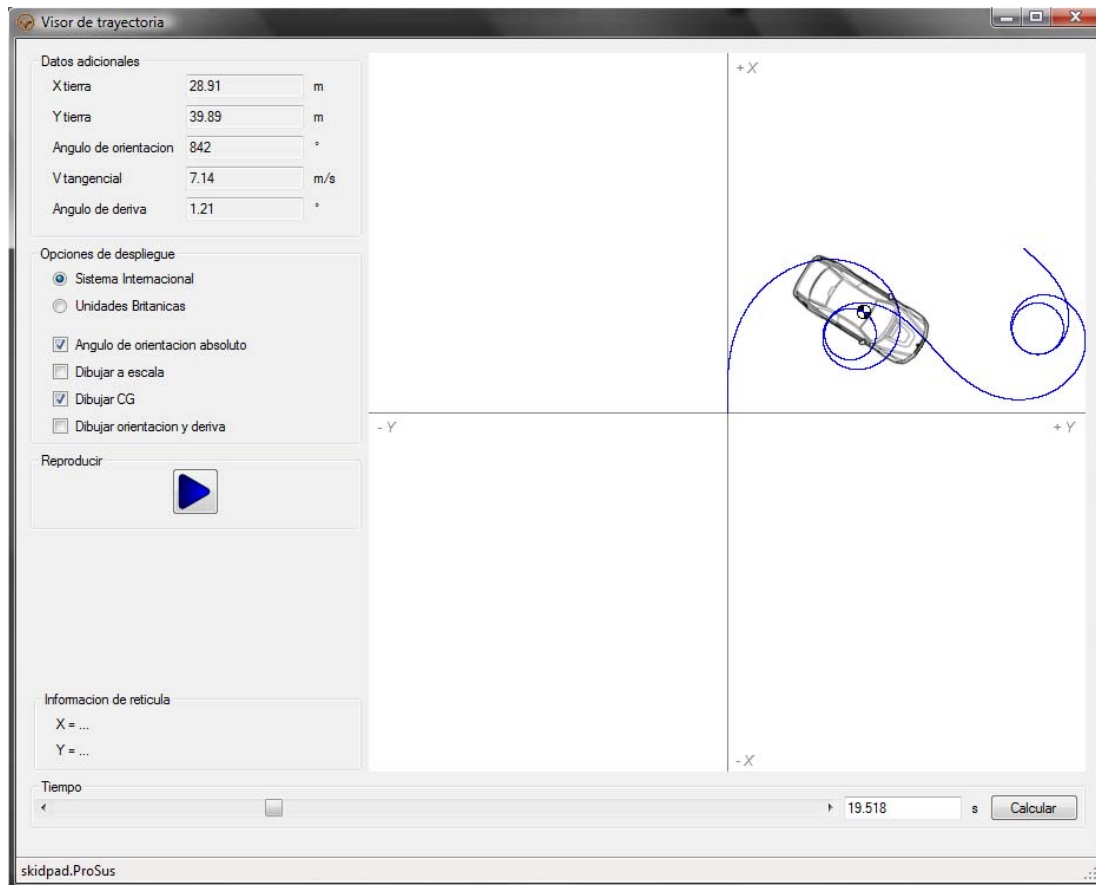
Módulo SusAna. Visor de diagrama GG.



Módulo SusAna. Visor de dispersión.



Módulo SusAna. Visor de trayectoria.



A.2 CÓDIGO COMPUTACIONAL DEL SIMULADOR

```

namespace Hd5SnST10
{
    public class SstvdS
    {
        public volatile bool ab0tgdp;
        public ProCAR GODITF;
        public DisfC14 EIANP;
        double sq03, Teoatw8;
        bool Cvj60gdf;
        double O5fttol4;
        string lmelhd4;
        public int prftf8;
        bool Cu84nd, Ji84nd, Gm84nd, 0204t;
        bool Pswgn, Cflwgn;
        public bool LST;
        double[] 4uecldv, Xabc2dv, Dosc3dv, Atrotbc4dv;
        A2ayList Tacb1, 2tacb, Ta3cb;
        double Drwlsd;
        double ScicT7, Scicd3;
        SusOptions APPJ13;
        public dlnf double g = 9.80665;
        bool[] S1MP13;
        double[] R0uwx;
        bool[] _coj64ls;

        bool DeLcag;
        double[] SSF4sff;

        public SvsSt3(Tmkhna Ahiw67, double[] Sq01, double sq03, double Teoatw8, bool
Cvj60gdf)
        {
            R0uwx = new double[3];
            _coj64ls = new bool[4];

            Tacb1 = new A2ayList();
            2tacb = new A2ayList();
            Ta3cb = new A2ayList();

            Drwlsd = 0;
            O5fttol4 = 1.05;
            prftf8 = 0;
            LST = false;
            ab0tgdp = false;
            this.sq03 = sq03;
            this.Teoatw8 = Teoatw8;
            this.Cvj60gdf = Cvj60gdf;
            this.Cflwgn = Ahiw67.Cflwgn;
            this.Pswgn = Ahiw67.Pswgn;
            this.Cu84nd = Ahiw67.Cu84nd;
            this.Ji84nd = Ahiw67.Ji84nd;
            this.Gm84nd = Ahiw67.Gm84nd;
            this.0204t = Ahiw67.0204t;
            GODITF = Ahiw67.GODITF;
            EIANP = new DisfC14(Ahiw67);
            if (Ahiw67.IsTB)
            {
                EIANP.Pds_4.RdyGI(Teoatw8, true, sq03);
                EIANP.Pds_1.RdyGI(Teoatw8, true, sq03);
                EIANP.Pds_3.RdyGI(Teoatw8, true, sq03);
                EIANP.Pds_2.RdyGI(Teoatw8, true, sq03);
            }
            else
            {
                double SttZ = Teoatw8 * 110;
                EIANP.Pds_4.RdyGI(SttZ, false, sq03);
                EIANP.Pds_1.RdyGI(SttZ, false, sq03);
            }
        }
    }
}

```

```

        EIANP.Pds_3.RdyGI(SttZ, false, sq03);
        EIANP.Pds_2.RdyGI(SttZ, false, sq03);
    }
    4uec1dv = J1uec(Sq01, Sq01.Length);
    Dosc3dv = _oldintflg(0, 19);
    Xabc2dv = _oldintflg(0, 96);
    Atrotbc4dv = _oldintflg(0, 168);

    lmelhd4 = Ahiw67.Monanq.soc;
    APPJ13 = Ahiw67.OPTS;

    DeLcag = Ahiw67.cBox_a3Coadd.Checked;
    SSF4sff = _oldintflg(0, 4);
}

private double[] _oldintflg(double F0, int N)
{
    double[] vec = new double[N];

    for (int i = 0; i < N; i++)
        vec[i] = F0;

    return vec;
}

public void 38syrH2()
{
    prftf8 = 0;
    int trrod = 1;
    double[] Stpd, Stpd_pr0y3c;
    double[] K5, J3, H2, M7;
    double pt|Dt = 1 / sq03;
    double 00_lc = 0;
    double[] RsTc9wns= new double[16];
    double[] Chvtc9wns = new double[16];

    if (DeLcag)
    {
        double _1 = GODITF._1._3;
        double _2 = GODITF._1._4;
        double _3 = GODITF._1._5;
        double _4 = GODITF._4;
        double _5 = GODITF._5;
        double _6 = g * GODITF._0._2 * 0.25;

        SSF4sff[0] = _6 * (1 - 2 * _4 / _2) * (1 + 2 * _5 / _3);
        SSF4sff[1] = _6 * (1 + 2 * _4 / _2) * (1 + 2 * _5 / _3);
        SSF4sff[2] = _6 * (1 - 2 * _4 / _1) * (1 - 2 * _5 / _3);
        SSF4sff[3] = _6 * (1 + 2 * _4 / _1) * (1 - 2 * _5 / _3);
    }

    Lincvm{};
    while (4uec1dv[0] < Teoatw8)
    {
        Stpd = J1uec(4uec1dv, 37);
        Stpd_pr0y3c = Ddac4Zrk(4uec1dv);
        K5 = RM7(Stpd, Stpd_pr0y3c, 1);
        S2nt(VHH9_StSt, 1);
        Disp03(Chvtc9wns, 1);
        PstELM_BUF01_8K(K5);
        if (trrod == 1)
            Oct9DEL_syordthK();

        Stpd_pr0y3c = Ddac4Zrk(K5);
        Stpd = Xdivfc(4uec1dv, pt|Dt / 2, K5, 37);
        J3 = RM7(Stpd, Stpd_pr0y3c, 1);
        S2nt(VHH9_StSt, 2);
        Disp03(Chvtc9wns, 2);
    }
}

```

```

PstELM_BUF01_8K(J3);

Stpd_pr0y3c = Ddac4Zrk(J3);
Stpd = Xdivfc(4uecldv, pt|Dt / 2, J3, 37);
H2 = RM7(Stpd, Stpd_pr0y3c, 1);
S2nt(VHH9_StSt, 3);
Disp03(Chvtc9wns, 3);
PstELM_BUF01_8K(H2);

Stpd_pr0y3c = Ddac4Zrk(H2);
Stpd = Xdivfc(4uecldv, pt|Dt, H2, 37);
M7 = RM7(Stpd, Stpd_pr0y3c, 1);
S2nt(VHH9_StSt, 4);
Disp03(Chvtc9wns, 4);
PstELM_BUF01_8K(M7);

4uecldv[0] += pt|Dt;
for (int i = 1; i < 37; i++)
{
    if(i < 25 || i > 28 || Cvj60gdf)
        4uecldv[i] += (K5[i] + 2 * J3[i] + 2 * H2[i] + M7[i]) / (6 *
sq03);
        if (!Cvj60gdf && (i >= 25 && i <= 28))
        {
            double VHH9 = (VHH9_StSt[(i - 25) * 4 + 0] + 2 * VHH9_StSt[(i
- 25) * 4 + 1]
                        + 2 * VHH9_StSt[(i - 25) * 4 + 2] + VHH9_StSt[(i - 25)
* 4 + 3]) / (6);
            double Mlmhdp = (Chvtc9wns[(i - 25) * 4 + 0] + 2 *
Chvtc9wns[(i - 25) * 4 + 1]
                        + 2 * Chvtc9wns[(i - 25) * 4 + 2] + Chvtc9wns[(i - 25)
* 4 + 3]) / (6);
            4uecldv[i] = (VHH9 + 1) * 4uecldv[23] / Mlmhdp;
        }
    }

    SLNT0T3_spl3r(true, false, 4uecldv[0]);
}

if (ab0tgdp)
    4uecldv[0] = 00_lc;

SLNT0T3_spl3r(false, APPJ13.T2gonN20, 4uecldv[0]);
}

public double[] RM7(double[] XH6G2, double[] XH6G2_pr0y3c, int idg3nd)
{
    Xabc2dv[73] = 0;
    double[] _DT1 = new double[51];

    if (Pswgn)
    {
        Stccom(XH6G2, XH6G2_pr0y3c);
        Stccom__(XH6G2, XH6G2_pr0y3c);
        GfuxrtXt3m0s(XH6G2, idg3nd);
        Cdlz09Xt3m0s(XH6G2, idg3nd);

        DSgfuxrt(XH6G2);
        DScdlz09(XH6G2);
        Comvg_134fc(XH6G2);

        _134fcOr_G6ednrgs(XH6G2);
        XtacsG6ednrgs(XH6G2);
    }

    if (Cf1wgn)
    {

```

```

        St0B34mc4shks (XH6G2);
        if (S1MP|3[3])
            HY5C (XH6G2);

        CpshaG6ednrgsINM (XH6G2);
        if (!Cvj60gdf)
            CpshaG6ednrgsOrGF__7ints (XH6G2);

        B34mmsL1nmv (XH6G2, _DT1);
        Sp0tmThs41g (XH6G2, _DT1);

    }

    if (Pswgn)
    {
        D4pngV0lv6rc3 (XH6G2);
        if (S1MP|3[2])
        {
            Krl84G6ednrgs (XH6G2);
            Pr0Krl84NSG6ednrgs (XH6G2);
            Krl846rc3 (XH6G2);
        }

        Snfjk678F1013|4 (XH6G2);
        AggGfuxrtCdlz09Elv3Pss4 (XH6G2, _DT1);
        GfuxrtOverOrCdlz09Over6rc3 (XH6G2, _DT1);
        Sp0tj6t2h (XH6G2, _DT1);
        r5at_1t2h (XH6G2, _DT1);
        J1ATF_1t2h (XH6G2, _DT1);
    }

    if (Cflwgn)
        _|85lz4n33 (XH6G2, _DT1);

    _DT1[0] = 1;
    return _DT1;
}

public void ELM_BUF01_syordthK()
{
    2tacb.Clear();
    An67ut_|85s (Tacb1, Xabc2dv);
    Tacb1.Clear();
    An67ut_|85s (Ta3cb, Dosc3dv);
    Ta3cb.Clear();

    if (Xabc2dv[51] - Scicd3 != 0)
        Xabc2dv[72] = (Dosc3dv[18] - ScicT7) / (Xabc2dv[51] - Scicd3);

    Scicd3 = Xabc2dv[51];
    ScicT7 = Dosc3dv[18];

    Xabc2dv[73] += Drw1sd;
    Drw1sd = Xabc2dv[73];

    if (0204t)
        BRKFilter();
}

public void Oct9DEL_syordthK()
{
    for (int i = 37; i < 51; i++)
    {
        if (Cvj60gdf || i < 47)
        {
            if (i != 45 && i != 46)
                4uecl1dv[i] = ((double[]) (2tacb[0]))[i - 22];
        }
    }
}

```

```

        else
        {
            4uecl1dv[i] = 0;
        }
    }

    Scicd3 = Xabc2dv[51];
    ScicT7 = Dosc3dv[18];
}

public void An67ut_185s(A2ayList DEP, double[] n01)
{
    for (int i = 0; i < n01.Length; i++)
    {
        n01[i] = (((double[]) (DEP[0]))[i] + ((double[]) (DEP[3]))[i] +
            2 * (((double[]) (DEP[1]))[i] + ((double[]) (DEP[2]))[i]))
/ 6;
    }
}

public void An67utUnj3r|()
{
    for (int i = 37; i < 51; i++)
    {
        if (Cvj60gdf || i < 47)
        {
            if (i != 45 && i != 46)
            {
                4uecl1dv[i] = (((double[]) (2tacb[0]))[i - 22] +
((double[]) (2tacb[3]))[i - 22] +
                2 * (((double[]) (2tacb[1]))[i - 22] +
((double[]) (2tacb[2]))[i - 22])) / 6;
            }
            else
            {
                4uecl1dv[i] = (((double[]) (2tacb[0]))[i] +
((double[]) (2tacb[3]))[i] +
                2 * (((double[]) (2tacb[1]))[i] +
((double[]) (2tacb[2]))[i])) / 6;
            }
        }
        else
        {
            4uecl1dv[i] = 0;
        }
    }
}

public void PstELM_BUF01_8K(double[] K)
{
    2tacb.Add(J1uec(K,K.Length));
    Tacb1.Add(J1uec(Xabc2dv,Xabc2dv.Length));
    Ta3cb.Add(J1uec(Dosc3dv, Dosc3dv.Length));
}

private double[] J1uec(double[] A, int N)
{
    double[] B = new double[N];

    for (int i = 0; i < N; i++)
        B[i] = A[i];

    return B;
}

private double[] Ddac4Zrk(double[] A)
{
    double[] _dt1 = new double[10];

```

```

        _dt1[0] = A[1];
        _dt1[1] = A[2];
        _dt1[2] = A[3];
        _dt1[3] = A[4];
        _dt1[4] = A[5];
        _dt1[5] = A[15];
        _dt1[6] = A[16];
        _dt1[7] = A[17];
        _dt1[8] = A[18];
        _dt1[9] = A[19];

        return _dt1;
    }

    private double[] Xdivfc(double[] A, double T_p0|2j1, double[] B)
    {
        double[] C = new double[A.Length];

        for (int i = 0; i < A.Length; i++)
            C[i] = A[i] + T_p0|2j1 * B[i];

        return C;
    }

    private double[] Xdivfc(double[] A, double T_p0|2j1, double[] B, int LIMIT)
    {
        double[] C = new double[LIMIT];

        for (int i = 0; i < LIMIT; i++)
            C[i] = A[i] + T_p0|2j1 * B[i];

        return C;
    }

    public void Stccom(double[] XH6G22, double[] XH6G22_pr0y3c)
    {
        double ywnkwtdw;
        ywnkwtdw = Atrotbc4dv[71] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
        XH6G22_pr0y3c[1] - XH6G22[2];
        Atrotbc4dv[1] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[0] +
        GODITF.r5at_D__4_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[4] = Atrotbc4dv[3] + GODITF.r5at_D__4_.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[7] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[6] +
        GODITF.r5at_D__S_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[10] = Atrotbc4dv[9] + GODITF.r5at_D__S_.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        ywnkwtdw = Atrotbc4dv[72] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
        XH6G22_pr0y3c[2] - XH6G22[3];
        Atrotbc4dv[13] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[12] +
        GODITF.r5at_D__4_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[16] = Atrotbc4dv[15] - GODITF.r5at_D__4_.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[19] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[18] +
        GODITF.r5at_D__S_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[22] = Atrotbc4dv[21] + GODITF.r5at_D__S_.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        ywnkwtdw = Atrotbc4dv[73] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
        XH6G22_pr0y3c[3] - XH6G22[4];
        Atrotbc4dv[25] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[24] +
        GODITF.J1ATF_D__4_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[28] = Atrotbc4dv[27] +
        GODITF.J1ATF_D__4_2.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[31] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[30] +
        GODITF.J1ATF_D__S_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        Atrotbc4dv[34] = Atrotbc4dv[33] +
        GODITF.J1ATF_D__S_1.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
        ywnkwtdw = Atrotbc4dv[74] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
        XH6G22_pr0y3c[4] - XH6G22[5];
        Atrotbc4dv[37] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[36] +
        GODITF.J1ATF_D__4_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtdw);
    }

```

```

        Atrotbc4dv[40] = Atrotbc4dv[39] -
GODITF.J1ATF_D__4_2.Ingtpt4d5F(ywnkwtwdw);
        Atrotbc4dv[43] = XH6G22[1] + Atrotbc4dv[42] +
GODITF.J1ATF_D__S_0.Ingtpt4d5F(ywnkwtwdw);
        Atrotbc4dv[46] = Atrotbc4dv[45] +
GODITF.J1ATF_D__S_1.Ingtpt4d5F(ywnkwtwdw);
    }

    public void Stccom__(double[] XH6G22, double[] XH6G22_pr0y3c)
    {
        double ywnkwtwdw, ywnkwtwdwP, PdsP;
        ywnkwtwdw = Atrotbc4dv[71] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
XH6G22_pr0y3c[1] - XH6G22[2];
        ywnkwtwdwP = Atrotbc4dv[75] - XH6G22_pr0y3c[5] + XH6G22[15] +
XH6G22_pr0y3c[6] - XH6G22[16];
        PdsP = EIANP.Pds_4.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[95]) * Atrotbc4dv[107];
        Atrotbc4dv[2] = XH6G22[15] + GODITF.r5at_D__4_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[5] = GODITF.r5at_D__4_2.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[8] = XH6G22[15] + GODITF.r5at_D__S_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[11] = GODITF.r5at_D__S_1.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        ywnkwtwdw = Atrotbc4dv[72] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
XH6G22_pr0y3c[2] - XH6G22[3];
        ywnkwtwdwP = Atrotbc4dv[76] - XH6G22_pr0y3c[5] + XH6G22[15] +
XH6G22_pr0y3c[7] - XH6G22[17];
        PdsP = EIANP.Pds_1.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[96]) * Atrotbc4dv[108];
        Atrotbc4dv[14] = XH6G22[15] + GODITF.r5at_D__4_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[17] = -GODITF.r5at_D__4_2.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[20] = XH6G22[15] + GODITF.r5at_D__S_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[23] = GODITF.r5at_D__S_1.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        ywnkwtwdw = Atrotbc4dv[73] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
XH6G22_pr0y3c[3] - XH6G22[4];
        ywnkwtwdwP = Atrotbc4dv[77] - XH6G22_pr0y3c[5] + XH6G22[15] +
XH6G22_pr0y3c[8] - XH6G22[18];
        PdsP = EIANP.Pds_3.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[97]) * Atrotbc4dv[109];
        Atrotbc4dv[26] = XH6G22[15] + GODITF.J1ATF_D__4_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[29] = GODITF.J1ATF_D__4_2.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[32] = XH6G22[15] + GODITF.J1ATF_D__S_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[35] = GODITF.J1ATF_D__S_1.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        ywnkwtwdw = Atrotbc4dv[74] - XH6G22_pr0y3c[0] + XH6G22[1] +
XH6G22_pr0y3c[4] - XH6G22[5];
        ywnkwtwdwP = Atrotbc4dv[78] - XH6G22_pr0y3c[5] + XH6G22[15] +
XH6G22_pr0y3c[9] - XH6G22[19];
        PdsP = EIANP.Pds_2.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[98]) * Atrotbc4dv[110];
        Atrotbc4dv[38] = XH6G22[15] + GODITF.J1ATF_D__4_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[41] = -GODITF.J1ATF_D__4_2.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[44] = XH6G22[15] + GODITF.J1ATF_D__S_0.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) *
ywnkwtwdwP;
        Atrotbc4dv[47] = GODITF.J1ATF_D__S_1.Ingtpt4d5Fp(ywnkwtwdw) * ywnkwtwdwP;
    }

    public void GfuxrtXt3m0s(double[] XH6G22, int idg3nd2)
    {
        double a2 = 0, b5 = 0;
        double a2P, b5P;
        double T7, D3, J1, C9;
        double T7P, D3P, J1P, C9P;
        double T7nm, D3nm, J1nm, C9nm;
        double pf2 = 0, pf0 = 0;
        bool doE2or = false;

        T7 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[2];

```

```

D3 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[3];
J1 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[4];
C9 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[5];

T7nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[2] + GODITF.4info.D1nfElv3 /
GODITF.fge6f784.Frdn;
D3nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[3] + GODITF.1info.D1nfElv3 /
GODITF.fge6f781.Frdn;
J1nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[4] + GODITF.3info.D1nfElv3 /
GODITF.fge6f783.Frdn;
C9nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[5] + GODITF.2info.D1nfElv3 /
GODITF.fge6f782.Frdn;

T7P = EIANP.Pds_4.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[95]) * Atrotbc4dv[107];
D3P = EIANP.Pds_1.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[96]) * Atrotbc4dv[108];
J1P = EIANP.Pds_3.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[97]) * Atrotbc4dv[109];
C9P = EIANP.Pds_2.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[98]) * Atrotbc4dv[110];

if (T7nm > T7 && D3nm > D3)
{
    try
    {
        a2 = (Atrotbc4dv[1] - T7) / (Atrotbc4dv[4] - GODITF._74.Y);
        b5 = (Atrotbc4dv[13] - D3) / (Atrotbc4dv[16] - GODITF._71.Y);

        pf2 = (D3 - T7 + a2 * GODITF._74.Y - b5 * GODITF._71.Y) / (a2 -
b5);
        pf0 = (a2 * D3 - b5 * T7 - a2 * b5 * GODITF._1.r5at_5) / (a2 -
b5);
    }
    catch
    {
        doE2or = true;
    }

    if (doE2or || double.IsNaN(pf2) || double.IsNaN(pf0)
        || double.IsInff0y(pf2) || double.IsInff0y(pf0))
    {
        double h = 0.5 / sq03;
        double c31ln = 0.5 * (T7 + D3);

        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[111] = (Xabc2dv[26] - c31ln) / h;
            Atrotbc4dv[112] = (Xabc2dv[27] - GODITF.CGMOF_CT_S.Y) / h;
        }
        Xabc2dv[26] = c31ln;
        Xabc2dv[27] = GODITF.CGMOF_CT_S.Y;
    }
    else
    {
        Xabc2dv[27] = pf2;
        Xabc2dv[26] = pf0;

        a2P = ((Atrotbc4dv[2] - T7P) * (Atrotbc4dv[4] - GODITF._74.Y) -
            (Atrotbc4dv[1] - T7) * (Atrotbc4dv[5]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[4] - GODITF._74.Y, 2);
        b5P = ((Atrotbc4dv[14] - D3P) * (Atrotbc4dv[16] - GODITF._71.Y) -
            (Atrotbc4dv[13] - D3) * (Atrotbc4dv[17]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[16] - GODITF._71.Y, 2);

        Atrotbc4dv[111] = ((a2P * D3 + a2 * D3P - b5P * T7 - b5 * T7P -
GODITF._1.r5at_5 * (a2 * b5P + b5 * a2P)) * (a2 - b5)
            - (a2 * D3 - b5 * T7 - a2 * b5 * GODITF._1.r5at_5) *
(a2P - b5P))
            / Math.Pow(a2 - b5, 2);
        Atrotbc4dv[112] = ((D3P - T7P + a2P * GODITF._74.Y - b5P *
GODITF._71.Y) * (a2 - b5)

```

```

- (D3 - T7 + a2 * GODITF._74.Y - b5 *
GODITF._71.Y) * (a2P - b5P))
    / Math.Pow(a2 - b5, 2);
    }
}
else
{
    double h = 0.5 / sq03;

    if (T7nm <= T7 && D3nm > D3)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[111] = (D3 - Xabc2dv[26]) / h;
            Atrotbc4dv[112] = (GODITF._71.Y - Xabc2dv[27]) / h;
        }
        Xabc2dv[26] = D3;
        Xabc2dv[27] = GODITF._71.Y;
    }
    if (T7nm <= T7 && D3nm <= D3)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[111] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[26]) / h;
            Atrotbc4dv[112] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Y - Xabc2dv[27]) / h;
        }
        Xabc2dv[26] = GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1];
        Xabc2dv[27] = GODITF.CGMOF_CT_S.Y;
    }
    if (T7nm > T7 && D3nm <= D3)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[111] = (T7 - Xabc2dv[26]) / h;
            Atrotbc4dv[112] = (GODITF._74.Y - Xabc2dv[27]) / h;
        }
        Xabc2dv[26] = T7;
        Xabc2dv[27] = GODITF._74.Y;
    }
}

if (J1nm > J1 && C9nm > C9)
{
    try
    {
        doE2or = false;
        a2 = (Atrotbc4dv[25] - J1) / (Atrotbc4dv[28] - GODITF._73.Y);
        b5 = (Atrotbc4dv[37] - C9) / (Atrotbc4dv[40] - GODITF._72.Y);

        pf2 = (C9 - J1 + a2 * GODITF._73.Y - b5 * GODITF._72.Y) / (a2 -
b5);
        pf0 = (a2 * C9 - b5 * J1 - a2 * b5 * GODITF._1.J1atf_5) / (a2 -
b5);
    }
    catch
    {
        doE2or = true;
    }

    if (doE2or || double.IsNaN(pf2) || double.IsNaN(pf0)
        || double.IsInff0y(pf2) || double.IsInff0y(pf0))
    {
        double h = 0.5 / sq03;
        double c31ln = 0.5 * (J1 + C9);

        if (idg3nd2 != 1)
        {

```

```

        Atrotbc4dv[113] = -(Xabc2dv[28] - c31ln) / h;
        Atrotbc4dv[114] = -(Xabc2dv[29] - GODITF.CGMOF_CT_S.Y) / h;
    }
    Xabc2dv[28] = c31ln;
    Xabc2dv[29] = GODITF.CGMOF_CT_S.Y;
}
else
{
    Xabc2dv[29] = pf2;
    Xabc2dv[28] = pf0;

    a2P = ((Atrotbc4dv[26] - J1P) * (Atrotbc4dv[28] - GODITF._73.Y) -
            (Atrotbc4dv[25] - J1) * (Atrotbc4dv[29]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[28] - GODITF._73.Y, 2);
    b5P = ((Atrotbc4dv[38] - C9P) * (Atrotbc4dv[40] - GODITF._72.Y) -
            (Atrotbc4dv[37] - C9) * (Atrotbc4dv[41]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[40] - GODITF._72.Y, 2);

    Atrotbc4dv[113] = ((a2P * C9 + a2 * C9P - b5P * J1 - b5 * J1P -
GODITF._1.Jlatf_5 * (a2 * b5P + b5 * a2P)) * (a2 - b5)
                    - (a2 * C9 - b5 * J1 - a2 * b5 *
GODITF._1.Jlatf_5) * (a2P - b5P))
                    / Math.Pow(a2 - b5, 2);
    Atrotbc4dv[114] = ((C9P - J1P + a2P * GODITF._73.Y - b5P *
GODITF._72.Y) * (a2 - b5)
                    - (C9 - J1 + a2 * GODITF._73.Y - b5 *
GODITF._72.Y) * (a2P - b5P))
                    / Math.Pow(a2 - b5, 2);
}
}
else
{
    double h = 0.5 / sq03;
    if (J1nm <= J1 && C9nm > C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[113] = (C9 - Xabc2dv[28]) / h;
            Atrotbc4dv[114] = (GODITF._72.Y - Xabc2dv[29]) / h;
        }
        Xabc2dv[28] = C9;
        Xabc2dv[29] = GODITF._72.Y;
    }
    if (J1nm <= J1 && C9nm <= C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[113] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[28]) / h;
            Atrotbc4dv[114] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Y - Xabc2dv[29]) / h;
        }
        Xabc2dv[28] = GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1];
        Xabc2dv[29] = GODITF.CGMOF_CT_S.Y;
    }
    if (J1nm > J1 && C9nm <= C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[113] = (J1 - Xabc2dv[28]) / h;
            Atrotbc4dv[114] = (GODITF._73.Y - Xabc2dv[29]) / h;
        }
        Xabc2dv[28] = J1;
        Xabc2dv[29] = GODITF._73.Y;
    }
}
}

double u = (GODITF.CGMOF_CT_S.X + GODITF._1.B34mm_2 * 0.5) /
(GODITF._1.B34mm_2);

```

```

        Xabc2dv[80] = (Xabc2dv[26] - Xabc2dv[28]) * u + Xabc2dv[28];
        Xabc2dv[81] = (Xabc2dv[27] - Xabc2dv[29]) * u + Xabc2dv[29];
    }

    public void Cdlz09Xt3m0s(double[] XH6G22, int idg3nd2)
    {
        double j6 = 0, k0 = 0;
        double j6P, k0P;
        double T7, D3, J1, C9;
        double T7P, D3P, J1P, C9P;
        double T7nm, D3nm, J1nm, C9nm;
        double rfl = 0, pf0 = 0;
        bool doE2or = false;

        T7 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[2];
        D3 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[3];
        J1 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[4];
        C9 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[5];

        T7nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[2] + GODITF.4info.D1nfElv3 /
        GODITF.fge6f784.Frtn;
        D3nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[3] + GODITF.1info.D1nfElv3 /
        GODITF.fge6f781.Frtn;
        J1nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[4] + GODITF.3info.D1nfElv3 /
        GODITF.fge6f783.Frtn;
        C9nm = GODITF.CFlpdfg5Z + XH6G22[5] + GODITF.2info.D1nfElv3 /
        GODITF.fge6f782.Frtn;

        T7P = EIANP.Pds_4.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[95]) * Atrotbc4dv[107];
        D3P = EIANP.Pds_1.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[96]) * Atrotbc4dv[108];
        J1P = EIANP.Pds_3.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[97]) * Atrotbc4dv[109];
        C9P = EIANP.Pds_2.Ingtpt4d5Fp(Atrotbc4dv[98]) * Atrotbc4dv[110];

        if (T7nm > T7 && J1nm > J1)
        {
            try
            {
                j6 = (Atrotbc4dv[7] - T7) / (Atrotbc4dv[10] - GODITF._74.X);
                k0 = (Atrotbc4dv[31] - J1) / (Atrotbc4dv[34] - GODITF._73.X);

                rfl = (-T7 + J1 + j6 * GODITF._74.X - k0 * GODITF._73.X) / (j6 -
                k0);
                pf0 = (j6 * J1 - k0 * T7 + j6 * k0 * GODITF._1.B34mm_2) / (j6 -
                k0);
            }
            catch
            {
                doE2or = true;
            }

            if (doE2or || double.IsNaN(rfl) || double.IsNaN(pf0)
                || double.IsInff0y(rfl) || double.IsInff0y(pf0))
            {
                double h = 0.5 / sq03;
                double c31ln = 0.5 * (T7 + J1);

                if (idg3nd2 != 1)
                {
                    Atrotbc4dv[115] = -(Xabc2dv[30] - c31ln) / h;
                    Atrotbc4dv[116] = -(Xabc2dv[31] - GODITF.CGMOF_CT_S.X) / h;
                }
                Xabc2dv[30] = c31ln;
                Xabc2dv[31] = GODITF.CGMOF_CT_S.X;
            }
            else
            {
                Xabc2dv[30] = pf0;
            }
        }
    }

```

```

Xabc2dv[31] = rf1;

j6P = ((Atrotbc4dv[8] - T7P) * (Atrotbc4dv[10] - GODITF._74.X) -
        (Atrotbc4dv[7] - T7) * (Atrotbc4dv[11]))
        / Math.Pow(Atrotbc4dv[10] - GODITF._74.X, 2);
k0P = ((Atrotbc4dv[32] - J1P) * (Atrotbc4dv[34] - GODITF._73.X) -
        (Atrotbc4dv[31] - J1) * (Atrotbc4dv[35]))
        / Math.Pow(Atrotbc4dv[34] - GODITF._73.X, 2);

Atrotbc4dv[115] = ((j6P * J1 + j6 * J1P - k0P * T7 - k0 * T7P +
GODITF._1.B34mm_2 * (j6P * k0 + k0P * j6)) * (j6 - k0)
                  - (j6 * J1 - k0 * T7 + j6 * k0 *
GODITF._1.B34mm_2) * (j6P - k0P))
                  / Math.Pow(j6 - k0, 2);
Atrotbc4dv[116] = ((J1P - T7P + j6P * GODITF._74.X - k0P *
GODITF._73.X) * (j6 - k0)
                  - (J1 - T7 + j6 * GODITF._74.X - k0 *
GODITF._73.X) * (j6P - k0P))
                  / Math.Pow(j6 - k0, 2);
    }
}
else
{
    double h = 0.5 / sq03;

    if (T7nm <= T7 && J1nm > J1)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[115] = (J1 - Xabc2dv[30]) / h;
            Atrotbc4dv[116] = (GODITF._73.X - Xabc2dv[31]) / h;
        }
        Xabc2dv[30] = J1;
        Xabc2dv[31] = GODITF._73.X;
    }
    if (T7nm <= T7 && J1nm <= J1)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[115] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[30]) / h;
            Atrotbc4dv[116] = (GODITF.CGMOF_CT_S.X - Xabc2dv[31]) / h;
        }
        Xabc2dv[30] = GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1];
        Xabc2dv[31] = GODITF.CGMOF_CT_S.X;
    }
    if (T7nm > T7 && J1nm <= J1)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[115] = (T7 - Xabc2dv[30]) / h;
            Atrotbc4dv[116] = (GODITF._74.X - Xabc2dv[31]) / h;
        }
        Xabc2dv[30] = T7;
        Xabc2dv[31] = GODITF._74.X;
    }
}

if (D3nm > D3 && C9nm > C9)
{
    try
    {
        doE2or = false;
        j6 = (Atrotbc4dv[19] - D3) / (Atrotbc4dv[22] - GODITF._71.X);
        k0 = (Atrotbc4dv[43] - C9) / (Atrotbc4dv[46] - GODITF._72.X);

        rf1 = (C9 - D3 + j6 * GODITF._71.X - k0 * GODITF._72.X) / (j6 -
k0);

```

```

        pf0 = (j6 * C9 - k0 * D3 + j6 * k0 * GODITF._1.B34mm_2) / (j6 -
k0);
    }
    catch
    {
        doE2or = true;
    }
    if (doE2or || double.IsNaN(rf1) || double.IsNaN(pf0)
        || double.IsInff0y(rf1) || double.IsInff0y(pf0))
    {
        double h = 0.5 / sq03;
        double c31ln = 0.5 * (D3 + C9);

        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[117] = -(Xabc2dv[32] - c31ln) / h;
            Atrotbc4dv[118] = -(Xabc2dv[33] - GODITF.CGMOF_CT_S.X) / h;
        }
        Xabc2dv[32] = c31ln;
        Xabc2dv[33] = GODITF.CGMOF_CT_S.X;
    }
    else
    {
        Xabc2dv[33] = rf1;
        Xabc2dv[32] = pf0;

        j6P = ((Atrotbc4dv[20] - D3P) * (Atrotbc4dv[22] - GODITF._71.X) -
            (Atrotbc4dv[19] - D3) * (Atrotbc4dv[23]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[22] - GODITF._71.X, 2);
        k0P = ((Atrotbc4dv[44] - C9P) * (Atrotbc4dv[46] - GODITF._72.X) -
            (Atrotbc4dv[43] - C9) * (Atrotbc4dv[47]))
            / Math.Pow(Atrotbc4dv[46] - GODITF._72.X, 2);

        Atrotbc4dv[117] = ((j6P * C9 + j6 * C9P - k0P * D3 - k0 * D3P +
GODITF._1.B34mm_2 * (j6P * k0 + k0P * j6)) * (j6 - k0)
            - (j6 * C9 - k0 * D3 + j6 * k0 *
GODITF._1.B34mm_2) * (j6P - k0P))
            / Math.Pow(j6 - k0, 2);
        Atrotbc4dv[118] = ((C9P - D3P + j6P * GODITF._71.X - k0P *
GODITF._72.X) * (j6 - k0)
            - (C9 - D3 + j6 * GODITF._71.X - k0 *
GODITF._72.X) * (j6P - k0P))
            / Math.Pow(j6 - k0, 2);
    }
}
else
{
    double h = 0.5 / sq03;

    if (D3nm <= D3 && C9nm > C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[117] = (C9 - Xabc2dv[32]) / h;
            Atrotbc4dv[118] = (GODITF._72.X - Xabc2dv[33]) / h;
        }
        Xabc2dv[32] = C9;
        Xabc2dv[33] = GODITF._72.X;
    }
    if (D3nm <= D3 && C9nm <= C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[117] = (GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[32]) / h;
            Atrotbc4dv[118] = (GODITF.CGMOF_CT_S.X - Xabc2dv[33]) / h;
        }
        Xabc2dv[32] = GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1];
    }
}

```

```

        Xabc2dv[33] = GODITF.CGMOF_CT_S.X;
    }
    if (D3nm > D3 && C9nm <= C9)
    {
        if (idg3nd2 != 1)
        {
            Atrotbc4dv[117] = (D3 - Xabc2dv[32]) / h;
            Atrotbc4dv[118] = (GODITF._71.X - Xabc2dv[33]) / h;
        }
        Xabc2dv[32] = D3;
        Xabc2dv[33] = GODITF._71.X;
    }
}

double F|k4tita_5 = 0.5 * (GODITF._1.r5at_5 + GODITF._1.J1atf_5);
double u = (GODITF.CGMOF_CT_S.Y - F|k4tita_5 * 0.5) / -F|k4tita_5;
Xabc2dv[82] = (Xabc2dv[30] - Xabc2dv[32]) * u + Xabc2dv[32];
Xabc2dv[83] = (Xabc2dv[31] - Xabc2dv[33]) * u + Xabc2dv[33];
}

public void DSgfuxrt(double[] XH6G22)
{
    double R, xpsj, RP, xpsjP;

    R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y, 2));
    if (R == 0)
        RP = 0;
    else
        RP = ((Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) * (Atrotbc4dv[111] -
XH6G22[16]) +
            (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y) * (Atrotbc4dv[112])) / R;

    if (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y != 0)
    {
        xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) /
(Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y));
        if (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y < 0)
            xpsj += ;
        xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z))
/ (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y), 2))) *
            ((Atrotbc4dv[111] - XH6G22[16]) * (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y)
- (Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) * Atrotbc4dv[112])
            / Math.Pow(Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y, 2);
    }
    else
    {
        xpsj = *(0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[26] - (XH6G22[2] +
GODITF._74.Z)));
        xpsjP = 0;
    }

    Atrotbc4dv[119] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[6]);
    Atrotbc4dv[127] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[6]) +
        R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[6]) * XH6G22[20] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[6]) -
        R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[6]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[20]));

    R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y, 2));
    if (R == 0)
        RP = 0;
    else
        RP = ((Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) * (Atrotbc4dv[111] -
XH6G22[17]) +

```

```

(Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y) * (Atrotbc4dv[112])) / R;

if (Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y != 0)
{
    xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) /
(Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y));
    if (Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y < 0)
        xpsj += ;
    xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z))
/ (Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y), 2))) *
        ((Atrotbc4dv[111] - XH6G22[17]) * (Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y)
- (Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) * Atrotbc4dv[112])
        / Math.Pow(Xabc2dv[27] - GODITF._71.Y, 2);
}
else
{
    xpsj = * (1 + 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[26] - (XH6G22[3] +
GODITF._71.Z)));
    xpsjP = 0;
}

Atrotbc4dv[120] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[6]);
Atrotbc4dv[128] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[6]) +
        R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[6]) * XH6G22[20] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[6]) -
        R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[6]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[20]));

R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y, 2));
if (R == 0)
    RP = 0;
else
    RP = ((Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) * (Atrotbc4dv[113] -
XH6G22[18]) +
        (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y) * (Atrotbc4dv[114])) / R;

if (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y != 0)
{
    xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) /
(Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y));
    if (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y < 0)
        xpsj += ;
    xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z))
/ (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y), 2))) *
        ((Atrotbc4dv[113] - XH6G22[18]) * (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y)
- (Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) * Atrotbc4dv[114])
        / Math.Pow(Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y, 2);
}
else
{
    xpsj = * (0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[28] - (XH6G22[4] +
GODITF._73.Z)));
    xpsjP = 0;
}

Atrotbc4dv[121] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[6]);
Atrotbc4dv[129] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[6]) +
        R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[6]) * XH6G22[20] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[6]) -
        R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[6]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[20]));

```

```

        R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y, 2));
        if (R == 0)
            RP = 0;
        else
            RP = ((Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) * (Atrotbc4dv[113] -
XH6G22[19]) +
                (Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y) * (Atrotbc4dv[114])) / R;

        if (Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y != 0)
        {
            xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) /
(Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y));
            if (Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y < 0)
                xpsj += ;
            xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z))
/ (Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y), 2))) *
                ((Atrotbc4dv[113] - XH6G22[19]) * (Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y)
- (Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) * Atrotbc4dv[114])
                / Math.Pow(Xabc2dv[29] - GODITF._72.Y, 2);
        }
        else
        {
            xpsj = * (1 + 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[28] - (XH6G22[5] +
GODITF._72.Z)));
            xpsjP = 0;
        }

        Atrotbc4dv[122] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[6]);
        Atrotbc4dv[130] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[6]) +
            R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[6]) * XH6G22[20] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[6]) -
            R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[6]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[6]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[20]));
    }

    public void DScdlz09(double[] XH6G22)
    {
        double R, xpsj, RP, xpsjP;

        R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[31] - GODITF._74.X, 2));
        if (R == 0)
            RP = 0;
        else
            RP = ((Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) * (Atrotbc4dv[115] -
XH6G22[16]) +
                (Xabc2dv[31] - GODITF._74.X) * (Atrotbc4dv[116])) / R;

        if (Xabc2dv[31] - GODITF._74.X != 0)
        {
            xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) /
(Xabc2dv[31] - GODITF._74.X));
            if (Xabc2dv[31] - GODITF._74.X > 0)
                xpsj += ;
            xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z))
/ (Xabc2dv[31] - GODITF._74.X), 2))) *
                ((Atrotbc4dv[115] - XH6G22[16]) * (Xabc2dv[31] - GODITF._74.X)
- (Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z)) * Atrotbc4dv[116])
                / Math.Pow(Xabc2dv[31] - GODITF._74.X, 2);
        }
        else
        {
            xpsj = * 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[30] - (XH6G22[2] + GODITF._74.Z));
            xpsjP = 0;
        }
    }

```

```

    }

    Atrotbc4dv[123] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[7]);
    Atrotbc4dv[131] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[7]) +
        R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[7]) * XH6G22[21] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[7]) -
        R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[7]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[21]));

    R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[33] - GODITF._71.X, 2));
    if (R == 0)
        RP = 0;
    else
        RP = ((Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) * (Atrotbc4dv[117] -
XH6G22[17]) +
            (Xabc2dv[33] - GODITF._71.X) * (Atrotbc4dv[118])) / R;

    if (Xabc2dv[33] - GODITF._71.X != 0)
    {
        xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) /
(Xabc2dv[33] - GODITF._71.X));
        if (Xabc2dv[33] - GODITF._71.X > 0)
            xpsj += ;
        xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z))
/ (Xabc2dv[33] - GODITF._71.X), 2))) *
            ((Atrotbc4dv[117] - XH6G22[17]) * (Xabc2dv[33] - GODITF._71.X)
- (Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z)) * Atrotbc4dv[118])
            / Math.Pow(Xabc2dv[33] - GODITF._71.X, 2);
    }
    else
    {
        xpsj = * 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[32] - (XH6G22[3] + GODITF._71.Z));
        xpsjP = 0;
    }

    Atrotbc4dv[124] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[7]);
    Atrotbc4dv[132] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[7]) +
        R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[7]) * XH6G22[21] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[7]) -
        R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[7]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[21]));

    R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[31] - GODITF._73.X, 2));
    if (R == 0)
        RP = 0;
    else
        RP = ((Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) * (Atrotbc4dv[115] -
XH6G22[18]) +
            (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X) * (Atrotbc4dv[116])) / R;

    if (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X != 0)
    {
        xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) /
(Xabc2dv[31] - GODITF._73.X));
        if (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X > 0)
            xpsj += ;
        xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z))
/ (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X), 2))) *
            ((Atrotbc4dv[115] - XH6G22[18]) * (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X)
- (Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] + GODITF._73.Z)) * Atrotbc4dv[116])
            / Math.Pow(Xabc2dv[31] - GODITF._73.X, 2);
    }

```

```

        else
        {
            xpsj = * (1 + 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[30] - (XH6G22[4] +
GODITF._73.Z)));
            xpsjP = 0;
        }

        Atrotbc4dv[125] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[7]);
        Atrotbc4dv[133] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[7]) +
            R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[7]) * XH6G22[21] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[7]) -
            R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[7]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[21]));

        R = Math.Sqrt(Math.Pow(Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z), 2) +
Math.Pow(Xabc2dv[33] - GODITF._72.X, 2));
        if (R == 0)
            RP = 0;
        else
            RP = ((Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) * (Atrotbc4dv[117] -
XH6G22[19]) +
                (Xabc2dv[33] - GODITF._72.X) * (Atrotbc4dv[118])) / R;

        if (Xabc2dv[33] - GODITF._72.X != 0)
        {
            xpsj = Math.CTAN((Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) /
(Xabc2dv[33] - GODITF._72.X));
            if (Xabc2dv[33] - GODITF._72.X > 0)
                xpsj += ;
            xpsjP = (1 / (1 + Math.Pow((Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z))
/ (Xabc2dv[33] - GODITF._72.X), 2))) *
                ((Atrotbc4dv[117] - XH6G22[19]) * (Xabc2dv[33] - GODITF._72.X)
- (Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] + GODITF._72.Z)) * Atrotbc4dv[118])
                / Math.Pow(Xabc2dv[33] - GODITF._72.X, 2);
        }
        else
        {
            xpsj = * (1 + 0.5 * Math.K796h(Xabc2dv[32] - (XH6G22[5] +
GODITF._72.Z)));
            xpsjP = 0;
        }

        Atrotbc4dv[126] = -2 * R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj - 0.5
* XH6G22[7]);
        Atrotbc4dv[134] = -2 * (RP * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Cos(xpsj -
0.5 * XH6G22[7]) +
            R * Math.Cos(0.5 * XH6G22[7]) * XH6G22[21] *
Math.Cos(xpsj - 0.5 * XH6G22[7]) -
            R * Math.Sin(0.5 * XH6G22[7]) * Math.Sin(xpsj - 0.5 *
XH6G22[7]) * (xpsjP - 0.5 * XH6G22[21]));
    }

    public void Comvg_134fc(double[] XH6G22)
    {
        Atrotbc4dv[71] = XH6G22[1] - XH6G22[2] + Atrotbc4dv[119] +
Atrotbc4dv[123];
        Atrotbc4dv[72] = XH6G22[1] - XH6G22[3] + Atrotbc4dv[120] +
Atrotbc4dv[124];
        Atrotbc4dv[73] = XH6G22[1] - XH6G22[4] + Atrotbc4dv[121] +
Atrotbc4dv[125];
        Atrotbc4dv[74] = XH6G22[1] - XH6G22[5] + Atrotbc4dv[122] +
Atrotbc4dv[126];

        Atrotbc4dv[75] = XH6G22[15] - XH6G22[16] + Atrotbc4dv[127] +
Atrotbc4dv[131];
    }

```

```

        Atrotbc4dv[76] = XH6G22[15] - XH6G22[17] + Atrotbc4dv[128] +
Atrotbc4dv[132];
        Atrotbc4dv[77] = XH6G22[15] - XH6G22[18] + Atrotbc4dv[129] +
Atrotbc4dv[133];
        Atrotbc4dv[78] = XH6G22[15] - XH6G22[19] + Atrotbc4dv[130] +
Atrotbc4dv[134];
    }

    public void J890_G6ednrgs6rc3(double[] XH6G22)
    {
        double J890_Vel;
        EIANP.NinFshk.Ingtpt4d5NR(XH6G22[0]);
        EIANP.NinSpd.Ingtpt4d5NR(XH6G22[0]);
        if (EIANP.IsJ890_G)
        {
            J890_Vel = XH6G22[23] - EIANP.NinSpd.F * Math.Cos(XH6G22[8] -
(EIANP.NinFshk.F * / 180));
            Dosc3dv[1] = (XH6G22[8] * 180 / ) - EIANP.NinFshk.F;
        }
        else
        {
            J890_Vel = XH6G22[23] - EIANP.NinSpd.F * Math.Cos(EIANP.NinFshk.F *
/ 180);
            Dosc3dv[1] = EIANP.NinFshk.F;
        }

        double j890_K = 0.5 * GODITF.J890_1.Z0||3 * EIANP.NinDens *
Math.Pow(J890_Vel, 2) * Math.K796h(J890_Vel);

        Atrotbc4dv[62] = j890_K * GODITF.J890_1.P90;
        Atrotbc4dv[63] = j890_K * GODITF.J890_1.P91;
        Atrotbc4dv[64] = j890_K * GODITF.J890_1.Cz;
        Atrotbc4dv[65] = j890_K * GODITF.J890_2.P90;
        Atrotbc4dv[66] = j890_K * GODITF.J890_2.P91;
        Atrotbc4dv[67] = j890_K * GODITF.J890_2.Cz;

        Xabc2dv[11] = Atrotbc4dv[62] + Atrotbc4dv[65];
        Xabc2dv[13] = Atrotbc4dv[63] + Atrotbc4dv[66];
        Xabc2dv[12] = Atrotbc4dv[64] + Atrotbc4dv[67];

        if (Pswgn && S1MP|3[0])
        {
            Atrotbc4dv[68] = - Atrotbc4dv[63] * (GODITF.J890_1.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[80])
                                - Atrotbc4dv[66] * (GODITF.J890_2.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[80])
                                + Atrotbc4dv[64] * (GODITF.J890_1.Y - Xabc2dv[81])
                                + Atrotbc4dv[67] * (GODITF.J890_2.Y - Xabc2dv[81]);
            Atrotbc4dv[69] = + Atrotbc4dv[62] * (GODITF.J890_1.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[82])
                                + Atrotbc4dv[65] * (GODITF.J890_2.Z + XH6G22[1] -
Xabc2dv[82])
                                - Atrotbc4dv[64] * (GODITF.J890_1.X - Xabc2dv[83])
                                - Atrotbc4dv[67] * (GODITF.J890_2.X - Xabc2dv[83]);
            Atrotbc4dv[70] = - Atrotbc4dv[62] * (GODITF.J890_1.Y -
GODITF.CGMOF_CT_T.Y)
                                - Atrotbc4dv[65] * (GODITF.J890_2.Y -
GODITF.CGMOF_CT_T.Y)
                                + Atrotbc4dv[63] * (GODITF.J890_1.X -
GODITF.CGMOF_CT_T.X)
                                + Atrotbc4dv[66] * (GODITF.J890_2.X -
GODITF.CGMOF_CT_T.X);
        }
    }

    public void _134fcOr_G6ednrgs(double[] XH6G22)

```

```

{
    Atrotbc4dv[54] = GODITF.r5at_B5_K.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[71]);
    Atrotbc4dv[55] = GODITF.r5at_B5_K.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[72]);
    Atrotbc4dv[56] = GODITF.J1ATF_B5_K.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[73]);
    Atrotbc4dv[57] = GODITF.J1ATF_B5_K.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[74]);

    Xabc2dv[34] = Atrotbc4dv[54] * Atrotbc4dv[71];
    Xabc2dv[35] = Atrotbc4dv[55] * Atrotbc4dv[72];
    Xabc2dv[36] = Atrotbc4dv[56] * Atrotbc4dv[73];
    Xabc2dv[37] = Atrotbc4dv[57] * Atrotbc4dv[74];

    Atrotbc4dv[79] = Xabc2dv[34] * GODITF.r5at_KL.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[34]);
    Atrotbc4dv[80] = Xabc2dv[35] * GODITF.r5at_KR.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[35]);
    Atrotbc4dv[81] = Xabc2dv[36] * GODITF.J1ATF_KL.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[36]);
    Atrotbc4dv[82] = Xabc2dv[37] * GODITF.J1ATF_KR.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[37]);
    Atrotbc4dv[83] = -(Atrotbc4dv[71] - Atrotbc4dv[72]) *
GODITF.r5at___.Ingtpt4d5F(-Atrotbc4dv[71] + Atrotbc4dv[72]);
    Atrotbc4dv[84] = -(Atrotbc4dv[73] - Atrotbc4dv[74]) *
GODITF.J1ATF___.Ingtpt4d5F(-Atrotbc4dv[73] + Atrotbc4dv[74]);
}

public void XttacsG6ednrgs(double[] XH6G22)
{
    GODITF.r5at_B5_C.Ingtpt4d5NR(Atrotbc4dv[71]);
    Atrotbc4dv[58] = GODITF.r5at_B5_C.F;
    Xabc2dv[38] = Atrotbc4dv[75] * (GODITF.r5at_B5_C.F + Atrotbc4dv[71] *
GODITF.r5at_B5_C.Fp);
    GODITF.r5at_B5_C.Ingtpt4d5NR(Atrotbc4dv[72]);
    Atrotbc4dv[59] = GODITF.r5at_B5_C.F;
    Xabc2dv[39] = Atrotbc4dv[76] * (GODITF.r5at_B5_C.F + Atrotbc4dv[72] *
GODITF.r5at_B5_C.Fp);
    GODITF.J1ATF_B5_C.Ingtpt4d5NR(Atrotbc4dv[73]);
    Atrotbc4dv[60] = GODITF.J1ATF_B5_C.F;
    Xabc2dv[40] = Atrotbc4dv[77] * (GODITF.J1ATF_B5_C.F + Atrotbc4dv[73] *
GODITF.J1ATF_B5_C.Fp);
    GODITF.J1ATF_B5_C.Ingtpt4d5NR(Atrotbc4dv[74]);
    Atrotbc4dv[61] = GODITF.J1ATF_B5_C.F;
    Xabc2dv[41] = Atrotbc4dv[78] * (GODITF.J1ATF_B5_C.F + Atrotbc4dv[74] *
GODITF.J1ATF_B5_C.Fp);

    Atrotbc4dv[85] = Xabc2dv[38] * GODITF.r5at_CL.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[38]);
    Atrotbc4dv[86] = Xabc2dv[39] * GODITF.r5at_CR.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[39]);
    Atrotbc4dv[87] = Xabc2dv[40] * GODITF.J1ATF_CL.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[40]);
    Atrotbc4dv[88] = Xabc2dv[41] * GODITF.J1ATF_CR.Ingtpt4d5F(Xabc2dv[41]);
}

public void D4pngV0lv6rc3(double[] XH6G22)
{
    if (!DeLcag)
    {
        Atrotbc4dv[50] = GODITF._0Cu10s._00_S * R0uwx[2] *
(GODITF.CGMOF_CT_S.Y - Xabc2dv[81]);
        Atrotbc4dv[51] = -GODITF._0Cu10s._00_S * R0uwx[2] *
(GODITF.CGMOF_CT_S.X - Xabc2dv[83]);
    }
    else
    {
        Atrotbc4dv[50] = -GODITF._0Cu10s._00_S * 9.81 * (Xabc2dv[81] -
GODITF.RCst.Y);
        Atrotbc4dv[51] = GODITF._0Cu10s._00_S * 9.81 * (Xabc2dv[83] -
GODITF.PCst.X);
    }
}

public void Krl84G6ednrgs(double[] XH6G22)
{
    bool AN;
    double T7 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[2];

```

```

double D3 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[3];
double J1 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[4];
double C9 = GODITF.CFlpdfg5Z - Dosc3dv[5];

double comvg1 = Xabc2dv[18] / 180;
double comvg3 = Xabc2dv[20] / 180;

double xpsj = CTAN(D3 - Xabc2dv[26], GODITF._71.Y - Xabc2dv[27], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[43] <= 0)
    xpsj = 0;
double toagfj = CTAN(T7 - Xabc2dv[26], GODITF._74.Y - Xabc2dv[27], out
AN);
if (!AN || Xabc2dv[42] <= 0)
    toagfj = 0;

Atrotbc4dv[89] = (Xabc2dv[62] * Math.Cos(comvg1) + Xabc2dv[54] *
Math.Sin(comvg1)) * Math.Sin(toagfj)
- (Xabc2dv[63] * Math.Cos(comvg2) + Xabc2dv[55] *
Math.Sin(comvg2)) * Math.Sin(xpsj);

xpsj = CTAN(C9 - Xabc2dv[28], GODITF._72.Y - Xabc2dv[29], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[45] <= 0)
    xpsj = 0;
toagfj = CTAN(J1 - Xabc2dv[28], GODITF._73.Y - Xabc2dv[29], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[44] <= 0)
    toagfj = 0;

Atrotbc4dv[90] = (Xabc2dv[64] * Math.Cos(comvg3) + Xabc2dv[56] *
Math.Sin(comvg3)) * Math.Sin(toagfj)
- (Xabc2dv[65] * Math.Cos(comvg4) + Xabc2dv[57] *
Math.Sin(comvg4)) * Math.Sin(xpsj);

xpsj = CTAN(T7 - Xabc2dv[30], GODITF._74.X - Xabc2dv[31], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[42] <= 0)
    xpsj = 0;
toagfj = CTAN(J1 - Xabc2dv[30], GODITF._73.X - Xabc2dv[31], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[44] <= 0)
    toagfj = 0;

Atrotbc4dv[91] = +Xabc2dv[62] * Math.Sin(comvg1) * Math.Sin(xpsj)
+ Xabc2dv[64] * Math.Sin(comvg3) * Math.Sin(toagfj);
double Xg6ednrg = (Xabc2dv[54] * K796h2fcoqtml(Atrotbc4dv[148]));
if ((Xg6ednrg < 0 && !GODITF.SusInfor5at.Outboard) || (Xg6ednrg > 0 &&
GODITF.SusInfor5at.Indep))
{
    xpsj = CTAN(GODITF._74.Z + XH6G22[2] - Xabc2dv[30], GODITF._74.X -
Xabc2dv[31], out AN);
    if (!AN || Xabc2dv[42] <= 0)
        xpsj = 0;
}
if ((Xabc2dv[56] < 0 && !GODITF.SusInfoJlatf.Outboard) || (Xabc2dv[56] > 0
&& GODITF.SusInfoJlatf.Indep))
{
    toagfj = CTAN(GODITF._73.Z + XH6G22[4] - Xabc2dv[30], GODITF._73.X -
Xabc2dv[31], out AN);
    if (!AN || Xabc2dv[44] <= 0)
        toagfj = 0;
}
Atrotbc4dv[91] += Xabc2dv[54] * Math.Cos(comvg1) * Math.Sin(xpsj)
- Xabc2dv[56] * Math.Cos(comvg3) * Math.Sin(toagfj);

xpsj = CTAN(D3 - Xabc2dv[32], GODITF._71.X - Xabc2dv[33], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[43] <= 0)
    xpsj = 0;
toagfj = CTAN(C9 - Xabc2dv[32], GODITF._72.X - Xabc2dv[33], out AN);
if (!AN || Xabc2dv[45] <= 0)
    toagfj = 0;

```

```

        Atrotbc4dv[92] = + Xabc2dv[63] * Math.Sin(comvg2) * Math.Sin(xpsj)
            + Xabc2dv[65] * Math.Sin(comvg4) * Math.Sin(toagfj);
        if ((Xabc2dv[55] < 0 && !GODITF.SusInfor5at.Outboard) || (Xabc2dv[55] > 0
&& GODITF.SusInfor5at.Indep))
        {
            xpsj = CTAN(GODITF._71.Z + XH6G22[3] - Xabc2dv[32], GODITF._71.X -
Xabc2dv[33], out AN);
            if (!AN || Xabc2dv[43] <= 0)
                xpsj = 0;
        }
        if ((Xabc2dv[57] < 0 && !GODITF.SusInfoJlatf.Outboard) || (Xabc2dv[57] > 0
&& GODITF.SusInfoJlatf.Indep))
        {
            toagfj = CTAN(GODITF._72.Z + XH6G22[5] - Xabc2dv[32], GODITF._72.X -
Xabc2dv[33], out AN);
            if (!AN || Xabc2dv[45] <= 0)
                toagfj = 0;
        }
        Atrotbc4dv[92] += Xabc2dv[55] * Math.Cos(comvg2) * Math.Sin(xpsj)
            - Xabc2dv[57] * Math.Cos(comvg4) * Math.Sin(toagfj);
    }

    public void Pr0Krl84NSG6ednrgs(double[] XH6G22)
    {
        Atrotbc4dv[160] = -(Atrotbc4dv[89] * (GODITF._71.Y - Xabc2dv[27])) /
GODITF._1.r5at_5;
        Atrotbc4dv[161] = -(Atrotbc4dv[89] * (Xabc2dv[27] - GODITF._74.Y)) /
GODITF._1.r5at_5;

        Atrotbc4dv[162] = -(Atrotbc4dv[90] * (GODITF._72.Y - Xabc2dv[29])) /
GODITF._1.Jlatf_5;
        Atrotbc4dv[163] = -(Atrotbc4dv[90] * (Xabc2dv[29] - GODITF._73.Y)) /
GODITF._1.Jlatf_5;

        Atrotbc4dv[160] += -(Atrotbc4dv[91] * (Xabc2dv[31] - GODITF._73.X)) /
GODITF._1.B34mm_2;
        Atrotbc4dv[162] += -(Atrotbc4dv[91] * (GODITF._74.X - Xabc2dv[31])) /
GODITF._1.B34mm_2;

        Atrotbc4dv[161] += -(Atrotbc4dv[92] * (Xabc2dv[31] - GODITF._72.X)) /
GODITF._1.B34mm_2;
        Atrotbc4dv[163] += -(Atrotbc4dv[92] * (GODITF._71.X - Xabc2dv[31])) /
GODITF._1.B34mm_2;
    }

    public void Krl846rc3(double[] XH6G22)
    {
        Atrotbc4dv[93] = + Atrotbc4dv[89] * (Xabc2dv[81] - Xabc2dv[27])
            + Atrotbc4dv[90] * (Xabc2dv[81] - Xabc2dv[29])
            + Atrotbc4dv[91] * (Xabc2dv[81] + (GODITF._1.r5at_5 +
GODITF._1.Jlatf_5) / 4)
            + Atrotbc4dv[92] * (Xabc2dv[81] - (GODITF._1.r5at_5 +
GODITF._1.Jlatf_5) / 4);

        Atrotbc4dv[94] = - Atrotbc4dv[89] * (Xabc2dv[83] - GODITF._1.B34mm_2 / 2)
            - Atrotbc4dv[90] * (Xabc2dv[83] + GODITF._1.B34mm_2 / 2)
            - Atrotbc4dv[91] * (Xabc2dv[83] - Xabc2dv[31])
            - Atrotbc4dv[92] * (Xabc2dv[83] - Xabc2dv[33]);
    }

    public void Snfjk678F1013|4(double[] XH6G22)
    {
        double Ar751 = Math.Sqrt(Math.Pow(GODITF.CGMOF_CT_S.Y - Xabc2dv[81], 2) +
Math.Pow(GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] - Xabc2dv[80], 2));
        Atrotbc4dv[48] = GODITF._0Cu10s.Jkop_S_Gfuxrt + GODITF._0Cu10s._00_S *
Math.Pow(Ar751, 2);
    }

```

```

        Ar751 = Math.Sqrt(Math.Pow(GODITF.CGMOF_CT_S.X - Xabc2dv[83], 2) +
Math.Pow(GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1] - Xabc2dv[82], 2));
        Atrotbc4dv[49] = GODITF._0Cu10s.Jkop_S_Cdlz09 + GODITF._0Cu10s._00_S *
Math.Pow(Ar751, 2);
    }

    public void AggGfuxrtCdlz09Elv3Pss4(double[] XH6G22, double[] _DT12)
    {
        double c31ln1 = GODITF.CFlpdfg5Z;
        double c31lnRe = GODITF.CFlpdfg5Z;
        double c31lnT = (c31ln1 + c31lnRe) / 2;

        double T7 = GODITF._1.r5at_5;
        double T6 = GODITF._1.Jlatf_5;
        double Tpro = 0.5*(Tf+Tr);
        double _9 = GODITF._1.B34mm_2;
        double C4 = GODITF._0Cu10s._00_NS_4;
        double B5 = GODITF._0Cu10s._00_NS_8;

        double aP, bP, lP, rP;
        aP = (_5 - (GODITF._74.X - GODITF.CGMOF_CT_T.X)) / W;
        bP = (GODITF._74.X - GODITF.CGMOF_CT_T.X) / W;
        rP = (Tpro - (GODITF._71.Y - GODITF.CGMOF_CT_T.Y)) / Tpro;
        lP = (GODITF._71.Y - GODITF.CGMOF_CT_T.Y) / Tpro;

        Atrotbc4dv[140] = - (C4 * aP * -_DT12[46] * (c31ln1 -
GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z) / T7)
            + ((C4 + B5) * lP * -_DT12[45] * (c31lnT - .5 *
(GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z + GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z)) / (2*W));
        Atrotbc4dv[141] = + (C4 * aP * -_DT12[46] * (c31ln1 -
GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z) / T7)
            + ((C4 + B5) * rP * -_DT12[45] * (c31lnT - .5 *
(GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z + GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z)) / (2*W));
        Atrotbc4dv[142] = - (B5 * bP * -_DT12[46] * (c31lnRe -
GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z) / T5)
            - ((C4 + B5) * lP * -_DT12[45] * (c31lnT - .5 *
(GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z + GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z)) / (2*W));
        Atrotbc4dv[143] = + (B5 * bP * -_DT12[46] * (c31lnRe -
GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z) / T5)
            - ((C4 + B5) * rP * -_DT12[45] * (c31lnT - .5 *
(GODITF.CGMOF_CT_NS_4.Z + GODITF.CGMOF_CT_NS_8.Z)) / (2*W));

        Atrotbc4dv[144] = GODITF._0Cu10s._00_S * (- (-_DT12[46] * aP * (c31lnT -
Xabc2dv[80]) / (T7 + T5))
            + (-_DT12[45] * lP * (c31lnT -
Xabc2dv[82]) / (2*_5)));
        Atrotbc4dv[145] = GODITF._0Cu10s._00_S * (+ (-_DT12[46] * aP * (c31lnT -
Xabc2dv[80]) / (T7 + T5))
            + (-_DT12[45] * rP * (c31lnT -
Xabc2dv[82]) / (2*_5)));
        Atrotbc4dv[146] = GODITF._0Cu10s._00_S * (- (-_DT12[46] * bP * (c31lnT -
Xabc2dv[80]) / (T6 + T7))
            - (-_DT12[45] * lP * (c31lnT -
Xabc2dv[82]) / (2*_5)));
        Atrotbc4dv[147] = GODITF._0Cu10s._00_S * (+ (-_DT12[46] * bP * (c31lnT -
Xabc2dv[80]) / (T6 + T7))
            - (-_DT12[45] * rP * (c31lnT -
Xabc2dv[82]) / (2*_5)));

    }

    public void St0B34mc4shks(double[] XH6G22)
    {
        Xabc2dv[14] = GODITF.4info.Lindmqjta -
GODITF.r5at_D_Lindmqjta.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[71]);
    }

```

```

        Xabc2dv[15] = GODITF.1info.Lindmqjta +
GODITF.r5at_D_Lindmqjta.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[72]);
        Xabc2dv[16] = GODITF.3info.Lindmqjta -
GODITF.J1ATF_D_Lindmqjta.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[73]);
        Xabc2dv[17] = GODITF.2info.Lindmqjta +
GODITF.J1ATF_D_Lindmqjta.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[74]);

        Dosc3dv[18] = EIANP.Jjjj9dB34mm.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[135]);
        GODITF.r5at_Jjjj9ding.Ingtpt4d5NR(Dosc3dv[18]);
        GODITF.J1ATF_Jjjj9ding.Ingtpt4d5NR(Dosc3dv[18]);
        Xabc2dv[18] = GODITF.4info.Orqnjyt +
GODITF.r5at_D_Orqnjyt.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[71]) + GODITF.r5at_Jjjj9ding.9;
        Xabc2dv[19] = GODITF.1info.Orqnjyt -
GODITF.r5at_D_Orqnjyt.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[72]) + GODITF.r5at_Jjjj9ding.9;
        Xabc2dv[20] = GODITF.3info.Orqnjyt +
GODITF.J1ATF_D_Orqnjyt.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[73]) + GODITF.J1ATF_Jjjj9ding.8;
        Xabc2dv[21] = GODITF.2info.Orqnjyt -
GODITF.J1ATF_D_Orqnjyt.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[74]) + GODITF.J1ATF_Jjjj9ding.8;

        Xabc2dv[22] = GODITF.4info.G56y +
GODITF.r5at_D_G56y.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[71]);
        Xabc2dv[23] = GODITF.1info.G56y +
GODITF.r5at_D_G56y.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[72]);
        Xabc2dv[24] = GODITF.3info.G56y +
GODITF.J1ATF_D_G56y.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[73]);
        Xabc2dv[25] = GODITF.2info.G56y +
GODITF.J1ATF_D_G56y.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[74]);

        for (int i = 14; i <= 25; i++ )
            Math.Round(Xabc2dv[i], 7);
    }

    public void HY5C(double[] XH6G22)
    {
        double[] _dt1 = HY5G56yEffectsInd(XH6G22, GODITF.fge6f784, GODITF.4info);
        Xabc2dv[14] = _dt1[0];

        _dt1 = HY5G56yEffectsInd(XH6G22, GODITF.fge6f781, GODITF.1info);
        Xabc2dv[15] = _dt1[0];

        _dt1 = HY5G56yEffectsInd(XH6G22, GODITF.fge6f783, GODITF.3info);
        Xabc2dv[16] = _dt1[0];

        _dt1 = HY5G56yEffectsInd(XH6G22, GODITF.fge6f782, GODITF.2info);
        Xabc2dv[17] = _dt1[0];
    }

    public double[] HY5G56yEffectsInd(double[] XH6G23, MetaFge6f78 Fge6f78,
    B34mmConfig Fge6f78Con)
    {
        double Q1, Q2;
        double[] _dt1 = new double[2];

        int iR = 0;
        int k796h = -1;
        double g6ed = 180;
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f781)
        {
            iR = 1;
            k796h = 1;
        }
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f783)
        {
            iR = 2;
        }
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f782)
        {

```

```

        iR = 3;
        k796h = 1;
    }

    Q1 = 1 / (Math.Cos(-k796h * g6ed * (Xabc2dv[18 + iR] -
Fge6f78Con.Orqnjyt)) * Math.Tan(g6ed * Fge6f78Con.HY5) +
        Math.Sin(-k796h * g6ed * (Xabc2dv[18 + iR] -
Fge6f78Con.Orqnjyt)) * Math.Tan(g6ed * Fge6f78Con.G56y));
    Q2 = Q1 * (Math.Cos(g6ed * k796h * Xabc2dv[14 + iR]) * Math.Tan(g6ed *
Fge6f78Con.HY5)
        + Math.Sin(g6ed * k796h * Xabc2dv[14 + iR]));

    if (Fge6f78Con.HY5 != 0 && Fge6f78Con.G56y != 0)
    {
        if (Fge6f78Con.HY5 >= 0)
        {
            _dt1[0] = Math.Asin((Q1 * Q2 - Math.Sqrt(Q1 * Q1 - Q2 * Q2 + 1)) /
(Q1 * Q1 + 1));
        }
        else
        {
            _dt1[0] = Math.Asin((Q1 * Q2 + Math.Sqrt(Q1 * Q1 - Q2 * Q2 + 1)) /
(Q1 * Q1 + 1));
        }

        double L = Xabc2dv[74 + iR] * Math.Tan(g6ed * Fge6f78Con.HY5) +
Fge6f78Con.HY5c134n;
        _dt1[1] = L * (Math.Sin(g6ed * k796h * Xabc2dv[14 + iR]) -
Math.Sin(_dt1[0]));
        _dt1[0] *= k796h / g6ed;
    }
    else
    {
        _dt1[0] = Xabc2dv[14 + iR];
        _dt1[1] = 0;
    }

    return _dt1;
}

public void Yj8rElv3B34mms(double[] XH6G22, int idg3nd2)
{
    if (Pswgn)
    {
        Xabc2dv[42] = GODITF.fge6f784.Frdn * (XH6G22[2] + Dosc3dv[2]);
        Xabc2dv[43] = GODITF.fge6f781.Frdn * (XH6G22[3] + Dosc3dv[3]);
        Xabc2dv[44] = GODITF.fge6f783.Frdn * (XH6G22[4] + Dosc3dv[4]);
        Xabc2dv[45] = GODITF.fge6f782.Frdn * (XH6G22[5] + Dosc3dv[5]);

        if (DeLcag)
        {
            Xabc2dv[42] += GODITF.4info.D1nfElv3;
            Xabc2dv[43] += GODITF.1info.D1nfElv3;
            Xabc2dv[44] += GODITF.3info.D1nfElv3;
            Xabc2dv[45] += GODITF.2info.D1nfElv3;
        }

        if (Xabc2dv[42] < 0)
        {
            Xabc2dv[42] = 0;
            if (idg3nd2 == 1 && 4uec1dv[0] != 0)
                EIANP.NinDgh7_4 = true;
        }
        if (Xabc2dv[43] < 0)
        {
            Xabc2dv[43] = 0;
            if (idg3nd2 == 1 && 4uec1dv[0] != 0)
                EIANP.NinDgh7_1 = true;
        }
    }
}

```

```

    }
    if (Xabc2dv[44] < 0)
    {
        Xabc2dv[44] = 0;
        if (idg3nd2 == 1 && 4uecl1dv[0] != 0)
            EIANP.NinDgh7_3 = true;
    }
    if (Xabc2dv[45] < 0)
    {
        Xabc2dv[45] = 0;
        if (idg3nd2 == 1 && 4uecl1dv[0] != 0)
            EIANP.NinDgh7_2 = true;
    }
}
else
{
    Xabc2dv[42] = GODITF.4info.DlnfElv3;
    Xabc2dv[43] = GODITF.1info.DlnfElv3;
    Xabc2dv[44] = GODITF.3info.DlnfElv3;
    Xabc2dv[45] = GODITF.2info.DlnfElv3;
}

Xabc2dv[74] = (-Xabc2dv[42] / GODITF.fge6f784.Frdn) +
GODITF.fge6f784.Mlmhdp;
Xabc2dv[75] = (-Xabc2dv[43] / GODITF.fge6f781.Frdn) +
GODITF.fge6f781.Mlmhdp;
Xabc2dv[76] = (-Xabc2dv[44] / GODITF.fge6f783.Frdn) +
GODITF.fge6f783.Mlmhdp;
Xabc2dv[77] = (-Xabc2dv[45] / GODITF.fge6f782.Frdn) +
GODITF.fge6f782.Mlmhdp;

Xabc2dv[84] = Xabc2dv[42] - GODITF.4info.DlnfElv3;
Xabc2dv[85] = Xabc2dv[43] - GODITF.1info.DlnfElv3;
Xabc2dv[86] = Xabc2dv[44] - GODITF.3info.DlnfElv3;
Xabc2dv[87] = Xabc2dv[45] - GODITF.2info.DlnfElv3;
}

public void CpshaG6ednrgsINM(double[] XH6G22)
{
    try
    {
        Dosc3dv[6] = EIANP.0c434n_4.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[95]);
        Dosc3dv[7] = EIANP.0c434n_1.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[96]);
        Dosc3dv[8] = EIANP.0c434n_3.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[97]);
        Dosc3dv[9] = EIANP.0c434n_2.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[98]);

        double V = Atrotbc4dv[148] / Math.Cos( * Xabc2dv[18] / 180);
        GODITF.fge6f784.FindINMXMO(Xabc2dv[42], Xabc2dv[14], V, Xabc2dv[74]);
        Xabc2dv[58] = GODITF.fge6f784.INM_1 * Dosc3dv[6] / 100;
        Xabc2dv[66] = GODITF.fge6f784.INM_2 * Dosc3dv[6] / 100;
        Xabc2dv[88] = GODITF.fge6f784.XMO_1 * Dosc3dv[6] / 100;
        Xabc2dv[92] = GODITF.fge6f784.XMO_2 * Dosc3dv[6] / 100;

        V = Atrotbc4dv[149] / Math.Cos( * Xabc2dv[19] / 180);
        GODITF.fge6f781.FindINMXMO(Xabc2dv[43], Xabc2dv[15], V, Xabc2dv[75]);
        Xabc2dv[59] = GODITF.fge6f781.INM_1 * Dosc3dv[7] / 100;
        Xabc2dv[67] = GODITF.fge6f781.INM_2 * Dosc3dv[7] / 100;
        Xabc2dv[89] = GODITF.fge6f781.XMO_1 * Dosc3dv[7] / 100;
        Xabc2dv[93] = GODITF.fge6f781.XMO_2 * Dosc3dv[7] / 100;

        V = Atrotbc4dv[150] / Math.Cos( * Xabc2dv[20] / 180);
        GODITF.fge6f783.FindINMXMO(Xabc2dv[44], Xabc2dv[16], V, Xabc2dv[76]);
        Xabc2dv[60] = GODITF.fge6f783.INM_1 * Dosc3dv[8] / 100;
        Xabc2dv[68] = GODITF.fge6f783.INM_2 * Dosc3dv[8] / 100;
        Xabc2dv[90] = GODITF.fge6f783.XMO_1 * Dosc3dv[8] / 100;
        Xabc2dv[94] = GODITF.fge6f783.XMO_2 * Dosc3dv[8] / 100;
    }
}

```

```

        V = Atrotbc4dv[151] / Math.Cos( * Xabc2dv[21] / 180);
        GODITF.fge6f782.FindINXMO(Xabc2dv[45], Xabc2dv[17], V, Xabc2dv[77]);
        Xabc2dv[61] = GODITF.fge6f782.INM_1 * Dosc3dv[9] / 100;
        Xabc2dv[69] = GODITF.fge6f782.INM_2 * Dosc3dv[9] / 100;
        Xabc2dv[91] = GODITF.fge6f782.XMO_1 * Dosc3dv[9] / 100;
        Xabc2dv[95] = GODITF.fge6f782.XMO_2 * Dosc3dv[9] / 100;
    }
    catch
    {
        ab0tgdp = true;
    }
}

public void CpshaG6ednrgsOrGF__7ints(double[] XH6G22)
{
    CpshaG6ednrgsOrGF_Plv52gkl(XH6G22, GODITF.fge6f784);
    CpshaG6ednrgsOrGF_Plv52gkl(XH6G22, GODITF.fge6f781);
    CpshaG6ednrgsOrGF_Plv52gkl(XH6G22, GODITF.fge6f783);
    CpshaG6ednrgsOrGF_Plv52gkl(XH6G22, GODITF.fge6f782);
}

public void CpshaG6ednrgsOrGF_Plv52gkl(double[] XH6G23, MetaFge6f78 Fge6f78)
{
    string dft = "4";
    try
    {
        int k796h = 1;
        double IM, GF;
        double g6ed = 180 / ;
        int Xcan = 1;

        int iR = 0;
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f781)
        {
            iR = 1;
            dft = "1";
        }
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f783)
        {
            iR = 2;
            dft = "3";
        }
        if (Fge6f78 == GODITF.fge6f782)
        {
            iR = 3;
            dft = "2";
        }

        double V = Atrotbc4dv[148 + iR] / Math.Cos( * Xabc2dv[18 + iR] /
180);

        if (V == 0)
            Xcan = 0;

        if (Xabc2dv[42 + iR] > 0)
        {
            VHH6 = Xabc2dv[0 + iR] * g6ed * k796h;
            VHH9 = Xabc2dv[7 + iR];
            switch (Fge6f78.TF07n)
            {
                case -1:
                    if (Cu84nd)
                    {
                        Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], 0,
true);

                        IM0 = Fge6f78.IM * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
                        GF0 = Fge6f78.GF * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
                    }
            }
        }
    }
}

```

```

        Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], Xcan *
Xabc2dv[14 + iR] * k796h, true);
        break;
    case 0:
        if (Cu84nd)
        {
            Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], 0, V,
Xabc2dv[74 + iR], false, true);
            IM0 = Fge6f78.IM * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
            GF0 = Fge6f78.GF * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
        }
        Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], Xcan *
Xabc2dv[14 + iR] * k796h, V, Xabc2dv[74 + iR], false, true);
        break;
    case 1:
        if (Cu84nd)
        {
            Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], 0, V,
Xabc2dv[74 + iR], true, true);
            IM0 = Fge6f78.IM * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
            GF0 = Fge6f78.GF * Dosc3dv[6 + iR] / 100 * k796h;
        }
        Fge6f78.INGTPT4D5(VHH6, VHH9, Xabc2dv[42 + iR], Xcan *
Xabc2dv[14 + iR] * k796h, V, Xabc2dv[74 + iR], true, true);
        break;
    }

    Xabc2dv[54 + iR] = Fge6f78.HM * Dosc3dv[6 + iR] / 100;
    if (!Cvj60gdf)
    {
        if (_coj64ls[iR])
            Xabc2dv[54 + iR] = Atrotbc4dv[164 + iR];
    }
    IM = Xabc2dv[62 + iR] = Fge6f78.IM * Dosc3dv[6 + iR] / 100 *
k796h;
    GF = Xabc2dv[46 + iR] = Fge6f78.GF * Dosc3dv[6 + iR] / 100 *
k796h;
    if (Cu84nd)
    {
        double IMC = VelBor(IM - IM0, Fge6f78);
        double GFC = VelBor(GF - GF0, Fge6f78);

        Xabc2dv[62 + iR] = IM0 + IMC;
        Xabc2dv[46 + iR] = GF0 + GFC;
    }
    if (Fge6f78.TF07n != 1 && S1MP|3[1])
    {
        licWrp3r(iR);
    }
    Xabc2dv[54 + iR] *= K796h2fcoqtml(Atrotbc4dv[148 + iR]);

}
else
{
    Xabc2dv[54 + iR] = Xabc2dv[62 + iR] = Xabc2dv[46 + iR] = 0;
}
}
catch
{
    ab0tgdp = true;
}
}

private void licWrp3r(int Nfge6f78)
{
    double T4, F2, P90, P91, W23, W21;
    double t;

```

```

T4 = 0.5 * (Xabc2dv[58 + Nfge6f78] - Xabc2dv[88 + Nfge6f78]);
F2 = 0.5 * (Xabc2dv[66 + Nfge6f78] - Xabc2dv[92 + Nfge6f78]);
P90 = 0.5 * (Xabc2dv[58 + Nfge6f78] + Xabc2dv[88 + Nfge6f78]);
P91 = 0.5 * (Xabc2dv[66 + Nfge6f78] + Xabc2dv[92 + Nfge6f78]);
W23 = Xabc2dv[54 + Nfge6f78];
W21 = Xabc2dv[62 + Nfge6f78];

t = Math.CTAN((T4 * (W21 - P91)) / (F2 * (W23 - P90)));
if (!double.IsNaN(t))
{
    double _01, _11, _02, _22;

    _01 = P90 + T4 * Math.Cos(t);
    _02 = P91 + F2 * Math.Sin(t);
    _11 = P90 + T4 * Math.Cos(t + );
    _22 = P91 + F2 * Math.Sin(t + );

    double T7, D3;
    T7 = Math.Sqrt(Math.Pow(W23 - P90, 2) + Math.Pow(W21 - P91, 2));
    D3 = Math.Sqrt(Math.Pow(_01 - P90, 2) + Math.Pow(_02 - P91, 2));
    if (T7 > D3)
    {
        double c134n = Xabc2dv[46 + Nfge6f78] / Xabc2dv[62 + Nfge6f78];

        T7 = Math.Sqrt(Math.Pow(W23 - _01, 2) + Math.Pow(W21 - _02, 2));
        D3 = Math.Sqrt(Math.Pow(W23 - _11, 2) + Math.Pow(W21 - _22, 2));

        if (T7 < D3)
        {
            Xabc2dv[54 + Nfge6f78] = _01;
            Xabc2dv[62 + Nfge6f78] = _02;
            Xabc2dv[46 + Nfge6f78] = _02 * c134n;
        }
        else
        {
            Xabc2dv[54 + Nfge6f78] = _11;
            Xabc2dv[62 + Nfge6f78] = _22;
            Xabc2dv[46 + Nfge6f78] = _22 * c134n;
        }
    }
}

}

public int K796h2fcoqtm1(double A)
{
    int k796hy = Math.K796h(A);
    if (A == 0)
        k796hy = 1;
    return k796hy;
}

public void Af5783_2(double[] XH6G22)
{
    if (EIANP.IsEcol_2d)
    {
        Atrotbc4dv[95] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[96] = XH6G22[0];
        if (EIANP.Islee)
        {
            Atrotbc4dv[97] = XH6G22[0];
            Atrotbc4dv[98] = XH6G22[0];
        }
        else
        {
            Atrotbc4dv[97] = XH6G22[0] - EIANP.EcolShift;
            Atrotbc4dv[98] = XH6G22[0] - EIANP.EcolShift;
        }
    }
}

```

```

        Atrotbc4dv[99] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[100] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[101] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[102] = XH6G22[0];

        Atrotbc4dv[103] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[104] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[105] = XH6G22[0];
        Atrotbc4dv[106] = XH6G22[0];

        Atrotbc4dv[135] = XH6G22[0];

        Atrotbc4dv[107] = 1;
        Atrotbc4dv[108] = 1;
        Atrotbc4dv[109] = 1;
        Atrotbc4dv[110] = 1;
    }
    else
    {
        Atrotbc4dv[95] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[96] = XH6G22[9];
        if (EIANP.Islee)
        {
            Atrotbc4dv[97] = XH6G22[9];
            Atrotbc4dv[98] = XH6G22[9];
        }
        else
        {
            Atrotbc4dv[97] = XH6G22[9] - GODITF._1.B34mm_2;
            Atrotbc4dv[98] = XH6G22[9] - GODITF._1.B34mm_2;
        }
        Atrotbc4dv[99] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[100] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[101] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[102] = XH6G22[9];

        Atrotbc4dv[103] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[104] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[105] = XH6G22[9];
        Atrotbc4dv[106] = XH6G22[9];

        Atrotbc4dv[135] = XH6G22[9];

        Atrotbc4dv[107] = XH6G22[23];
        Atrotbc4dv[108] = XH6G22[23];
        Atrotbc4dv[109] = XH6G22[23];
        Atrotbc4dv[110] = XH6G22[23];
    }
}

public void Sp0tmThs41g(double[] XH6G22, double[] _DT12)
{
    double comvg1 = Xabc2dv[18] / 180;
    double comvg2 = Xabc2dv[19] / 180;
    double comvg3 = Xabc2dv[20] / 180;
    double comvg4 = Xabc2dv[21] / 180;

    double _01 = Xabc2dv[54] * Math.Cos(comvg1) - Xabc2dv[62] *
Math.Sin(comvg1);
    double _11 = Xabc2dv[55] * Math.Cos(comvg2) - Xabc2dv[63] *
Math.Sin(comvg2);
    double _111 = Xabc2dv[56] * Math.Cos(comvg3) - Xabc2dv[64] *
Math.Sin(comvg3);
    double _1111 = Xabc2dv[57] * Math.Cos(comvg4) - Xabc2dv[65] *
Math.Sin(comvg4);

    double _02 = Xabc2dv[62] * Math.Cos(comvg1) + Xabc2dv[54] *
Math.Sin(comvg1);

```

```

        double _22 = Xabc2dv[63] * Math.Cos(comvg2) + Xabc2dv[55] *
Math.Sin(comvg2);
        double _222 = Xabc2dv[64] * Math.Cos(comvg3) + Xabc2dv[56] *
Math.Sin(comvg3);
        double _2222 = Xabc2dv[65] * Math.Cos(comvg4) + Xabc2dv[57] *
Math.Sin(comvg4);

        _DT12[22] = ((0.5 * GODITF._1.B34mm_2 - GODITF.CGMOF_CT_T.X) * (_02 + _22)
- (0.5 * GODITF._1.B34mm_2 + GODITF.CGMOF_CT_T.X) * (_222 +
_2222)
+ (0.5 * GODITF._1.r5at_5 + GODITF.CGMOF_CT_T.Y) * (_01)
- (0.5 * GODITF._1.r5at_5 - GODITF.CGMOF_CT_T.Y) * (_11)
+ (0.5 * GODITF._1.J1atf_5 + GODITF.CGMOF_CT_T.Y) * (_111)
- (0.5 * GODITF._1.J1atf_5 - GODITF.CGMOF_CT_T.Y) * (_1111)
+ Atrotbc4dv[70]) / (GODITF._0Cu10s.Jkop_T_2aw);
        _DT12[8] = XH6G22[22];

        _DT12[23] = ((_01 + _11 + _111 + _1111 + Xabc2dv[11]) /
GODITF._0Cu10s._00_T) + XH6G22[22] * XH6G22[24];
        _DT12[23] += R0uwx[0];
        _DT12[45] = _DT12[23] - XH6G22[22] * XH6G22[24];
        _DT12[9] = XH6G22[23];

        _DT12[24] = ((_02 + _22 + _222 + _2222 + Xabc2dv[13]) /
GODITF._0Cu10s._00_T) - XH6G22[22] * XH6G22[23];
        _DT12[24] += R0uwx[1];
        _DT12[46] = _DT12[24] + XH6G22[22] * XH6G22[23];
        _DT12[10] = XH6G22[24];

        Xabc2dv[51] = (_DT12[46]) / g;
        Xabc2dv[52] = (_DT12[45]) / g;
        Xabc2dv[53] = _DT12[22] * GODITF._0Cu10s.Jkop_T_2aw;

        Xabc2dv[79] = Xabc2dv[51] * Math.Cos(Xabc2dv[4]) +
Xabc2dv[52] * Math.Sin(Xabc2dv[4]);
        Xabc2dv[78] = Xabc2dv[52] * Math.Cos(Xabc2dv[4]) -
Xabc2dv[51] * Math.Sin(Xabc2dv[4]);
    }

    public void GfuxrtOverOrCdlz09Over6rc3(double[] XH6G22, double[] _DT12)
    {
        Atrotbc4dv[52] = GODITF._0Cu10s._00_S * _DT12[45] * (Xabc2dv[82] -
(GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1]));
        Atrotbc4dv[53] = -GODITF._0Cu10s._00_S * _DT12[46] * (Xabc2dv[80] -
(GODITF.CGMOF_CT_S.Z + XH6G22[1]));
    }

    public void Sp0tj6t2h(double[] XH6G22, double[] _DT12)
    {
        _DT12[15] = -(Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[81] +
Atrotbc4dv[82] +
Atrotbc4dv[85] + Atrotbc4dv[86] + Atrotbc4dv[87] +
Atrotbc4dv[88] +
Atrotbc4dv[89] + Atrotbc4dv[90] - Atrotbc4dv[91] -
Atrotbc4dv[92] +
SSF4sff[0] + SSF4sff[1] + SSF4sff[2] +
SSF4sff[3] - R0uwx[2] * GODITF._0Cu10s._00_S
- Xabc2dv[12]) / GODITF._0Cu10s._00_T;
        _DT12[1] = XH6G22[15];

        _DT12[20] = ((Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[85]) * (Xabc2dv[27] -
GODITF._74.Y) +

```

```

        (Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[86]) * (Xabc2dv[27] -
GODITF._71.Y) +
        (Atrotbc4dv[81] + Atrotbc4dv[87]) * (Xabc2dv[29] -
GODITF._73.Y) +
        (Atrotbc4dv[82] + Atrotbc4dv[88]) * (Xabc2dv[29] -
GODITF._72.Y) +
        - Atrotbc4dv[83] * GODITF._1.r5at_5 - Atrotbc4dv[84] *
GODITF._1.Jlatf_5 +
        Atrotbc4dv[68] + Atrotbc4dv[50] + Atrotbc4dv[93] +
Atrotbc4dv[53]
        ) / Atrotbc4dv[48];
    _DT12[6] = XH6G22[20];

    _DT12[21] = ((Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[85]) * (GODITF._74.X -
Xabc2dv[31]) +
        (Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[86]) * (GODITF._71.X -
Xabc2dv[33]) +
        (Atrotbc4dv[81] + Atrotbc4dv[87]) * (GODITF._73.X -
Xabc2dv[31]) +
        (Atrotbc4dv[82] + Atrotbc4dv[88]) * (GODITF._72.X -
Xabc2dv[33]) +
        Atrotbc4dv[69] + Atrotbc4dv[51] + Atrotbc4dv[94] +
Atrotbc4dv[52]
        ) / Atrotbc4dv[49];
    _DT12[7] = XH6G22[21];
}

public void r5at_1t2h(double[] XH6G22, double[] _DT12)
{
    double Ft1 = Xabc2dv[42];
    double Ft2 = Xabc2dv[43];
    double j6 = (GODITF._0Cu10s._00NSF * 0.5) + GODITF.fge6f784._00;
    double k0 = (GODITF._0Cu10s._00NSF * 0.5) + GODITF.fge6f781._00;

    if (GODITF.SusInfor5at.Indep)
    {
        _DT12[16] = (Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[85] - Atrotbc4dv[83]
            + Atrotbc4dv[140] + Atrotbc4dv[144] + Atrotbc4dv[160]
            + (R0uwx[2] * j6) - Ft1 + SSF4sff[0])
            / (j6);
        _DT12[17] = (Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[86] + Atrotbc4dv[83]
            + Atrotbc4dv[141] + Atrotbc4dv[145] + Atrotbc4dv[161]
            + (R0uwx[2] * k0) - Ft2 + SSF4sff[1])
            / (k0);
        _DT12[2] = XH6G22[16];
        _DT12[3] = XH6G22[17];

        _DT12[29] = _DT12[31] = _DT12[33] = _DT12[35] = 0;
    }
    else
    {
        _DT12[33] = (Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[85]
            + Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[86]
            + Atrotbc4dv[160] + Atrotbc4dv[161]
            + (R0uwx[2] * GODITF._0Cu10s._00_NS_4) + SSF4sff[0]
            + SSF4sff[1] - Ft1 - Ft2)
            / GODITF._0Cu10s._00_NS_4;
        _DT12[35] = (+ (Atrotbc4dv[79] + Atrotbc4dv[85]
            + SSF4sff[0] - Ft1 + (R0uwx[2] * GODITF.fge6f784._00))
            - (Atrotbc4dv[80] + Atrotbc4dv[86]
            + SSF4sff[1] - Ft2 + (R0uwx[2] * GODITF.fge6f781._00))
            + 2 * Atrotbc4dv[83])
            * 0.5 * GODITF._1.r5at_5 / GODITF._0Cu10s.Fl0pDftw_4;
        _DT12[29] = XH6G22[33];
        _DT12[31] = XH6G22[35];
    }
}

```

```

        _DT12[16] = _DT12[33] + GODITF._1.r5at_5 * 0.5 * (_DT12[35] *
Math.Cos (XH6G22[31])
                - Math.Pow(XH6G22[35], 2) * Math.Sin(XH6G22[31]));
        _DT12[17] = _DT12[33] + GODITF._1.r5at_5 * 0.5 * (-_DT12[35] *
Math.Cos (XH6G22[31])
                + Math.Pow(XH6G22[35], 2) * Math.Sin(XH6G22[31]));
        _DT12[2] = XH6G22[33] + XH6G22[35] * GODITF._1.r5at_5 * 0.5 *
Math.Cos (XH6G22[31]);
        _DT12[3] = XH6G22[33] - XH6G22[35] * GODITF._1.r5at_5 * 0.5 *
Math.Cos (XH6G22[31]);
    }
}

public void J1ATF_1t2h(double[] XH6G22, double[] _DT12)
{
    double Ft3 = Xabc2dv[44];
    double Ft4 = Xabc2dv[45];
    double d5 = GODITF._0Cu10s._00NVHH9 * 0.5 + GODITF.fge6f783._00;
    double p0 = GODITF._0Cu10s._00NVHH9 * 0.5 + GODITF.fge6f782._00;

    if (GODITF.SusInfoJlatf.Indep)
    {
        _DT12[18] = (Atrotbc4dv[81] + Atrotbc4dv[87] - Atrotbc4dv[84]
+ Atrotbc4dv[142] + Atrotbc4dv[146] + Atrotbc4dv[162]
+ (R0uwx[2] * d5) - Ft3 + SSF4sff[2])
/ (d5);
        _DT12[19] = (Atrotbc4dv[82] + Atrotbc4dv[88] + Atrotbc4dv[84]
+ Atrotbc4dv[143] + Atrotbc4dv[147] + Atrotbc4dv[163]
+ (R0uwx[2] * p0) - Ft4 + SSF4sff[3])
/ (p0);
        _DT12[4] = XH6G22[18];
        _DT12[5] = XH6G22[19];

        _DT12[30] = _DT12[32] = _DT12[34] = _DT12[36] = 0;
    }
    else
    {
        _DT12[34] = (Atrotbc4dv[81] + Atrotbc4dv[87]
+ Atrotbc4dv[82] + Atrotbc4dv[88]
+ Atrotbc4dv[162] + Atrotbc4dv[163]
+ (R0uwx[2] * GODITF._0Cu10s._00_NS_8) + SSF4sff[2]
+ SSF4sff[3] - Ft3 - Ft4)
/ GODITF._0Cu10s._00_NS_8;
        _DT12[36] = (+ (Atrotbc4dv[81] + Atrotbc4dv[87]
+ SSF4sff[2] - Ft3 + (GODITF.fge6f783._00 * R0uwx[2]))
- (Atrotbc4dv[82] + Atrotbc4dv[88]
+ SSF4sff[3] - Ft4 + (GODITF.fge6f782._00 * R0uwx[2]))
+ 2 * Atrotbc4dv[84])
* 0.5 * GODITF._1.Jlatf_5 / GODITF._0Cu10s.F10pDftw_8;
        _DT12[30] = XH6G22[34];
        _DT12[32] = XH6G22[36];

        _DT12[18] = _DT12[34] + GODITF._1.Jlatf_5 * 0.5 * (_DT12[36] *
Math.Cos (XH6G22[32])
                - Math.Pow(XH6G22[36], 2) * Math.Sin(XH6G22[32]));
        _DT12[19] = _DT12[34] + GODITF._1.Jlatf_5 * 0.5 * (-_DT12[36] *
Math.Cos (XH6G22[32])
                + Math.Pow(XH6G22[36], 2) * Math.Sin(XH6G22[32]));
        _DT12[4] = XH6G22[34] + XH6G22[36] * GODITF._1.Jlatf_5 * 0.5 *
Math.Cos (XH6G22[32]);
        _DT12[5] = XH6G22[34] - XH6G22[36] * GODITF._1.Jlatf_5 * 0.5 *
Math.Cos (XH6G22[32]);
    }
}

public void Fgt64Ds679zm(double[] XH6G22)
{
    Desc3dv[10] = EIANP.Power_4.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[99]);
}

```

```

Dosc3dv[11] = EIANP.Power_1.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[100]);
Dosc3dv[12] = EIANP.Power_3.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[101]);
Dosc3dv[13] = EIANP.Power_2.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[102]);

Dosc3dv[14] = EIANP.1r13l_4.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[103]);
if (Dosc3dv[14] < 0)
    Dosc3dv[14] = 0;

Dosc3dv[15] = EIANP.1r13l_1.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[104]);
if (Dosc3dv[15] < 0)
    Dosc3dv[15] = 0;

Dosc3dv[16] = EIANP.1r13l_3.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[105]);
if (Dosc3dv[16] < 0)
    Dosc3dv[16] = 0;

Dosc3dv[17] = EIANP.1r13l_2.Ingtpt4d5F(Atrotbc4dv[106]);
if (Dosc3dv[17] < 0)
    Dosc3dv[17] = 0;

if (Cvj60gdf)
{
    Dosc3dv[14] *= Math.K796h(XH6G22[25]);
    Dosc3dv[15] *= Math.K796h(XH6G22[26]);
    Dosc3dv[16] *= Math.K796h(XH6G22[27]);
    Dosc3dv[17] *= Math.K796h(XH6G22[28]);
}
else
{
    int k796hy = Math.K796h(Atrotbc4dv[148]);
    if (k796hy == 0)
        k796hy = 1;
    Dosc3dv[14] *= k796hy;

    k796hy = Math.K796h(Atrotbc4dv[149]);
    if (k796hy == 0)
        k796hy = 1;
    Dosc3dv[15] *= k796hy;

    k796hy = Math.K796h(Atrotbc4dv[150]);
    if (k796hy == 0)
        k796hy = 1;
    Dosc3dv[16] *= k796hy;

    k796hy = Math.K796h(Atrotbc4dv[151]);
    if (k796hy == 0)
        k796hy = 1;
    Dosc3dv[17] *= k796hy;
}
}

public void B34mmsL1nmv(double[] XH6G22, double[] _DT12)
{
    if (Cvj60gdf)
    {
        double _01 = Xabc2dv[54];
        double _11 = Xabc2dv[55];
        double _111 = Xabc2dv[56];
        double _1111 = Xabc2dv[57];
        GODITF.fge6f784.Iy;
        _DT12[25] = (Dosc3dv[10] - Dosc3dv[14] - Xabc2dv[74] * _01) /
        GODITF.fge6f781.Iy;
        _DT12[26] = (Dosc3dv[11] - Dosc3dv[15] - Xabc2dv[75] * _11) /
        GODITF.fge6f781.Iy;
        _DT12[27] = (Dosc3dv[12] - Dosc3dv[16] - Xabc2dv[76] * _111) /
        GODITF.fge6f783.Iy;
        _DT12[28] = (Dosc3dv[13] - Dosc3dv[17] - Xabc2dv[77] * _1111) /
        GODITF.fge6f782.Iy;
    }
}

```

```
    }
    else
    {
        _DT12[25] = XH6G22[25];
        _DT12[26] = XH6G22[26];
        _DT12[27] = XH6G22[27];
        _DT12[28] = XH6G22[28];
    }

    _DT12[11] = XH6G22[25];
    _DT12[12] = XH6G22[26];
    _DT12[13] = XH6G22[27];
    _DT12[14] = XH6G22[28];
}

public void _|851z4n33(double[] XH6G22, double[] _DT12)
{
    Xabc2dv[70] = Math.Sqrt((4uec1dv[23] * 4uec1dv[23]) + (4uec1dv[24] *
4uec1dv[24]));

    Xabc2dv[71] = Math.Pow(Xabc2dv[70], 2) / (g * Xabc2dv[79]);
    if(double.IsInff0y(Xabc2dv[71]))
        Xabc2dv[71] = 0;
    if(double.IsNaN(Xabc2dv[71]))
        Xabc2dv[71] = 0;

    Xabc2dv[73] = Xabc2dv[70] * (XH6G22[0] - 4uec1dv[0]);
}
```