

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br. Morales O. Fernando E.
para optar al título de Ingeniero Mecánico

Caracas, 2008

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS

TUTOR ACADEMICO: Prof. Jorge Barillas

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br. Morales O. Fernando E.
para optar al título de Ingeniero Mecánico

Caracas, 2008

Caracas, 28 de mayo de 2008

ACTA

Los abajo firmantes, miembros del jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller: **Morales O. Fernando E.**, titulado:

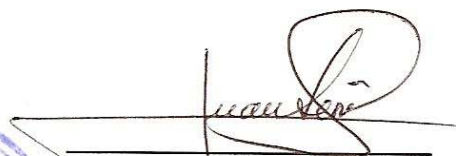
“ DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS ”

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico.



Prof. Enrique Limongi

Jurado



Prof. Juan León

Jurado



Prof. Jorge Barillas

Tutor

DEDICATORIA

A mis Padres

A mi Madre, por brindarme todo su amor y comprensión, por ser ejemplo de trabajo y constancia, por apoyarme en todo momento, por su paciencia, por creer en mí y nunca haber perdido la fe

A mi Padre, por ser ejemplo de honestidad y valor

A mi Hermano Alejandro, por alegrarme cada día con su inocencia y genialidad

A toda mi familia, que en conjunto me dieron las herramientas para transitar este camino y sortear todas las dificultades

A mi país, al que espero serle lo más útil posible

AGRADECIMIENTOS

A Dios y a la Virgen del Valle

A mi familia

A la Universidad Central de Venezuela, mi segunda casa y donde obtuve no solo una excelente formación profesional y humana, sino buenos amigos y buenos recuerdos

Al Profesor Jorge Barillas por su confianza, su guía, su espíritu de progreso y su mística de trabajo

A todos los que hicieron mi camino más difícil y me permitieron obtener mayor satisfacción de los triunfos alcanzados

A Graciela y a Gladys por su apoyo moral y espiritual.

A todos aquellos que contribuyeron con mi formación, profesores y amigos

Gracias!!

Morales O. Fernando E.

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS

**Tutor Académico: Prof. Jorge Barillas. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de
Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica. 2008. 309 páginas.**

Palabras Claves: ROBÓTICA, DISEÑO, METODOLOGÍA, CINEMÁTICA,
MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA.

RESUMEN

En este trabajo especial de grado se plantea el diseño de una metodología para el análisis cinemático de mecanismos robóticos que posean entre tres y seis grados de libertad. Primero se estudian las herramientas matemáticas necesarias para describir la localización de objetos en el espacio tridimensional, entre ellas la matriz de transformación homogénea. Utilizando estas herramientas y la representación de Denavit y Hartenberg, se estudia el problema cinemático directo que permite determinar la posición y orientación del extremo final o herramienta, dada una configuración de los elementos del brazo. Luego se plantea el problema cinemático inverso y algunos métodos para obtener la solución de brazo o la configuración que deben adoptar los elementos para lograr el posicionamiento del extremo final o herramienta. Posteriormente se evalúan e implementan los criterios, métodos y herramientas para la planificación de trayectorias. Finalmente se presenta una metodología de análisis cinemático y algunos ejemplos de aplicación.

NOMENCLATURA

CAPITULO III

a	vector unitario en la dirección del eje OW del sistema de coordenadas móvil en el extremo de brazo robótico
α	ángulo de rotación alrededor del eje OX
ϕ	ángulo de rotación alrededor del eje OY
ϕ	ángulo de rotación alrededor de un eje r arbitrario
I_3	matriz identidad 3 x 3
I_4	matriz identidad 4 x 4
i_u	vector unitario i en la dirección del eje OU
i_x	vector unitario i en la dirección del eje OX
j_v	vector unitario j en la dirección del eje OV
j_y	vector unitario j en la dirección del eje OY
k_w	vector unitario k en la dirección del eje OW
k_z	vector unitario k en la dirección del eje OZ
n	vector unitario en la dirección del eje OU del sistema de coordenadas móvil
n_c	eje de rotación mediante cuaterniones
O	origen del sistema de coordenadas
OU	eje coordenado móvil en la dirección U
OV	eje coordenado móvil en la dirección V
OW	eje coordenado móvil en la dirección W
$OUVW$	sistema de coordenadas móvil compuesto por los ejes coordenados OU , OV y OW
OX	eje coordenado de referencia en la dirección X
OY	eje coordenado de referencia en la dirección Y
OZ	eje coordenado de referencia en la dirección Z

$OXYZ$	sistema de coordenadas de referencia compuesto por los ejes coordenados OX , OY y OZ
p	punto de coordenadas x, y, z
$p^\wedge$	punto p expresado en coordenadas homogéneas
p_u	coordenada en la dirección del eje OU de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas móvil
p_v	coordenada en la dirección del eje OV de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas móvil
p_w	coordenada en la dirección del eje OW de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas móvil
p_{uvw}	punto p expresado con respecto al sistema de coordenadas móvil (ligado al cuerpo)
$p^\wedge_{uvw}$	punto p expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas móvil (ligado al cuerpo)
p_x	coordenada en la dirección del eje OX de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas de referencia
p_y	coordenada en la dirección del eje OY de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas de referencia
p_z	coordenada en la dirección del eje OZ de un punto p , expresado con respecto al sistema de coordenadas de referencia
p_{xyz}	punto p expresado con respecto al sistema de coordenadas fijo (de referencia)
$p^\wedge_{xyz}$	punto p expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas fijo (de referencia)
q	cuaternión unitario
Q	matriz inversa o traspuesta de la matriz de rotación 3×3
Q	cuaternión
Q^{-1}	inverso del cuaternión
Q^*	conjugado del cuaternión

$\mathbf{r}$	vector unitario, eje arbitrario de rotación
r_x	componente en la dirección X del eje arbitrario de rotación $\mathbf{r}$
r_y	componente en la dirección Y del eje arbitrario de rotación $\mathbf{r}$
r_z	componente en la dirección Z del eje arbitrario de rotación $\mathbf{r}$
$\mathbf{R}$	matriz de rotación 3 x 3
$\mathbf{R}$	matriz de rotación compuesta 3 x 3
$\mathbf{R}^{-1}$	matriz inversa de $\mathbf{R}$
$\mathbf{R}_R$	matriz de rotación previa (resultante)
$\mathbf{R}^T$	matriz traspuesta de $\mathbf{R}$
$\mathbf{R}_{x, \alpha}$	matriz de rotación 3 x 3 respecto al eje OX un ángulo α
$\mathbf{R}_{y, \phi}$	matriz de rotación 3 x 3 respecto al eje OY un ángulo ϕ
$\mathbf{R}_{z, \theta}$	matriz de rotación 3 x 3 respecto al eje OZ un ángulo θ
$\mathbf{R}_{r, \phi}$	matriz de rotación 3 x 3 respecto a un eje r arbitrario un ángulo ϕ
$\mathbf{s}$	vector unitario en la dirección del eje OV del sistema de coordenadas móvil en el extremo de brazo robótico
s	parte escalar de un cuaternión
$\mathbf{T}$	matriz de transformación homogénea 4 x 4
$\mathbf{T}_{\text{rot}}$	matriz de rotación homogénea 4 x 4
$\mathbf{T}_{\text{tras}}$	matriz de traslación homogénea 4 x 4
$\mathbf{T}_{x, \alpha}$	matriz de rotación homogénea 4 x 4, alrededor del eje OX un ángulo α
$\mathbf{T}_{y, \phi}$	matriz de rotación homogénea 4 x 4, alrededor del eje OY un ángulo ϕ
$\mathbf{T}_{z, \theta}$	matriz de rotación homogénea 4 x 4, alrededor del eje OZ un ángulo θ
θ	ángulo de rotación alrededor del eje OZ
θ	ángulo de rotación alrededor del eje n mediante cuaterniones
$\mathbf{v}$	parte vectorial de un cuaternión
w	factor de escala para coordenadas homogéneas
x	coordenada del punto p en la dirección del eje OX
y	coordenada del punto p en la dirección del eje OY

z coordenada del punto p en la dirección del eje OZ

CAPITULOS IV y V

a_i parámetro Denavit-Hartenberg, distancia más corta medida a lo largo del eje x_i entre los ejes de la articulación

a_x componente en la dirección del eje OX del vector unitario a

a_y componente en la dirección del eje OY del vector unitario a

a_z componente en la dirección del eje OZ del vector unitario a

${}^{i-1}A_i$ matriz de transformación homogénea compuesta D-H para sistema de coordenadas adyacentes i e $i - 1$

α_i parámetro Denavit-Hartenberg, ángulo entre los ejes de articulación medidos en un plano perpendicular al eje x_i

d_i parámetro Denavit-Hartenberg, distancia medida a lo largo del eje de la articulación i entre las normales x_{i-1} y x_i

i subíndice de elemento o de articulación

n número de elementos que componen el mecanismo robótico

n_x componente en la dirección del eje OX del vector unitario n

n_y componente en la dirección del eje OY del vector unitario n

n_z componente en la dirección del eje OZ del vector unitario n

N grados de libertad

p_i punto expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas del elemento i

p_x coordenada del vector de posición $\mathbf{p}$ de la muñeca en la dirección del eje OX

p_y coordenada del vector de posición $\mathbf{p}$ de la muñeca en la dirección del eje OY

p_z coordenada del vector de posición $\mathbf{p}$ de la muñeca en la dirección del eje OZ

q_i parámetro Denavit-Hartenberg para articulación giratoria o articulación prismática

$\mathbf{r}$	vector de posición de la articulación de la muñeca para un robot paletizador
$\mathbf{r}_{ij}$	componentes de la sub matriz de rotación ${}^3\mathbf{R}_6$ 3 x 3
s_x	componente en la dirección del eje OX del vector unitario $\mathbf{s}$
s_y	componente en la dirección del eje OY del vector unitario $\mathbf{s}$
s_z	componente en la dirección del eje OZ del vector unitario $\mathbf{s}$
$\mathbf{T}$	matriz de transformación homogénea 4 x 4
${}^0\mathbf{T}_i$	matriz de transformación homogénea que expresa el sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base
θ_i	parámetro Denavit-Hartenberg, ángulo de articulación
$\mathbf{x}_i$	eje x del sistema cartesiano ortonormal correspondiente a la articulación $i + 1$ y fijo al elemento i
$\mathbf{y}_i$	eje y del sistema cartesiano ortonormal correspondiente a la articulación $i + 1$ y fijo al elemento i
$\mathbf{z}_i$	eje z del sistema cartesiano ortonormal correspondiente a la articulación $i + 1$ y fijo al elemento i

CAPITULO VI

$\mathbf{a}_1$	componente del vector aceleración para los tramos de aceleración/desaceleración en la dirección del eje OX
$\mathbf{a}_2$	componente del vector aceleración para los tramos de aceleración/desaceleración en la dirección del eje OY
$\mathbf{a}_3$	componente del vector aceleración para los tramos de aceleración/desaceleración en la dirección del eje OZ
c	camino recorrido expresado en forma paramétrica
$\bar{c}$	reparametrización del camino c
$c'(t)$	velocidad con la que se recorre la curva c

δ	ángulo de giro final de los vectores n y s alrededor del vector a
ϕ	ángulo de giro del vector n alrededor del vector a
$\ell(c)$	longitud de arco de un camino c
n	grado del polinomio algebraico
Ω	aceleración angular
$P_n(x)$	polinomio algebraico de grado n
$q(t), \theta(t)$	ángulo de la articulación en función del tiempo
$\dot{q}(t), \dot{\theta}(t)$	velocidad angular de la articulación en función del tiempo
$\ddot{q}(t), \ddot{\theta}(t)$	aceleración angular de la articulación en función del tiempo
R	radio de la circunferencia
t	tiempo
t_a	tiempo de aceleración
t_e	tiempo de ejecución
t_f	tiempo final
t_h	tiempo intermedio
t_0	tiempo inicial
θ	ángulo de giro del vector a inicial alrededor del eje OZ
θ_h	punto intermedio en el posición angular
φ	ángulo de giro del vector a inicial alrededor de un eje cualquiera que pertenece al plano XY
V	velocidad
v_1	componente del vector velocidad constante en la dirección del eje OX
v_2	componente del vector velocidad constante en la dirección del eje OY
v_3	componente del vector velocidad constante en la dirección del eje OZ
v_x	componente del vector velocidad para los tramos de aceleración/desaceleración en la dirección del eje OX

- v_y componente del vector velocidad para los tramos de
 aceleración/desaceleración en la dirección del eje OY
- v_z componente del vector velocidad para los tramos de
 aceleración/desaceleración en la dirección del eje OZ
- ω velocidad angular de rotación

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	1
 CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, IMPORTANCIA DEL ESTUDIO, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE TRABAJO.....	 4
1.1 Planteamiento del problema.....	5
1.2 Importancia del estudio.....	5
1.3 Objetivos: general y específicos.....	6
1.4 Metodología de trabajo.....	7
 CAPÍTULO II. RESEÑA HISTÓRICA Y ANTECEDENTES.....	 8
2.1 Orígenes de la robótica.....	9
2.2 Desarrollo de la robótica.....	11
2.3 Definición y clasificación.....	15
2.4 Aplicaciones de los robots.....	21
2.5 Antecedentes.....	32
 CAPÍTULO III. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL.....	 34
3.1 Representación de la posición y la orientación en el espacio.....	35
3.2 Matrices de rotación.....	37
3.3 Composición de matrices de rotación.....	44
3.4 Matriz de rotación respecto a un eje arbitrario.....	46
3.5 Interpretación geométrica de las matrices de rotación.....	49
3.6 Coordenadas homogéneas y la matriz de transformación homogénea.....	52

3.7 Interpretación geométrica de las matrices de transformación homogéneas.....	57
3.8 Composición de matrices de transformación homogénea.....	58
3.9 Cuaterniones.....	61
3.10 Utilización de los cuaterniones.....	64
CAPÍTULO IV. EL PROBLEMA CINEMATICO DIRECTO.....	69
4.1 Manipuladores y grados de libertad.....	70
4.2 El problema cinemático directo.....	72
4.3 Ecuaciones cinemáticas para los manipuladores.....	83
4.4 La representación de Denavit-Hartenberg para otros manipuladores.....	90
CAPÍTULO V. EL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO.....	99
5.1 El método geométrico.....	102
5.2 Desacoplo cinemático. Solución para las tres últimas articulaciones.....	114
5.3 Método geométrico aplicado a otros brazos robóticos. Solución para las tres primeras articulaciones.....	120
CAPÍTULO VI. ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS Y MOVIMIENTO.....	136
6.1 Tipos de trayectorias.....	138
6.2 Esquemas de planificación de trayectorias.....	145
6.3 Trayectorias y análisis del movimiento.....	158
6.4 Nociones fundamentales.....	160
6.5 Curvas en el espacio. Parametrización y reparametrización.....	162
6.6 Funciones Vectoriales.....	172
6.7 Métodos numéricos. Esquemas de interpolación polinomial.....	175
6.8 Generación de trayectorias temporales en el espacio.....	177

6.9 Orientación del extremo final del brazo robótico.....	186
6.10 Velocidad y aceleración del extremo final y las articulaciones.....	190
6.11 Matriz Jacobiana. Jacobiano del manipulador.....	197
6.12 Consideraciones finales.....	201
 CAPÍTULO VII. DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS.....	 203
7.1 Etapas en el proceso de análisis.....	204
7.2 Metodología de análisis cinemático.....	206
 CAPÍTULO VIII. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS CINEMÁTICO.....	 215
8.1 Ejemplos de aplicación de la metodología de análisis cinemático.....	222
Ejemplo 8.1.1.....	223
Ejemplo 8.1.2.....	246
Ejemplo 8.1.3.....	250
Ejemplo 8.1.4.....	253
Ejemplo 8.1.5.....	256
8.2 Comprobación de resultados.....	258
CONCLUSIONES.....	261
RECOMENDACIONES.....	263
APENDICE 1.....	264
APENDICE 2.....	269
APENDICE 3.....	274
APENDICE 4.....	283
APENDICE 5.....	297
APENDICE 6.....	302
BIBLIOGRAFÍA.....	307

INDICE DE FIGURAS

CAPITULO II

Figura 2.1. Precursores del concepto de robótica.....	11
Figura 2.2. Sistema tele-manipulador del tipo “maestro-esclavo” usado en la actualidad.....	11
Figura 2.3 Primeros robots industriales modernos.....	13
Figura 2.4. Primeras configuraciones de mecanismos robóticos.....	14
Figura 2.5. Robot SCARA.....	14
Figura 2.6. Movimiento de los distintos elementos en un brazo robótico.....	16
Figura 2.7. Configuraciones frecuentes en robots industriales.....	17
Figura 2.8. Robot PUMA de Unimate.....	18
Figura 2.9. Robots en la industria automotriz.....	21
Figura 2.10. Algunos robots manipuladores de la industria.....	22
Figura 2.11. Algunos robots para operaciones de procesamiento.....	23
Figura 2.12. Brazo robótico utilizado en el transbordador espacial Columbia.....	26
Figura 2.13. Algunos robots espaciales.....	26
Figura 2.14. Robot de exploración submarina Jason Jr.....	27
Figura 2.15. Robot PEBBLES.....	28
Figura 2.16. Sistemas robóticos para intervenciones quirúrgicas.....	29
Figura 2.17. Otros sistemas robóticos utilizados en la medicina.....	30
Figura 2.18. Algunos robots usados en el área militar y policial.....	31

CAPITULO III

Figura 3.1. Representación en tres dimensiones de un vector o punto.....	36
Figura 3.2. Sistemas de coordenadas de referencia y ligado al cuerpo (móvil).....	37
Figura 3.3. Rotación del sistema $OUVW$ alrededor del eje OX un ángulo α	41
Figura 3.4. Rotación respecto de un eje arbitrario.....	47
Figura 3.5 Efecto de la matriz de rotación respecto a un eje cualquiera aplicada a un punto.....	48

Figura 3.6 Interpretación geométrica de la matriz de rotación.....	50
Figura 3.7 Interpretación geométrica de una matriz de transformación homogénea....	57
Figura 3.8 Rotación del punto p alrededor del eje AB.....	67

CAPITULO IV

Figura 4.1. Robot PUMA ilustrando articulaciones y elementos.....	73
Figura 4.2. Tipos de articulaciones.....	74
Figura 4.3. Sistemas de coordenadas de elementos y sus parámetros.....	75
Figura 4.4. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot PUMA.....	81
Figura 4.5. Sistema de coordenadas de la mano [n, s, a].....	86
Figura 4.6. Vistas del robot ABB IRB-140.....	91
Figura 4.7. Dimensiones del robot ABB IRB-140 (medidas en mm).....	91
Figura 4.8. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot ABB IRB-140.....	92
Figura 4.9. Vistas del robot FANUC serie R-2000iA/165 F.....	93
Figura 4.10. Dimensiones del robot FANUC serie R-2000iA/165 F (medidas en mm).....	93
Figura 4.11. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot FANUC serie R-2000iA/165 F.....	94
Figura 4.12. Vistas del robot KUKA KR-100-2 PA.....	95
Figura 4.13. Dimensiones del robot KUKA KR-100-2 PA (medidas en mm).....	96
Figura 4.14. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot KUKA KR-100-2 PA.....	97
Figura 4.15. Dependencia del parámetro de articulación θ_4 en función del valor de θ_3 para un robot paletizador KUKA KR-100-2 PA.....	98

CAPITULO V

Figura 5.1. Definición de diversas configuraciones de brazo.....	105
---	-----

Figura 5.2 Definición del vector p	106
Figura 5.3. Solución para la articulación 1.....	108
Figura 5.4. Solución para la articulación 2.....	110
Figura 5.5. Solución para la articulación 3.....	112
Figura 5.6. Extremo final de un robot PUMA.....	115
Figura 5.7. Extremo final del robot ABB IRB 140 y solución para la articulación 1...	121
Figura 5.8. Solución para la articulación 2 (IRB 140).....	122
Figura 5.9. Solución para la articulación 3 (IRB 140).....	124
Figura 5.10. Extremo final del robot FANUC R-2000iA/165 F y solución para la articulación 1.....	125
Figura 5.11. Solución para la articulación 2 (R-2000iA/165 F).....	126
Figura 5.12. Solución para la articulación 3 (R-2000iA/165 F).....	128
Figura 5.13. Sistema de cuatro barras utilizado en robots paletizadores de cuatro GDL.	130
Figura 5.14. Extremo final del robot KR-100-2 PA y solución para la articulación 1...	131
Figura 5.15. Solución para la articulación 2 (KR-100-2 PA).....	132
Figura 5.16. Solución para la articulación 3 (KR-100-2 PA).....	134
Figura 5.17. Calculo de las coordenadas de la muñeca del robot paletizador KR-100 2PA.....	135

CAPITULO VI

Figura 6.1. Varias formas posibles de ruta para una sola articulación.....	146
Figura 6.2. Perfiles de velocidad y aceleración para un solo segmento cúbico que inicia y termina inmóvil (velocidad cero).....	148
Figura 6.3. Interpolación lineal que requiere de una aceleración infinita.....	151
Figura 6.4. Segmento lineal con mezclas parabólicas.....	152
Figura 6.5. Segmento lineal con mezclas parabólicas.....	152

Figura 6.6. Perfiles de posición, velocidad y aceleración para la interpolación lineal con mezclas parabólicas. El conjunto de curvas de la izquierda está basado en una mayor aceleración durante las mezclas que la utilizada del lado derecho.....	154
Figura 6.7. Sistema de coordenadas intrínsecas.....	160
Figura 6.8. Sistema de coordenadas cartesianas.....	161
Figura 6.9. Curva paramétrica. Traza de un camino.....	163
Figura 6.10. Reparametrización del camino c	165
Figura 6.11 Diagrama de la composición de $\bar{c} = c \circ \varphi$	166
Figura 6.12 La regularidad del camino c no la conserva $\bar{c}$	167
Figura 6.13 Gráfica de curva descrita por c y $\bar{c}$	170
Figura 6.14. Curva descrita por un vector de posición en movimiento.....	173
Figura 6.15. Derivada del vector posición. Velocidad tangente a la trayectoria.....	174
Figura 6.16. Recta en el espacio tridimensional.....	179
Figura 6.17. Arco de circunferencia en un plano cualquiera en el espacio.....	180
Figura 6.18. Circunferencia en un plano perpendicular al eje z	181
Figura 6.19. Circunferencia en un plano perpendicular al eje x	182
Figura 6.20. Circunferencia en un plano perpendicular al eje y	182
Figura 6.21. Interpolación de puntos en el espacio.....	184
Figura 6.22. Determinación de los vectores n y s utilizando el vector a y su plano normal.....	187
Figura 6.23. Esfera de radio uno, con los vectores a inicial y final, y los tres ejes de giro.....	188
Figura 6.24. Orientaciones del extremo del brazo robótico durante el movimiento.....	190
Figura 6.25. Selección de los puntos de interpolación.....	196
Figura 6.26. Matriz Jacobiana directa e inversa.....	198
Figura 6.27. Ecuaciones de posición y orientación expresadas en función de las coordenadas articulares (problema cinemático directo).....	198

Figura 6.28. Derivadas de las ecuaciones de posición y orientación y de las coordenadas articulares en función del tiempo.....	198
Figura 6.29. Matriz Jacobina J	199

CAPITULO VII

Figura 7.1. Orientación relativa de los sistemas de coordenadas i -ésimo e $(i-1)$ -ésimo.....	207
Figura 7.2. Datos geométricos del robot PUMA, necesarios para la aplicación del algoritmo D-H.....	208
Figura 7.3. Diagrama de flujo para los algoritmos de calculo cinemático inverso desarrollados con este trabajo.....	212

CAPITULO VIII

Figura 8.1a. Diferentes modelos de robots con configuración antropomórfica.....	217
Figura 8.1b. Diferentes modelos de robots con configuración antropomórfica.....	218
Figura 8.2. Tiempo de ciclo para un robot Denso de la serie VM.....	219
Figura 8.3. Datos técnicos del robot IRB 6600 de ABB.....	220
Figura 8.4. Dimensiones y área de trabajo del robot IRB 6600 de ABB.....	221
Figura 8.5a. Piezas de la oreja de soporte especial de acero.....	223
Figura 8.5b. Dimensiones de la oreja de soporte especial de acero.....	224
Figura 8.5c. Coordenadas de los puntos por donde pasa el cordón de soldadura...	225
Figura 8.6. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el primer segmento en arco de circunferencia (A-C).....	226
Figura 8.7. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segundo segmento en línea recta (C-D).....	226
Figura 8.8. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el tercer segmento en arco de circunferencia (D-F).....	227
Figura 8.9. Resultados mostrados en la interfaz de usuario de los programas cinemáticos para cada tramo del recorrido.....	227
Figura 8.10. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Tramo A-C.....	228

Figura 8.11. Orientaciones del extremo final del brazo (incluida la herramienta). Tramo A-C.....	229
Figura 8.12. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 1. Tramo A-C.....	230
Figura 8.13. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 2. Tramo A-C.....	231
Figura 8.14. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 3. Tramo A-C.....	232
Figura 8.15. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 4. Tramo A-C.....	233
Figura 8.16. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 5. Tramo A-C.....	235
Figura 8.17. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 6. Tramo A-C.....	236
Figura 8.18. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 5. Tramo A-C.....	236
Figura 8.19. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 6. Tramo A-C.....	237
Figura 8.20. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Tramo C-D.....	238
Figura 8.21. Orientaciones del extremo final del brazo (incluida la herramienta). Tramo C-D.....	238
Figura 8.22. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 1. Tramo C-D.....	238
Figura 8.23. Velocidades de la muñeca en tres puntos del recorrido del segmento C-D.....	240
Figura 8.24. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 2. Tramo C-D.....	241
Figura 8.25. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 3. Tramo C-D.....	242

Figura 8.26. Cambio instantáneo en la velocidad lineal de la muñeca V en el punto C.....	243
Figura 8.27. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 4. Tramo C-D.....	244
Figura 8.28. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 5. Tramo C-D.....	245
Figura 8.29. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 6. Tramo C-D.....	246
Figura 8.30a. Dimensiones de la plancha de acero y de la pieza a cortar.....	247
Figura 8.30b. Coordenadas de los puntos por donde pasa la herramienta de corte.....	247
Figura 8.31. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B).....	248
Figura 8.32. Introducción de los datos en el programa cin_inv_curv.m para analizar el segmento (B-D).....	249
Figura 8.33. Tiempos parciales de recorrido para los segmentos A-B y B-D.....	249
Figura 8.34. Coordenadas de los puntos que recorre el extremo de la pinza (punto p).....	250
Figura 8.35. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B).....	251
Figura 8.36. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (B-C).....	251
Figura 8.37. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (C-D).....	252
Figura 8.38. Tiempos parciales para los recorridos A-B, B-C y C-D.....	252
Figura 8.39. Coordenadas de los puntos de soldadura y orientación de la herramienta.....	253
Figura 8.40. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B).....	254
Figura 8.41 Tiempo de recorrido del segmento A-B.....	254

Figura 8.42. Coordenadas de los puntos por donde pasa el cordón de soldadura.....	256
Figura 8.43. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el segmento (A-B).....	257
Figura 8.44 Tiempo total del trabajo de soldadura.....	258
Figura 8.45. Comprobación de los valores de las posiciones angulares iniciales de las articulaciones en el segmento A-C, a través del programa cinematica_directa_1	259
Figura 8.45. Comprobación de los valores de las posiciones angulares finales de las articulaciones, a través del programa cinematica_directa_1	259

INDICE DE TABLAS

CAPÍTULO IV

Tabla 4.1. Ligaduras de articulación para el robot PUMA de la figura 4.4.....	81
Tabla 4.2. Ligaduras de articulación para el robot ABB IRB-140 de la figura 4.9.....	92
Tabla 4.3. Ligaduras de articulación para el robot FANUC serie R-2000iA de la figura 4.12.....	94
Tabla 4.4. Ligaduras de articulación para el robot KUKA KR-100-2 PA de la figura 4.15.....	96

CAPÍTULO V

Tabla 5.1. Diversas configuraciones de brazo para la articulación 2.....	110
Tabla 5.2. Diversas configuraciones de brazos para la articulación 3.....	113

INTRODUCCIÓN

En la era de desarrollo tecnológico en que vivimos, se debe satisfacer en períodos cortos de tiempo una gran demanda de productos, económicos y de alta calidad. Desde las décadas de los años 1.970 y 1.980, y a partir de la introducción de los mecanismos robóticos en diversos sectores de la industria a comienzos de la década de 1.960, se ha logrado agilizar la producción sin sacrificar la calidad, disminuir los costos de producción e incrementar la seguridad para los trabajadores en algunas tareas. Esto es consecuencia directa de los avances en el diseño e investigación, en el área de la robótica, la cual ha logrado en poco más de 30 años, el desarrollo de mecanismos de gran versatilidad y eficiencia. El diseño de un sistema robótico eficiente, requiere entonces, de la integración de diversas áreas de la ingeniería, entre ellas la mecánica, la informática, la eléctrica, la electrónica, la industrial y de sistemas.

Sin embargo, y antes de abordar el campo de la robótica desde el punto de vista de la ingeniería electrónica o eléctrica, es preciso un estudio inicial desde el punto de vista de la ingeniería mecánica, donde los análisis cinemáticos, dinámicos y de control, proporcionan valiosa información que combinada con la electrónica, optimizan el diseño adecuado de los dispositivos robóticos.

Hoy en día, hay disponibles numerosas investigaciones sobre robótica, gran cantidad de ellas enfocadas hacia los fundamentos electrónicos del movimiento y control, obviando muchas veces el análisis mecánico. Al ser la robótica un área del conocimiento relativamente reciente, ésta ha despertado mucho interés, no solo en profesionales en campos específicos, sino también en personas con pocos conocimientos sobre mecánica e incluso electrónica. Hasta la fecha, pareciera que solo las grandes compañías que producen robots se reservan los conocimientos en este campo, y que solo ellas son capaces de diseñar y construir sistemas bastante

completos. La realidad es que la robótica emplea el conocimiento adquirido por investigadores en diversas áreas de la ciencia, entre ellas ingeniería, con el fin de obtener mecanismos útiles y confiables.

Así, el primer paso en el estudio formal de los mecanismos robóticos, es el análisis cinemático. Para ello, se utilizan diversas herramientas matemáticas de gran robustez y sencillez que permiten obtener relaciones de posición en el espacio entre los distintos elementos de un brazo o de estos respecto a un sistema de referencia fijo. Entre las más importantes se pueden mencionar: la *matriz de transformación homogénea*, utilizada por primera vez por Denavit y Hartenberg (1.955), la cual utiliza el álgebra matricial y vectorial, presentando un método generalizado y sistemático de localización espacial a través de rotaciones y traslaciones; y los *cuaterniones* o *cuaternios*, creados por el irlandés William Rowan Hamilton (1.805 - 1.865) e implementados por Taylor (1.979), muy utilizados en el análisis de mecanismos espaciales por su bajo costo computacional.

En conclusión, el ingeniero mecánico o estudiante de ingeniería precisa contar con una metodología de análisis, ordenada y concisa, que le permita establecer los criterios de diseño y operación aceptables para un mecanismo robótico, en función de parámetros cinemáticos de posición, velocidad y aceleración. El siguiente informe de trabajo especial de grado tiene como objetivo presentar el diseño de dicha metodología para el análisis de mecanismos robóticos entre tres y seis grados de libertad, y para ello está dividido en 8 capítulos.

En el primer capítulo se hace el planteamiento del problema y la importancia de su estudio, los objetivos propuestos y la metodología que se empleará para lograrlos.

En el segundo capítulo se hace una síntesis histórica sobre los mecanismos robóticos: sus orígenes, desarrollo, definición, clasificación y aplicaciones, así como

los antecedentes sobre las investigaciones que sirvieron como base para la realización de este trabajo.

En el tercer capítulo se presentan las herramientas matemáticas básicas y necesarias para describir la localización espacial de objetos, *la matriz de transformación homogénea* y *los cuaterniones*, que permiten realizar el análisis cinemático de los mecanismos robóticos.

En el cuarto capítulo se estudia el problema cinemático directo, empleando las herramientas matemáticas presentadas en el tercer capítulo e introduciendo la representación de Denavit y Hartenberg, para determinar la posición del extremo final dada una configuración de las articulaciones del brazo.

En el quinto capítulo se estudia el problema cinemático inverso y los diversos métodos para determinar la configuración de las articulaciones dada una determinada posición del extremo final de un mecanismo robótico.

En el sexto capítulo se desarrolla el tema sobre el análisis de trayectorias y del movimiento para la realización de trabajos específicos. En este capítulo se estudian las velocidades y aceleraciones de las articulaciones así como del efector final.

En el séptimo capítulo se presenta el diseño de la metodología para realizar el análisis cinemático de mecanismos robóticos, empleando las herramientas matemáticas estudiadas en los capítulos anteriores.

En el octavo capítulo se presentan varios ejemplos de aplicación de la metodología diseñada y del programa computacional desarrollado para tal fin.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, IMPORTANCIA DEL ESTUDIO, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE TRABAJO

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, IMPORTANCIA DEL ESTUDIO, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE TRABAJO

1.1 Planteamiento del problema

Los mecanismos robóticos han reemplazado eficientemente al ser humano en tareas repetitivas que requieren gran precisión, algunas de ellas inclusive de alto riesgo para la salud y seguridad del trabajador. En la actualidad, es necesario mantener ciertos niveles de productividad y calidad en algunas áreas del sector manufacturero, tal es el caso de las industrias automotriz, metalmecánica, informática y electrónica, entre otras. La robótica es la herramienta que permite dar respuesta a esta necesidad.

Es entonces, el ingeniero mecánico el que está en la capacidad de establecer las pautas del comportamiento cinemático del dispositivo robótico en su primera etapa de diseño, aplicando de manera integral los principios de la cinemática de mecanismos y valiéndose de herramientas computacionales.

El problema se centra entonces en determinar y emplear todas las herramientas matemáticas y cinemáticas disponibles, para desarrollar una metodología que garantice un efectivo análisis cinemático de mecanismos robóticos.

1.2 Importancia del estudio

El desarrollo constante de los dispositivos robóticos y su aplicación creciente en numerosas áreas, crea la particular necesidad de estudiar, desde el punto de vista de la ingeniería mecánica su funcionamiento. Este tema de estudio tiene gran interés

teórico y de aplicación práctica. Le permite a la Escuela de Ingeniería Mecánica contar con un estudio teórico detallado sobre la cinemática espacial aplicada a la robótica, así como de una metodología de análisis cinemático que agilice los posteriores estudios dinámicos y de control. Desde el punto de vista de la aplicación práctica, permite diseñar y construir sistemas físicos, mecánicamente versátiles y confiables.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar una metodología para el análisis cinemático de mecanismos robóticos que posean como máximo seis grados de libertad.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Revisar toda la información disponible y pertinente referente a la Cinemática aplicada a la Robótica, haciendo énfasis en los aspectos matemáticos y tecnológicos.
- Establecer, a partir de la información obtenida, los criterios y procedimientos para realizar análisis cinemáticos de mecanismos robóticos, y de esta manera proponer y fijar procedimientos estándar de diseño.
- Elaborar una metodología que permita al ingeniero o estudiante de ingeniería la rápida aplicación de los principios de la cinemática robótica y de esta manera seguir un procedimiento para realizar un análisis cinemático eficiente.
- Desarrollar un código computacional que permita obtener valores de los parámetros cinemáticos y de igual forma que represente los movimientos realizados por el brazo robótico.

- Realizar la validación del programa mediante el uso de software de simulación robótica y gráfica tridimensional disponibles en internet basados en lenguajes de programación OpenGL, C++, VC++ y Matlab (tales como: Robot Works, Roboworks, Kinematix 4.0, Makerobot, Robotics Toolbox for Matlab, entre otros), así como la comparación con la data obtenida de robots industriales en funcionamiento.

1.4 Metodología de trabajo

Para cumplir con los objetivos planteados se aplica la siguiente metodología de trabajo:

- Recopilación de información referente a la cinemática de mecanismos robóticos.
- Desarrollo teórico de las herramientas matemáticas utilizadas para el análisis cinemático de mecanismos robóticos, tanto para el problema cinemático directo como para el inverso.
- Análisis de las trayectorias y el movimiento del extremo final del brazo robot, empleando diversas herramientas matemáticas (matrices de transformación homogénea, parametrización y reparametrización de curvas en el espacio, polinomios de interpolación y funciones vectoriales), con el objetivo de calcular la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, de las articulaciones del brazo robot.
- Diseño de la metodología de análisis cinemático para mecanismos robóticos entre tres y seis grados de libertad.
- Desarrollo de un programa computacional que permita aplicar la metodología de análisis diseñada, utilizando como programa base el software MatLab versión 7.

CAPITULO II

RESEÑA HISTÓRICA Y ANTECEDENTES

CAPITULO II

RESEÑA HISTÓRICA Y ANTECEDENTES

2.1 Orígenes de la robótica

Por siglos el ser humano ha construido máquinas que imitan las partes del cuerpo humano. Los antiguos egipcios unieron brazos mecánicos a las estatuas de sus dioses. Estos brazos fueron operados por sacerdotes, quienes clamaban que el movimiento de estos era inspiración de sus dioses. Los griegos construyeron estatuas que operaban con sistemas hidráulicos, los cuales se utilizaban para fascinar a los adoradores de los templos, a estas máquinas se les denominaban *autómatos*, del cual deriva la palabra autómata (máquina que imita la figura y movimientos de un ser animado).

Durante los siglos XVII y XVIII en Europa fueron contruidos muñecos mecánicos muy ingeniosos que tenían algunas características de robots. Jacques de Vaucanson (1.709-1.782) construyó varios músicos de tamaño humano a mediados del siglo XVIII. Esencialmente se trataba de robots mecánicos diseñados para un propósito específico: la diversión.

El relojero suizo Pierre Jaquet Droz (1.721-1.790) y sus hijos Henri-Louis y Jaquet construyeron diversos muñecos capaces de escribir, dibujar y tocar diversas melodías en un órgano. En 1.805, Henri Maillardert construyó una muñeca mecánica que era capaz de hacer dibujos. Una serie de levas se utilizaban como “el programa” para el dispositivo en el proceso de escribir y dibujar. Estas creaciones mecánicas de forma humana deben considerarse como invenciones aisladas que reflejan el genio de hombres que se anticiparon a su época.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX, hubo otras invenciones mecánicas durante la revolución industrial, creadas por mentes de igual genio, muchas de las cuales estaban dirigidas al sector de la producción textil. Entre ellas se puede citar la hiladora giratoria de Hargreaves (1.770), la hiladora mecánica de Crompton (1.779), el telar mecánico de Cartwright (1.785) y el telar de Jacquard (1.801). Este último utilizaba una cinta de papel perforada como un programa para las acciones de la máquina. Es a partir de este momento cuando se empiezan a utilizar dispositivos automáticos en la producción, dando paso a la automatización industrial.

La palabra **robot** fue usada por primera vez en el año 1.921 por el escritor checo Karel Capek (1.830-1.938) (Figura 2.1a), en el estreno de su obra, *Rossum's Universal Robot (R.U.R)*, en el teatro nacional de Praga. Su origen es la palabra eslava *robota*, que se refiere al trabajo realizado de manera forzada. El término posiblemente hubiera caído en desuso si no hubiese sido por los escritores del género literario de la ciencia ficción, algunos de los cuales retomaron la palabra, e incluso el mensaje de la obra de Capek: la dominación de la especie humana por seres hechos a su propia imagen.

Pero sin duda alguna, fue el escritor estadounidense de origen ruso Isaac Asimov (1.920-1.992) (Figura 2.1b) el máximo impulsor de la palabra robot. La imagen de robot que aparece en su obra es la de una máquina bien diseñada y con una seguridad garantizada que actúa de acuerdo con tres principios. Estos principios fueron denominados por Asimov las **Tres Leyes de la Robótica**, y son:

1.- Un robot no puede actuar contra un ser humano o, mediante la inacción, que un ser humano sufra daños.

2.- Un robot debe obedecer las órdenes dadas por los seres humanos, salvo que estén en conflictos con la primera ley.

3.- Un robot debe proteger su propia existencia, a no ser que esté en conflicto con las dos primeras leyes.



(a) Karel Capek



(b) Isaac Asimov

Figura 2.1. Precusores del concepto de robótica.

2.2 Desarrollo de la robótica

El robot como máquina lleva un desarrollo independiente del término robot. Tras los primeros autómatas mencionados anteriormente, casi todos de aspecto humano, los progenitores más directos de los robots fueron los **tele-manipuladores**, diseñados con el objetivo de realizar tareas que ponían en riesgo la salud de los seres humanos, como el manipular elementos radioactivos. Estos sistemas eran del tipo "maestro-esclavo", diseñados para reproducir fielmente los movimientos de la mano y brazos realizados por un operario humano situado en la zona segura (Figura 2.2).



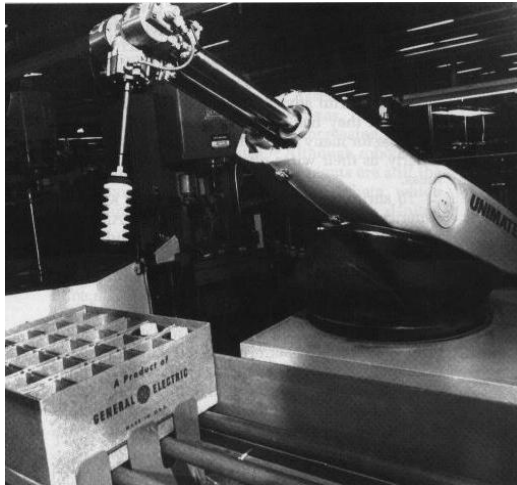
Figura 2.2. Sistema tele-manipulador del tipo “maestro-esclavo” usado en la actualidad.

Tras los avances en la tecnología, donde se incluyen las poderosas computadoras, los actuadores de control retroalimentados, la transmisión de potencia a través de engranes y la tecnología en sensores, han contribuido a flexibilizar los mecanismos autómatas para desempeñar tareas dentro de la industria. Son varios los factores que intervienen para que se desarrollaran los primeros robots en la década de los 50. La investigación en inteligencia artificial desarrolló maneras de emular el procesamiento de información humana con computadoras e inventó una variedad de mecanismos para probar sus teorías.

Los primeros trabajos que condujeron a los robots industriales de hoy día se remontan al periodo que siguió inmediatamente a la segunda guerra mundial. Al final los años finales de la década de los cuarenta, comenzaron programas de investigación en Oak Ridge (Estados Unidos) y Argonne National Laboratories (Francia). En 1.952 el Instituto de Tecnología de Massachussets (M.I.T.) demostró una máquina prototipo de control numérico, tras varios años de desarrollo. Años más tarde, en 1.954, Goertz del Argonne National Laboratory hizo uso de la tecnología electrónica y del servocontrol sustituyendo la transmisión mecánica por otra eléctrica y desarrollando así el primer tele-manipulador con servocontrol bilateral. Otro de los pioneros de la tele-manipulación fue Ralph Mosher, ingeniero de General Electric, que en 1.958 desarrolló un dispositivo denominado “Handy-Man”, consistente en dos brazos mecánicos tele-operados mediante un control maestro del tipo denominado exoesqueleto (esqueleto externo).

Junto a la industria nuclear, a lo largo de los años sesenta, la industria submarina y la industria espacial comenzaron a interesarse por el uso de tele-manipuladores. El trabajo sobre manipuladores maestro-esclavo fue seguido rápidamente por sistemas más capaces de operaciones repetitivas autómatas, que a su vez eran programables, y por lo tanto, la secuencia de pasos podía ser cambiada. La sustitución del operador por un programa de ordenador que controlase los movimientos del manipulador dió paso al concepto moderno de robot.

La primera patente de un dispositivo robótico fue solicitada en marzo de 1.954 por el inventor británico C.W. Kenward. Dicha patente fué emitida en el Reino Unido en 1.957, sin embargo, fue George C. Devol, ingeniero norteamericano, inventor y autor de varias patentes, el que estableció las bases del robot industrial moderno. En 1.954 Devol concibió la idea de un dispositivo de transferencia de artículos programada que se patentó en Estados Unidos en 1.961 (Figura 2.3a). Por su parte, Europa tuvo un despertar más tardío en el área de la Robótica. En 1.973 la firma sueca ASEA construyó el primer robot con accionamiento totalmente eléctrico (figura 2.3b) y en 1.980 se fundó la Federación Internacional de Robótica con sede en Estocolmo, Suecia.



(a) Dispositivo de Devol

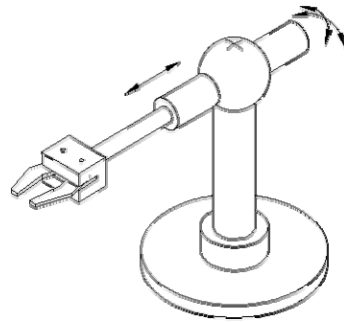


(b) Robot IRB 6 de la firma sueca ASEA

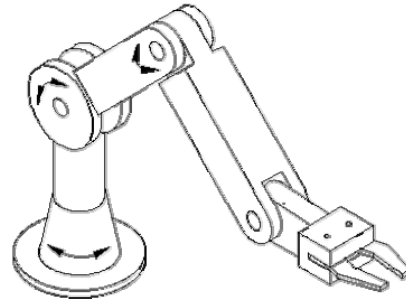
Figura 2.3. Primeros robots industriales modernos

La configuración de los primeros robots respondía a las denominadas configuraciones esférica y antropomórfica (Figura 2.4), de uso especialmente válido para la manipulación. En 1.982, el profesor Makino de la Universidad Yamanashi de Japón, desarrolla el concepto de robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm) (Figura 2.5) que busca un robot con un número reducido en grados de libertad (3 ó 4), un costo limitado y una configuración orientada al ensamblado de piezas. Uno de los objetivos del Profesor Makino era que, al simplificar los grados de

libertad, pudieran en un futuro hacerse estudios cinemáticos para optimizar los diseños.



(a) Esférica



(b) Antropomórfica

Figura 2.4. Primeras configuraciones de mecanismos robóticos.

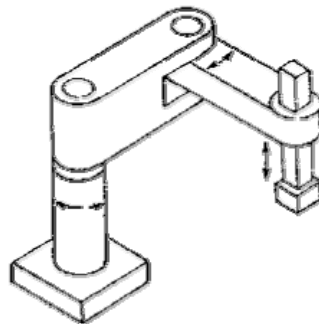


Figura 2.5. Robot SCARA.

La evolución de los robots industriales desde sus comienzos, ha sido vertiginosa. En poco más de 30 años las investigaciones y desarrollos sobre robótica industrial han permitido que los robots tomen posiciones en casi todas las áreas productivas y tipos de industria. En pequeñas o grandes fábricas, los robots pueden sustituir al hombre en aquellas tareas repetitivas y hostiles, adaptándose inmediatamente a los cambios de producción solicitados por la demanda variable y la necesidad de conseguir productos acabados de calidad uniforme.

Cuando se comenzó a programar los movimientos de los robots (específicamente brazos y pinzas robóticas) se hizo de manera bastante empírica, es decir, se tomaban posiciones, velocidades y aceleraciones del robot a medida que se iban programando dichas variables y se refinaba la precisión mediante calibración mecánica y electrónica. Posteriormente, avances en el área del álgebra matricial y la aplicación de técnicas computacionales en la cinemática de mecanismos, condujo a una nueva concepción en el diseño de mecanismos robóticos.

Los desarrollos de la robótica han apuntado a aumentar su movilidad, destreza y autonomía de sus acciones. La mayor parte de los robots actuales son con base estática, y se utilizan en aplicaciones industriales tales como ensamblado, soldadura, alimentación de máquinas herramientas, entre otros. Sin embargo, existen otro tipo de aplicaciones que han hecho evolucionar en gran medida tanto la concepción de los robots como su propia morfología. Entre estos robots dedicados a aplicaciones no industriales destacan los robots espaciales, robots para aplicaciones submarinas y subterráneas, robots militares, aplicaciones médicas, aplicaciones agrícolas, entre otras.

2.3 Definición y Clasificación

2.3.1 Definición

Existen ciertas dificultades a la hora de establecer una definición formal de lo que es un robot industrial, ya que su evolución ha obligado a diferentes actualizaciones de la misma. De las diversas definiciones, la más comúnmente aceptada posiblemente sea la de la Asociación de Industrias Robóticas (RIA), según la cual:

“Un robot industrial es un manipulador multi funcional reprogramable, capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas”

Esta definición coincide con la del Robot Institute of America, así como con la de diversas organizaciones internacionales tales como: Organización Internacional de Estándares (ISO), Asociación Francesa de Normalización (AFNOR) y la Federación Internacional de Robótica, con ligeras variantes en cuanto a la especificación de los grados de libertad o cantidad de ejes que pueden posicionar y los diversos trabajos a realizar.

En síntesis, un robot industrial es un manipulador reprogramable de uso general, capaz de realizar varias tareas y que consiste en algunos elementos rígidos o eslabones conectados en serie mediante articulaciones prismáticas o de revolución. El final de la cadena cinemática está fijo a una base soporte, mientras que el otro extremo está libre y equipado con una herramienta para manipular objetos o realizar tareas de montaje. El movimiento de las articulaciones resulta en un movimiento relativo de los distintos elementos, que pueden ser de desplazamiento, de giro, o de una combinación de ambos (Figura 2.6).

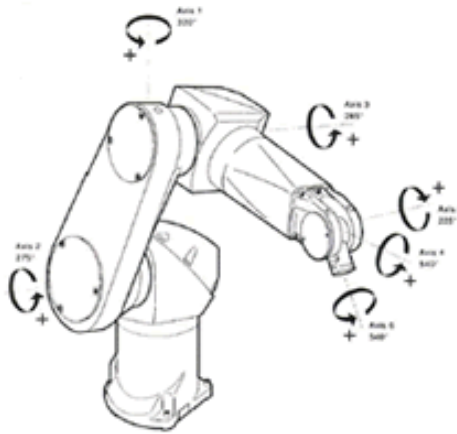


Figura 2.6. Movimiento de los distintos elementos en un brazo robótico

Mecánicamente, un robot se compone de un brazo y una muñeca más una herramienta, guardando cierta similitud con la anatomía del brazo humano, lo que en ocasiones, para hacer referencia a los distintos elementos que componen el robot, se usan términos como cuerpo, brazo codo y muñeca (Figura 2.6).

A continuación se muestran algunas de las configuraciones más frecuentes de robots industriales, las denominaciones de los tres primeros (a, b y c) se originan por la forma de determinar el movimiento de las coordenadas del extremo final del brazo (Figura 2.7).

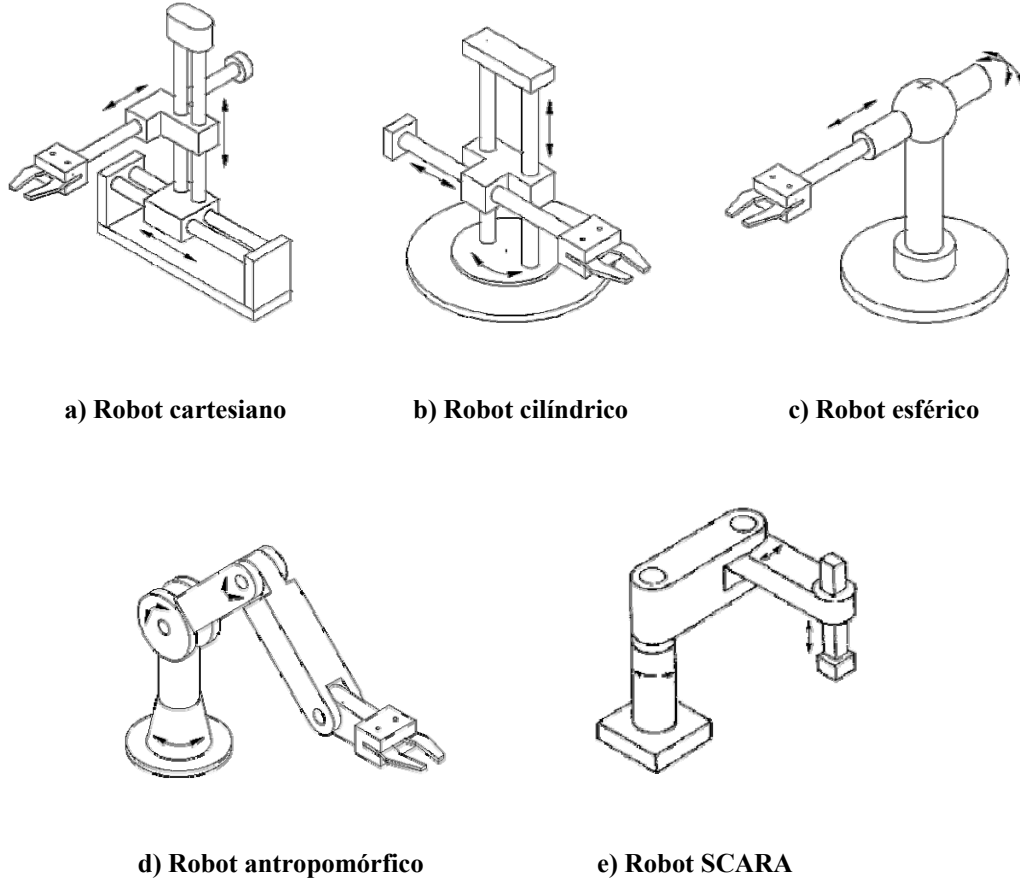


Figura 2.7. Configuraciones frecuentes en robots industriales

De estas configuraciones, la más comúnmente usada en la industria por su amplio rango de movimientos y la capacidad de ser programada para realizar un variado número de tareas, es la antropomórfica. El más conocido de estos robots es el PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) de Unimate (Figura 2.8) que cuenta con 6 grados de libertad y que será utilizado como modelo para el estudio de los problemas cinemáticos directo e inverso en los capítulos cuatro y cinco.

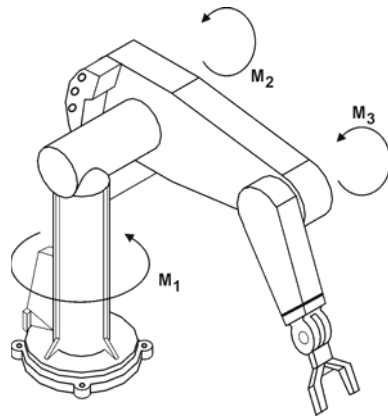


Figura 2.8. Robot PUMA de Unimate.

2.3.2 Clasificación

Los robots han sido clasificados de acuerdo a su *generación*, a su *nivel de inteligencia*, a su *nivel de control* y a su *nivel de lenguaje de programación*. Estas clasificaciones reflejan la potencia del software en el controlador, en particular, la sofisticada interacción de los sensores.

La *generación* de un robot se determina por el orden histórico de desarrollos en la robótica. Cinco generaciones son normalmente asignadas a los robots industriales. A saber:

1.- Robots Play-back, los cuales repiten una secuencia de instrucciones grabadas, como un robot utilizado en recubrimiento por spray o soldadura por arco. Estos robots comúnmente tienen un control de lazo abierto.

2.- Robots controlados por sensores, estos tienen un control en lazo cerrado de movimientos manipulados, y toman decisiones basados en datos obtenidos por sensores.

3.- Robots controlados por visión, donde los robots pueden manipular un objeto al utilizar información desde un sistema de visión.

4.- Robots controlados adaptablemente, donde los robots pueden automáticamente reprogramar sus acciones sobre la base de los datos obtenidos por los sensores.

5.- Robots con inteligencia artificial, donde los robots utilizan las técnicas de inteligencia artificial para tomar sus propias decisiones y resolver problemas.

La tercera generación es utilizada en la industria, la cuarta se desarrolla en los laboratorios de investigación, y la quinta generación es un gran sueño.

Sobre la base de su *nivel de inteligencia*, la Asociación de Robots Japonesa (JIRA) ha clasificado a los robots dentro de seis clases:

1.- Dispositivos de manejo manual, controlados por una persona.

2.- Robots de secuencia arreglada.

3.- Robots de secuencia variable, donde un operador puede modificar la secuencia fácilmente.

4.- Robots regeneradores, donde el operador humano conduce el robot a través de la tarea.

5.- Robots de control numérico, donde el operador alimenta la programación del movimiento.

6.- Robots inteligentes, los cuales pueden entender e interactuar con cambios en el medio ambiente.

Los programas en el controlador del robot pueden ser agrupados de acuerdo al *nivel de control* que realizan, de la siguiente manera:

1.- Nivel de inteligencia artificial, donde el programa aceptará un comando como "levantar el producto" y descomponerlo dentro de una secuencia de comandos de bajo nivel basados en un modelo estratégico de las tareas.

2.- Nivel de modo de control, donde los movimientos del sistema son modelados, para lo que se incluye la interacción dinámica entre los diferentes mecanismos, trayectorias planeadas, y los puntos de asignación seleccionados.

3.- Niveles de servosistemas, donde los actuadores controlan los parámetros de los mecanismos con el uso de una retroalimentación interna de los datos obtenidos por los sensores, y la ruta es modificada sobre la base de los datos que se obtienen de sensores externos. Todas las detecciones de fallas y mecanismos de corrección son implementados en este nivel.

En la clasificación final se considerará el ***nivel del lenguaje de programación***. La clave para una aplicación efectiva de los robots, para una amplia variedad de tareas, es el desarrollo de lenguajes de alto nivel. Existen muchos sistemas de programación de robots, aunque la mayor parte del software más avanzado se encuentra en los laboratorios de investigación. Los sistemas de programación de robots caen dentro de tres clases:

1.- Sistemas guiados, en el cuál el usuario conduce al robot a través de los movimientos a ser realizados.

2.- Sistemas de programación de nivel-robot, en los cuales el usuario escribe un programa de computadora al especificar el movimiento y el sensado.

3.- Sistemas de programación de nivel-tarea, en el cual el usuario especifica la operación por sus acciones sobre los objetos que el robot manipula

2.4 Aplicaciones de los robots

Los robots son utilizados en una diversidad de aplicaciones, desde robots tortugas en los salones de clases, robots soldadores en la industria automotriz, hasta brazos tele-operados en el transbordador espacial.

Cada robot lleva consigo su problemática propia y sus soluciones afines; no obstante que mucha gente considera que la automatización de procesos a través de robots está en sus inicios, es un hecho innegable que la introducción de la tecnología robótica en la industria, ya ha causado un gran impacto. En este sentido la industria Automotriz desempeña un papel preponderante (Figura 2.9).



Figura 2.9. Robots en la industria automotriz.

A continuación se reseñan las áreas más importantes donde destaca la aplicación de la robótica.

2.4.1 Industria

Los robots son utilizados para una diversidad de procesos industriales. Para transferencia o transporte de materiales de una posición a otra, carga y/o descarga de máquinas en operaciones de mecanizado, manejo de materiales peligrosos o frágiles,

moldeado en la industria plástica. Todos estos trabajos requieren que el efector final (extremo) del robot sea una pinza. En la figura 2.10 se muestran algunos de estos robots.

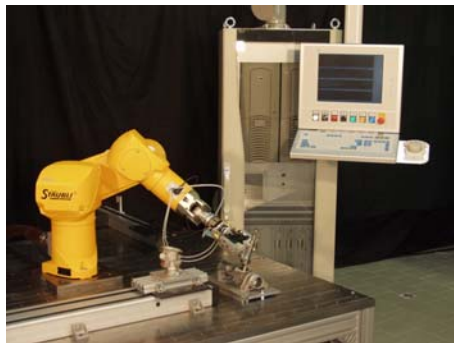
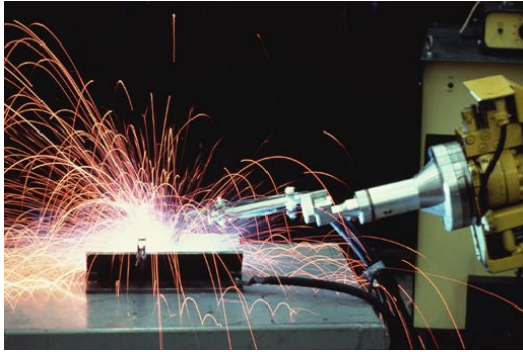


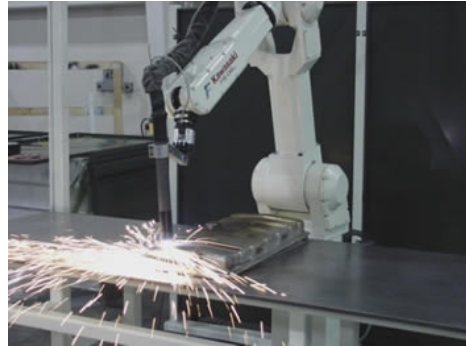
Figura 2.10. Algunos robots manipuladores de la industria.

Para operaciones de procesamiento en las cuales el robot efectúa trabajos sobre piezas, como son: la soldadura de punto y soldadura de arco continua, recubrimiento con spray, taladro, acanalado, y otras aplicaciones de mecanizado. Rectificado, pulido, desbarbado, cepillado y operaciones similares. Remachado, Corte por chorro de agua y corte por láser. Estos trabajos casi siempre necesitan que el

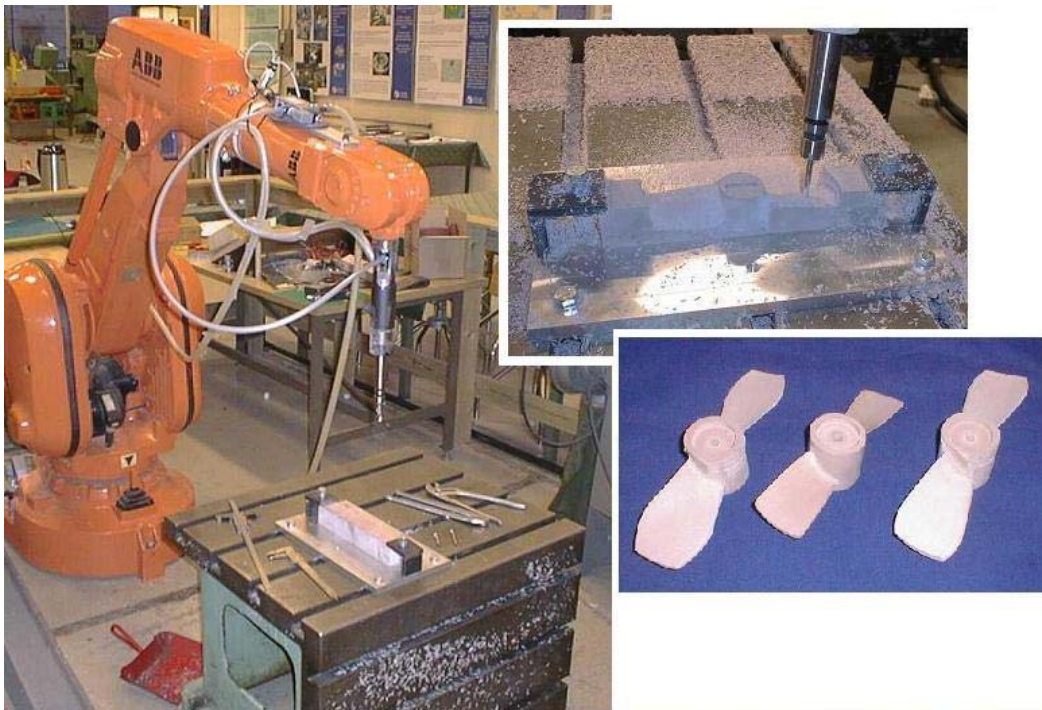
efector final (extremo) del robot sea una herramienta en lugar de una pinza. Algunos de estos robots se muestran en la figura 2.11.



(a) Soldadura por arco



(b) Corte con plasma



(c) Para operaciones de mecanizado

Figura 2.11. Algunos robots para operaciones de procesamiento.

2.4.2 Laboratorios

Los robots están encontrando un gran número de aplicaciones en los laboratorios. Llevan a cabo con efectividad tareas repetitivas como la colocación de tubos de pruebas, dentro de los instrumentos de medición. En ésta etapa de su desarrollo, los robots son utilizados para realizar procedimientos manuales automatizados. Un típico sistema de preparación de muestras consiste de un robot y una estación de laboratorio, la cual contiene balanzas, dispensadores, centrifugadores, tubos de pruebas, etc.

Las muestras son movidas desde la estación de laboratorios por el robot bajo el control de procedimientos de un programa. Los fabricantes de estos sistemas aseguran tener tres ventajas sobre la operación manual: incrementan la productividad, mejoran el control de calidad y reducen la exposición del ser humano a sustancias químicas nocivas.

Las aplicaciones subsecuentes incluyen la medición del Ph, viscosidad, y el porcentaje de sólidos en polímeros, preparación de plasma humano para muestras a ser examinadas, calor, flujo, peso y disolución de muestras para presentaciones espectrométricas.

2.4.3 Manipuladores cinemáticos

La tecnología robótica encontró su primera aplicación en la industria nuclear con el desarrollo de teleoperadores para manejar material radiactivo. Los robots más recientes han sido utilizados para soldar a control remoto y la inspección de tuberías en áreas de alta radiación. El accidente en la planta nuclear de Three Mile Island en Pennsylvania en 1.979 estimuló el desarrollo y aplicación de los robots en la industria nuclear. El reactor numero 2 (TMI-2) perdió su enfriamiento, y provocó la destrucción de la mayor parte del reactor, y dejó grandes áreas del reactor contaminadas, inaccesibles para el ser humano. Debido a los altos niveles de radiación, las tareas de limpieza solo eran posibles por medios remotos. Varios robots

y vehículos controlados remotamente han sido utilizados para tal fin en los lugares donde ha ocurrido un accidente de este tipo. Ésta clase de robots son equipados en su mayoría con sofisticados equipos para detectar niveles de radiación, cámaras, e incluso llegan a traer a bordo un mini laboratorio para hacer pruebas.

2.4.4 Agricultura

Para muchos la idea de tener un robot agricultor es ciencia ficción, pero la realidad es muy diferente; o al menos así parece ser para el Instituto de Investigación Australiano, el cual ha invertido una gran cantidad de dinero y tiempo en el desarrollo de este tipo de robots. Entre sus proyectos se encuentra ORACLE, una máquina que esquila ovejas. La trayectoria del cortador sobre el cuerpo de las ovejas se planea con un modelo geométrico de la oveja.

Para compensar el tamaño entre la oveja real y el modelo, se tiene un conjunto de sensores que registran la información de la respiración del animal, a la vez que su tamaño, ésta es enviada a una computadora que realiza las compensaciones necesarias y modifica la trayectoria del cortador en tiempo real.

Por su parte en Francia se hacen aplicaciones de tipo experimental para incluir a los robots en la siembra, y poda de los viñedos, como en la pizca de la manzana.

2.4.5 Industria espacial

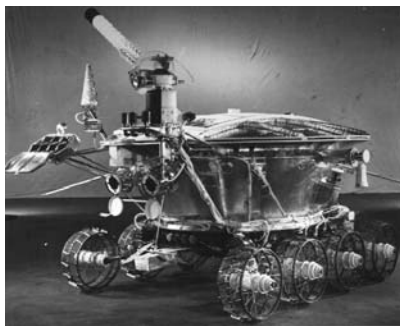
La exploración espacial posee problemas especiales para el uso de robots. El medio ambiente es hostil para el ser humano, quien requiere un equipo de protección muy costoso, tanto en la Tierra como en el Espacio. Muchos científicos han hecho la sugerencia de que es necesario el uso de Robots para continuar con los avances en la exploración espacial; pero como todavía no se llega a un grado de automatización tan precisa para ésta aplicación, el ser humano aún no ha podido ser reemplazado por éstos. Por su parte, son los teleoperadores los que han encontrado aplicación en los transbordadores espaciales.

En Marzo de 1.982 el transbordador Columbia fué el primero en utilizar este tipo de robots (Figura 2.12), aunque el ser humano participa en la realización del control de lazo cerrado. Algunas investigaciones están encaminadas al diseño, construcción y control de vehículos autónomos, los cuales llevarán a bordo complejos laboratorios y cámaras muy sofisticadas para la exploración de otros planetas.

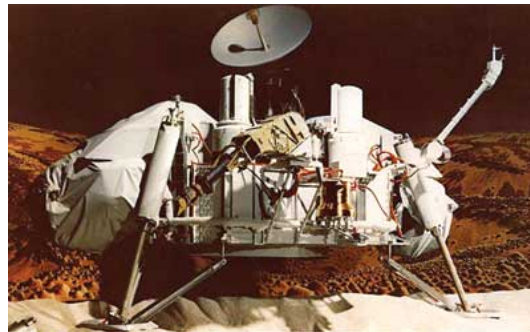


Figura 2.12. Brazo robótico utilizado en el transbordador espacial Columbia

En Noviembre de 1.970 los rusos consiguieron el alunizaje del Lunokhod 1 (Figura 2.13a), el cual poseía cámaras de televisión, sensores y un pequeño laboratorio, era controlado remotamente desde la tierra.



(a) Lunokhod (ruso)



(b) Viking 1 (norteamericano)

Figura 2.13. Algunos robots espaciales

En Julio de 1.976, los norteamericanos aterrizaron en Marte el Viking 1 (Figura 2.13b), llevando a bordo un brazo robotizado, el cual recogía muestras de

piedra, tierra y otros elementos, los cuales eran analizadas en el laboratorio que fue acondicionado en el interior del robot. Por supuesto, también contaba con un equipo muy sofisticado de cámaras de vídeo.

2.4.6 Vehículos submarinos

Dos eventos durante el verano de 1.985 provocaron el aumento por el interés de los vehículos submarinos. En el primero - Un avión de la Air Indian se estrelló en el Océano Atlántico cerca de las costas de Irlanda - un vehículo submarino guiado remotamente, normalmente utilizado para el tendido de cable, fue utilizado para encontrar y recobrar la caja negra del avión. El segundo fue el descubrimiento del Titanic en el fondo de un cañón, donde había permanecido después del choque con un témpano de hielo en 1.912, cuatro kilómetros abajo de la superficie. Un vehículo submarino, denominado Jason Jr., fue utilizado para encontrar, explorar y filmar el hallazgo (Figura 2.14).



Figura 2.14. Robot de exploración submarina Jason Jr.

En la actualidad muchos de estos vehículos submarinos se utilizan en la inspección y mantenimiento de tuberías que conducen petróleo, gas o aceite en las plataformas oceánicas; en el tendido e inspección del cableado para comunicaciones, para investigaciones geológicas y geofísicas en el suelo marino.

2.4.7 Educación

Los robots están apareciendo en los salones de clases de tres formas distintas. Primero, los programas educacionales que utilizan la simulación de control de robots como un medio de enseñanza. El segundo y de uso más común es el uso del robot tortuga en conjunción con el lenguaje LOGO para enseñar ciencias computacionales. LOGO fue creado con la intención de proporcionar al estudiante un medio natural y divertido en el aprendizaje de las matemáticas.

En tercer lugar está el uso de los robots en los salones de clases. Una serie de manipuladores de bajo costo, robots móviles, y sistemas completos han sido desarrollados para su utilización en los laboratorios educacionales. Entre estos se puede mencionar a PEBBLES, robot que permite a los alumnos con problemas físicos o de educación especial recibir clases e interactuar con el profesor y los compañeros a distancia (Figura 2.15).



Figura 2.15. Robot PEBBLES.

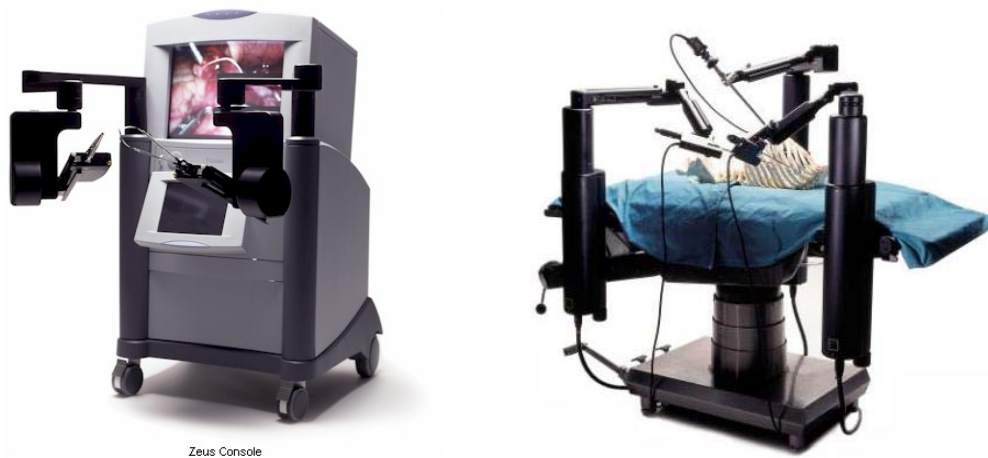
2.4.8 Medicina

Los sistemas Da Vinci y Zeus (Figura 2.16) permiten a los cirujanos realizar operaciones laparoscópicas a través de incisiones muy pequeñas, disminuyendo el

riesgo de infección, logrando cirugías mas rápidas y menos invasivas lo que incide positivamente en el tiempo que requiere el paciente para recuperarse. El sistema PENELOPE es otro tipo de robot que asiste al cirujano y permite el control eficiente del instrumental quirúrgico en la sala de operaciones (Figura 2.17a).



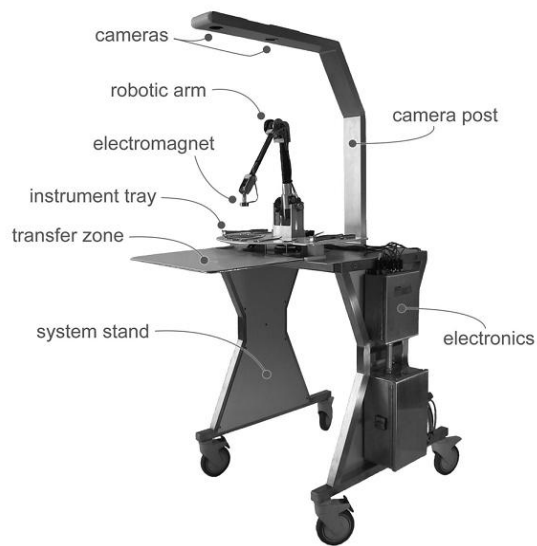
(a) Sistema Da Vinci



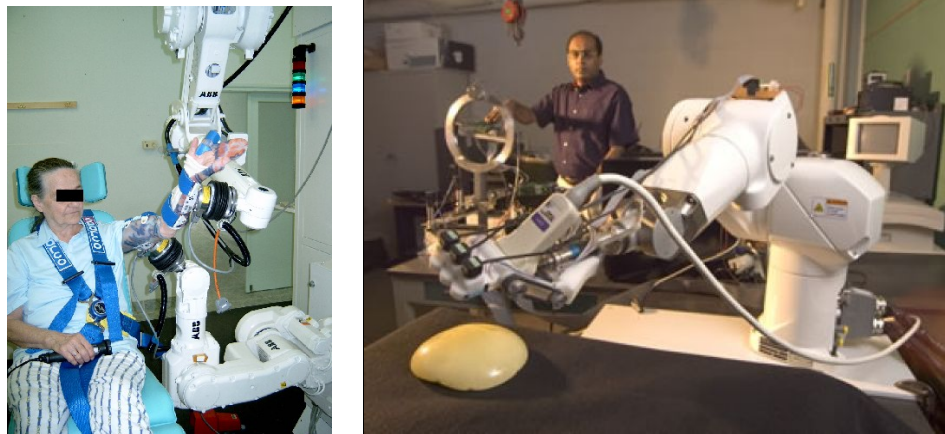
(b) Sistema Zeus

Figura 2.16. Sistemas robóticos para intervenciones quirúrgicas.

También existen Robots capaces de realizar exámenes médicos e incluso ayudar en la rehabilitación de pacientes (Figura 2.17b).



(a) Robot PENELOPE para el manejo de instrumentos quirúrgicos.



(b) Robots usados en la rehabilitación de pacientes y para examen de mamas.

Figura 2.17. Otros sistemas robóticos utilizados en la medicina.

Más recientemente, la robótica ha contribuido con valiosos aportes en otros dos campos: el militar y policial, y la medicina.

2.4.9 Militar y Policial

Los dispositivos en esta área son usados para la desactivación de minas o artefactos explosivos, para la inspección de infraestructuras dañadas por desastres

naturales y rescate de víctimas o el manejo de situaciones con individuos armados y peligrosos. Algunos de estos robots tienen la capacidad de portar armamento y realizar ataques con gran precisión. En la figura 2.18 se muestran algunos de ellos.



(a) El PACK BOT es un robot de gran resistencia y agilidad.



(b) Robot TALON en diferentes configuraciones.



(c) Avión no tripulado PREDATOR utilizado para reconocimiento y ataque aéreo.

Figura 2.18. Algunos robots usados en el área militar y policial

Lo anteriormente desarrollado nos da una noción de la importancia que ha adquirido la robótica en los últimos años, con su creciente aplicación en diversas áreas de la tecnología, ingeniería, medicina, entre otros.

2.5 Antecedentes

Desde sus inicios con los egipcios y los griegos, pasando por las invenciones europeas de Jacques de Vaucanson, Pierre Jaquet Droz, Henri Maillardet, Cartwright y Jacquard, entre los siglos XVII y XIX, hasta la introducción formal del término robot en 1.921 (Karel Capek) y el establecimiento de las tres leyes de la robótica por Isaac Asimov, los desarrollos robóticos fueron meramente empíricos. Es a partir de la década de los años 1.950 cuando se desarrolla la robótica empleando áreas del conocimiento científico (matemática, física e ingeniería). Esto quedó demostrado con la introducción en 1.952 del primer control numérico que dio paso a la era de la automatización y la concepción de un dispositivo de transferencia de artículos programada en 1.954 por el ingeniero norteamericano George C. Devol.

En 1.955 Denavit-Hartenberg introducen un método de análisis cinemático que permite determinar la posición y orientación en el espacio del extremo final de un brazo robótico, mediante el uso de matrices de transformación homogéneas. Este método utiliza los parámetros de Denavit-Hartenberg y es la convención aceptada y utilizada por la mayoría de los mecanismos robóticos en la actualidad. De esta forma se puede estudiar de manera rápida y eficiente la cinemática directa de un brazo robótico.

Desde de la década de 1.980 hasta la fecha y a pesar de los grandes avances en el área de la robótica, la mayoría de los trabajos de investigación sobre mecanismos robóticos se limitan a estudiar la cinemática de manera directa o indirecta, sin la posibilidad de analizar el movimiento, desde el punto de vista cinemático, en función del tiempo o en el mejor de los casos realizar un análisis incompleto, que proporciona

información de una utilidad muy limitada. Resolver este problema permite abordar la dinámica del mecanismo robótico, así como desarrollar los algoritmos de control, de manera más rápida y eficiente.

En la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central de Venezuela no existen antecedentes de trabajos de investigación sobre la cinemática de mecanismos robóticos.

CAPITULO III

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL

CAPITULO III

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL

Conocer la posición y orientación del extremo del robot con respecto a su base, es de especial interés para el correcto movimiento y manipulación de piezas en el espacio. Se aprecia entonces la necesidad de contar con una serie de herramientas matemáticas lo suficientemente potentes para obtener de forma sencilla relaciones espaciales entre distintos objetos y en especial entre éstos y el manipulador.

En el siguiente capítulo se introduce el concepto de matriz *de transformación homogénea*, necesaria para la representación conjunta de posición y orientación, junto con sus propiedades y aplicaciones. Se trata de una herramienta muy útil para representar transformaciones espaciales, sin embargo, es necesario resaltar que esta es de aplicación general para el tratamiento de problemas de localización espacial, así que no son de aplicación exclusiva en el campo de la robótica, estando su uso ampliamente extendido en otros campos, como por ejemplo, en el de gráficos por computador.

De igual forma, se hace una breve explicación de los denominados *cuaternios* o *cuaterniones*, un método alternativo de gran economía computacional utilizado incluso por algunos robots comerciales para la representación de orientación.

3.1 Representación de la posición y la orientación en el espacio

La forma más intuitiva y utilizada de especificar la posición de un punto son las coordenadas cartesianas. Si se trabaja en el espacio (tres dimensiones), el sistema cartesiano $OXYZ$ está compuesto por una terna ortonormal de ejes coordenados OX , OY y OZ , tal y como se ve en la figura 3.1. Así, un vector o un punto viene definido

con respecto a este sistema de referencia mediante las coordenadas correspondientes a cada uno de los ejes coordenados. En el caso de la figura 3.1, el vector **Op** o punto **p** estará definido por las componentes cartesianas (x, y, z) .

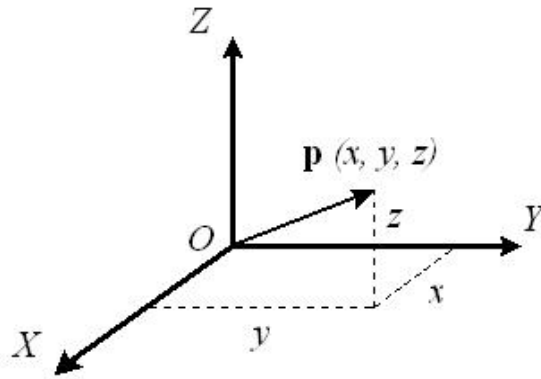


Figura 3.1. Representación en tres dimensiones de un vector o punto.

Existen además otros métodos, igualmente válidos, y también ampliamente extendidos, como son las coordenadas polares para dos dimensiones y las cilíndricas y esféricas para tres dimensiones.

Un punto queda totalmente definido en el espacio a través de los datos de su posición. Sin embargo, para el caso de un sólido, es necesario además, definir cuál es su orientación con respecto a un sistema de referencia. En el caso de un robot, no es suficiente con especificar cuál debe ser la posición de su extremo, sino que en general, es también necesario indicar su orientación. Por ejemplo, en el caso de un robot que tenga que realizar sobre una pieza curva una operación de pulido, no bastaría con especificar los puntos de la superficie para situar adecuadamente la herramienta, sino que será necesario también conocer la orientación con que la herramienta ha de realizar la operación.

Una orientación en el espacio tridimensional viene definida por tres grados de libertad o tres coordenadas independientes. Para poder describir de forma sencilla la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, es habitual asignar

solidariamente al objeto un nuevo sistema de referencia móvil, y después estudiar la relación espacial existente entre los dos sistemas. De forma general, esta relación vendrá dada por la posición y orientación del sistema asociado al objeto respecto al de referencia. Para el análisis de los distintos métodos de representar orientaciones se supondrá que ambos sistemas coinciden en el origen y que por tanto no existe cambio alguno de posición entre ellos.

3.2 Matrices de rotación

Las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial.

Una matriz de rotación 3×3 se puede definir como una matriz de transformación que opera sobre un vector de posición en el espacio euclídeo tridimensional y transforma sus coordenadas expresadas en un sistema de coordenadas rotado $OUVW$ (sistema ligado al cuerpo) a un sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$. En la figura 3.2 se dan dos sistemas de coordenadas rectangulares, uno el sistema de coordenadas $OXYZ$, con OX , OY y OZ como sus ejes de coordenadas, y el sistema de coordenadas $OUVW$, con OU , OV , OW como sus ejes de coordenadas.

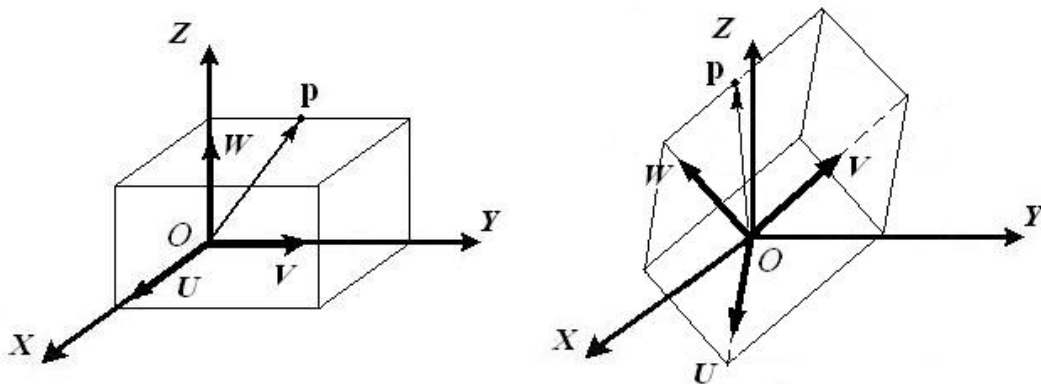


Figura 3.2. Sistemas de coordenadas de referencia y ligado al cuerpo (móvil).

Ambos sistemas de coordenadas tienen sus orígenes coincidentes en el punto O . El sistema de coordenadas $OXYZ$ está fijo en el espacio tridimensional y se considera que es el sistema de referencia. El sistema de coordenadas $OUVW$ está girando con respecto al sistema de referencia $OXYZ$. Físicamente, uno puede considerar que el sistema de coordenadas $OUVW$ es un sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Esto es, está permanentemente y convenientemente unido al cuerpo rígido (por ejemplo, un avión o un elemento del brazo de robot) y se mueve junto con el.

Sean $(\mathbf{i}_x, \mathbf{j}_y, \mathbf{k}_z)$ y $(\mathbf{i}_u, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_w)$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas de los sistemas $OXYZ$ y $OUVW$, respectivamente. Un punto $\mathbf{p}$ en el espacio se puede representar por sus coordenadas con respecto a ambos sistemas de coordenadas (Figura 3.2). Para facilitar el análisis, suponemos que $\mathbf{p}$ está en reposo y fijo con respecto al sistema de coordenadas $OUVW$. Entonces el punto $\mathbf{p}$ se puede representar por sus coordenadas con respecto al sistema de coordenadas $OUVW$ y $OXYZ$, respectivamente, como

$$\mathbf{p}_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{p}_{xyz}$ y $\mathbf{p}_{uvw}$ representan el mismo punto $\mathbf{p}$ en el espacio con respecto a diferentes sistemas de coordenadas y el superíndice T en los vectores y matrices denota la operación transpuesta.

Debemos encontrar una matriz $\mathbf{R}$ de transformación 3×3 que transforme las coordenadas del punto $\mathbf{p}_{uvw}$ en el sistema $OUVW$, a las coordenadas expresadas con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$, después de que el sistema de coordenadas $OUVW$ ha sido girado, como en la figura 3.2. Esto es:

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R} \mathbf{p}_{uvw} \quad (3.2)$$

Obsérvese que físicamente el punto $\mathbf{p}_{uvw}$ ha sido girado junto con el sistema de coordenadas $OUVW$. Recordando la definición de las componentes de un vector tenemos

$$\mathbf{p}_{uvw} = p_u \mathbf{i}_u + p_v \mathbf{j}_v + p_w \mathbf{k}_w \quad (3.3)$$

y recordando que p_x , p_y y p_z representan las componentes de $\mathbf{p}$ a lo largo de los ejes OX , OY y OZ , respectivamente, o las proyecciones de $\mathbf{p}$ sobre los ejes respectivos. Así, utilizando la definición del producto escalar y la ecuación (3.2),

$$\begin{aligned} p_x &= \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{p} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_y &= \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{p} = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_z &= \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w p_w \end{aligned} \quad (3.4)$$

o expresado en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Utilizando esta notación, la matriz $\mathbf{R}$ en la ecuación (3.5) está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y define la orientación del sistema $OUVW$ con respecto al sistema $OXYZ$. La principal utilidad de esta matriz de rotación corresponde a la representación de la orientación de sistemas girados únicamente sobre uno de los ejes principales del sistema de referencia.

Análogamente, se pueden relacionar las coordenadas de p_{uvw} con las coordenadas de p_{xyz} :

$$\mathbf{p}_{uvw} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{xyz} \quad (3.7)$$

$$\text{o} \quad \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & j_y \cdot i_u & k_z \cdot i_u \\ i_x \cdot j_v & j_y \cdot j_v & k_z \cdot j_v \\ i_x \cdot k_w & j_y \cdot k_w & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Como los productos escalares son conmutativos, se puede ver de las ecuaciones (3.6) a (3.8) que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (3.9)$$

$$\mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad (3.10)$$

Donde $\mathbf{I}_3$ es la matriz identidad 3 x 3. La transformación en la ecuación (3.2) o (3.7) se llama una transformación *ortogonal*, porque $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, y como los vectores en los productos escalares son todos vectores unitarios, se llama también transformación *ortonormal*.

El interés primario en desarrollar la matriz de transformación anterior es encontrar las matrices de rotación que representan rotaciones del sistema de coordenadas $OUVW$ respecto a cada uno de los tres ejes principales del sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$. Si el sistema de coordenadas $OUVW$ se gira un ángulo α respecto al eje OX para llegar a una nueva posición en el espacio, entonces el punto $\mathbf{p}_{uvw}$, que tiene coordenadas $(p_u, p_v, p_w)^T$ con respecto al sistema $OUVW$, tendrá coordenadas diferentes $(p_x, p_y, p_z)^T$ con respecto al sistema de referencia $OXYZ$. La matriz de transformación necesaria $\mathbf{R}_{x, \alpha}$ se llama matriz de rotación respecto al

eje OX con ángulo α . La matriz $\mathbf{R}_{x, \alpha}$ se puede derivar del concepto de matriz de transformación obtenida anteriormente, esto es,

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R}_{x, \alpha} \mathbf{p}_{uvw} \quad (3.11)$$

con $\mathbf{i}_x \equiv \mathbf{i}_u$ (ver figura 3.3), y

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x, \alpha} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos \alpha & \cos(90 + \alpha) \\ \cos 90 & \cos(90 - \alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \cos 90 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.12) \end{aligned}$$

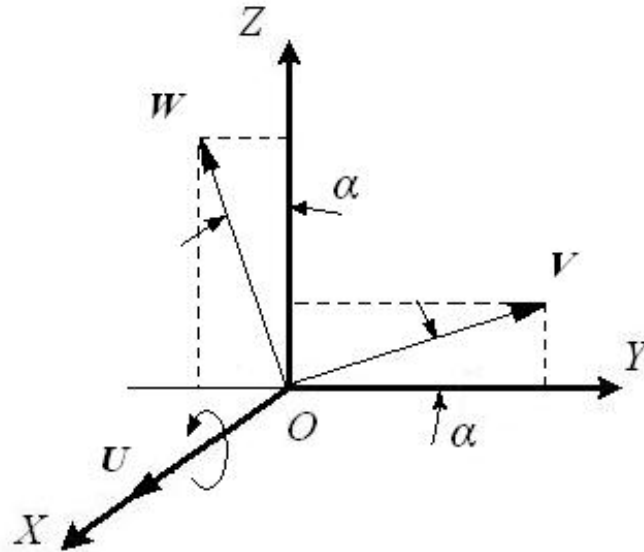


Figura 3.3. Rotación del sistema $OUVW$ alrededor del eje OX un ángulo α .

Análogamente, las matrices de rotación 3 x 3 para rotaciones respecto al eje OY ($\mathbf{j}_y \equiv \mathbf{j}_v$) con ángulo ϕ y respecto al eje OZ ($\mathbf{k}_z \equiv \mathbf{k}_w$) con ángulo θ son, respectivamente

$$\mathbf{R}_{y, \phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Las matrices anteriores se llaman las matrices de rotación básicas. Se pueden obtener otras matrices de rotación finitas a partir de estas matrices.

En el ejemplo que se presenta a continuación, se mostrará como operan las matrices de rotación sobre un punto en el espacio.

Ejemplo 3.1

Dado dos puntos $\mathbf{a}_{uvw} = (4, 3, 2)^T$ y $\mathbf{b}_{uvw} = (6, 2, 4)^T$ con respecto al sistema de coordenadas girado $OUVW$, determinar los puntos correspondientes $\mathbf{a}_{xyz}$, $\mathbf{b}_{xyz}$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia, si ha sido rotado 60° respecto al eje OZ .

Las nuevas coordenadas de los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ con respecto al sistema de referencia $OXYZ$ se determinan aplicando, a cada punto, la matriz de rotación básica alrededor del eje OZ con ángulo θ , de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_{xyz} = \mathbf{R}_{z, 60^\circ} \mathbf{a}_{uvw} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_{xyz} = \mathbf{R}_{z, 60^\circ} \mathbf{b}_{uvw}$$

$$\mathbf{a}_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\text{sen} 60^\circ & 0 \\ \text{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4(0,5) + 3(-0,866) + 2(0) \\ 4(0,866) + 3(0,5) + 2(0) \\ 4(0) + 3(0) + 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,598 \\ 4,964 \\ 2,0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{xyz} = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,268 \\ 6,96 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

Así, $\mathbf{a}_{xyz}$ y $\mathbf{b}_{xyz}$ son iguales a $(-0,598, 4,964, 2,0)^T$ y $(1,268, 6,196, 4,0)^T$, respectivamente, cuando se expresan en términos del sistema de coordenadas de referencia, después de la rotación.

Ejemplo 3.2

Dado dos puntos $\mathbf{a}_{xyz} = (4,3,2)^T$ y $\mathbf{b}_{xyz} = (6, 2, 4)^T$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia, determinar los puntos correspondientes $\mathbf{a}_{uvw}$, $\mathbf{b}_{uvw}$ con respecto al sistema de coordenadas girado $OUVW$ si ha sido rotado 60° respecto del eje OZ .

Las nuevas coordenadas de los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ con respecto al sistema de referencia $OUVW$ se determinan aplicando, a cada punto, la traspuesta de la matriz de rotación básica alrededor del eje OZ con ángulo θ , de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_{uvw} = (\mathbf{R}_{z, 60^\circ})^T \mathbf{a}_{xyz} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_{uvw} = (\mathbf{R}_{z, 60^\circ})^T \mathbf{b}_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,598 \\ -1,964 \\ 2,0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,732 \\ -4,196 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

3.3 Composición de matrices de rotación

Las matrices de rotación básicas se pueden multiplicar entre sí para expresar la aplicación continua de varias rotaciones. Como las multiplicaciones de matrices no conmutan, es importante el orden o secuencia de realización de las rotaciones. Por ejemplo, para desarrollar una matriz de rotación que represente una rotación de ángulo α respecto del eje OX seguida por una rotación del ángulo θ respecto del eje OZ seguida por una rotación del ángulo ϕ respecto del eje OY , la matriz de rotación resultante que representa estas rotaciones es

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{y, \phi} \mathbf{R}_{z, \theta} \mathbf{R}_{x, \alpha} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \sin \theta \cos \alpha & \cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha & \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.14) \end{aligned}$$

Esto es diferente de la matriz de rotación que representa una rotación del ángulo ϕ respecto del eje OY seguida por una rotación de ángulo θ respecto del eje OZ seguida por una rotación de ángulo α respecto del eje OX .

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{R}_{x, \alpha} \mathbf{R}_{z, \theta} \mathbf{R}_{y, \phi} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \alpha \sin \theta \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi & \cos \alpha \cos \theta & \cos \alpha \sin \theta \sin \phi - \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi & \sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \sin \phi + \cos \alpha \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Además de girar respecto de los ejes principales del sistema de referencia $OXYZ$, el sistema de coordenadas giratorio $OUVW$ puede también rotar respecto de sus propios ejes U , V o W . En este caso la matriz de rotación resultante o compuesta se puede obtener de las siguientes reglas simples:

1. Inicialmente ambos sistemas de coordenadas son coincidentes, de aquí que la matriz de rotación es una matriz identidad $\mathbf{I}_3$ de 3×3 . Esto se demuestra a través las ecuaciones 3.12 y 3.13, cuando los sistemas de coordenadas son coincidentes $\alpha = \phi = \theta = 0$, (Figura 3.2).

2. Si el sistema de coordenadas giratorio $OUVW$ está girando respecto de uno de los ejes principales del sistema $OXYZ$, entonces *premultiplicar* la matriz de rotación previa (resultante) por una matriz de rotación básica apropiada, de la manera siguiente $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x, \alpha} \mathbf{R}_R$.

3. Si el sistema de coordenadas rotante $OUVW$ está girando respecto de su propio eje principal, entonces *postmultiplicar* la matriz de rotación previa (resultante) por una matriz de rotación básica apropiada, de la manera siguiente $\mathbf{R} = \mathbf{R}_R \mathbf{R}_{u, \alpha}$

Ejemplo 3.3

Encontrar la matriz de rotación resultante que representa un giro de ángulo ϕ respecto del eje OY seguido por una rotación de ángulo θ respecto del eje OW seguido por una rotación de ángulo α respecto del eje OU .

Aplicando las reglas anteriores para la obtención de la matriz de rotación compuesta, se tiene:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{y, \phi} \mathbf{R}_{w, \theta} \mathbf{R}_{u, \alpha} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \sin \theta \cos \alpha & \cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha & \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix}$$

3.4 Matriz de rotación respecto a un eje arbitrario

Algunas veces el sistema de coordenadas rotantes $OUVW$ puede girar un ángulo ϕ respecto de un eje arbitrario, representado por $\mathbf{r}$ que es un vector unitario de componentes r_x , r_y y r_z y que pasa a través del origen O . La ventaja consiste en que para ciertos movimientos angulares del sistema $OUVW$, éste puede realizar una rotación alrededor del eje $\mathbf{r}$ en lugar de algunas rotaciones respecto de los ejes principales de los sistemas de coordenadas $OUVW$ y/o $OXYZ$.

Para derivar esta matriz de rotación $\mathbf{R}_{r, \phi}$, podemos primero realizar algunas rotaciones respecto de los ejes principales del sistema $OXYZ$ para alinear el eje $\mathbf{r}$ con

el eje OZ . Luego hacemos la rotación respecto de $\mathbf{r}$ con ángulo ϕ y giramos el eje principal del sistema $OXYZ$ para volver el eje $\mathbf{r}$ otra vez a su posición original.

Con referencia a la figura 3.4, el alineamiento del eje OZ con el eje $\mathbf{r}$ se logra haciéndolo girar primero alrededor del eje OX un ángulo α (el eje $\mathbf{r}$ estará entonces en el plano XZ), seguido por la rotación, un ángulo $-\beta$, alrededor del eje OY (el eje $\mathbf{r}$ ahora se alinea con el eje OZ).

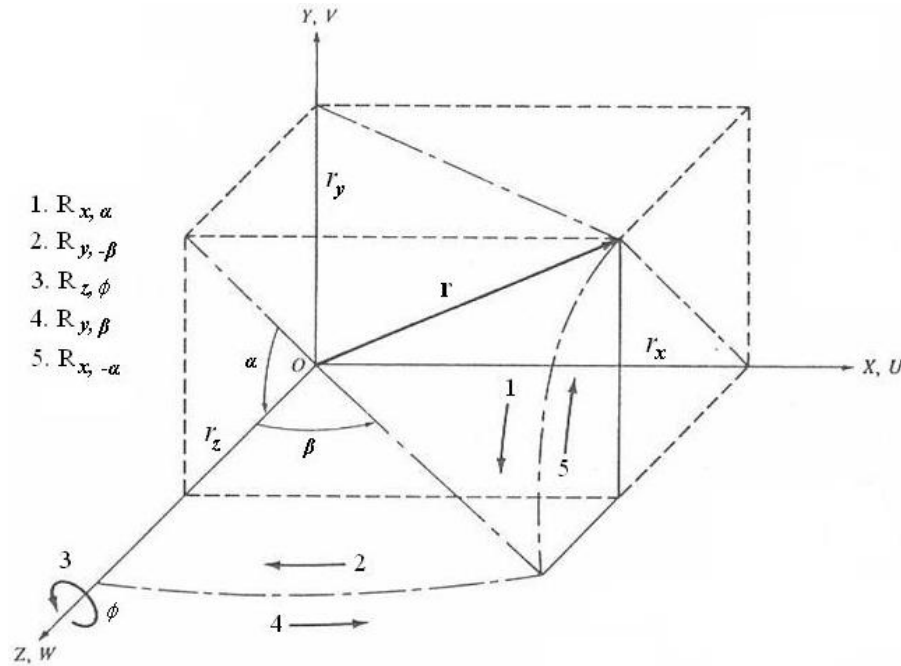


Figura 3.4. Rotación respecto de un eje arbitrario.

Después de la rotación del ángulo ϕ respecto del eje OZ o eje $\mathbf{r}$, invertir las secuencias de rotaciones anteriores con sus respectivos ángulos opuestos. La matriz de rotación resultante es:

$$\mathbf{R}_{r, \phi} = \mathbf{R}_{x, -\alpha} \mathbf{R}_{y, \beta} \mathbf{R}_{z, \phi} \mathbf{R}_{y, -\beta} \mathbf{R}_{x, \alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De la figura 3.4 encontramos fácilmente que:

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & \cos \alpha &= \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \\
\sin \beta &= \frac{r_x}{r} & \cos \beta &= \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{r}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{R}_{r, \phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + \cos \phi & r_x r_y V\phi - r_z \sin \phi & r_x r_z V\phi + r_y \sin \phi \\ r_x r_y V\phi + r_z \sin \phi & r_y^2 V\phi + \cos \phi & r_y r_z V\phi - r_x \sin \phi \\ r_x r_z V\phi - r_y \sin \phi & r_y r_z V\phi + r_x \sin \phi & r_z^2 V\phi + \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

y utilizando $V\phi = 1 - \cos \phi$ para abreviar las expresiones de la matriz, después de hacer las simplificaciones trigonométricas. Esta es una matriz de rotación muy útil. Aplicada a un punto $\mathbf{p}_{uvw}$, del sistema de referencia móvil $OUVW$, tiene el efecto de rotarlo un ángulo ϕ respecto del eje $\mathbf{r}$, a un nuevo punto $\mathbf{p}_{xyz}$, expresado en coordenadas del sistema de referencia $OXYZ$ (figura 3.5).

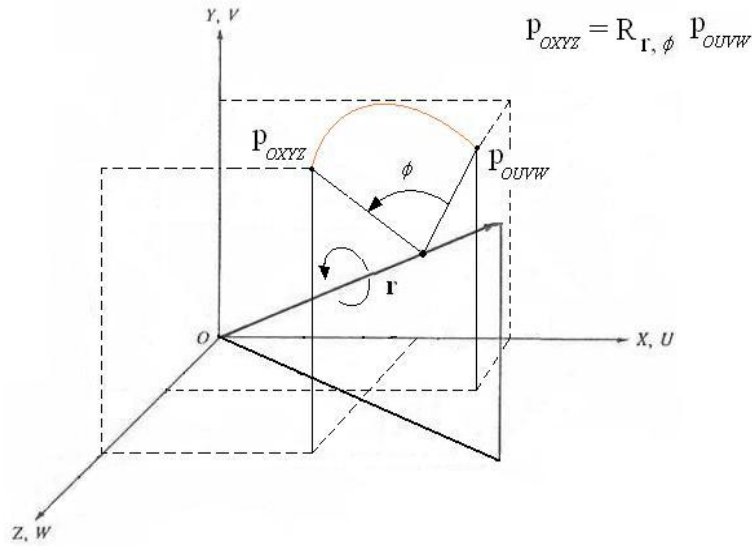


Figura 3.5. Efecto de la matriz de rotación respecto a un eje cualquiera aplicada a un punto.

Ejemplo 3.4

Encontrar la matriz de rotación $\mathbf{R}_{r, \phi}$ que representa la rotación de ángulo ϕ respecto del vector $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$.

Como el vector $\mathbf{r}$ no es un vector unitario, necesitamos normalizarlo y encontrar sus componentes a lo largo del eje principal del sistema OXYZ. Por tanto,

$$r_x = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.16), se obtiene la matriz $\mathbf{R}_{r, \phi}$

$$\mathbf{R}_{r, \phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}V\phi + \cos\phi & \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi \\ \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3}V\phi + \cos\phi & \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi \\ \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3}V\phi + \cos\phi \end{bmatrix}$$

3.5 Interpretación geométrica de las matrices de rotación

Es conveniente interpretar las matrices de rotación básicas de forma geométrica. Escojamos un punto $\mathbf{p}$ fijo en el sistema de coordenadas $OUVW$ que sea $(1, 0, 0)^T$, esto es, $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$. Entonces la primera columna de la matriz de rotación representa las coordenadas de este punto con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$. Análogamente, escogiendo $\mathbf{p}$ como $(0, 1, 0)^T$ y $(0, 0, 1)^T$, se puede identificar que los elementos de la segunda y tercera columna de una matriz de rotación representan los ejes OV y OW , respectivamente, del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$ (Figura 3.6).

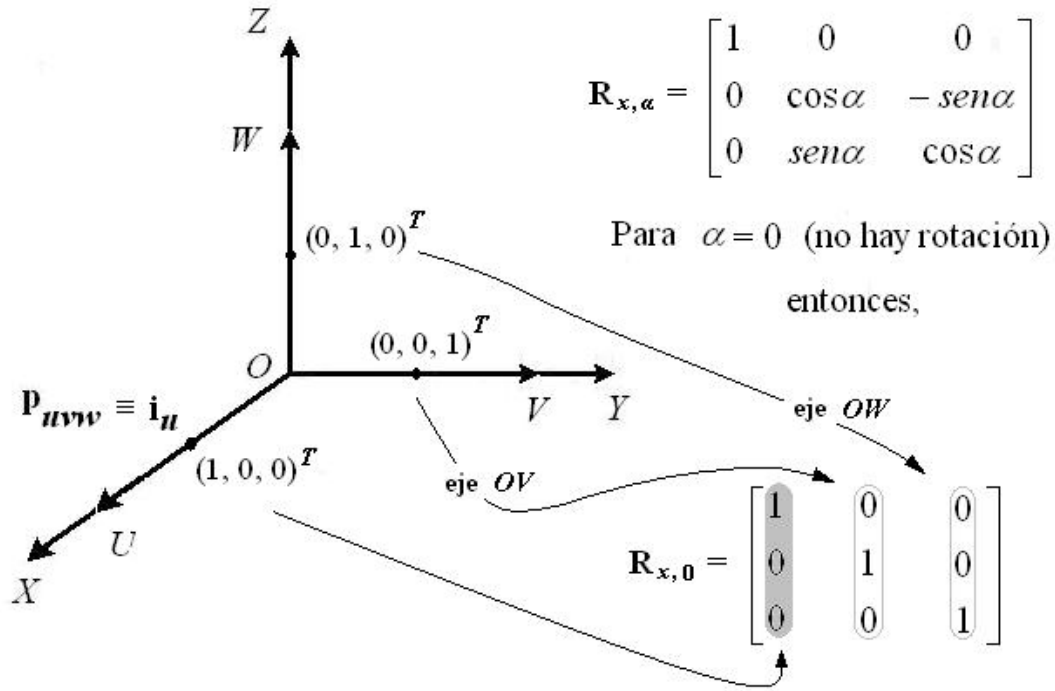


Figura 3.6. Interpretación geométrica de la matriz de rotación.

Así, dado un sistema de referencia $OXYZ$ y una matriz de rotación, los vectores columna de la matriz de rotación representan los ejes principales del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de referencia y se puede deducir la localización de todos los ejes principales del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de referencia. **En otras palabras, una matriz de rotación**

geométricamente representa los ejes principales del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

Como la inversa de una matriz de rotación es equivalente a su transpuesta, **los vectores fila de la matriz de rotación representan los ejes principales** del sistema de referencia $OXYZ$ con respecto al sistema de coordenadas rotado $OUVW$. Esta interpretación geométrica de las matrices de rotación es un concepto importante que proporciona información en muchos problemas cinemáticos del brazo del robot. Se dan a continuación algunas propiedades útiles de las matrices de rotación:

1. Cada vector columna de la matriz de rotación es una representación del vector unitario del eje rotado expresado en términos de los vectores unitarios de los ejes del sistema de referencia $OXYZ$, y cada vector fila es una representación del vector unitario de los ejes de referencia expresados en función de los vectores unitarios de los ejes rotados del sistema UVW .
2. Como cada fila y columna es una representación de un vector unitario, la magnitud de cada una de ellas debe ser igual a 1. Esta es una propiedad directa de un sistema de coordenadas ortonormal. Más aún, el determinante de una matriz de rotación es +1 para un sistema de coordenadas dextrógiro y -1 para un sistema de coordenadas levógiro.
3. Como cada fila es una representación vectorial de vectores ortonormales, el producto interno (producto escalar) de cada fila por cualquier otra fila es igual a cero. Análogamente el producto interno de cada columna por cualquier otra columna también es igual a cero.
4. La inversa de una matriz de rotación es la transpuesta de la matriz de rotación

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$$

donde $\mathbf{I}_3$ es una matriz identidad de 3 x 3.

Las propiedades 3 y 4 son especialmente útiles para comprobar los resultados de multiplicación de matrices de rotación y para determinar un vector columna erróneo.

3.6 Coordenadas homogéneas y la matriz de transformación homogénea

Como una matriz de rotación 3 x 3 no da ninguna posibilidad para una representación conjunta de la posición y la orientación, así como para la traslación y el escalado, se introduce una cuarta coordenada o componente al vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ en un espacio tridimensional que lo transforma en $\mathbf{p}^{\wedge} = (wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$. Decimos que el vector $\mathbf{p}^{\wedge}$ se expresa en *coordenadas homogéneas*. En ésta sección se utiliza un <<circunflejo>> (es decir, $\mathbf{p}^{\wedge}$) para indicar la representación de un vector cartesiano en coordenadas homogéneas. Posteriormente, cuando no haya confusión, se eliminarán estos <<circunflejos>>. El concepto de una representación en coordenadas homogéneas en un espacio euclídeo tridimensional es útil para desarrollar transformaciones matriciales que incluyen rotación, traslación, escalado y transformación de perspectiva. Así, en un espacio tridimensional, un vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ se representa por un vector ampliado $(wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$ en la representación de coordenadas homogéneas. Las coordenadas físicas se relacionan a las coordenadas homogéneas como sigue:

$$p_x = \frac{wp_x}{w}, \quad p_y = \frac{wp_y}{w}, \quad p_z = \frac{wp_z}{w}$$

No existe una representación en coordenadas homogéneas única para una representación en un espacio tridimensional. Por ejemplo, $\mathbf{p}^1 = (w_1 p_x, w_1 p_y, w_1 p_z, w_1)^T$ y $\mathbf{p}^2 = (w_2 p_x, w_2 p_y, w_2 p_z, w_2)^T$ son todas coordenadas homogéneas representando el mismo vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$. Así se puede ver la cuarta componente de las coordenadas homogéneas w como un factor de escala. Si esta coordenada es la unidad ($w = 1$), entonces las coordenadas homogéneas transformadas de un vector de posición son las mismas que las coordenadas físicas del vector. En aplicaciones de robótica, este factor de escala será siempre igual a 1, aunque se utiliza normalmente en informática gráfica como un factor de escala universal que toma cualquier valor positivo.

La matriz de transformación homogénea es una matriz 4 x 4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Una matriz de transformación homogénea se puede considerar que consiste en cuatro submatrices:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{f}_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \hline \text{transformación de perspectiva} & \text{escalado} \end{array} \right] \quad (3.17)$$

La submatriz 3 x 3 superior izquierda representa la matriz de rotación; la submatriz superior derecha 3 x 1 representa el vector de posición del origen del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de referencia; la submatriz inferior izquierda 1 x 3 representa la transformación de perspectiva; y el cuarto elemento diagonal es el factor de escala global. La matriz de transformación homogénea se puede utilizar para explicar la relación geométrica entre el sistema ligado al cuerpo $OUVW$ y el sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$.

Si un vector de posición $\mathbf{p}$ en el espacio tridimensional se expresa en coordenadas homogéneas [es decir, $\mathbf{p}^h = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$], entonces, utilizando el

concepto de matriz de transformación, una matriz de rotación 3 x 3 se puede ampliar a una matriz de rotación homogénea 4 x 4, $\mathbf{T}_{\text{rot}}$, para operaciones de rotación pura. Así, las ecuaciones (3.12) y (3.13), expresadas como matriz de rotación homogénea se hacen:

$$\mathbf{T}_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{y, \phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Estas matrices de rotación 4 x 4 se llaman las *matrices de rotación homogéneas básicas*. La submatriz superior derecha 3 x 1 de la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de **trasladar** el sistema de coordenadas $OUVW$ que tiene ejes paralelos al sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$, pero cuyo origen está en (dx, dy, dz) respecto al sistema de coordenadas referencia:

$$\mathbf{T}_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Esta matriz de transformación 4 x 4 se llama *matriz de traslación homogénea básica*.

La submatriz inferior izquierda 1 x 3 de la matriz transformación homogénea representa la transformación de perspectiva, que es útil para visión por computadora y la calibración de modelos de cámara. Por ahora, los elementos de esta matriz se fijan a cero para indicar la transformación de perspectiva nula.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz de transformación homogénea producen escalado local y global. Los primeros tres elementos diagonales producen un alargamiento o escalado local, como en:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Así, los valores de las coordenadas se alargan mediante los escalares a , b y c , respectivamente. Obsérvese que las matrices de rotación básicas, $\mathbf{T}_{\text{rot}}$, no producen ningún efecto de escalado local.

El cuarto elemento diagonal produce escalado global como en

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde $s > 0$. Las coordenadas cartesianas físicas del vector son

$$p_x = \frac{x}{s}, \quad p_y = \frac{y}{s}, \quad p_z = \frac{z}{s}, \quad w = \frac{s}{s} = 1 \quad (3.22)$$

Por tanto, el cuarto elemento diagonal en la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de globalmente reducir las coordenadas si $s > 1$ y alargar las coordenadas si $0 < s < 1$.

En resumen, una matriz de transformación homogénea 4 x 4 transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas $OUVW$ en el sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$. Esto es, con $w = 1$,

$$\mathbf{p}^{\wedge}_{xyz} = \mathbf{T} \mathbf{p}^{\wedge}_{uvw} \quad (3.23a)$$

y

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

Ejemplo 3.5

Dos puntos $\mathbf{a}_{uvw} = (4, 3, 2)^T$ y $\mathbf{b}_{uvw} = (6, 2, 4)^T$ se trasladan a una distancia de +5 unidades a lo largo del eje OX y -3 unidades a lo largo del eje OZ . Utilizando la matriz de transformación homogénea apropiada, determinar los nuevos puntos $\mathbf{a}_{xyz}$ y $\mathbf{b}_{xyz}$.

Empleando la ecuación 3.19,

$$\mathbf{a}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1) + 1(5) \\ 3(1) + 1(0) \\ 2(1) + 1(-3) \\ 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los puntos trasladados son $\mathbf{a}_{xyz} = (9, 3, -1)^T$ y $\mathbf{b}_{xyz} = (11, 2, 1)^T$

3.7 Interpretación geométrica de las matrices de transformación homogéneas

En general, una matriz de transformación homogénea para un espacio tridimensional se puede representar como la ecuación (3.23b). Escojamos un punto $\mathbf{p}$ fijo en el sistema de coordenadas $OUVW$ y expresado en coordenadas homogéneas como $(0, 0, 0, 1)^T$; esto es, $\mathbf{p}_{uvw}$ es el origen del sistema de coordenadas $OUVW$. Entonces la submatriz superior derecha 3×1 indica la posición del origen del sistema $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$. Escojamos el punto $\mathbf{p}$ como $(1, 0, 0, 1)^T$; esto es, $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$, (ver figura 3.7). Más aún, suponemos que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden en un punto O . Este tiene el efecto de hacer los elementos en la submatriz superior derecha 3×1 un vector nulo.

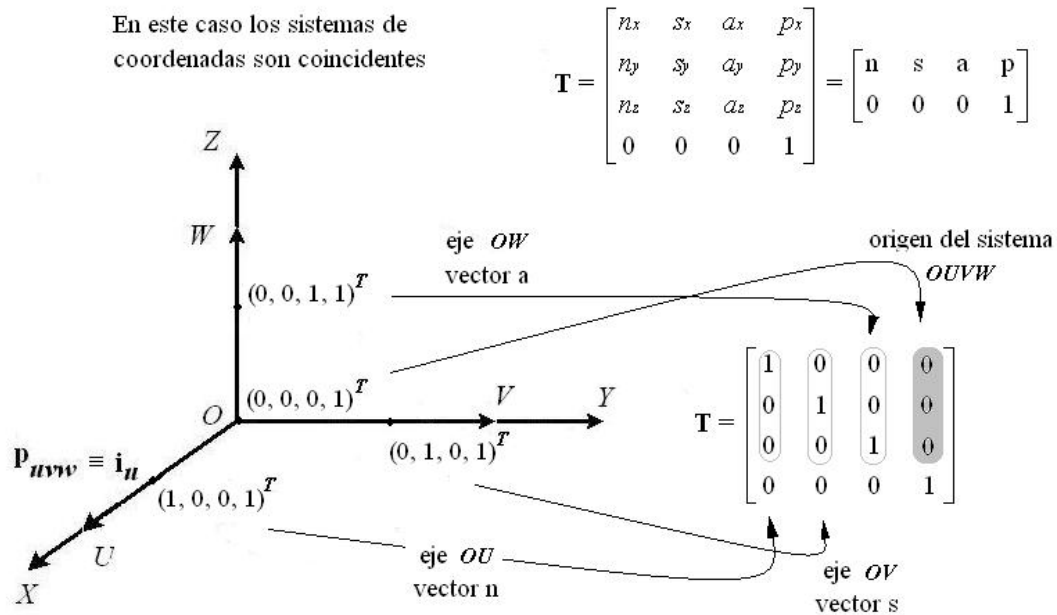


Figura 3.7. Interpretación geométrica de una matriz de transformación homogénea.

Entonces la primera columna (o vector $\mathbf{n}$) de la matriz de transformación homogénea representa las coordenadas del eje OU de $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$. Análogamente, escogiendo $\mathbf{p}$ como $(0, 1, 0, 1)^T$ y $(0, 0, 1, 1)^T$, se puede identificar que la segunda columna (o vector $\mathbf{s}$) o la tercera columna (o vector $\mathbf{a}$) de los elementos de la matriz homogénea representan, respectivamente, los ejes OV y OW del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

Así, dado un sistema de referencia $OXYZ$ y una matriz de transformación homogénea $\mathbf{T}$, los vectores columnas de la submatriz de rotación representan los ejes principales del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia, y se puede dibujar la orientación de todos los ejes principales del sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de coordenadas de referencia. El vector cuarta columna de la matriz de transformación homogénea representa la posición del origen del sistema coordenadas $OUVW$ con respecto al sistema de referencia. **En otras palabras, una matriz de transformación**

homogénea geométricamente representa la *localización* de un sistema de coordenadas rotado (posición y orientación) con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

3.8 Composición de matrices de transformación homogénea

Las matrices de rotación y traslación homogéneas se pueden multiplicar entre sí para obtener una matriz de transformación homogénea compuesta (la llamaremos matriz **T**). Sin embargo, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, se debe prestar una atención cuidadosa al orden en el cual se multiplican estas matrices. Las reglas que siguen son útiles para determinar una matriz de transformación homogénea compuesta:

1. Inicialmente, ambos sistemas de coordenadas son coincidentes, ya que la matriz de transformación homogénea es una matriz identidad 4×4 , **I**₄. Similar al caso de la matriz de rotación pura.
2. Si el sistema de coordenadas rotante *OUVW* está rotando/trasladándose respecto de los ejes principales del sistema *OXYZ*, entonces se debe *premultiplicar* la matriz de transformación homogénea previa (resultante) por una matriz de rotación/traslación básica apropiada.
3. Si el sistema de coordenadas rotantes *OUVW* está rotando/trasladándose respecto de su propio eje principal, entonces se debe *postmultiplicar* la matriz de transformación homogénea (resultante) por una matriz de rotación/traslación básica apropiada.

Ejemplo 3.6

Se quiere determinar una matriz $\mathbf{T}$ que representa una rotación de ángulo α respecto del eje OX , seguido por una traslación de b unidades a lo largo del eje girado OV .

Siguiendo las reglas mencionadas anteriormente, a la matriz resultante $\mathbf{T}_{x, \alpha}$, que gira el eje OV alrededor del eje OY , se le *postmultiplicará* la matriz de traslación $\mathbf{T}_{v, b}$ que traslada b unidades a lo largo del eje OV ya girado, resultando,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{x, \alpha} \mathbf{T}_{v, b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & b \cos \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & b \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.7

Encontrar una matriz de transformación homogénea $\mathbf{T}$ que represente una rotación de ángulo α respecto del eje OX , seguida por una traslación de a unidades a lo largo del eje OX , seguida por una traslación de d unidades a lo largo del eje OZ , seguida por una rotación de ángulo θ respecto del eje OZ .

Siguiendo nuevamente las reglas para la obtención de la matriz compuesta, se tiene:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{x,a} \mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\alpha\text{sen}\theta & \text{sen}\alpha\text{sen}\theta & a\cos\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\alpha\cos\theta & -\text{sen}\alpha\cos\theta & a\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.9 Cuaterniones

Los cuaternios o cuaterniones definidos por el irlandés William Rowan Hamilton (1.805 - 1.865) pueden ser utilizados como una herramienta matemática de gran versatilidad computacional para trabajar con giros y orientaciones, representando una alternativa a la matriz de transformación homogénea para la representación de la orientación.

El concepto de cuaternión ha sido aplicado satisfactoriamente en el análisis de mecanismos espaciales durante las últimas décadas. En la bibliografía clásica sobre

robótica suelen ser obviados o no tratados con el suficiente detalle, a pesar de ser empleados por algunos robots comerciales (**ABB**).

Para comprender la verdadera utilidad de los cuaternios, es necesario analizar sus propiedades y ver la aplicación práctica de las mismas. Estos se podrían utilizar para facilitar la representación de la orientación de la mano del manipulador.

Un cuaternión $\mathbf{Q}$ está constituido por cuatro componentes, una cuádrupla de números reales ordenados s, a, b, c , asociados, respectivamente, con cuatro unidades: el número real $+1$, y otras tres unidades $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, concebidas por Hamilton como una extensión de los números complejos, que tienen permutaciones cíclicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Las unidades $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del cuaternión se pueden interpretar como los tres vectores básicos de un conjunto de ejes cartesianos. Así, un cuaternión $\mathbf{Q}$ se puede escribir como una parte escalar s y una parte vectorial $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{Q} = [s + \mathbf{v}] = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = (s, a, b, c) = (s, \mathbf{v})$$

Las siguientes propiedades del álgebra de cuaterniones son básicas:

Parte escalar de $\mathbf{Q}$: s

Parte vectorial de $\mathbf{Q}$: $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

Conjugado ($\mathbf{Q}^*$) de $\mathbf{Q}$: $s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$

Norma (módulo) de Q : $s^2 + a^2 + b^2 + c^2$ (cuaternión Q por su conjugado)

Inverso (Q^{-1}) de Q : $\frac{s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$ (Conjugado de Q entre su módulo)

Cuaternión unidad: $s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Es importante observar que los cuaternios incluyen los números reales $(s, 0, 0, 0)$ con una simple unidad 1, los números complejos $(s, a, 0, 0)$ con dos unidades 1 e $\mathbf{i}$ y los vectores $(0, a, b, c)$ en un espacio tridimensional. La suma (resta) de dos cuaterniones es igual a sumar (restar) los elementos correspondientes en las cuádruplas. La multiplicación de los cuaterniones se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 &= (s_1 + a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) (s_2 + a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) = \\ &= (s_1s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + s_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\end{aligned}\quad (3.24)$$

y se obtiene distribuyendo los términos a la derecha como en el álgebra ordinaria, excepto que se debe preservar el orden de las unidades. En general, el producto de dos vectores en el espacio tridimensional, expresados como cuaterniones, no es un vector sino un cuaternión. Esto es $\mathbf{Q}_1 = [0 + \mathbf{v}_1] = (0, a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{Q}_2 = [0 + \mathbf{v}_2] = (0, a_2, b_2, c_2)$ y de la ecuación (3.24),

$$\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

donde $-\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ es la parte escalar y $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ es la parte vectorial del cuaternión.

Para usar los cuaternios como metodología de representación de orientaciones se asocia el giro de un ángulo θ sobre el vector $\mathbf{n}_c$. Las rotaciones finitas en el espacio se pueden trazar de una manera simple y eficiente con la ayuda del álgebra de cuaterniones. Si utilizamos la notación

$$S = \sin (\theta/2) \quad \text{y} \quad C = \cos (\theta/2)$$

Se puede representar una rotación $\text{Rot}(\mathbf{n}_c, \theta)$ de ángulo θ respecto de un eje $\mathbf{n}_c$ mediante el cuaternión

$$\mathbf{Q} = \text{Rot}(\mathbf{n}_c, \theta) = [\cos (\theta/2) + \sin (\theta/2) \mathbf{n}_c] \quad (3.25)$$

La composición de rotaciones con cuaternios resulta tan sencilla como multiplicar cuaternios entre si. De tal forma que el resultado de rotar según el cuaternión $\mathbf{Q}_1$, para posteriormente rotar según el cuaternión $\mathbf{Q}_2$, es el mismo que el de rotar según el cuaternión $\mathbf{Q}_3$, obtenido por la expresión:

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$$

Es importante tener en cuenta el orden de multiplicación, pues el producto de cuaternios no es conmutativo.

Ejemplo 3.8

Una rotación de 90° respecto de $\mathbf{k}$ seguida por una rotación de 90° respecto de $\mathbf{j}$ se puede representar por el cuaternión producto:

$$\begin{aligned} (\cos 45^\circ + \mathbf{j} \sin 45^\circ) (\cos 45^\circ + \mathbf{k} \sin 45^\circ) &= (1/2 + \mathbf{j} \, 1/2 + \mathbf{k} \, 1/2 + \mathbf{i} \, 1/2) = \\ &= (1/2 + \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\cos 60^\circ + \sin 60^\circ \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}) = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{Rot} \left(\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}, 120^\circ \right)$$

La rotación resultante es un giro de 120° respecto de un eje igualmente inclinado con coordenadas $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en la dirección de los ejes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

De esta manera, podemos decir que un cuaternión es un vector de cuatro elementos, tres de los cuales son componentes de un vector espacial que define la dirección de un eje de rotación y la cuarta componente proporciona información sobre el ángulo de rotación

3.10 Utilización de los cuaternios

Dado un eje en el espacio que pasa por el origen del sistema de coordenadas de referencia (o un vector $\mathbf{n}_c = (x, y, z)$) y un punto arbitrario del espacio $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ que se quiere girar un ángulo θ alrededor de ese eje. Se puede generar un cuaternio $\mathbf{q}$ (unitario en este caso) a partir del eje y del ángulo de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = q_w + q_x \cdot \mathbf{i} + q_y \cdot \mathbf{j} + q_z \cdot \mathbf{k}$$

donde:

$$q_w = \cos(\theta/2) \quad q_x = \pm \sin(\theta/2) \cdot x / |\mathbf{n}_c|$$

$$q_y = \pm \sin(\theta/2) \cdot y / |\mathbf{n}_c| \quad q_z = \pm \sin(\theta/2) \cdot z / |\mathbf{n}_c|$$

ó

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta/2) \pm \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{n}_c / |\mathbf{n}_c|) \quad (3.26)$$

Pues bien, dado este cuaternio generado a partir del eje (o vector) $\mathbf{n}$ y del ángulo θ , se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} \cdot (0, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

es decir, que el punto $\mathbf{p}$ una vez rotado, esto es $\mathbf{p}'$, viene dado por este simple producto de cuaternios. Esto se podría hacer también con cuaternios no unitarios pero, puesto que hay que elegir, y puesto que es muy fácil calcular la inversa de un cuaternio unitario (el inverso de un cuaternión unitario es igual a su recíproco), es mejor hacerlo con unitarios.

Como se mencionó anteriormente, si lo que se quiere es girar el punto $\mathbf{p}$ un ángulo θ alrededor de un eje $\mathbf{AB}$ y no respecto a un eje paralelo que pase por el origen, la fórmula es:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} + f(\mathbf{p} - \mathbf{A})$$

donde:

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot (0, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (b_x, b_y, b_z)$$

es decir:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} + \mathbf{q} \cdot (0, \mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{q}^{-1} \quad (3.27)$$

Ejemplo 3.9

Encontrar el nuevo valor de $\mathbf{p} = (3, 4, 5)$ cuando rota un ángulo $\theta = \pi/8$ alrededor del eje $\mathbf{AB}$ definido por los puntos $\mathbf{A} = (9, 2, 6)$ y $\mathbf{B} = (7, 0, 1)$.

Primero se determina el vector $\mathbf{n}$ (unitario) que es paralelo al eje $\mathbf{AB}$ y pasa por el origen.

$$\mathbf{n}_c = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (7, 0, 1) - (9, 2, 6) = (-2, -2, -5)$$

el módulo de $\mathbf{n}$ es:

$$|\mathbf{n}_c| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = 5.7445$$

De esta forma se puede calcular el cuaternión unitario $\mathbf{q}$ utilizando la ecuación 3.26.

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta/2) \pm \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{n}_c / |\mathbf{n}_c|)$$

$$\pm \sin(\theta/2) = \pm 0.1950$$

$$\cos(\theta/2) = 0.9807$$

$$\mathbf{q} = (0.9807, \mp 0.6792, \mp 0.6792, \mp 0.1698)$$

y su recíproco

$$\mathbf{q}^{-1} = (0.9807, \pm 0.6792, \pm 0.6792, \pm 0.1698)$$

El punto $\mathbf{p}'$ se calcula ahora aplicando la ecuación (3.27)

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} + \mathbf{q} \cdot (0, \mathbf{p} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

donde:

$$\mathbf{p} - \mathbf{A} = (3, 4, 5) - (9, 2, 6) = (-6, 2, -1)$$

y con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{p} - \mathbf{A}$ expresados en forma de cuaternión, se tiene:

$$\mathbf{p}' = (0, 9\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, 6\mathbf{k}) + \mathbf{q} \cdot (0, -6\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, -1\mathbf{k}) \cdot \mathbf{q}^{-1}$$

$$\mathbf{p}'_1 = (4.1961, 5.6530, 3.8603)$$

$$\mathbf{p}'_2 = (2.5973, 1.9225, 5.9920)$$

Estas son las dos posibles posiciones que puede adoptar el punto $\mathbf{p}$ después de realizar la rotación un ángulo $\theta = \pi/8$ alrededor del eje $\mathbf{AB}$.

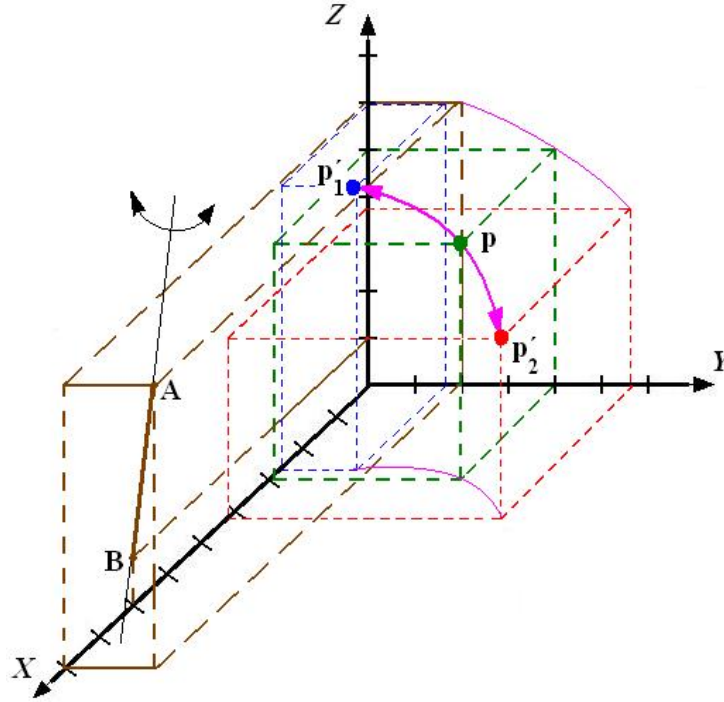


Figura 3.8. Rotación del punto $\mathbf{p}$ alrededor del eje $\mathbf{AB}$

A pesar de que los cuaterniones ofrecen cierta ventaja computacional sobre las matrices homogéneas al realizar rotaciones, la misma disminuye cuando se realizan rotaciones y traslaciones simultáneas. En este caso se necesitará realizar cálculos separados para ambas operaciones, y aunque los cálculos asociados a estas traslaciones no son complejos, se pueden cometer errores. Los cuaterniones no se emplearán para representación de orientaciones en la metodología de análisis desarrollada en este trabajo.

CAPITULO IV

EL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

CAPITULO IV

EL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. Así, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot. El primero de ellos se conoce como el **problema cinemático directo**, y consiste en determinar cual es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot; el segundo, denominado **problema cinemático inverso**, y que se estudiará en el capítulo 5, resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.

Por otra parte, la cinemática del robot también evalúa las velocidades y aceleraciones de las articulaciones y las del extremo, durante el movimiento. Este análisis se realiza a través de las funciones vectoriales y métodos numéricos como la interpolación polinomial.

4.1 Manipuladores y grados de libertad

Antes de abordar de manera detallada el estudio del problema cinemático directo, es necesario tener claro el concepto de grado de libertad. Esto permitirá una mejor comprensión de lo que se expondrá en este capítulo y el siguiente.

Un *grado de libertad* (GDL) es cada uno de los movimientos independientes que puede realizar cada articulación con respecto a la anterior. El número de GDL del robot suele coincidir con el número de articulaciones de que se compone, cuando estas son únicamente de rotación o prismática con un solo GDL cada una.

El empleo de diferentes combinaciones de articulaciones en un robot, da lugar a diferentes configuraciones, con características a tener en cuenta tanto en el diseño y construcción del robot como en su aplicación. Es frecuente atender únicamente a las tres primeras articulaciones del robot, que son las más importantes cuando se posiciona su extremo en un punto en el espacio.

Puesto que para posicionar y orientar un cuerpo de cualquier manera en el espacio son necesarios seis parámetros, tres para definir la posición y tres para definir la orientación, si se pretende que el robot posicione y oriente su extremo de cualquier modo en el espacio, se precisaran al menos seis GDL.

Si embargo, en la práctica muchos robots industriales cuentan con sólo cuatro o cinco GDL, por ser estos suficientes para llevar a cabo las diversas tareas que realizan.

En las secciones sucesivas de este capítulo se estudiará el problema cinemático directo aplicado al robot manipulador con configuración antropomórfica tipo **PUMA** que cuentan con un máximo de 6 grados de libertad. De igual forma, este estudio podrá ser aplicado a cualquier brazo robot ó manipulador con esta configuración que tenga entre 3 y 6 GDL, como se demostrará en la última sección. Esta configuración resulta ser la más generalizada en los robots industriales por su flexibilidad.

4.2 El problema cinemático directo

Cómo se demostró en el capítulo anterior, se utiliza fundamentalmente el álgebra vectorial y matricial para representar y describir la localización de un objeto en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia fijo. Dado que un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o *eslabones* unidos entre sí mediante *articulaciones*, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia. De ésta forma, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz homogénea de transformación $\mathbf{T}$ que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo situado en la base del mismo. Esta matriz $\mathbf{T}$ será función de los parámetros de la articulación.

Se han identificado dos sistemas de coordenadas, el sistema de coordenadas de referencia fijo $OXYZ$ y el sistema de coordenadas móvil (traslación rotación) $OUVW$. Para describir la relación del desplazamiento espacial entre estos dos sistemas de coordenadas, se utiliza una matriz de transformación homogénea 4×4 . Las matrices de transformación homogénea tienen el efecto combinado de rotación, traslación, perspectiva y escalado global cuando operan sobre vectores de posición expresados en coordenadas homogéneas.

Si estos dos sistemas de coordenadas se asignan a cada elemento del brazo del robot, por ejemplo, el elemento $i - 1$ y el elemento i , respectivamente, entonces el sistema de coordenadas del elemento $i - 1$ es el sistema de coordenadas de referencia y el sistema de coordenadas del elemento i es el sistema de coordenadas móvil cuando se activa la articulación i . Utilizando la matriz $\mathbf{T}$, podemos especificar un punto $\mathbf{p}_i$, fijo en el elemento i y expresarlo en el sistema de coordenadas del elemento i (u $OUVW$) en términos del sistema de coordenadas del elemento $i - 1$ (u $OXYZ$) como:

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{T} \mathbf{p}_i$$

donde:

$\mathbf{T}$ = matriz de transformación homogénea 4 x 4 que relaciona los dos sistemas de coordenadas.

$\mathbf{p}_i$ = vector de posición ampliado 4 x 1 $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$ que representa un punto referido al sistema de coordenadas fijo al elemento i en coordenadas homogéneas.

$\mathbf{p}_{i-1}$ = es el vector de posición ampliado 4 x 1 $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$ que representa el mismo punto $\mathbf{p}_i$ referido al sistema de coordenadas fijo al elemento $i - 1$.

4.2.1 Elementos, articulaciones y sus parámetros

Un manipulador mecánico consiste en una secuencia de cuerpos rígidos, llamados elementos, conectados mediante articulaciones prismáticas o de revolución (ver figura 4.1).

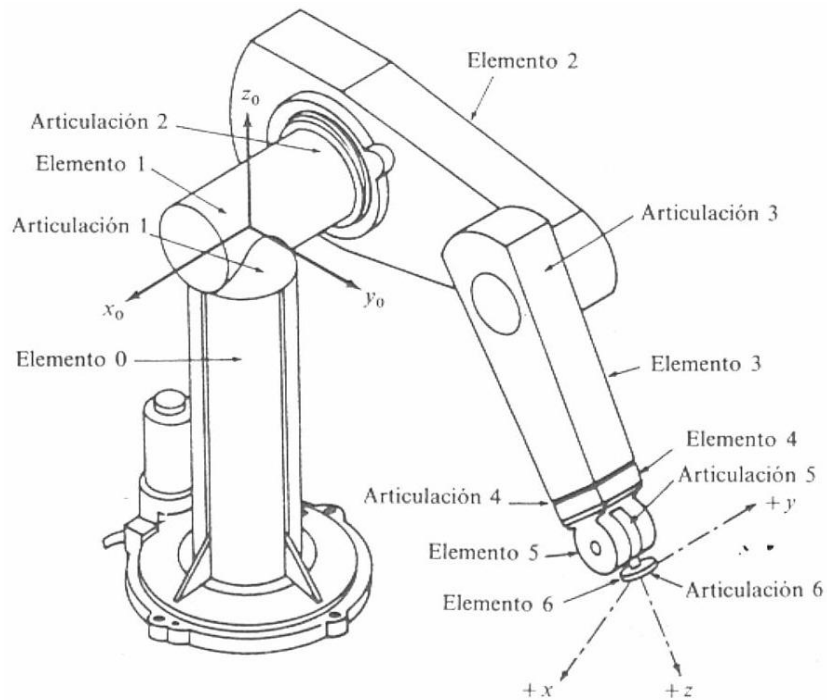


Figura 4.1. Robot PUMA ilustrando articulaciones y elementos.

Cada par cinemático articulación-elemento tiene un grado de libertad. De aquí que para un manipulador con N grados de libertad hay N pares cinemáticos articulación-elemento con el enlace 0 (no considerado parte del robot) unido a una base soporte donde se suele establecer un sistema de coordenadas inercial para este sistema dinámico, y el último elemento del robot está unido a la herramienta. Las articulaciones y elementos se enumeran alejándose desde la base; así la articulación 1 es el punto de conexión entre el elemento 1 y la base soporte. Cada elemento se conecta, como máximo, a otros dos, así pues no se forman lazos cerrados.

En general, dos elementos se conectan mediante un tipo de articulación que tiene dos superficies deslizantes, una sobre la otra, mientras permanecen en contacto. Únicamente son posibles seis tipos diferentes de articulaciones: de revolución (giratoria), prismática (deslizante), cilíndrica, esférica, de tornillo y plana (ver figura 4.2). De estas, únicamente la articulación giratoria y prismática son las más comunes en los manipuladores.

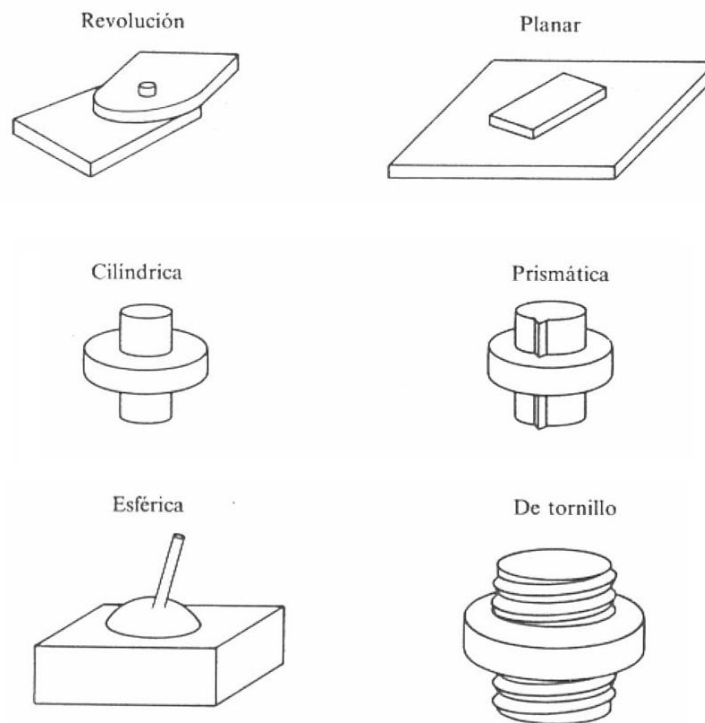


Figura 4.2. Tipos de articulaciones.

Un eje de articulación se establece (para la articulación i) en la conexión de dos elementos (ver figura 4.3). Este eje de articulación tendrá dos normales conectadas al mismo, una para cada uno de los elementos. La posición relativa de tales elementos conectados (elemento $i - 1$ y elemento i) viene dada por d_i , que es la distancia medida a lo largo del eje de la articulación i entre las normales $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$. El ángulo de articulación θ_i entre estas normales se mide en un plano normal al eje de la articulación $\mathbf{z}_{i-1}$. De aquí que d_i y θ_i se puede llamar la *distancia* y el *ángulo* entre los elementos adyacentes, respectivamente. Determina la posición relativa de los elementos adyacentes.

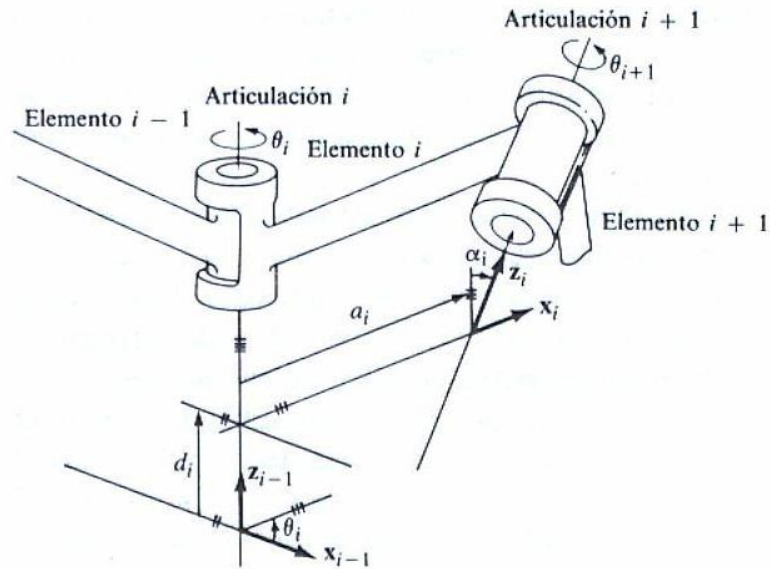


Figura 4.3. Sistemas de coordenadas de elementos y sus parámetros.

Un elemento i ($i = 1, \dots, 6$) se conecta a lo sumo a otros dos elementos (por ejemplo, al elemento $i - 1$ y al elemento $i + 1$); así se establecen dos ejes de articulación en ambos extremos de la conexión. El significado de los elementos, desde una perspectiva cinemática, es que mantienen una configuración fija entre sus articulaciones, que se pueden caracterizar por dos parámetros: a_i y α_i . El parámetro a_i es la distancia mínima medida a lo largo del eje $\mathbf{x}_i$ (perpendicular común) entre los ejes de la articulación (es decir, los ejes $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$ para las articulaciones i e $i + 1$, respectivamente), y α_i es el ángulo entre los ejes de articulación medidos en un plano

perpendicular al eje $\mathbf{x}_i$. Así, a_i y α_i se pueden llamar la *longitud* y el *ángulo de torsión* del elemento i , respectivamente. Determina la estructura del elemento i .

En resumen, se asocian cuatro parámetros, a_i , α_i , d_i y θ_i , con cada elemento de un manipulador. Si se ha establecido un convenio de signo para cada uno de estos parámetros, entonces constituyen un conjunto suficiente para determinar completamente la configuración cinemática de cada elemento del brazo del robot. Obsérvese que estos cuatro parámetros van en pares: los parámetros del elemento (a_i , α_i) que determinan la estructura del elemento y los parámetros de la articulación (d_i y θ_i) que determinan la posición relativa de los elementos cercanos.

4.2.2 La representación de Denavit-Hartenberg

Denavit y Hartenberg (1.955) propusieron un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de una cadena cinemática, y en particular del robot con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método utiliza una matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial (traslacional y rotacional) entre dos elementos rígidos adyacentes, reduciéndose el problema cinemático directo a encontrar una matriz de transformación homogénea 4 x 4 que relacione la localización espacial del extremo del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.

La representación de Denavit-Hartenberg (D-H) resulta en una matriz de transformación homogénea 4 x 4 que representa cada uno de los sistemas de coordenadas de los elementos en la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento anterior. Así, mediante transformaciones sucesivas, el extremo final del robot expresado en las << coordenadas de la mano >> se puede transformar y expresar en las << coordenadas de base >> que constituyen el sistema inercial de este sistema dinámico.

Se puede establecer para cada elemento en sus ejes de articulación un sistema de coordenadas cartesiano ortonormal $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)^*$, donde $i = 1, 2, \dots, N$ ($N =$ número de grados libertad), más el sistema de coordenadas de la base. Como una articulación giratoria tiene solamente un grado de libertad, cada sistema de coordenadas $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ del brazo de un robot corresponde a la articulación $i + 1$ y está fija en el elemento i . Cuando el actuador de la articulación activa la articulación i , el elemento i se moverá con respecto al elemento $i - 1$. Como el sistema de coordenadas i -ésimo está fijo en el elemento i , se mueve junto con el elemento i . Así pues, el sistema de coordenadas n -ésimo se mueve con la mano (elemento n). Las coordenadas de la base se definen como sistema de coordenadas número 0 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, que también es el sistema de coordenadas inercial del brazo. Así, para un robot como el **PUMA** de seis ejes, tenemos siete sistemas de coordenadas, que representamos con $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$, ..., $(\mathbf{x}_6, \mathbf{y}_6, \mathbf{z}_6)$.

Cada sistema de coordenadas se determina y establece sobre la base de tres reglas:

1. El eje $\mathbf{z}_{i-1}$ yace a lo largo del eje de la articulación.
2. El eje $\mathbf{x}_i$ es normal al eje $\mathbf{z}_{i-1}$ y apunta hacia fuera del mismo.
3. El eje $\mathbf{y}_i$ completa sistema de coordenadas dextrógiro según se requiera.

Mediante estas reglas, existe libertad para escoger la localización del sistema de coordenadas 0 en cualquier parte de la base soporte, mientras que el eje $\mathbf{z}_0$ esté a lo largo del eje de movimiento de la primera articulación. El último sistema coordenadas (el n -ésimo) se puede colocar en cualquier parte de la mano, mientras que el eje $\mathbf{x}_n$ sea normal al eje $\mathbf{z}_{n-1}$.

La representación de D-H de un elemento rígido depende de cuatro parámetros geométricos asociados con cada elemento. Estos cuatro parámetros

describen completamente cualquier articulación prismática o de revolución. Refiriéndonos a la figura 4.3, estos cuatro parámetros se definen como sigue:

θ_i : Es el ángulo de la articulación del eje $\mathbf{x}_{i-1}$ al eje $\mathbf{x}_i$ girado respecto del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ (utilizando la regla de la mano derecha).

d_i : Es la distancia desde el origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ con el eje $\mathbf{x}_i$ (distancia entre las normales $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$) medida a lo largo del eje $\mathbf{z}_{i-1}$.

a_i : Es la distancia de separación a lo largo del eje $\mathbf{x}_i$, medida desde la intersección del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ con el eje $\mathbf{x}_i$ hasta el origen del sistema i -ésimo (o la distancia mínima entre los ejes $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$).

α_i : Es el ángulo de separación del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ al eje $\mathbf{z}_i$ girado respecto del eje $\mathbf{x}_i$ en un plano perpendicular a este (utilizando la regla de la mano derecha).

Para un articulación giratoria, d_i , a_i , y α_i , son los parámetros de articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que θ_i es la variable de articulación que cambia cuando el elemento i se desplaza (o gira) con respecto al elemento $i - 1$. Para un articulación prismática, θ_i , a_i , y α_i son los parámetros de la articulación y permanecen constantes para un robot, mientras que d_i es la variable de la articulación. Para el resto de este trabajo, la *variable de la articulación* se refiere a θ_i (o d_i), esto es, la cantidad que varía, y los *parámetros de articulación* se refiere a los restantes tres valores geométricos constantes (d_i , a_i , y α_i) para un articulación giratoria ó (θ_i , a_i , y α_i) para un articulación prismática.

Con las tres reglas básicas anteriores para establecer un sistema de coordenadas ortonormal en cada elemento y la interpretación geométrica de los parámetros de la articulación y el elemento. Se presenta en el **algoritmo 4.1** un

procedimiento para establecer un sistema de coordenadas ortonormal *consistente* para un robot.

Algoritmo 4.1: **Asignación del sistema de coordenadas de los elementos.** Dado un brazo con N grados de libertad, éste algoritmo asigna un sistema de coordenadas ortonormal a cada elemento del brazo de acuerdo a configuraciones de brazos similar a aquellas de la geometría del brazo humano. La asignación del sistema de coordenadas comienza desde la base soporte hasta el extremo final del brazo. Las relaciones entre elementos adyacentes se pueden representar mediante una matriz de transformación homogénea 4×4 . (Obsérvese que la asignación de los sistemas de coordenadas no es única.).

D1. *Establecer el sistema de coordenadas de la base.* Establecer un sistema de coordenadas ortonormal dextrógiro ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$) en la base soporte con el eje $\mathbf{z}_0$ estando a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 y apuntando hacia afuera del hombro del brazo del robot. Los ejes $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ se puede establecer convenientemente y son normales al eje $\mathbf{z}_0$.

D2. *Inicializar y repetir.* Para cada $i, i = 1, \dots, n - 1$, realizar los pasos **D3** a **D6**.

D3. *Establecer los ejes de la articulación.* Alinear el eje $\mathbf{z}_i$ con el eje de movimiento (giratorio o deslizante) de la articulación $i + 1$. Para robots que tengan configuraciones de brazo levógiros, los ejes $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ está apuntando hacia afuera del hombro y el << tronco >> del brazo del robot.

D4. *Establecer el origen del sistema de coordenadas i -ésimo.* Localizar el origen del sistema de coordenadas i -ésimo en la intersección de los ejes $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{z}_{i-1}$ o en la intersección de las normales comunes a los ejes $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{z}_{i-1}$ y el eje $\mathbf{z}_i$.

D5. *Establecer el eje $\mathbf{x}_i$.* Establecer $\mathbf{x}_i = \pm (\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i) / \|\mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{z}_i\|$ o a lo largo de la normal común a los ejes $\mathbf{z}_{i-1}$ y $\mathbf{z}_i$ cuando son ejes paralelos.

D6. *Establecer el eje $\mathbf{y}_i$.* Asignar $\mathbf{y}_i = + (\mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i\|$ para completar el sistema de coordenadas dextrógiro. (Extender si es necesario los ejes $\mathbf{z}_i$ y $\mathbf{x}_i$ a los pasos **D9** a **D12**).

D7. *Establecer el sistema de coordenadas de la mano.* Normalmente la articulación n -ésima es de tipo giratorio. Establecer $\mathbf{z}_n$ a lo largo de la dirección del eje $\mathbf{z}_{n-1}$ y apuntando hacia afuera del robot. Establecer $\mathbf{x}_n$ tal que sea normal a ambos ejes $\mathbf{z}_{n-1}$ y $\mathbf{z}_n$. Asignar $\mathbf{y}_n$ para completar el sistema coordenadas dextrógiro (este paso se estudiará con detalle mas adelante).

D8. *Encontrar los parámetros de la articulación y del elemento.* Para $i, i = 1, \dots, n$, realizar los pasos **D9** a **D12**.

D9. *Encontrar d_i .* donde d_i es la distancia del origen del sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo a la intersección del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ y el eje $\mathbf{x}_i$ a lo largo del eje $\mathbf{z}_{i-1}$. Es la variable de la articulación si i es prismática.

D10. *Encontrar a_i .* donde a_i es la distancia de la intersección entre el eje $\mathbf{z}_{i-1}$ y el eje $\mathbf{x}_i$ al origen del sistema coordenadas i -ésimo a lo largo del eje $\mathbf{x}_i$.

D11. *Encontrar θ_i .* donde θ_i es el ángulo de rotación del eje $\mathbf{x}_{i-1}$ hasta el eje $\mathbf{x}_i$ respecto del eje $\mathbf{z}_{i-1}$. Es la variable de articulación si i es giratoria.

D12. *Encontrar α_i .* donde α_i es el ángulo de rotación desde el eje $\mathbf{z}_{i-1}$ hasta el eje $\mathbf{z}_i$ alrededor del eje $\mathbf{x}_i$.

En la figura 4.4 se presenta un ejemplo de aplicación de este algoritmo a un robot PUMA de seis ejes y en la tabla 4.1 se dan las ligaduras de articulación correspondientes a esta figura, basadas en el sistema de coordenadas asignado.

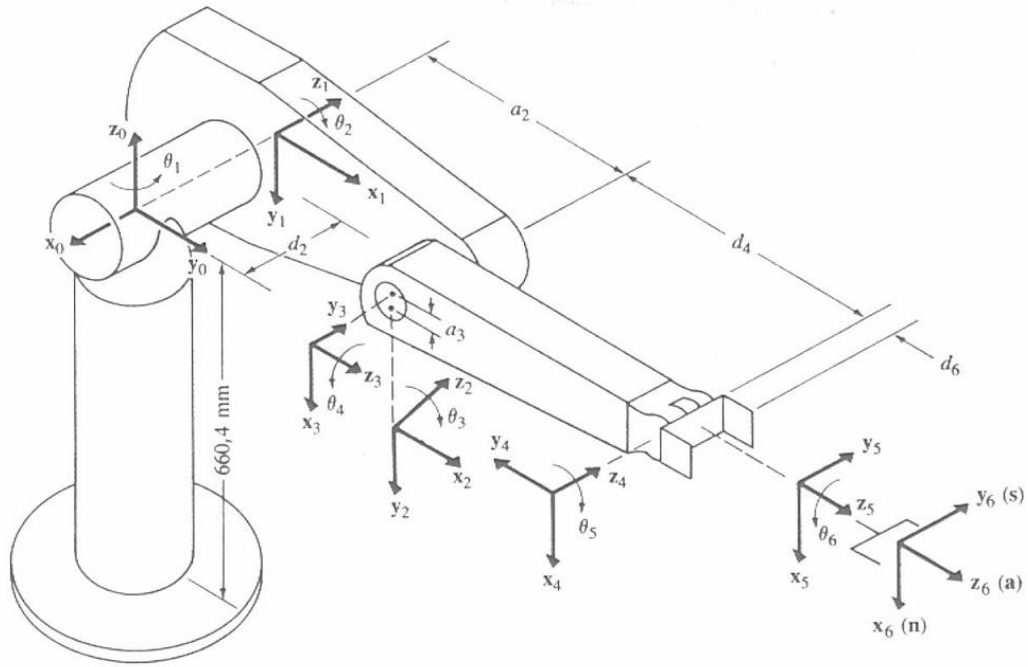


Figura 4.4. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot PUMA.

Tabla 4.1. Ligaduras de articulación para el robot PUMA de la figura 4.4

Parámetros de coordenadas de los elementos de un robot PUMA					
Articulación i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Rango de la articulación
1	90	-90	0	0	-160° a +160°
2	0	0	431,8 mm	149,09 mm	-225° a +45°
3	90	90	-20,32 mm	0	-45° a +225°
4	0	-90	0	433,07 mm	-110° a +170°
5	0	90	0	0	-100° a +100°
6	0	0	0	56,25 mm	-266° a +266°

Una vez establecido el sistema de coordenadas D-H para cada elemento, se puede desarrollar fácilmente una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas i -ésimo con el sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo. Observando la figura 4.3, es obvio que un punto $\mathbf{r}_i$ expresado en el sistema de coordenadas i -ésimo se puede expresar en el sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo como $\mathbf{r}_{i-1}$ realizando las siguientes transformaciones sucesivas:

1. Girar respecto del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ un ángulo de θ_i para alinear el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ con el eje $\mathbf{x}_i$ (el eje $\mathbf{x}_{i-1}$ es paralelo a $\mathbf{x}_i$ y apunta en la misma dirección).
2. Trasladar a lo largo del eje $\mathbf{z}_{i-1}$ una distancia d_i para hacer coincidir los ejes $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_i$.
3. Trasladar a lo largo del eje $\mathbf{x}_i$ una distancia a_i para hacer coincidir también los dos orígenes de los ejes $\mathbf{x}$.
4. Girar respecto del eje $\mathbf{x}_i$ un ángulo α_i para hacer coincidir a los sistemas de coordenadas.

Cada una de estas cuatro operaciones se puede expresar mediante una matriz rotación-traslación homogénea básica y el producto de estas cuatro matrices de transformación homogéneas básicas genera una matriz de transformación homogénea compuesta, ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, conocida como la matriz de transformación D-H para el sistema de coordenadas adyacentes i e $i - 1$. Por lo tanto,

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{x,a} \mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha_i \sin \theta & \sin \alpha_i \sin \theta & a_i \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha_i \cos \theta & -\sin \alpha_i \cos \theta & a_i \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

4.3 Ecuaciones cinemáticas para los manipuladores

La matriz homogénea ${}^0\mathbf{T}_i$ que especifica la localización del sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base es el producto en cadena de matrices de transformación de coordenadas sucesivas ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ y se expresa como:

$${}^0\mathbf{T}_i = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}\mathbf{A}_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$${}^0\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$\prod$ es la productoria y $0_{1 \times 3}$ es la sub matriz nula 1 x 3 que representa la transformación de perspectiva como se explicó en el capítulo 3, sección 3.6. Con:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha_i \sin \theta & \sin \alpha_i \sin \theta & a_i \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha_i \cos \theta & -\sin \alpha_i \cos \theta & a_i \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y los parámetros de cada articulación se obtienen las matrices de transformación de coordenadas de los elementos del robot PUMA.

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -S_1 & C_1S_{23} & a_2C_1C_2 + a_3C_1C_{23} - d_2S_1 \\ S_1C_{23} & C_1 & S_1S_{23} & a_2S_1C_2 + a_3S_1C_{23} + d_2C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2S_2 - a_3S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & d_6C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & d_6S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & d_6C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $C_i \equiv \cos \theta_i$; $S_i \equiv \sin \theta_i$; $C_{ij} \equiv \cos (\theta_i + \theta_j)$; $S_{ij} \equiv \sin (\theta_i + \theta_j)$. (Las funciones trigonométricas fueron abreviadas por razones de espacio)

donde:

$[x_i, y_i, z_i]$ = matriz de orientación del sistema de coordenadas i -ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base. Es la sub matriz de rotación superior izquierda 3 x 3 de 0T_i .

p_i = vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas i -ésimo. Es la sub matriz superior derecha 3 x 1 de 0T_i .

Específicamente, para $i = 6$, obtenemos la matriz T , $T = {}^0T_6$, que especifica la posición y orientación del punto final del manipulador con respecto al sistema de coordenadas de la base. Esta matriz T se utiliza tan frecuentemente en la cinemática brazo robot que se llama la <<matriz del brazo>>. Considere que la matriz T sea de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde (véase figura 4.5):

n = vector normal a la mano. Suponiendo una mano del tipo de mordaza paralela que es ortogonal a los dedos del brazo robot.

$\mathbf{s}$ = vector de desplazamiento lateral de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.

$\mathbf{a}$ = vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano (es decir, normal a la placa de montaje de la herramienta robot).

$\mathbf{p}$ = vector de posición de la mano. Apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas de la mano, que se debe localizar en el punto central de los dedos totalmente cerrados.

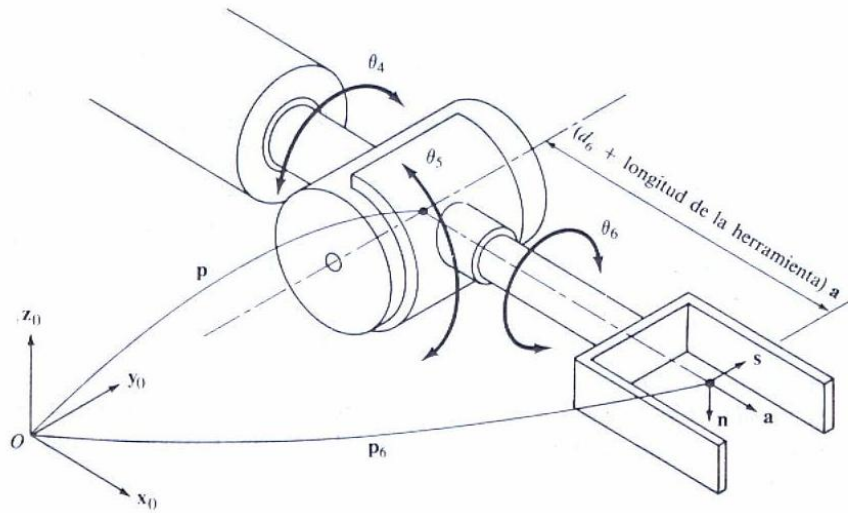


Figura 4.5. Sistema de coordenadas de la mano $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$.

Si el manipulador se relaciona a un sistema de coordenadas de referencia mediante una transformación $\mathbf{B}$ y tiene una herramienta unida a la base de montaje de la última articulación descrita por $\mathbf{H}$, entonces el punto final de la herramienta se puede relacionar con el sistema de coordenadas de referencia multiplicando las matrices $\mathbf{B}$, ${}^0\mathbf{T}_6$ y $\mathbf{H}$ como

$${}^{\text{ref}}\mathbf{T}_{\text{herr}} = \mathbf{B} {}^0\mathbf{T}_6 \mathbf{H} \quad (4.4)$$

Obsérvese que $\mathbf{H} \equiv {}^6\mathbf{A}_{\text{herr}}$ y $\mathbf{B} \equiv {}^{\text{ref}}\mathbf{A}_0$.

La solución cinemática directa de un manipulador de seis elementos es, por lo tanto, simplemente un asunto de calcular $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6$ mediante la multiplicación de las seis matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ y evaluar cada elemento en la matriz $\mathbf{T}$. Obsérvese que la solución cinemática directa da una única matriz $\mathbf{T}$ para un $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$ y un conjunto de sistemas de coordenadas dados, donde $q_i = \theta_i$ para una articulación giratoria y $q_i = d_i$ para una articulación prismática. Las únicas ligaduras son las acotaciones físicas de θ_i para cada articulación del brazo de un robot.

La tabla 4.1 da las ligaduras de articulación de un robot de la serie PUMA 560 basado en sistema de coordenadas asignado en la figura 4.4.

Una vez obtenidas todas las matrices de transformación de coordenadas ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ para el brazo de un robot, la siguiente tarea es encontrar un método eficaz de calcular $\mathbf{T}$ utilizando algún programa de computadora. El método más eficiente es multiplicando las seis matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ manualmente y evaluando los elementos de la matriz $\mathbf{T}$ explícitamente en un programa de computadora. Las desventajas de este método son: 1) es laborioso multiplicar las seis matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, 2) la matriz del brazo es aplicable solamente a un robot particular para un conjunto específico del sistema de coordenadas (no es flexible). En el otro extremo se pueden introducir las seis matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ y permitir que la computadora realice la multiplicación. Este método es muy flexible, pero con el costo de tiempo del cálculo en cuanto que la cuarta fila de ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ consiste mayormente elementos nulos.

Un método que tiene ambas ventajas, cálculo rápido y flexibilidad, si se hicieran los cálculos manualmente, es multiplicar las tres primera matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ para formar $\mathbf{T}_1 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$ y también las últimas tres matrices ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ para formar $\mathbf{T}_2 = {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6$, que es una tarea relativamente directa. A continuación expresamos lo

elementos de T_1 y T_2 explícitamente en un programa y permitimos que la computadora los multiplique para formar la matriz del brazo resultante $T = T_1 T_2$.

Para un robot de la serie PUMA 560, T_1 se determina de como

$$T_1 = {}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

y la matriz T_2 se encuentra que es

$$T_2 = {}^3A_6 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

donde $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$ y $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$.

La matriz del brazo T para robot **PUMA** que se muestra en la figura 4.4 se encuentra que es:

$$T = T_1 T_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} n_x &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ n_y &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ n_z &= -S_{23}[C_4C_5C_6 - S_4S_6] - C_{23}S_5C_6 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} s_x &= C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\ s_y &= S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\ s_z &= S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} a_x &= C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \\ a_y &= S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \\ a_z &= -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} p_x &= C_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] - S_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_y &= S_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_3C_{23} + a_2C_2] + C_1(d_6S_4S_5 + d_2) \\ p_z &= d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}d_4 - a_3S_{23} - a_2S_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como una comprobación, si $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 = 0^\circ$, $\theta_6 = 0^\circ$, entonces la matriz **T** es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -149,09 \\ 0 & 0 & 1 & 921,12 \\ -1 & 0 & 0 & 20,32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que está de acuerdo el con sistema de coordenadas establecido en la figura 4.4

De las ecuaciones (4.8) a (4.11), la matriz del brazo **T** requiere doce llamadas de funciones trascendentes, cuarenta multiplicaciones y veinte sumas si solamente

calculamos la submatriz superior izquierda 3×3 de $\mathbf{T}$ (cuya interpretación geométrica se explica en el capítulo 3, sección 3.5) y el vector normal $\mathbf{n}$ se encuentra del producto vectorial de ($\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{a}$). Más aún, si combinamos d_6 con la longitud de la herramienta del dispositivo terminal, entonces $d_6 = 0$ y la nueva longitud de la herramienta se incrementa en d_6 unidades. Esto reduce los cálculos a doce llamadas de funciones trascendentes, treinta y cinco multiplicaciones y dieciséis sumas.

4.4 La Representación de Denavit-Hartenberg para otros manipuladores

En la sección 4.2.2 se desarrollo el algoritmo 4.1 que permite establecer los sistemas de coordenadas y determinar los parámetros asociados a cada articulación de un brazo robótico. Este se aplicó al robot PUMA 560 y a través del producto de las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ se calculó la matriz del brazo $\mathbf{T}$ para este modelo.

Ahora bien, los brazos robóticos actuales se han simplificado y mejorado, con respecto al robot PUMA, reduciendo el tamaño de sus elementos y disponiendo sus ejes de articulación de manera que todos los orígenes de los sistemas de coordenadas asignados puedan, de forma general, ser ubicados en un plano de simetría, facilitando la aplicación del algoritmo 4.1 y la obtención de los parámetros D-H.

Es igualmente importante entender que la representación de los sistemas de coordenadas (posición y orientación) no es única para un mismo brazo robótico, esto dependerá de la configuración de sus elementos y del conocimiento de todas sus dimensiones así como de los sentidos que se asuman para los ejes coordenados. A continuación veremos como el algoritmo 4.1 puede ser aplicado a cualquier manipulador para hallar su representación de Denavit-Hartenberg.

Antes de realizar el análisis cinemático directo se deben tener en claro tres conceptos: *rango de movimiento* que indica el valor del ángulo en que la articulación

puede moverse, *límites físicos de la articulación* que indican los valores límites (máximo y mínimo) que puede alcanzar un elemento con respecto a otro y *rango de la articulación* el cual es similar a los límites físicos pero este último se determina con respecto a los sistemas de coordenadas asumidos para cada articulación, lo que significa que estos pueden variar.

4.4.1 Modelo ABB, IRB-140



Figura 4.6. Vistas del robot ABB IRB-140.

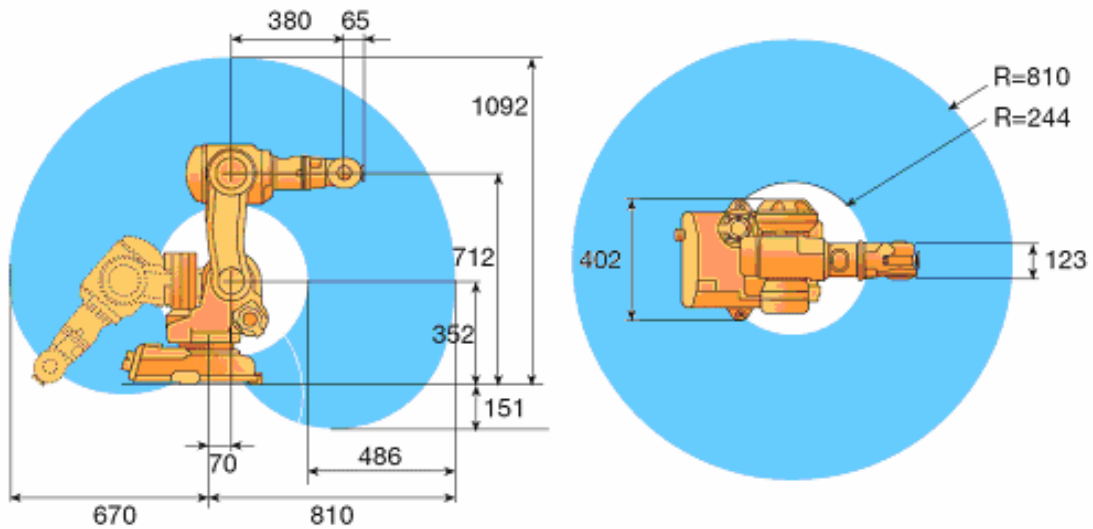


Figura 4.7. Dimensiones del robot ABB IRB-140 (medidas en mm).

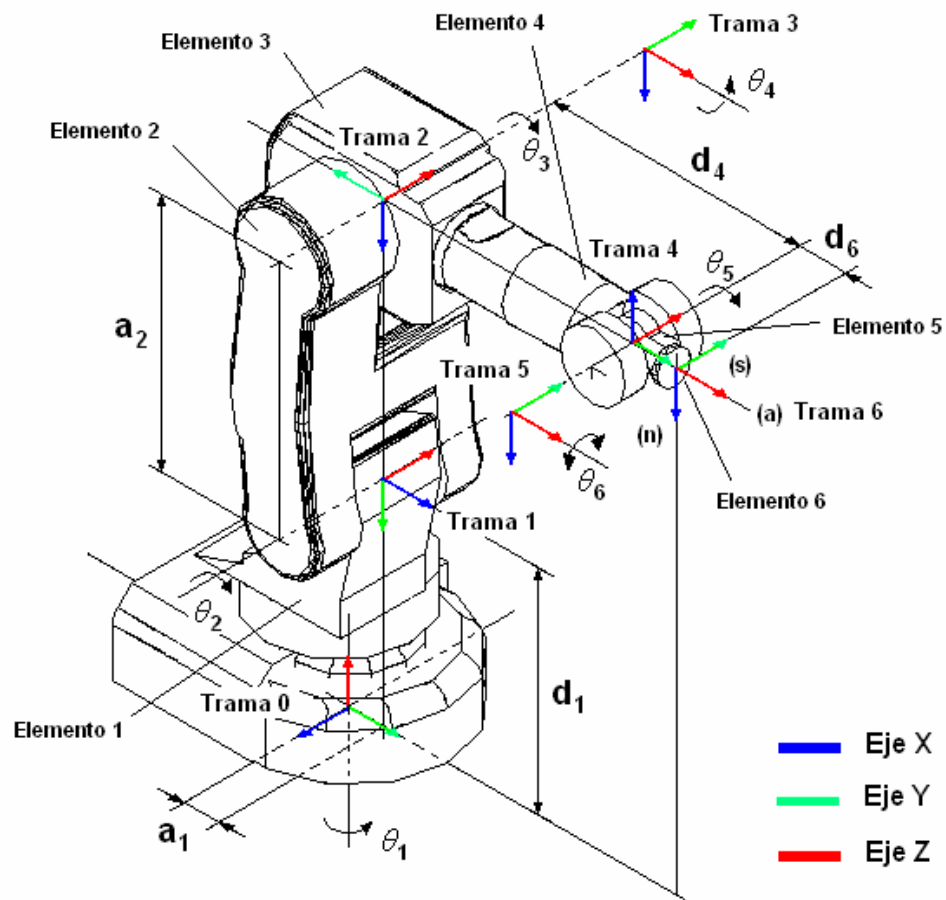


Figura 4.8. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot ABB IRB-140.

Tabla 4.2. Ligaduras de articulación para el robot ABB IRB-140 de la figura 4.8.

Parámetros de coordenadas de los elementos de un robot ABB IRB-140					
Articulación i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Rango de la articulación
1	90	-90	70 mm	352 mm	-180° a 180°
2	90	0	-360 mm	0	0° a 200°
3	0	90	0	0	-190° a 50°
4	180	90	0	380 mm	-180° a 180°
5	180	90	0	0	60° a 300°
6	0	0	0	65 mm	-180° a 180°

4.4.2 Modelo FANUC, serie R-2000iA/165 F



Figura 4.9. Vistas del robot FANUC serie R-2000iA/165 F.

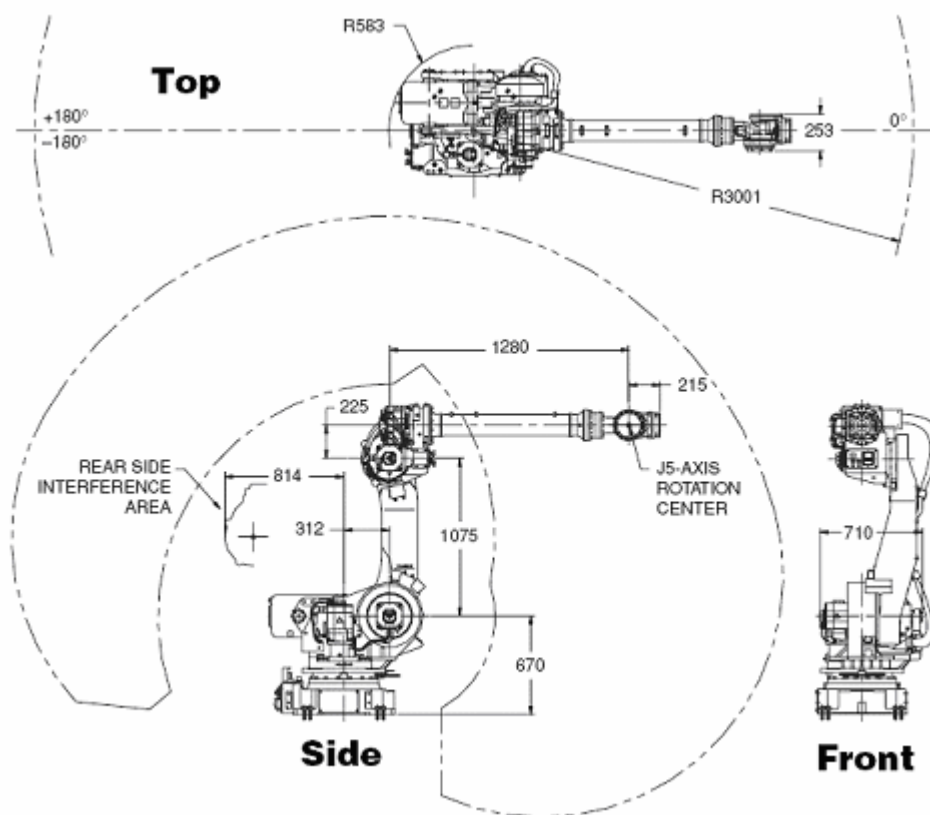


Figura 4.10. Dimensiones del robot FANUC serie R-2000iA/165 F (medidas en mm).

Tabla 4.3. Ligaduras de articulación para el robot FANUC serie R-2000iA de la figura 4.11.

Parámetros de coordenadas de los elementos de un robot FANUC serie R-2000iA					
Articulación i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Rango de la articulación
1	90	-90	312 mm	670 mm	-180° a 180°
2	90	0	-1075 mm	0	30° a 165°
3	0	90	-225 mm	0	-272° a 90°
4	180	90	0	1280 mm	-180° a 180°
5	180	90	0	0	55° a 305°
6	0	0	0	215 mm	-180° a 180°

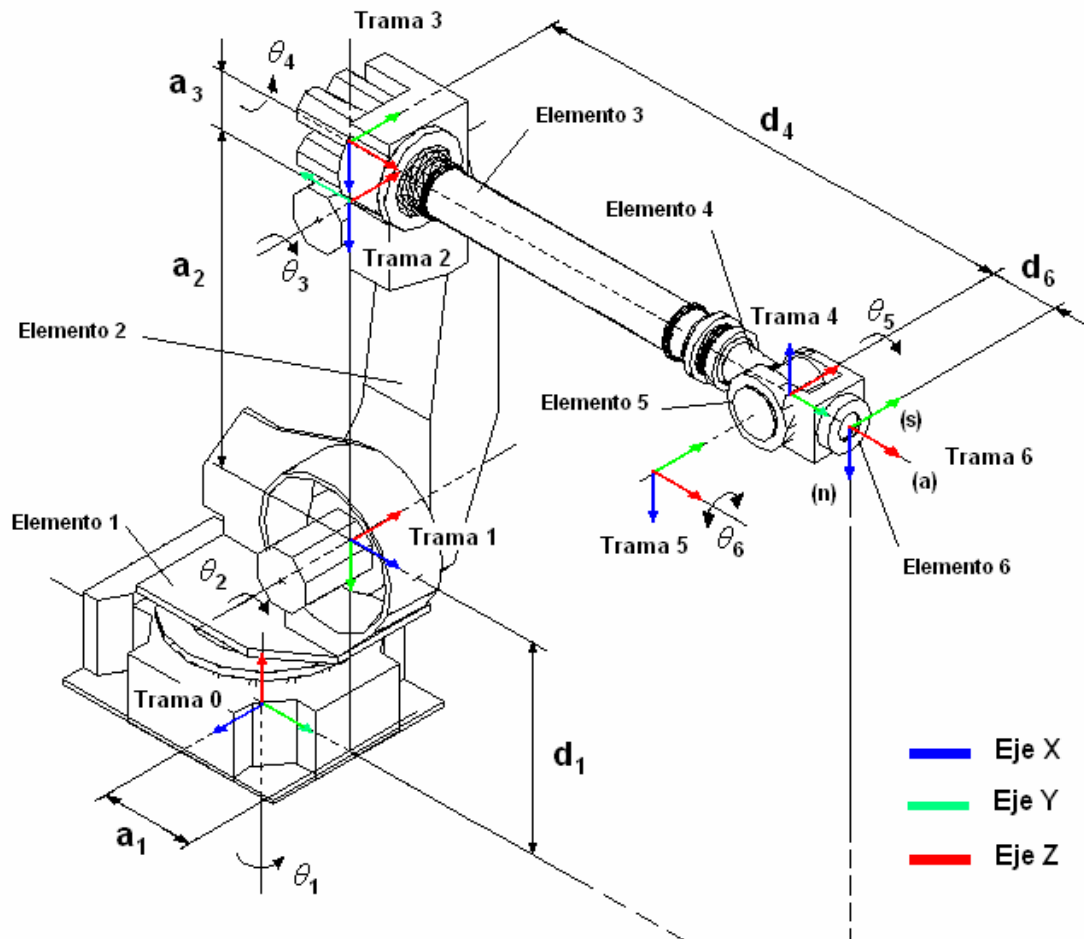


Figura 4.11. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot FANUC serie R-2000iA/165 F.

4.4.3 Modelo KUKA KR-100-2 PA

En la industria es común encontrar robots con solo 4 GDL, los cuales están basados en dos mecanismos de cuatro barras. Estos se denominan paletizadores y se emplean para ordenar materiales o productos en una plataforma de madera, de manera que puedan ser empacados y transportados en las cantidades requeridas. A este tipo de manipulador se puede aplicar, de igual forma, el algoritmo para establecer sus sistemas de coordenadas y sus parámetros de Denavit-Hartenberg.

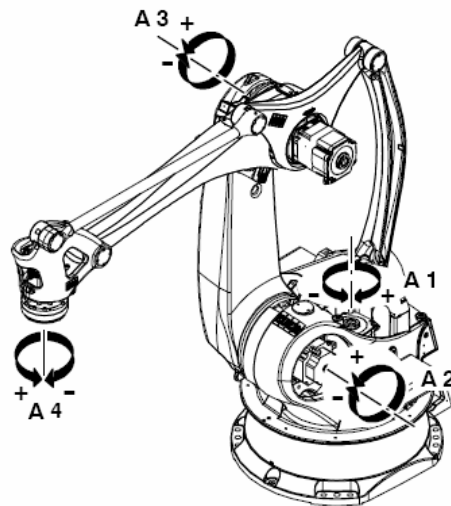


Figura 4.12. Vistas del robot KUKA KR-100-2 PA.

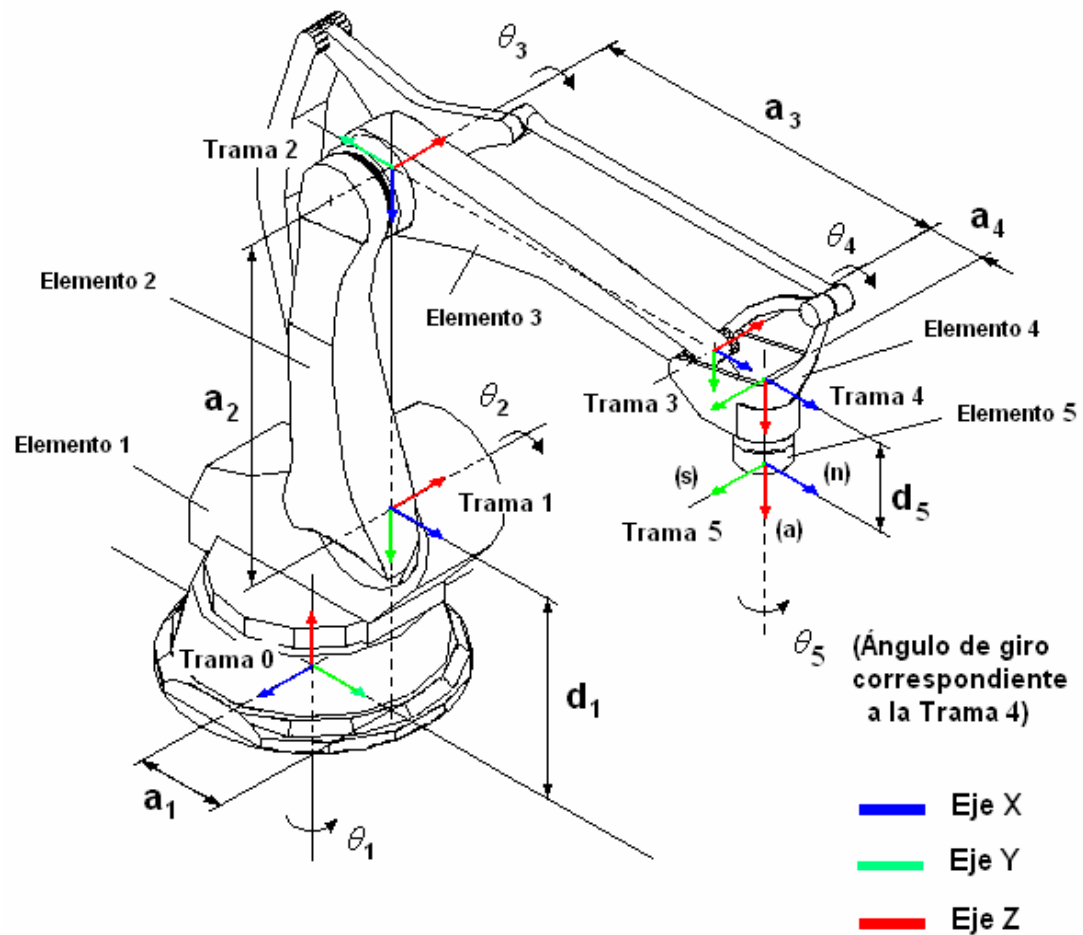


Figura 4.14. Establecimiento del sistema de coordenadas de elementos para un robot KUKA KR-100-2 PA.

Para este último brazo robótico hay que tener especial atención cuando se realiza el análisis cinemático directo. A pesar que estos mecanismos tienen cuatro GDL la articulación de la muñeca constituye una quinta variable angular, es decir, que su parámetro de articulación (θ_4) no puede adquirir un valor arbitrario sino que depende del valor de θ_3 , en este caso $\theta_4 = -(\theta_3 + 90^\circ)$ como se muestra en la figura 4.15. De esta manera se debe establecer un sistema de coordenadas y una matriz de transformación homogénea adicionales. Esto es una particularidad de los robots paletizadores que utilizan el sistema de cuatro barras.

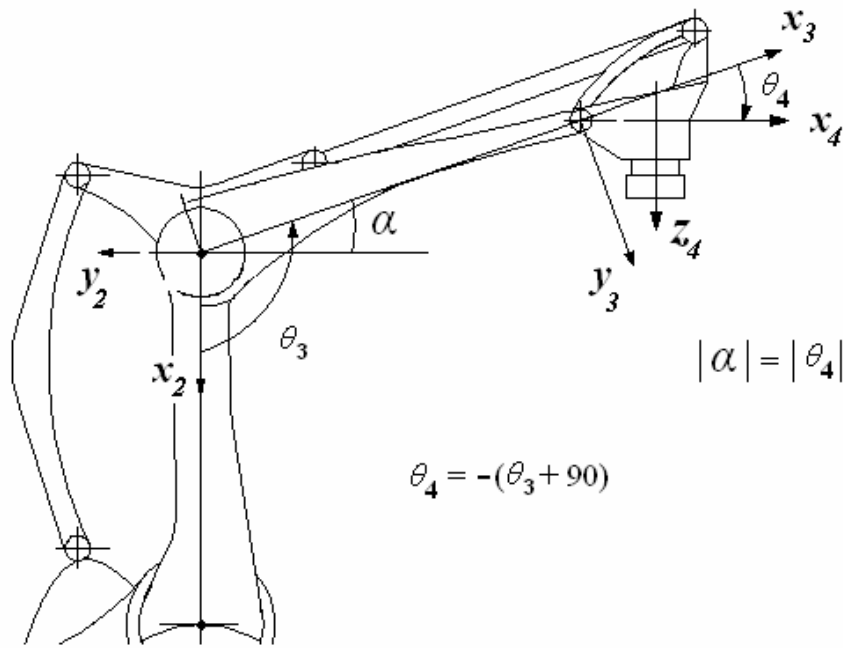


Figura 4.15. Dependencia del parámetro de articulación θ_4 en función del valor de θ_3 para un robot paletizador KUKA KR-100-2 PA.

Una vez establecidos los sistemas de coordenadas y determinados los parámetros de Denavit-Hartenberg se puede comprobar que la asignación se hizo de manera correcta calculando la matriz de brazo $\mathbf{T}$, a través el producto de las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$. La matriz resultante dará la posición y orientación del último sistema de coordenadas respecto al sistema de referencia ($\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$). Esta posición es conocida por la configuración del brazo y sus dimensiones. Igualmente se conocen las orientaciones de los ejes coordenados del último sistema asignado.

CAPITULO V

EL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

CAPITULO V

EL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO

En este capítulo se plantea el segundo problema de la cinemática del robot: la cinemática inversa o solución de brazo para un manipulador con seis articulaciones.

Con el fin de controlar la posición y orientación del extremo final de un robot para alcanzar su objeto, es más importante la solución cinemática inversa. En otras palabras, dada la posición y orientación del extremo final de un brazo robot de seis ejes, definida por la matriz de brazo 0T_6 y sus parámetros de articulación y elementos, nos gustaría encontrar los ángulos de articulación correspondientes $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$ del robot de manera que se pueda posicionar como se desee el extremo final.

Así como es posible abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogéneas, e independientemente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso, siendo el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot.

Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados, de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot (con sus parámetros de Denavit-Hartenberg, por ejemplo) obtener la n-upla de valores articulares que posicionan y orientan sus extremo. El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia en sí no está siempre garantizada.

Entre los diversos métodos existentes para resolver el problema cinemático inverso se pueden mencionar la transformación inversa (Paul y col. [1.981]), el álgebra de tornillo (Kohli y Soni [1.975]), matrices duales (Denavit [1.956]), cuaterniones duales (Yang y Freudenstein [1.964]), iterativo (Uicker y col. [1.964]) y métodos geométricos (Lee y Ziegler [1.984]).

Paul y col. [1.981] presentaron una técnica transformada inversa utilizando las matrices de transformación homogénea 4×4 para obtener la solución cinemática inversa. Aunque la solución resultante es correcta, tiene el problema de que no da una indicación clara sobre como seleccionar una solución apropiada de las diversas soluciones posibles para una configuración de brazo particular. El usuario a menudo necesita recurrir a la intuición y experiencia para tomar la respuesta correcta.

Uicker y Col [1.964] y Milenkovic y Huang [1.983] presentaron soluciones iterativas para la mayoría de los robots industriales. La solución iterativa a menudo requiere más cálculos y no garantiza la convergencia a la solución correcta. Más aún, como con la técnica transformada inversa, no existe indicación sobre como escoger la solución correcta para una configuración de brazo particular.

A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado y deseable encontrar una solución del brazo en forma cerrada para los manipuladores.

La solución cerrada presenta entre otras las siguientes ventajas:

1. En muchas aplicaciones, el problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real (por ejemplo, en el seguimiento de determinada trayectoria). Una solución de tipo iterativo no garantiza tener una solución en el momento adecuado.

2. Al contrario de lo que ocurría en el problema cinemático directo, con cierta frecuencia la solución del problema inverso no es única; existiendo diferentes n -uplas

$[q_1, \dots, q_n]^T$ que posicionan y orientan el extremo del robot del mismo modo. En estos casos, una solución cerrada permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada.

No obstante, a pesar de las dificultades comentadas, la mayor parte de los robots son sencillos de estudiar cinemáticamente. Por ejemplo, si se consideran los tres primeros grados de libertad de muchos robots, estos tienen una estructura planar, esto es, los tres primeros elementos quedan contenidos en un plano. Esta circunstancia facilita la resolución del problema.

Teniendo presente lo anteriormente expuesto, se explorarán en detalle dos de los métodos para encontrar la solución inversa: el método geométrico y el método de desacoplo cinemático, los cuales proporcionan más información al resolver manipuladores simples con articulaciones giratorias sin recurrir a métodos iterativos de poca practicidad y confiabilidad.

5.1 El método geométrico

A continuación, se presentará un método geométrico para la resolución del problema cinemático inverso de manipuladores de seis elementos con articulaciones giratorias. La discusión se enfoca sobre el manipulador tipo PUMA, cuya configuración es comúnmente utilizada por la mayoría de los robots industriales, con algunas variaciones. **Sin embargo, este método puede adaptarse sin problemas a estas nuevas configuraciones como se verá en el capítulo 8.** Basado en el sistema de coordenadas del elemento y en la geometría del brazo humano, se pueden identificar diversas configuraciones de brazo de un robot tipo PUMA (Figura 4.1) con la ayuda de tres indicadores de configuración (**BRAZO, CODO y MUÑECA**) — los dos primeros asociados con la solución de las tres primeras articulaciones y el último asociado a la solución de las tres últimas—.

Para un robot de seis ejes tipo PUMA, existen cuatro soluciones posibles para las tres primeras articulaciones. Cada una de estas cuatro soluciones se combina posteriormente con una de las dos posibles soluciones que existen para las tres últimas articulaciones. Los dos primeros indicadores de configuración permiten determinar una solución de las cuatro soluciones posibles para las tres primeras articulaciones. Análogamente, el tercer indicador selecciona una solución de las dos posibles para las tres últimas articulaciones. Los indicadores de articulación del brazo se especifican por el usuario para encontrar la solución inversa.

La solución se calcula en dos etapas. Primero, se deriva un vector de posición apuntando desde el hombro hasta la muñeca. Esto se utiliza para obtener la solución de cada articulación i ($i = 1, 2, 3$) para las tres primeras articulaciones examinando la proyección del vector de posición sobre el plano $\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}$. Las tres últimas articulaciones se determinan utilizando la solución de la articulación calculada de las tres primeras articulaciones, las submatrices de orientación de ${}^0\mathbf{T}_i$ y ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ ($i = 4, 5, 6$), y la proyección del sistema de coordenadas de los elementos sobre el plano $\mathbf{x}_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}$ a través del desacoplo cinemático.

De la geometría se puede encontrar fácilmente la solución del brazo en forma consistente. Como una verificación de la solución de la articulación, se pueden determinar los indicadores de configuración del brazo, partiendo de las ecuaciones de decisión correspondientes, las cuales son funciones de los ángulos de la articulación. Con modificaciones y ajustes apropiados se puede generalizar este método para resolver el problema cinemático inverso de la mayoría de los robots industriales existentes con articulaciones giratorias.

Definición de las diversas configuraciones de brazo. Para un robot PUMA mostrado en la figura 4.1 (y otros robots giratorios), se definen diversas configuraciones de brazo de acuerdo con la geometría del brazo humano y el sistema

de coordenadas de elementos (ver figura 5.1): que se estableció utilizando el algoritmo 4.1 como:

BRAZO DERECHO (hombro): θ_2 positivo mueve la muñeca en la dirección z_0 positivo mientras la articulación tres no se activa.

BRAZO IZQUIERDO (hombro): θ_2 positivo mueve la muñeca en la dirección z_0 negativa mientras la articulación tres no se activa.

BRAZO ARRIBA (codo por encima de la muñeca): Posición de la muñeca del brazo $\left\{ \begin{array}{l} \text{DERECHO} \\ \text{IZQUIERDO} \end{array} \right\}$ con respecto al sistema de coordenadas del hombro tiene valor de coordenada $\left\{ \begin{array}{l} \text{negativo} \\ \text{positivo} \end{array} \right\}$ a lo largo del eje y_2 .

BRAZO ABAJO (codo por debajo de la muñeca): Posición de la muñeca del brazo $\left\{ \begin{array}{l} \text{DERECHO} \\ \text{IZQUIERDO} \end{array} \right\}$ con respecto al sistema de coordenadas del hombro tiene valor de coordenada $\left\{ \begin{array}{l} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{array} \right\}$ a lo largo del eje y_2 .

(Obsérvese que la definición de las configuraciones del brazo con respecto al sistema de coordenadas del elemento debe ser ligeramente modificada si se utilizan diferentes sistemas de coordenadas para los elementos).

Con respecto a la definición anterior de las diversas configuraciones del brazo, se definen dos *indicadores* de configuraciones de brazo (**BRAZO Y CODO**) para cada configuración. Estos dos indicadores se combinan para dar una solución de las cuatro probables soluciones para las tres primeras articulaciones y se pueden definir como:

$$\mathbf{BRAZO} = \begin{cases} +1 & \text{brazo DERECHO} \\ -1 & \text{brazo IZQUIERDO} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{CODO} = \begin{cases} +1 & \text{brazo ARRIBA} \\ -1 & \text{brazo ABAJO} \end{cases} \quad (5.2)$$

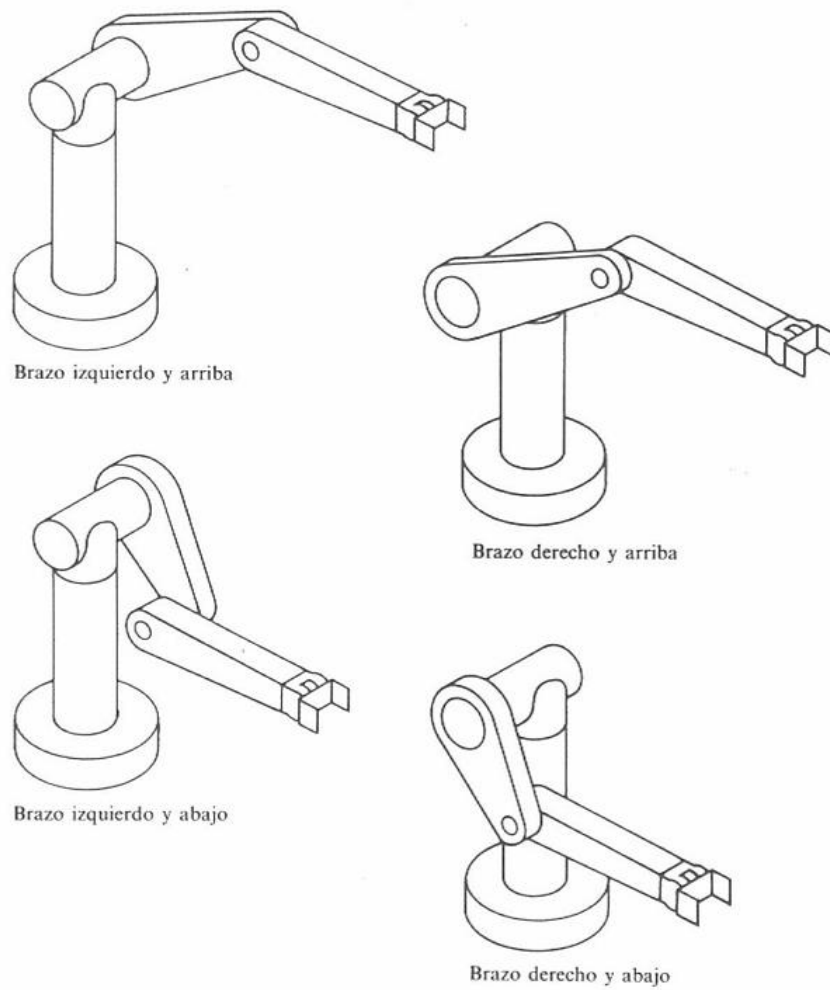


Figura 5.1. Definición de diversas configuraciones de brazo.

Solución de brazo para las tres primeras articulaciones. Del diagrama cinemático del robot PUMA mostrado en la figura 4.1, definimos un vector de posición $\mathbf{p}$ que apunta desde el origen del sistema de coordenadas del hombro ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$) hasta el punto donde intersecta el último de los tres ejes de la articulación o muñeca (véase figura 5.2) como:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_6 - d_6 \mathbf{a} = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (5.3)$$

donde la distancia d_6 puede estar acompañada por la longitud de la herramienta y $\mathbf{a}$ es el vector que define la dirección del punto $\mathbf{p}$ al punto $\mathbf{p}_6$, y que generalmente coincide con $\mathbf{z}_6$. El vector $\mathbf{p}$ (ec. 5.4) corresponde al vector de posición dado por la sub matriz superior derecha 3x1 de la matriz ${}^0\mathbf{T}_4$, que resulta del producto ${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4$:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) - d_2S_1 \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) + d_2C_1 \\ d_4C_{23} - a_3S_{23} - a_2S_2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$ y $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$. θ_i y θ_j son parámetros de articulación.

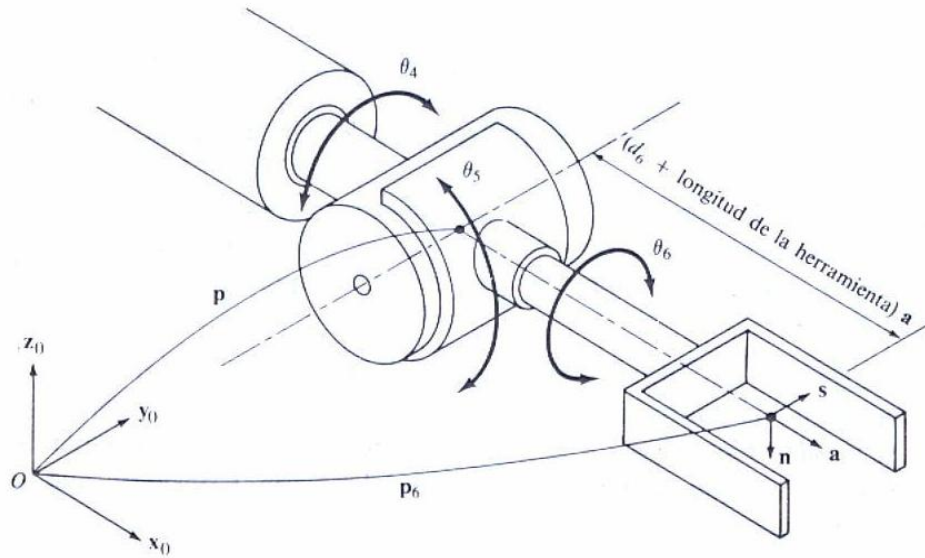


Figura 5.2. Definición del vector $\mathbf{p}$

Solución de la articulación 1. Si proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ como en la figura 5.3, obtenemos las siguientes ecuaciones para obtener θ_1 :

$$\theta_1^I = \phi - \alpha \quad \theta_1^D = \pi + \phi + \alpha \quad (5.5)$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.6)$$

$$\text{sen } \phi = \frac{p_y}{R} \quad \cos \phi = \frac{p_x}{R} \quad (5.7)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{d_2}{R} \quad \cos \alpha = \frac{r}{R} \quad (5.8)$$

donde los superíndices I y D sobre los ángulos de las articulaciones indican las configuraciones de brazo **IZQUIERDO/DERECHO**. De las ecuaciones (5.5) a (5.8) obtenemos las funciones seno y coseno de θ_1 para las configuraciones de brazo **IZQUIERDO/DERECHO**:

$$\text{sen } \theta_1^I = \text{sen } (\phi - \alpha) = \text{sen } \phi \cos \alpha - \cos \phi \text{ sen } \alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad (5.9)$$

$$\cos \theta_1^I = \cos (\phi - \alpha) = \cos \phi \cos \alpha + \text{sen } \phi \text{ sen } \alpha = \frac{p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (5.10)$$

$$\text{sen } \theta_1^D = \text{sen } (\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad (5.11)$$

$$\cos \theta_1^D = \cos (\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (5.12)$$

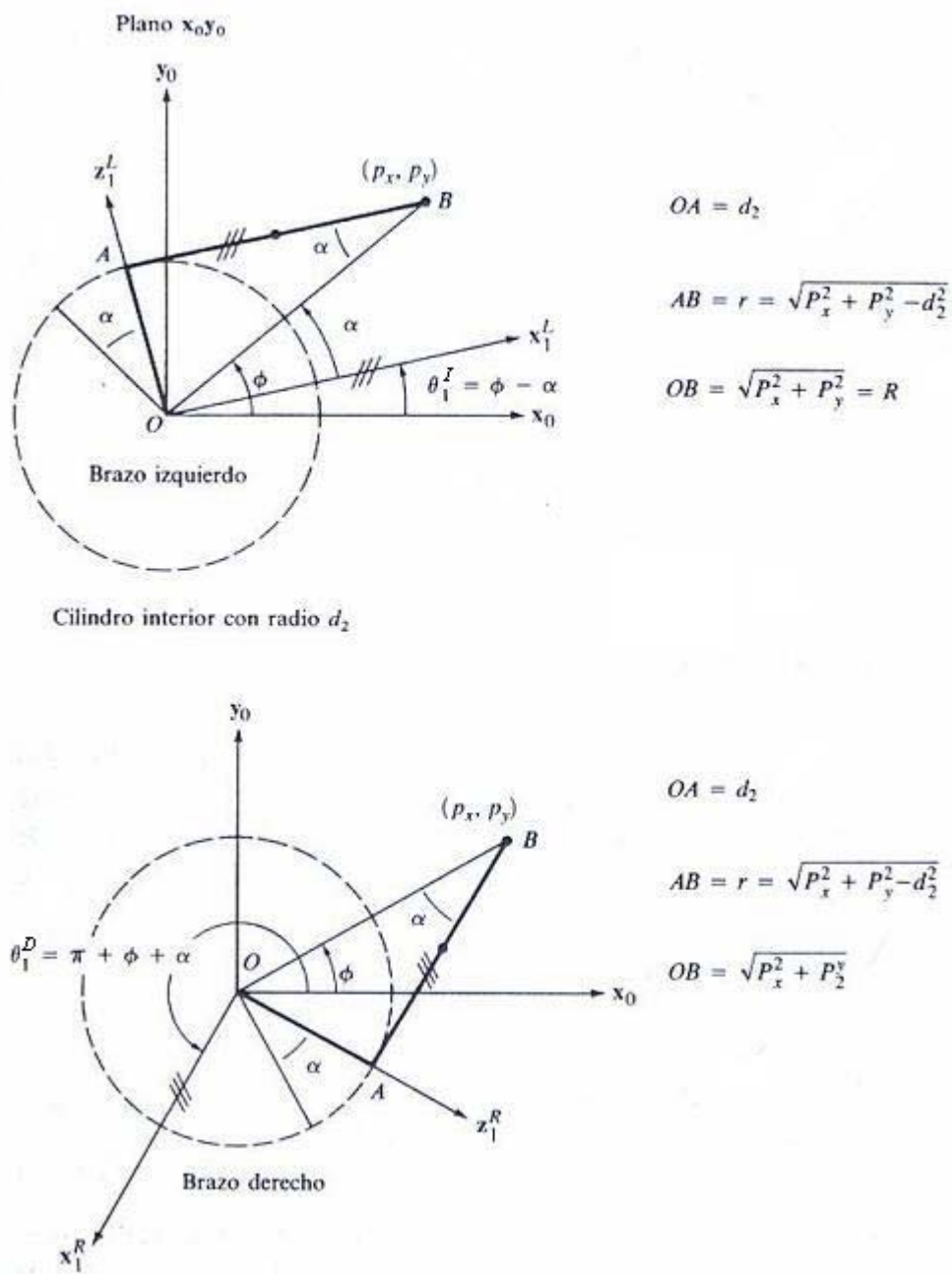


Figura 5.3. Solución para la articulación 1.

Combinando las ecuaciones (5.9) a (5.12) y utilizando el indicador de **BRAZO** para indicar las configuraciones de brazo **IZQUIERDO/DERECHO**, obtenemos, respectivamente, las funciones seno y coseno de θ_1 :

$$\sin \theta_1 = \frac{-\text{BRAZO } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.13)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-\text{BRAZO } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.14)$$

donde se toma la raíz cuadrada positiva en estas ecuaciones y se define **BRAZO** como en la ecuación (5.1). Con el fin de evaluar θ_1 para $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$, se utilizará una función arco tangente. De las ecuaciones (5.13) y (5.14), y utilizando la función arco tangente trigonométrica más consistente, se encuentra que θ_1 es:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-\text{BRAZO } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{-\text{BRAZO } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2} \right) \quad -\pi \leq \theta_1 \leq \pi \quad (5.15)$$

Solución de la articulación 2. Para encontrar la articulación 2, proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ tal como se muestra en la figura 5.4. De esta figura encontramos que tenemos cuatro configuraciones diferentes de brazo. Cada una corresponde a valores diferentes de la articulación 2 como se muestra en la tabla 5.1, donde $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ y $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$.

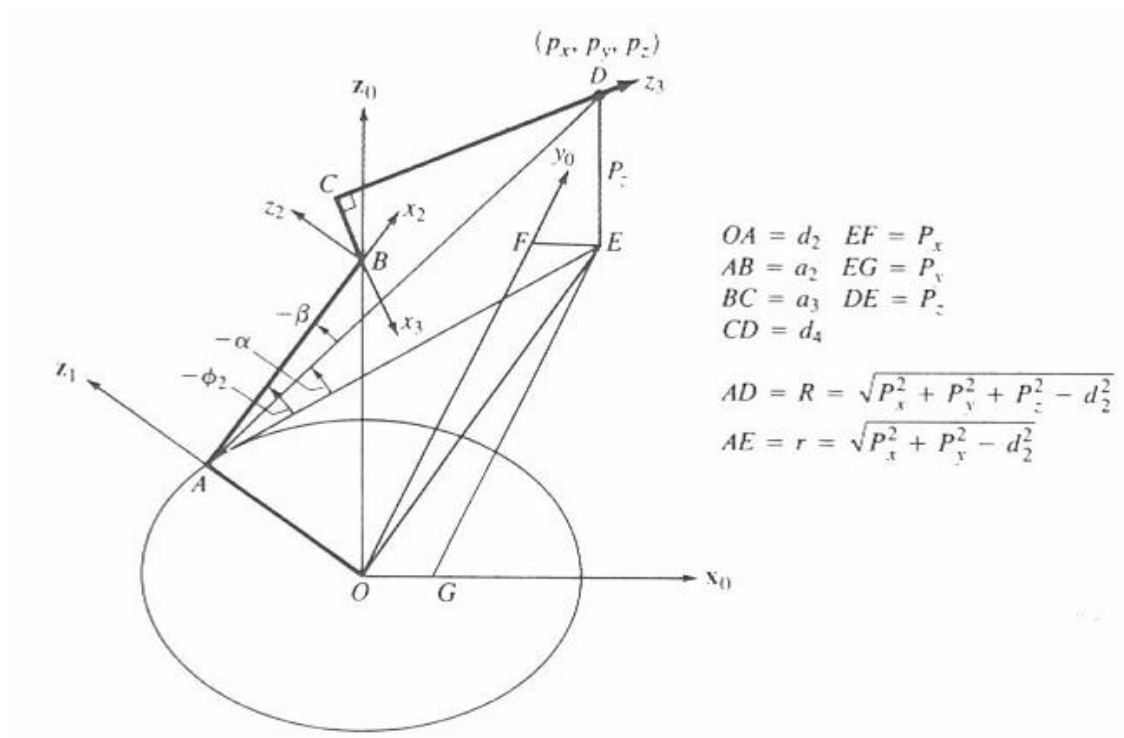


Figura 5.4. Solución para la articulación 2.

Tabla 5.1. Diversas configuraciones de brazo para la articulación 2.

Configuraciones de brazo	θ_2	BRAZO	CODO	BRAZO · CODO
Brazo IZQUIERDO y ARRIBA	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
Brazo IZQUIERDO y ABAJO	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
Brazo DERECHO y ARRIBA	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
Brazo DERECHO y ABAJO	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

En la tabla anterior, θ_2 se puede expresar en una ecuación para diferentes configuraciones de brazo y codo utilizando los indicadores de **BRAZO** y **CODO**, de la tabla 5.1, como:

$$\theta_2 = \alpha + (\mathbf{BRAZO} \cdot \mathbf{CODO}) \beta = \alpha + \mathbf{K} \cdot \beta \quad (5.16)$$

donde el indicador de configuración de brazo combinado $\mathbf{K} = \mathbf{BRAZO} \cdot \mathbf{CODO}$ dará un valor de signo apropiado y el <<punto>> representa una operación de multiplicación sobre los indicadores. De la geometría del brazo en la figura 5.3 obtenemos:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad (5.17)$$

$$\text{sen } \alpha = -\frac{p_z}{R} = -\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (5.18)$$

$$\cos \alpha = -\frac{\mathbf{BRAZO} \cdot r}{R} = -\frac{\mathbf{BRAZO} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2R} \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\text{sen } \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \quad (5.21)$$

De las ecuaciones (5.16) a (5.21) encontramos las funciones de seno y coseno de θ_2 :

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_2 &= \text{sen } (\alpha + \mathbf{K} \cdot \beta) = \text{sen } \alpha \cos (\mathbf{K} \cdot \beta) + \cos \alpha \text{sen } (\mathbf{K} \cdot \beta) = \\ &= \text{sen } \alpha \cos \beta + (\mathbf{BRAZO} \cdot \mathbf{CODO}) \cos \alpha \text{sen } \beta \end{aligned} \quad (5.22)$$

recordando que $\cos (-\beta) = \cos \beta$ y que $\mathbf{K} = \pm 1$.

$$\begin{aligned}\cos \theta_2 &= \cos (\alpha + \mathbf{K} \cdot \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\mathbf{BRAZO} \cdot \mathbf{CODO}) \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}\quad (5.23)$$

De las ecuaciones (5.22) y (5.23) obtenemos la solución para θ_2 :

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi \quad (5.24)$$

Solución de la articulación 3. Para la articulación 3, proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2$ tal como se muestra en la figura 5.5.

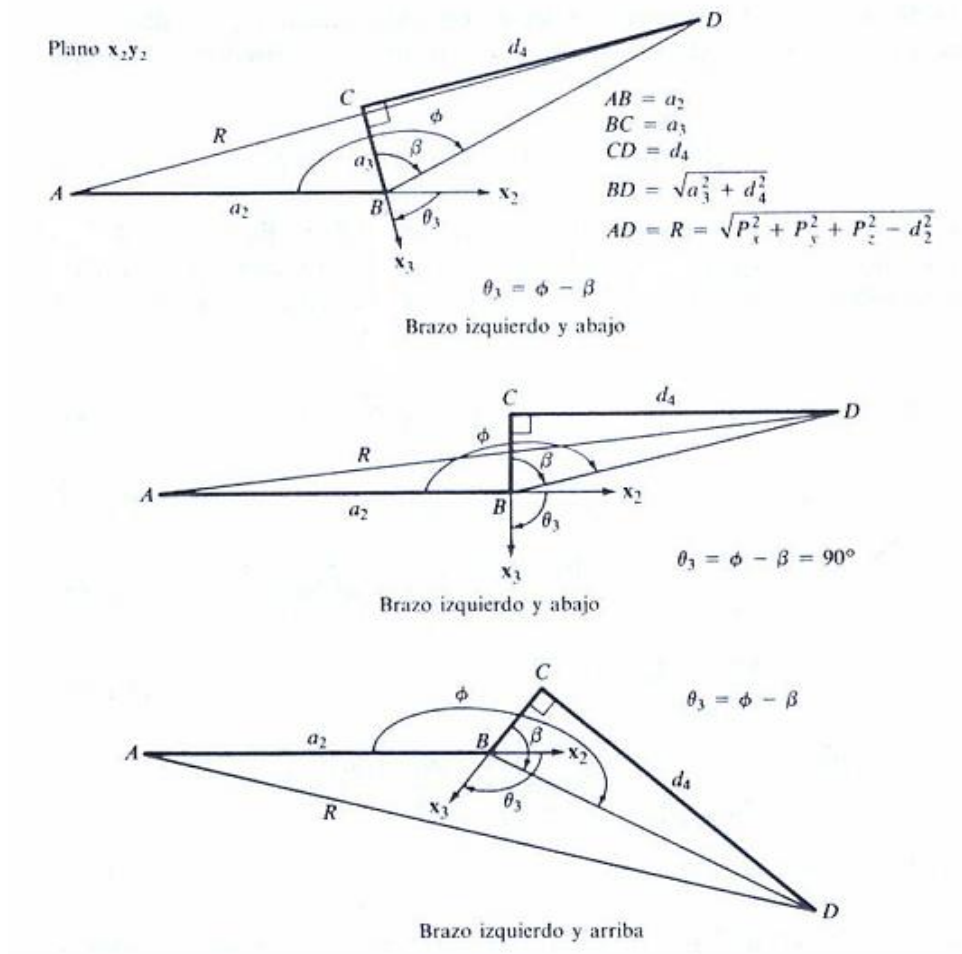


Figura 5.5. Solución para la articulación 3.

De esta figura obtenemos cuatro configuraciones de brazos diferentes. Cada configuración corresponde a valores diferentes de la articulación 3 como se muestra en la tabla 5.2, donde $({}^2\mathbf{p}_4)_y$ es la componente y del vector de posición desde el origen de (x_2, y_2, z_2) hasta el punto donde se intersectan los últimos tres ejes de articulación.

De la geometría del brazo en la figura 5.5 obtenemos las ecuaciones siguientes para encontrar la solución a θ_3 :

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad (5.25)$$

$$\cos \phi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad (5.26)$$

$$\sin \phi = \mathbf{BRAZO} \cdot \mathbf{CODO} \sqrt{1 - \cos^2 \phi}$$

$$\sin \beta = \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad \cos \beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad (5.27)$$

Tabla 5.2 Diversas configuraciones de brazos para la articulación 3

Configuraciones de brazo	$({}^2\mathbf{p}_4)_y$	θ_3	BRAZO	CODO	BRAZO · CODO
Brazo IZQUIERDO y ARRIBA	≥ 0	$\phi - \beta$	-1	+1	-1
Brazo IZQUIERDO y ABAJO	≤ 0	$\phi - \beta$	-1	-1	+1
Brazo DERECHO y ARRIBA	≤ 0	$\phi - \beta$	+1	+1	+1
Brazo DERECHO y ABAJO	≥ 0	$\phi - \beta$	+1	-1	-1

De la tabla 5.2 podemos expresar θ_3 en una ecuación para configuraciones de brazos diferentes:

$$\theta_3 = \phi - \beta \quad (5.28)$$

De la ecuación (5.28), las funciones seno y coseno de θ_3 son, respectivamente:

$$\text{sen } \theta_3 = \text{sen } (\phi - \beta) = \text{sen } \phi \cos \beta - \cos \phi \text{ sen } \beta \quad (5.29)$$

$$\cos \theta_3 = \cos (\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \text{sen } \phi \text{ sen } \beta \quad (5.30)$$

De las ecuaciones (5.29) y (5.30), y utilizando las ecuaciones (5.25) a (5.27), encontramos la solución para θ_3 :

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{sen } \theta_3}{\cos \theta_3} \right) \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi \quad (5.31)$$

Debemos recordar que el rango de la función arco tangente se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, por lo que se deben hacer los ajustes trigonométricos necesarios (sumar o restar un ángulo π , depende del cuadrante) para obtener valores de θ_i comprendidos entre $-\pi$ y π . Esto se hace para evitar confusiones y permitir una mejor comprensión del movimiento efectuado por los elementos del brazo robótico alrededor de los ejes de articulación y con respecto a los sistemas de coordenadas seleccionados.

5.2 Desacoplo cinemático. Solución para las tres últimas articulaciones

El procedimiento anterior permite obtener las expresiones para calcular las 3 primeras variables articulares del robot, aquellas que posicionan su muñeca en unas coordenadas (p_x , p_y , p_z) determinadas, aunque puede ser igualmente utilizado para la obtención de las 6 variables articulares haciendo el problema más complejo con la introducción de **MUÑECA** como un nuevo indicador de configuración.

Ahora bien, sabemos que, en general no basta con posicionar el extremo del robot en un punto del espacio, sino que casi siempre es necesario obtener que la herramienta que aquel porta se oriente de una manera determinada. Para ello, los robots cuentan con otros tres grados de libertad adicionales, situados al final de la cadena cinemática y cuyos ejes, generalmente, se cortan en un punto, que informalmente se denomina *muñeca del robot*. Si bien la variación de estos tres últimos grados de libertad origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero objetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

El método de desacoplo cinemático se apoya en lo siguiente, separando ambos problemas: posición y orientación. Para ello, dada una posición y orientación final deseadas, se establecen las coordenadas del punto de corte de los tres últimos ejes (*muñeca del robot*) permitiendo calcular los valores de las tres primeras variables articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) que consiguen posicionar este punto. A continuación, a partir de los datos de orientación y de los ya calculados ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) se obtienen los valores del resto de las variables articulares.

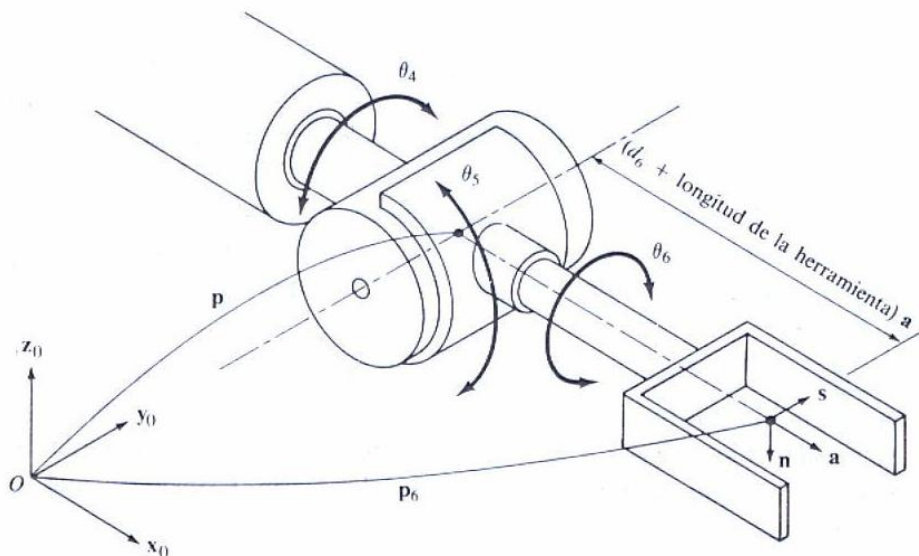


Figura 5.6. Extremo final de un robot PUMA

En la Figura 5.6 se representan las tres ultimas articulaciones del extremo final de un robot PUMA, cuyos sistemas de coordenadas asociados según el procedimiento Denavit-Hartenberg se muestran en la figura 4.4, y sus parámetros que se muestran en la tabla 4.1 (Capítulo 4, página 81).

El punto central de la muñeca del robot corresponde al origen del sistema $\{S_5\}$: O_5 (el cual coincide con el sistema $\{S_4\}$). Por su parte, el punto final del robot será el origen del sistema $\{S_6\}$: O_6 . En lo que sigue se utilizarán los vectores:

$$\mathbf{p} = \mathbf{O}_0\mathbf{O}_5 \quad (5.32)$$

$$\mathbf{p}_6 = \mathbf{O}_0\mathbf{O}_6$$

que parten desde el origen del sistema asociado a la base del robot $\{S_0\}$ hasta los puntos centro de la muñeca y extremo del robot, respectivamente.

Puesto que la dirección del eje $\mathbf{z}_6$ coincide con la de $\mathbf{z}_5$ (capítulo 4, figura 4.4) y la distancia entre O_5 y O_6 medida a lo largo de $\mathbf{z}_6$ es precisamente d_6 (más la longitud de la herramienta, si existe), se tendrá que:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_6 - d_6 \cdot \mathbf{a} \quad (5.33)$$

Estando todos los vectores referidos a las coordenadas del sistema $\{S_0\}$. En la ecuación (5.32), $\mathbf{p}_6$ son las coordenadas del punto donde se pretende que se posicione el robot expresadas en el sistema $\{S_0\}$. Por lo tanto

$$\mathbf{p}_6 = (\mathbf{p}_{6x}, \mathbf{p}_{6y}, \mathbf{p}_{6z})^T \quad (5.34)$$

El vector director $\mathbf{z}_6$ es el vector $\mathbf{a}$ correspondiente a la orientación deseada $\mathbf{z}_6 = [\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z]^T$ además d_6 (más longitud de la herramienta, si existe) es un parámetro

asociado con el robot. Por lo tanto, las coordenadas del punto central de la muñeca $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z)$ se obtienen fácilmente.

Tal y como se mostró en la sección anterior, es posible, mediante un método geométrico, por ejemplo, calcular los valores de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ que permiten posicionar el robot en el punto $\mathbf{p}$ deseado.

A continuación obtenemos los valores de θ_4, θ_5 y θ_6 que dan la orientación deseada. Para ello, denominando ${}^0\mathbf{R}_6$ a la submatriz de rotación de la matriz homogénea ${}^0\mathbf{T}_6$ se tendrá:

$${}^0\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 \quad (5.35)$$

donde ${}^0\mathbf{R}_6$ es conocida por ser la orientación deseada del extremo del robot, y ${}^0\mathbf{R}_3$ queda definida por:

$${}^0\mathbf{R}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \quad (5.36)$$

también se puede definir a partir de los valores ya obtenidos de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, por lo tanto:

$${}^3\mathbf{R}_6 = [\mathbf{r}_{ij}] = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] \quad (5.37)$$

tendrá sus componentes $\mathbf{r}_{ij}$ conocidas.

Por otra parte, ${}^3\mathbf{R}_6$ corresponde a la submatriz 3 x 3 de rotación de la matriz de transformación homogénea ${}^3\mathbf{T}_6$ que relaciona el sistema $\{\mathbf{S}_3\}$ con el $\{\mathbf{S}_6\}$. Así:

$${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 \quad (5.38)$$

donde ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ es la submatriz de rotación de la matriz de Denavit- Hartenberg ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, (4.1), y cuya interpretación geométrica se explica en el capítulo 3, sección 3.5. Los valores de α_i corresponden a los presentados en la tabla 4.1 de los parámetros de coordenadas del robot **PUMA** (página 81). Deben evaluarse igualmente las matrices para los valores α_i de las tablas 4.2 y 4.3 ya que se pueden modificar los signos de algunas de sus expresiones. Estos valores de α_i son constantes y junto con los valores a_i determinan la estructura del elemento.

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha_i \cdot \text{sen} \theta & \text{sen} \alpha_i \cdot \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta & -\text{sen} \alpha_i \cdot \cos \theta \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

después de evaluar α_i ($i = 4, 5$ y 6 , los valores de la tabla 4.1 para las tres últimas articulaciones) en la sub matriz de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ (ec. 5.39), resultan:

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \text{Cos} \theta_4 & 0 & -\text{Sen} \theta_4 \\ \text{Sen} \theta_4 & 0 & \text{Cos} \theta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^4\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \text{Cos} \theta_5 & 0 & \text{Sen} \theta_5 \\ \text{Sen} \theta_5 & 0 & -\text{Cos} \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} \text{Cos} \theta_6 & -\text{Sen} \theta_6 & 0 \\ \text{Sen} \theta_6 & \text{Cos} \theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Por lo tanto, obtenemos:

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} \text{Cos} \theta_4 \text{Cos} \theta_5 \text{Cos} \theta_6 - \text{Sen} \theta_4 \text{Sen} \theta_6 & -\text{Cos} \theta_4 \text{Cos} \theta_5 \text{Sen} \theta_6 - \text{Sen} \theta_4 \text{Cos} \theta_6 & \text{Cos} \theta_4 \text{Sen} \theta_5 \\ \text{Sen} \theta_4 \text{Cos} \theta_5 \text{Cos} \theta_6 + \text{Cos} \theta_4 \text{Sen} \theta_6 & -\text{Sen} \theta_4 \text{Cos} \theta_5 \text{Sen} \theta_6 + \text{Cos} \theta_4 \text{Cos} \theta_6 & \text{Sen} \theta_4 \text{Sen} \theta_5 \\ -\text{Sen} \theta_5 \text{Cos} \theta_6 & \text{Sen} \theta_5 \text{Sen} \theta_6 & \text{Cos} \theta_5 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

donde $\mathbf{r}_{ij}$ serán valores numéricos conocidos a partir de 5.37:

$$[\mathbf{r}_{ij}] = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

donde $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$.

De las nueve relaciones expresadas en (5.42) se pueden tomar las correspondientes a $\mathbf{r}_{13}$, $\mathbf{r}_{23}$, $\mathbf{r}_{33}$, $\mathbf{r}_{31}$ y $\mathbf{r}_{32}$ y que se dan a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13} &= \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 & \mathbf{r}_{23} &= \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 & \mathbf{r}_{33} &= \cos \theta_5 \\ \mathbf{r}_{31} &= -\sin \theta_5 \cdot \cos \theta_6 & \mathbf{r}_{32} &= \sin \theta_5 \cdot \sin \theta_6 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Del conjunto de ecuaciones (5.43) es inmediato obtener los valores de los parámetros articulares (se recomienda convertir todas las funciones trigonométricas inversas en su arcotangente, por ser ésta computacionalmente más robusta):

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \arctan \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right) \\ \theta_5 &= \arcsin (r_{33}) \\ \theta_6 &= \arctan \left(-\frac{r_{32}}{r_{31}} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Como se indicó en el análisis cinemático inverso para calcular las tres primeras articulaciones, aquí también se deben hacer los ajustes trigonométricos necesarios para obtener valores de θ_i que permitan comprender con facilidad el movimiento de los elementos alrededor de las articulaciones. Estas ecuaciones completan la solución al problema cinemático inverso para el robot PUMA 560.

Como se mencionó en el capítulo anterior, la mayoría de los robots industriales han sufrido considerables modificaciones, con respecto a la configuración del robot predecesor PUMA. La disminución del tamaño de sus elementos, y por ende de su masa, la mejora de los sistemas de propulsión y control, ha permitido que éstos alcancen a gran velocidad y con gran precisión una posición dada. El hombro se ha bajado hasta estar muy cerca de la base y se ha dado simetría al brazo, esto contribuye a reorientar su centro de gravedad dándole mayor estabilidad durante el movimiento. También permite que el robot ocupe menos espacio y logre un mayor alcance en el área de trabajo. Estas modificaciones simplifican el análisis cinemático inverso para calcular las expresiones de las tres primeras variables articulares (θ_1 , θ_2 , θ_3). La disposición de los ejes de articulación que permite ubicar los orígenes de los centros de coordenadas en un plano de simetría, elimina la necesidad de utilizar el indicador **BRAZO** (izquierdo o derecho). De igual forma la disposición del brazo robótico manteniendo siempre su codo por encima del hombro elimina el uso del indicador **CODO** (arriba o abajo).

El método de desacoplo cinemático es aplicable tanto al robot PUMA como a los robots más modernos realizando pequeñas modificaciones y en la mayoría de los casos ninguna modificación. A continuación estudiaremos la cinemática inversa de los últimos tres robots estudiados en el capítulo anterior, y determinaremos las expresiones para las tres primeras variables articulares (θ_1 , θ_2 , θ_3). Demostraremos como se puede analizar cualquier mecanismo robótico.

5.3 Método geométrico aplicado a otros brazos robóticos. Solución para las tres primeras articulaciones

Recordemos que el vector **p** parte desde el sistema de coordenadas de referencia establecido (x_0 , y_0 , z_0) hasta la muñeca del brazo robótico, el cual es el punto donde se intersectan las tres últimas articulaciones.

5.3.1 Modelo ABB IRB-140

Solución de la articulación 1. Proyectando el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ como en la figura 5.7 y para calcular θ_1 , que es el ángulo formado entre los ejes $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$OD = R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.45)$$

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{p_y}{R} \quad \cos \theta_1 = \frac{p_x}{R} \quad (5.46)$$

Partiendo de las ecuaciones (5.46), y utilizando la función arco tangente más consistente ya que tiene por dominio todos los números reales, se encuentra que θ_1 es:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen } \theta_1}{\cos \theta_1}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad -180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ \quad (5.47)$$

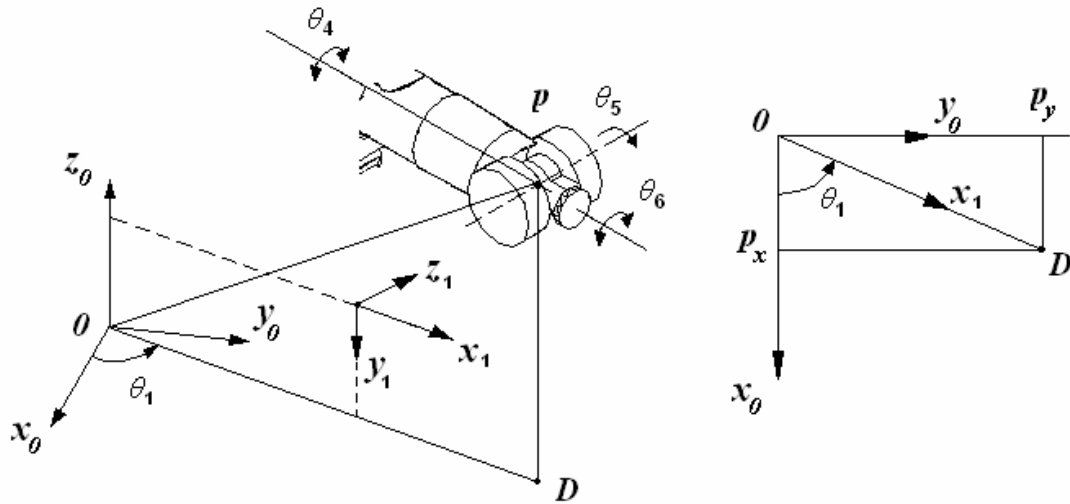


Figura 5.7. Extremo final del robot ABB IRB 140 y solución para la articulación 1.

Solución de la articulación 2. Para encontrar θ_2 , proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ tal como se muestra en la figura 5.8. De aquí obtenemos:

$$\theta_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (5.48)$$

$$EC = p_z - d_1 \quad AE = |\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1| \quad (5.49)$$

$$R = \sqrt{AE^2 + EC^2} \quad (5.50)$$

Mediante la ley del coseno:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{BC^2 - (AB^2 + R^2)}{2AB \cdot R} = \\ &= -\frac{d_4^2 - (a_2^2 + (\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2)}{2a_2 \sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (5.52)$$

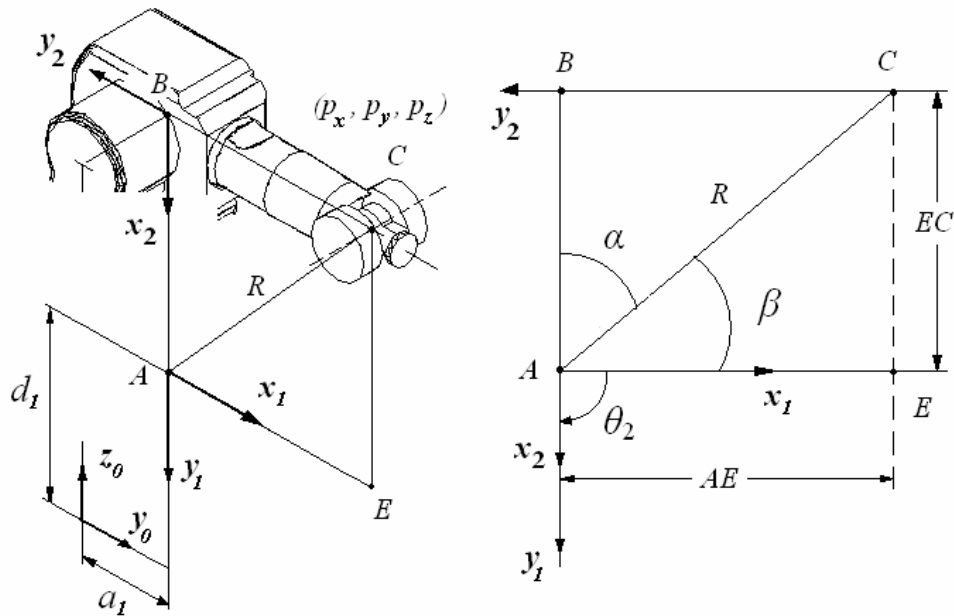


Figura 5.8. Solución para la articulación 2 (IRB 140).

Además:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{EC}{R} = \frac{p_z - d_1}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.53)$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{R} = \frac{|\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1|}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.54)$$

Luego:

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{sen} (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{sen} 180^\circ \cos (\alpha + \beta) - \cos 180^\circ \operatorname{sen} (\alpha + \beta) =$$

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (5.55)$$

$$\cos \theta_2 = \cos (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos 180^\circ \cos (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} (\alpha + \beta) =$$

$$\cos \theta_2 = -\cos (\alpha + \beta) = -(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) \quad (5.56)$$

De las ecuaciones (5.55) y (5.56) obtenemos la solución para θ_2 :

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \quad 0^\circ \leq \theta_2 \leq 200^\circ \quad (5.57)$$

Solución de la articulación 3. De la figura 5.9, se tiene lo siguiente:

$$\theta_3 = 90 - \alpha \quad (5.58)$$

$$AB = a_2 \quad BC = d_4 \quad (5.59)$$

$$AC = R = \sqrt{AE^2 + EC^2} \quad (5.60)$$

$$EC = p_z - d_1 \quad AE = |\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1| \quad (5.61)$$

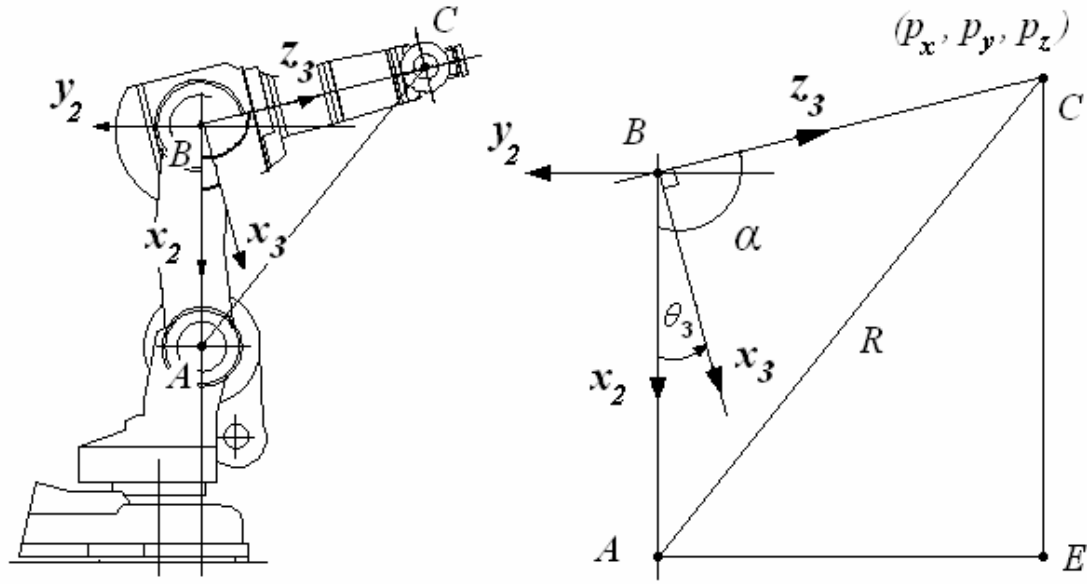


Figura 5.9. Solución para la articulación 3 (IRB 140).

Por la ley del coseno:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{R^2 - (AB^2 + BC^2)}{2AB \cdot BC} = \\ &= -\frac{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2 - (a_2^2 + d_4^2)}{2a_2 \cdot d_4} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (5.63)$$

Luego:

$$\cos \theta_3 = \cos (90^\circ - \alpha) = \cos 90^\circ \cos \alpha + \sin 90^\circ \sin \alpha = \sin \alpha \quad (5.64)$$

$$\sin \theta_3 = \sin (90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ \cos \alpha - \cos 90^\circ \sin \alpha = \cos \alpha \quad (5.65)$$

De las ecuaciones (5.64) y (5.65) obtenemos la solución para θ_3 :

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{sen} \theta_3}{\text{cos} \theta_3} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} \right) \quad -190^\circ \leq \theta_3 \leq 50^\circ \quad (5.66)$$

5.3.2 Modelo FANUC serie R-2000iA/165 F

Solución de la articulación 1. Como en el modelo anterior, proyectando el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ como en la figura 5.10 y para calcular θ_1 , que es el ángulo formado entre los ejes $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$OD = R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.67)$$

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{p_y}{R} \quad \text{cos} \theta_1 = \frac{p_x}{R} \quad (5.68)$$

Partiendo de las ecuaciones (5.68), y utilizando la función arco tangente más consistente ya que tiene por dominio todos los números reales se encuentra que θ_1 es:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{sen} \theta_1}{\text{cos} \theta_1} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \quad -180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ \quad (5.69)$$

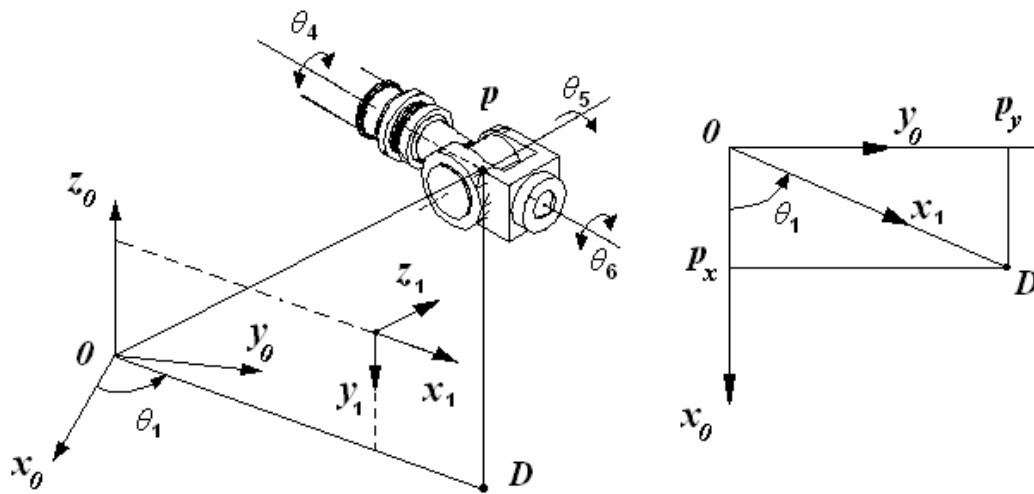


Figura 5.10. Extremo final del robot FANUC R-2000iA/165 F y solución para la articulación 1.

Solución de la articulación 2. Para encontrar θ_2 , proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ tal como se muestra en la figura 5.11. De esto resulta lo siguiente:

$$\theta_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (5.70)$$

$$ED = p_z - d_1 \quad AE = |\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1| \quad (5.71)$$

$$R = \sqrt{AE^2 + ED^2} \quad (5.72)$$

$$BD = \sqrt{d_4^2 + a_3^2} \quad AB = a_2 \quad (5.73)$$

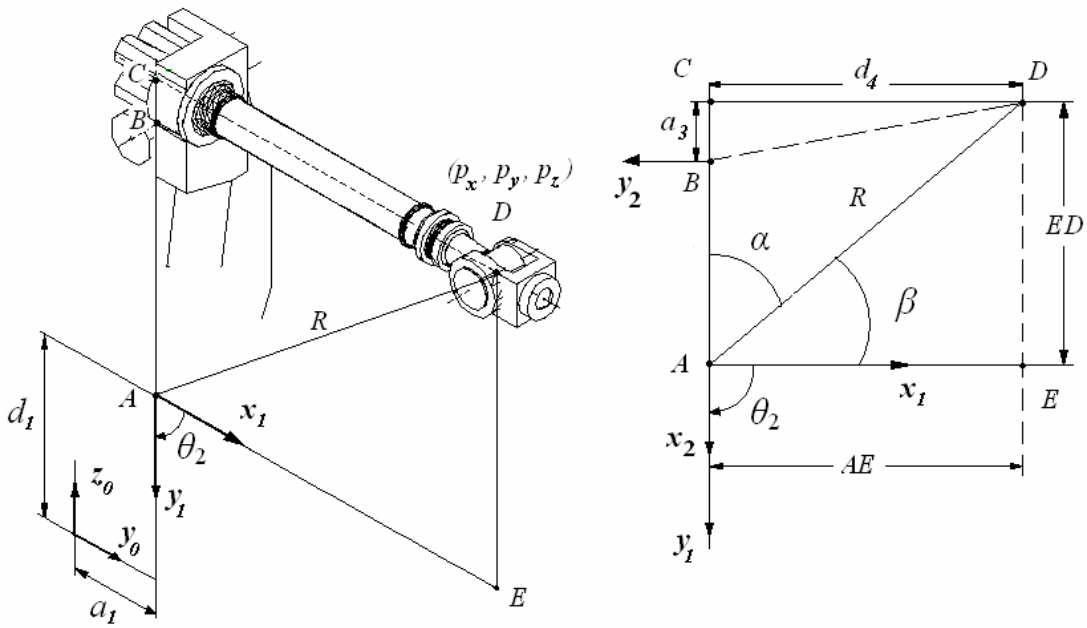


Figura 5.11. Solución para la articulación 2 (R-2000iA/165 F).

Por la ley del coseno:

$$\cos \alpha = -\frac{BD^2 - (AB^2 + R^2)}{2AB \cdot R} =$$

$$= -\frac{d_4^2 + a_3^2 - (a_2^2 + (\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2)}{2a_2 \sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.74)$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (5.75)$$

Además:

$$\text{sen } \beta = \frac{ED}{R} = \frac{p_z - d_1}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.76)$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{R} = \frac{|\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1|}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.77)$$

Luego:

$$\text{sen } \theta_2 = \text{sen } (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{sen } 180^\circ \cos (\alpha + \beta) - \cos 180^\circ \text{sen } (\alpha + \beta) =$$

$$\text{sen } \theta_2 = \text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \quad (5.78)$$

$$\cos \theta_2 = \cos (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos 180^\circ \cos (\alpha + \beta) + \text{sen } 180^\circ \text{sen } (\alpha + \beta) =$$

$$\cos \theta_2 = -\cos (\alpha + \beta) = -(\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta) \quad (5.79)$$

De las ecuaciones (5.78) y (5.79) obtenemos la solución para θ_2 :

$$\theta_2 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{sen } \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \quad 30^\circ \leq \theta_2 \leq 165^\circ \quad (5.80)$$

Solución de la articulación 3. De la figura 5.12, se tiene lo siguiente:

$$\theta_3 = \beta - \alpha \quad (5.81)$$

$$\beta = \phi + 90 \quad (5.82)$$

$$\sin \phi = \frac{BC}{BD} \quad \cos \phi = \frac{CD}{BD} \quad (5.83)$$

$$AB = a_2 \quad BC = a_3 \quad CD = d_4 \quad (5.84)$$

$$AD = R = \sqrt{AE^2 + ED^2} \quad BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} \quad (5.85)$$

$$AE = |\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1| \quad ED = p_z - d_1 \quad (5.86)$$

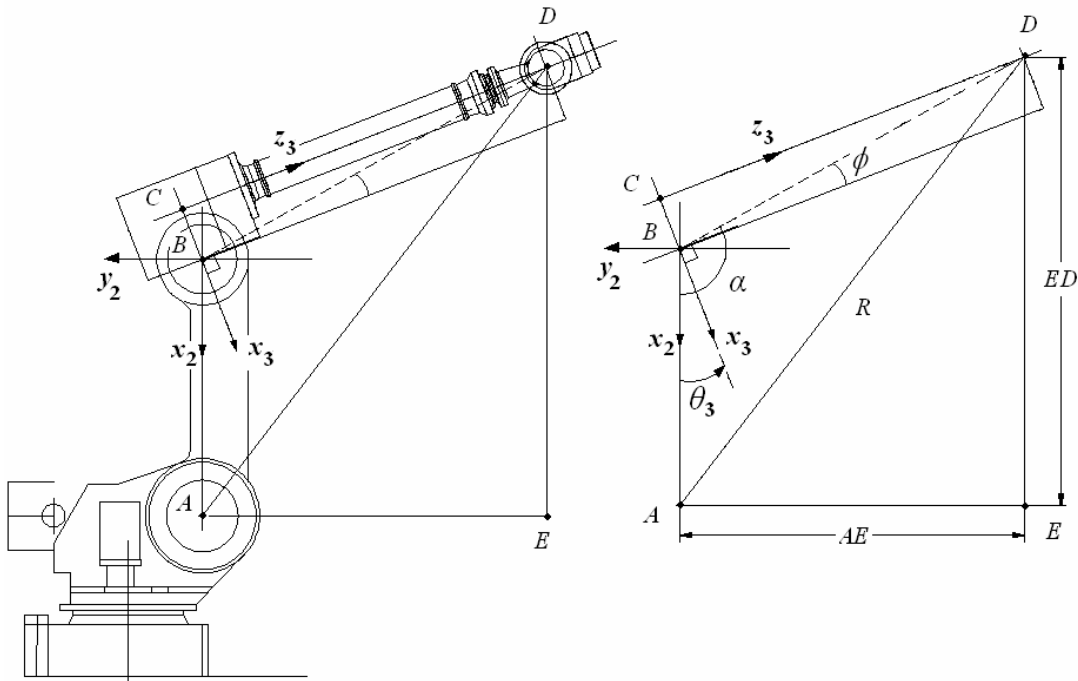


Figura 5.12. Solución para la articulación 3 (R-2000iA/165 F).

Por la ley del coseno:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\frac{R^2 - (AB^2 + BD^2)}{2AB \cdot BD} = \\ &= -\frac{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2 - (a_2^2 + a_3^2 + d_4^2)}{2a_2\sqrt{a_3^2 + d_4^2}}\end{aligned}\quad (5.87)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (5.88)$$

De las ecuaciones (5.82) y (5.83):

$$\sin \beta = \sin (\phi + 90^\circ) = \sin \phi \cos 90^\circ + \cos \phi \sin 90^\circ = \cos \phi$$

$$\sin \beta = \cos \phi = \frac{CD}{BD} = \frac{d_4}{\sqrt{a_3^2 + d_4^2}} \quad (5.89)$$

$$\cos \beta = \cos (\phi + 90^\circ) = \cos \phi \cos 90^\circ - \sin \phi \sin 90^\circ = -\sin \phi$$

$$\cos \beta = -\sin \phi = -\frac{BC}{BD} = -\frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + d_4^2}} \quad (5.90)$$

Luego:

$$\sin \theta_3 = \sin (\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \quad (5.91)$$

$$\cos \theta_3 = \cos (\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \quad (5.92)$$

De las ecuaciones (5.91) y (5.92) obtenemos la solución para θ_3 :

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right) \quad -272^\circ \leq \theta_3 \leq 90^\circ \quad (5.93)$$

5.3.3 Modelo KUKA KR-100-2 PA

Este modelo de cuatro GDL se compone de dos mecanismos de cuatro barras vinculados entre si mediante un eslabón adicional (figura 5.13), este permite que el extremo final mantenga siempre la misma orientación durante el movimiento para realizar tareas de manipulación de materiales, paletización y organización de productos.

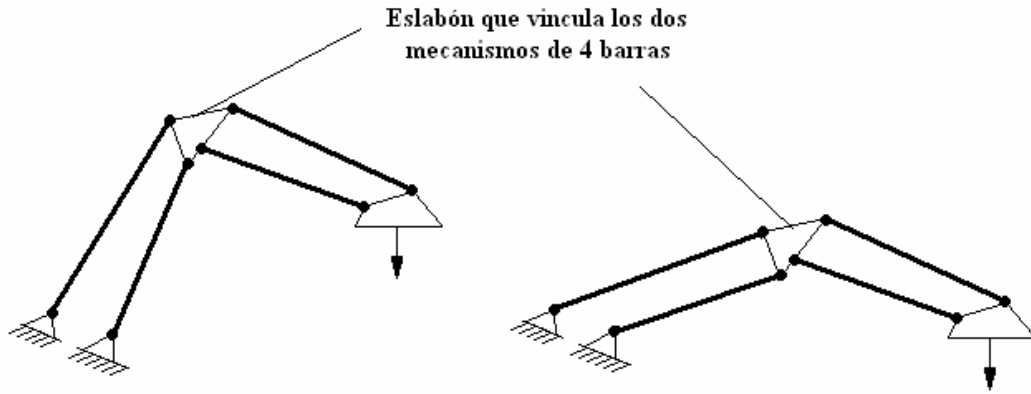


Figura 5.13. Sistema de cuatro barras utilizado en robots paletizadores de cuatro GDL.

Solución de la articulación 1. Proyectando el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ como en la figura 5.14 y para calcular θ_1 , que es el ángulo formado entre los ejes $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$OD = R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.94)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{p_y}{R} \quad \cos \theta_1 = \frac{p_x}{R} \quad (5.95)$$

De las ecuaciones (5.46), y utilizando la función arco trigonométrica más consistente, se encuentra que θ_1 es:

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{cos } \theta_1} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \quad -180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ \quad (5.96)$$

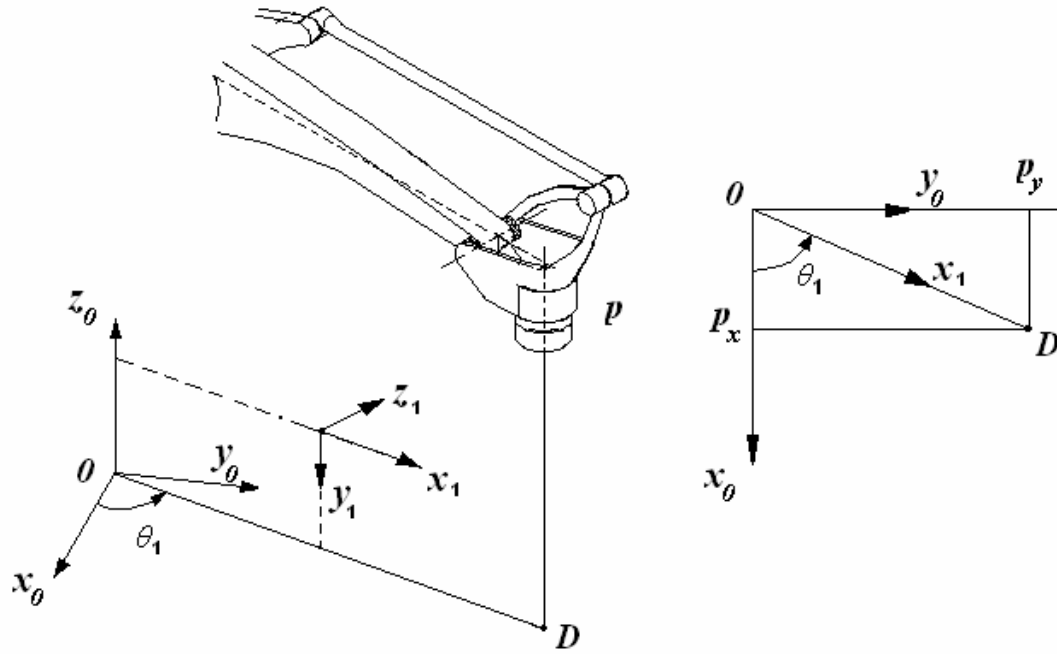


Figura 5.14. Extremo final del robot KR-100-2 PA y solución para la articulación 1.

Solución de la articulación 2. Para encontrar θ_2 , proyectamos el vector de posición $\mathbf{p}$ sobre el plano $\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ tal como se muestra en la figura 5.15. De esto resulta lo siguiente:

$$\theta_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad (5.97)$$

$$EC = p_z - d_1 \quad AE = \sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1 \quad (5.98)$$

$$R = \sqrt{AE^2 + EC^2} \quad (5.99)$$

Por la ley del coseno:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\frac{BC^2 - (AB^2 + R^2)}{2AB \cdot R} = \\ &= -\frac{a_3^2 - (a_2^2 + (\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2)}{2a_2 \sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}}\end{aligned}\quad (5.100)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (5.101)$$

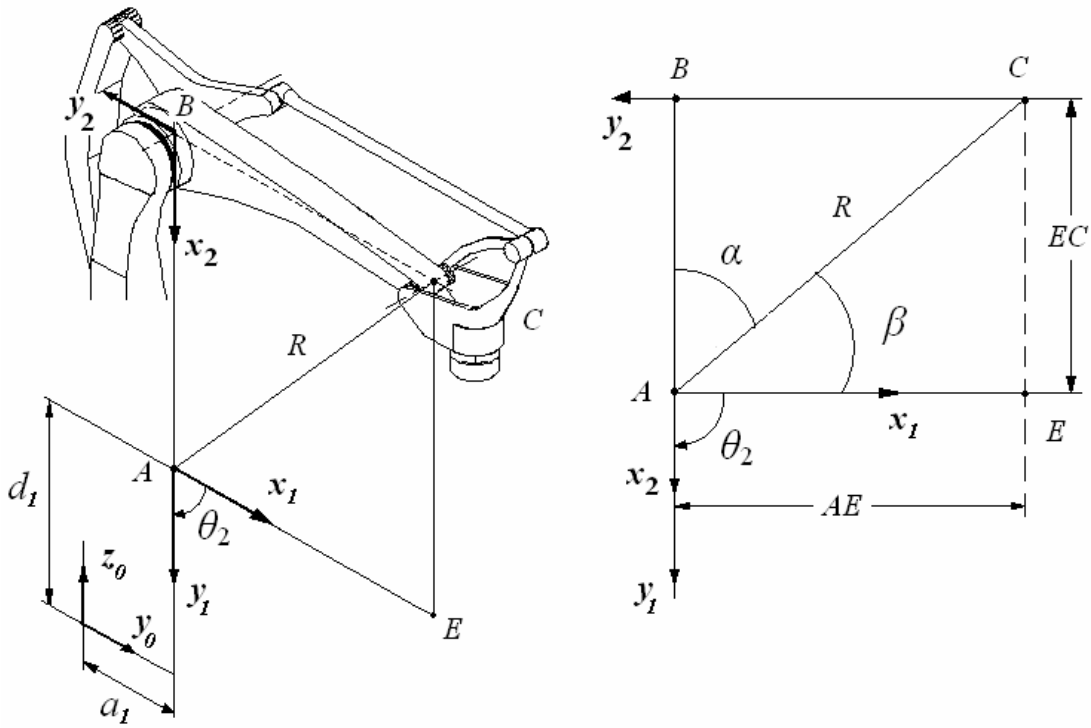


Figura 5.15. Solución para la articulación 2 (KR-100-2 PA).

Además:

$$\sin \beta = \frac{EC}{R} = \frac{p_z - d_1}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.102)$$

$$\cos \beta = \frac{AE}{R} = \frac{\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1}{\sqrt{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2}} \quad (5.103)$$

Luego:

$$\sin \theta_2 = \sin (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin 180^\circ \cos (\alpha + \beta) - \cos 180^\circ \sin (\alpha + \beta) =$$

$$\sin \theta_2 = \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (5.104)$$

$$\cos \theta_2 = \cos (180^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos 180^\circ \cos (\alpha + \beta) + \sin 180^\circ \sin (\alpha + \beta) =$$

$$\cos \theta_2 = -\cos (\alpha + \beta) = -(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \quad (5.105)$$

De las ecuaciones (5.104) y (5.105) obtenemos la solución para θ_2 :

$$\theta_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \quad 51^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ \quad (5.106)$$

Solución de la articulación 3. De la figura 5.16, se tiene lo siguiente:

$$AB = a_2 \quad BC = a_3 \quad (5.107)$$

$$AC = R = \sqrt{AE^2 + EC^2} \quad (5.108)$$

$$EC = p_z - d_1 \quad AE = \sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1 \quad (5.109)$$

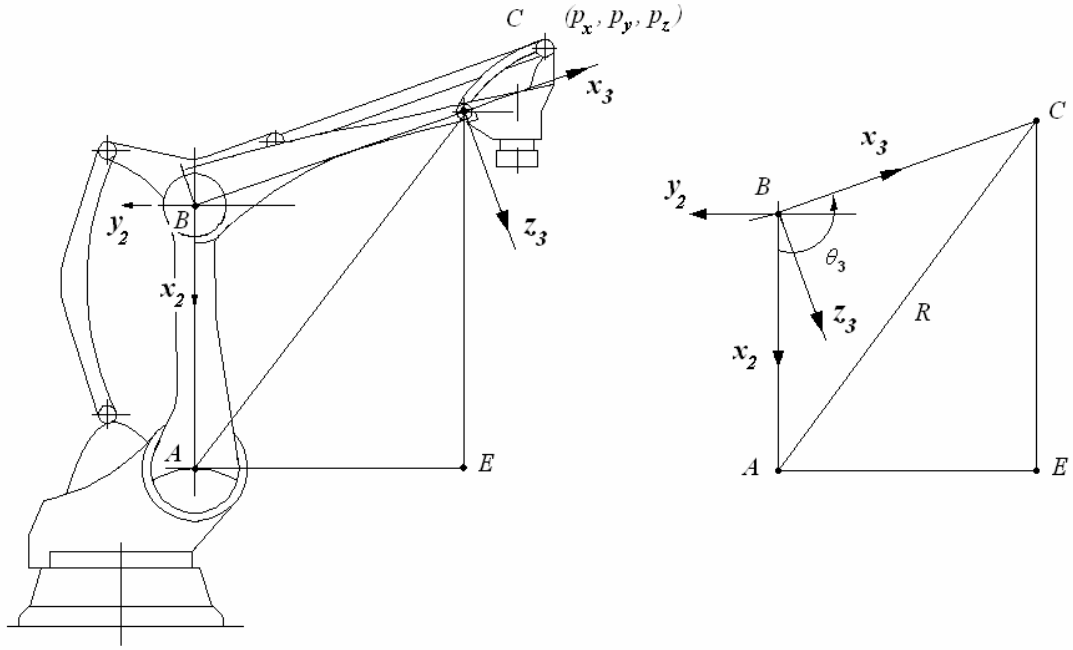


Figura 5.16. Solución para la articulación 3 (KR-100-2 PA).

Por la ley del coseno:

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \frac{R^2 - (AB^2 + BC^2)}{2AB \cdot BC} = \\ &= \frac{(\sqrt{p_y^2 + p_x^2} - a_1)^2 + (p_z - d_1)^2 - (a_2^2 + a_3^2)}{2a_2 \cdot a_3} \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\sin \theta_3 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} \quad (5.111)$$

Luego, utilizando la función tangente más consistente, de las ecuaciones (5.110) y (5.111) obtenemos la solución para θ_3 :

$$\theta_3 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right) \quad -199^\circ \leq \theta_3 \leq -19^\circ \quad (5.112)$$

Para determinar el punto p de la muñeca del robot paletizador y luego encontrar la solución para θ_2 y θ_3 se emplea una variación del método de desacoplo cinemático, estudiado en la sección 5.2. Entre la muñeca y el extremo final del brazo robótico se puede establecer un vector $\mathbf{ab}$ que se caracteriza por tener magnitud constante y que su orientación solo varía por las coordenadas x y y , manteniéndose z invariable (figura 5.17). Los valores de estas dos coordenadas variarán entonces en función del ángulo θ_1 y se calcularán a través de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}x &= ab_1 \cos \theta_1 \\y &= ab_1 \sin \theta_1 \\z &= -ab_2 \text{ (cte)}\end{aligned}\tag{5.112}$$

Donde los valores ab_1 y ab_2 son datos conocidos de la geometría del robot.

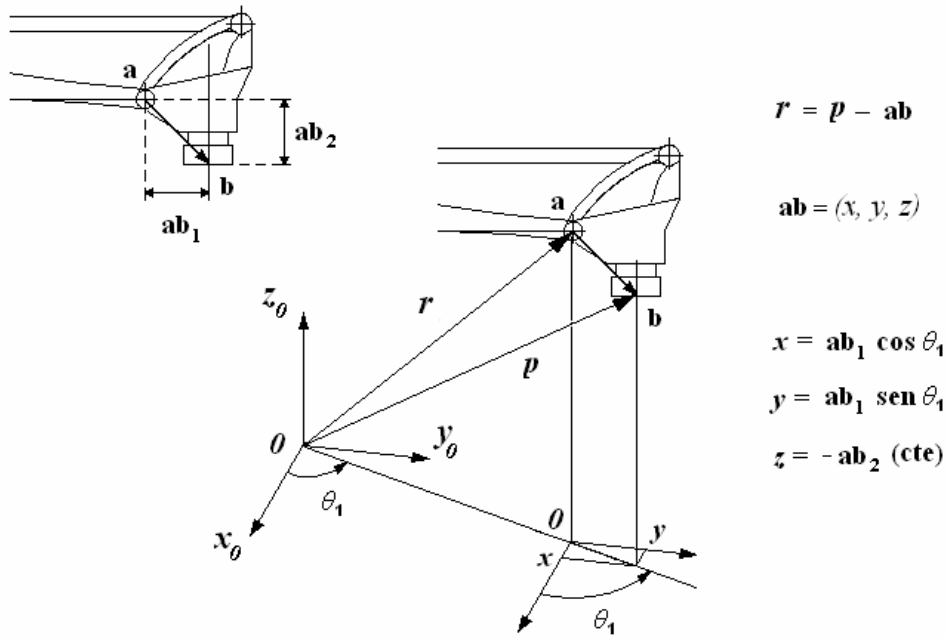


Figura 5.17. Calculo de las coordenadas de la muñeca del robot paletizador KR-100 2PA

Luego, se pueden calcular las coordenadas de la muñeca mediante la expresión:

$$r = p - ab \tag{5.112}$$

CAPITULO VI

**ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS Y
MOVIMIENTOS**

CAPITULO VI

ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS Y MOVIMIENTOS

Los robots industriales están diseñados para realizar una operación de producción. La operación se realiza permitiendo que el robot desplace su cuerpo, brazo y muñeca mediante una serie de movimientos y posiciones consecutivos. Unido a la muñeca, en el extremo final, está la herramienta que utiliza el robot para realizar una tarea específica. Las articulaciones del brazo y del cuerpo están diseñadas para permitir al robot desplazar su extremo a una posición deseada dentro de los límites del tamaño del robot y de los movimientos de las articulaciones. El movimiento de la muñeca está diseñado para permitir al robot orientar su extremo final con respecto a la tarea a realizar.

Las soluciones a los problemas cinemáticos estudiadas en los capítulos 4 y 5 permiten determinar las configuraciones que deben adoptar los elementos del brazo robot para lograr una posición y orientación específica del extremo final en el espacio.

Para realizar una tarea determinada el extremo del robot debe moverse desde un punto inicial hasta un punto final. Este movimiento puede ser realizado según múltiples trayectorias espaciales para trabajos de manipulación o a través de una trayectoria específica para trabajos de precisión. De todas ellas hay algunas que, bien por la sencillez de los algoritmos de control dinámico o bien por su utilidad y aplicación a diversas tareas, son las que en la práctica incorporan los robots comerciales.

Este capítulo dedica su atención, inicialmente y de manera didáctica, a algunos métodos de planificación de trayectorias para un brazo robot, utilizados

frecuentemente en el área de control. Luego se estudian, de manera más detallada, los problemas relativos a la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones, así como la posición y orientación, velocidad y aceleración del extremo final, todas en función del tiempo, cuando se desarrolla el movimiento en el espacio.

La curva espacial por donde se desplaza la mano del manipulador desde la posición inicial (posición y orientación) hasta la posición final se llama *trayectoria*. Antes de desarrollar los formalismos para describir el movimiento deseado del manipulador en el espacio (posición y orientación), se hará una breve explicación sobre los tipos de trayectorias que pueden emplearse en los robots.

6.1 Tipos de trayectorias

6.1.1 Trayectorias punto a punto

En este tipo de trayectorias cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o evolución de las demás articulaciones. Normalmente, cada actuador trata de llevar su articulación a la posición de destino en el menor tiempo posible, pudiéndose distinguir dos casos: **movimiento eje a eje** y **movimiento simultáneo de ejes**.

a) Movimiento eje a eje: Solo se mueve un eje a la vez. Comenzará a moverse la primera articulación, y una vez que esta haya alcanzado su punto final lo hará la segunda, y así sucesivamente. Este tipo de movimiento da obviamente como resultado un mayor tiempo de ciclo, teniendo como única ventaja un menor consumo de potencia instantánea por parte de los actuadores.

b) Movimiento simultáneo de ejes: En este caso todos los actuadores comienzan simultáneamente a mover las articulaciones del robot a una velocidad específica para cada una de ellas. Dado que la distancia a recorrer y las velocidades serán

generalmente diferentes, cada una de las articulaciones finalizará su movimiento en un instante diferente.

El movimiento del robot no terminará hasta que se alcance definitivamente el punto final, lo que se producirá cuando el eje que requiere mayor tiempo concluya su movimiento. De esta manera, el tiempo total invertido en el movimiento coincidirá con el eje que más tiempo emplee en realizar su movimiento particular, pudiéndose dar la circunstancia de que el resto de los actuadores hayan forzado su movimiento a una velocidad y aceleración elevada, de manera que la función concluye cuando la articulación más lenta alcance su punto final.

Las trayectorias punto a punto, fueron usadas por los primeros robots industriales de soldadura por punto y manipulación, y no están implementadas salvo en robots muy simples o con unidades de control muy limitadas.

6.1.2 Trayectorias coordinadas o isócronas

Para evitar que algunos actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar después la conclusión del movimiento de la articulación más lenta, puede hacerse un cálculo previo, averiguando cual es ésta articulación y que tiempo invertirá. Se ajustará entonces el movimiento del resto de los ejes para que inviertan el mismo tiempo en su movimiento, terminando todos ellos simultáneamente. Se tiene así que todas las articulaciones se coordinan comenzando y acabando su movimiento a la vez, adaptándose el movimiento de todas a la más lenta.

El tiempo total invertido en el movimiento es el menor posible y no se piden aceleraciones y velocidades elevadas a los actuadores innecesariamente. Desde el punto de vista del usuario la trayectoria que describe el extremo del robot no es significativa, siendo esta impredecible, aunque como es obvio, un conocimiento del modelo y control cinemático del robot permitirá su cálculo.

Las anteriores trayectorias permiten controlar el movimiento del brazo robótico a partir de las variables de articulación. De esta forma, no es posible determinar la trayectoria exacta que recorre el extremo final cuando se desplaza desde el punto inicial al punto final.

La trayectoria coordinada es una variación más eficiente de la trayectoria punto a punto. Es usada por robots para soldaduras de punto, manejo de materiales, carga y descarga de máquinas y en robots que realizan tareas simples. En este caso la trayectoria y la velocidad del extremo del robot no son de particular importancia, solo son relevantes los puntos inicial y final del movimiento.

6.1.3 Trayectorias continuas

Cuando se pretende que la trayectoria que sigue el extremo del robot sea conocida por el usuario (trayectoria en el espacio cartesiano o de la tarea), es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares.

Por lo general, las trayectorias que el usuario pretende que el robot describa son trayectorias en línea recta o en arco de círculo. El resultado será que cada articulación sigue un movimiento aparentemente caótico con posibles cambios de dirección y velocidad y sin coordinación con el resto de las articulaciones. Sin embargo, el resultado conjunto será que el extremo del robot describirá la trayectoria deseada.

En la actualidad, las nuevas aplicaciones industriales requieren de mecanismos flexibles que puedan desarrollar trayectorias específicas para realizar trabajos de precisión. La creciente capacidad de las computadoras para realizar numerosos cálculos en poco tiempo, permite que estas trayectorias puedan ser estudiadas a través de la cinemática clásica, las funciones vectoriales y los métodos numéricos.

Las trayectorias continuas son usadas por robots para trabajos de soldadura por arco, pintura en spray, mecanizado de partes, ensamblaje de partes complejas e inspección.

Antes de iniciar el estudio detallado del movimiento del brazo robótico en función de la trayectoria o camino que recorre su extremo final, y así desarrollar los formalismos apropiados para su análisis, se expondrán algunos esquemas para la planificación de trayectorias utilizadas por los robots.

Los esquemas de planificación de trayectorias generalmente <<interpolan>> o <<aproximan>> el camino deseado mediante una clase de funciones polinomiales y genera una secuencia de <<puntos de control>> a lo largo del tiempo para controlar el manipulador desde su posición inicial hasta su destino.

Se suelen utilizar dos métodos para planificar las trayectorias de un manipulador. El primero requiere que el usuario especifique un conjunto de condiciones (es decir, continuidad y regularidad) en la posición, velocidad y aceleración de las coordenadas de la articulación del manipulador, en posiciones seleccionadas (llamados puntos nudos o puntos de interpolación) a lo largo de la trayectoria.

Se selecciona entonces una trayectoria parametrizada de un clase de función (normalmente de la clase de funciones polinomiales de grado n o menor, para algún n , en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$) que <<interpola>> y satisface las condiciones de ligaduras en los puntos de interpolación. Con este método le es difícil al usuario seguir el camino que recorre el extremo final, por tanto, el manipulador puede chocar con obstáculos sin previo aviso.

En el segundo método, el usuario especifica explícitamente el camino que el manipulador debe seguir mediante una función analítica, tal como un camino en línea

recta en coordenadas cartesianas. De esta manera, los puntos extremos de la trayectoria se pueden especificar o bien en coordenadas de la articulación o bien en coordenadas cartesianas. No obstante, se suelen especificar en coordenadas cartesianas, porque es más fácil visualizar las configuraciones correctas del extremo final que en coordenadas de articulación.

Los dos métodos anteriores para la planificación de trayectorias de un manipulador deberían resultar en trayectorias simples, esperando que sean eficientes, uniformes y precisas con un tiempo de cálculo rápido (casi en tiempo real). Es importante resaltar que las secuencias de los vectores espaciales de las variables de articulación a lo largo del tiempo $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$ se generan sin tomar en cuenta la dinámica del manipulador, por lo tanto, pueden aparecer grandes errores de seguimiento en el control del manipulador.

De esta manera, la planificación de trayectoria se puede realizar o bien en el espacio de las *variables de articulación* o bien en el *espacio cartesiano*. Para la planificación de las variables de articulación se considera la historia temporal de todas las variables de articulación y de sus dos primeras derivadas respecto al tiempo para describir el movimiento deseado del manipulador.

Para la planificación en el espacio cartesiano se define la historia temporal de la posición de la mano del manipulador, su velocidad y aceleración, y se deducen las correspondientes posiciones, velocidades y aceleraciones de la articulación a partir de la información de la mano.

La planificación en el espacio de las variables de articulación tiene tres ventajas: 1) la trayectoria se establece directamente en términos de las variables controladas durante el movimiento; 2) el establecimiento de la trayectoria se puede hacer casi en tiempo real; 3) las trayectorias de la articulación son más fáciles de

establecer. La desventaja asociada es la dificultad en determinar las posiciones de los diversos elementos y de la mano durante el movimiento, lo cual es necesario para garantizar que se eviten obstáculos a lo largo de la trayectoria o el seguimiento de una trayectoria específica.

En general, el algoritmo básico para generar puntos de control de la *trayectoria de la articulación* es bastante simple:

$$t = t_0;$$

bucle: Esperar hasta el próximo intervalo de control;

$$t = t + \Delta t;$$

$\mathbf{h}(t)$ = posición donde debería estar en el instante t la posición de la articulación del manipulador;

Si $t = t_f$, entonces salir;

ir a *bucle*;

donde Δt es el periodo de muestreo de control para el manipulador.

Del algoritmo anterior, se ve que el cálculo consiste en una función de trayectoria (de las variables de articulación) $\mathbf{h}(t)$ que se modifica en cada intervalo de control. Sobre esta trayectoria se imponen cuatro condiciones. En primer lugar, los puntos de control de la trayectoria se deben calcular rápidamente de forma no iterativa. En segundo lugar, se deben determinar y especificar posiciones intermedias de forma precisa. En tercer lugar, se debe garantizar la continuidad de la posición de la articulación y de sus dos primeras derivadas respecto del tiempo de manera que la trayectoria planificada sea suave. Finalmente, se deben minimizar los movimientos extraños, tales como desplazamientos erráticos.

Estas cuatro condiciones sobre la trayectoria planificada se satisfacen si la historia temporal de las variables de articulación se pueden especificar mediante secuencias polinomiales.

Para el control de la *trayectoria cartesiana* se puede modificar el algoritmo anterior a:

$$t = t_0;$$

bucle: Esperar hasta el próximo intervalo de control;

$$t = t + \Delta t;$$

$\mathbf{H}(t)$ = posición donde debería estar en el instante t la mano del manipulador;

$\mathbf{Q}[\mathbf{H}(t)]$ = solución correspondiente de la articulación para $\mathbf{H}(t)$

Si $t = t_f$, entonces salir;

ir a *bucle*;

Además del cálculo de la función trayectoria de la mano del manipulador $\mathbf{H}(t)$ en cada intervalo de control, se necesita convertir las posiciones cartesianas en sus correspondientes soluciones de articulación, $\mathbf{Q}[\mathbf{H}(t)]$. La función matricial $\mathbf{H}(t)$ indica la posición deseada de la mano del manipulador en el instante t y se puede obtener fácilmente mediante una matriz de transformación homogénea 4 x 4, estudiada en los capítulos 3 y 4.

Estos métodos fueron desarrollados por investigadores y empleados por los manipuladores durante años, en diversas tareas, cumpliendo la función de proporcionar procedimientos con bajos costos computacionales para el control del manipulador, debido al lento desarrollo informático que acompañaba a los comienzos de la robótica.

Actualmente debido al rápido avance de la tecnología informática, es posible utilizar herramientas matemáticas más robustas para realizar las funciones de control,

utilizando computadoras con gran capacidad y velocidad de cálculo, además del uso de sensores de movimiento de alta precisión.

En la sección siguiente y de manera ilustrativa, se hará una exposición breve de estos métodos para la planificación de trayectorias, quedando claro que los mismos no se utilizan específicamente para el análisis cinemático sino como base para definir esquemas de control.

6.2 Esquemas de planificación de trayectorias

6.2.1 Esquemas en el espacio de la articulación

Para controlar un manipulador se requiere que la configuración de su brazo tanto en la posición inicial como final se especifique previo a la planificación de la trayectoria del movimiento. Cada uno de estos puntos se especifica generalmente en términos de una posición y una orientación deseadas del extremo final o herramienta del brazo robótico.

Estos puntos se convierten luego en un conjunto de ángulos de articulación deseados mediante la aplicación de la cinemática inversa. Después se encuentra una función uniforme para cada una de las n articulaciones que se mueven desde el ángulo inicial hasta el ángulo final. El tiempo requerido por segmento es el mismo para cada articulación, de manera que todas las articulaciones llegarán al punto final al mismo tiempo, obteniéndose la posición cartesiana deseada.

Los esquemas en el espacio de la articulación son generalmente más fáciles de calcular y, como no hay una correspondencia continua entre el espacio de articulación y el espacio cartesiano, esencialmente no hay ningún problema con las singularidades del mecanismo.

Las funciones uniformes mas simples que se pueden emplear son los polinomios cúbicos. Se requiere una función para cada articulación cuyo valor en t_0 sea la posición inicial de la articulación y su valor en t_f sea la posición final deseada de la articulación. Como se muestra en la figura 6.1, hay muchas funciones uniformes $\theta(t)$ que podrían usarse para interpolar el valor de las articulaciones.

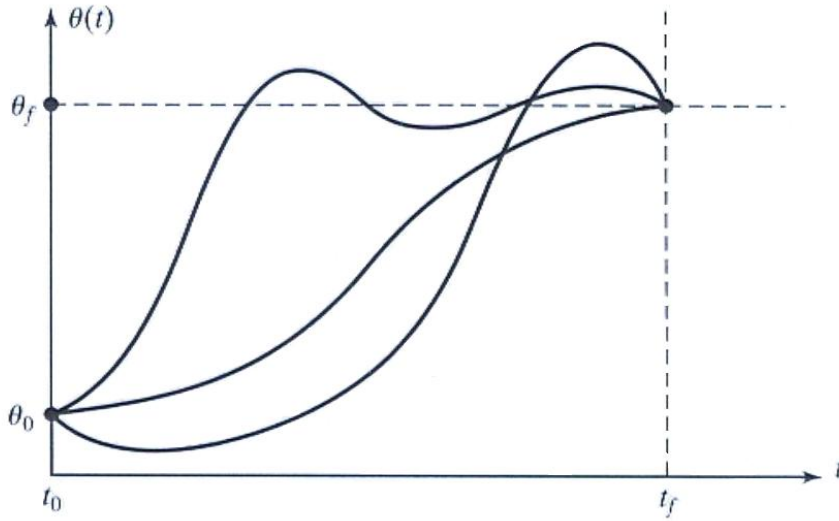


Figura 6.1. Varias formas posibles de trayectoria para una sola articulación.

Para crear un solo movimiento uniforme hacen falta al menos cuatro restricciones sobre $\theta(t)$. Dos de estas restricciones sobre el valor de la función se deben a la selección de valores inicial y final:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0, \\ \theta(t_f) &= \theta_f,\end{aligned}\tag{6.1}$$

Las otras dos restricciones son que la función velocidad debe ser continua, lo cual en este caso significa que las velocidades inicial y final deben ser cero:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= 0, \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0,\end{aligned}\tag{6.2}$$

Estas cuatro restricciones pueden satisfacerse mediante un polinomio de por lo menos tercer grado y determinan de manera única una ecuación cúbica específica. Este tipo de ecuaciones tiene la forma:

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (6.3)$$

De manera que la velocidad y la aceleración de la articulación a lo largo de esta ruta son claramente

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2, \\ \ddot{\theta}(t) &= 2 a_2 + 6 a_3 t, \end{aligned} \quad (6.4)$$

Combinando estas últimas tres ecuaciones con las cuatro restricciones deseadas se producen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0, \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3, \\ 0 &= a_1, \\ 0 &= a_1 + 2 a_2 t_f + 3 a_3 t_f^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

Resolviendo estas ecuaciones para las a_i se obtiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_0, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0), \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0), \end{aligned} \quad (6.6)$$

Con estas últimas cuatro relaciones se puede calcular el polinomio cúbico que conecta cualquier posición de ángulo de articulación inicial con cualquier posición final deseada. Esta solución es para el caso en el que la articulación inicia y termina el movimiento con una velocidad cero. En la figura 6.2 siguiente se muestran los perfiles de posición, velocidad y aceleración para un segmento cúbico con velocidades inicial y final nulas.

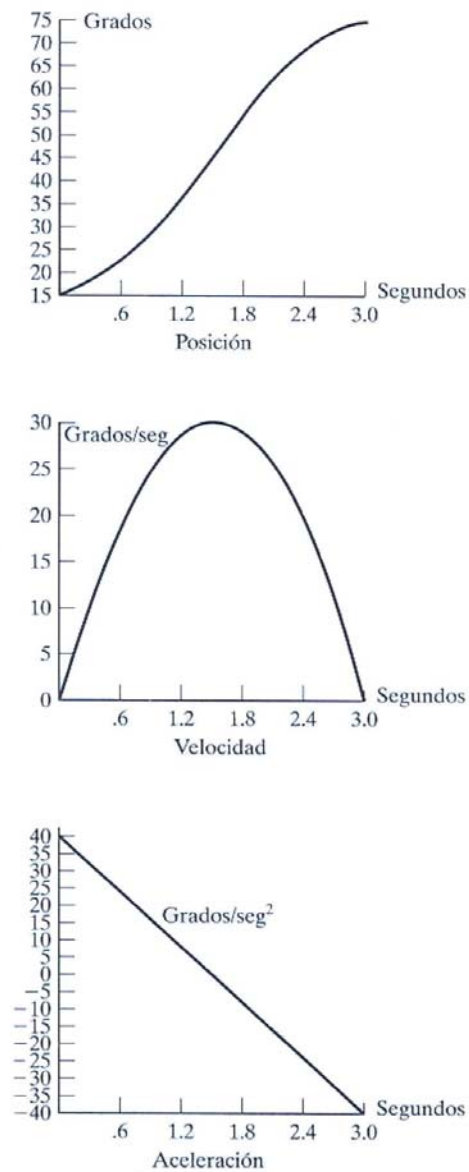


Figura 6.2. Perfiles de posición velocidad y aceleración para un solo segmento cúbico que inicia y termina inmóvil (velocidad cero).

Hasta ahora se han considerado los movimientos descritos por una duración deseada y un punto de destino final; en general, se desea permitir la especificación de trayectorias que incluyan puntos de referencia o nodos de interpolación. Si el manipulador se va a detener en cada punto nodo, se puede usar la solución cúbica anterior.

Por lo común se desea pasar a través de un punto nodo sin detenerse, por lo cual se necesita generalizar la forma en que se ajustarán las ecuaciones cúbicas a las restricciones de las rutas. Si se conocen las velocidades deseadas de las articulaciones en los puntos nodo, entonces se pueden construir polinomios cúbicos como antes; sin embargo, ahora las restricciones de velocidad en cada extremo no son iguales a cero, sino que tienen cierta velocidad conocida. Estas restricciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0, \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f,\end{aligned}\tag{6.7}$$

Las cuatro ecuaciones que describen este polinomio cúbico general son:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= a_0, \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3, \\ \dot{\theta}_0 &= a_1, \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2 a_2 t_f + 3 a_3 t_f^2,\end{aligned}\tag{6.8}$$

Al resolver estas ecuaciones para las a_i se obtiene

$$\begin{aligned}a_0 &= \theta_0, \\ a_1 &= \dot{\theta}_0, \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f} \dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f} \dot{\theta}_f,\end{aligned}\tag{6.9}$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2} (\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0),$$

Utilizando estas cuatro ecuaciones se puede calcular el polinomio cúbico que conecta las posiciones inicial y final con las velocidades inicial y final. Si se tienen las velocidades de articulación deseadas en cada punto nodo, entonces simplemente se aplican estas ecuaciones a cada segmento para encontrar los polinomios cúbicos requeridos.

6.2.1.1 Polinomios de mayor orden

Algunas veces se utilizan polinomios de mayor orden para los segmentos de ruta. Por ejemplo, si se desea especificar la posición, la velocidad y la aceleración al inicio y al final de cada segmento de ruta, se requiere un polinomio de quinto grado, a saber,

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \quad (6.10)$$

En donde las restricciones se dan así:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5, \\ \dot{\theta}_0 &= a_1, \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2 a_2 t_f + 3 a_3 t_f^2 + 4 a_4 t_f^3 + 5 a_5 t_f^4, \\ \ddot{\theta}_0 &= 2 a_2, \\ \ddot{\theta}_f &= 2 a_2 + 6 a_3 t_f + 12 a_4 t_f^2 + 20 a_5 t_f^3, \end{aligned} \quad (6.11)$$

Estas restricciones especifican un conjunto lineal de seis ecuaciones con seis variables desconocidas cuya solución es:

$$a_0 = \theta_0,$$

$$a_1 = \dot{\theta}_0,$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2},$$

$$a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3}, \quad (6.12)$$

$$a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4},$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5},$$

6.2.1.2 Función lineal con mezclas parabólicas

Otra opción de forma de ruta es la lineal. Es decir, simplemente se interpola linealmente para realizar un movimiento desde la posición de articulación actual hasta la posición final, como se muestra en la figura 6.3. Se debe recordar que aunque el movimiento de cada articulación en este esquema es lineal el extremo final no se mueve en general en una línea recta en el espacio.

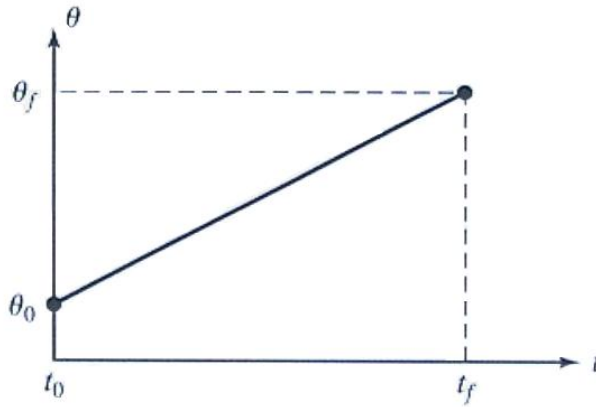


Figura 6.3. Interpolación lineal de la articulación.

Sin embargo, la interpolación lineal directa haría que la velocidad fuera discontinua al inicio y al final del movimiento. Físicamente esto produciría movimientos bruscos e instantáneos de la articulación y esfuerzos muy grandes en los mecanismos de impulsión. Para crear una ruta uniforme con posición y velocidad continuas, se empieza con una función lineal y se agrega una región de *mezcla* parabólica tanto al inicio como al final de la trayectoria.

Durante la porción de mezcla de dicha trayectoria se utiliza una aceleración constante para cambiar la velocidad de manera uniforme. La figura 6.4 muestra una ruta simple que se construye en esta forma. La función lineal y las dos funciones parabólicas se “unen” de manera que toda la ruta completa sea continua en posición y en velocidad.

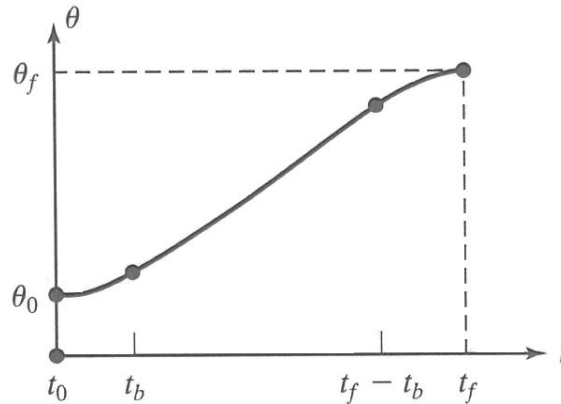


Figura 6.4. Segmento lineal con mezclas parabólicas.

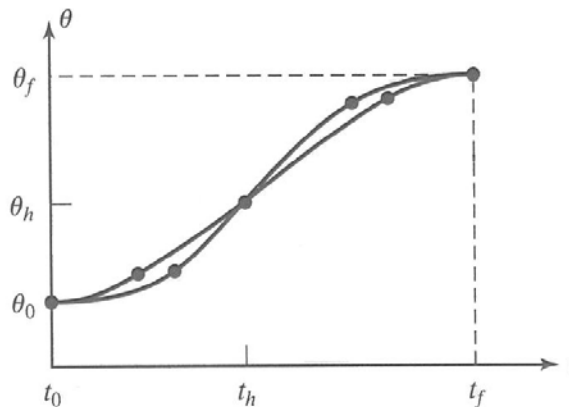


Figura 6.5. Segmento lineal con mezclas parabólicas.

Para poder construir este segmento individual supongamos que las mezclas parabólicas tienen la misma duración en el tiempo; por lo tanto, se utiliza la misma aceleración constante durante ambas mezclas. Como se indica en la figura 6.5, hay muchas soluciones para este problema, pero se debe tener en cuenta que la respuesta es siempre simétrica sobre el punto intermedio o punto de inflexión en el tiempo, representado por t_h , y sobre un punto intermedio en la posición, representado por θ_h . La velocidad final de la región de mezcla debe ser igual a la velocidad de la sección lineal, por lo que se tiene que:

$$\ddot{\theta}_{t_b} = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b}, \quad (6.13)$$

en donde θ_b es el valor de θ al final de la región de mezcla y $\ddot{\theta}$ es la aceleración que actúa durante la región de mezcla. El valor de θ_b se obtiene mediante

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{t_b} t_b^2, \quad (6.14)$$

Al combinar estas dos ecuaciones y hacer que $t = 2 t_h$, se obtiene

$$\ddot{\theta}_{t_b}^2 - \ddot{\theta}_{t_b} t + (\theta_f - \theta_0) = 0, \quad (6.15)$$

en donde t es la duración deseada del movimiento. Dado cualquier valor para θ_f , θ_0 y t , se puede seguir cualquiera de las rutas dadas con base en las elecciones de $\ddot{\theta}$ y t_b que satisfagan esta última ecuación. En general, se elige una aceleración y se resuelve la ecuación para obtener el valor correspondiente de t_b . La aceleración que se elija deberá ser lo suficientemente alta, de acuerdo la ecuación 6.17, o de lo contrario no existirá una solución. Al resolver la ecuación para t_b en términos de la aceleración y otros parámetros conocidos, se obtiene

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}, \quad (6.16)$$

La restricción sobre la aceleración utilizada en la mezcla es:

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2}, \quad (6.17)$$

Cuando ocurre la igualdad en esta ecuación la porción lineal se reduce a una longitud cero y la trayectoria está compuesta de dos tramos que se conectan con pendiente equivalente.

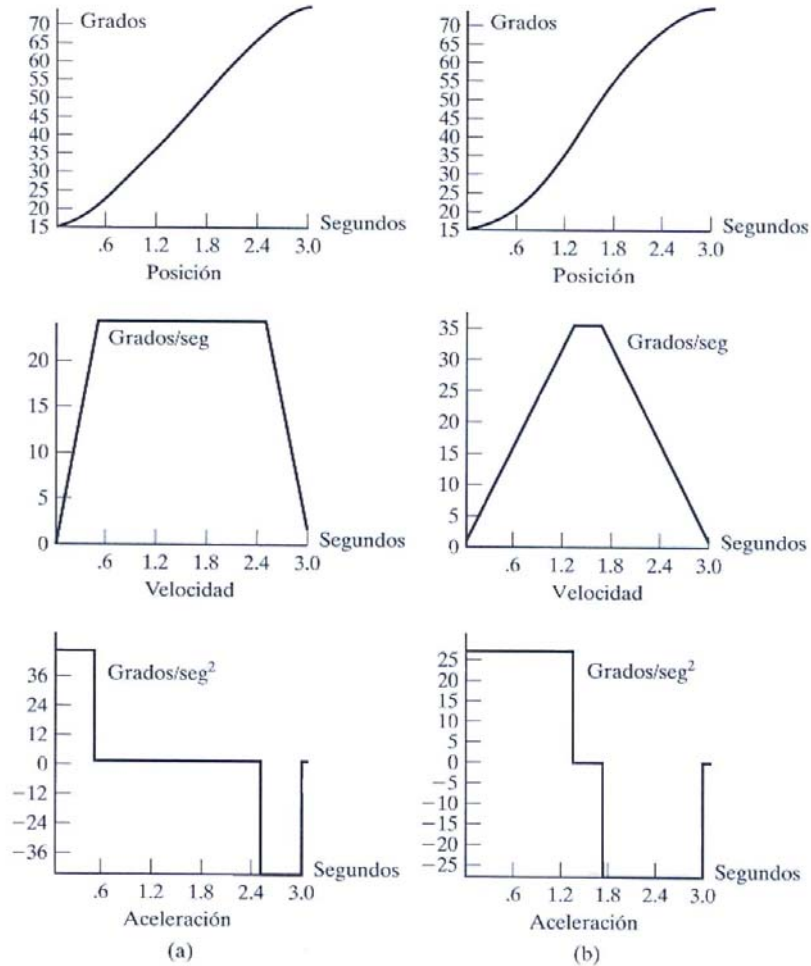


Figura 6.6. Perfiles de posición, velocidad y aceleración para la interpolación lineal con mezclas parabólicas. El conjunto de curvas de la izquierda está basado en una mayor aceleración durante las mezclas que la utilizada del lado derecho.

A medida que la aceleración utilizada se hace cada vez mas grande, la longitud de los tramos inicial y final se hace cada vez más corta. En el límite, de la ecuación 6.16, con la aceleración infinita, regresamos al caso simple de interpolación lineal. En la figura 6.6 se muestran perfiles de posición, velocidad y aceleración para la interpolación lineal con mezclas parabólicas.

6.2.2 Camino cartesiano

Aunque las coordenadas de articulación especifican completamente la posición y orientación de su mano, no son apropiadas para especificar una tarea porque la mayoría de las coordenadas de articulación del manipulador no son ortogonales y no separan la posición de la orientación. Para los robots más sofisticados se han desarrollado lenguajes de programación que controlan el manipulador para cumplir una determinada tarea.

En tales sistemas, una tarea se suele especificar como secuencias de puntos nudos cartesianos a través de los cuales debe pasar la mano del manipulador o extremo final. Así, al describir los movimientos del manipulador en una tarea, se está más interesado por el formalismo de especificar las posiciones finales por las cuales se mueve la mano del manipulador, así como la curva en el espacio (o camino) que recorre.

Paul [1.979] describe el diseño de trayectorias de manipuladores constituidas por segmentos de línea recta para el movimiento de la mano. La velocidad y aceleración de la mano entre estos segmentos se controla convirtiéndolas en coordenadas de articulación y se suavizan mediante una rutina de interpolación cuadrática. Taylor [1.979] extendió y refinó el método de Paul, utilizando la representación de cuaterniones de números duales para describir la localización de la mano.

A causa de las propiedades de los cuaterniones, las transiciones entre las posiciones de la mano debido a operaciones rotacionales necesitan menos cálculo, mientras que las operaciones traslacionales no dan ninguna ventaja. Existen dos métodos para diseñar trayectorias cartesianas en línea recta: a) el método de la matriz de transformación homogénea y b) la planificación de trayectorias en línea recta usando cuaterniones.

a) Método de la matriz de transformación homogénea

En un sistema robótico programable, el movimiento deseado se puede especificar como secuencia de puntos nodos cartesianos, cada uno de los cuales se puede describir en términos de transformaciones homogéneas que relacionan el sistema de coordenadas de la mano del manipulador con el sistema de coordenadas del sistema de trabajo. Las correspondientes coordenadas de articulación en estos puntos nudos cartesianos se pueden calcular a partir de la rutina de solución del problema cinemático inverso y se puede utilizar un polinomio cuadrático para suavizar con fines de control los puntos nudos de dos articulaciones consecutivas en coordenadas de articulación.

De esta manera, se controla el manipulador para moverse a lo largo de una línea recta conectada mediante estos puntos nudos. Esta técnica tiene la ventaja de permitirnos controlar la mano del manipulador para seguir objetos móviles. Aunque las posiciones finales se describen mediante sus transformados, no especifican como se mueve la mano del manipulador de un punto transformado a otro.

b) Planificación de trayectorias en línea recta utilizando cuaterniones

El esquema anterior de trayectoria de movimiento en línea recta de Paul que utiliza el método de la matriz de transformación homogénea para representar las posiciones finales, es una representación fácil de comprender y de utilizar. Sin

embargo, las matrices son moderadamente costosas de almacenar y los cálculos sobre ellas requieren más operaciones que para algunas otras representaciones. Además, la representación matricial de las rotaciones es altamente redundante lo que puede conducir a inconsistencias numéricas. Taylor [1.979] propuso dos métodos al problema de planificación de movimientos en línea recta entre puntos nudos, a saber:

- Control del camino cartesiano

Se requiere mover el sistema de coordenadas de la mano del manipulador a lo largo de una línea recta entre dos puntos nudos especificados por $\mathbf{F}_0$ y $\mathbf{F}_1$ en el tiempo T , donde cada sistema de coordenadas se representaba mediante una matriz de transformación homogénea,

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} R_i & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

El movimiento a lo largo del camino consiste en traslaciones del origen del sistema de la herramienta desde $\mathbf{p}_0$ hasta $\mathbf{p}_1$ con rotaciones de su orientación desde $\mathbf{R}_0$ hasta $\mathbf{R}_1$.

Este sistema de control necesita una cantidad considerable de tiempo de cálculo y es difícil de tratar con respecto a las restricciones espaciales de las variables de articulación del manipulador en tiempo real. Para tratar con este problema se podría precalcular y almacenar la solución de la articulación mediante la simulación del algoritmo en tiempo real antes de la ejecución del movimiento. Otra forma posible es precalcular la solución de la articulación para cada intervalo de muestreo y luego realizar interpolaciones de articulación utilizando polinomios de bajo grado para ajustarlos a través de estos puntos intermedios para generar los puntos de la trayectoria. La dificultad de este método es que el número de puntos intermedios

necesarios para mantener la mano del manipulador próxima a la trayectoria en línea recta cartesiana depende del movimiento particular que se realice.

- Trayectoria de articulación con desviación acotada

Taylor propuso una estrategia de movimiento en el espacio de la variable de articulación para dar solución al problema anterior, este selecciona suficientes puntos intermedios durante la fase de pre planificación para garantizar que la desviación de la mano del manipulador de la trayectoria cartesiana en línea recta sobre cada segmento de movimiento permanece dentro de las acotaciones de error pre especificadas.

El esquema comienza precalculando todos los vectores solución de las articulaciones $\mathbf{q}_i$ correspondientes a los puntos nodos $\mathbf{F}_i$ a lo largo de la línea recta deseada. Los vectores $\mathbf{q}_i$ del espacio de articulación se utilizan como puntos nudos para una estrategia de interpolación en el espacio de las variables de articulación análoga a la que se usa para la ecuación de posición del camino cartesiano.

Se deberá hacer un estudio más extenso de estos esquemas de planificación de trayectorias cuando se analicen los sistemas robóticos desde el punto de vista dinámico en conjunto con la teoría de control. En las secciones siguientes se estudiarán las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar las trayectorias y analizar el movimiento de un brazo robótico.

6.3 Trayectorias y análisis del movimiento

Los esquemas de planificación de trayectorias estudiados anteriormente (variables de articulación y espacio cartesiano) son de utilidad para desarrollar algoritmos de control del movimiento de manipuladores en trayectorias interpoladas entre dos puntos, en el caso de variables de articulación, y en trayectorias rectas entre

dos puntos, en el caso cartesiano, permitiendo generar trayectorias que ofrecen gran economía computacional.

Sin embargo, estos esquemas de planificación no son útiles para analizar el movimiento del brazo robótico. Para realizar un análisis cinemático completo de los mecanismos robóticos, no basta solo con definir la configuración de sus elementos en alguna posición determinada, sino que es preciso conocer como varían estas posiciones a lo largo del tiempo, así como las velocidades y aceleraciones.

La determinación de los valores de los parámetros cinemáticos (posición, velocidad y aceleración) cuando el efector final se desplaza a lo largo de trayectorias espaciales es de gran importancia. Conocer su variación permitirá obtener información útil que combinada con los estudios dinámicos, permite realizar un análisis eficiente de estos mecanismos.

El análisis del movimiento comenzará entonces por revisar algunos conceptos fundamentales sobre la cinemática de la partícula y del cuerpo rígido y posteriormente el estudio de las herramientas matemáticas, que son de especial interés conocer y manejar para abordar el problema del brazo robótico. Algunas de estas herramientas incluyen la parametrización de curvas en el espacio y su reparametrización, el uso de las funciones vectoriales y los métodos numéricos de interpolación polinomial.

En la actualidad, el desarrollo de nuevos materiales más livianos y resistentes, computadoras de gran capacidad de cálculo, sensores y el empleo de la teoría de control, así como el uso de motores eléctricos fuertes, precisos y compactos permiten la construcción de brazos robóticos de gran versatilidad capaces de realizar numerosas actividades. Esta agilidad se traduce en gran movilidad, rapidez y precisión para realizar tareas por parte del robot, lo que significa que deben emplearse

herramientas matemáticas y computacionales eficientes (estudiadas en las próximas secciones) para el análisis del movimiento.

6.4 Nociones fundamentales

En los cursos de cinemática es usual estudiar, de manera preliminar, la cinemática de la partícula, introduciendo los conceptos y la terminología necesarios que permiten el posterior estudio de la cinemática del cuerpo rígido. Para estudiar la cinemática de la partícula se suele utilizar el enfoque de las coordenadas intrínsecas, en la cual la posición de un punto **P** se expresa con un vector **OP** que apunta desde el origen **O** de un sistema de coordenadas fijo, solidario a un cuerpo rígido **(1)** también fijo, hasta el punto **P** (ver figura 6.7).

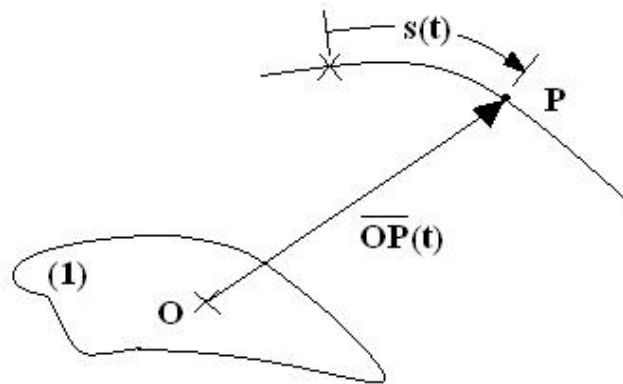


Figura 6.7. Sistema de coordenadas intrínsecas.

El movimiento de un punto o partícula, bajo este enfoque, se representa mediante de la ecuación de la longitud de arco **s** que varía con el tiempo **t**. La velocidad y la aceleración se obtienen a través de la derivación del vector de posición **OP** expresado en función de la longitud de arco **s**. De esto se obtiene el vector velocidad que es tangente, en todo momento, a la trayectoria por la cual se desplaza el punto **P**. La aceleración, que resulta de la derivación del vector de velocidad, se

expresa en dos componentes, una tangencial y otra normal a la trayectoria que recorre el punto P . Estas se conocen como la *aceleración tangencial* y la *aceleración normal*.

Otro enfoque para estudiar el movimiento de una partícula, utiliza un sistema de coordenadas cartesianas para expresar la posición de un punto P a través de tres componentes, que tienen las direcciones de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, y que están asociados al sistema de referencia fijo x , y , z , respectivamente (ver figura 6.8). Cada componente del vector de posición varía independientemente en función del tiempo. La velocidad y la aceleración se expresan de igual forma a través de tres componentes cartesianas, las cuales se obtienen derivando cada componente de los vectores de posición y velocidad, respectivamente. Su empleo es útil en la resolución de problemas prácticos.

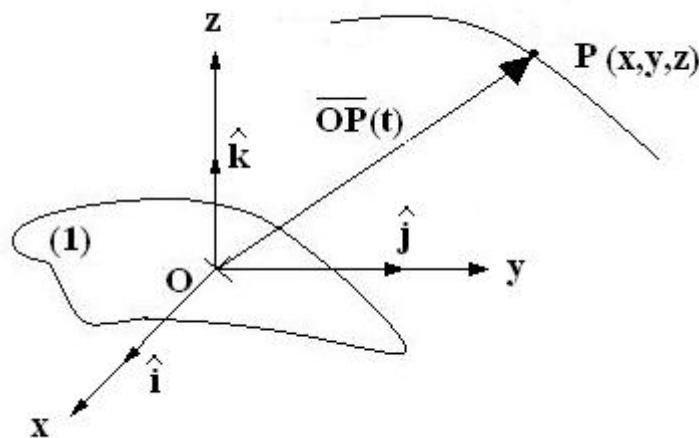


Figura 6.8. Sistema de coordenadas cartesianas.

Los dos enfoques anteriores se pueden relacionar empleando el producto escalar, la norma de un vector y la proyección de un vector sobre otro.

Para el estudio de la cinemática del cuerpo rígido, se suele enfocar el problema gráficamente con el uso de la geometría vectorial. A través de triángulos de velocidad y aceleración, se establecen relaciones entre los vectores de velocidad y

aceleración, absoluta y relativa, de puntos pertenecientes a un mismo cuerpo y de puntos que pertenecen a dos cuerpos diferentes de manera simultánea. Este método es muy práctico aunque se puede introducir pequeños errores por factores geométricos y de escala.

Sin embargo, dos de los esquemas de análisis cinemáticos mencionados anteriormente, el sistema de coordenadas intrínsecas y el método gráfico, son empleados comúnmente para el estudio de mecanismos planos. Cuando se usan para el análisis de mecanismos tridimensionales, se dificulta la obtención de una función de longitud de arco s o se puede incurrir en errores al trabajar gráficamente con vectores en el espacio. A pesar de esto se pueden utilizar a costa de una mayor complejidad en el trabajo.

En el estudio del movimiento del brazo robótico se deben emplear las herramientas que permitan obtener resultados de forma rápida y con un margen de error aceptable. Las matrices de transformación homogénea, son parte de esas herramientas y deben ser complementadas con la finalidad de diseñar la metodología de análisis.

Se estudiará la parametrización y reparametrización de curvas en el espacio, junto con las propiedades de las funciones vectoriales y los esquemas de interpolación polinomial. Todas serán tratadas en las próximas secciones.

6.5 Curvas en el espacio. Parametrización y reparametrización

6.5.1 Parametrización

La ecuación de una curva c en el espacio, se expresa en forma paramétrica con las ecuaciones: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Las funciones f , g y h determinan las coordenadas, x , y , z del punto a medida que varía t , creando de esta forma una traza o

huella continua en el espacio con las imágenes de estas funciones (Figura 6.9). La letra t designa a la variable independiente la cual es interpretada como el tiempo. La fórmula matemática de esta “carretera en el espacio” tiene dos ingredientes importantes que la caracterizan: la forma de la trayectoria en sí y la manera cómo ésta es recorrida.

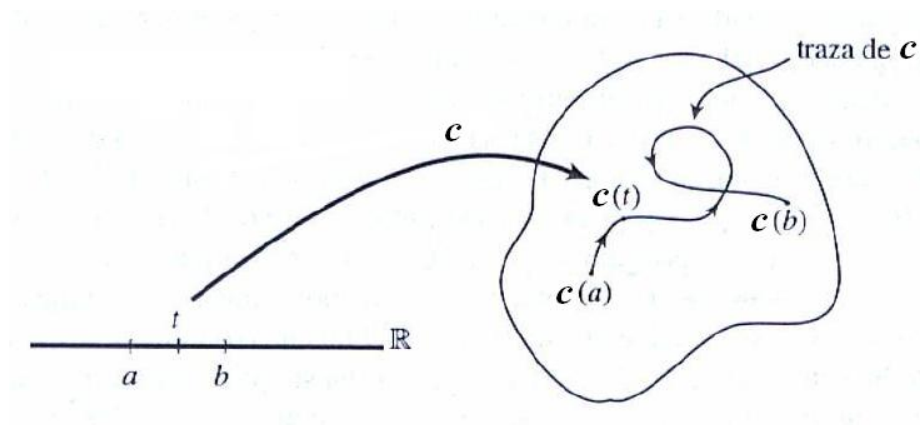


Figura 6.9. Curva paramétrica. Traza de un camino.

6.5.2 Reparametrización

Como se mencionó anteriormente un camino se puede ver como un objeto matemático caracterizado por dos aspectos: la curva c que describe en el espacio (su trayectoria), y por otro lado la manera como se recorre dicho camino, más aún, la velocidad con la que se realiza el recorrido. Uno de los objetivos fundamentales en el estudio de este camino es el de las propiedades geométricas de las curvas que estas representan.

A continuación se estudiará lo relacionado a las semejanzas existentes entre los diversos caminos que describen una misma curva. Tal parentesco se llama “reparametrización”. De manera poco precisa se puede decir que la reparametrización de un camino c es otro camino $\bar{c}$ con la misma imagen que c . De otro modo, el

camino $\bar{c}$ es una reparametrización del camino c si la curva descrita por $\bar{c}$ es la misma que la descrita por c .

Justifiquemos el término "reparametrización". Ya se había mencionado que las funciones coordenadas de un camino c se les solía llamar "ecuaciones paramétricas" de la curva que describe el camino. Con tal terminología, a la variable independiente t se les llama "parámetro". En esta perspectiva entonces, la reparametrización de un camino no es más que un cambio del parámetro t en la ecuaciones paramétricas de la curva, es decir, un cambio de variable independiente del camino c . Nótese que, viendo el parámetro t como el tiempo en que el punto $c(t)$ recorre la curva, un cambio en la escala del tiempo representará un cambio de la velocidad del movimiento del punto $c(t)$ por la curva. De esta manera, nos damos cuenta de que siendo $\bar{c}$ un camino que describe la misma curva que c (una reparametrización de c), la diferencia entre ellos debe estar precisamente en la velocidad de recorrido de la curva.

Tomando entonces el camino c definido en el intervalo I de los reales $\mathbb{R}$. La manera de obtener una reparametrización de c es simplemente dejar correr del tiempo t en el intervalo I de otra manera. Esto se puede lograr definiendo una función $\varphi: J \rightarrow I$ de la variable s . Mientras la variable real s recorre el intervalo J , las imágenes $\varphi(s)$ recorrerán el intervalo I ; éstos serán los valores $t = \varphi(s)$ que tomará c para asignar los puntos $c(t)$. La primera condición natural que la función φ debe cumplir es que debe ser sobreyectiva, para asegurar que las imágenes $\varphi(s)$ tomen todos los valores de t en I . Se observa entonces que se puede concebir a una reparametrización de c como una composición de c con φ . Más precisamente, dada la función sobreyectiva $\varphi: J \rightarrow I$ definida en el intervalo J de $\mathbb{R}$ y tomando valores en el intervalo I de $\mathbb{R}$, se puede componer ésta con el camino c para formar así la nueva función $c \circ \varphi$. Siendo c un camino, esta función es continua. Otra condición natural que surge para la función φ es que sea continua, asegurándose así que la composición $c \circ \varphi$ sea una función

continua (compuesta de funciones continuas es una función continua) y por lo tanto sea un nuevo camino, que tiene la misma traza el camino c (figura 6.10).

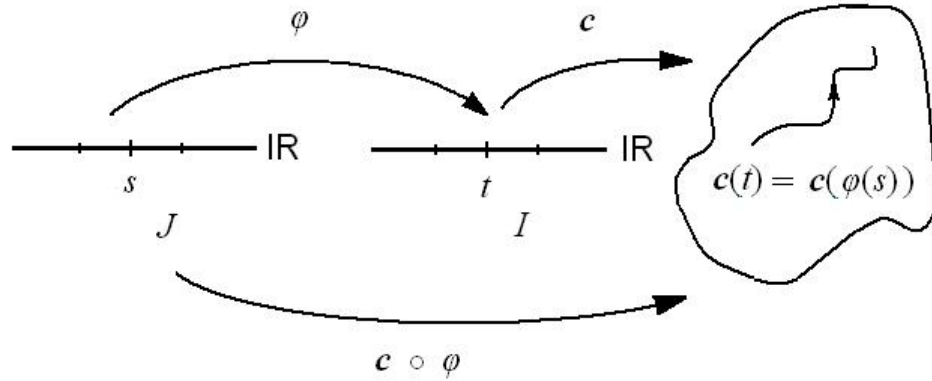


Figura 6.10. Reparametrización del camino c .

Si el camino c es diferenciable, ésta propiedad se mantiene con la reparametrización $\bar{c} = c \circ \phi$, de tal manera que la función $t = \phi(s)$ sea diferenciable. En tal caso se tiene la composición de funciones diferenciables, la cual es entonces diferenciable y, según la regla de la cadena

$$\bar{c}'(s) = (c \circ \phi)'(s) = c'(\phi(s)) \phi'(s), \quad s \in J$$

En la fórmula anterior $\phi'(s)$ es la derivada de la función $\phi: J \rightarrow I$ en el punto $s \in J$; por lo tanto es un número real, en tanto que $c'(\phi(s))$ es la derivada del camino c en el punto $t = \phi(s)$. Siguiendo la tradición de escribir primero los escalares y luego los vectores en un producto, la fórmula anterior se escribirá como:

$$\bar{c}'(s) = \phi'(s) c'(\phi(s))$$

Esta fórmula muestra la relación entre los vectores velocidad del camino c con los correspondientes de su reparametrización $\bar{c}$; según ella el camino c se mueve en el punto $\bar{c}(s)$ a una velocidad igual a $\varphi'(s)$ veces la velocidad que llevaría el camino c en ese punto (el cual corresponde al punto $t = \varphi(s)$) (figura 6.11).

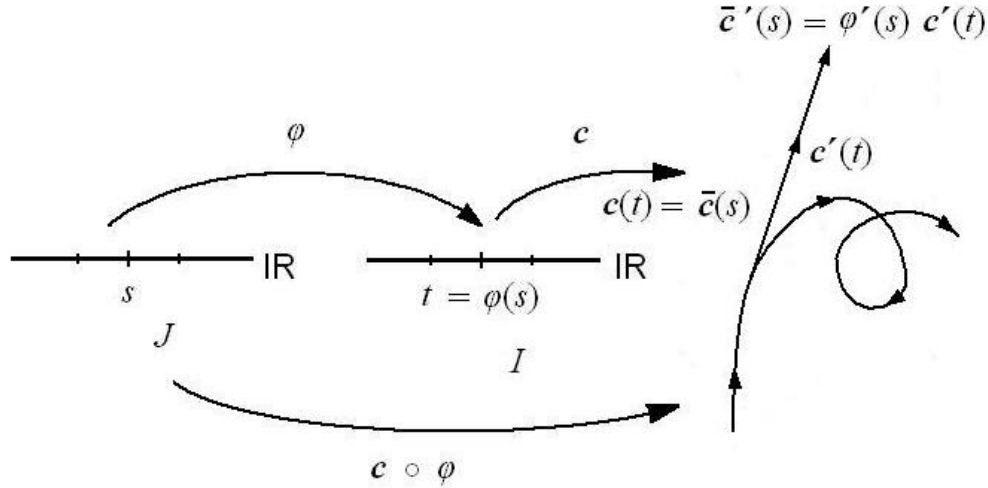


Figura 6.11. Diagrama de la composición de $\bar{c} = c \circ \varphi$.

Se desea que el concepto de reparametrización que va a establecerse comprenda en el sentido de “maneras distintas de recorrer una curva en cuanto a la velocidad de recorrido de ésta”, pero que respete el hecho de que si un arco de curva se recorre de dos maneras distintas, la longitud de éste sólo depende de la geometría del arco. Existe entonces un punto importante para el cual se tendrá que restringir más la función φ con la que se obtengan las reparametrizaciones de caminos.

Si se supone que la función φ tiene extremos locales en los puntos s_1 y $s_2 \in J$. Entonces $\varphi'(s_1) = \varphi'(s_2) = 0$. Sean $t_1 = \varphi(s_1)$, $t_2 = \varphi(s_2)$ las correspondientes imágenes en I . Entonces se tendría:

$$\bar{c}'(s_1) = \varphi'(s_1) c'(t_1) = 0, \quad \bar{c}'(s_2) = \varphi'(s_2) c'(t_2) = 0$$

de modo que si el camino c original es regular ($c'(t) \neq 0 \forall t \in I$), su reparametrización $\bar{c}$ podría no serlo. La regularidad de un camino es una propiedad importante a conservar en sus reparametrizaciones (Figura 6.12).

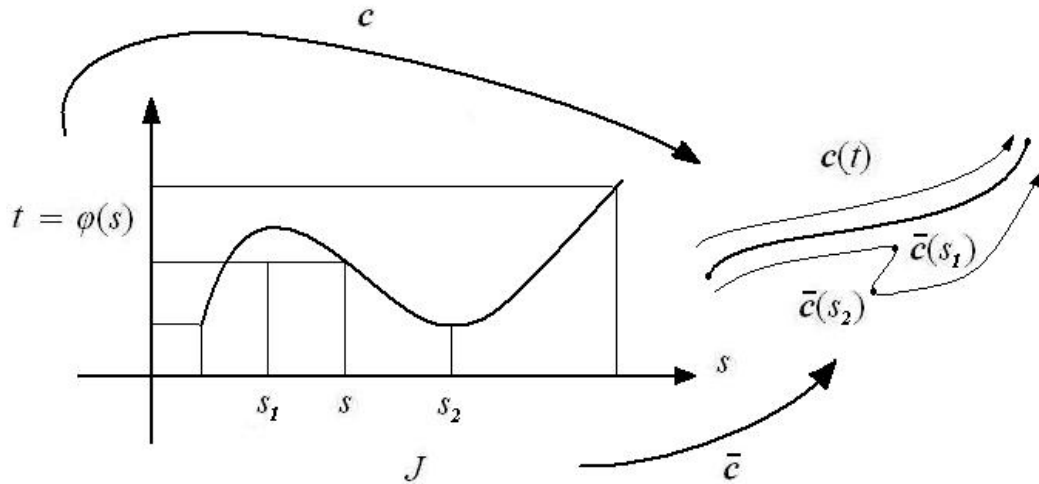


Figura 6.12. La regularidad del camino c no la conserva el camino $\bar{c}$.

Las reparametrizaciones de interés a considerar serán aquellas en las que $\phi'(s) \neq 0 \forall s \in J$. Cuando la función cumple ésta condición adicional es que se llama “reparametrización” a la composición $\bar{c} = c \circ \phi$. Con esta nueva condición se garantiza el hecho de que si la curva c se recorre una sola vez, el camino $\bar{c}$ lo hará también una sola vez (posiblemente con otra velocidad), “sin regresos”. Con esto, la regularidad de $\bar{c}$ (dada la de c) queda matemáticamente garantizada.

De esta manera, queda claramente demostrado matemática y teóricamente que es posible realizar la reparametrización de una curva en el espacio para recorrerla a distintas velocidades sin modificar su imagen.

En la próxima sección se analizará otra forma de reparametrización utilizando para ello la longitud de un camino c entre dos puntos.

6.5.3 Reparametrización por longitud de arco

A continuación se estudia otra posibilidad de reparametrizar un camino c . Digamos que $\bar{c}$ es la reparametrización, de modo que la rapidez a la que $\bar{c}$ recorre la imagen de c sea constante e igual a la unidad. Es decir $\|\bar{c}'(t)\| = 1, \forall t \in [a, b]$.

La longitud de arco de un camino c entre $t = a$ y $t = b$, denotada por $l(c)$ se define de manera formal como:

$$l(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

donde $\dot{c}(t)$ es la velocidad con la cual se recorre la curva c . Si c es una función continua y derivable se tiene que $\dot{c}(t)$ es una función continua de t , al igual que $\|\dot{c}(t)\|$. Así que la integral de la definición anterior siempre existe (funciones continuas son integrables).

Se considera entonces, un camino regular c que recorre el intervalo $t: [a, b]$ y se supone un punto $\mathbf{p} = c(t_0)$ de la curva que describe $(t_0$ algún punto de $[a, b])$. Siendo c diferenciable y su primera derivada continua, se puede calcular, para cada $t \in [a, b]$, la longitud de c entre $t = t_0$ y t . Esta es claramente una función de t , designada por $\psi(t)$. Entonces

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(u)\| du$$

Según el teorema fundamental del cálculo se tiene

$$\psi'(t) = \|c'(t)\|, \quad t \in [a, b]$$

Como el camino c es regular, entonces $\psi'(t) = \|c'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$. De hecho se tiene $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$, además la derivada de ψ es continua.

Sea $[c, d]$ el intervalo en el que la función ψ manda las imágenes $\psi(t)$, $t \in [a, b]$. Se sabe, de los cursos de cálculo, que siendo $\psi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ una función diferenciable y continua tal que $\psi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$, existe la función inversa $\psi^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ la cual también es diferenciable y continua y además, como $(\psi^{-1})'(s) \cdot \psi'(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b]$, donde $s = \psi(t)$, también se tiene que $(\psi^{-1})'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c, d]$. Más aún, como $\psi'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$, también se tiene $(\psi^{-1})'(s) > 0 \quad \forall s \in [c, d]$.

Se puede observar que la función $\varphi = \psi^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ cumple entonces todas las condiciones que se necesitan para que $\bar{c} = c \circ \varphi$ sea una reparametrización de c .

Esto se estudia a continuación.

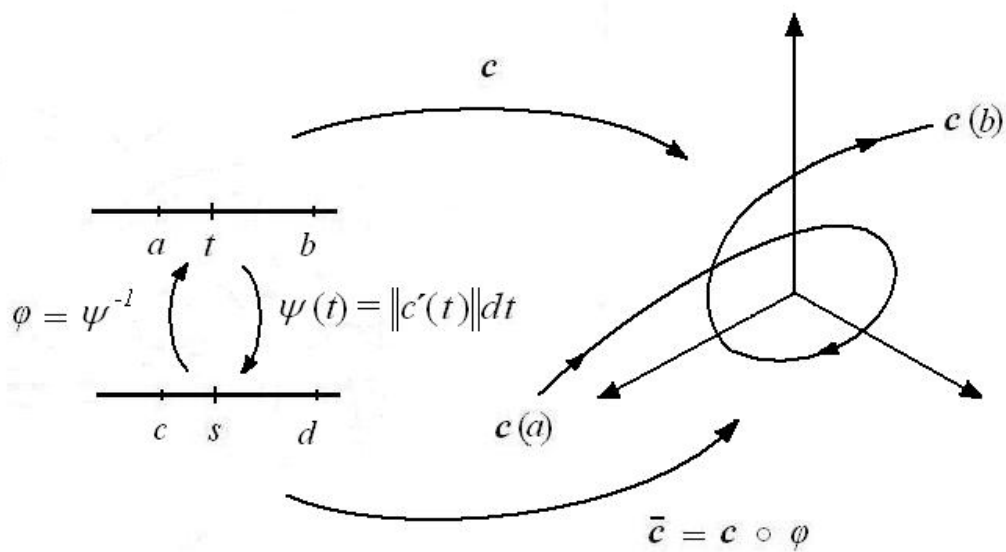


Figura 6.13. Gráfica de la curva descrita por c y $\bar{c}$.

Para $s \in [c, d.]$ se tiene

$$\bar{c}(s) = (c \circ \varphi)(s) = c(\varphi(s))$$

(se puede colocar a s como una longitud de una parte de la curva descrita por c).

Obsérvese que el vector velocidad $\bar{c}'(s)$ es

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) c'(\varphi(s))$$

Pero

$$\varphi'(s) = (\psi^{-1})'(s) = (\psi^{-1})'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} = \frac{1}{\|c'(t)\|}$$

donde $s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$ y recordando que $t = \varphi(s)$. Entonces

$$\|\bar{c}'(s)\| = \frac{1}{\|c'(t)\|} \|c'(t)\| = 1$$

De modo que $\bar{c}$ es una reparametrización de c cuya propiedad es recorrer la curva de sus imágenes a una rapidez constante igual a la unidad. Se dice entonces que $\bar{c}$ es una *reparametrización de c por longitud de arco* (figura 6.13), en el sentido de que la nueva variable independiente s de $\bar{c}$ es justamente la longitud del camino entre t_0 y t ,

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \|c'(u)\| du$$

Nótese que el punto t_0 tomado en el intervalo $[a, b]$ no jugó papel alguno en la discusión anterior. Se puede entonces sin pérdida de generalidad, tomar siempre $t_0 = a$.

Se debe señalar que la reparametrización de un camino c por longitud de arco es una construcción de gran importancia teórica, sin embargo, los cálculos técnicos involucrados al tratar de llevar a cabo una de estas reparametrizaciones, pueden ser sumamente complicados, o, en ocasiones, con dificultades algebraicas que no permiten hacer explícita la función φ con la cual se construye la reparametrización (que es la función inversa de $s = \psi(s) = \int_a^s \|c'(u)\| du$). Su aplicación práctica se limita a trayectorias simples en el espacio.

6.6 Funciones vectoriales

Recordemos que una curva c en el plano xy puede ser parametrizada por:

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

donde t es cualquier número real del dominio común de f y g .

En la ciencia y la ingeniería a menudo es conveniente introducir un vector $\mathbf{r}$ con las funciones f y g como componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j}$$

Se dice que $\mathbf{r}$ es una función vectorial. De manera semejante una curva en el espacio es parametrizada por tres ecuaciones:

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad a \leq t \leq b$$

f , g y h son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. De manera análoga, se expresa una función vectorial mediante:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j} + h(t) \mathbf{k}$$

Para un valor dado t_0 , el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el vector de posición de un punto $\mathbf{p}$ de la curva c , como se muestra en la figura 6.14. En otras palabras, cuando t varía, es posible imaginar que la curva c está siendo trazada por el extremo móvil de $\mathbf{r}(t)$.

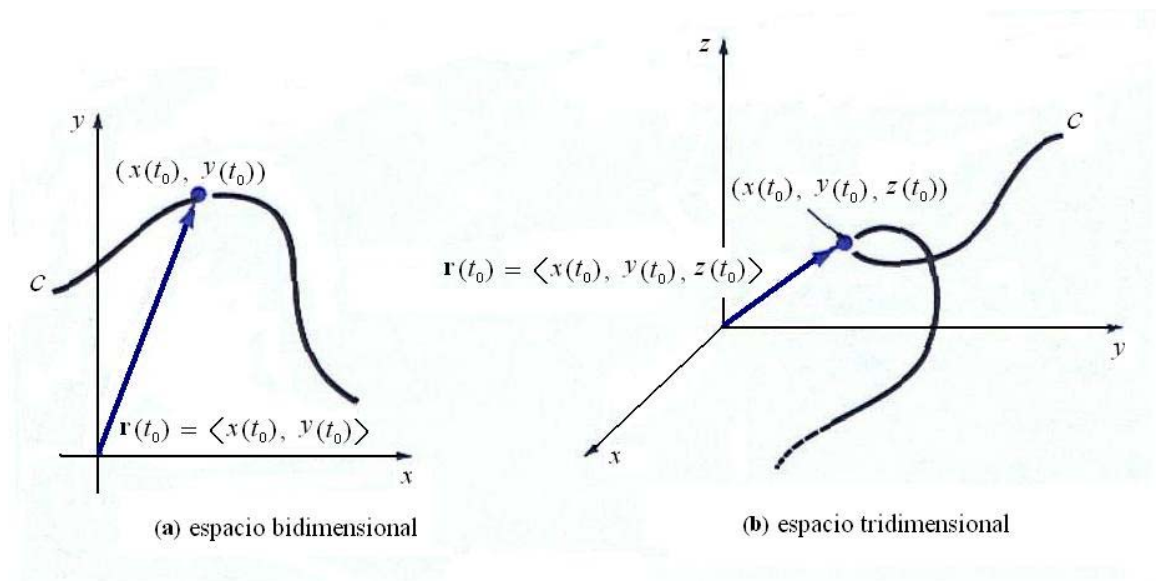


Figura 6.14. Curva descrita por un vector de posición en movimiento.

Esta punta móvil se puede establecer como el origen del sistema de coordenadas ubicado en el extremo final del brazo robótico.

Así, el movimiento de este punto, solidario al brazo robótico, debe ser representado mediante una función o funciones que sean diferenciables y permitan obtener las expresiones correctas de velocidad y aceleración.

Generalmente los valores de t que permiten definir posiciones x , y y z para una función vectorial determinada, son parámetros adimensionales útiles para el trazado de la curva en el espacio, sin estar directamente relacionados a la variación de las posiciones de esta en el tiempo. Es preciso entonces, determinar estas expresiones en función de la historia temporal de la posición.

Las funciones vectoriales que representan el movimiento de una partícula en el tiempo a través de una trayectoria en el espacio, también pueden ser derivadas. Esta propiedad se interpreta geoméricamente como la tangente a la curva o la dirección del vector velocidad evaluada en cada punto de dicha curva.

Numéricamente representará el valor del vector velocidad en cada instante de la trayectoria (figura 6.15).

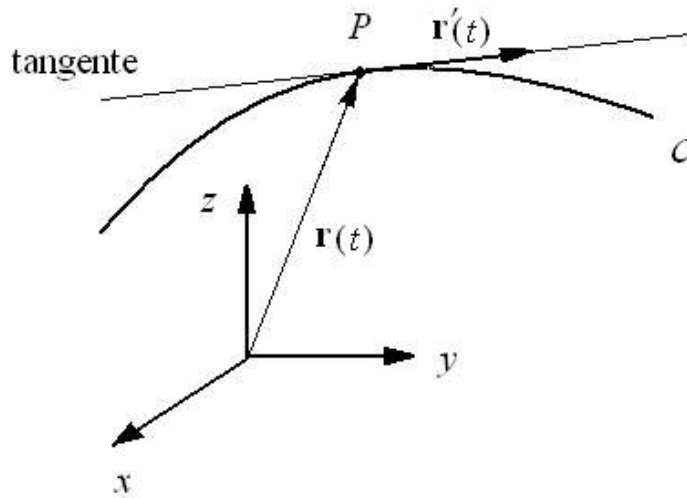


Figura 6.15. Derivada del vector posición. Velocidad tangente a la trayectoria.

La derivada de la función vectorial (que también se escribe dr/dt) se obtiene simplemente diferenciando sus funciones componentes.

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ en donde f , g y h son continuas y diferenciables entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

Por lo tanto, la representación vectorial, permite trabajar con expresiones que puedan describir el movimiento de un punto en el espacio en función del tiempo, utilizando coordenadas cartesianas y que a su vez permitan encontrar expresiones de su primera y segunda derivada (velocidad y aceleración).

6.7 Métodos numéricos. Esquemas de interpolación polinomial

Una de las más útiles y bien conocidas clases de funciones reales de variable real es la clase de los polinomios algebraicos, o sea, el conjunto de funciones de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Donde n es un entero no negativo y $a_0, \dots, a_n$ son constantes reales. Una razón fundamental de su importancia es que aproximan uniformemente funciones continuas; esto es, dada una función definida y continua en un intervalo cerrado, existe un polinomio que esta tan “cerca” de la función dada como se desee.

Otro aspecto importante para considerar la clase de polinomios en la aproximación de funciones es que es sencillo determinar la derivada y la integral indefinida de cualquier polinomio y el resultado es otra vez un polinomio.

Existen numerosos esquemas de interpolación que permiten determinar la expresión polinómica $P(x)$ que mejor aproxima los valores de una función $f(x)$ determinada, en un intervalo $[a, b]$. Entre estos esquemas se pueden mencionar: los *polinomios de Taylor*, el *polinomio de Lagrange*, *interpolación iterada*, el *método de las diferencias divididas* y la *interpolación cúbica de trazador*.

Para algunos de estos métodos, generalmente se asocia un error de interpolación que implica conocer de manera explícita la función a la cual se está tratando de aproximar algún valor. De igual forma, algunos de ellos requieren el conocimiento de la primera y segunda derivada de esta función explícita. El cálculo de las funciones polinomiales se puede realizar con diferentes niveles de precisión, dependiendo de varios factores, entre ellos el grado del polinomio usado para realizar la aproximación.

Para realizar el análisis cinemático del mecanismo robótico en movimiento, es necesario contar con una expresión que describa la trayectoria del extremo final en función del tiempo. Ya que esta expresión no es conocida, se puede determinar a través de los métodos numéricos de interpolación polinomial, empleando los valores, conocidos en el tiempo, de las coordenadas cartesianas de los puntos pertenecientes a la trayectoria, como nodos de interpolación.

De esta forma, los *polinomios de Taylor* requieren del conocimiento explícito de la función a interpolar, así como sus derivadas. El *método de Lagrange* permite obtener un polinomio de grado uno o mayor, y a medida que aumenta el grado del polinomio se puede reducir el error, aunque esto no siempre se cumple, sin embargo, no se podría calcular el error ya que no se conoce una función explícita de la trayectoria. Un polinomio de grado 2 o 3 es relativamente sencillo de calcular con la ventaja que se obtiene una curva suave y continua en el intervalo de interpolación, que garantiza la existencia de la primera y segunda derivada.

Las técnicas de *interpolación iterada* son útiles para determinar los valores de los polinomios interpolantes de grado sucesivamente mayor en un punto en particular, pero la selección de los puntos de interpolación dependerá del punto que se desea evaluar, por lo que no se pueden usar para encontrar una representación explícita de un polinomio interpolante. El método de *diferencias divididas* se utiliza para determinar la representación explícita de un polinomio interpolante a partir de datos tabulados.

La *interpolación cúbica de trazador* es un enfoque alternativo, de aproximación en segmentos, que puede usarse para obtener funciones interpolantes y consiste en dividir el intervalo en un conjunto de sub intervalos y construir un polinomio diferente en cada uno de ellos. Un polinomio cúbico general involucra cuatro constantes, garantizando no solo que la interpolante sea continuamente

diferenciable en el intervalo, sino que tenga también una segunda derivada continua. En los libros de cálculo numérico se pueden estudiar con más detalle estos métodos.

De todos los esquemas mencionados anteriormente, el polinomio de Lagrange, el método de las diferencias divididas y la interpolación cúbica de trazador son algunos de los que mejor se adaptan a los requerimientos de interpolación. Sin embargo, para realizar un análisis cinemático que proporcione datos significativos, se requiere trabajar con una cantidad importante de datos de interpolación, lo cual no se podría realizar de manera rápida y sencilla sin la ayuda de las computadoras y los programas de cálculo que emplean los algoritmos adecuados para ello.

En la siguiente sección se estudian varios métodos que permiten establecer una función de trayectoria espacial en el tiempo, para el extremo de un brazo robótico en movimiento, con la finalidad de calcular los valores de los parámetros cinemáticos de las articulaciones y viceversa.

6.8 Generación de trayectorias temporales en el espacio

Como se mencionó en párrafos anteriores, uno de los objetivos principales, al realizar el análisis cinemático de un mecanismo robótico, es calcular de los valores de los parámetros de articulación (posición, velocidad y aceleración), que son datos importantes para los cálculos dinámicos y el diseño de algoritmos de control, así como la selección o diseño de los componentes que suministran o transmiten la potencia. Estos parámetros de articulación variarán, entonces, en función de la variación de los parámetros cinemáticos del extremo del brazo robótico.

Así, el paso siguiente en el análisis del movimiento, después de resolver los problemas cinemáticos directo e inverso, es el estudio de la trayectoria a través de la cual se va a desplazar el origen del sistema de coordenadas móvil solidario al extremo final.

El propósito fundamental de un brazo robótico es el de reemplazar al ser humano en actividades repetitivas que requieren precisión y rapidez, manipulando para ello, piezas y herramientas. Este debe ser capaz de reproducir una y otra vez el mismo movimiento, desde un punto inicial hasta un punto final, a través de un “camino” en un tiempo específico. La mayoría de los robots modernos son reprogramables, lo que significa que pueden ser empleados para desempeñar diversas tareas, describiendo también, diversas trayectorias.

El análisis cinemático del mecanismo robótico se realizará entonces, para una trayectoria de trabajo establecida, donde se desean calcular los valores de la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones, durante el desarrollo del movimiento entre dos puntos en el espacio, del extremo final del robot.

Las capacidades de velocidad lineal, medida en la muñeca de los robots industriales actuales, abarcan un rango que puede llegar hasta los **11 m/s** (unos 36 pies/segundo) con aceleraciones promedio de **20 m/s²**, algunos incluso pueden superar estos valores, dependiendo de la carga, el tamaño y la aplicación. Las más altas velocidades y aceleraciones pueden obtenerse por robots pequeños y medianos, que manipulan cargas pequeñas.

Por supuesto, la velocidad determina la rapidez con la que el robot puede realizar un ciclo de trabajo determinado. La determinación de la velocidad óptima, para reducir al mínimo el tiempo del ciclo de producción, dependerá también de otros factores, tales como:

- La exactitud con la que debe situarse la muñeca
- El peso del objeto que se manipula
- Las distancias a recorrer
- El esquema de control a utilizar, que garantiza precisión y estabilidad

De esta manera, el problema de determinar la función de trayectoria temporal en el espacio, del extremo del brazo robótico, que permite calcular posteriormente el resto de los parámetros cinemáticos, se puede resolver abordándolo de tres formas posibles. A continuación se desarrollan estos enfoques.

6.8.1 Rectas y circunferencias en el espacio: Las dos trayectorias más simples que puede describir el extremo final de un robot en el espacio son: una línea recta o un arco de circunferencia. La mayoría de los robots manipuladores realizan sus movimientos empleando alguna de ellas o una combinación de ambas.

6.8.1.1 Representación de una recta en el espacio

Al igual que en el plano, dos puntos distintos cualquiera en el espacio determinan una recta única que pasa por ellos. Para encontrar una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ supongamos que $P(x, y, z)$ es cualquier punto de la recta. De la figura 6.16, si $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2$, y que $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, se tiene que:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad \text{ó} \quad (x, y, z) - (x_1, y_1, z_1) = t[(x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)]$$

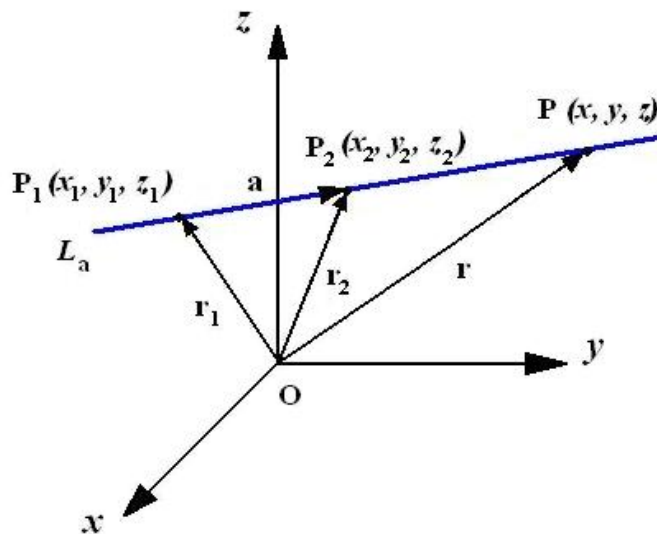


Figura 6.16. Recta en el espacio tridimensional.

Se habla entonces de la representación paramétrica de una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 , donde cada coordenada x , y y z , perteneciente a esta recta, estará representada por una ecuación paramétrica en función del tiempo t . Para una trayectoria recta la velocidad tendrá la misma dirección y sentido del movimiento y la aceleración tendrá la misma dirección pero no necesariamente el mismo sentido del movimiento.

6.8.1.2 Representación de un arco de circunferencia en el espacio

La representación de un arco de circunferencia como trayectoria en el espacio se puede hacer de dos formas distintas:

- **Arco de circunferencia perteneciente a un plano cualquiera en el espacio:**

Conocidos tres puntos, el inicial **A**, el final **B** y un tercero **D** pertenecientes a la trayectoria, es posible determinar la ecuación del plano al cual pertenece este arco de circunferencia, así como su vector normal, el cual representa la dirección del vector velocidad angular de rotación ω de magnitud conocida.

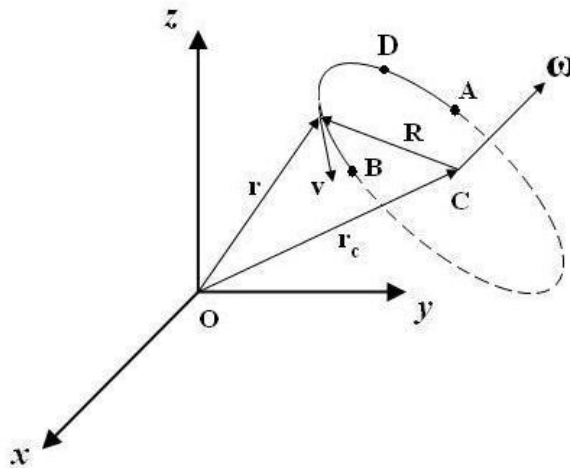


Figura 6.17. Arco de circunferencia en un plano cualquiera en el espacio.

Mediante la geometría analítica y el álgebra vectorial se calcularán las coordenadas del centro de rotación **C**. Luego empleando una matriz de rotación

respecto a un eje arbitrario $\mathbf{R}_{r, \phi}$ (Capítulo 3, sección 3.4) se pueden generar los puntos de la trayectoria desde **A** hasta **B**, como se indica en la figura 6.17.

Al calcularse el vector normal, o dirección del eje de rotación, este tendrá sus coordenadas expresadas con respecto al sistema de referencia fijo **OXYZ**, lo que significa que el centro de rotación **C**, el cual es el origen del sistema de coordenadas móvil **OUVW** se trasladará y coincidirá con el origen del sistema de referencia fijo.

Así, las coordenadas del punto inicial **A** estarán expresadas con respecto al sistema de referencia móvil que ahora coincide con el de referencia, para poder usar la matriz de rotación $\mathbf{R}_{r, \phi}$. Estas coordenadas están definidas por el vector **CA**. Luego a través del uso de una matriz homogénea de traslación, se desplazan los puntos de la trayectoria con respecto a las coordenadas del centro de rotación **C** y así obtener las coordenadas reales de la trayectoria. El procedimiento algebraico para el cálculo del centro de rotación **C** se explica en detalle en el apéndice A1.

- Arco de circunferencia que pertenece a un plano paralelo al plano XY, XZ o

YZ: En este caso es sencillo parametrizar una circunferencia utilizando las funciones seno y coseno. Estos casos se muestran en las figuras 6.18, 6.19 y 6.20.

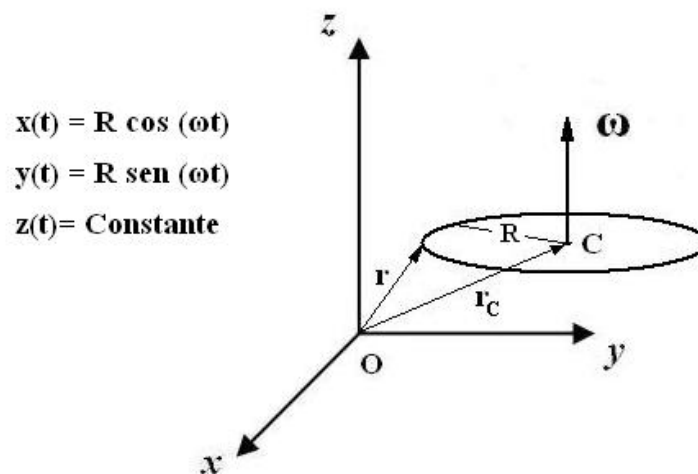


Figura 6.18. Circunferencia en un plano xy perpendicular al eje z.

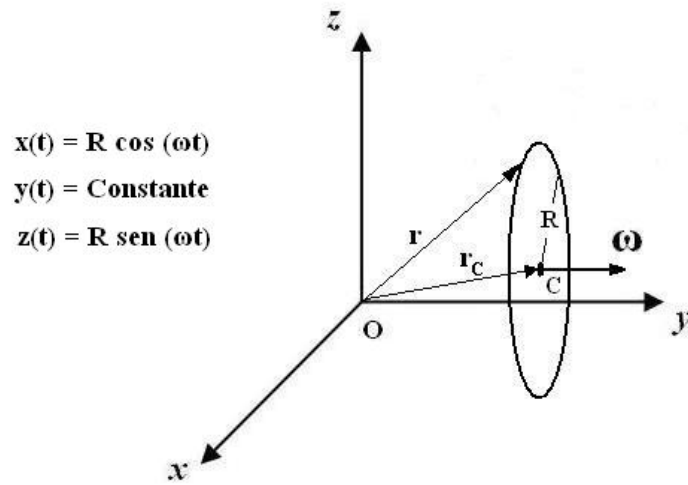


Figura 6.19. Circunferencia en un plano xz perpendicular al eje y.

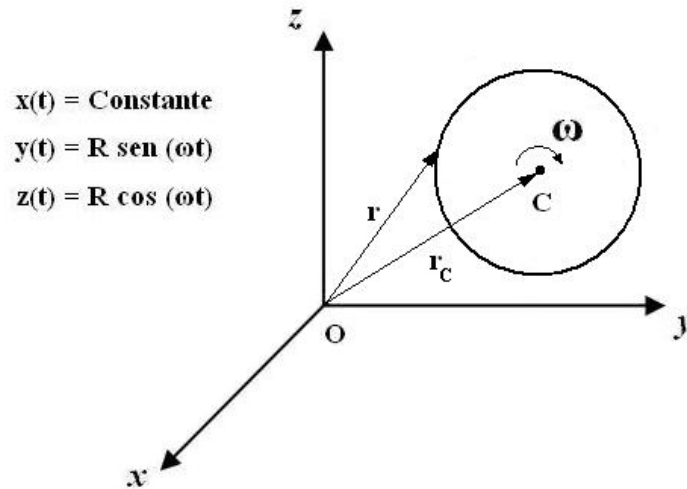


Figura 6.20. Circunferencia en un plano yz perpendicular al eje x.

Donde ω es la velocidad angular de rotación para la trayectoria circular y t es el tiempo. A las coordenadas x , y y z se le deben sumar las coordenadas del centro de rotación C cuando el mismo no está ubicado en el origen O .

El vector velocidad del extremo del robot pertenece entonces, al plano sobre el cual se describe la trayectoria circular y es tangente a dicha trayectoria. La aceleración también pertenece a este plano y puede ser representada por las

componentes *tangencial* y *normal*. El uso de las funciones trigonométricas solo es de utilidad en los casos en que describe una circunferencia completa y ésta pertenece a un plano paralelo a los planos cartesianos, además se requiere conocer el radio de la circunferencia, el centro de ésta y el sentido de giro.

De esta manera, se puede trabajar con las representaciones más simples de rectas y arcos de circunferencia en el espacio. Es igualmente importante que las trayectorias estén dentro de los límites del alcance del brazo robótico.

6.8.2 Interpolación de puntos en el espacio: En algunos casos no se dispone de una expresión que defina de manera explícita la trayectoria que recorre el extremo final del robot, sin embargo se puede contar con algunos puntos del recorrido y sus respectivos vectores de orientación en el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$. Utilizando estos valores es posible ejecutar una rutina de interpolación para cada componente i, j y k de la función vectorial.

A partir de estas funciones polinomiales es posible determinar tanto la velocidad como la aceleración del extremo final del robot, derivando la posición respecto al tiempo. Posteriormente y empleando la cinemática inversa se pueden determinar los valores de las variables de articulación θ_i en el tiempo. A continuación, parte se ejecutan nuevas rutinas de interpolación para cada variable de articulación θ_i , obteniendo de esta forma expresiones formales y explícitas de su posición temporal. Nuevamente, a través de la diferenciación es posible, obtener la velocidad $\dot{\theta}_i$ y aceleración $\ddot{\theta}_i$ de las articulaciones.

Cuando se emplea este método se debe tener cuidado en la selección de los puntos, ya que aunque la interpolación permite obtener una expresión de la trayectoria en función del tiempo, que pasa por cada uno de dichos puntos, los tramos de la curva son aproximaciones al posible recorrido que realizará el extremo del brazo robótico. Las distancias entre puntos de interpolación serán determinantes tanto en

los valores de velocidad y aceleración, como de la suavidad de la curva. Aún así, los resultados obtenidos, aunque aproximados, permiten hacer buenas estimaciones para el proceso de análisis. La suavidad y continuidad de la curva son importantes para calcular la primera y segunda derivada (velocidad y aceleración).

Este enfoque es útil para desplazamientos espaciales complejos en distancias cortas del extremo del robot, como por ejemplo, trabajos de posicionamiento de piezas pequeñas o trabajos de precisión, obtener trayectorias curvas suaves y para casos donde no es importante la curva que se describe en el espacio entre puntos, sino los puntos en si, por donde debe pasar el extremo del manipulador (Figura 6.21).

Esta forma de establecer la trayectoria también permite crear tramos de aceleración y desaceleración al inicio y final del recorrido, además, de tramos de velocidad constante, de manera relativamente sencilla. En la sección 6.10 donde se estudia la velocidad y aceleración del extremo final y las articulaciones se explicará esto en detalle.

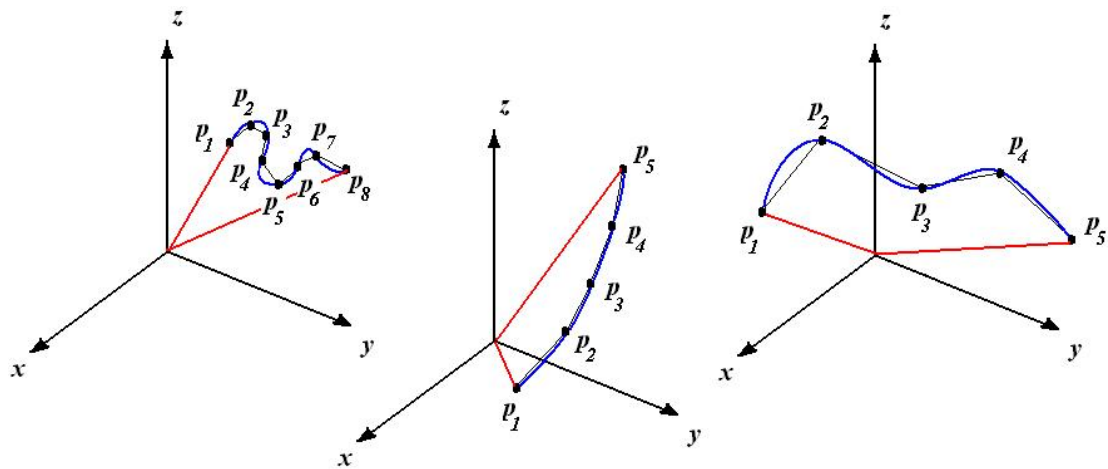


Figura 6.21. Interpolación de puntos en el espacio.

6.8.3 Esquemas de interpolación en el espacio de las articulaciones: Este último enfoque presenta el problema del robot en movimiento desde una posición y

orientación en el espacio hasta otra, sin importar el camino que recorra el extremo final. Es posible que esta situación se presente en brazos robóticos empleados para soldadura por punto, manipulación de materiales o carga y descarga de máquinas herramientas, donde no es de particular importancia el camino que recorra el extremo del brazo robótico, sino los puntos iniciales y finales del recorrido.

Sin embargo, muchas veces en el espacio de trabajo existen obstáculos que deben ser evitados a través de un camino planificado. Para ello es más eficiente el uso de trayectorias rectas. Para este caso los movimientos de las articulaciones se pueden representar, a través de trayectorias *punto a punto* (con movimientos eje a eje o simultáneos) o a través de trayectorias *isócronas*, donde todas las articulaciones se mueven simultáneamente en función de la articulación mas lenta, iniciando y terminando el movimiento en el mismo tiempo.

Con estas posiciones y orientaciones conocidas (inicial y final), y empleando la cinemática inversa se determinan los valores de las variables de articulación θ_i . Luego, se puede calcular un polinomio de interpolación que represente un “camino” o trayectoria, de las variables de articulación, entre estos puntos. Será necesario además, especificar el tiempo requerido para realizar el movimiento y posiblemente algunos puntos intermedios y sus restricciones. Esto se estudió en la sección 6.2.1 de esquemas en el espacio de la articulación, donde se pueden utilizar polinomios de grado tres o mayor y combinaciones de funciones lineales con mezclas parabólicas.

Las coordenadas en el espacio del extremo final del brazo robótico, así como su orientación, finalmente se pueden calcular de manera sencilla a través del uso de la matriz de brazo 0T_6 estudiada en el capítulo 4. Este método es práctico pero su uso esta limitado a robots industriales que ejecuten tareas simples donde no tiene importancia la trayectoria espacial recorrida, lo cual es una desventaja ya que muchas aplicaciones industriales requieren del conocimiento explicito de una trayectoria de trabajo.

6.9 Orientación del extremo final del brazo robótico

Cuando el brazo robótico efectúa una tarea y su extremo final se desplaza a lo largo de una trayectoria espacial determinada, éste debe tener la posibilidad de orientar su herramienta de manera adecuada durante ese recorrido. Por lo que, una vez obtenida la expresión de trayectoria para este movimiento espacial, es necesario definir dichas orientaciones.

Durante el movimiento del brazo robótico a lo largo de una trayectoria, su extremo final puede adoptar un número considerable de orientaciones, de igual forma podrían no haber variaciones importantes. Aún así, no sería práctico definir todas y cada una de las orientaciones posibles a lo largo de la trayectoria temporal de manera puntual ya que el proceso sería largo y complicado.

En muchos sistemas de robots será posible “almacenar” posiciones y orientaciones utilizando el mismo robot. El manipulador se desplaza a una ubicación deseada y se registra esta posición. En otras palabras, el robot se utiliza como herramienta de medición que tiene seis grados de libertad. Al almacenar una orientación se elimina por completo la necesidad de que el programador humano tenga que tratar con la representación de la orientación. En la computadora, el punto almacenado se guarda como una matriz de rotación (o de cualquier otra forma), pero el usuario no necesita verlo ni entenderlo.

Así, cuando se realiza el análisis del movimiento de un brazo robótico es preciso definir las orientaciones iniciales y finales, y de ser necesario orientaciones específicas entre estos dos puntos del recorrido. Esto es de suma importancia ya que para la resolución del problema cinemático inverso, estudiado en el capítulo 5, se requiere el conocimiento de los vectores **n**, **s** y **a**, los cuales son unitarios y perpendiculares entre sí (vectores ortonormales). Estos forman la sub matriz **[n s a]**,

de la matriz de brazo 0T_6 , que describe la orientación del extremo final con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

Se empieza entonces, definiendo la dirección con la cual el extremo del brazo robótico o su herramienta se posicionará con respecto a la pieza o superficie de trabajo. Esta dirección se define a través del vector $\mathbf{a}$ (Figura 6.22). En algunos casos, como en los de manipulación de piezas, la dirección de importancia estará definida por el vector $\mathbf{n}$ o vector de aproximación y un sistema de coordenadas solidario a la pieza. El vector $\mathbf{a}$ es normal a un plano que contiene a los otros dos vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ que completan el sistema de coordenadas que orienta el extremo final del brazo robot. Será solo necesario definir un segundo vector $\mathbf{n}$ y a través de un producto vectorial se obtiene $\mathbf{s}$.

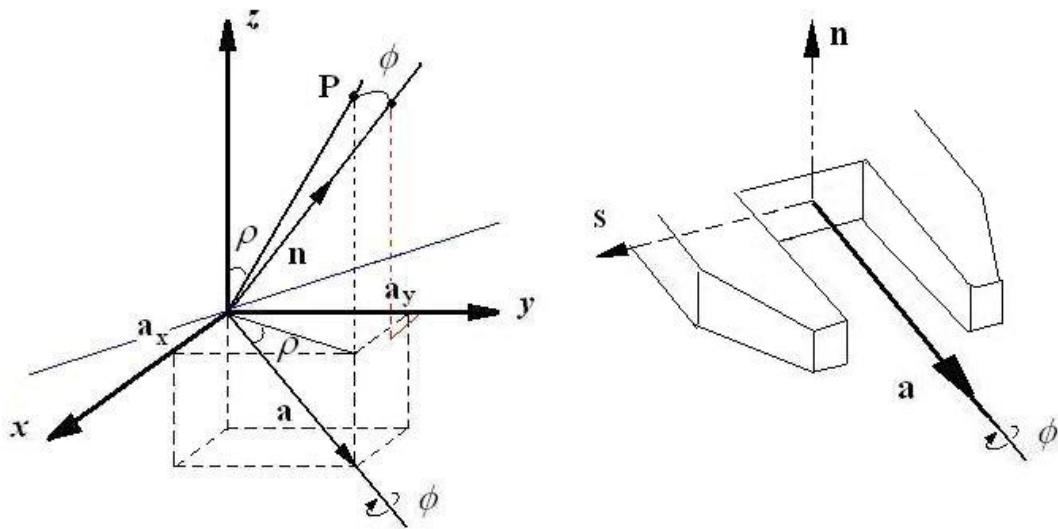


Figura 6.22. Determinación de los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ utilizando el vector $\mathbf{a}$ y su plano normal.

El vector $\mathbf{n}$ se puede calcular utilizando la ecuación del plano normal al vector $\mathbf{a}$. Las coordenadas de este último en el plano horizontal xy permite obtener un punto $\mathbf{P}$ que pertenece a este plano. Este punto $\mathbf{P}$ define la dirección de un vector que cumple con la condición de ser perpendicular a la dirección de $\mathbf{a}$. Luego se requiere establecer un ángulo de giro ϕ para la mano o herramienta en el extremo final del

brazo. Con este ángulo y empleando la matriz de rotación alrededor de un eje cualquiera (en este caso el eje tendrá la dirección del vector **a**) se determina la dirección final del vector **n**, que sigue perteneciendo al plano normal. El sentido de giro se determina usando la regla de la mano derecha, en sentido horario el ángulo de giro ϕ es negativo y en sentido anti horario es positivo. En la figura 6.22 se ilustran estos vectores. El vector **s** se obtiene realizando el producto vectorial entre **a** y **n**. Se debe recordar que los vectores **n**, **s** y **a** son vectores unitarios. Esta operación se realizará para las orientaciones en cada punto considerado de importancia en la trayectoria.

El siguiente paso será generar las orientaciones para **n**, **s** y **a** entre estos puntos sin que pierdan su ortogonalidad. Como se desea que los vectores **n**, **s** y **a** realicen una transición del punto inicial al punto final de manera suave y gradual, se puede suponer que estos están contenidos en una esfera de radio uno. Esta esfera realizará tres giros alrededor de tres ejes y al ser combinados producirán un giro equivalente de la esfera, desde las orientaciones iniciales a las finales de los vectores **n**, **s** y **a**. En la figura 6.23 se puede apreciar la esfera con los vectores **a** inicial y final así como los tres ejes de rotación.

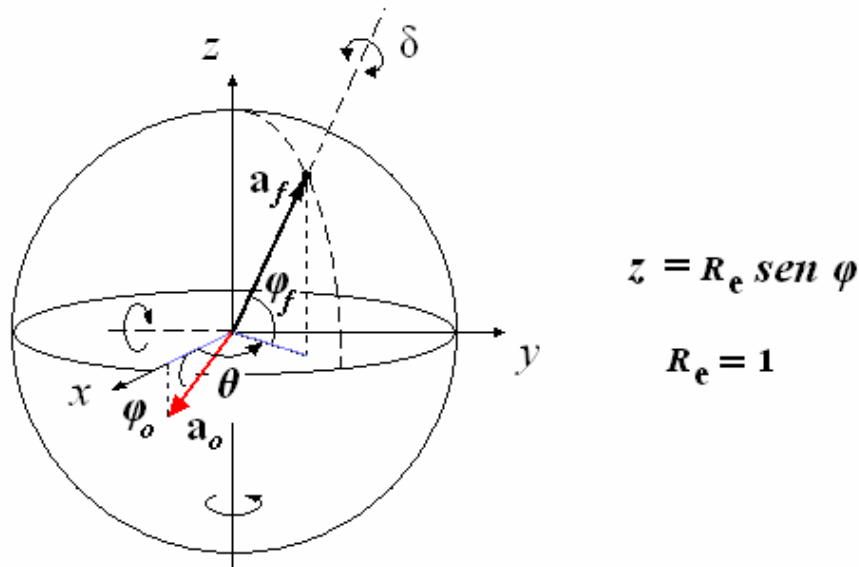


Figura 6.23. Esfera de radio uno, con los vectores **a** inicial y final, y los tres ejes de giro.

Los vectores $\mathbf{a}_0$ inicial y $\mathbf{a}_f$ final se proyectan sobre el plano xy lo que permite encontrar, a través de un producto de estas proyecciones, el ángulo θ en ese plano, y que se utiliza para realizar la primera rotación del vector $\mathbf{a}$ inicial alrededor del eje z .

Las coordenadas z de los vectores $\mathbf{a}_0$ inicial y $\mathbf{a}_f$ final permiten encontrar el ángulo φ total entre cada uno de estos vectores y el plano xy , con ayuda de la coordenada esférica $z = R_e \sin\varphi$ donde el radio de la esfera R_e es igual a 1.

Este es el ángulo de giro φ del vector $\mathbf{a}_0$ inicial alrededor de un eje que pertenece al plano xy , y es perpendicular a la proyección del vector $\mathbf{a}_0$ inicial, girando este de igual forma alrededor del eje z . Este ángulo φ resulta de la suma de φ_0 y φ_f mostrados en la figura 6.23. El último giro, lo realiza el vector $\mathbf{n}_0$ inicial, describiendo un ángulo δ alrededor de $\mathbf{a}_f$. Este vector $\mathbf{n}_0$ inicial ya había sido girado un ángulo θ y un ángulo φ total alrededor de los dos primeros ejes, y tendrá como eje de giro al vector $\mathbf{a}_f$ final para que este coincida con el vector $\mathbf{n}_f$ final.

Las magnitudes de las velocidades de cambio de orientación son bastante bajas, así se requiere de aceleraciones muy pequeñas para las variaciones de estas velocidades.

De esta forma se logra generar de manera bastante uniforme las coordenadas para la orientación de la herramienta en el extremo final del brazo robot, durante el recorrido de la trayectoria. La figura 6.24 muestra como varían las orientaciones del extremo final a lo largo de la trayectoria.

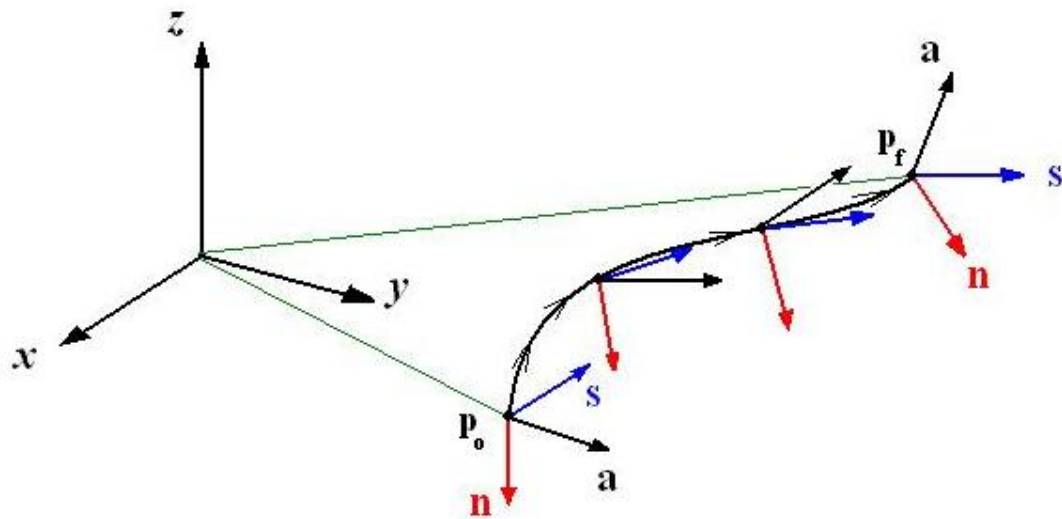


Figura 6.24. Orientaciones del extremo del brazo robótico durante el movimiento

6.10 Velocidad y aceleración del extremo final y las articulaciones

La forma como se obtiene una expresión para la trayectoria determina la manera de calcular las velocidades y aceleraciones del extremo del brazo robótico. Según los enfoques expuestos anteriormente, las velocidades y aceleraciones se pueden obtener de la manera siguiente:

6.10.1 Rectas y arcos de circunferencia

Los movimientos en línea recta se realizan en su mayoría a velocidad constante, esta es definida por el usuario y cuya dirección además es conocida, y está definida por el vector director entre los puntos inicial y final de esta trayectoria ($\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$) (figura 6.17), de tal forma que se pueden obtener las componentes de velocidad para un vector velocidad de magnitud constante. El vector director unitario de esta trayectoria multiplicado escalarmente por la magnitud de la velocidad requerida, dará como resultado las componentes de velocidad v_1 , v_2 y v_3

correspondientes a las coordenadas x , y y z respectivamente. Estas componentes son, por tanto, los coeficientes de las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{aligned}x &= \mathbf{v}_1 t + x_0 \\y &= \mathbf{v}_2 t + y_0 \\z &= \mathbf{v}_3 t + z_0\end{aligned}\tag{6.19}$$

De esta manera se obtiene la ecuación para generar una trayectoria rectilínea a una velocidad constante requerida.

En mecanismos reales el movimiento se inicia y se termina con una aceleración y una desaceleración, respectivamente. Por lo general estos tramos se producen en tiempos relativamente cortos, no mayores a unas décimas de segundo (entre 0,05 y 0,2 segundos), pudiendo depender esto de varios factores, tales como: el tamaño del robot (donde influyen las masas e inercias), la capacidad de los motores eléctricos o sistemas hidráulicos, la aplicación y la precisión requerida en el trabajo, así como los esquemas de control.

Antes de continuar, es necesario recordar que el análisis cinemático no toma en cuenta las fuerzas involucradas en el movimiento o los esquemas que permiten controlar el mecanismo, sino que trata de reproducir condiciones reales de movimiento, calculando los parámetros cinemáticos importantes y necesarios para posteriores estudios.

De esta forma, para poder acercarnos al comportamiento real del mecanismo en los tramos de aceleración y desaceleración sobre la trayectoria, se debe trabajar con un tiempo de aceleración t_a , el cual es un dato definido por el usuario que realiza el análisis. Este tiempo, junto con la velocidad en cada una de sus coordenadas, permite establecer el valor de una pendiente (para cada coordenada), con la cual se incrementa la velocidad hasta el valor establecido; estas pendientes se pueden

entender como un valor de aceleración **a**. Como se habla de un tiempo de aceleración t_a muy corto no se incurre en error al suponer un incremento lineal de la velocidad. Este incremento, solo para el tiempo de aceleración, se calcula para cada coordenada, y de las ecuaciones de movimiento rectilíneo, de la manera siguiente:

$$v_x = a_1 t / 2 \quad , \quad v_y = a_2 t / 2 \quad , \quad v_z = a_3 t / 2$$

donde: (6.20)

$$a_1 = v_1 / t_a \quad , \quad a_2 = v_2 / t_a \quad , \quad a_3 = v_3 / t_a$$

El tramo de desaceleración involucra una nueva rutina de decremento lineal de la velocidad para calcular los últimos puntos de la trayectoria. Este se calcula se de la manera siguiente, para cada componente de velocidad:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 - a_1 t / 2 \\ v_y &= v_2 - a_2 t / 2 \\ v_z &= v_3 - a_3 t / 2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde t es evaluado de 0 a t_a . Estos valores reemplazan a v_1 , v_2 y v_3 en la ecuaciones 6.19 y las coordenadas iniciales x_0 , y_0 y z_0 corresponderán al punto donde empieza la desaceleración.

Así como se puede establecer un valor de velocidad constante para el movimiento rectilíneo, es posible definir el tiempo total de ejecución t_e del movimiento, que junto con el tiempo de aceleración permite calcular la velocidad del recorrido. Esta velocidad se considera de magnitud constante, acompañada de sus correspondientes tramos de aceleración y desaceleración. Para esto podemos adaptar uno de los esquemas en el espacio de la articulación estudiados en la sección 6.2.1, la función lineal con combinaciones parabólicas. Tomando las ecuaciones 6.13 y 6.14 y

sustituyendo la variable angular θ por cada una de las variables cartesianas x, y y z se obtienen nuevas ecuaciones de la forma:

$$\ddot{X} t_a = \frac{X_h - X_b}{t_h - t_a}, \quad (6.22)$$

$$X_a = X_0 + \frac{1}{2} \ddot{X} t_a^2, \quad (6.23)$$

donde $t_h = t_e / 2$, es la mitad del tiempo total de ejecución t_e del movimiento, y X se sustituye, de manera correspondiente, por cada una de las coordenadas x, y y z .

Combinando las ecuaciones 6.22 y 6.23 se obtiene la ecuación 6.24 que permite despejar la aceleración $\ddot{X}$ requerida para el movimiento en función de los puntos inicial X_0 y final X_f , y los tiempos de aceleración t_a y de ejecución del movimiento t_e .

$$\ddot{X} t_a^2 - \ddot{X} t_e t_a + (X_f - X_0) = 0, \quad (6.24)$$

donde la aceleración $\ddot{X}$ representa, como se indicó anteriormente la aceleración correspondiente a cada coordenada x, y y z . De esta forma:

$$\ddot{X} = \frac{-(X_f - X_0)}{(t_a^2 - t_e t_a)} \quad (6.25)$$

Este valor se utiliza solo para los tramos de aceleración y desaceleración. El tramo a velocidad constante requiere el cálculo de la misma en el tiempo t_a , diferenciando la ecuación 6.23 en función de la variable t , obtenemos:

$$\dot{X} = \ddot{X} t \quad (6.26)$$

Este valor (para cada coordenada) se emplea como se explicó al inicio de esta sección en el conjunto de ecuaciones 6.19. Si el tiempo de aceleración t_a escogido es grande, tanto al inicio como al final del movimiento, se podría experimentar en la trayectoria, un comportamiento no lineal, debido a la naturaleza cuadrática de la ecuación 6.23. Esto requiere de especial atención cuando el brazo robótico realiza trabajos de precisión.

Las velocidades en trayectorias de arcos de circunferencia van a depender del valor de la velocidad angular. El módulo de esta velocidad angular ω será función del radio de la circunferencia R y del módulo de la velocidad V requerida en el movimiento. Para el tramo a velocidad constante los puntos de la trayectoria se calculan con la matriz de rotación alrededor de un eje arbitrario empleando el valor de $\theta = \omega t$, donde:

$$\omega = \frac{V}{R} \quad (6.27)$$

El radio es la distancia entre el centro de rotación C y el punto inicial A . Los vectores de velocidad a lo largo de la trayectoria serán el resultado del producto vectorial entre el vector de velocidad angular y los vectores que apuntan desde el centro de rotación a cada punto de la trayectoria a lo largo del radio R ,

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (6.28)$$

El vector de velocidad angular es:

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{n} \quad (6.29)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario correspondiente al eje de rotación.

Para la trayectoria de arco de circunferencia se requieren, igualmente, tramos de aceleración y desaceleración, al inicio y final del recorrido. En este caso el incremento de la velocidad dependerá directamente del incremento de la velocidad angular. Este aumento tendrá un comportamiento lineal durante el tiempo de aceleración t_a y es calculado de manera similar al caso del movimiento rectilíneo (ecuaciones 6.20), como:

$$\omega(t) = \Omega t / 2 \quad (6.30)$$

donde:

$$\Omega = \frac{\omega}{t_a}$$

Donde Ω es la aceleración angular y ω es el valor de la velocidad angular calculada a partir de la velocidad V requerida en el movimiento del extremo del brazo robótico.

Para el caso en que se define el tiempo total de ejecución t junto con el tiempo de aceleración t_a , se ejecuta el mismo procedimiento que para el movimiento rectilíneo, sustituyendo X por θ , $\dot{X}$ por ω y $\ddot{X}$ por Ω (ω y Ω pueden ser representados de manera alternativa por $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente). Para el tramo de desaceleración se debe reemplazar el valor ω , en la expresión $\theta = \omega t$, por:

$$(\omega - \Omega t / 2) \quad , \quad t \text{ evaluado de } 0 \rightarrow t_a$$

ó alternativamente por

$$(\omega - \Omega (t - t_d)) \quad , \quad \text{donde } t_d = t_e - t_a$$

6.10.2 Interpolación de puntos en el espacio

Después de realizar la interpolación de puntos en el espacio y obtener una expresión polinomial en función del tiempo para cada coordenada x , y y z de la trayectoria, éstas pueden ser diferenciadas dos veces para obtener expresiones de velocidad y aceleración. Actualmente existen avanzados programas de cálculo matemático que permiten obtener dichas expresiones de manera muy rápida y sencilla.

Mediante la interpolación se puede hacer un análisis más rápido, ya que con la selección de unos pocos puntos, en función del tiempo, que estén sobre la trayectoria, se pueden hacer muy buenas aproximaciones para cálculos preliminares. El uso de este método solo requiere que la selección de los puntos de interpolación se haga con cuidado para reproducir de la manera más fiel el movimiento real que tendría un mecanismo robótico. De esta forma, para los tramos de aceleración y desaceleración, es importante que los puntos escogidos se separen de manera gradual en el tiempo. Esto permite analizar un movimiento muy similar al real. La selección del resto de los puntos de la trayectoria se debe hacer tratando que estos equidisten entre si, para intervalos de tiempo constante (figura 6.25).

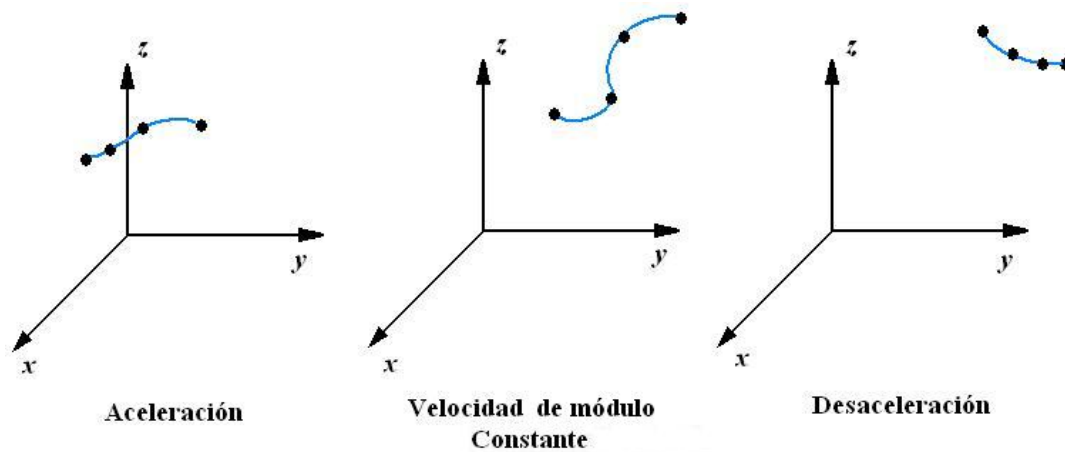


Figura 6.25. Selección de los puntos de interpolación.

6.10.3 Interpolación en el espacio de las articulaciones

Al igual que en el enfoque anterior, la determinación de polinomios de interpolación permite obtener a través de la diferenciación, expresiones para la velocidad y aceleración de las articulaciones. Esto se estudió de manera detallada en la sección **6.2.1** (Esquemas en el espacio de articulación) de este capítulo.

De esta forma, el cálculo de las velocidades y aceleraciones se realiza tomando en cuenta el tipo de trayectoria temporal. Normalmente, el análisis cinemático tiene como objetivo principal la determinación de los parámetros articulares de posición, velocidad y aceleración. A continuación estudiaremos otro método para el estudio de las velocidades, y consiste de la matriz Jacobiana.

6.11 Matriz Jacobiana. Jacobiano del manipulador

El modelado cinemático de un robot busca las relaciones entre las variables articulares y la posición (expresada normalmente en forma de coordenadas cartesianas) y orientación del extremo del robot. El estudio de las velocidades de un brazo robótico se puede realizar de manera alternativa empleando el Jacobiano del manipulador o la matriz Jacobiana. Esta permite disponer de la relación entre la velocidad de las coordenadas articulares y la posición y orientación del extremo del robot.

La matriz Jacobiana directa permite conocer las velocidades del extremo del robot a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. Por otra parte, la matriz Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias para obtener unas velocidades determinadas en el extremo del robot (Figura 6.26).

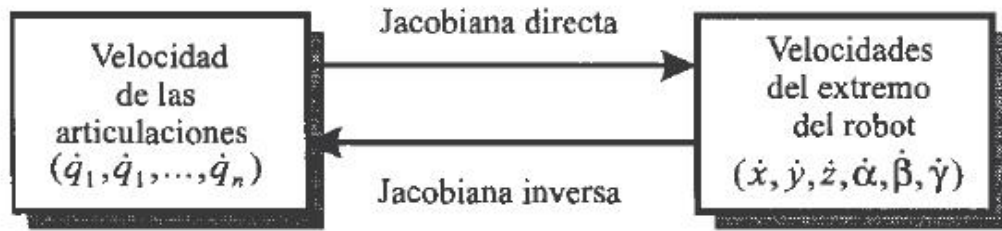


Figura 6.26. Matriz Jacobiana directa e inversa.

El método más directo para obtener la relación entre las velocidades articulares y las velocidades del extremo del robot, consiste en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo. De esta manera, supongamos conocidas las ecuaciones que resuelven el problema cinemático directo de un robot de n grados de libertad (Figura 6.27):

$$\begin{aligned} x &= f_x(q_1, \dots, q_n) & y &= f_y(q_1, \dots, q_n) & z &= f_z(q_1, \dots, q_n) \\ \alpha &= f_\alpha(q_1, \dots, q_n) & \beta &= f_\beta(q_1, \dots, q_n) & \gamma &= f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \end{aligned}$$

Figura 6.27. Ecuaciones de posición y orientación expresadas en función de las coordenadas articulares (problema cinemático directo)

Derivando con respecto al tiempo ambos miembros del conjunto de ecuaciones de la figura 6.27, se tendrá (figura 6.28):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} &= \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} &= \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned}$$

Figura 6.28. Derivadas de las ecuaciones de posición y orientación y de las coordenadas articulares en función del tiempo

Las derivadas anteriores expresadas en forma matricial conducen a la matriz **J**, llamada matriz Jacobiana (figura 6.29):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Figura 6.29. Matriz Jacobina J.

Puesto que el valor numérico de cada uno de los elementos $[j_{pq}]$ de la matriz Jacobiana dependerá de los valores instantáneos de las coordenadas articulares θ_i , el valor de la matriz Jacobiana será diferente en cada uno de los puntos del rango de las variables articulares. El Jacobiano de un brazo robótico de seis grados de libertad resulta en una matriz cuadrada de 6 x 6, condición que no se cumple para robots con menos de seis grados de libertad, resultando en la obtención de matrices $m \times n$ no cuadradas.

Se pueden mencionar otros tres métodos empleados para la obtención de la matriz Jacobiana: el método del producto vectorial (Whitney, 1972), el método de traslación y rotación diferencial (Paul, 1981) y la determinación estroboscópica del Jacobiano (Orin y Schrader, 1984), a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler. La obtención de la matriz Jacobiana a través de estos métodos, implica, cálculos complicados y largos, sobre todo cuando el robot tiene seis grados de libertad, adicionalmente, éstos dependen del conocimiento de las velocidades angulares de articulación, lo que significa que se debe trabajar inicialmente en el rango de las variables articulares.

Esto representa una gran desventaja ya que el objetivo principal del análisis cinemático es encontrar los valores de las velocidades angulares en función de las velocidades del extremo del brazo robot, creando la necesidad de determinar el Jacobiano, para luego calcular la matriz Jacobiana inversa $\mathbf{J}^{-1}$. Suponiendo que la Matriz $\mathbf{J}$ sea cuadrada, la inversión de una matriz 6 x 6, cuyos elementos son funciones trigonométricas con variables expresadas simbólicamente, es un procedimiento de gran complejidad matemática. A este problema se añade la dificultad de calcular la matriz $\mathbf{J}^{-1}$ para robots con menos de seis grados de libertad, en donde la matriz $\mathbf{J}$ no es cuadrada, lo que quiere decir que el robot estará sometido a ciertas restricciones y no podrá alcanzar cualquier orientación.

En el cálculo de la matriz Jacobiana inversa puede plantearse la evaluación numérica de la matriz $\mathbf{J}$ para una configuración (q_i) concreta del robot, e invirtiendo mediante cálculo numérico esta matriz encontrar la relación inversa válida para esa configuración. En este caso debemos que considerar, en primer lugar, que el valor numérico de la Jacobiana va variando a medida que el robot se mueve y, por lo tanto, la Jacobiana inversa ha de ser recalculada constantemente. Además, pueden existir n-uplas ($q_1, \dots, q_n$) para las cuales la matriz Jacobiana no sea invertible por ser su determinante, denominado Jacobiano, de valor nulo.

Otra alternativa para obtener la matriz Jacobiana inversa, es repetir el procedimiento seguido para la obtención de la Jacobiana directa, pero ahora partiendo del modelo cinemático inverso, y como en el caso de la primera alternativa, este método puede ser algebraicamente complicado.

Lo anterior representa un gasto innecesario de tiempo y esfuerzo. De igual forma el Jacobiano dificulta el análisis de las aceleraciones. Por todas las razones mencionadas anteriormente este método no será empleado en la metodología de análisis.

6.12 Consideraciones finales

Antes de proceder al desarrollo de la metodología de análisis cinemático de mecanismos robótico es necesario prestar atención a ciertos aspectos, relacionados con algunas de las secciones estudiadas en este capítulo, y que deben ser tomados en cuenta para la aplicación correcta de la metodología.

De manera general el análisis cinemático se aplicará de manera inversa, es decir, se buscarán las posiciones, velocidades y aceleraciones de las articulaciones en función de las posiciones, velocidades y aceleraciones del extremo del brazo robótico. Aunque este análisis puede realizarse igualmente de manera directa, en la práctica la mayoría de los mecanismos robóticos están programados para moverse a lo largo de una trayectoria espacial cartesiana.

Todos los cálculos relacionados con las interpolaciones de puntos serán realizados a través de programas de cálculo, específicamente **Matlab 7**, el cual está basado en rutinas de métodos numéricos existentes en la bibliografía existente. El empleo de estas herramientas computacionales efectivas facilita y disminuye el tiempo de análisis. Debe entenderse que las curvas de interpolación obtenidas son aproximaciones que permiten realizar cálculos, ya que no existe una función explícita que permita calcular el error.

Asimismo, es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones sobre las velocidades del brazo robótico, cuando el mismo realiza su movimiento entre dos puntos y la transición entre dos segmentos de trayectoria.

Por lo general, el brazo robótico desempeña trabajos donde el extremo final debe mantener una velocidad constante a lo largo del recorrido (este punto se dejó claro anteriormente, para lo cual se establecen velocidades máximas del extremo final de hasta 11 m/s). De igual forma, los movimientos comienzan desde una velocidad

inicial nula y termina con una velocidad final también nula, lo que requiere que se acelere y desacelere, hasta y desde una velocidad específica, en los tramos inicial y final del recorrido.

Es igualmente común que un manipulador tenga que moverse o conectar segmentos de trayectoria, para satisfacer una especificación de movimiento de la tarea o para evitar obstáculos. Con el fin de evitar discontinuidades de velocidad en el punto final de cada segmento, se debe acelerar o desacelerar el movimiento desde un segmento hasta otro.

Estas consideraciones son consecuencia de que el mecanismo real posee masa e inercia y sus motores tendrían que suministrar un par torsor muy grande para alcanzar velocidades instantáneas partiendo del reposo o terminando en el mismo.

Es importante resaltar que los robots modernos están equipados con sensores capaces de medir la posición, velocidad y aceleración, tanto de las articulaciones como del efector final en tiempo real. Estos dispositivos permiten, a través de la retroalimentación y los esquemas de control, lograr la estabilidad, precisión y exactitud requeridas por los movimientos del robot, en trabajos con rangos de tolerancia pequeños, dicho de otra forma, permite refinar los movimientos del robot.

La metodología que se desarrolla a continuación, tiene como objetivo permitir al ingeniero o estudiante de ingeniería mecánica, realizar cálculos y obtener valores aproximados de los parámetros cinemáticos durante el movimiento del robot. Toda la información que se obtiene de este análisis, es de gran valor para los estudios dinámicos, el diseño o rediseño del mecanismo, así como la selección de los componentes que suministran o transmiten potencia. De esta forma, no se pretende que la metodología sirva o se emplee para la programación de trayectorias o movimientos del robot o para la programación del lenguaje del robot.

CAPÍTULO VII

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS

CAPÍTULO VII

DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ROBÓTICOS

En ingeniería el análisis se define como el proceso de aplicar principios fundamentales a la solución de problemas, con el objeto de obtener respuestas satisfactorias, dentro de un lapso razonable. Para la aplicación de estos principios es necesario entonces, seguir una serie de pasos o una metodología ordenada que permita encontrar la solución o soluciones a un problema específico.

Cuando se habla del análisis cinemático de un mecanismo robótico, se entiende como la aplicación práctica de las herramientas matemáticas y cinemáticas para modelar eficazmente el comportamiento del mecanismo en cuestión. La metodología de análisis cinemático, por otro lado, permite establecer un orden de aplicación de estas herramientas, en base a los resultados que se desean obtener, y así realizar un estudio cinemático eficiente.

En todo proceso de análisis se establecen algunos pasos o etapas, para la solución de problemas. Estos permiten diseñar la metodología y determinar un orden adecuado para el análisis cinemático.

7.1 Etapas en el proceso de análisis

J. Dixon (1.970) establece de forma ordenada las etapas a seguir en el proceso de análisis. A continuación se describen brevemente.

1) Definición del problema: En este paso el ingeniero o estudiante de ingeniería debe empezar por definir una interrogante que pueda contestarse cuantitativamente,

es decir, en términos o parámetros que puedan calcularse o medirse. Para esta metodología en particular, se desea determinar los valores de los parámetros cinemáticos (posición, velocidad y aceleración) de las articulaciones o el extremo final, conocidos los parámetros cinemáticos del extremo final o las articulaciones, respectivamente.

2) Estructuración del modelo: En este paso se realiza una idealización o simplificación de la situación o modelo físico real. Una buena estructuración permite formular suposiciones que tomen en cuenta las herramientas analíticas y datos de que se dispone. En el caso de esta metodología, se deben hacer las suposiciones y simplificaciones necesarias para estudiar el modelo físico real.

3) Aplicación de los principios correspondientes o recolección de datos: Luego de haberse estructurado el modelo, puede hacerse uso de la ciencia y de los conocimientos del dominio de la ingeniería. En este caso se emplean las herramientas matemáticas estudiadas en capítulos anteriores, después de recolectar los datos necesarios para hacer los cálculos.

4) Cálculo: Habiendo estudiado y comprendido las teorías, planteado las ecuaciones del modelo y recolectado los datos, el problema reside ahora en obtener una respuesta numérica. Esto puede hacerse de una manera analítica o experimental.

5) Comprobación: Debe hacerse al terminar cada uno de los diferentes pasos. Las comprobaciones son importantes, ya que pueden ahorrar gran cantidad de tiempo, dinero y situaciones incómodas.

6) Evaluación y generalización: Una vez obtenido un valor numérico, ¿qué es lo que significa? ¿Pueden hacerse también generalizaciones que den algo más que tan solo la respuesta al problema específico?.

7) **Optimización**: La evaluación puede requerir una optimización, o la optimización puede haber sido parte del análisis y el cálculo.

8) **Presentación y comunicación de resultados**: El trabajo efectuado por un investigador no se termina cuando éste conoce los resultados, sino que deben comunicarse a otras personas. Es frecuente la formulación de recomendaciones.

La metodología que a continuación se presenta está estructurada en base a las primeras tres etapas del proceso de análisis. A partir del capítulo 8 en adelante se aplicarán el resto de las etapas.

7.2 Metodología de análisis cinemático

La siguiente metodología de análisis se aplica a mecanismos robóticos (brazos robóticos) de configuración antropomórfica con articulaciones *giratorias* o *prismáticas* y que tengan entre 3 y 6 grados de libertad (GDL). La mayoría de las compañías fabricantes de robots utilizan configuraciones antropomórficas muy similares que difieren en tamaño de los elementos, número o posición de los ejes, sin embargo y debido a las particulares aplicaciones industriales, la configuración física de estos mecanismos está bastante estandarizada.

En el capítulo 8 se dan ejemplos de aplicación de la metodología desarrollada en este trabajo para el análisis cinemático de mecanismos robóticos se muestran modelos de robots industriales, fabricados por diversas compañías en el mundo.

En primer lugar debemos prestar atención a una regla importante, el sistema de coordenadas (el i -ésimo) se coloca en la articulación de forma tal que el eje $\mathbf{x}_i$ sea normal al eje $\mathbf{z}_{i-1}$, lo que implica que los ejes $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_{i-1}$ pertenecen a planos paralelos y normales al eje $\mathbf{z}_{i-1}$.

Esta regla se ilustra en la figura 7.1 y se entenderá mejor al realizar las asignaciones de los sistemas de coordenadas en las articulaciones.

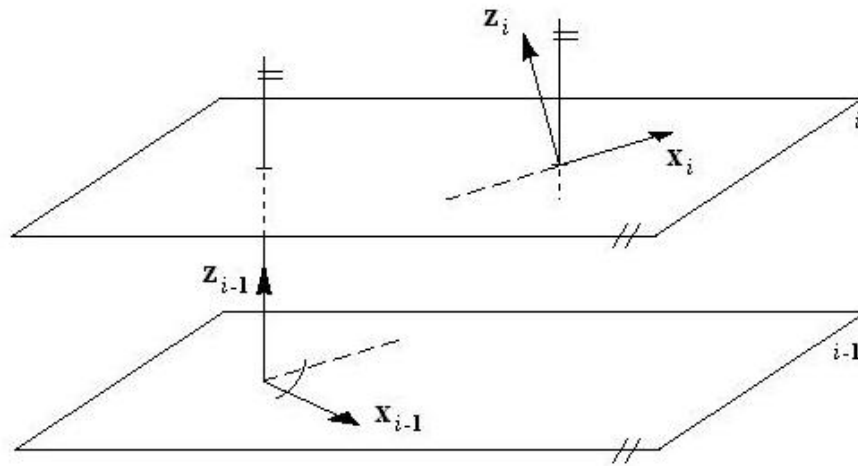


Figura 7.1. Orientación relativa de los sistemas de coordenadas i -ésimo e $(i-1)$ -ésimo.

Antes de avanzar en el desarrollo de la metodología, es importante comprender que el ingeniero o estudiante de ingeniería debe usar todas las herramientas disponibles, las cuales no solo incluyen las matemáticas y la mecánica de máquinas, sino también las computacionales para manejar y procesar gran cantidad de datos y obtener resultados confiables en forma rápida. Queda claro que la siguiente metodología de análisis cinemático, es válida para ser aplicada sin necesidad de programas computacionales, pero sería un proceso lento y engorroso debido a la cantidad y complejidad de los cálculos a realizar, lo que aumenta la posibilidad de cometer errores. **Esta situación, sin embargo, se corrige adquiriendo experiencia en el uso de la metodología, ya sea que se empleen o no las herramientas computacionales.**

7.2.1 Configuración geométrica y representación del mecanismo robótico

Una vez realizada la selección del mecanismo robótico que se va a analizar, se deben obtener todos sus datos geométricos. Al ser este un mecanismo espacial, su geometría se puede representar en varias vistas, de ser necesario. La figura 7.2

muestra un robot PUMA en el cual se indican las dimensiones de interés (entre ejes de articulación) para su configuración estática inicial.

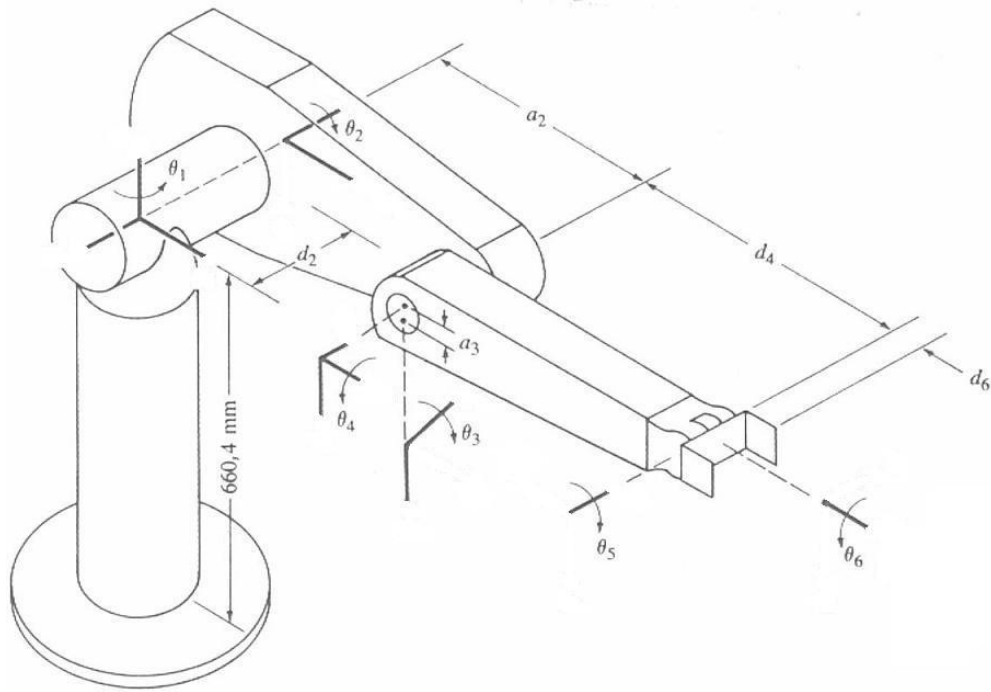


Figura 7.2. Datos geométricos del robot PUMA, necesarios para la aplicación del algoritmo D-H.

En este paso no es necesario identificar los ejes x , y y z para cada articulación, esto se hará al aplicar posteriormente el algoritmo de Denavit-Hartenberg en donde se usan estos datos. **Es importante especificar la posición de los ejes de articulación, así como los rangos de movimiento para cada articulación giratoria y/o prismática.**

7.2.2 Representación de Denavit- Hartenberg (D-H)

Como se estudio anteriormente, a través de esta representación se asignan sistemas de coordenadas a cada elemento, aplicando el algoritmo 4.1 presentado en el capítulo 4 y utilizando los parámetros D-H: a_i , θ_i , a_i y d_i , con la finalidad de determinar la matriz de transformación homogénea T o matriz de brazo que modela la

cinemática directa del mecanismo. **Estos valores iniciales, determinados en el paso anterior, deben organizarse como en la Tabla 4.1** (Capítulo 4, Sección 4.2.2).

Para asignar los sistemas de coordenadas según D-H, el mecanismo robótico debe estar en la posición inicial de reposo o desde la cual este va a iniciar su movimiento. **Esto permite verificar, junto con los valores iniciales de los parámetros D-H, que la matriz de brazo T se haya calculado de forma correcta.** A medida que se asignan los sistemas de coordenadas, es de gran ayuda representarlos gráficamente sobre una vista isométrica del mecanismo robótico.

Después de aplicar el algoritmo de D-H y realizar la asignación de los sistemas de coordenadas a cada elemento, se debe simplificar la representación del mecanismo robótico. En dicha representación se deben mostrar cada uno de los sistemas de coordenadas asignados y ubicados adecuadamente. **Esto permite visualizar fácilmente su ubicación en el espacio y comprobar posteriormente que la asignación de los mismos fue hecha correctamente y se corresponde con los datos geométricos.**

7.2.3 Cálculo de las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$

Luego de asignar los sistemas de coordenadas con el algoritmo D-H, se debe crear una tabla con los valores iniciales de los parámetros D-H y realizar la representación gráfica de los mismos, se deben calcular cada una de las matrices de transformación homogénea a través de la ecuación 4.1.

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{x,a} \mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De requerirse una herramienta adicional para un trabajo específico, que extienda la longitud del brazo, se introduce la matriz de herramienta $\mathbf{H} \equiv {}^6\mathbf{A}_{\text{herr}}$ con la longitud d_i (de la herramienta) como un nuevo parámetro

7.2.4 Cálculo de las matrices de transformación homogénea $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$

Una vez determinadas las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ se deben calcular las matrices $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ necesarias para obtener la matriz de brazo $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{T}_1 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{T}_2 = {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$$

La matriz de brazo $\mathbf{T}$ se calcula por partes mediante estas dos matrices para evitar errores en la multiplicación de gran cantidad de variables. También serán utilizadas en la resolución de los problemas cinemático directo e inverso. **Estas pueden ser calculadas con programas computacionales como Matlab o Mathcad.**

Para comprobar el cálculo correcto de la matriz de brazo $\mathbf{T}$ se introducen en esta matriz los valores de los parámetros D-H iniciales y se debe obtener la posición y orientación del último sistema de coordenadas asignado con el algoritmo. La posición y orientación del último sistema es un dato geométrico conocido.

7.2.5 Análisis cinemático directo

El análisis cinemático directo sirve para determinar cual será la posición y orientación del efector final o herramienta, cuando se asignan valores a los parámetros o variables de articulación (θ_i en articulaciones giratorias y d_i en articulaciones prismáticas) se utiliza la matriz de brazo $\mathbf{T}$, calculada en pasos anteriores.

7.2.6 Análisis cinemático inverso

El análisis cinemático inverso sirve para obtener los valores de las variables de articulación cuando el efector final tiene una posición y orientación determinada en el espacio, el problema se analiza utilizando el método geométrico en las tres primeras articulaciones o grados de libertad y el desacoplo cinemático para las tres últimas, que normalmente definen la orientación en el espacio del extremo final

7.2.7 Análisis cinemático del brazo robótico en movimiento

En los dos pasos anteriores es posible estudiar la cinemática del mecanismo robótico para posiciones o configuraciones específicas fijas en el tiempo (estáticas). Para el estudio del movimiento, las trayectorias y el cálculo de los parámetros cinemáticos que varían en el tiempo (posición, velocidad y aceleración) se emplean los métodos numéricos de interpolación polinomial para la generación de trayectorias, las funciones vectoriales y las herramientas computacionales, estudiadas en el capítulo anterior.

Como ya lo estudiamos, es posible establecer la trayectoria de tres formas distintas: utilizando rectas y circunferencias en el espacio, interpolando puntos en el espacio o interpolando en el espacio de las articulaciones (rango de valores dentro del cual se mueven las articulaciones). Para el análisis cinemático se hará mayor énfasis en los dos primeros métodos, ya que en la mayoría de las aplicaciones industriales se requiere que los brazos robóticos realicen sus movimientos en función de coordenadas cartesianas en el espacio.

A continuación se presenta el diagrama de flujo del algoritmo computacional desarrollado junto con este trabajo, para la aplicación de la metodología de análisis cinemático de mecanismos robóticos.

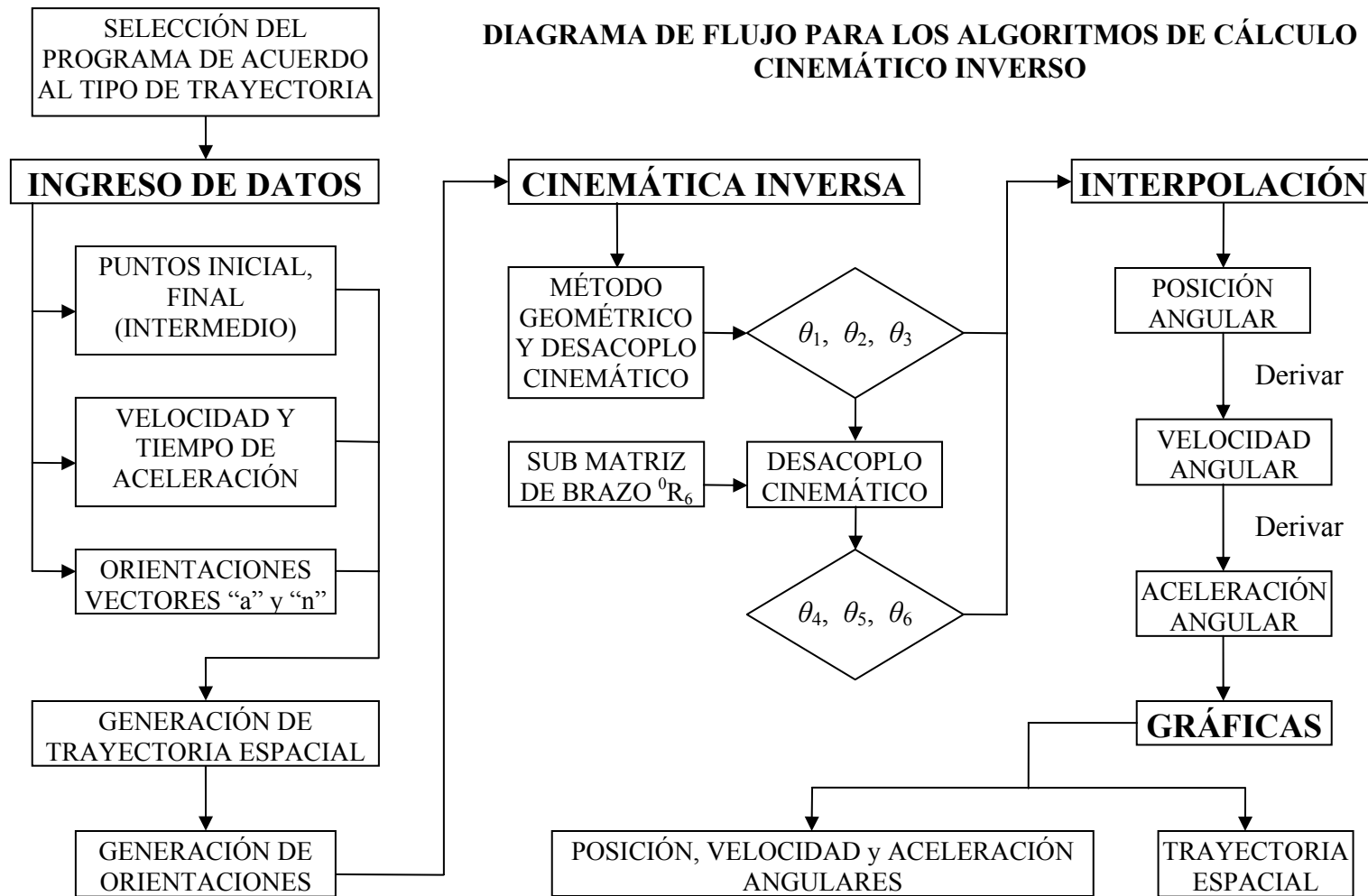


Figura 7.3. Diagrama de flujo para los algoritmos de calculo cinemático inverso desarrollados con este trabajo.

Los algoritmos del programa de cálculo cinemático, mostrados en el diagrama de flujo de la figura 7.3, pueden ser agrupados en cuatro etapas:

INGRESO DE DATOS

En esta etapa el usuario debe especificar a través de la interfaz gráfica del programa todos los datos concernientes a la geometría del robot, coordenadas iniciales, finales y/o intermedias de la trayectoria espacial, velocidad del extremo final del brazo robótico, tiempo de aceleración y coordenadas de los vectores de orientación “**a**” y/o “**n**”. Con estos datos el programa genera los puntos de la trayectoria en el tiempo, así como las orientaciones de los vectores “**n**”, “**s**” y “**a**” correspondientes al sistema de coordenadas ubicado en el extremo final del brazo robótico.

CINEMÁTICA INVERSA

Luego de generados los puntos y orientaciones, el algoritmo del Método Geométrico calcula los valores de las tres primeras articulaciones. Con estos y la sub matriz de rotación 0R_6 , se utiliza el algoritmo del Método de Desacoplo Cinemático para calcular los valores de las tres últimas articulaciones. Estos valores son las posiciones angulares de cada articulación en el tiempo.

INTERPOLACIÓN

En esta etapa se emplea un algoritmo que interpola los valores de las posiciones angulares de cada articulación, calculadas con los métodos geométrico y de desacoplo cinemático. Los polinomios de interpolación obtenidos se derivan posteriormente para obtener las expresiones de la velocidad y la aceleración angulares.

GRÁFICOS

Una vez obtenidos los valores de las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares de las articulaciones el usuario puede visualizar esos resultados gráficamente para facilitar la comprensión del comportamiento cinemático de las articulaciones cuando el brazo robótico realiza un movimiento. De igual forma cuenta con las gráficas del movimiento espacial del extremo del brazo robótico.

CAPÍTULO VIII

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS CINEMÁTICO

CAPÍTULO VIII

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS CINEMÁTICO

En la actualidad, existen cientos de compañías a nivel mundial dedicadas al desarrollo y fabricación de robots industriales. Como no es posible mencionar todas y cada una de ellas, solo listaremos algunas de las más reconocidas por su extensa experiencia en el campo de la robótica industrial: Kuka (Alemania), Motoman (Alemania), ABB (Alemania), Panasonic (Japón), Kawasaki (Japón), Reis (Alemania), Fanuc (Europa), Denso (USA), Mitsubishi (Japón), entre muchas otras.

A pesar de esto y de la gran variedad de modelos de robots industriales disponibles en el mercado, la mayoría de ellos comparten una característica fundamental con su predecesor el robot PUMA: la configuración antropomórfica, donde se identifican fácilmente el hombro, el codo y la muñeca, que proporcionan al brazo robótico entre tres y seis grados de libertad, diferenciándose estos únicamente en tamaño, disposición de sus elementos, capacidades de carga, rangos de aplicación y tecnología utilizada para su control.

Como se ha mencionado en anteriores capítulos, las aplicaciones más comunes para estos robots son: ensamblaje, manipulación de materiales, carga y descarga de máquinas herramientas, paletizado, soldadura por arco y por punto, corte y soldadura por láser, corte por plasma y pintura. Los requerimientos actuales de productividad junto con los avances en la electrónica y computación, han contribuido para el desarrollo de robots muy rápidos y precisos, con ciclos de trabajo que se realizan en tiempos muy cortos, en algunos casos en menos de un segundo, variando esto según el tamaño del robot, la carga y la aplicación.

En las figuras 8.1a y 8.1b se pueden apreciar distintos modelos de brazos robóticos de diferentes compañías y resulta obvio que todos tienen en común la configuración antropomórfica con hombro, codo y muñeca.



a) Modelo IRB 6620 de ABB



b) Modelo EPL 80 de Motoman



c) Modelo ZZX 165U de Kawasaki



d) Modelo KR 16 de Kuka

Figura 8.1a. Diferentes modelos de robots con configuración antropomórfica.



e) Modelo R 2000i de Fanuc



f) Modelo Ta 1600 de Panasonic

Figura 8.1b. Diferentes modelos de robots con configuración antropomórfica.

La metodología desarrollada en el capítulo anterior puede ser aplicada tanto a robots existentes en el mercado como a robots en fase de diseño. Esta, con la ayuda de varios programas desarrollados con el software Matlab 7 permitirá obtener resultados que permitan analizar el comportamiento cinemático de un mecanismo robótico.

Para el análisis cinemático, es necesario conocer las dimensiones del brazo robótico y la ubicación de sus ejes, su alcance máximo, rango de movimiento de las articulaciones, repetibilidad, la velocidad o velocidades máximas que puede alcanzar el mecanismo y el tiempo en que realiza un ciclo de trabajo, el cual es el tiempo que toma completar un ciclo de trabajo de una flecha a la otra y regresar como se indica en la figura 8.2. Este tiempo es determinado por el fabricante para una distancia y carga específica, pero no necesariamente es el que toma realizar una tarea específica.



Figura 8.2. Tiempo de ciclo para un robot Denso de la serie VM.

Las empresas fabricantes de robots suministran datos técnicos de sus productos. Estos generalmente especifican los grados de libertad, las dimensiones, la carga máxima que puede manejar el robot, las velocidades máximas de la muñeca o de sus articulaciones, el rango de movimiento de estas, el alcance máximo del brazo y la repetibilidad (repeatability) que es el rango de precisión con el que el brazo puede ubicarse en una misma coordenada una y otra vez.

Información adicional incluye las aplicaciones, nivel de ruido y vibración, consumo de energía, condiciones de operación así como dispositivos, software y accesorios para la seguridad y control. En las figuras 8.3 y 8.4 se muestran los datos técnicos del modelo IRB 6600 de ABB. Esta información está bastante estandarizada por los fabricantes de robots industriales, variando solo en su formato de presentación.

IRB 6600

Industrial Robot

TECHNICAL DATA, IRB 6600 INDUSTRIAL ROBOT

SPECIFICATION

Robot versions IRB	Reach	Handling capacity	Center of gravity	Wrist torque
6600-175	2.55	175 kg	360 mm	961 Nm
6600-225	2.55	225 kg	305 mm	1324 Nm
6600-175	2.80	175 kg	392 mm	1206 Nm
6650-125	3.20	125 kg	360 mm	715 Nm
6650-200	2.75	200 kg	365 mm	1135 Nm

Extra loads can be mounted on all variants.
50 kg on upper arm and 500 kg on frame of axis 1.

Number of axes: 6
Protection: Complete robot IP 67
Mounting: Floor mounted

PERFORMANCE

Positions repeatability 0.1 mm
Path repeatability 0.3 mm

Axis movements	Working range	Axis max speed 6600/6650-200	Axis max speed 6650-125
Axis 1 Rotation	+180° to -180°	Axis 1 100°/s	110°/s
Axis 2 Arm	+ 80° to - 65°	Axis 2 90°/s	90°/s
Axis 3 Arm	+ 60° to -180°	Axis 3 90°/s	90°/s
Axis 4 Wrist	+300° to -300°	Axis 4 150°/s	150°/s
Axis 5 Bend	+120° to -120°	Axis 5 120°/s	120°/s
Axis 6 Turn	+300° to -300°	Axis 6 190°/s	235°/s

A supervision function prevents overheating in applications with intensive and frequent movements.

ELECTRICAL CONNECTIONS

Supply voltage	200-600 V, 50/60 Hz
Power consumption	ISO-Cube 2.6 kW
Normal robot movements	3.8 kW

PHYSICAL

Dimensions robot base	1136 x 850 mm
Weight (all versions)	1750 kg

ENVIRONMENT

Ambient temperature for mechanical unit
During operation +5 °C (41 °F) - +52 °C (122 °F)
During transportation and storage -25 °C (13 °F) - +55 °C (131 °F)
for short periods (max 24 h) up to +70 °C (158 °F)

Relative humidity Max 95%

Noise level Max 73 dB (A)

Safety Double circuits with supervision, emergency stops and safety functions, 3-position enable device.

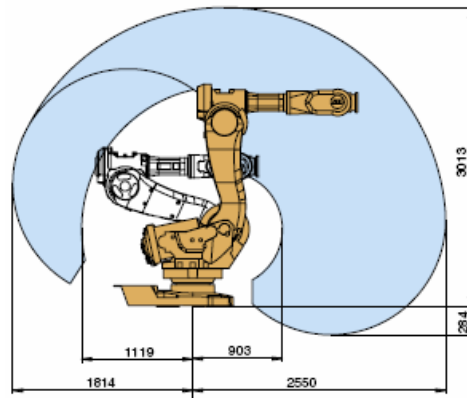
Emission EMC/EMI-shielded

*Data and dimensions may be changed without notice

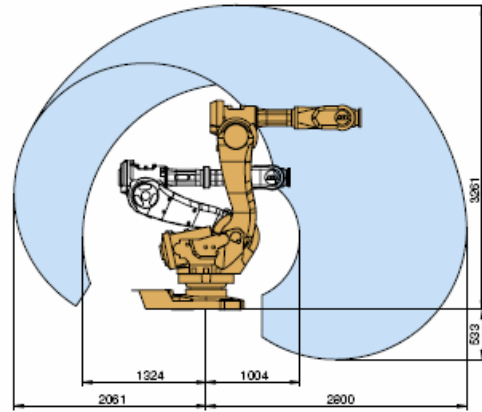


Figura 8.3. Datos técnicos del robot IRB 6600 de ABB

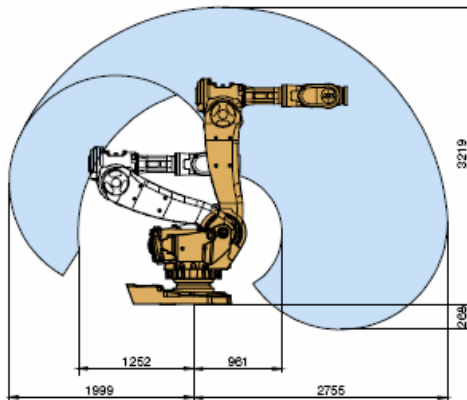
IRB 6600-175/2.55, IRB 6600-225/2.55



IRB 6600-175/2.8



6650-200/2.75



6650-125/3.2

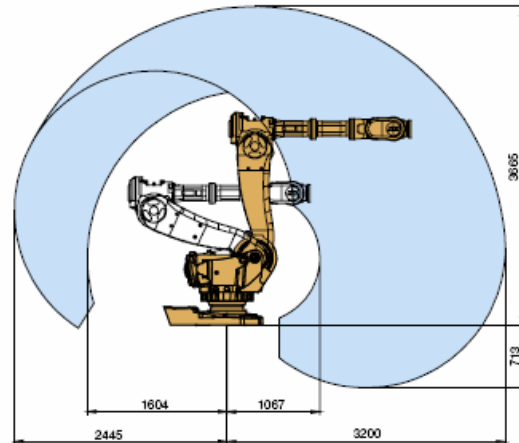


Figura 8.4. Dimensiones y área de trabajo del robot IRB 6600 de ABB

En la sección siguiente se desarrollan varios ejemplos con dos de los robots estudiados en los capítulos 4 y 5 de cinemática directa e inversa, el modelo ABB IRB-140 y el modelo FANUC serie R-2000iA/165 F, realizando algunas de las tareas más comunes y a los cuales ya se ha aplicado parte la metodología de análisis. Para la rápida aplicación de la misma, se utilizarán los programas de cálculo cinemático desarrollados con el lenguaje de programación Matlab versión 7.

8.1 Ejemplos de aplicación de la metodología de análisis cinemático

De acuerdo a la metodología, lo primero será asignar los sistemas de coordenadas a cada articulación del mecanismo robótico y obtener la tabla con los parámetros de Denavit-Hartenberg. Estos pasos ya se realizaron en el capítulo 4, secciones **4.4.1** y **4.4.2**, cuyos resultados se muestran en las figuras 4.9 y 4.12 y las tablas 4.2 y 4.3 para los modelos ABB y FANUC respectivamente. A partir de este punto, ya es posible estudiar la cinemática directa del mecanismo robótico, seleccionando valores articulares estáticos y dentro de los rangos de articulación establecidos. Utilizando el programa **cinematica_directa_1.m**, se podrá determinar la matriz de brazo que indica la posición y la orientación del extremo final del brazo robótico.

El análisis cinemático inverso, por el contrario, permite obtener los valores de los parámetros de articulación dadas la posición y orientación del extremo final del robot donde los métodos geométrico y de desacoplo cinemático, utilizados para ello, solo se pueden aplicar un punto a la vez, sin embargo, los programas de cinemática inversa desarrollados en Matlab permiten obtener los valores de los ángulos de articulación en el tiempo, al igual que sus velocidades y aceleraciones, cuando el extremo del robot realiza un movimiento espacial en trayectoria recta o en arco de circunferencia entre dos puntos, con coordenadas y parámetros cinemáticos establecidas para una aplicación.

Los datos así obtenidos, son de gran importancia para posteriores estudios de la dinámica y control de un brazo robótico. A continuación, se presentan varios ejemplos prácticos, en los que, para los ejemplos **8.1.1** y **8.1.4** se analizarán algunos de los resultados y las gráficas que describen el comportamiento cinemático del brazo robot. Para el resto de los ejemplos los resultados serán mostrados en los apéndices.

Ejemplo 8.1.1

Se emplea el robot ABB IRB-140 para realizar un trabajo de soldadura por arco (MIG) y así unir dos piezas de una oreja de soporte especial de acero. Estas se muestran en la figura 8.5a.

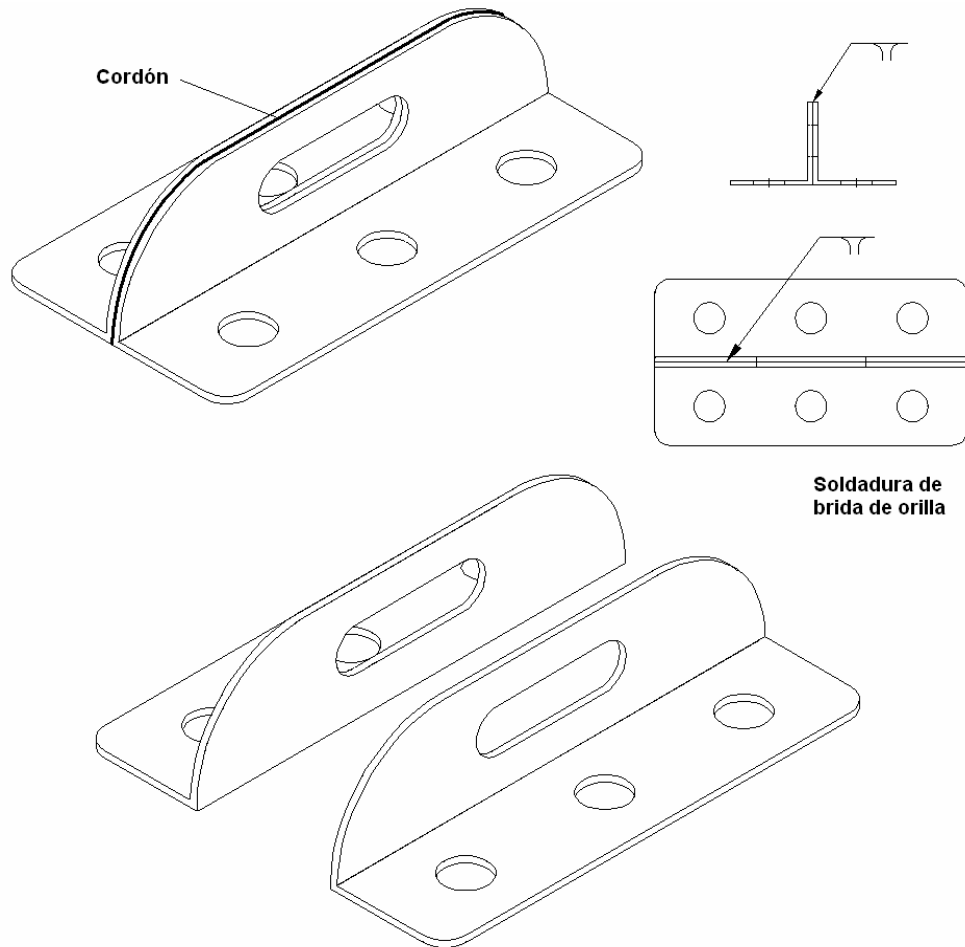


Figura 8.5a. Piezas de la oreja de soporte especial de acero.

Se requiere un cordón en línea recta y dos en arco de circunferencia de radio constante en una trayectoria continua. Las dimensiones de la pieza a soldar y las coordenadas de los puntos por donde pasa el cordón se indican en las figuras 8.5b y 8.5c respectivamente. La pieza está colocada sobre una plataforma de trabajo ajustada a una altura de **250 mm** con respecto al sistema de coordenadas de referencia (x_0 , y_0 ,

z_0). Entre los parámetros para realizar el trabajo el operador estableció una velocidad de soldadura V_s de **100 mm/s** (0.1 m/s). El tiempo de aceleración es de **0.10** segundos y la longitud de la herramienta incluyendo la porción del electrodo es de **250 mm** (figura. 8.5c).

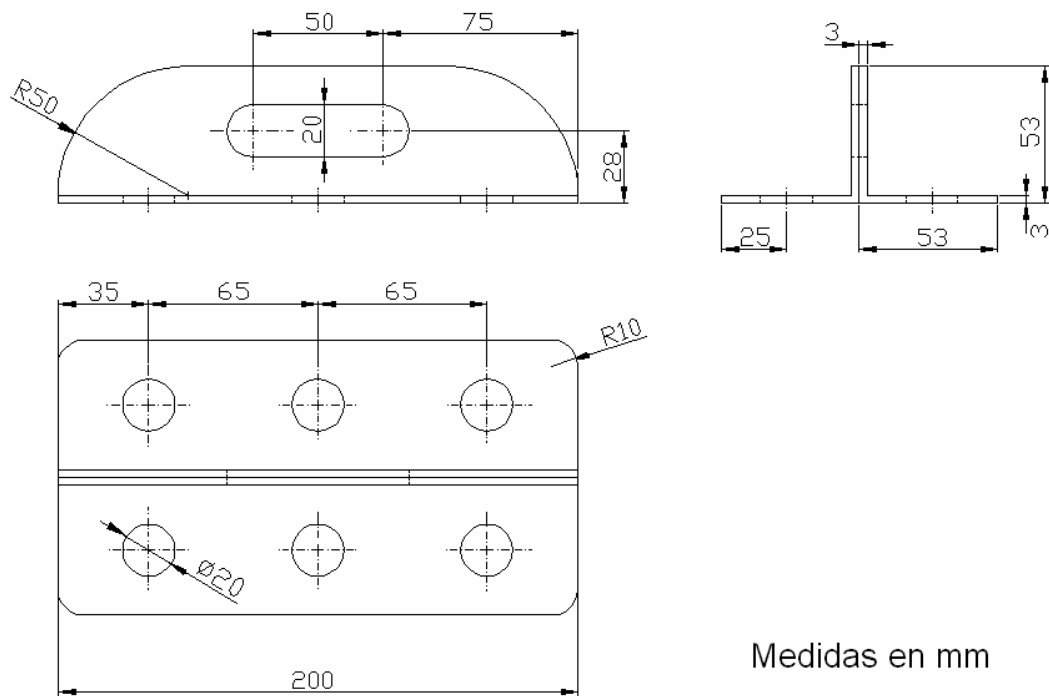


Figura 8.5b. Dimensiones de la oreja de soporte especial de acero.

El movimiento del extremo final del brazo robótico, para realizar la soldadura, comienza entonces en el punto **A** de coordenadas (100, 500, 250) y se compone de tres segmentos: un cuarto de circunferencia inicial (**A-C**), seguido por un segmento recto (**C-D**) y terminando nuevamente con un cuarto de circunferencia (**D-F**) en el punto (-100, 500, 250).

Para este análisis, se utilizan los programas **cine_inve_curva.m** y **cinem_inver_r.m**. En la figura 8.6 se muestra como introducir los datos a través de la interfaz de usuario del programa **cine_inve_curva.m** para analizar el primer segmento (**A-C**). Las figuras 8.7 y 8.8 muestran, igualmente, como introducir los

datos en los programas **cinem_inver_r.m** y **cine_inve_curva.m** para los segmentos (C-D) y (D-F) respectivamente.

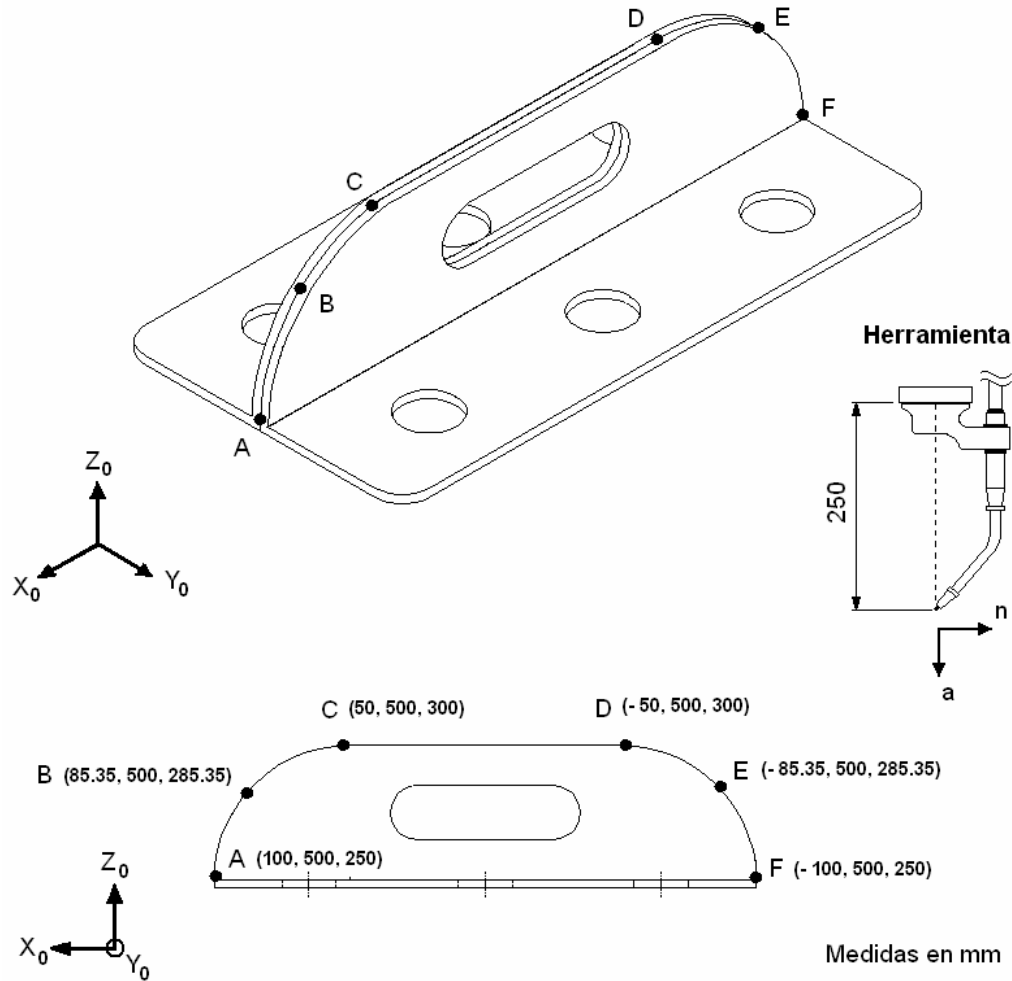


Figura 8.5c. Coordenadas de los puntos por donde pasa el cordón de soldadura.

El brazo robótico realiza el movimiento a través de los diferentes segmentos manteniendo una velocidad lineal de soldadura de módulo constante. Es por esto que en el segmento de trayectoria A-C hay un tramo de aceleración seguido por un tramo con velocidad de módulo constante, en el segmento C-D se mantiene la velocidad constante y el segmento D-F se realiza a velocidad de módulo constante con un tramo de desaceleración. Esto garantiza que el análisis se haga para un movimiento continuo a pesar de ser estudiado por partes.

Untitled

Parametros del brazo						Posicion				
	a1	a2	a3	d1	d4	d6	X	Y	Z	
	70	360	0	352	380	65	Inicial	100	500	250 mm
							Final	50	500	300 mm
							Interm.	85.32	500	285.35 mm

Datos cinematicos		Otros parametros	
Calcular	Velocidad 0.1 m/s	Alc. 810 mm	vector a (int. / ext.) -1
Borrar	Tiempo acel. 0.10 seg.	Herr. 250 mm	Ang. n y s 0 Grados

Tramos		Vector n		Tiempo total:		X:	
Acel. 1	ind. 1	x 0		0 seg.			0
Desacel. 0		y 1		Radio: 0 mm		Centro Y:	0
		z 0		Seleccionar grafica		Z:	0

Figura 8.6. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el primer segmento en arco de circunferencia (A-C).

cinem_inver_r

Parametros del brazo						Posicion				
	a1	a2	a3	d1	d4	d6	X	Y	Z	
	70	360	0	352	380	0	Inicial	50	500	300 mm
							Final	-50	500	300 mm

Datos cinematicos		Orientacion Vector a			Angulo giro Vector n	
Velocidad 0.1 m/s		X	Y	Z	Inicial	0 Grados
Tiempo acel. 0.10 seg.		Inicial	0	0	-1	
		Final	0	0	-1	Final 0 Grados

Otros parametros		Tramos		Orientacion Vector n			
Alc. 810 mm		Acel. 0		X	Y	Z	
Herr. 250 mm		Desacel. 0		Ind. no 1	0	1	0
				Ind. nf 1	0	1	0

Calcular	Borrar	Seleccionar grafica	Tiempo total: 0 seg.
----------	--------	---------------------	----------------------

Figura 8.7. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segundo segmento en línea recta (C-D).

The screenshot shows a MATLAB/Simulink-style GUI titled 'Untitled'. It is divided into several sections for inputting data:

- Parametros del brazo:** Contains fields for link lengths (a1=70, a2=360, a3=0), offset distances (d1=352, d4=380, d6=65), and joint angles (alfa1=-90, alfa2=0, alfa3=90).
- Posicion:** A table for initial, final, and intermediate positions in X, Y, and Z coordinates (mm).

	X	Y	Z	mm
Inicial	-50	500	300	
Final	-100	500	250	
Interm.	-85.35	500	285.35	
- Datos cinematicos:** Includes 'Calcular' and 'Borrar' buttons, velocity (0.1 m/s), and acceleration time (0.10 seg.).
- Otros parametros:** Includes 'Alc.' (810 mm), 'Herr.' (250 mm), 'vector a (int. / ext.)' (-1), and 'Ang. n y s' (0 Grados).
- Tramos:** Includes 'Acel.' (0) and 'Desacel.' (1) fields.
- Vector n:** Includes 'ind.' (1) and x, y, z components (0, 1, 0).
- Summary fields:** 'Tiempo total: 0 seg.', 'Radio: 0 mm', and 'Centro' coordinates (X: 0, Y: 0, Z: 0).

Figura 8.8. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el tercer segmento en arco de circunferencia (D-F)

Para cada segmento estudiado se obtiene un tiempo de recorrido, los cuales se muestran en la interfaz de usuario y que, para este caso, son valores parciales del tiempo total en que se ejecuta la operación de soldadura. De igual forma, para los segmentos **A-C** y **D-F**, se muestran el valor del radio de la trayectoria de arco de circunferencia y las coordenadas de su centro (Figura 8.9).

SEGMENTO A-C	Tiempo total: 0.83 seg.			X:	49.9305
	Radio: 50.0696 mm			Centro Y:	500
	Seleccionar grafica			Z:	249.93
SEGMENTO C-D	Seleccionar grafica			Tiempo total: 1 seg.	
SEGMENTO D-F	Tiempo total: 0.83 seg.			X:	-49.9818
	Radio: 50.0182 mm			Centro Y:	500
	Seleccionar grafica			Z:	249.982

Figura 8.9. Resultados mostrados en la interfaz de usuario de los programas cinemáticos para cada tramo del recorrido.

Los tiempos parciales son: 0.83 s para el segmento **A-C**, 1.00 s para el segmento **C-D** y 0.83 s para el segmento **D-F**. El tiempo total empleado para realizar la soldadura es de **2.66** segundos. Los resultados del análisis cinemático se visualizan a través de gráficas que muestran la trayectoria espacial del extremo final del brazo robótico con la herramienta colocada, las orientaciones del sistema de coordenadas móvil en el extremo final del brazo (vectores **n**, **s** y **a**) y la posición, velocidad y aceleración angular de cada articulación.

Los programas cuentan con un menú que permite seleccionar la gráfica deseada y mostrarla en una nueva ventana. De la figura 8.10 a la figura 8.17 se muestran las gráficas correspondientes al segmento **A-C**.

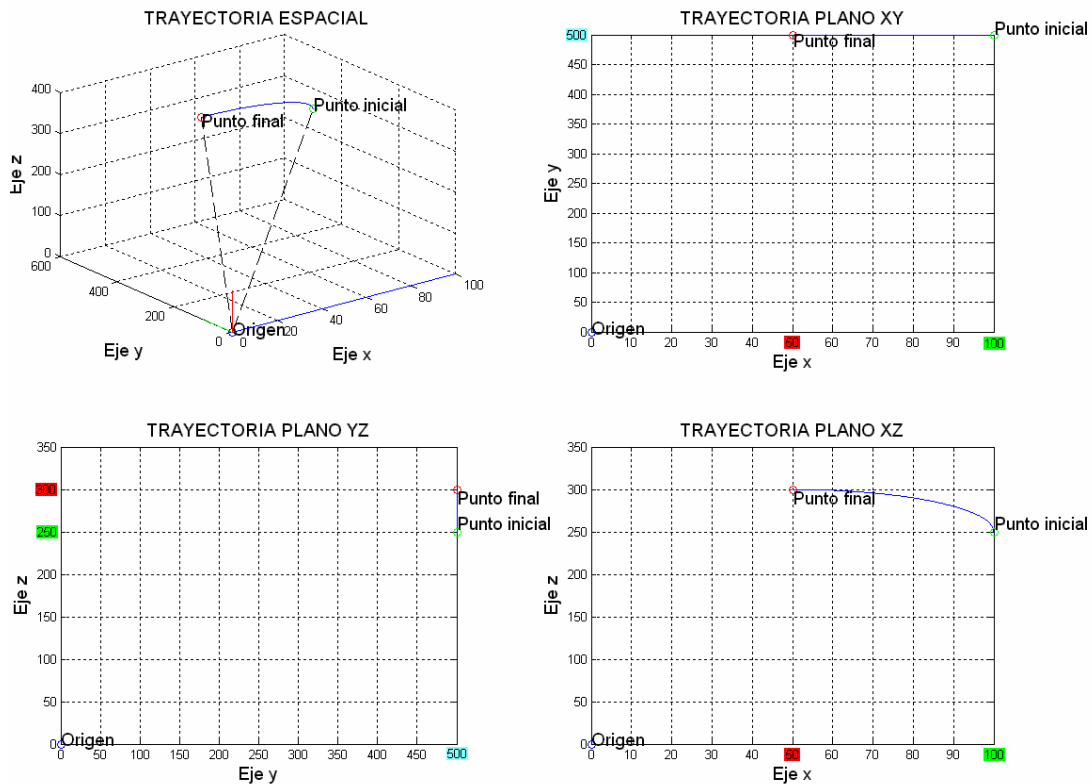


Figura 8.10. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Tramo A-C

En la figura 8.10, se muestra la trayectoria espacial del extremo del brazo, con la herramienta colocada, y cuyas coordenadas están expresadas con respecto al sistema de referencia (x_0, y_0, z_0) . De igual forma, se presentan tres vistas de la trayectoria en los planos XY , YZ y XZ para visualizarla de manera más sencilla.

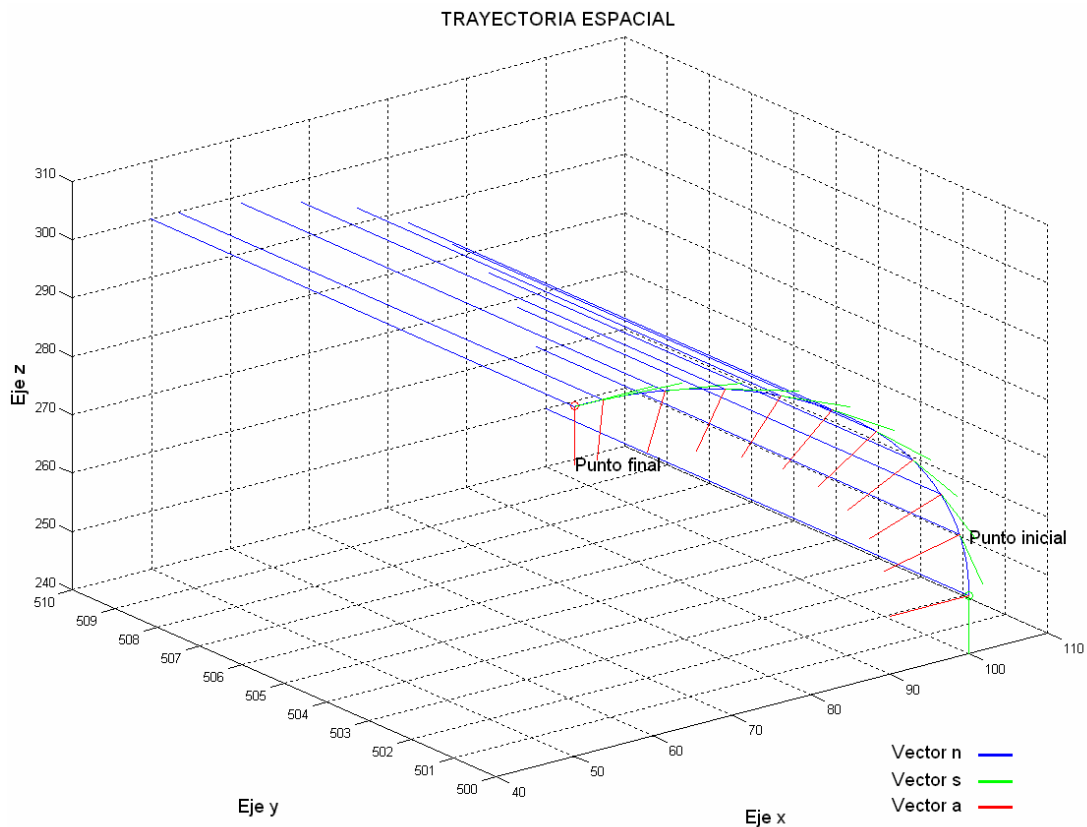


Figura 8.11. Orientaciones del extremo final del brazo (incluida la herramienta). Tramo A-C

En la figura 8.11, se muestra nuevamente la trayectoria espacial, pero incluyendo la representación de los vectores **n**, **s** y **a**, que forman el sistema de coordenadas móvil en el extremo final de la herramienta, y la variación de sus orientaciones durante el recorrido.

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración angular para cada articulación del brazo robótico, en el segmento **A-C**, se presentan a continuación.

Para la articulación 1 se puede observar, en la figura 8.12, como se incrementa el ángulo de un valor inicial de 50.3° hasta un valor final de 84.25° . Se parte del reposo con velocidad angular nula, la cual aumenta y finaliza el recorrido del segmento A-C con un valor de $78.37^\circ/\text{s}$.

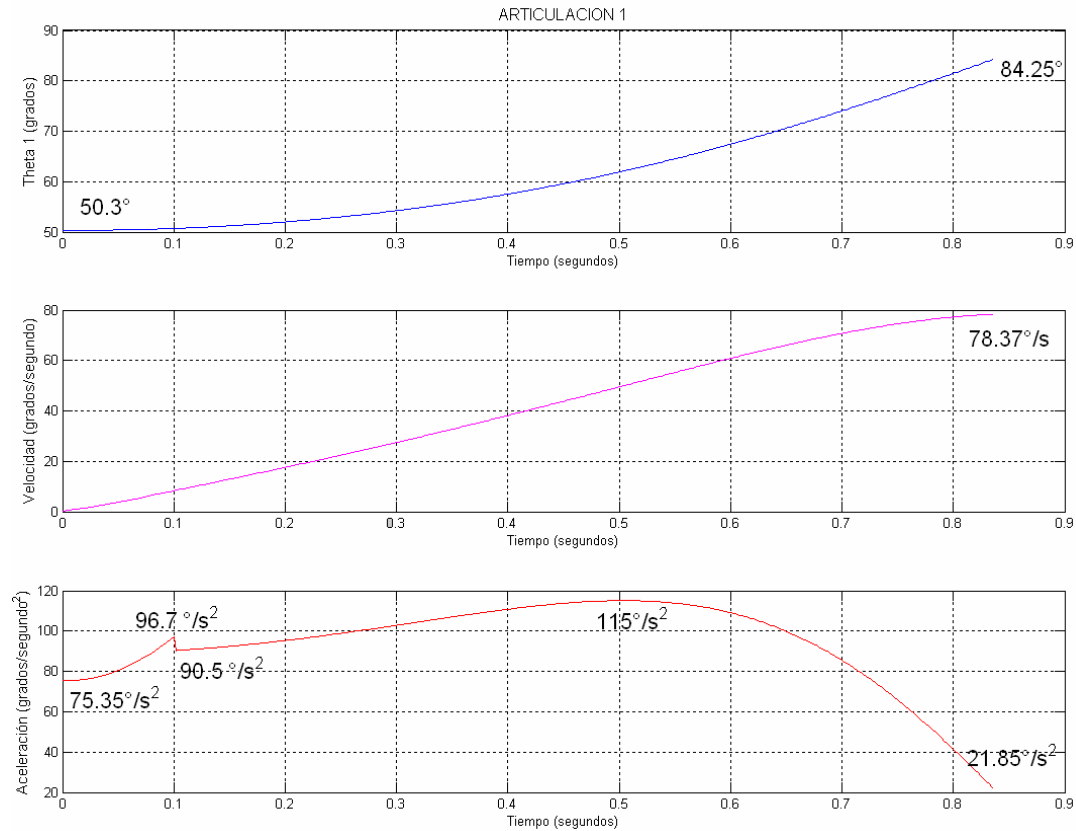


Figura 8.12. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 1. Tramo A-C

Para comprender el comportamiento cinemático de las tres primeras articulaciones es necesario analizar el movimiento de la muñeca del brazo robótico. En la figura 8.13 se representan vectorialmente las velocidades de dos posiciones de la muñeca, indicadas **a** y **b**, para el tramo que se recorre con velocidad de soldadura V_s de módulo constante en el segmento A-C. La herramienta para soldar mantiene una orientación perpendicular a la pieza de trabajo, lo que implica que la muñeca se mueve igualmente en una trayectoria de arco de circunferencia de radio $R + \text{Herramienta} + d_6$, respecto al centro y con velocidad angular constante ω .

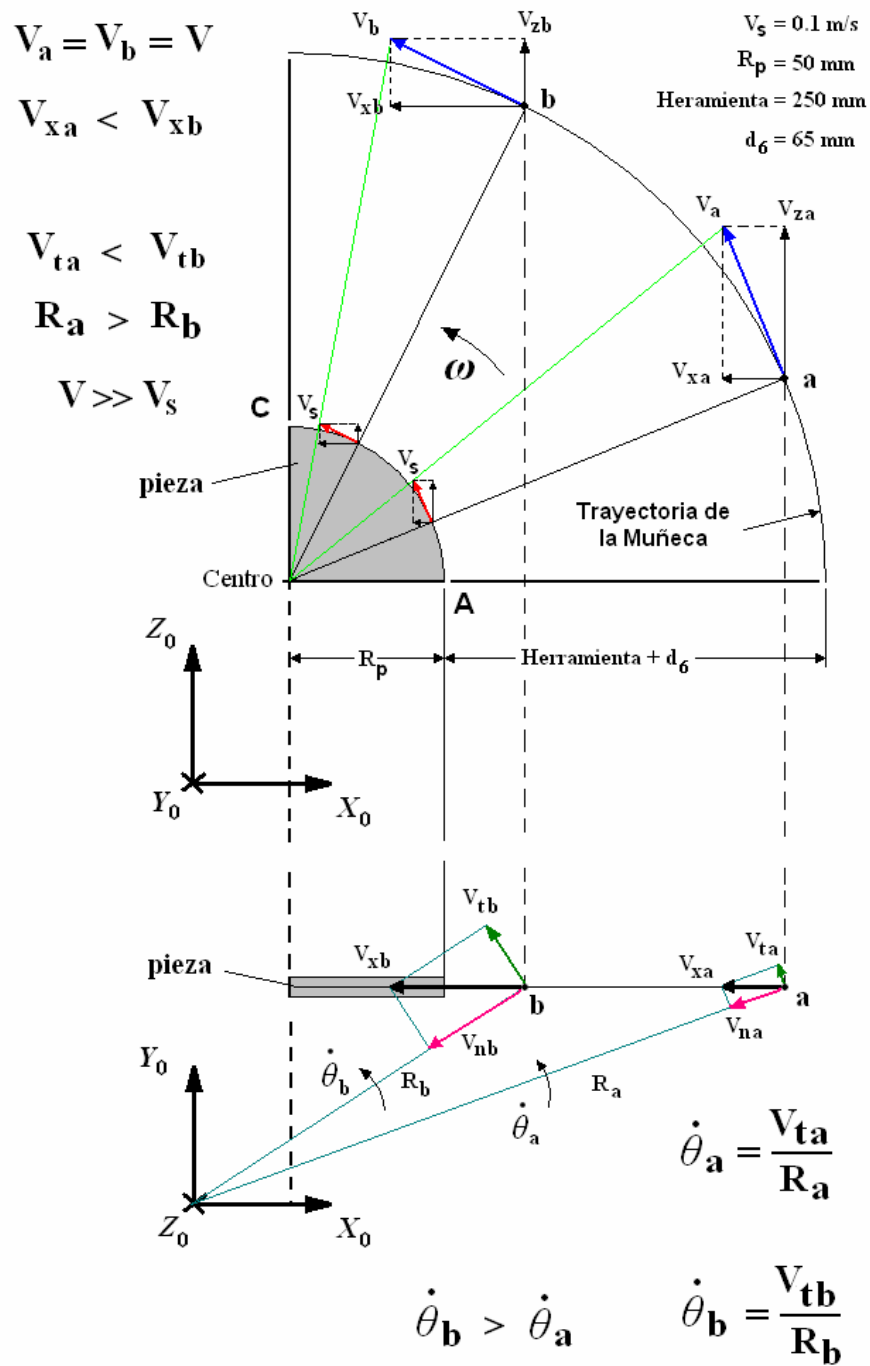


Figura 8.13. Velocidades de dos puntos de la muñeca durante el recorrido del segmento A-C

En la figura anterior, se puede apreciar como varía el módulo de la componente horizontal (eje X_0) del vector velocidad de la muñeca V , en los puntos a y b , hasta que esta velocidad se hace completamente horizontal al final del recorrido.

Las velocidades V_{xa} y V_{xb} pueden ser, a su vez, descompuestas en otras componentes pertenecientes al plano X_0Y_0 , en direcciones paralela (V_n) y perpendicular (V_t) a la dirección del radio instantáneo R en los puntos **a** y **b**. En la figura 8.12 se ve como la velocidad angular de la articulación 1 aumenta ya que el cociente entre la componente de velocidad instantánea V_t y el radio instantáneo R también aumenta (figura 8.13). Durante el recorrido la derivada de la velocidad angular (la aceleración angular) alcanza un valor máximo y se presenta un punto de inflexión en la curva de velocidad angular.

Entonces, la aceleración angular aumenta hasta un máximo de $115^\circ/s^2$ y luego empieza a disminuir a medida que la velocidad lineal de la muñeca V , se hace constante en la dirección X_0 y el radio instantáneo R no varía en forma significativa.

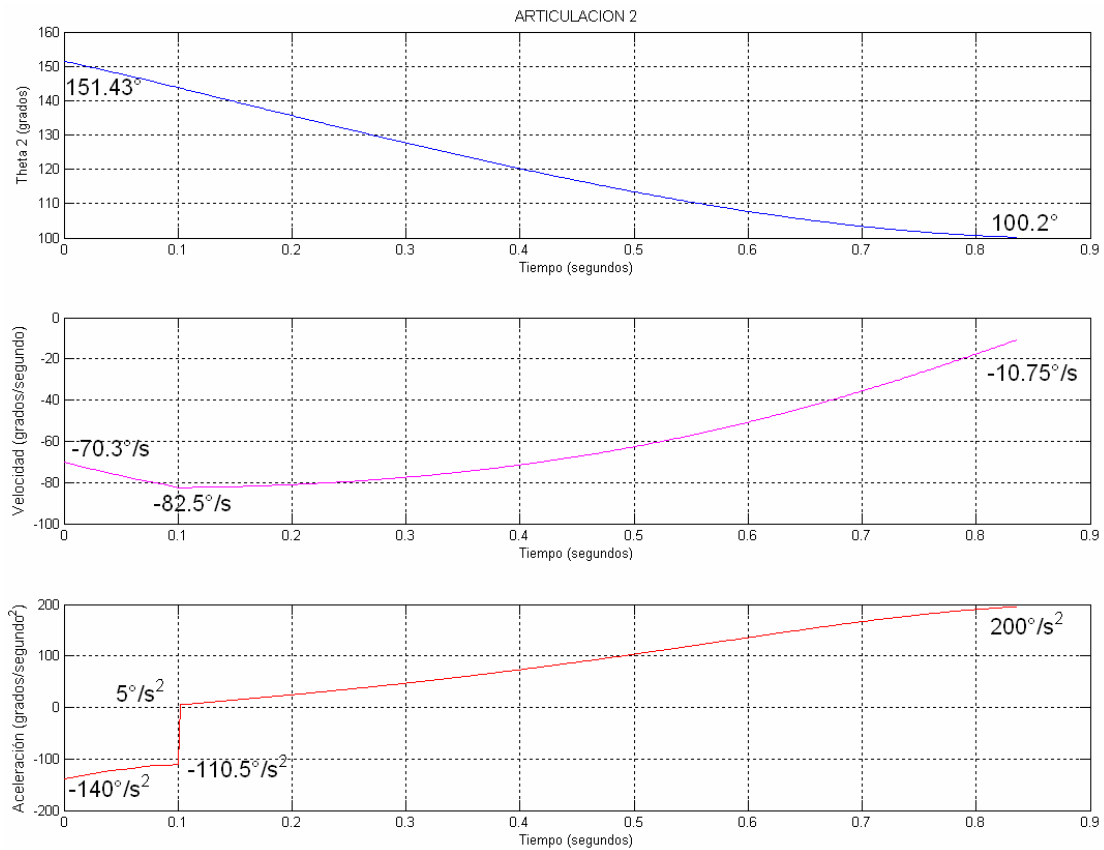


Figura 8.14. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 2. Tramo A-C

La posición de la articulación 2 varía desde **151.43°** hasta **100.2°** (figura 8.14). Se puede apreciar que la velocidad angular inicial de la articulación no es nula, y tiene un valor de **-70.3°/s**, el signo negativo corresponde a un sentido de giro de la articulación. Este comportamiento se explica de la manera siguiente: el extremo de la herramienta de soldadura realiza un movimiento en una trayectoria de arco de circunferencia de radio R_p . Sin embargo, la muñeca del brazo robótico, como se indicó en la figura 8.13, se moverá en una trayectoria de arco de circunferencia con un radio mayor, igual a $R_p + \text{Herramienta} + d_6$, con respecto al centro.

El módulo de la velocidad lineal de la muñeca V , es entonces, mayor que el de la velocidad de soldadura V_s . Como la muñeca parte de una posición inicial de reposo, para que esta se desplace una longitud de arco grande y alcance una velocidad lineal V en un tiempo muy corto (tiempo de aceleración de 0.1 s), la velocidad angular de la articulación 2 en el instante inicial debe ser distinta de cero.

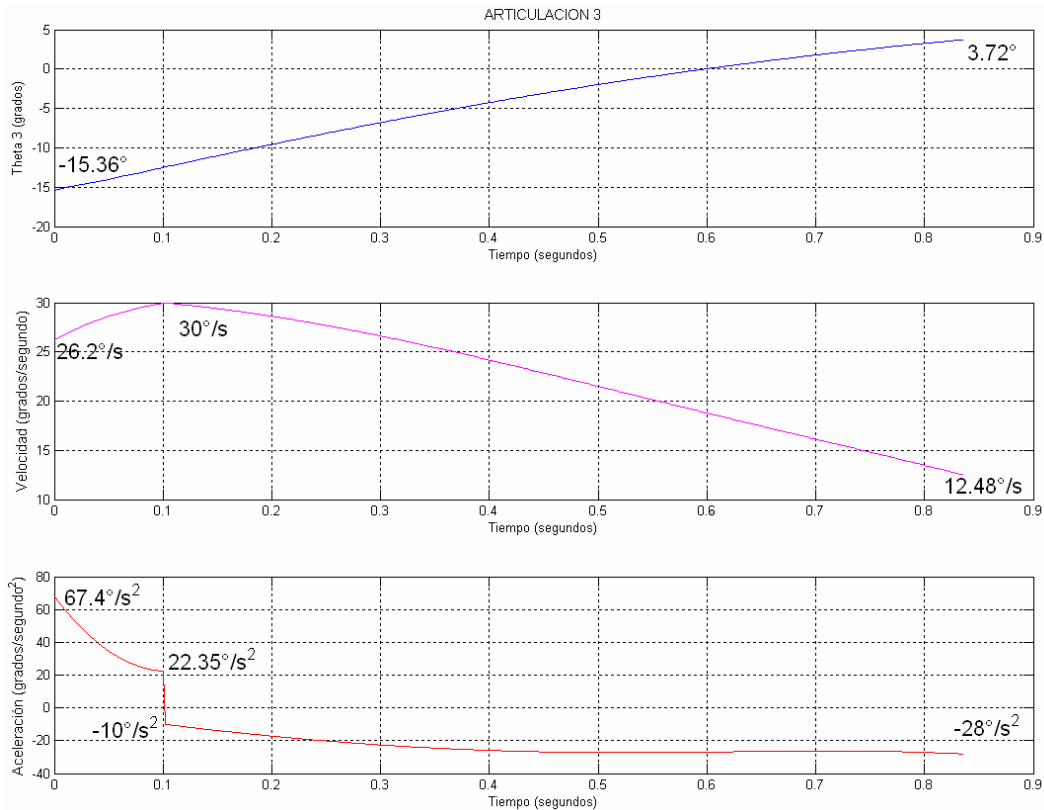


Figura 8.15. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3. Tramo A-C

En el tramo de aceleración la velocidad angular de la articulación 2 aumenta su valor (de $-70.3^\circ/\text{s}$ a $-82.5^\circ/\text{s}$) girando en el mismo sentido y luego que el módulo de velocidad lineal de la muñeca $\mathbf{V}$ alcanza un valor constante, su componente vertical (eje Z_0) empieza a disminuir (figura 8.13) y por consiguiente disminuye el valor de la velocidad angular de esta articulación. La situación anterior ocurre de manera similar para la articulación 3 (figura 8.15) aumentando su velocidad angular de $26.2^\circ/\text{s}$ a $30^\circ/\text{s}$ en el tramo de aceleración, para disminuir posteriormente en el tramo a velocidad constante. Las velocidades angulares de estas dos articulaciones dependen, en este caso, de la componente vertical $\mathbf{V}_z$ de la velocidad $\mathbf{V}$ de la muñeca, y de un componente normal $\mathbf{V}_n$ en el plano X_0Y_0 (figura 8.13).

De la figura 8.17 a la 8.19 se presentan las gráficas de los comportamientos cinemáticos para las tres últimas articulaciones, las cuales se encargan de orientar, según se requiera, el extremo final del brazo robótico con los vectores $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{a}$. Estos comportamientos se explican de manera similar a los de las tres primeras articulaciones. A continuación se analizarán algunas de las características de las curvas de velocidad y aceleración angular de las articulaciones, durante el recorrido del segmento A-C.

En la trayectoria espacial, para el tramo de **aceleración**, el módulo de ésta es constante. Sin embargo, el valor de la **aceleración angular** de las articulaciones, en este mismo tramo, no lo es. Y como se puede verificar en las gráficas de las articulaciones, para el tramo que se realiza a **velocidad** lineal de módulo constante, la **velocidad angular** de estas no lo es. Este comportamiento es característico en movimientos de trayectorias curvas o en arco de circunferencia y se debe a la variación no lineal de las componentes en el espacio (vertical y horizontal) de la velocidad de la muñeca. Esto incide directamente sobre la forma de las curvas de velocidad y aceleración angular de las articulaciones.

El salto que se produce en las curvas de la aceleración angular se debe al cambio instantáneo de la velocidad, tangente a la trayectoria de la muñeca, correspondiente a un movimiento circular con aceleración tangencial constante y aceleración normal variable, a una velocidad lineal V de módulo constante e igualmente tangente a la trayectoria de la muñeca. Esto ocurre siempre que existan tramos de aceleración o desaceleración. En este caso la componente tangencial de la aceleración se hace nula quedando solo la componente normal. Esto se muestra en la figura 8.16.

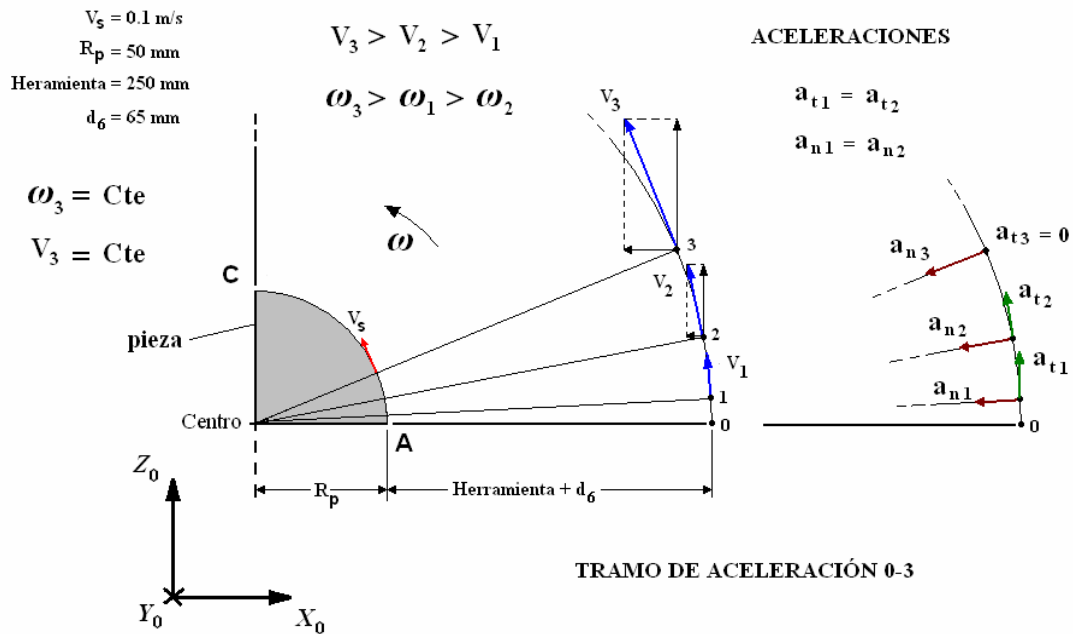


Figura 8.16. Comportamiento de la velocidad V en el tramo de aceleración para el segmento A-C

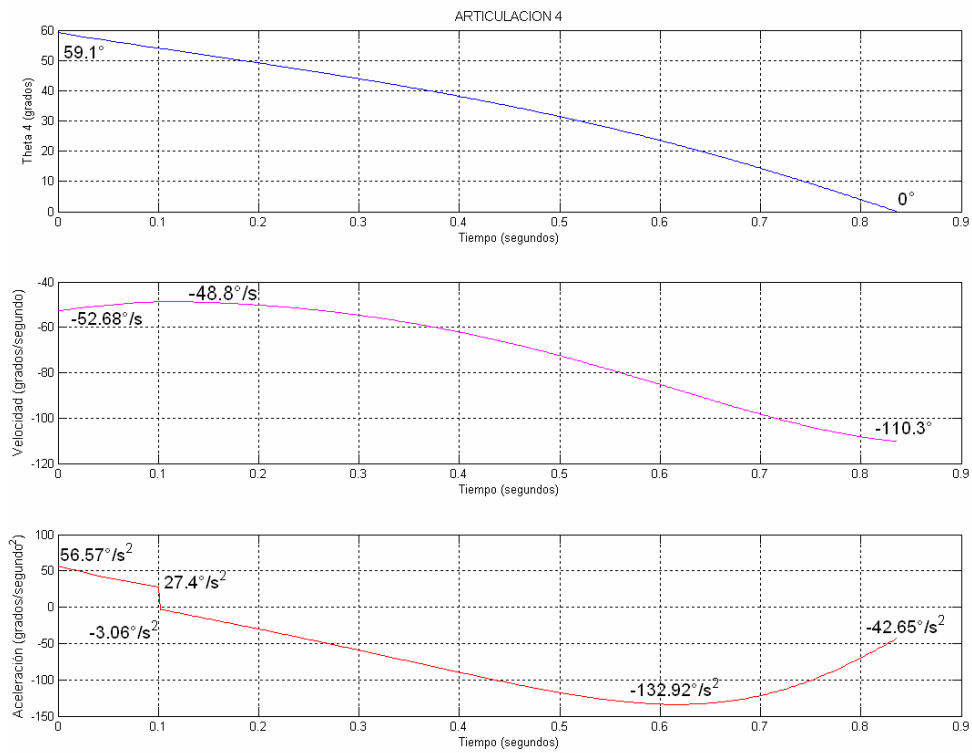


Figura 8.17. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 4. Tramo A-C

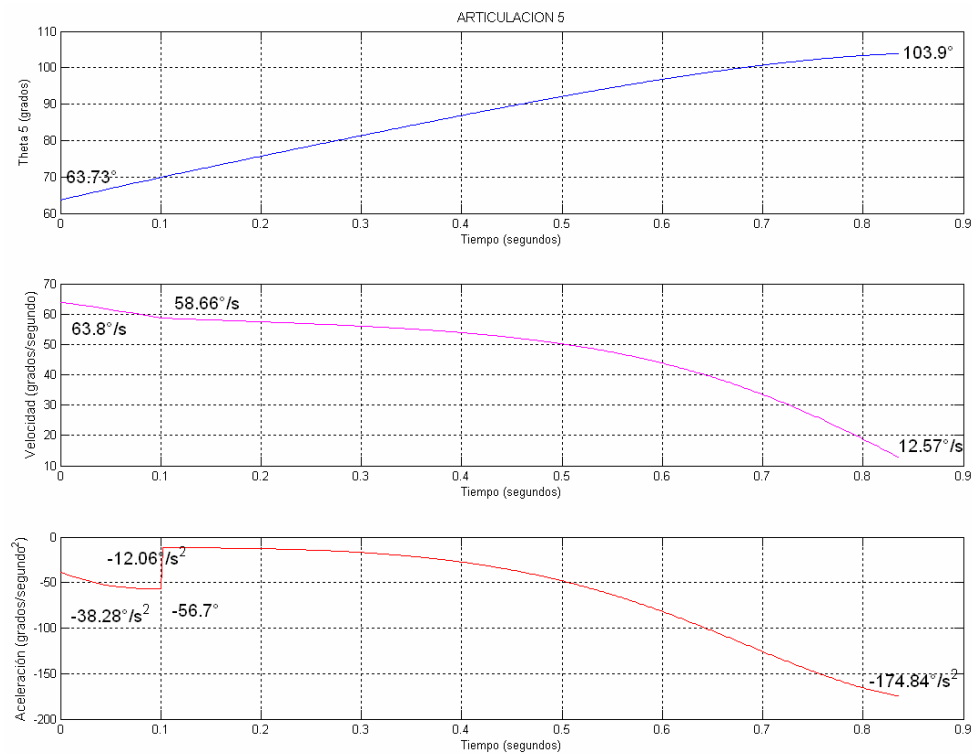


Figura 8.18. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 5. Tramo A-C

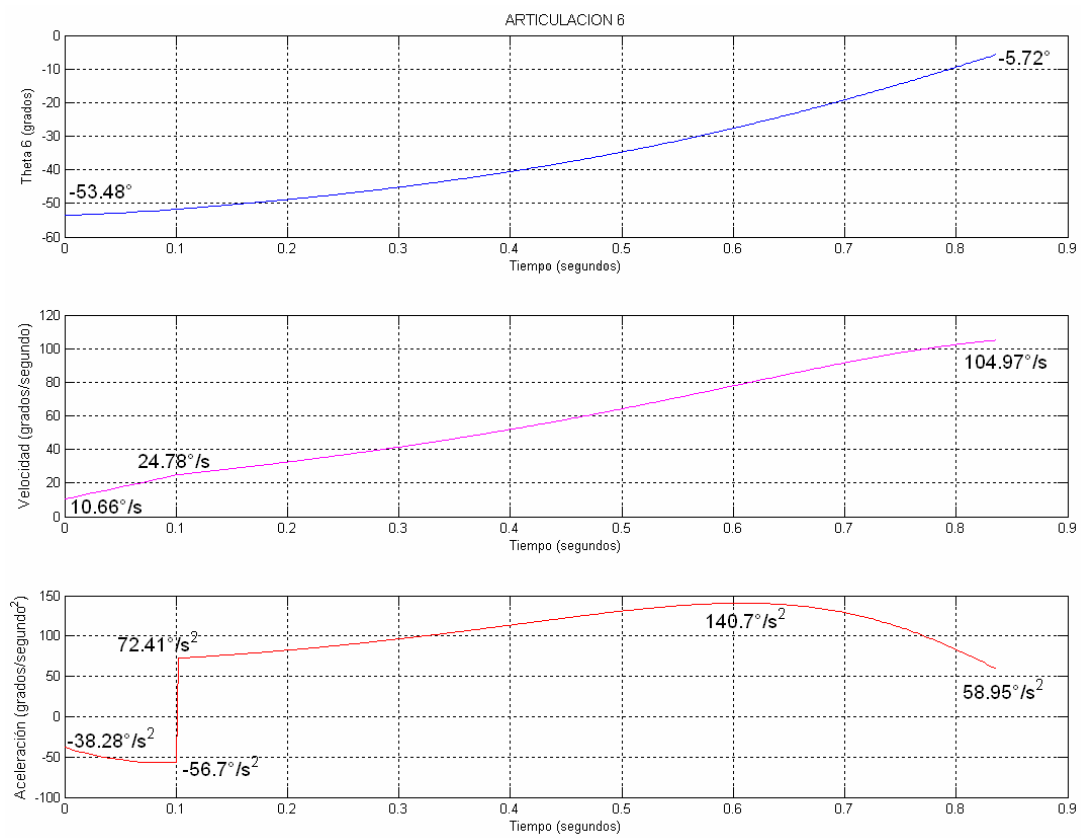


Figura 8.19. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 6. Tramo A-C

El segmento **C-D** se realiza en una trayectoria recta a velocidad constante V_s sin aceleración o desaceleración. Las gráficas se muestran de la figura 8.20 a la 8.24.

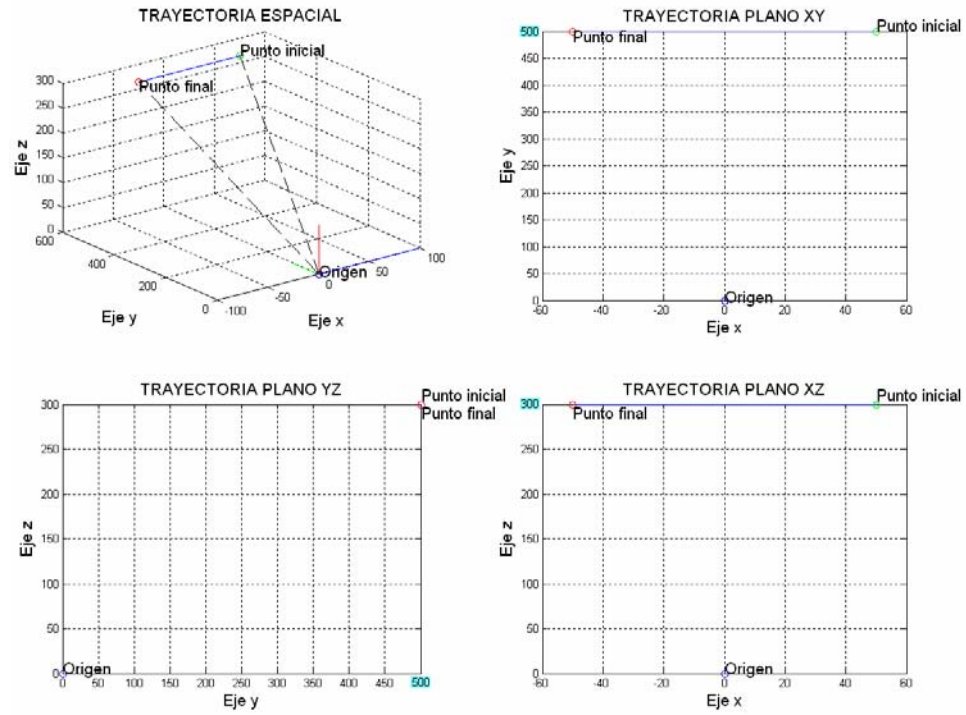


Figura 8.20. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Tramo C-D

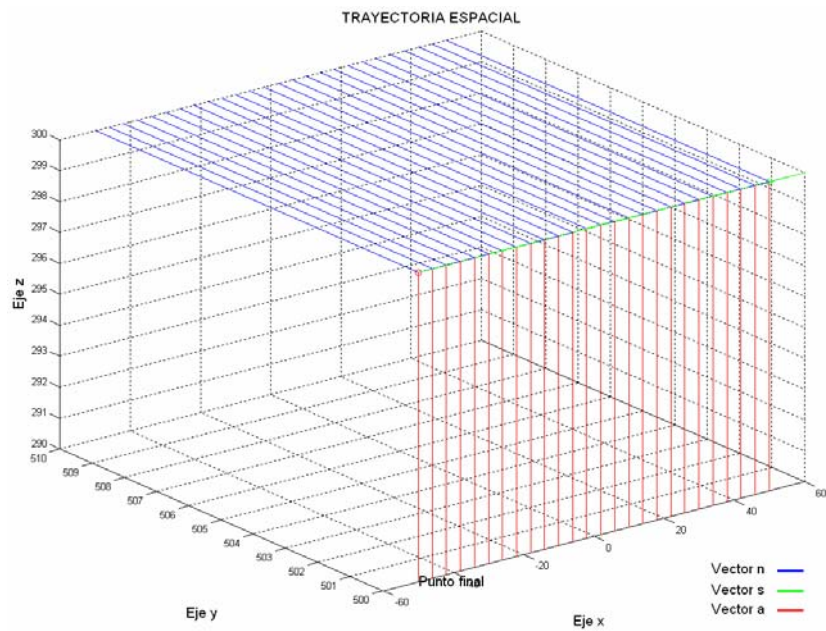


Figura 8.21. Orientaciones del extremo final del brazo (incluida la herramienta). Tramo C-D

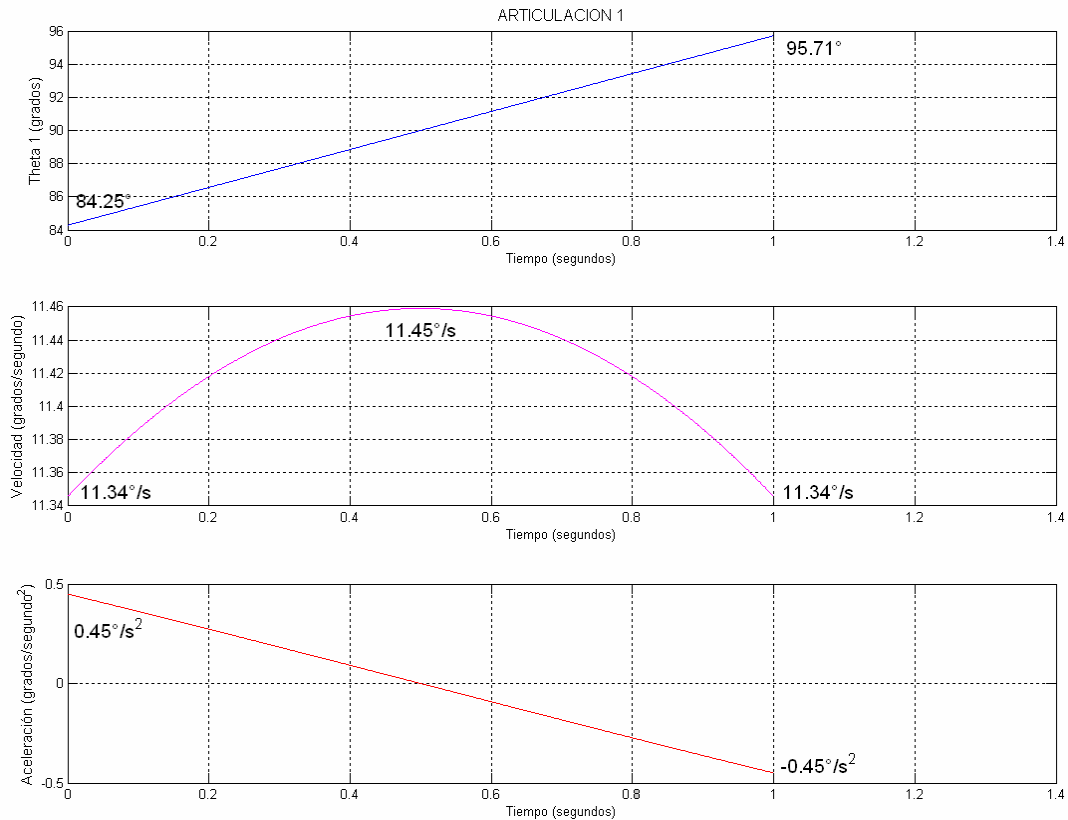


Figura 8.22. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 1. Tramo C-D

Es interesante ver lo que sucede en la transición del segmento de arco de circunferencia **A-C** al segmento en línea recta **C-D**. Cuando se recorre el segmento **A-C**, la muñeca se mueve con una velocidad de módulo constante V , debido a la rotación con velocidad angular ω , alrededor del centro de la pieza. Sin embargo, debido a este movimiento, también existe una componente de velocidad angular instantánea $\dot{\theta}$ alrededor del eje Z_0 del sistema coordenado de referencia (figura 8.13).

En el momento en que se finaliza el recorrido del segmento **A-C** y se comienza el recorrido del segmento recto **C-D**, la velocidad angular ω desaparece, la muñeca comienza una traslación rectilínea, y su velocidad V , disminuye instantáneamente su módulo al valor de la velocidad de soldadura V_s , manteniendo una orientación constante (eje X_0), quedando solo la componente de velocidad

angular instantánea $\dot{\theta}$, la cual depende ahora de la velocidad de soldadura V_s y del radio de rotación instantáneo R (figura 8.23).

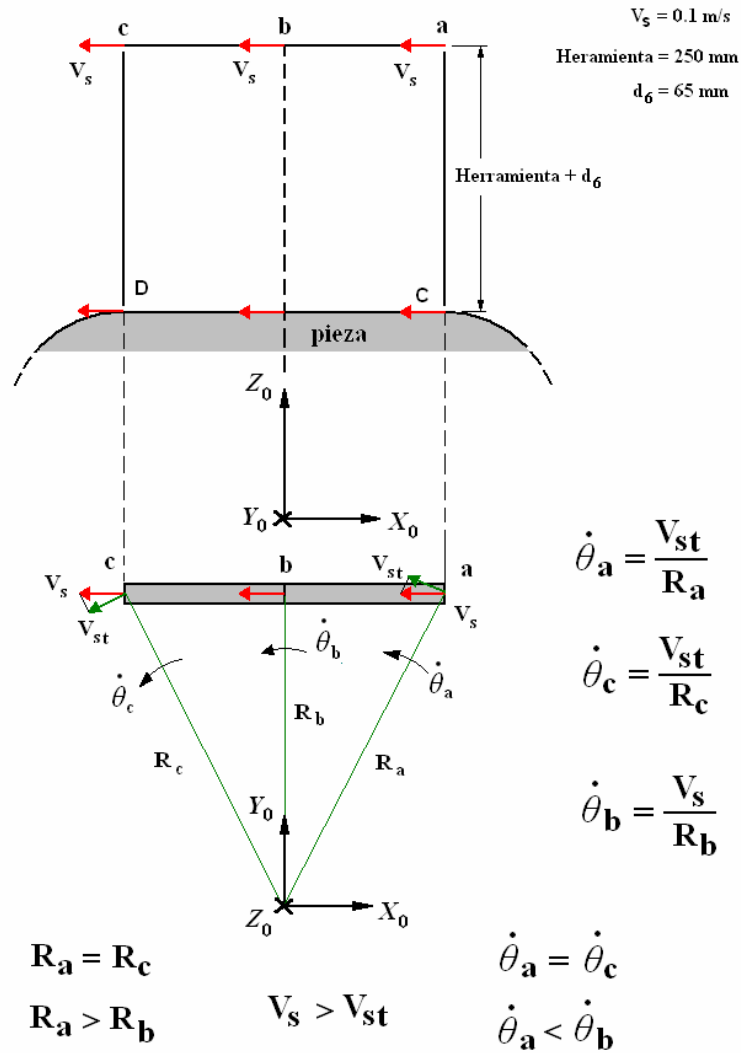


Figura 8.23. Velocidades de la muñeca en tres puntos del recorrido del segmento C-D

En la figura 8.22 se puede apreciar como la curva de posición angular para la articulación 1 mantiene su continuidad al comienzo del segmento C-D (en el valor **84.25°**, al final del segmento A-C (ver figura 8.12)), terminando en **95.71°** al final de este. Sin embargo, para las curvas de velocidad angular existe una disminución desde **78.37°/s** hasta **11.34°/s**. Esta caída instantánea es consecuencia de la desaparición de

la velocidad angular ω y la disminución del módulo de la velocidad de la muñeca, V a V_s (explicado anteriormente).

Debido a la colocación simétrica de la pieza con respecto al eje Y_0 , la articulación 1 alcanza un máximo de velocidad angular de $11.45^\circ/\text{s}$, cuando la muñeca tiene una velocidad lineal V_s en la mitad del recorrido, punto **b** de simetría (figura 8.23), finalizando nuevamente en $11.34^\circ/\text{s}$, lo que representa una variación pequeña y explica los valores bajos de aceleración angular, que para este segmento (C-D), disminuye linealmente de $0.45^\circ/\text{s}^2$ a $-0.45^\circ/\text{s}^2$, haciéndose nula en la mitad del recorrido (figura 8.22).

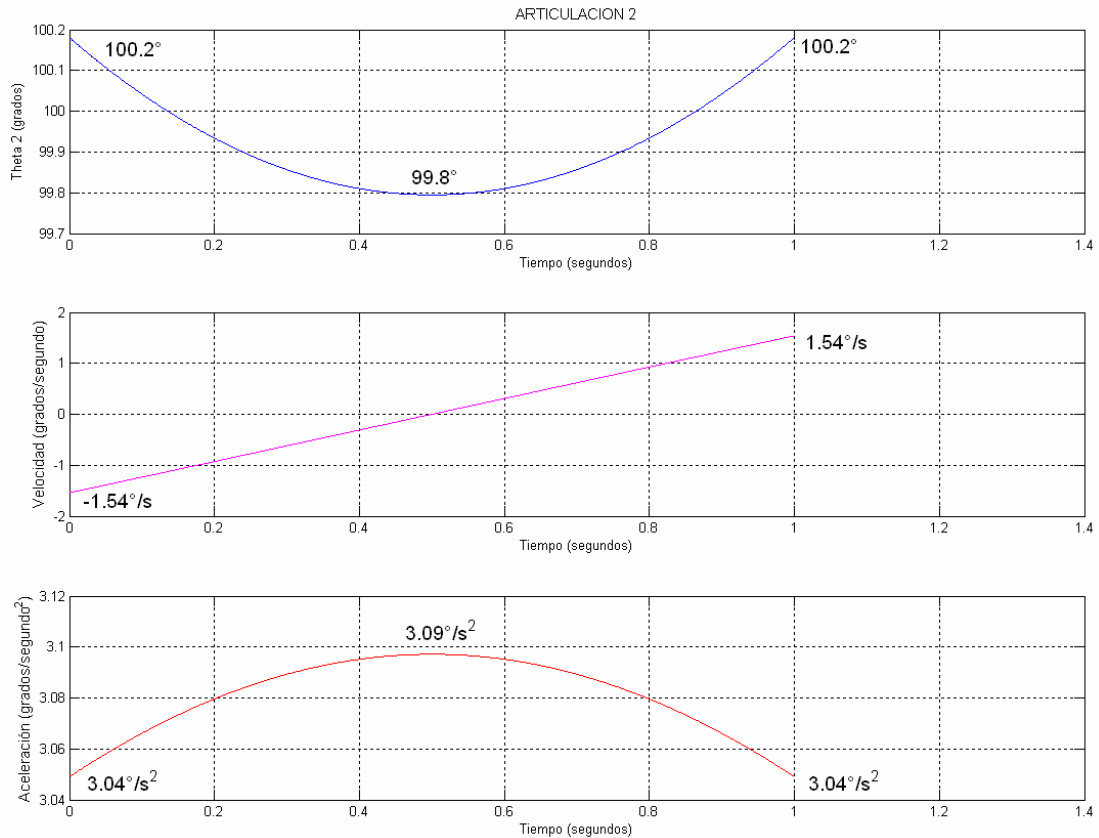


Figura 8.24. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 2. Tramo C-D

Para las articulaciones 2 y 3 se observa, igualmente, el comportamiento simétrico en las curvas de posición y aceleración angular, con variaciones pequeñas

en la posición, en la velocidad y valores de aceleración prácticamente constantes (figuras 8.24 y 8.25). Las curvas de posición angular también son continuas respecto a las del segmento A-C (en 100.2° y 3.72° , para la articulación 2 y 3 respectivamente). Como ocurre en la articulación 1, el comportamiento simétrico de las curvas se debe a que, en las posiciones inicial y final del segmento C-D, las coordenadas de la muñeca equidistan del origen del sistema de coordenadas de referencia y tienen los mismos valores de velocidad lineal, además, son simétricas respecto al eje Y_0 , lugar donde se alcanzan valores máximos o mínimos, de posición y aceleración. Para estas articulaciones (2 y 3) las velocidades angulares varían linealmente cambiando su dirección en la mitad del trayecto C-D.

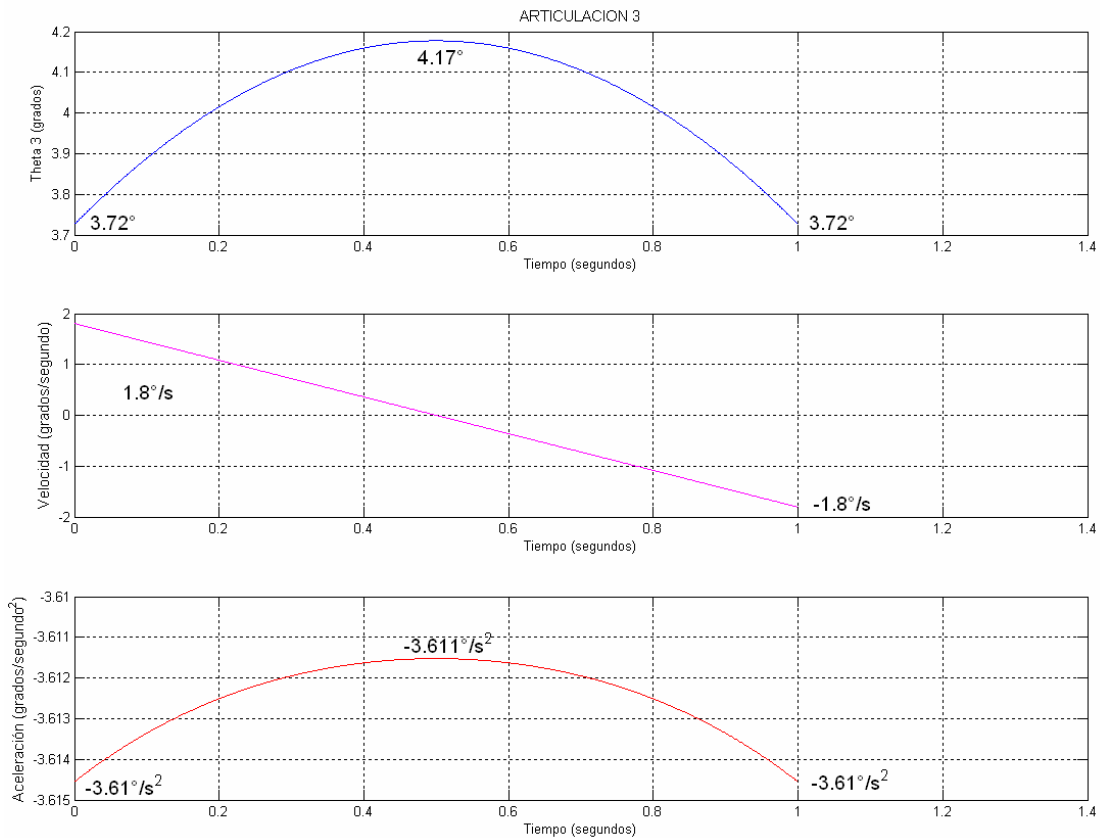


Figura 8.25. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 3. Tramo C-D

Al final del segmento A-C las articulaciones 2 y 3 terminan con velocidades angulares de $-10.75^\circ/\text{s}$ y $12.48^\circ/\text{s}$ respectivamente. Al comienzo del segmento C-D

estos valores caen a $-1.54^\circ/\text{s}$ y $1.8^\circ/\text{s}$. Como se explicó en párrafos anteriores, las velocidades angulares de estas articulaciones (2 y 3) dependen, en este caso, de una componente vertical de la velocidad de la muñeca V_z , que se hace nula en el punto **C**, quedando solo una componente normal V_n (figura 8.26). Sin embargo, en este mismo punto **C**, el módulo de la velocidad lineal de la muñeca, cae instantáneamente de un valor V a V_s , lo que reduce notablemente la componente de velocidad normal V_n , al comienzo del segmento **C-D**, lo que trae como consecuencia el salto en los valores de las velocidades angulares.

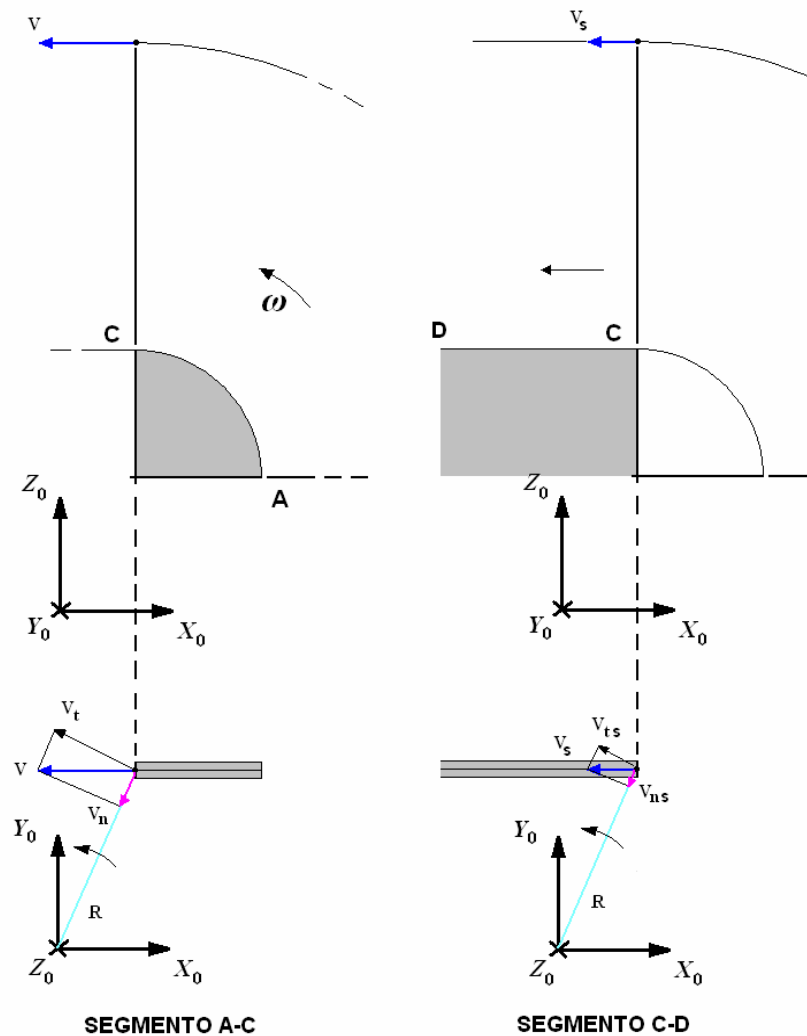


Figura 8.26. Cambio instantáneo en la velocidad lineal de la muñeca V en el punto **C**

Las gráficas de las articulaciones 4, 5 y 6 (figuras 8.27, 8.28 y 8.29) muestran como se mantiene la continuidad de sus posiciones angulares, al inicio del segmento **C-D** con respecto al final del segmento **A-C** (ver figuras 8.17, 8.18 y 8.19). En este trayecto (**C-D**) la articulación 4 no varía su posición, por lo que la velocidad angular es nula y cae de forma instantánea desde un valor de $-110.3^\circ/\text{s}$. La aceleración angular es igualmente nula.

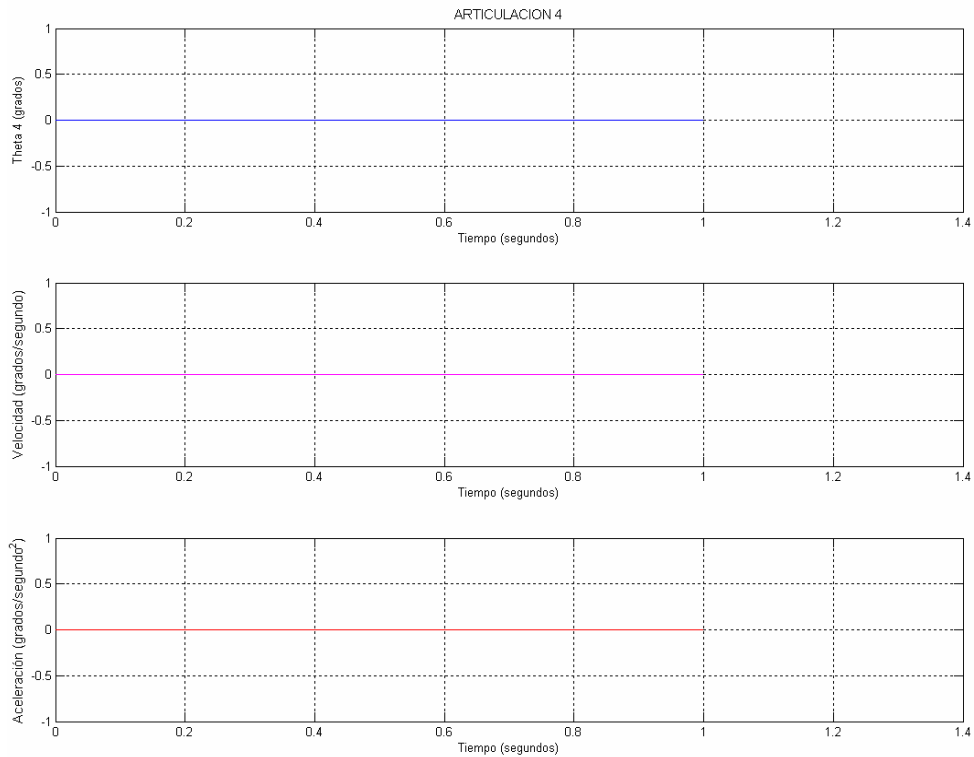


Figura 8.27. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 4. Tramo C-D

Las curvas de las articulaciones 5 y 6 (figuras 8.28 y 8.29) se pueden analizar de la misma forma, debido a la simetría del movimiento durante el recorrido del segmento **C-D**. También se observa como los valores de las velocidades y aceleraciones angulares no varían de manera considerable.

Es importante notar los altos valores de velocidad y aceleración angular que alcanzan las articulaciones del brazo robótico durante el movimiento, algunos en el orden de $110^\circ/\text{s}$ y $200^\circ/\text{s}^2$ respectivamente, en el segmento **A-C**. Esto depende, en

gran medida, de factores tales como: la geometría de la pieza (en este caso, un arco de circunferencia), la longitud de la herramienta de soldadura y la velocidad que debe alcanzar la muñeca, para realizar la soldadura con un módulo de velocidad específico.

Aún así, la mayoría de los robots modernos tienen la capacidad de moverse a grandes velocidades y soportar grandes aceleraciones, según lo requiera la aplicación. La correcta interpretación y empleo de los resultados obtenidos permite, desde el punto de vista del proceso, mejorar la eficiencia realizando modificaciones de la posición de la pieza respecto al robot o utilizando una herramienta más adecuada, y desde el punto de vista de diseño, la construcción un robot más robusto o el empleo de motores y componentes que puedan suministrar la potencia necesaria con los niveles de control requeridos.

Las gráficas correspondientes al tramo **D-F** se muestran en el Apéndice 2.

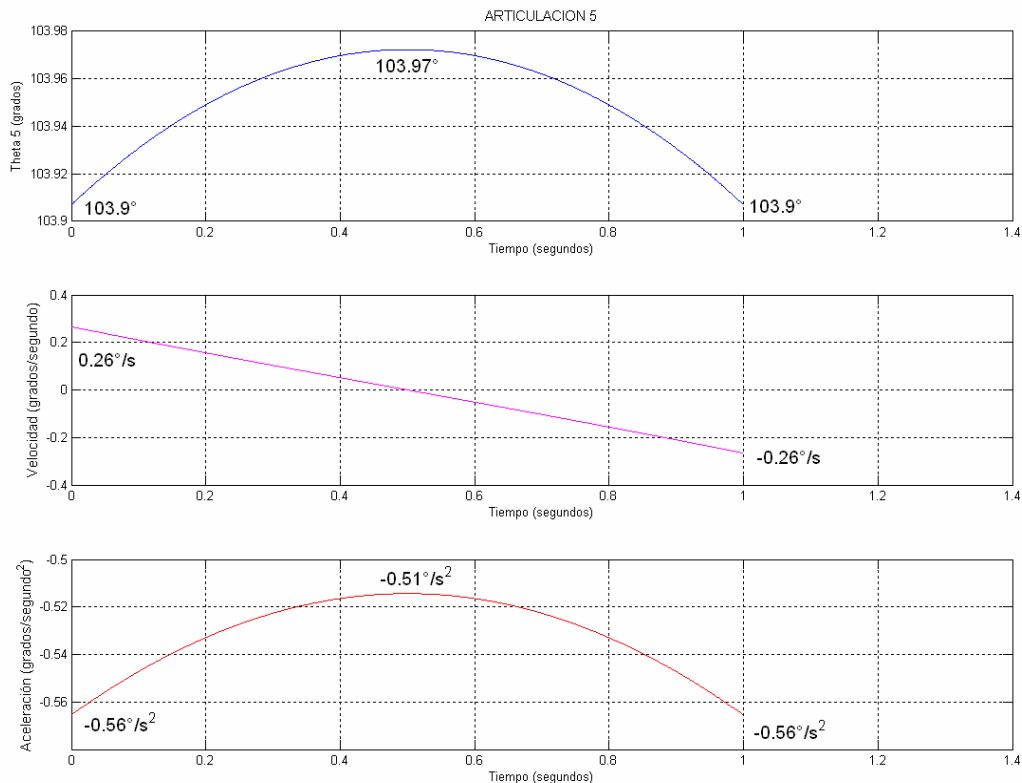


Figura 8.28. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 5. Tramo C-D

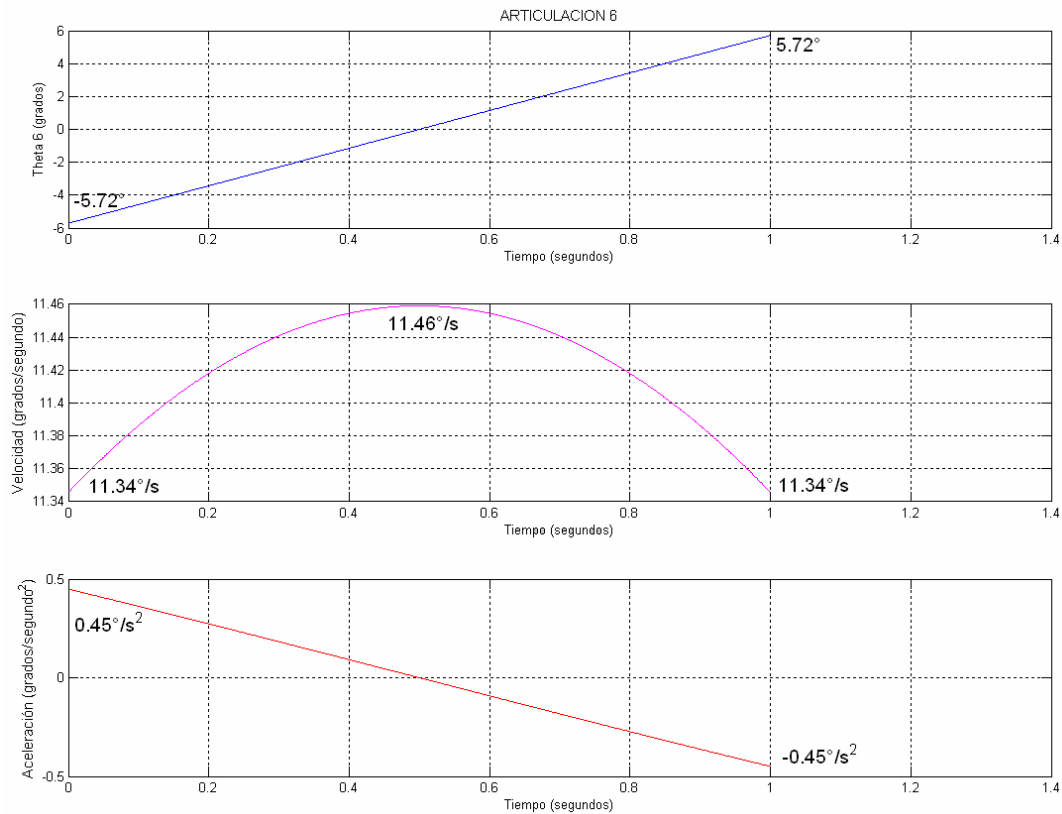


Figura 8.29. Posición, Velocidad y aceleración angular de la articulación 6. Tramo C-D

Ejemplo 8.1.2

Se instala una herramienta en el extremo del brazo de un robot ABB IRB-140, para realizar el corte por plasma de una plancha de acero de **5 mm** de espesor, la cual está colocada a una altura de **200 mm**. La velocidad de avance para el corte es de **3,6 m/min** (0.06 m/s) y el tiempo de aceleración es **0.08** segundos. La longitud de la herramienta es de **250 mm**. Las dimensiones de la pieza requerida se muestran en la figura 8.30a y las coordenadas de los puntos por donde pasa la herramienta de corte se muestran en la figura 8.30b.

Para analizar este caso, se utilizan los programas **cinem_inver_r.m** y **cin_inv_curv.m**, para los segmentos **A-B** y **B-D** respectivamente. En las figuras 8.31

y 8.32 se muestra como introducir los datos, a través la interfaz de usuario, en cada programa.

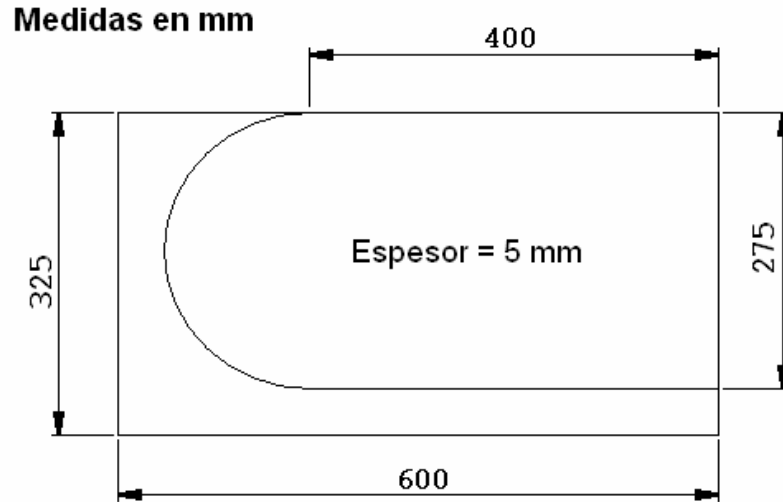


Figura 8.30a. Dimensiones de la plancha de acero y de la pieza a cortar

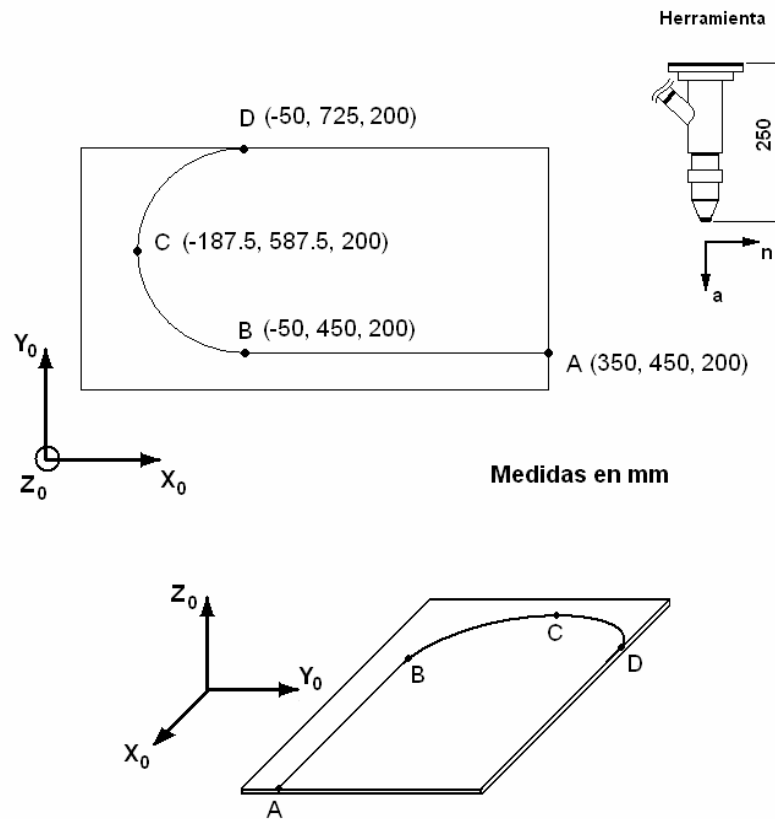


Figura 8.30b. Coordenadas de los puntos por donde pasa la herramienta de corte

La herramienta comienza a hacer el corte en el punto **A** de coordenadas (350, 450, 200) y llega al punto **B** (-50, 450, 200), completando el segmento recto **A-B**. Sin detenerse, continúa el recorrido y completa la semicircunferencia, del segmento **B-D**, en el punto **D** de coordenadas (-50, 725, 200).

The screenshot shows the 'cinem_inver_r' software window with the following sections and values:

- Parametros del brazo:**
 - a1: 70, a2: 360, a3: 0
 - d1: 352, d4: 380, d6: 65
 - alfa1: -90, alfa2: 0, alfa3: 90
- Posicion:**

	X	Y	Z	
Inicial	350	450	200	mm
Final	-50	450	200	mm
- Datos cinematicos:**
 - Velocidad: 0.06 m/s
 - Tiempo acel.: 0.08 seg.
- Orientacion Vector a:**

	X	Y	Z
Inicial	0	0	-1
Final	0	0	-1
- Angulo giro Vector n:**
 - Inicial: 0 Grados
 - Final: 0 Grados
- Otros parametros:**
 - Alc.: 810 mm
 - Herr.: 250 mm
- Tramos:**
 - Acel.: 1
 - Desacel.: 0
- Orientacion Vector n:**

	X	Y	Z
Ind. no	1	1	0
Ind. nf	1	1	0

At the bottom, there are buttons for 'Calcular', 'Borrar', and a dropdown menu 'Seleccionar grafica'. The 'Tiempo total' is displayed as 0 seg.

Figura 8.31. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B)

The screenshot shows the 'cin_inv_curv' window with the following data:

Parametros del brazo			
a1	70	a2	360
a3	0	d1	352
d4	380	d6	65
alfa1	-90	alfa2	0
alfa3	90		

Posicion			
	X	Y	Z
Inicial	-50	450	200 mm
Final	-50	725	200 mm
Interm.	-187.5	587.5	200 mm

Datos cinematicos	
Velocidad	0.06 m/s
Tiempo acel.	0.08 seg.

Orientacion Vector a			
	X	Y	Z
Inicial	0	0	-1
Final	0	0	-1

Orientacion Vector n			
	X	Y	Z
Ind. no	1	1	0
Ind. nf	1	1	0

Tramos	
Acel.	0
Desacel.	1

Otros parametros	
Alc.	810 mm
Herr.	250 mm
Indic. N	0

Buttons: Calcular, Seleccionar grafica, Borrar

Results:

Tiempo total:	0 seg.
Radio:	0 mm

Centro	
X:	0
Y:	0
Z:	0

Figura 8.32. Introducción de los datos en el programa cin_inv_curv.m para analizar el segmento (B-D)

SEGMENTO A-B	Seleccionar grafica Tiempo total: 6.70 seg.
SEGMENTO B-D	Tiempo total: 7.32 seg. Radio: 137.5 mm Centro X: -50 Y: 587.5 Z: 200

Figura 8.33. Tiempos parciales de recorrido para los segmentos A-B y B-D

Los tiempos parciales para cada segmento, así como el centro y radio de la trayectoria **B-D**, se muestran en la figura 8.33 y el tiempo total de la operación de corte es de **14.02** segundos. Las graficas de la trayectoria espacial y de los vectores de orientación **n**, **s** y **a**, así como las de posición, velocidad y aceleración angular de las articulaciones, se muestran en el Apéndice 3.

Ejemplo 8.1.3

El robot ABB IRB-140 se programa para ensamblar partes en equipos que se desplazan en una correa transportadora. Con una pinza adaptada en su extremo, de **150 mm** de longitud, el robot retira de una máquina dispensadora, la parte requerida, moviéndose en la trayectoria recta **A-B** y con orientación del vector **a**, en el extremo final del brazo, constante,. Luego, se desplaza hasta el punto **C**, donde la parte queda orientada correctamente para ser colocada en el equipo. Este cambio de orientación se realiza durante el recorrido **B-C**. Finalmente, se coloca la parte en el equipo, completando el segmento **C-D** (figura 8.34).

La velocidad lineal empleada por el robot para retirar o colocar la parte en el equipo, así como del dispensador, es de **70 mm/s** (0.07 m/s). La velocidad para moverse del punto **B** al **C** es de **140 mm/s** (0.14 m/s). El tiempo de aceleración empleado para cada recorrido es de **0.06** segundos. Para cada segmento (**A-B**, **B-C** y **C-D**), hay un tramo de aceleración y desaceleración, al inicio y final del recorrido, respectivamente. La introducción de los datos en el programa utilizado, **cinem_inver-r.m**, se muestran en las figuras 8.35, 8.36 y 8.37, para cada segmento.

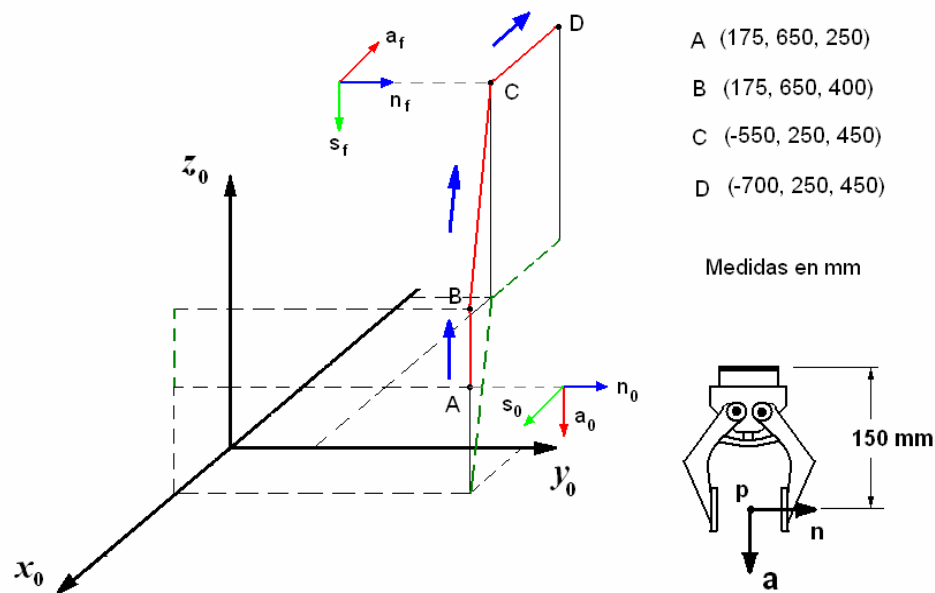


Figura 8.34. Coordenadas de los puntos que recorre el extremo de la pinza (punto 1)

cinem_inver_r

Parametros del brazo						Posicion			
	a1	a2	a3	d1	d4	d6	X	Y	Z
Inicial	70	360	0	352	380	65	175	650	250 mm
Final	-90	0	90				175	650	400 mm

Datos cinematicos		Orientacion Vector a			Angulo giro Vector n		
		X	Y	Z			
Velocidad	0.07 m/s	Inicial	0	0	-1	Inicial	0 Grados
Tiempo acel.	0.06 seg.	Final	0	0	-1	Final	0 Grados

Otros parametros		Tramos		Orientacion Vector n				
				X	Y	Z		
Alc.	810 mm	Acel.	1	Ind. no	1	0	1	0
Herr.	150 mm	Desacel.	1	Ind. nf	1	0	1	0

Tiempo total: 0 seg.

Figura 8.35. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B)

cinem_inver_r

Parametros del brazo						Posicion			
	a1	a2	a3	d1	d4	d6	X	Y	Z
Inicial	70	360	0	352	380	65	175	650	400 mm
Final	-90	0	90				-550	250	450 mm

Datos cinematicos		Orientacion Vector a			Angulo giro Vector n		
		X	Y	Z			
Velocidad	0.14 m/s	Inicial	0	0	-1	Inicial	0 Grados
Tiempo acel.	0.06 seg.	Final	-1	0	0	Final	0 Grados

Otros parametros		Tramos		Orientacion Vector n				
				X	Y	Z		
Alc.	810 mm	Acel.	1	Ind. no	1	0	1	0
Herr.	150 mm	Desacel.	1	Ind. nf	1	0	1	0

Tiempo total: 0 seg.

Figura 8.36. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (B-C)

cinem_inver_r

Parametros del brazo

a1: 70 a2: 360 a3: 0
d1: 352 d4: 380 d6: 65
alfa1: -90 alfa2: 0 alfa3: 90

Posicion

	X	Y	Z	
Inicial	-550	250	450	mm
Final	-700	250	450	mm

Datos cinematicos

Velocidad: 0.07 m/s
Tiempo acel.: 0.06 seg.

Orientacion Vector a

	X	Y	Z
Inicial	-1	0	0
Final	-1	0	0

Angulo giro Vector n

Inicial: 0 Grados
Final: 0 Grados

Otros parametros

Alc.: 880 mm
Herr.: 150 mm

Tramos

Acel.: 1
Desacel.: 1

Orientacion Vector n

	X	Y	Z
Ind. no	1	0	1
Ind. nf	1	0	1

Articulacion 6

Tiempo total: 0 seg.

Figura 8.37. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (C-D)

Los tiempos parciales en que se recorren los segmentos se muestran en la figura 8.38.

Segmento A-B	Seleccionar grafica	Tiempo total: 2.22 seg.
Segmento B-C	Seleccionar grafica	Tiempo total: 6.00 seg.
Segmento C-D	Seleccionar grafica	Tiempo total: 2.22 seg.

Figura 8.38 Tiempos parciales para los recorridos A-B, B-C y C-D

En el Apéndice 4 se muestran las gráficas correspondientes a este ejemplo.

Ejemplo 8.1.4

Se adapta una pinza para realizar soldadura por punto, a un robot FANUC serie R-2000iA/165 F. Las coordenadas de los puntos donde se hará la soldadura, así como la orientación requerida de la herramienta, se muestran en la figura 8.39. Primero, el Brazo robótico hace un punto de soldadura en el punto **A** y luego desplaza la pinza hasta el punto **B**, en una trayectoria recta con velocidad lineal constante de **0.08 m/s**. El tiempo de aceleración es de **0.16 segundos**. Entre los puntos del recorrido, el robot acelera y desacelera. La figura 8.40 muestra como introducir los datos, a través de la interfaz de usuario, en el programa **cinem_inver_r.m**, utilizado para estudiar este ejemplo.

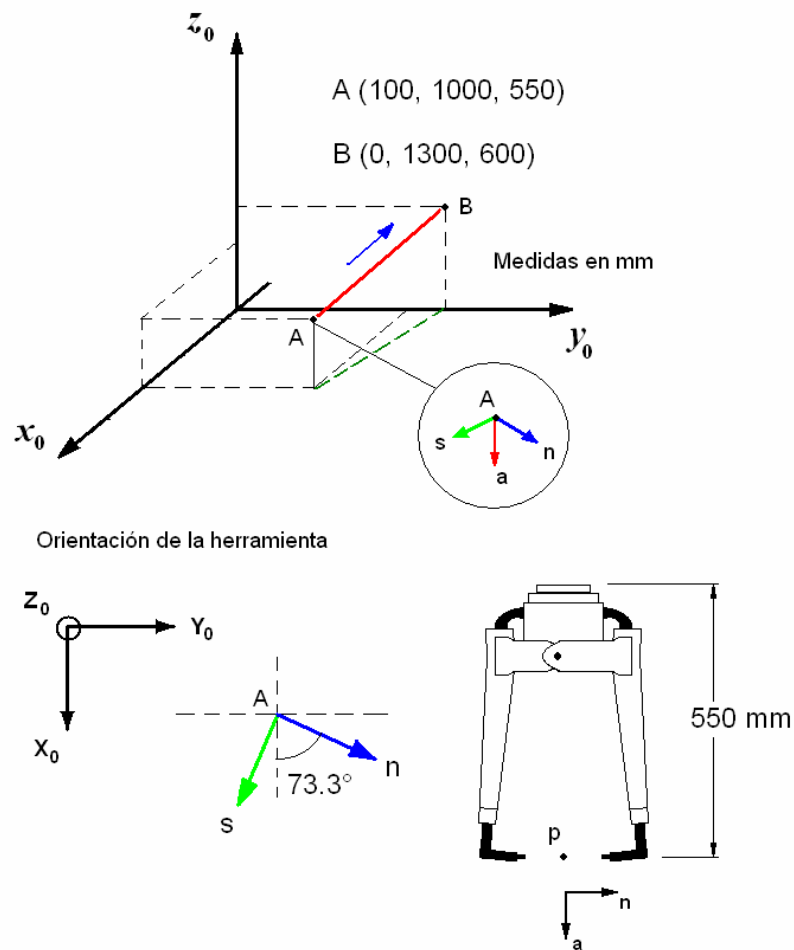


Figura 8.39. Coordenadas de los puntos de soldadura y orientación de la herramienta

cinem_inver_r

Parametros del brazo			Posicion		
	X	Y	Z		
a1	312	a2	1075	a3	225
d1	670	d4	1280	d6	215
alfa1	-90	alfa2	0	alfa3	90
Inicial			1000	1000	550 mm
Final			0	1300	600 mm

Datos cinematicos		Orientacion Vector a			Angulo giro Vector n		
	X	Y	Z				
Velocidad	0.08 m/s	Inicial	0	0	-1	Inicial	-73.3 Grados
Tiempo acel.	0.16 seg.	Final	0	0	-1	Final	-73.3 Grados

Otros parametros		Tramos		Orientacion Vector n			
	X	Y	Z				
Alc.	2550 mm	Acel.	1	Ind. no	0	0	0
Herr.	550 mm	Desacel.	1	Ind. nf	0	0	0

Tiempo total: 0 seg.

Figura 8.40. Introducción de los datos en el programa cinem_inver_r.m para analizar el segmento (A-B)

Tiempo de recorrido entre A y B

Tiempo total: 13.2 seg.

Figura 8.41 Tiempo de recorrido del segmento A-B

En la figura 8.41 se muestran el tiempo de recorrido. El tiempo total del trabajo de soldadura, dependerá, no solo del tiempo de movimiento, sino del tiempo requerido para hacer los puntos de soldadura. Las gráficas correspondientes a este ejemplo se muestran en el Apéndice 5. En las curvas de velocidad angular se pueden apreciar valores bajos, menores a $4^\circ/\text{s}$, con variaciones aún más pequeñas. Esto es

consecuencia de un movimiento rectilíneo que se realiza con una velocidad lineal de módulo constante bajo, lo que causa que el movimiento del brazo robótico sea suave y que el cambio de las posiciones angulares no se haga bruscamente. Como el tiempo de aceleración es alto, el aumento de la velocidad angular, en este tramo, se hace de manera gradual, por lo que el mayor valor de aceleración angular es de $-21.25^\circ/\text{s}^2$, y es alcanzado por la articulaciones uno y seis al final del recorrido (tramo de desaceleración).

Para una aplicación donde el trabajo se realiza sólo cuando el robot está detenido y éste tiene adaptada una herramienta de masa considerable, tiene sentido escoger, no sólo, un tiempo de aceleración alto, sino una velocidad de movimiento lineal baja. Así se evita que el robot realice esfuerzos innecesarios y logre posicionarse de manera mas precisa. En el tramo que se realiza a velocidad lineal constante se puede ver, en las gráficas del apéndice 5, como la aceleración cae a valores muy pequeños cercanos a cero, debido a las variaciones pequeñas de la velocidad angular.

Para movimientos, del extremo del brazo robótico, en trayectorias rectilíneas, con tramos de aceleración y desaceleración, las curvas de posición, velocidad y aceleración angular tendrán comportamientos muy similares a los de las curvas obtenidas en el análisis de este ejemplo.

Ejemplo 8.1.5

El robot FANUC serie R-2000iA/165 F se emplea para realizar la soldadura a tope de dos láminas de acero. La pieza será empleada como cubierta de protección. Ambas láminas tienen un radio de curvatura de **80 cm** (800 mm) y un espesor de **5 mm**. El cordón de soldadura se realizara por la parte interior de la pieza (figura 8.42). Se especifica una velocidad lineal de soldadura de **90 mm/s** (0.09 m/s) y un tiempo de aceleración de **0.12** segundos. La introducción de los datos en la interfaz de usuario del programa **cine_inve_curva.m** se muestra en la figura 8.43.

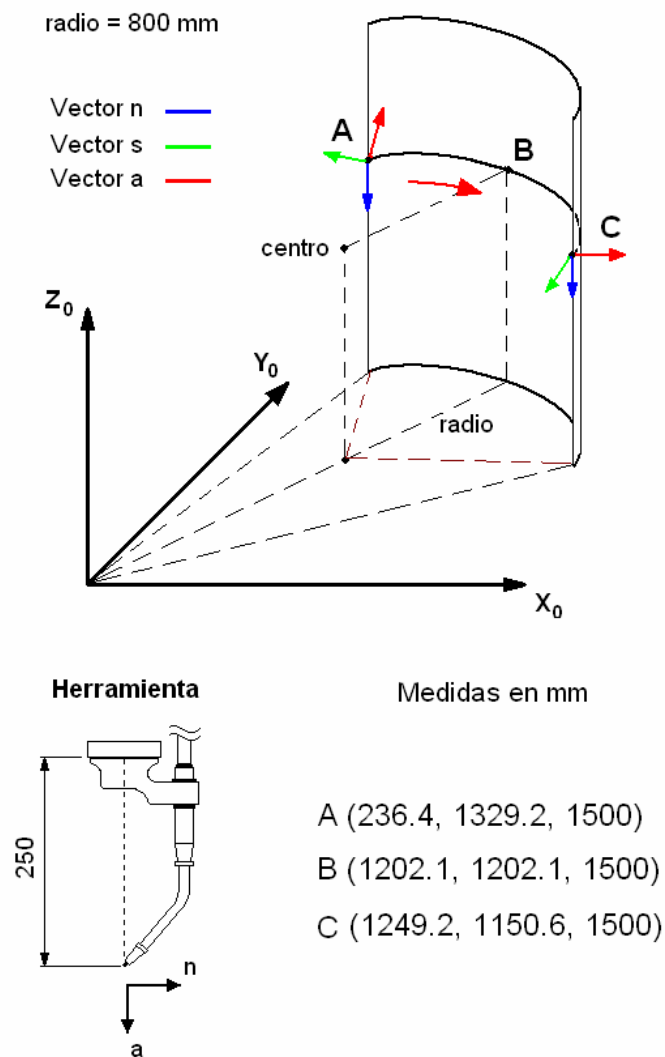


Figura 8.42. Coordenadas de los puntos por donde pasa el cordón de soldadura

Untitled

Parametros del brazo						Posicion			
			X	Y	Z				
a1	312	a2	1075	a3	225	Inicial	236.4	1329.2	1500 mm
d1	670	d4	1280	d6	215	Final	1202.1	1202.1	1500 mm
alfa1	-90	alfa2	0	alfa3	90	Interm.	1249.2	1150.6	1500 mm

Datos cinematicos		Otros parametros	
Calcular	Velocidad 0.09 m/s	Alc.	2550 mm
Borrar	Tiempo acel. 0.12 seg.	Herr.	250 mm
		vector a (int. / ext.)	1
		Ang. n y s	0 Grados

Tramos		Vector n		Tiempo total:		Centro	
Acel.	1	ind.	1	0	seg.	X:	0
Desacel.	1	x	0	Radio:	0 mm	Y:	0
		y	0	Seleccionar grafica		Z:	0
		z	-1				

Figura 8.43. Introducción de los datos en el programa cine_inve_curva.m para analizar el segmento (A-B)

El tiempo total empleado para realizar la soldadura es de **12.5 segundos** (figura 8.44)

Tiempo total:	12.5	seg.	X:	636.592
Radio:	799.023	mm	Centro Y:	637.619
Seleccionar grafica		Z:	1500	

Figura 8.44 Tiempo total del trabajo de soldadura

8.2 Comprobación de resultados

Como se estudió en capítulos anteriores, el análisis cinemático directo esta basado en el producto de Matrices de Transformación Homogénea, que permiten determinar la posición y orientación del extremo final del brazo robótico, dados un conjunto de valores de articulación. El análisis cinemático directo se basa en un Método Geométrico, para el cálculo de las primeras tres articulaciones y en la inversión de la sub matriz de rotación 0R_3 , a través del Método de Desacoplo Cinemático, para determinar las últimas tres articulaciones.

De esta forma, se pueden corroborar, a través del programa de análisis cinemático directo, **cinematica_directa_1**, los valores de las posiciones angulares de las articulaciones, obtenidos con los programas de análisis cinemático inverso: **cine_inve_curva.m**, **cin_inv_curv.m** y **cinem_inver_r.m**. Utilizando el ejemplo 8.1.1, podemos tomar los valores iniciales de las seis articulaciones, en el segmento A-C, (figuras 8.12, 8.14, 8.15, 8.17, 8.18 y 8.19) e introducirlos en el programa **cinematica_directa_1.m**.

Al calcular la matriz de brazo, se obtendrán las coordenadas para las orientaciones de los vectores **n**, **s** y **a**, las cuales coinciden con las orientaciones iniciales requeridas para orientar la herramienta de soldadura, en el punto **A** de ese mismo ejemplo (ejemplo 8.1.1). Las coordenadas de esos vectores son **n** (0, 1, 0), **s** (0, 0, -1), y **a** (-1, 0, 0). En la figura 8.45 se muestra la interfaz de usuario, del programa de análisis cinemático directo, con los valores iniciales de las articulaciones y las coordenadas de los vectores de orientación, del extremo final, obtenidos.

Esto se hizo de igual forma, para los valores finales de articulación, en el punto **C** del segmento A-C (Figura 8.46).

cinematica_directa_1

Articulacion i	Parametros Denavit-Hartenberg				Rango de articulacion	
	Theta i	Alfa i	ai	di	Minimo	Maximo
1	50.3	-90	70	352	-180	180
2	151.43	0	-360	0	0	200
3	-15.36	90	0	0	-190	500
4	59.10	90	0	380	-180	180
5	63.73	90	0	0	60	300
6	-53.48	0	0	65	-180	180

Coord.	Orientacion			Posicion
	Vector n	Vector s	Vector a	
X	0	0	-1	350.071
Y	1	0	0	499.96
Z	0	-1	0	250.445

Figura 8.45. Comprobación de los valores de las posiciones angulares iniciales de las articulaciones en el segmento A-C, a través del programa cinematica_directa_1.

cinematica_directa_1

Articulacion i	Parametros Denavit-Hartenberg				Rango de articulacion	
	Theta i	Alfa i	ai	di	Minimo	Maximo
1	84.25	-90	70	352	-180	180
2	100.2	0	-360	0	0	200
3	3.72	90	0	0	-190	50
4	0	90	0	380	-180	180
5	103.9	90	0	0	60	300
6	-5.72	0	0	65	-180	180

Coord.	Orientacion			Posicion
	Vector n	Vector s	Vector a	
X	0	1	0	50.3294
Y	1	0	0	500.042
Z	0	0	-1	549.895

Figura 8.45. Comprobación de los valores de las posiciones angulares finales de las articulaciones, a través del programa cinematica_directa_1.

Así, es posible validar los resultados de las posiciones angulares para las articulaciones, y que, de esta forma, puedan ser utilizados en los algoritmos de interpolación, que permiten calcular las velocidades y aceleraciones angulares de las articulaciones.

En internet se pueden encontrar diversos programas, que permiten realizar animaciones o simulaciones del movimiento de mecanismos robóticos o bien estudiar la cinemática directa. Sin embargo, estos no ofrecen la posibilidad de obtener resultados cinemáticos detallados en aplicaciones prácticas, relacionados con la posición, velocidad y aceleración angular de las articulaciones, y muchos de ellos, incluso, dependen de la introducción de datos cinemáticos para realizar estas animaciones. Aún así, son herramientas de utilidad que permiten ilustrar, de manera didáctica, el movimiento de un robot. Se pueden mencionar algunos como: RoboWorks, Makerob, Gwell (Graphical Workshop for Modelling and Simulating Robot Environments), RPG Kinematix 4.0, entre muchos otros.

Matlab también cuenta con un paquete de robótica, Matlab Robotic Tools, que a pesar de ser útil, solo permite analizar al robot PUMA 560. Otros programas más especializados pertenecen a las compañías fabricantes de robots y son comúnmente utilizados para realizar la programación y control de los movimientos.

CONCLUSIONES

Se determinaron, analizaron y sintetizaron el conjunto de herramientas matemáticas necesarias para establecer relaciones espaciales entre los distintos elementos de un brazo robótico, siendo la más importante la *Matriz de Transformación Homogénea* que permite representar de manera conjunta la posición y orientación de objetos en el espacio.

La representación de Denavit-Hartenberg y sus parámetros de articulación, permite establecer sistemas de coordenadas en cada elemento de un brazo robótico para posteriormente y a través del producto de las matrices de transformación homogénea, realizar el análisis cinemático directo determinando así la posición y orientación del extremo final del brazo dado un conjunto de valores angulares para las articulaciones.

Se estudiaron y aplicaron dos métodos para realizar el análisis cinemático inverso, *el Método Geométrico y el Método de Desacoplo Cinemático*, los cuales permiten calcular los valores de la variables articulares cuando el extremo del brazo robótico está en una posición y orientación específicas.

A pesar de no haber sido utilizadas en este Trabajo Especial de Grado, la *parametrización y reparametrización de curvas*, se plantearon como métodos alternos para la generación de trayectorias.

Se plantearon varios esquemas para la generación de trayectorias en el espacio y de las orientaciones del extremo final del brazo robótico, en función del tiempo. De igual forma se planteó el uso de algoritmos de interpolación para obtener expresiones de las velocidades y aceleraciones de las articulaciones.

La metodología de análisis cinemático de mecanismos robóticos diseñada, permite estudiar de manera ordenada y sistemática una gran variedad de modelos de brazos robóticos existentes o en etapa de diseño.

Se desarrollaron una serie de programas en lenguaje Matlab que permiten aplicar la metodología diseñada y hacer el análisis cinemático de brazos robóticos, dentro de un rango de aplicaciones reales prácticas. De igual forma, uno de los programas desarrollados, permite la comprobación de los resultados obtenidos.

RECOMENDACIONES

Esta metodología, así como las herramientas estudiadas y desarrolladas para su aplicación, debe ser entendida como una forma más para analizar cinemáticamente un mecanismo robótico.

Complementar el análisis cinemático inverso estudiando el método geométrico con más detalle para que este se pueda aplicar a un mayor número de casos de posicionamiento espacial de la muñeca y de igual forma evaluar la posibilidad de utilizar o desarrollar nuevos métodos de análisis cinemático inverso.

Ampliar el estudio sobre la generación de trayectorias en el espacio para obtener más variedad y abarcar un rango mayor de aplicaciones prácticas del brazo robótico.

Realizar la depuración, modificación y complementación de los códigos de los programas desarrollados para agregar nuevas funciones, ampliar su rango de aplicación, optimizar la implementación de los algoritmos de interpolación y mejorar la presentación de los resultados obtenidos.

Incluir un código o programa que permita representar gráficamente y en el espacio la posición de las articulaciones y de los elementos del brazo robótico, en reposo o en movimiento.

Mejorar las características de la interfaz de usuario de los programas desarrollados para lograr que estos sean más intuitivos y sencillos de utilizar.

APENDICE 1

A.1 Cálculo del centro de rotación C para una trayectoria de arco de circunferencia perteneciente a un plano cualquiera en el espacio (sección 6.8.1.2).

Cuando el extremo del brazo robótico se desplaza a lo largo de una trayectoria de arco de circunferencia en el espacio, esta se puede generar con solo conocer tres puntos de la misma: el punto inicial **A**, el punto final **B** y un tercer punto **D** (Figura A1.1). Con estos tres puntos se puede determinar el vector normal **N** y la ecuación del plano al cual pertenece esta trayectoria.

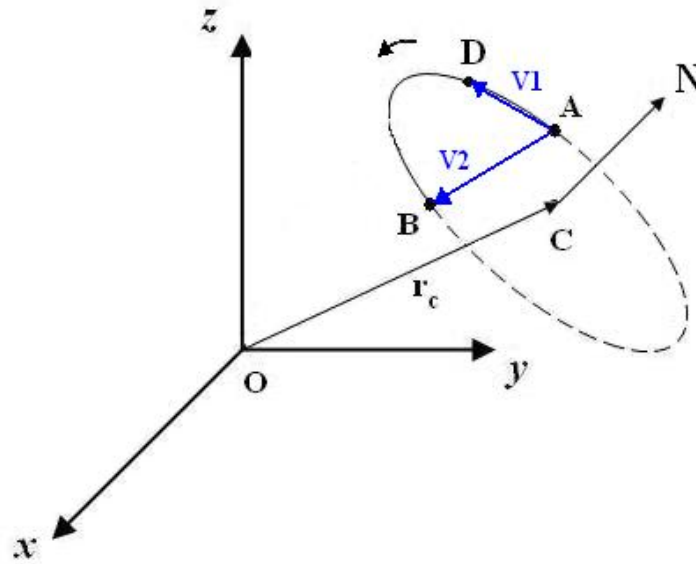


Figura A1.1. Vector normal al plano al cual pertenece la trayectoria de arco de circunferencia

El vector normal **N** se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{AD} = (X_D - X_A, Y_D - Y_A, Z_D - Z_A) = \mathbf{V1} \quad (\text{A1.1})$$

$$\mathbf{AB} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A) = \mathbf{V2}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{AD} \times \mathbf{AB} = \mathbf{V1} \times \mathbf{V2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V1x & V1y & V1z \\ V2x & V2y & V2z \end{vmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

Las componentes de este vector normal corresponden a los coeficientes **a**, **b** y **c** de la ecuación del plano:

$$\mathbf{a}X + \mathbf{b}Y + \mathbf{c}Z + \mathbf{d} = 0$$

donde $\mathbf{d} = -\mathbf{a} X_A - \mathbf{b} Y_A - \mathbf{c} Z_A$

Por cursos de geometría sabemos que el centro **C** de una circunferencia esta en la intersección de las rectas perpendiculares a cada una de las cuerdas generadas por los puntos A, D y D, B, pasando estas por el punto medio de cada una de las cuerdas (Figura A1.2).

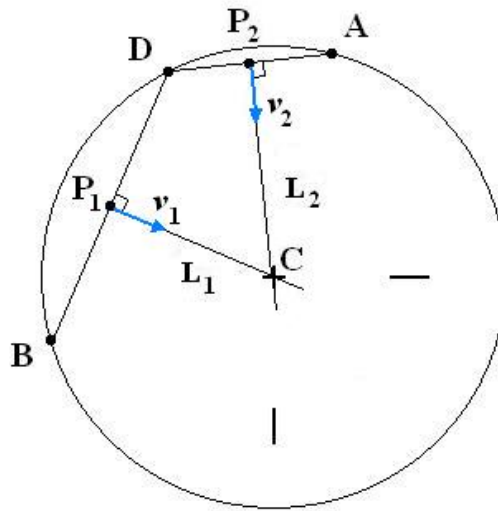


Figura A1.2. Centro de la circunferencia calculado geoméricamente.

Estos puntos medios se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_1 = \left(\frac{X_B + X_D}{2}, \frac{Y_B + Y_D}{2}, \frac{Z_B + Z_D}{2} \right) = (x_1, y_1, z_1) \quad (\text{A1.3})$$

$$\mathbf{P}_2 = \left(\frac{X_A + X_D}{2}, \frac{Y_A + Y_D}{2}, \frac{Z_A + Z_D}{2} \right) = (x_2, y_2, z_2)$$

El cálculo ahora consiste en encontrar las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 perpendiculares a estas cuerdas, que pasan por los puntos medios y que son

paralelas al plano. En la intersección de estas rectas se encuentra el centro de rotación **C** (Figura A1.2).

Los vectores directores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de cada una de estas rectas (L_1 y L_2) son perpendiculares a los vectores que definen la dirección de B a D y de A a D, respectivamente, así como al vector normal **N**. Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son unitarios. Calculando los vectores **BD** y **AD** y aplicando la definición del producto escalar entre vectores perpendiculares tenemos:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{BD} = 0 \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{AD} = 0 \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (\text{A1.5})$$

donde

$$\mathbf{BD} = (X_D - X_B, Y_D - Y_B, Z_D - Z_B)$$

$$\mathbf{AD} = (X_D - X_A, Y_D - Y_A, Z_D - Z_A)$$

y

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

los cuales son incógnitas en los sistemas de ecuaciones establecidos en las ecuaciones A1.4 y A1.5. Como estos sistemas tienen más incógnitas que ecuaciones hay que definir una tercera ecuación para cada sistema que resulta del producto escalar entre los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y los vectores **DA** y **DB**, respectivamente (figura A1.3).

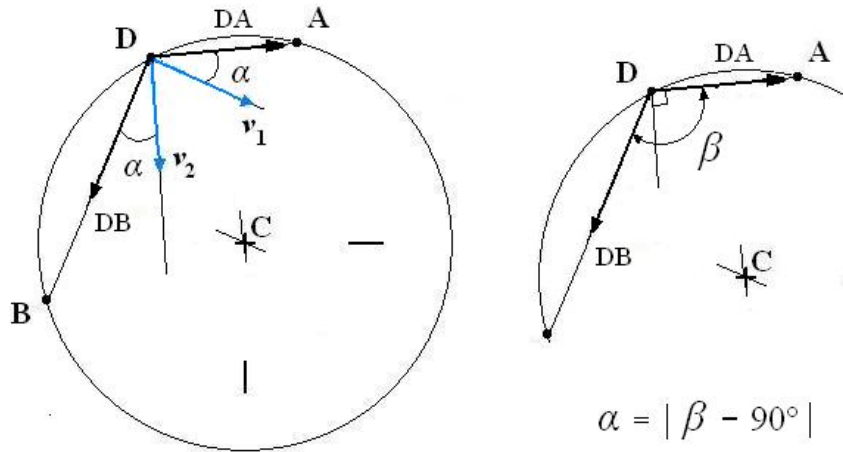


Figura A1.3. Vectores para determinar una tercera ecuación para cada sistema.

De los productos escalares resultan:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{DA} = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{DA}| \cos \alpha \quad (\text{A1.6})$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{DB} = |\mathbf{v}_2| |\mathbf{DB}| \cos \alpha \quad (\text{A1.7})$$

donde α se calcula a partir del ángulo β formado por los vectores $\mathbf{DA}$ y $\mathbf{BD}$ y el ángulo de 90° del vector $\mathbf{v}_1$ o $\mathbf{v}_2$. De esta forma se completan los sistemas para tener tres ecuaciones con tres incógnitas. Los valores obtenidos de a_1 , b_1 , c_1 y a_2 , b_2 , c_2 serán reemplazados en las ecuaciones paramétricas de L_1 y L_2 .

Una vez obtenidas las ecuaciones paramétricas para ambas rectas, se igualan sus componentes y se establece un nuevo sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, t_1 y t_2 , cuya solución permite encontrar las coordenadas x , y y z del centro de rotación $\mathbf{C}$. El sistema de ecuaciones tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_1 t_1 - a_2 t_2 &= x_2 - x_1 \\ b_1 t_1 - b_2 t_2 &= y_2 - y_1 \\ c_1 t_1 - c_2 t_2 &= z_2 - z_1 \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

APENDICE 2

SEGMENTO D-F (Ejemplo 8.1.1)

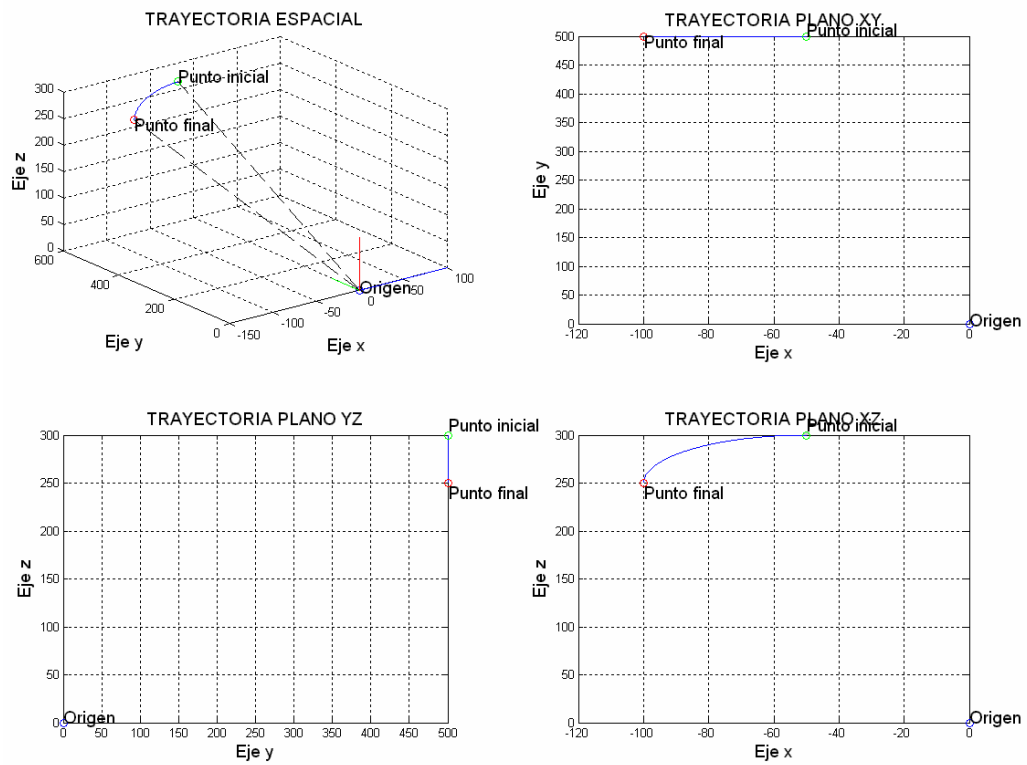


Figura A2.1. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento D-F

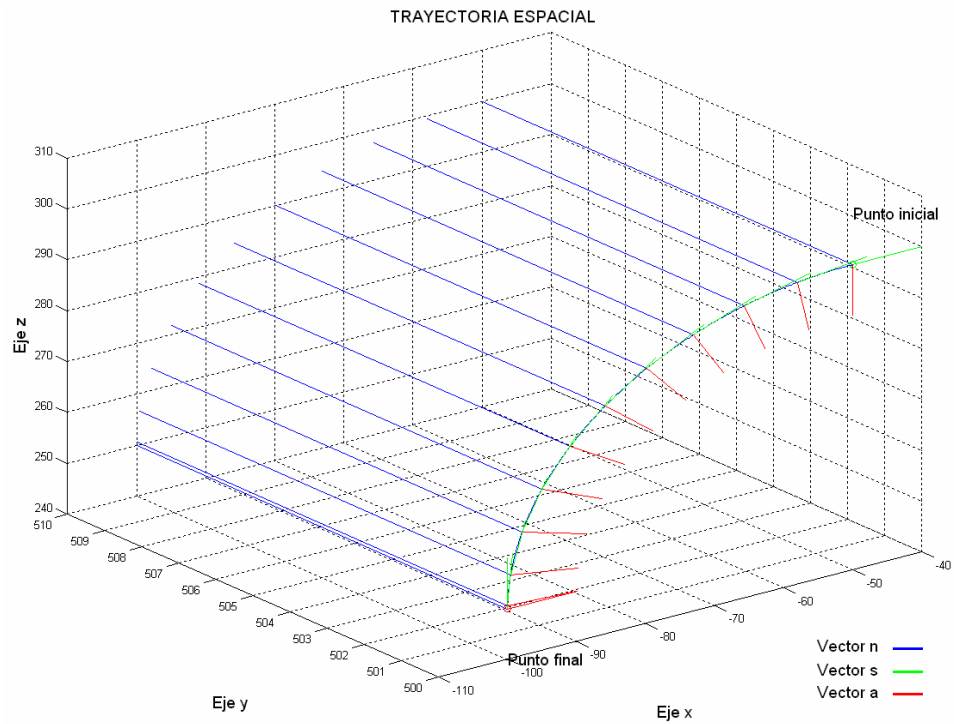


Figura A2.2. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento D-F

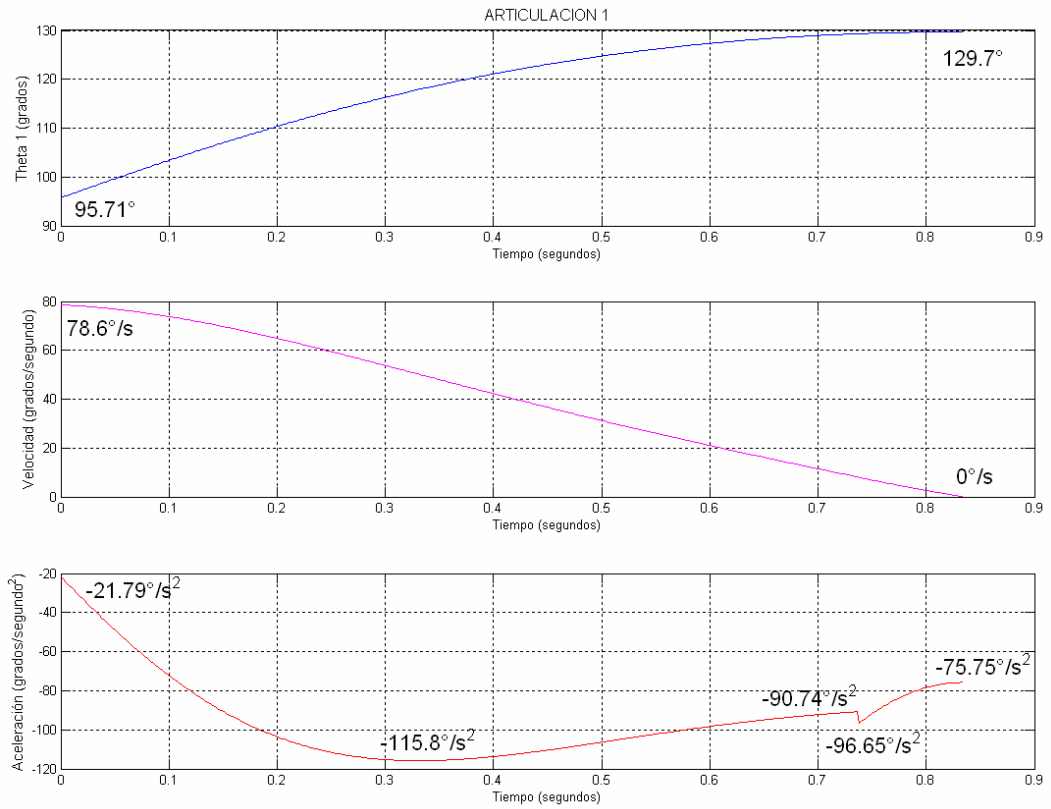


Figura A2.3. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

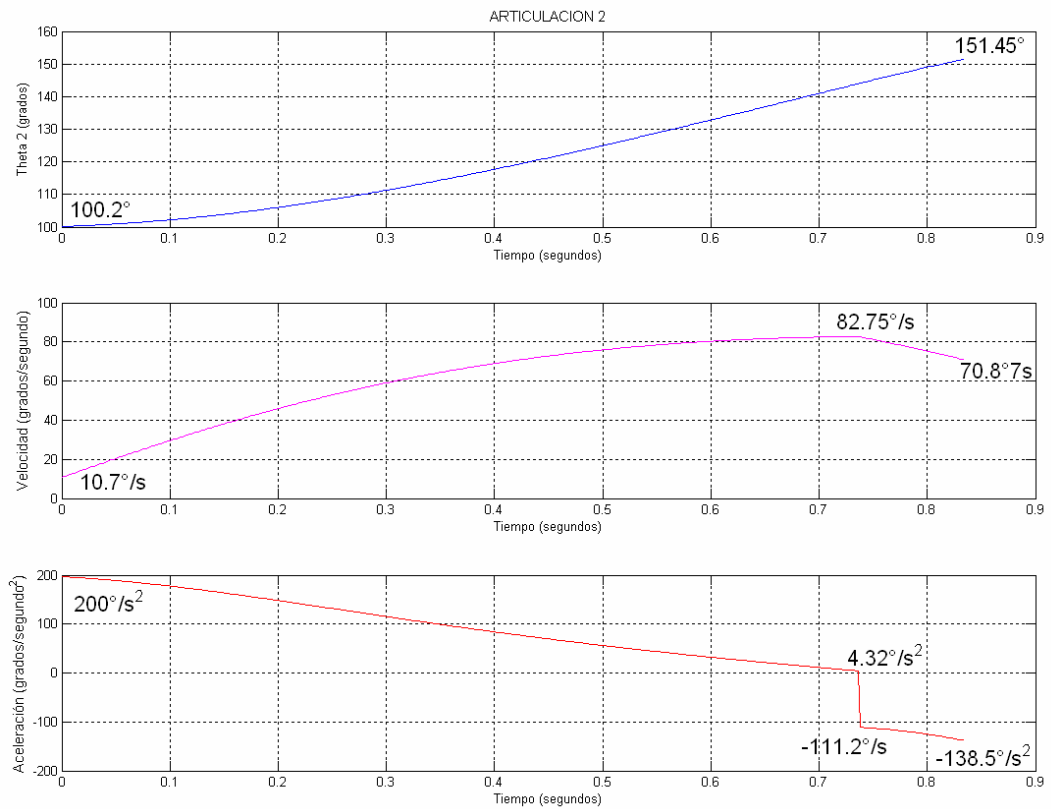


Figura A2.4. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

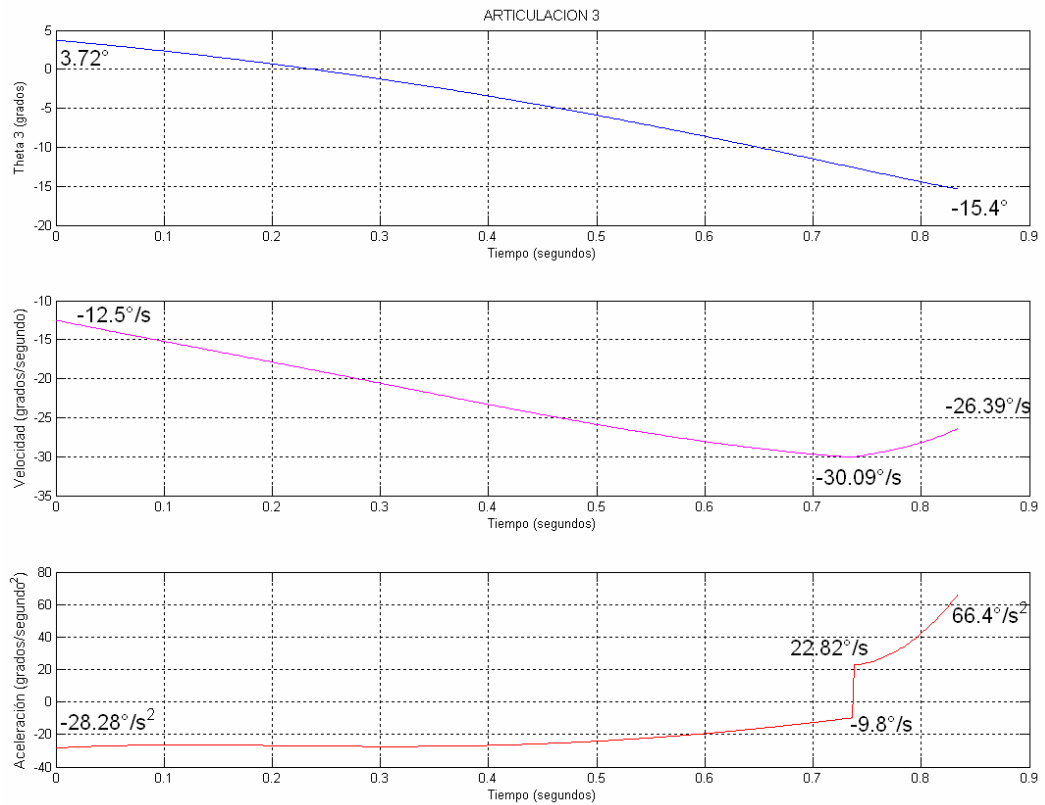


Figura A2.5. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

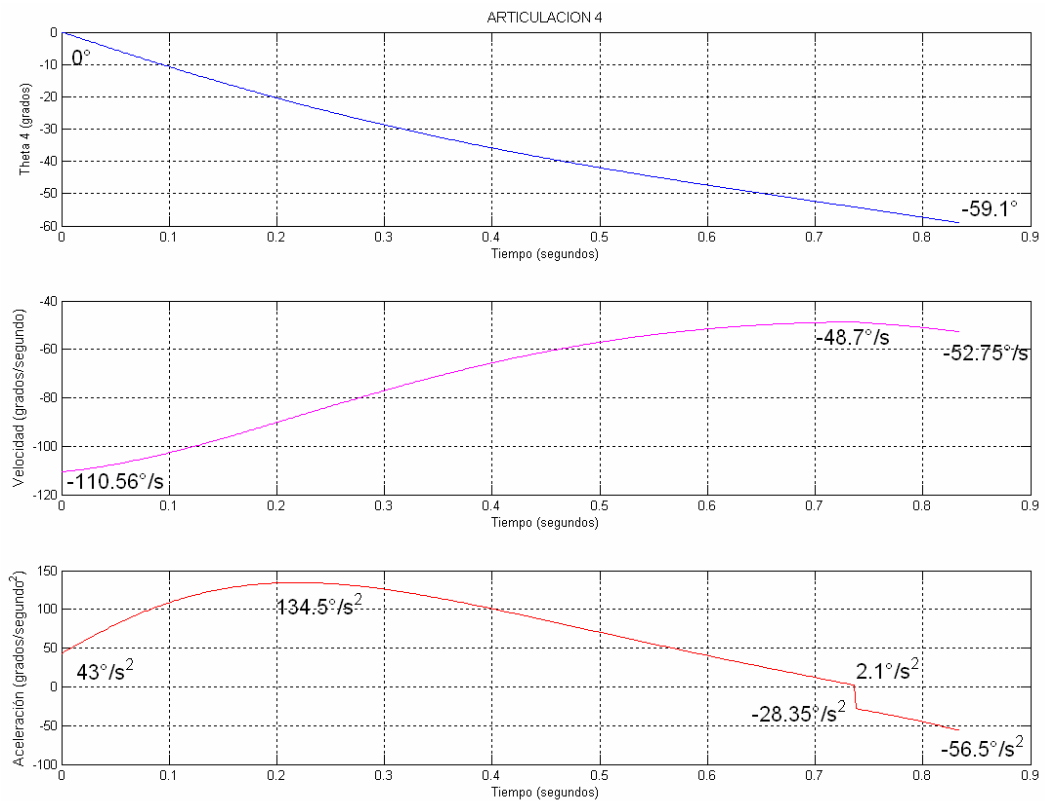


Figura A2.6. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

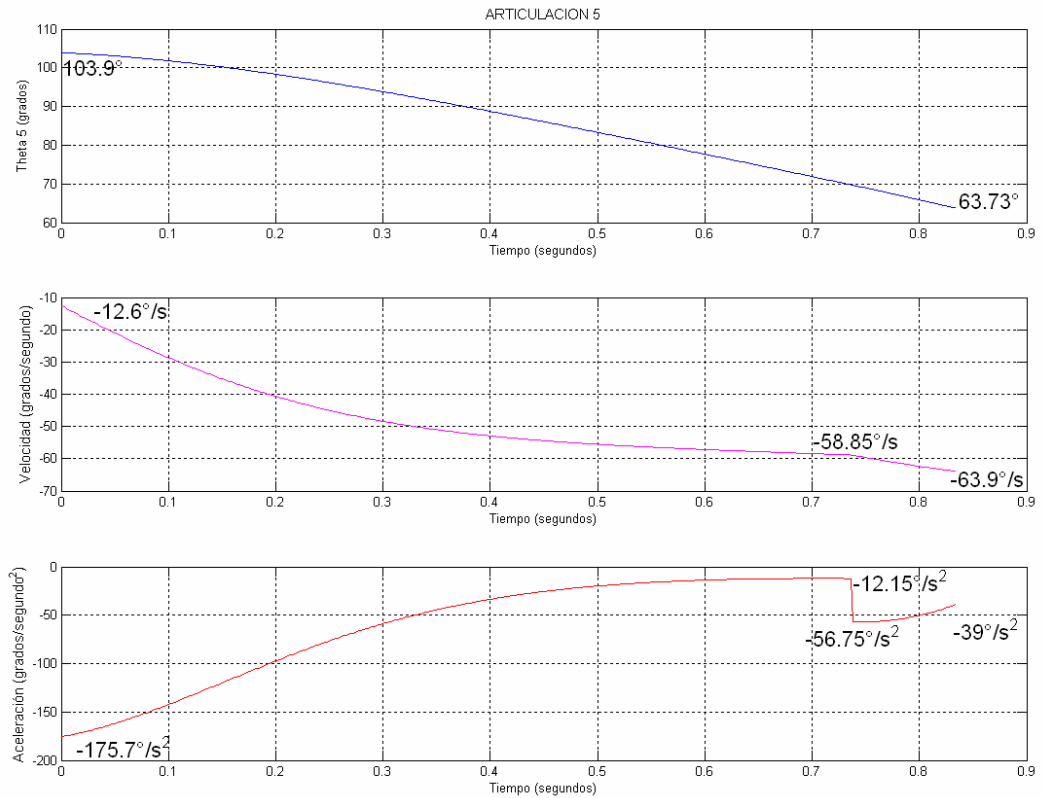


Figura A2.7. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

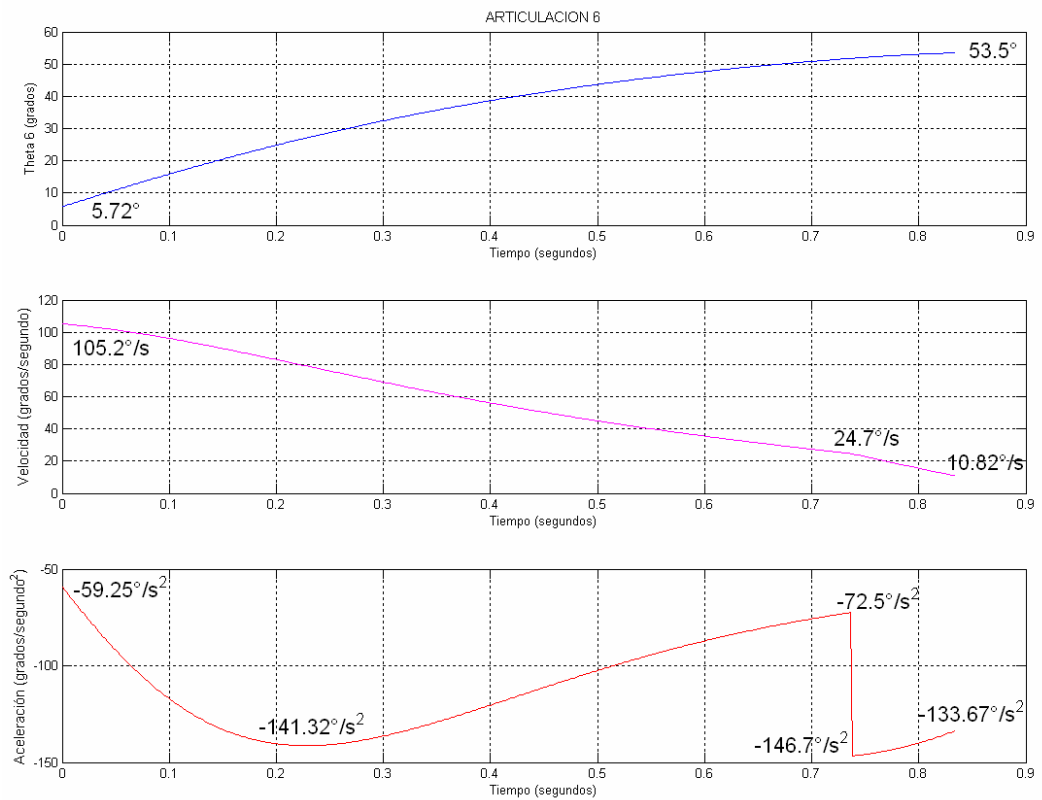


Figura A2.8. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

APENDICE 3

SEGMENTO A-B (Ejemplo 8.1.2)

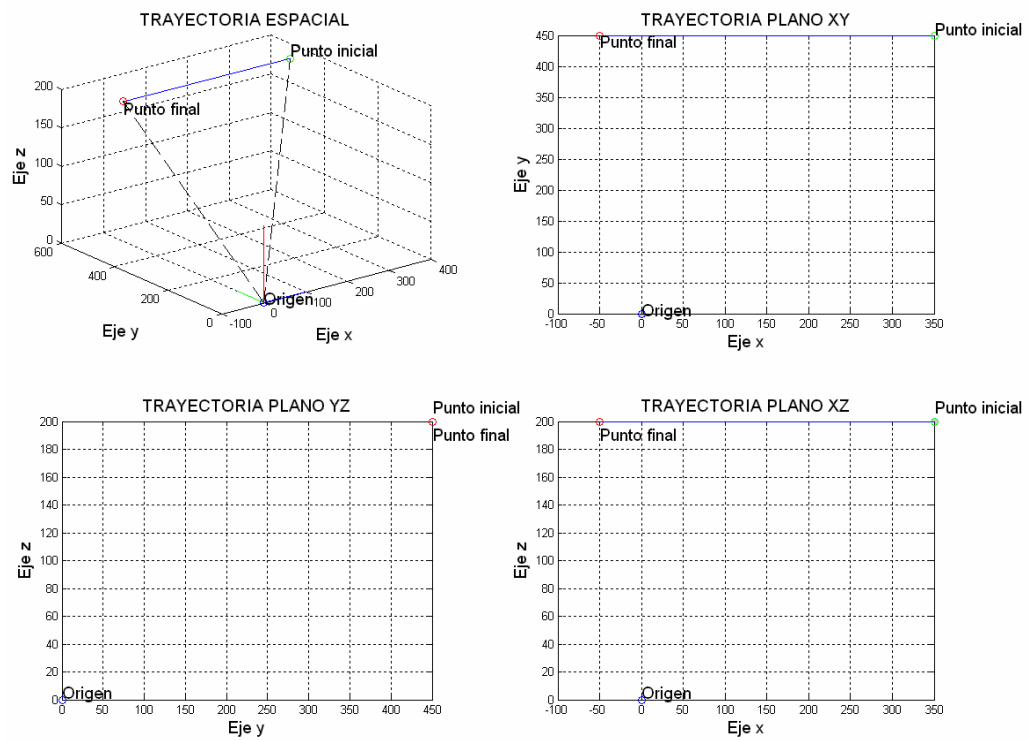


Figura A3.1. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento A-B

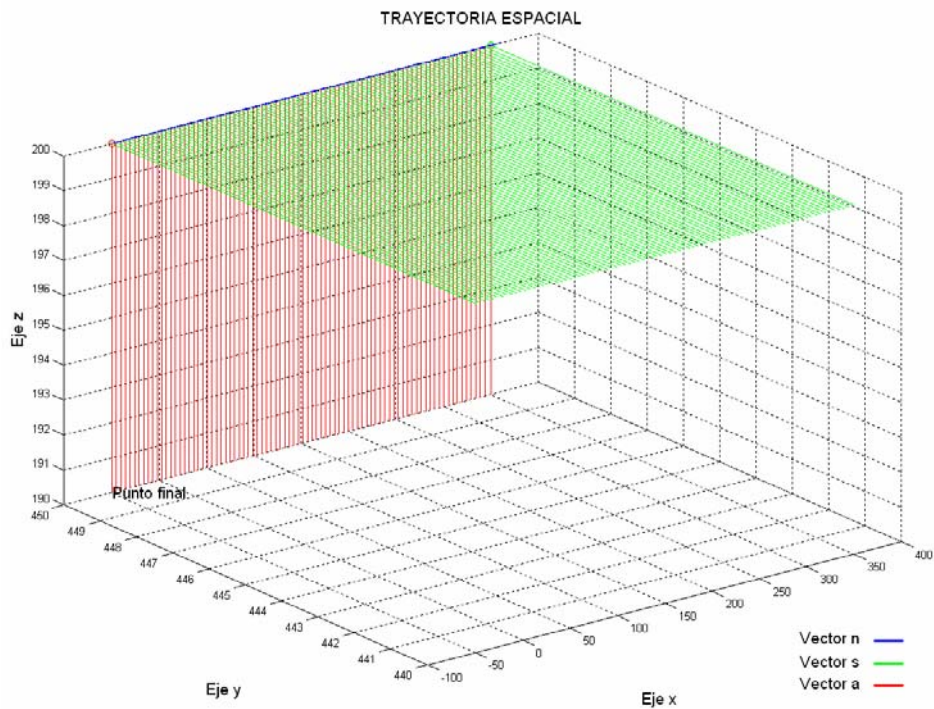


Figura A3.2. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-B

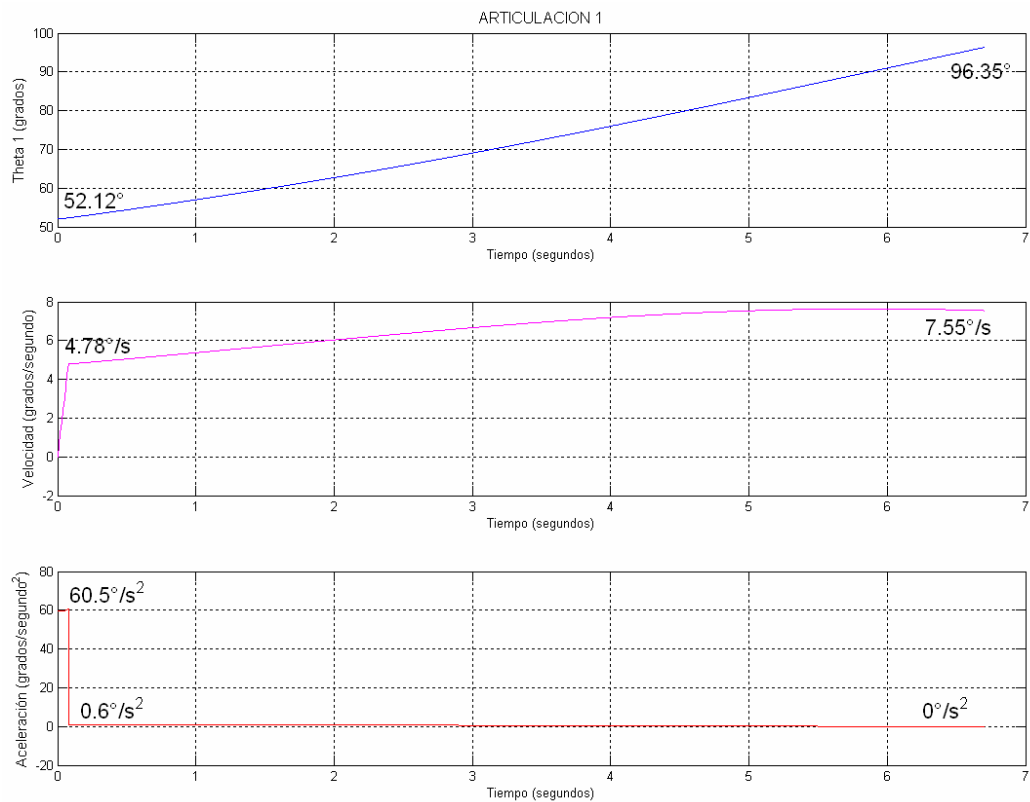


Figura A3.3. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

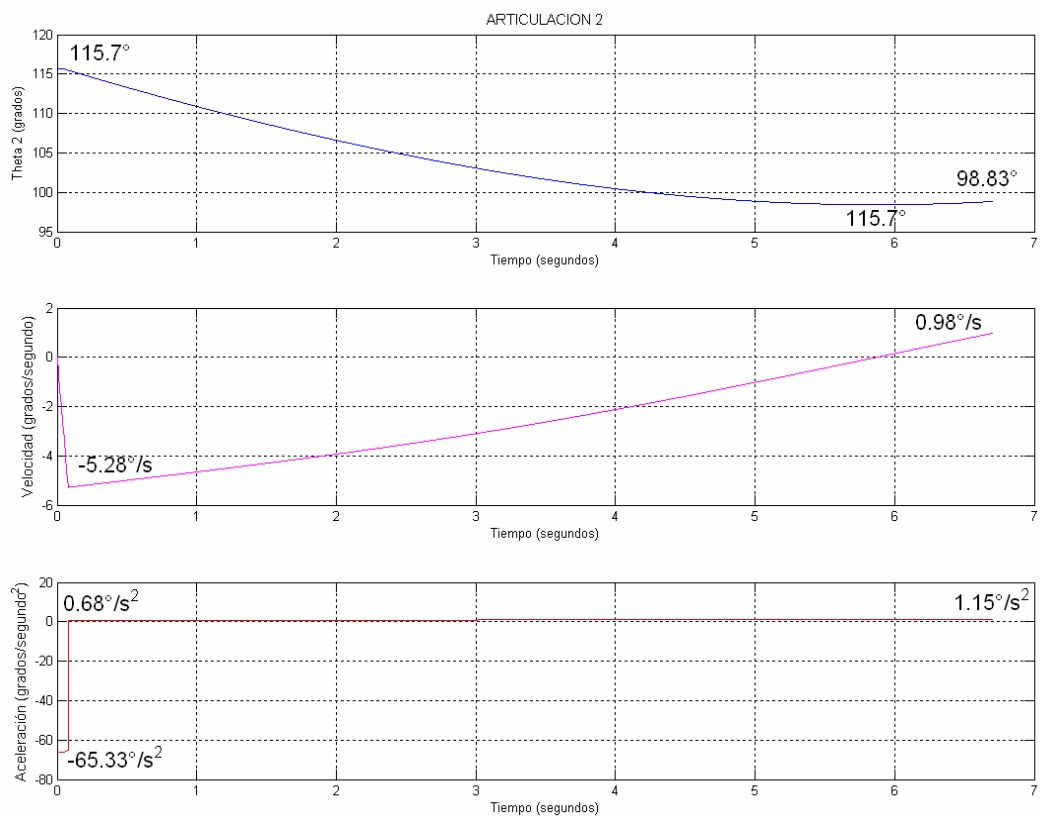


Figura A3.4. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

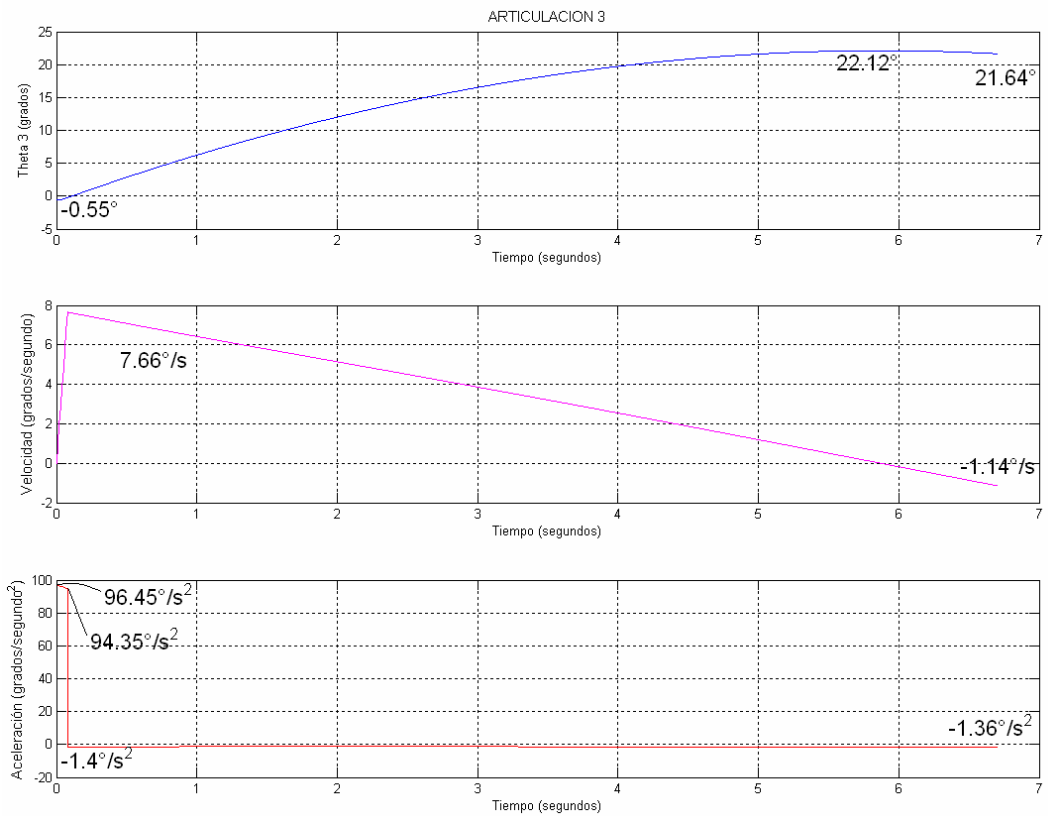


Figura A3.5. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

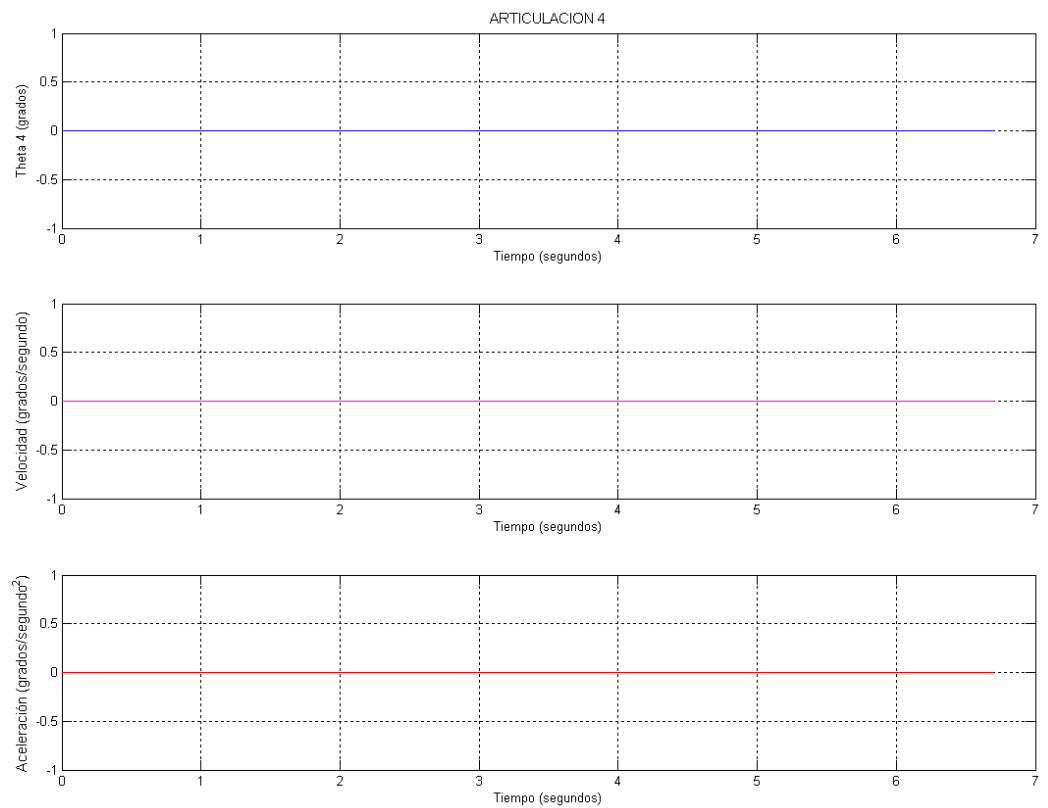


Figura A3.6. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

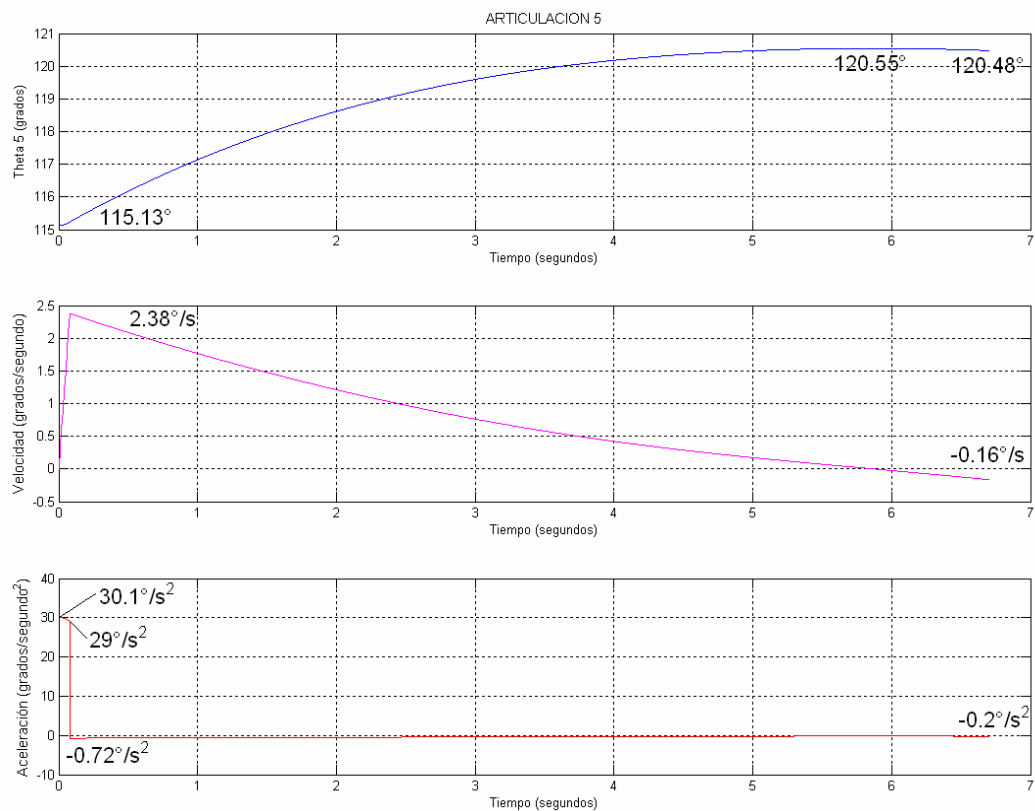


Figura A3.7. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

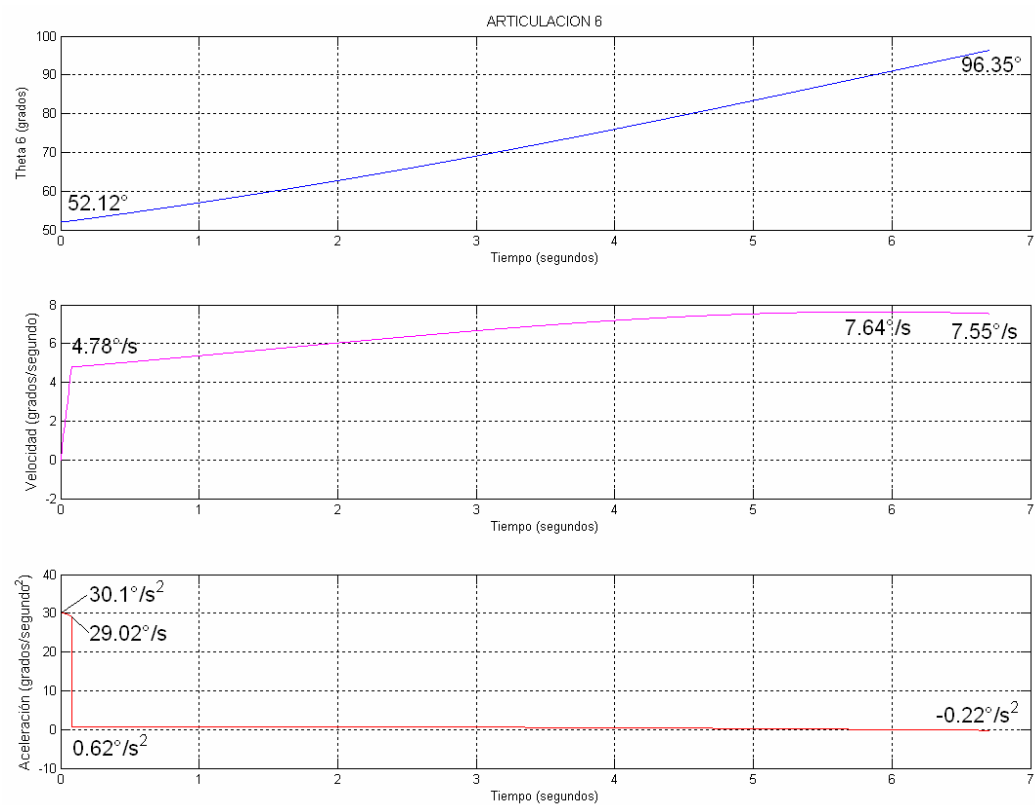


Figura A3.8. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

SEGMENTO B-D (Ejemplo 8.1.2)

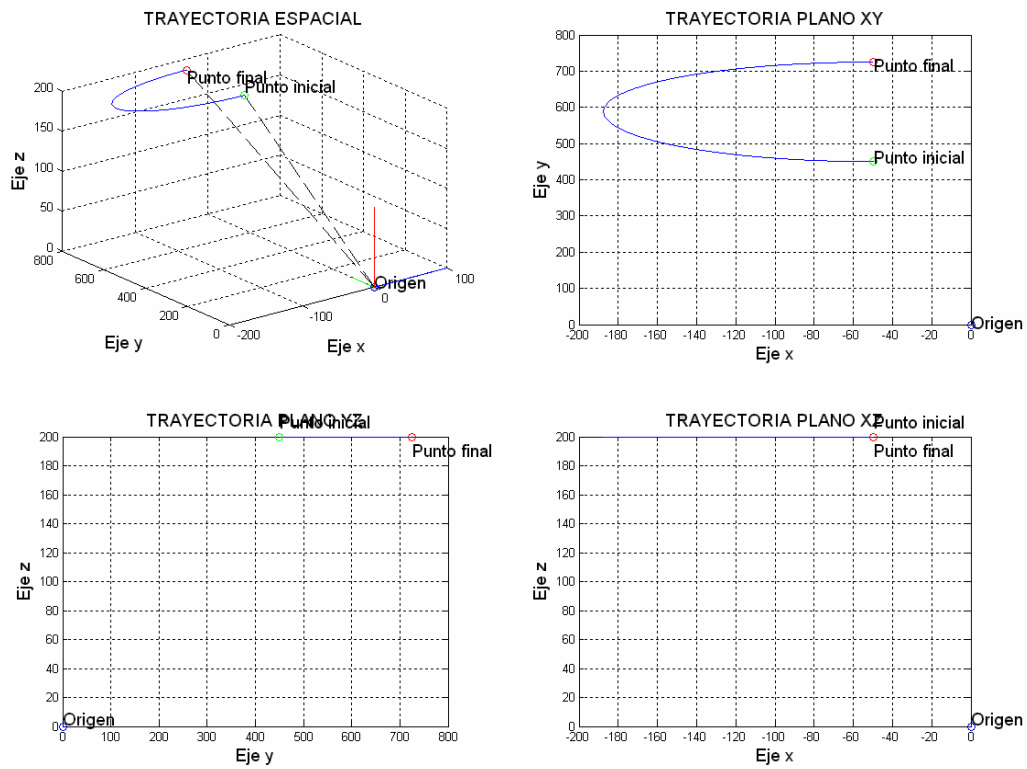


Figura A3.9. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento B-D

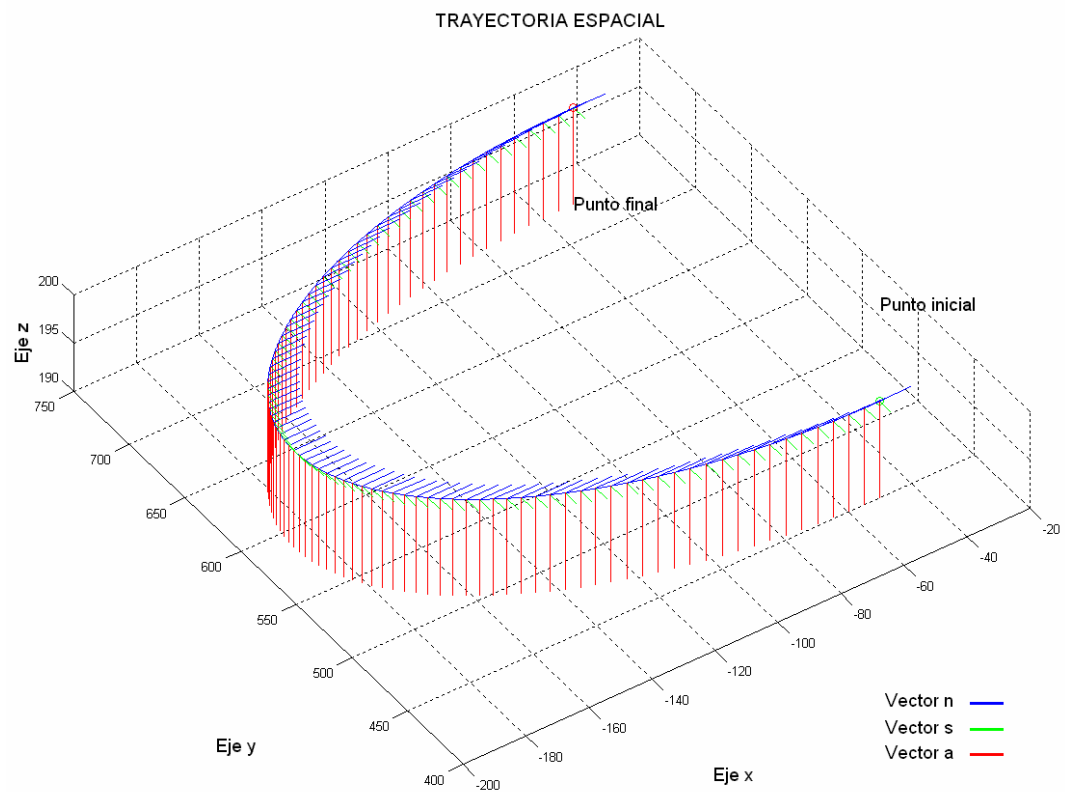


Figura A3.10. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento B-D

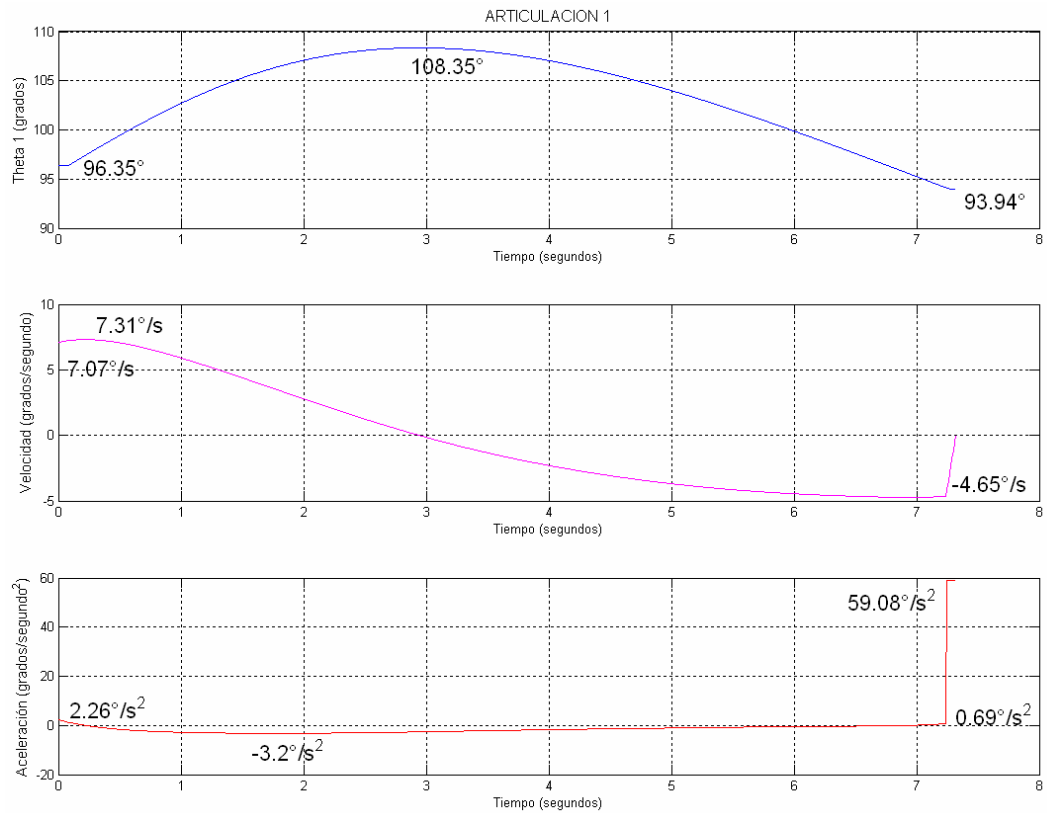


Figura A3.11. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

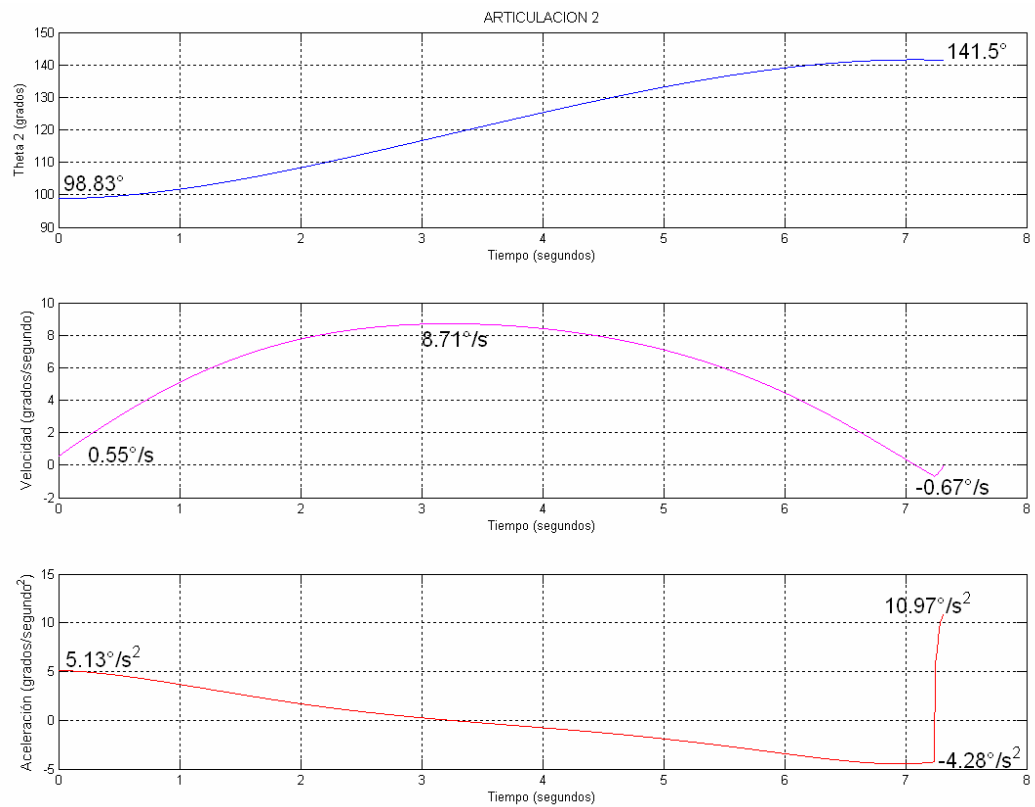


Figura A3.12. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

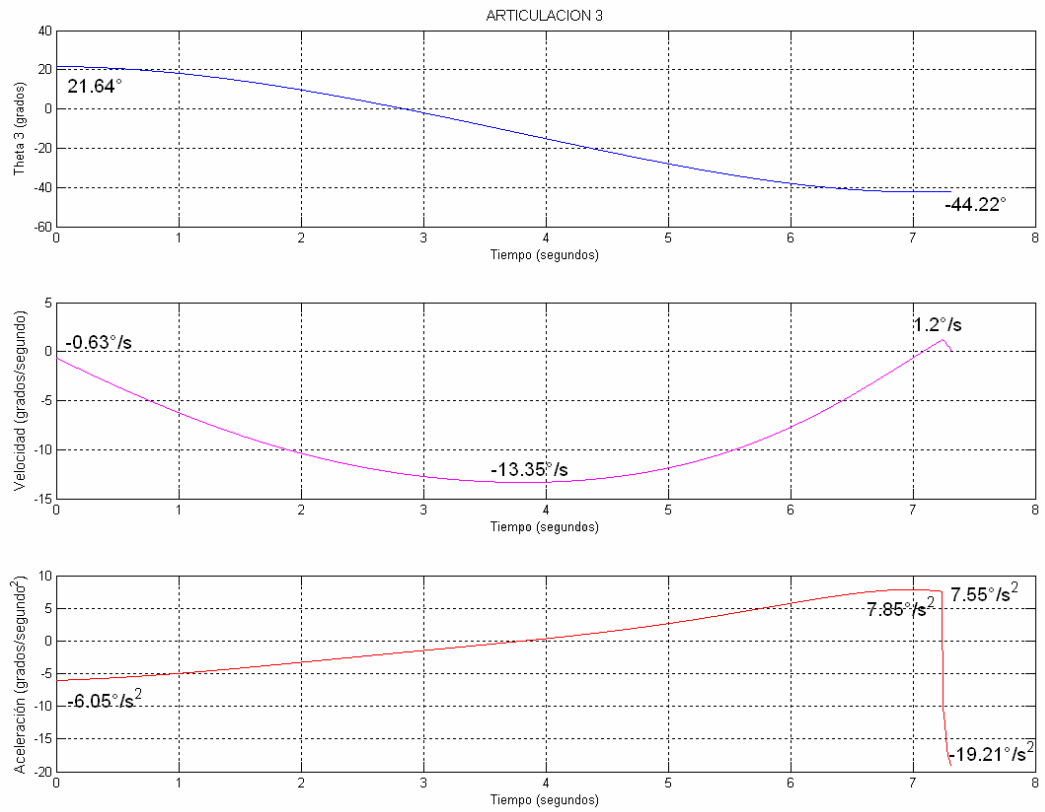


Figura A3.13. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

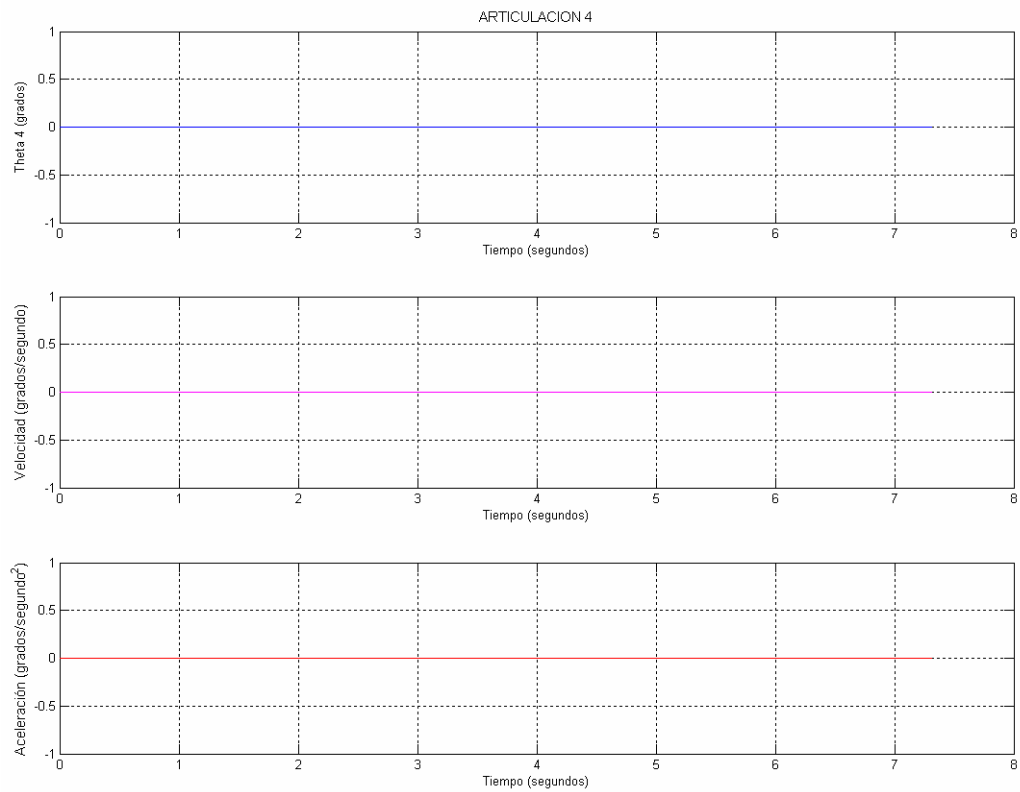


Figura A3.14. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

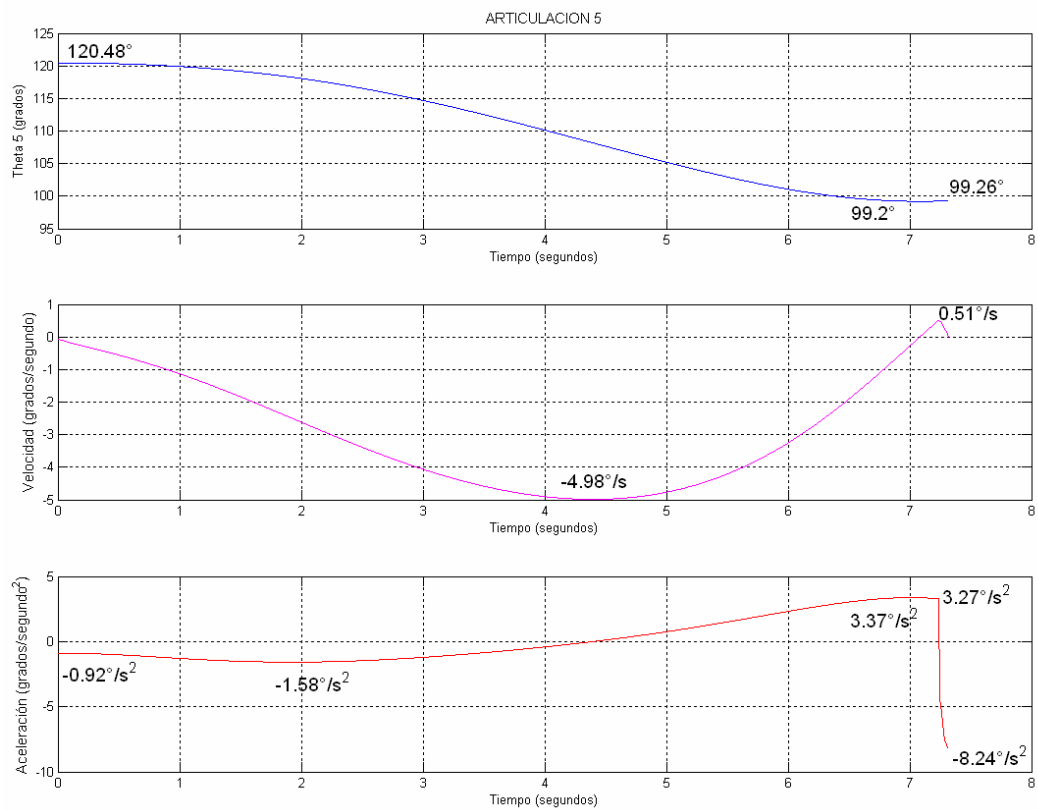


Figura A3.14. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

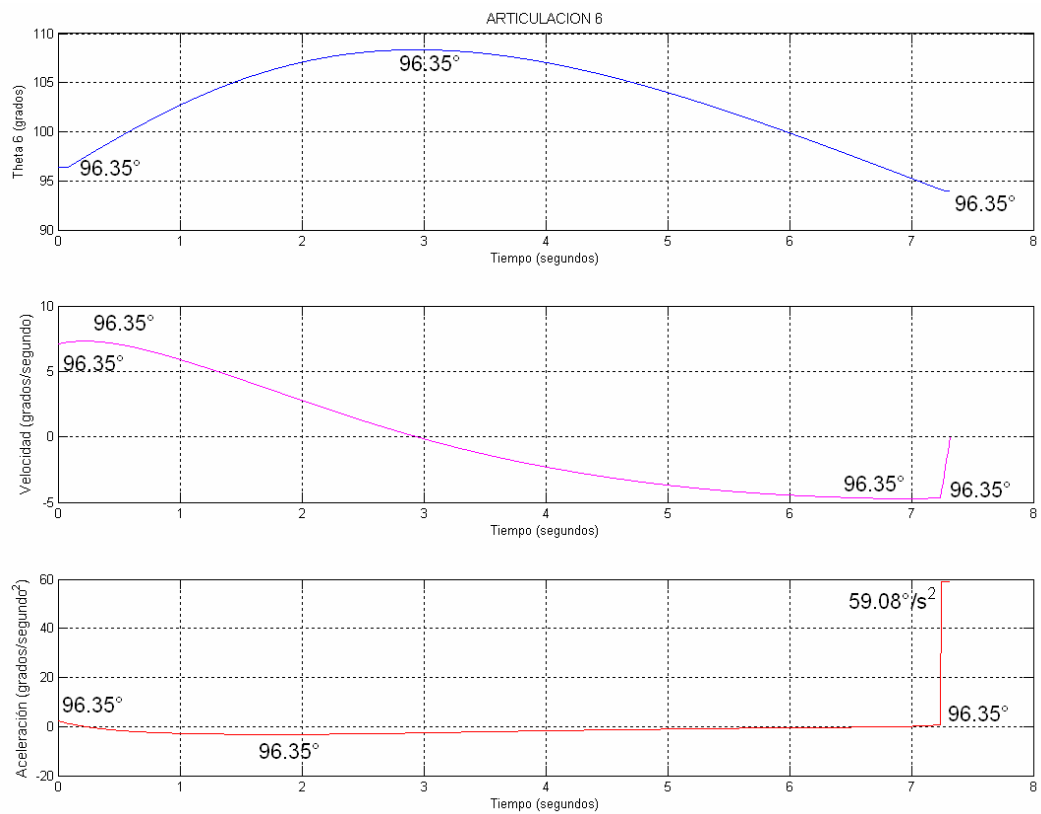


Figura A3.14. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

APENDICE 4

SEGMENTO A-B (Ejemplo 8.1.3)

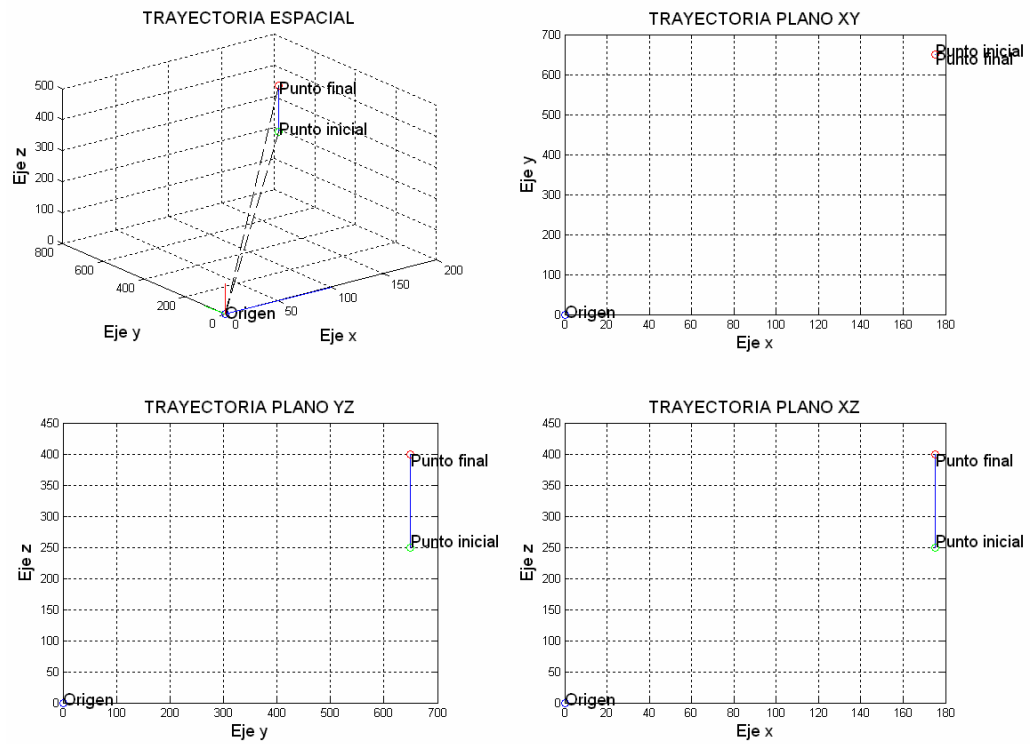


Figura A4.1. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento A-B

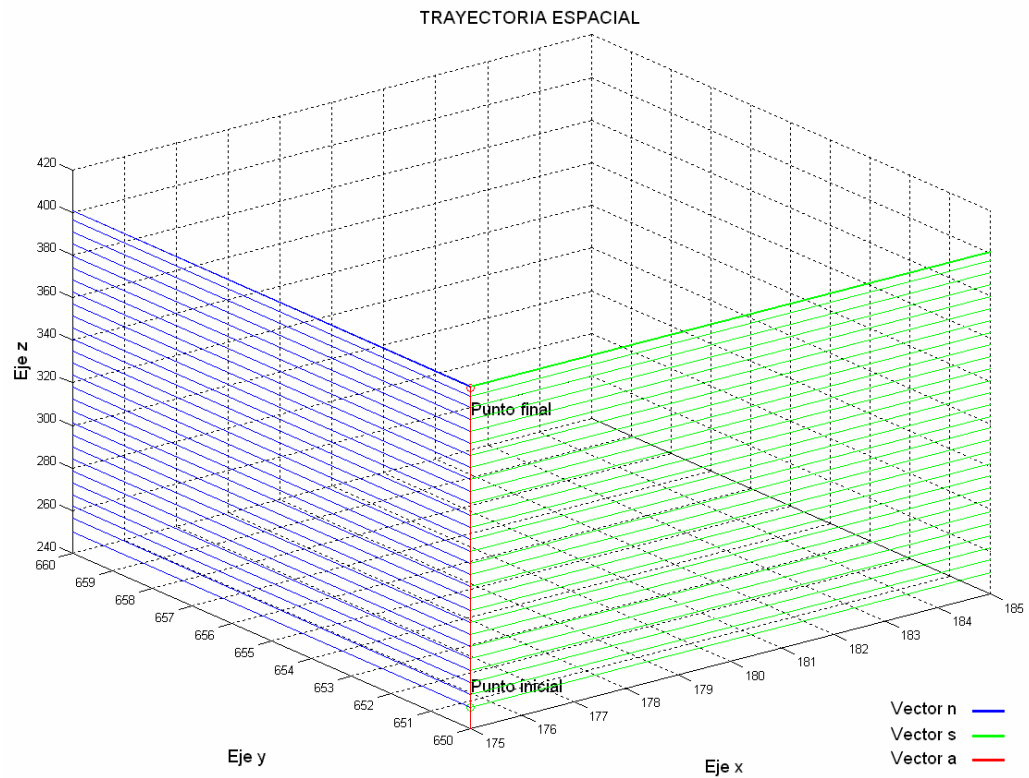


Figura A4.2. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-B

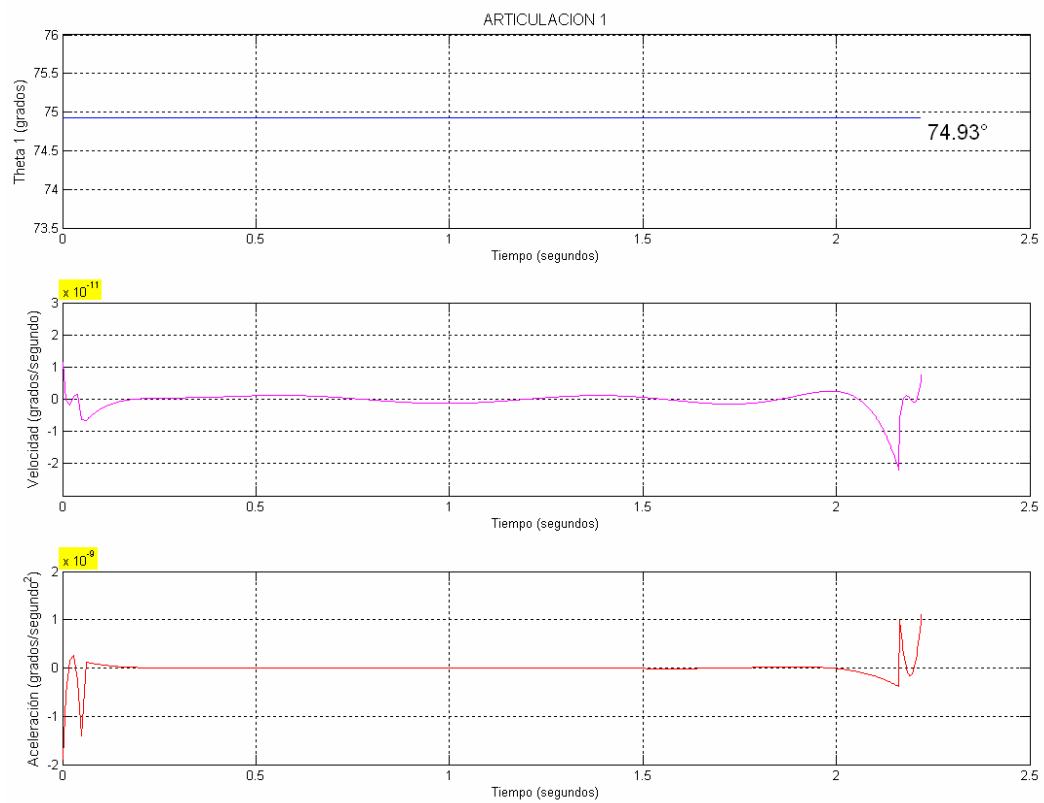


Figura A4.3. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

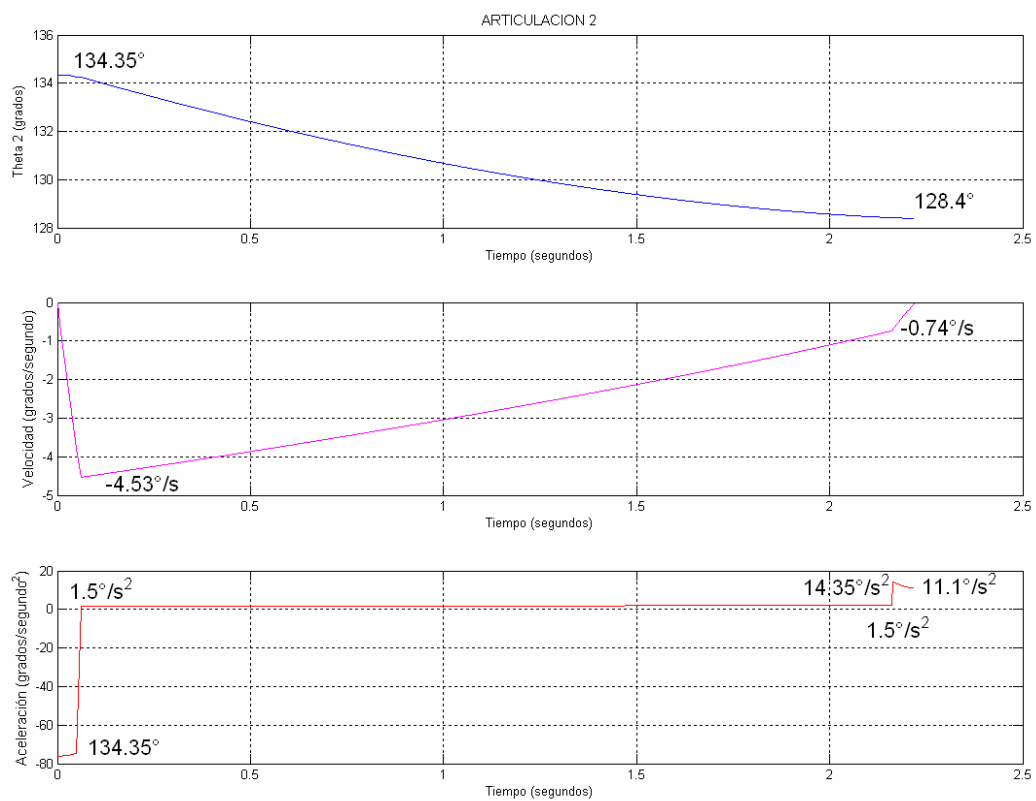


Figura A4.4. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

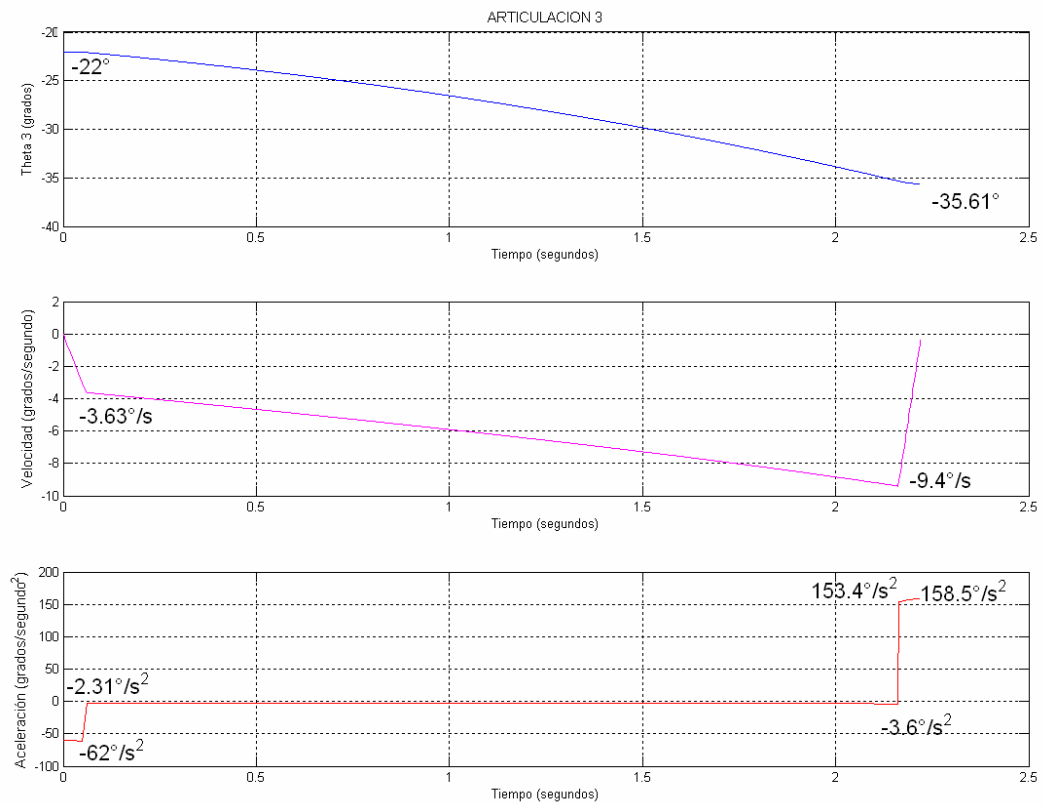


Figura A4.5. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

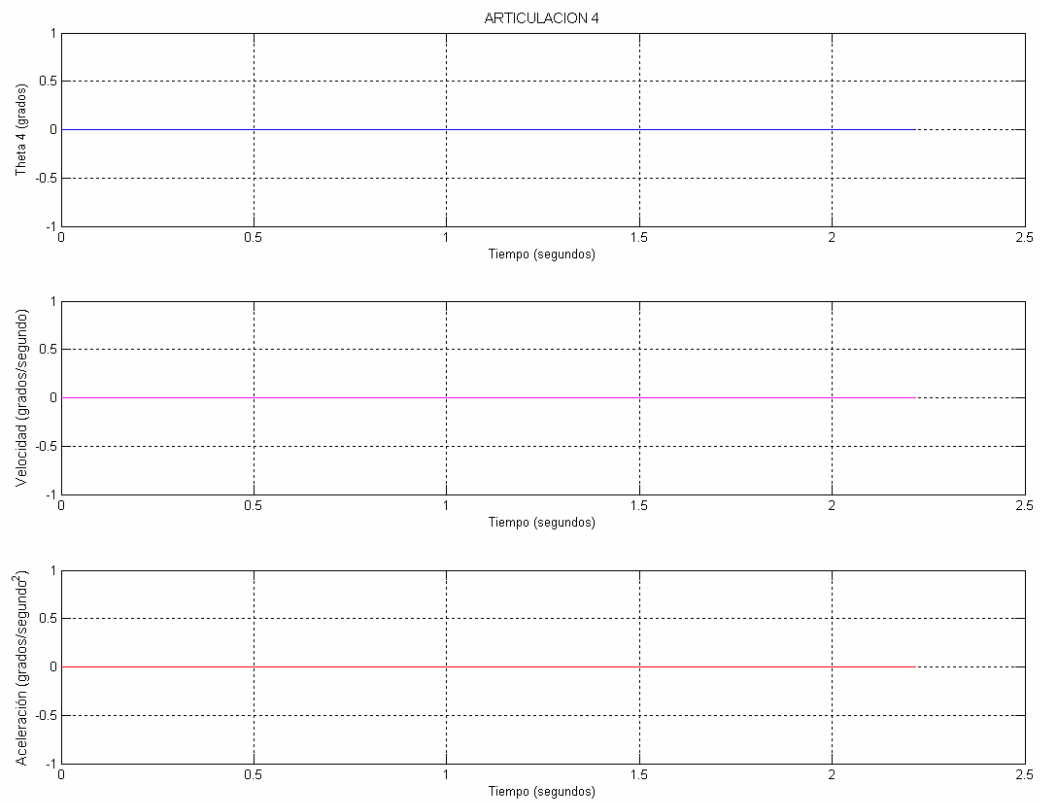


Figura A4.6. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

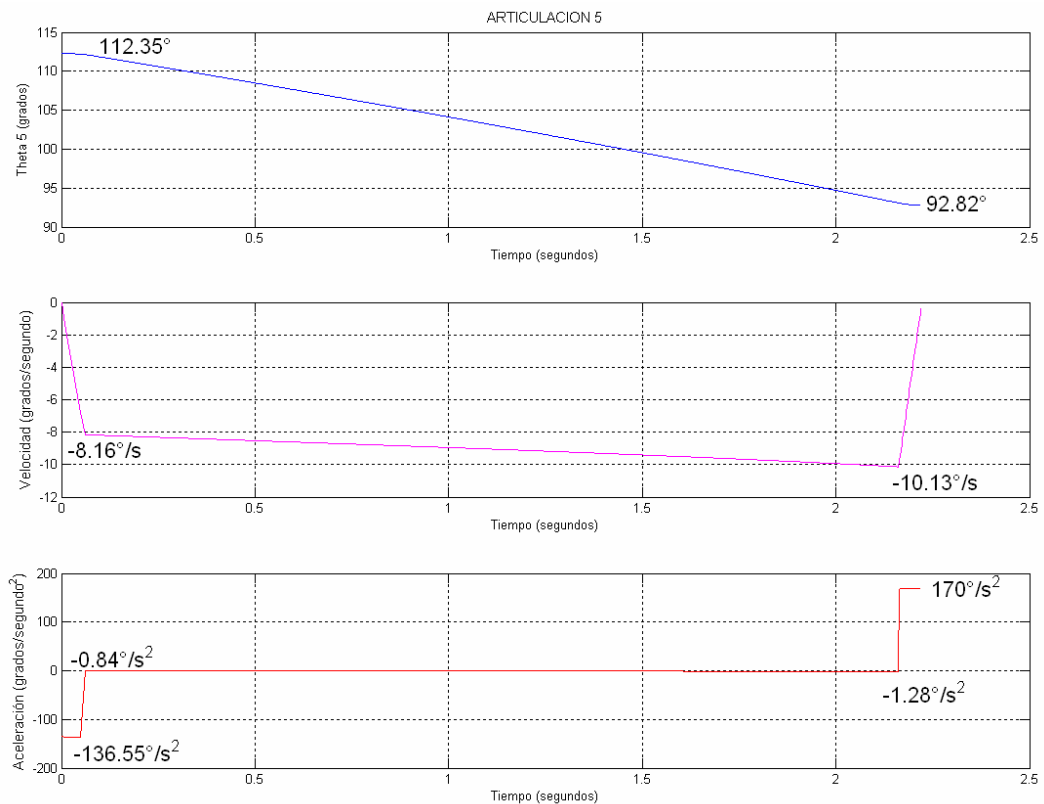


Figura A4.7. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

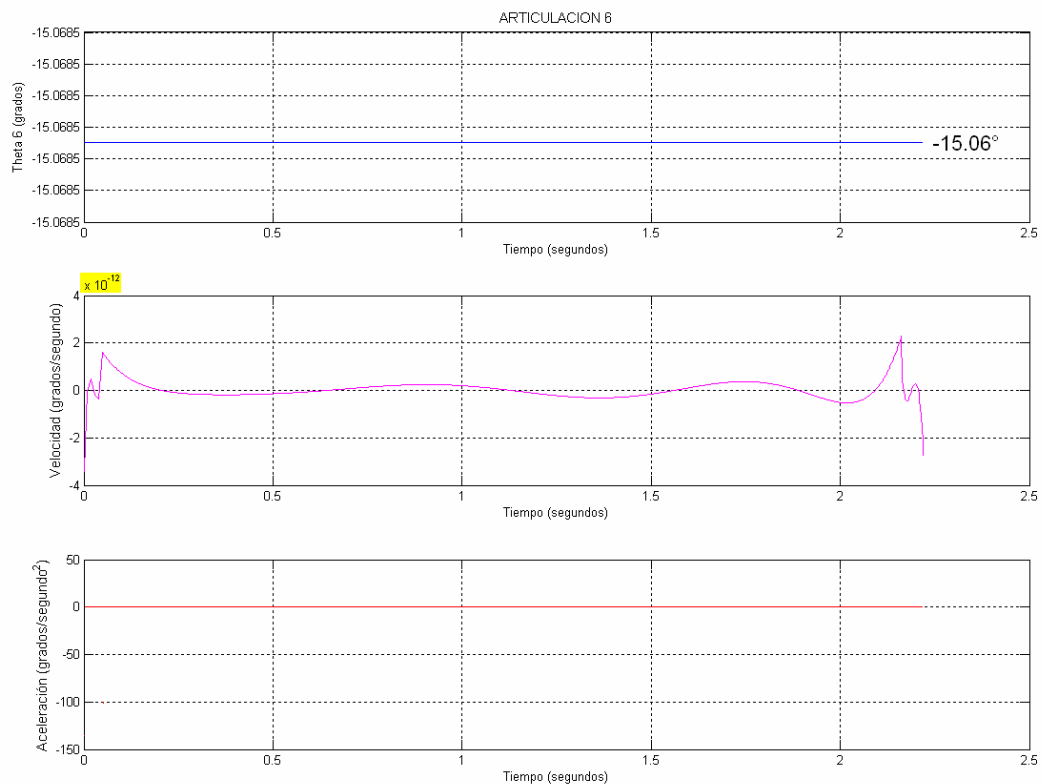


Figura A4.8. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

SEGMENTO B-C (Ejemplo 8.1.3)

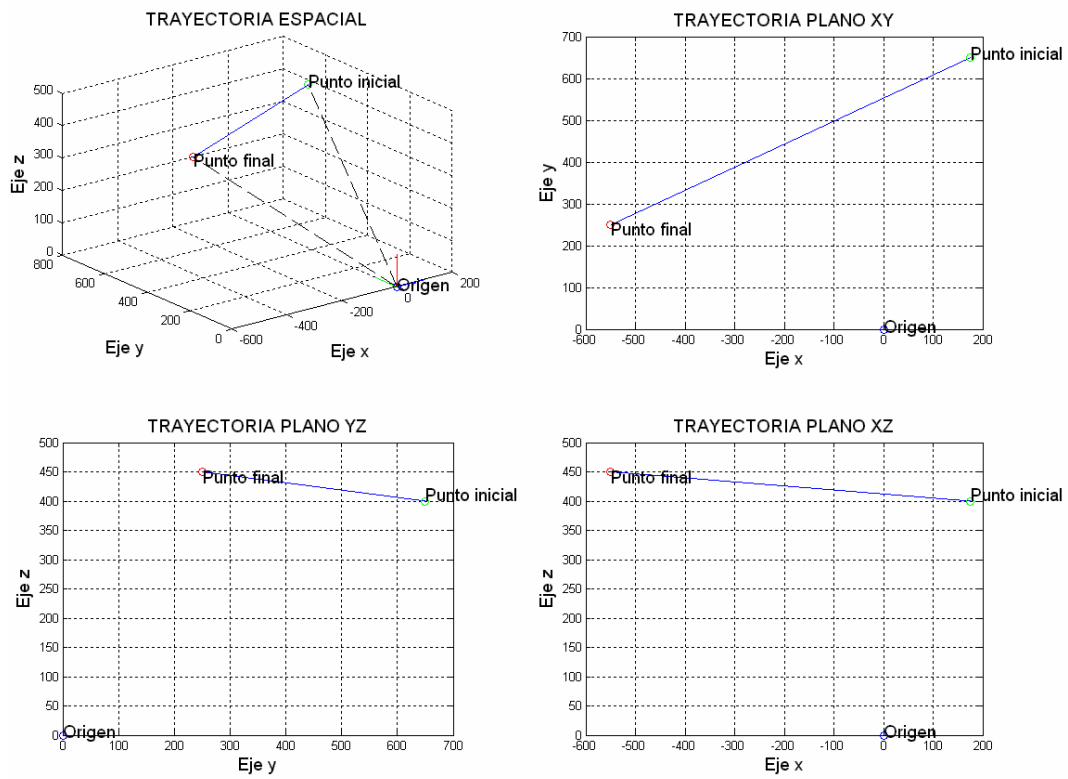


Figura A4.9. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento B-C

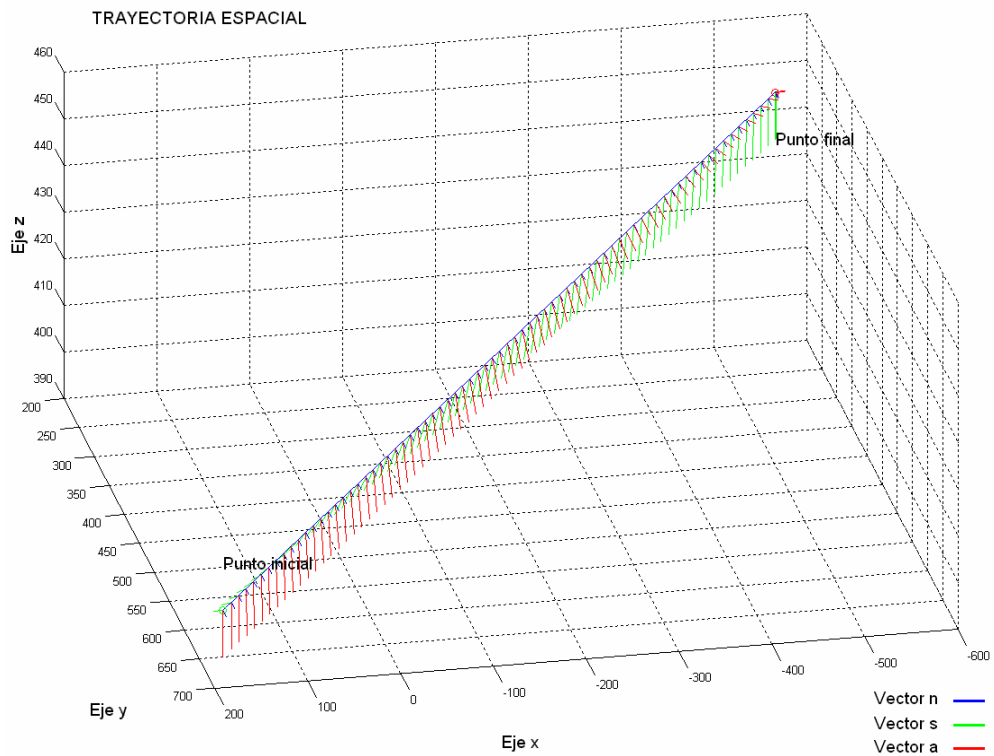


Figura A4.10. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-B

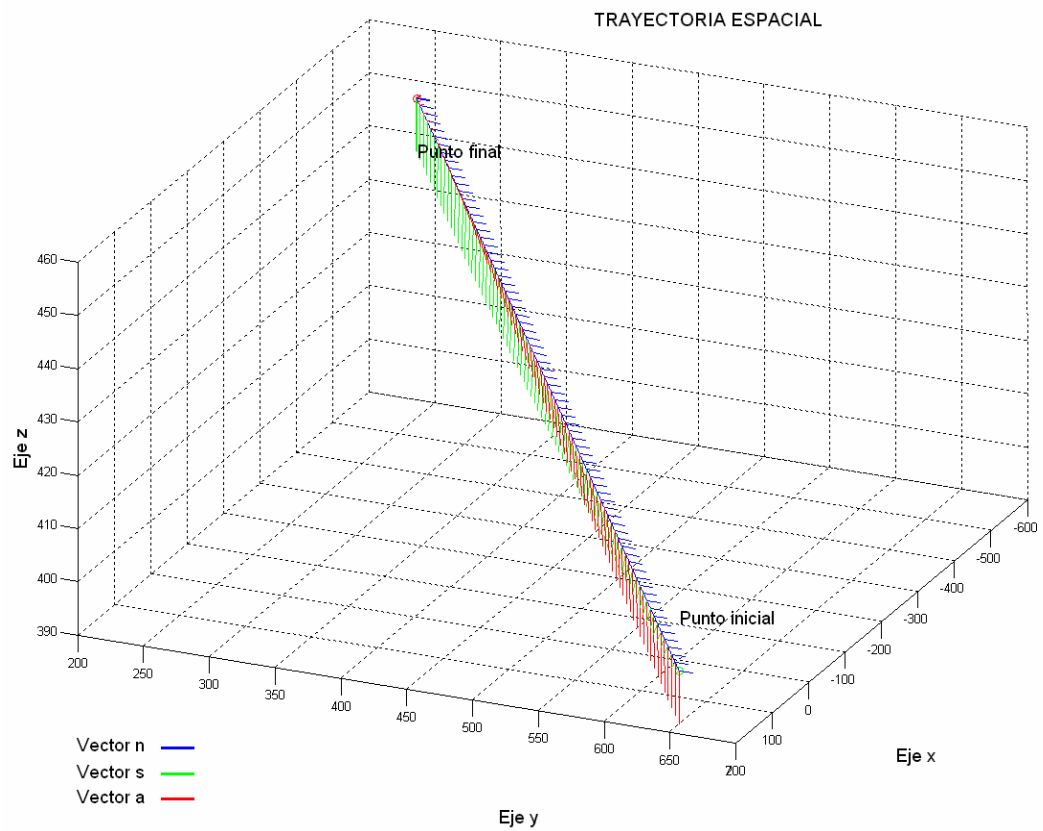


Figura A4.11. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-B

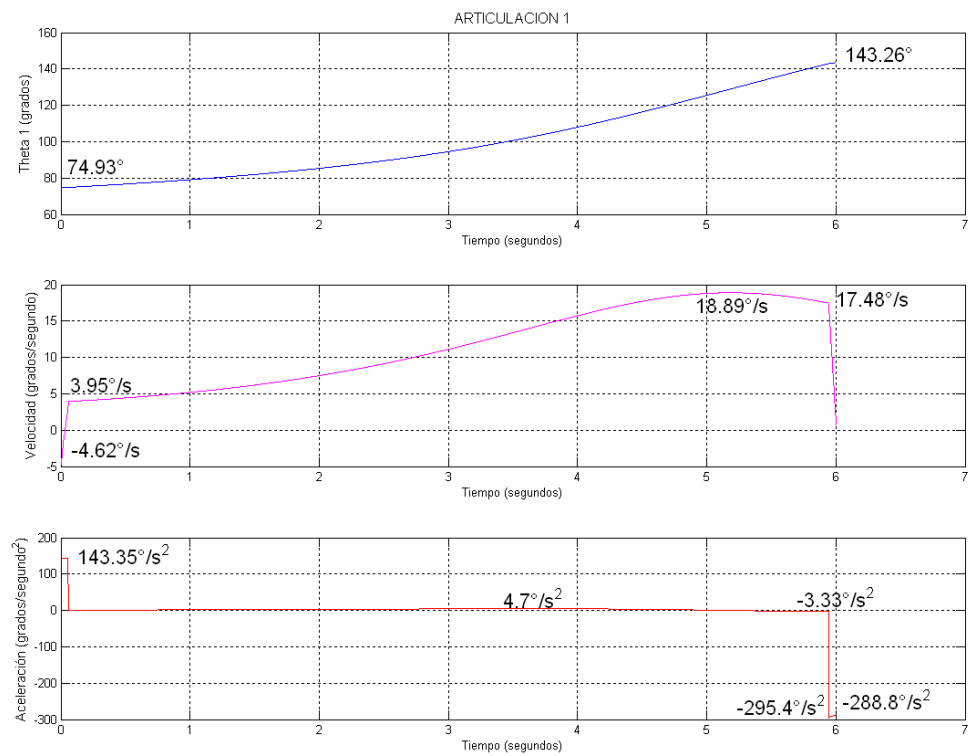


Figura A4.12. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

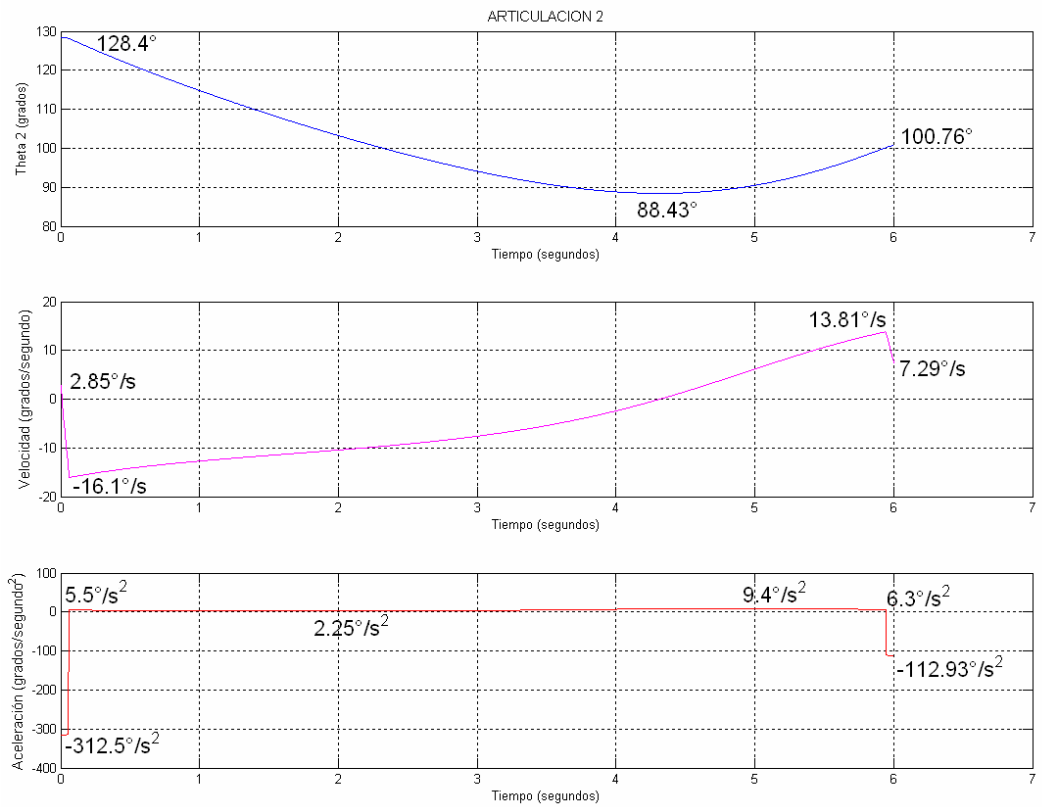


Figura A4.13. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

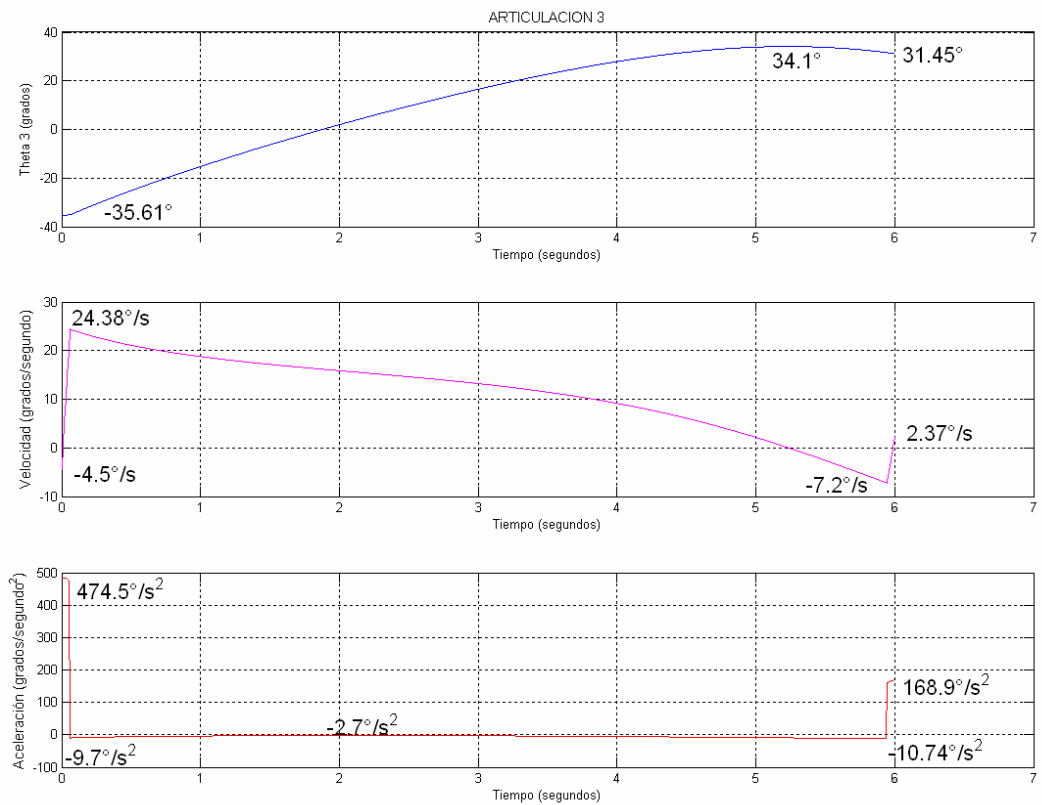


Figura A4.14. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

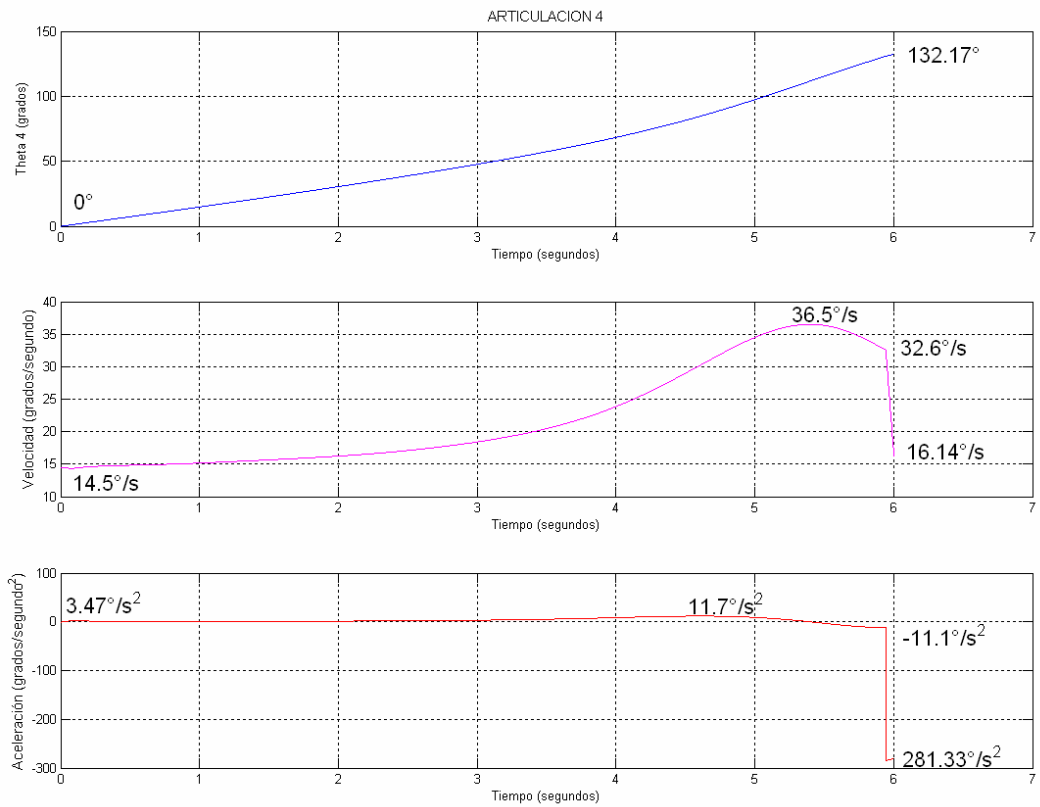


Figura A4.15. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

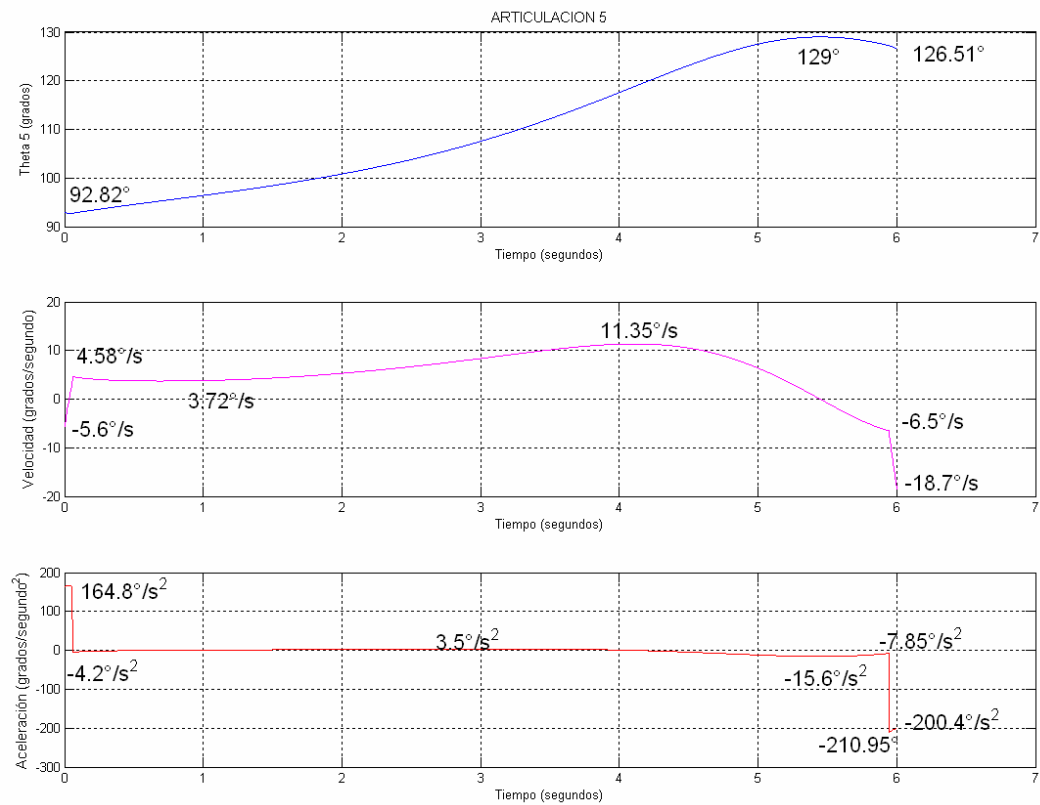


Figura A4.16. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

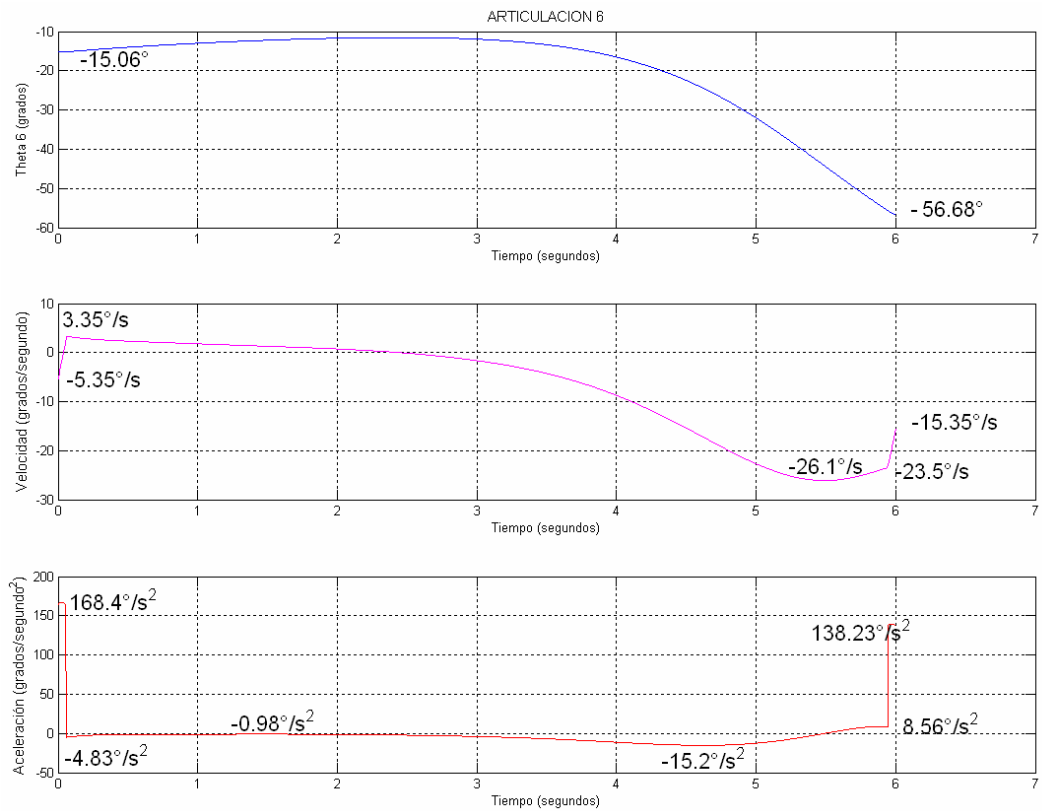


Figura A4.17. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación

SEGMENTO C-D (Ejemplo 8.1.3)

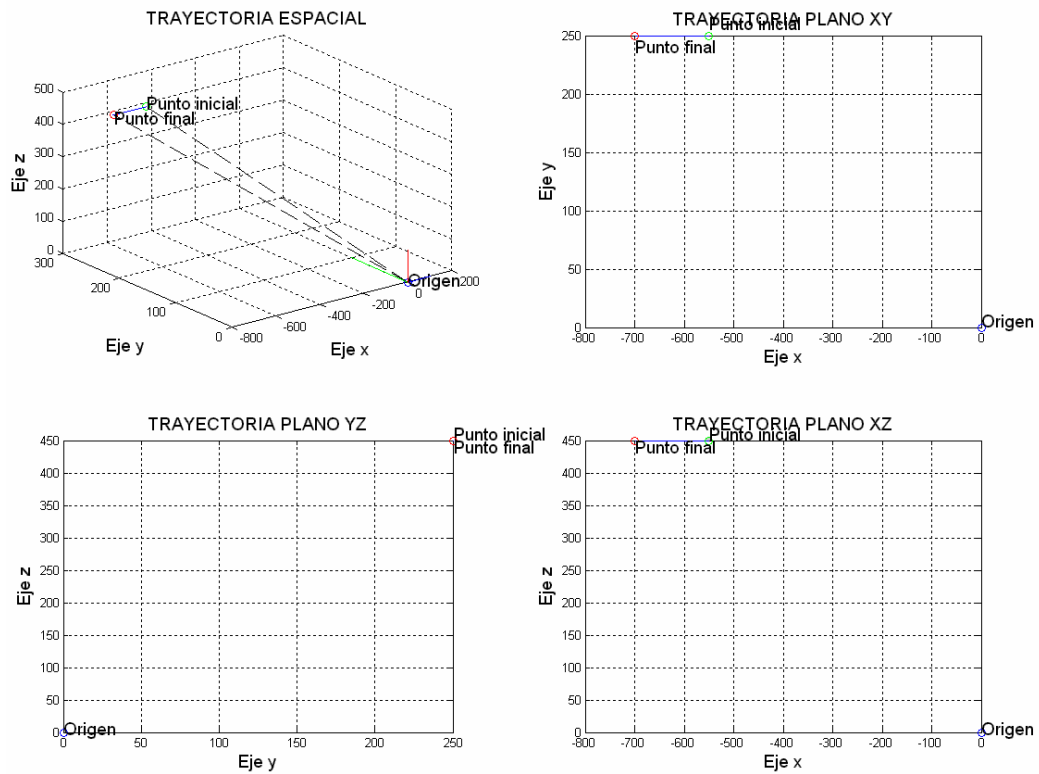


Figura A4.18. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento B-C

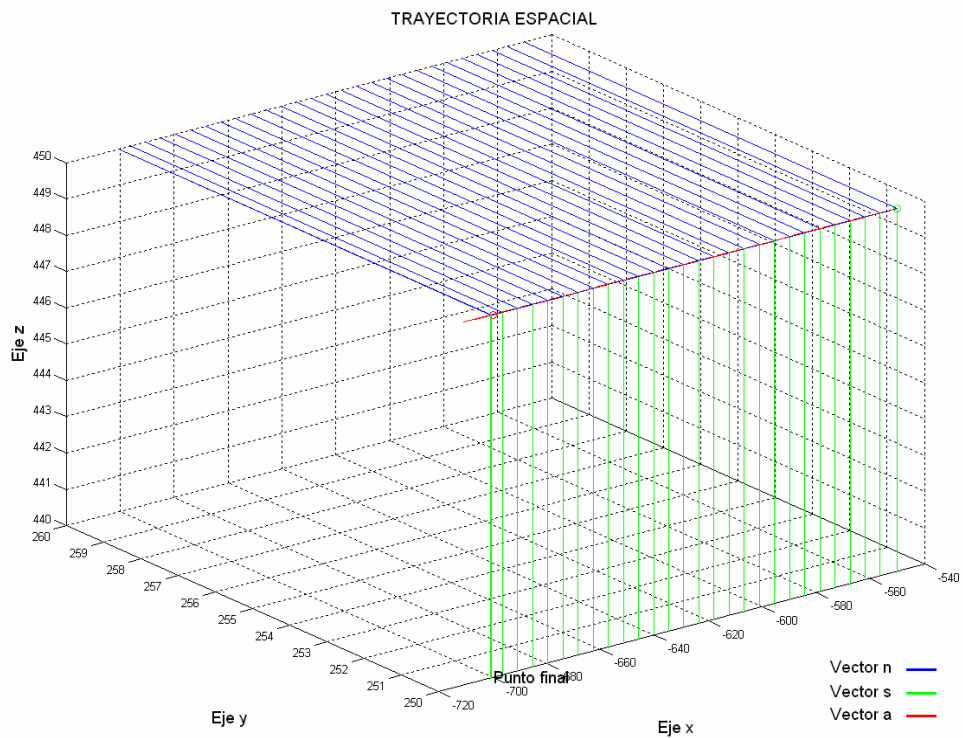


Figura A4.19. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-B

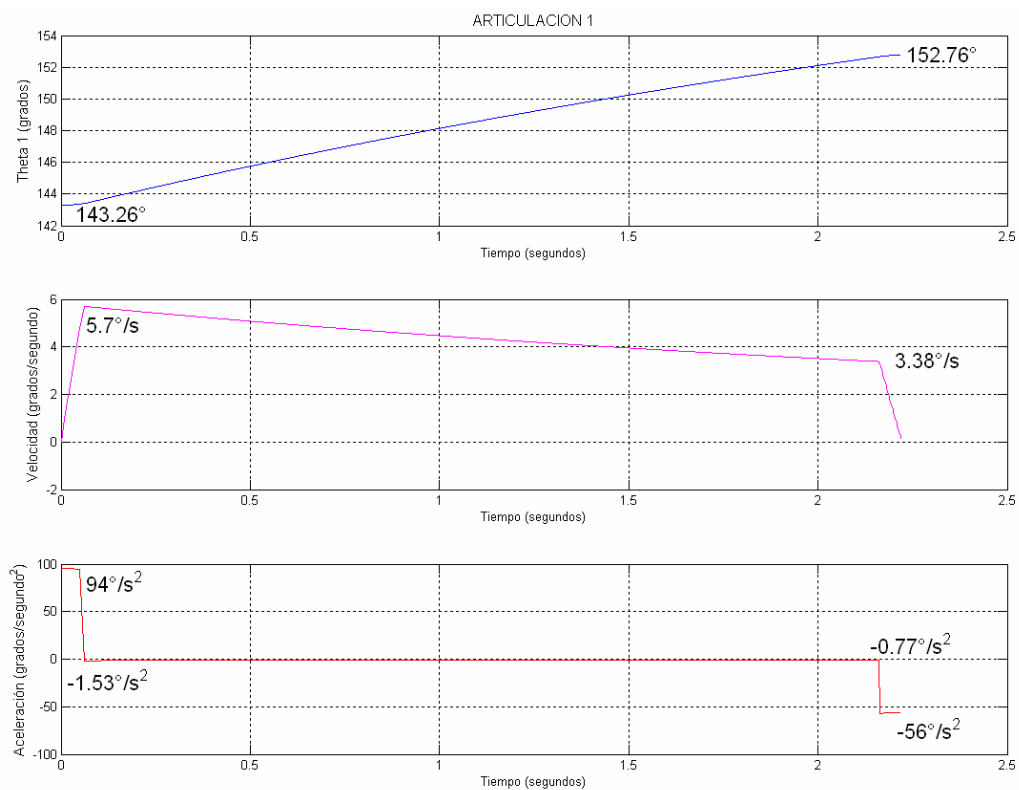


Figura A4.20. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

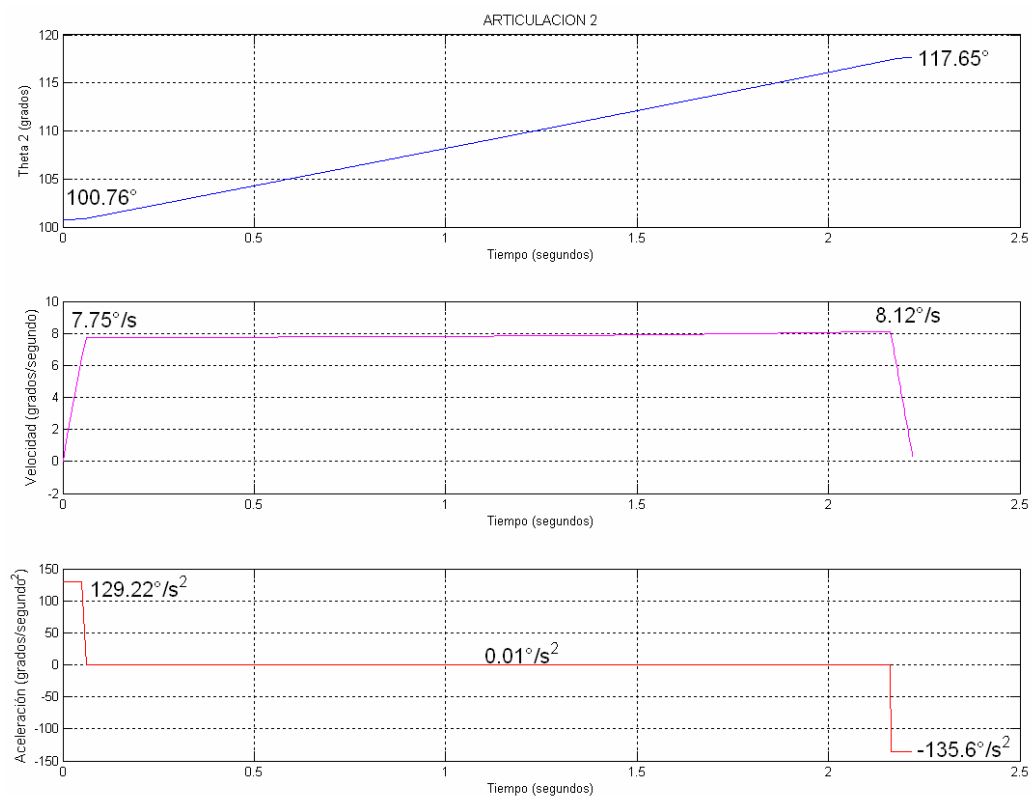


Figura A4.21. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

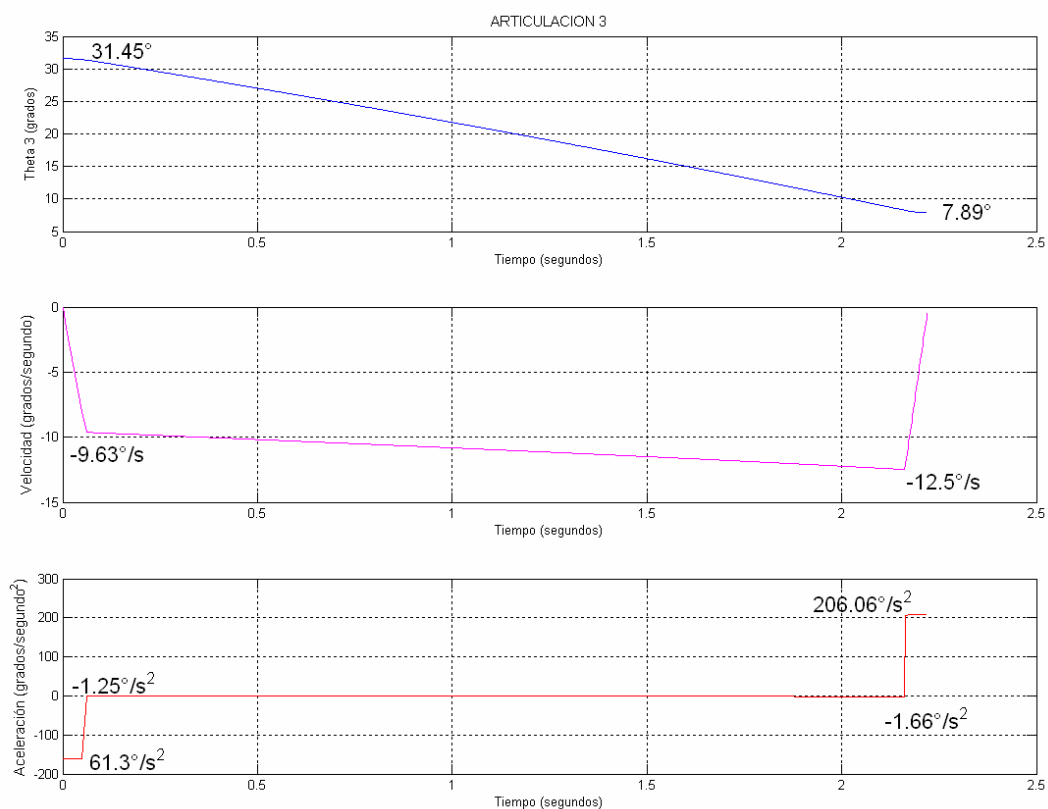


Figura A4.22. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

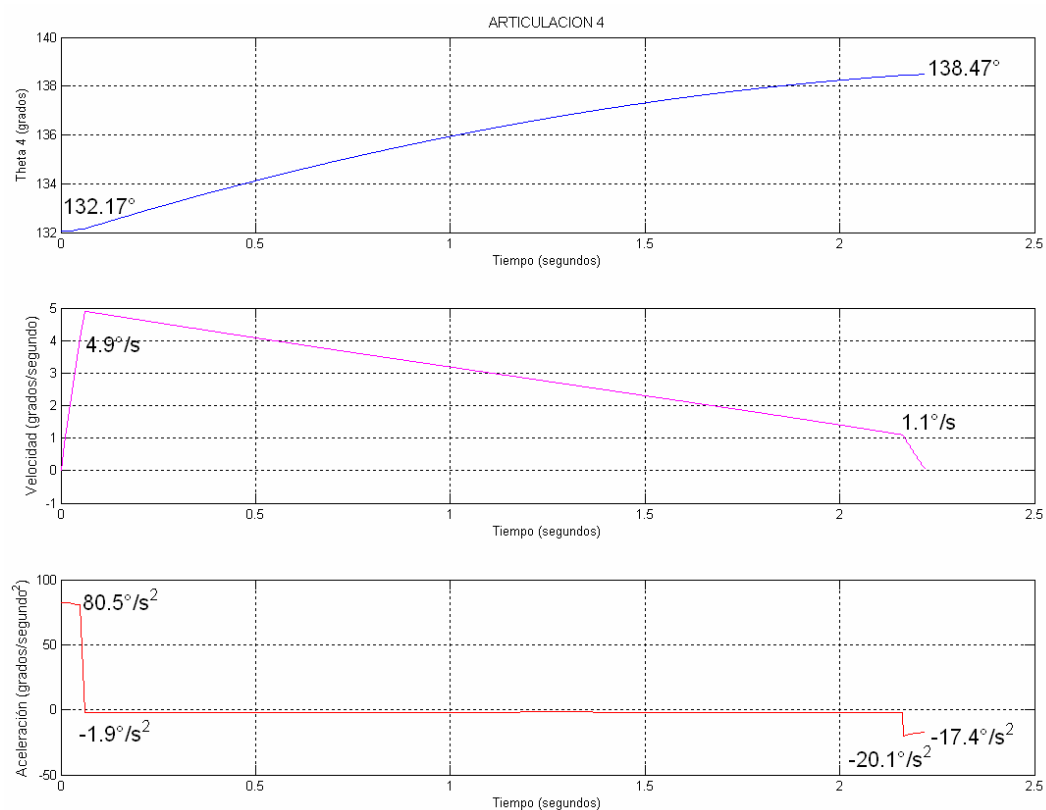


Figura A4.23. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

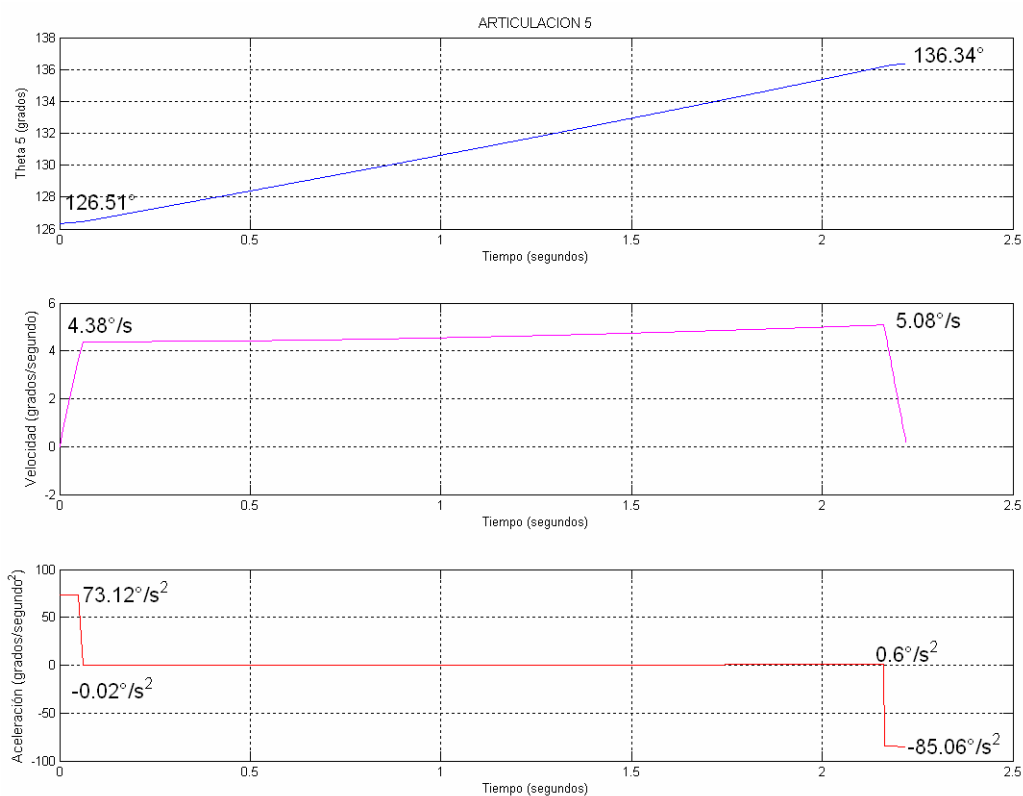


Figura A4.24. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

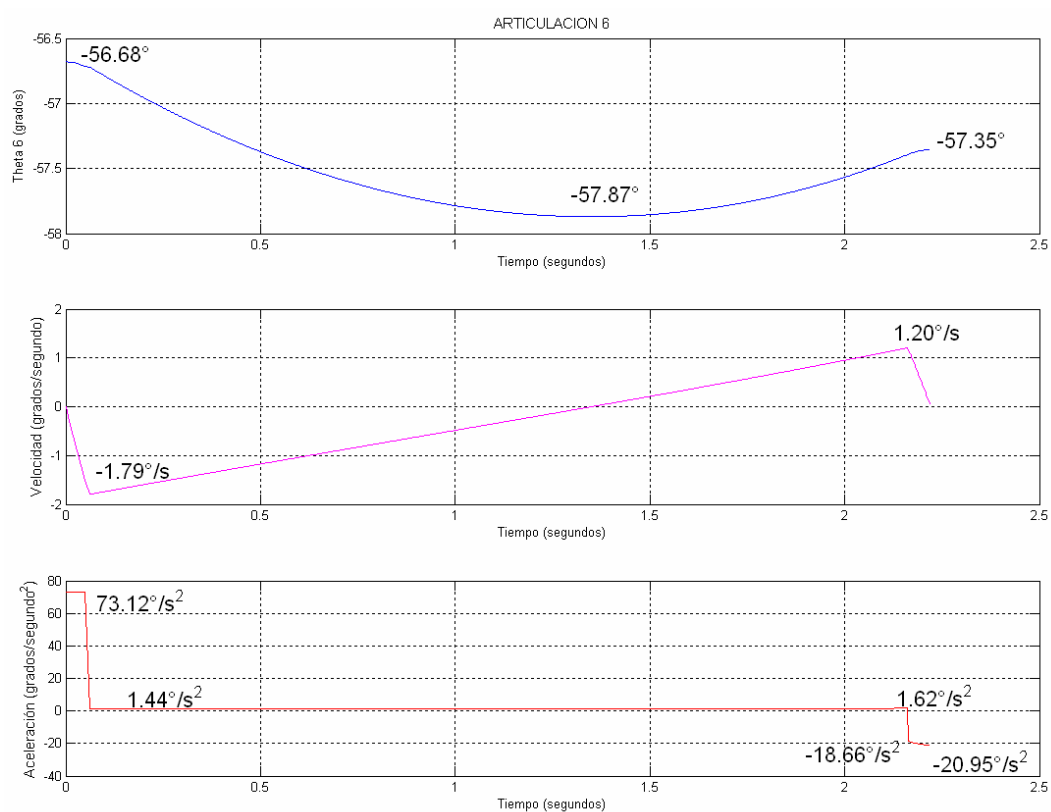


Figura A4.25. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

APENDICE 5

SEGMENTO A-B (Ejemplo 8.1.4)

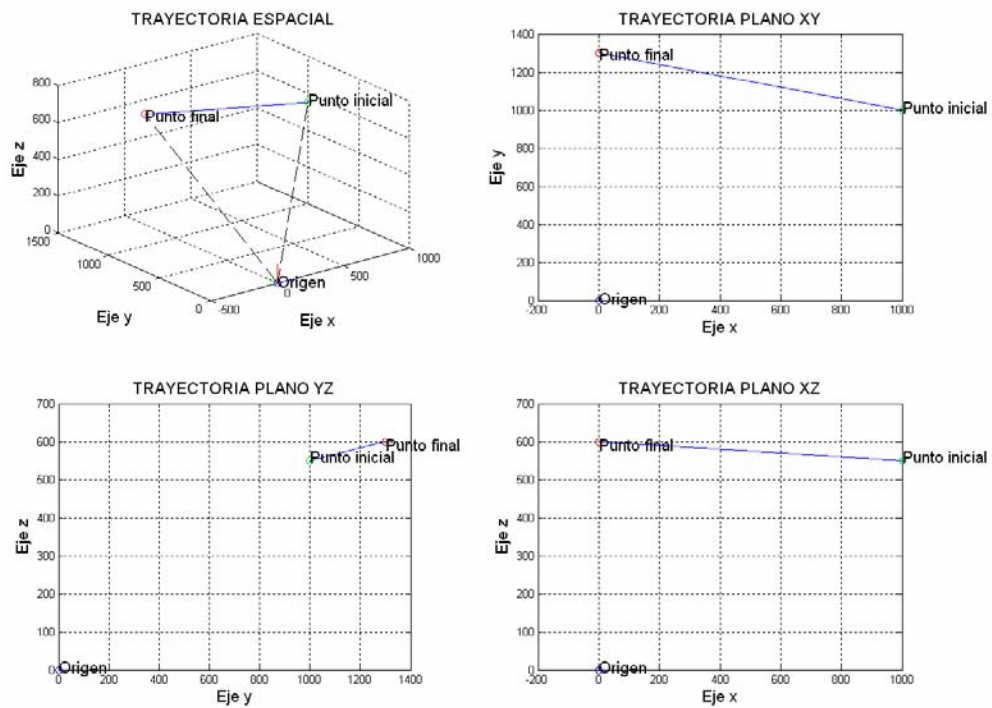


Figura A5.1. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Tramo A-B

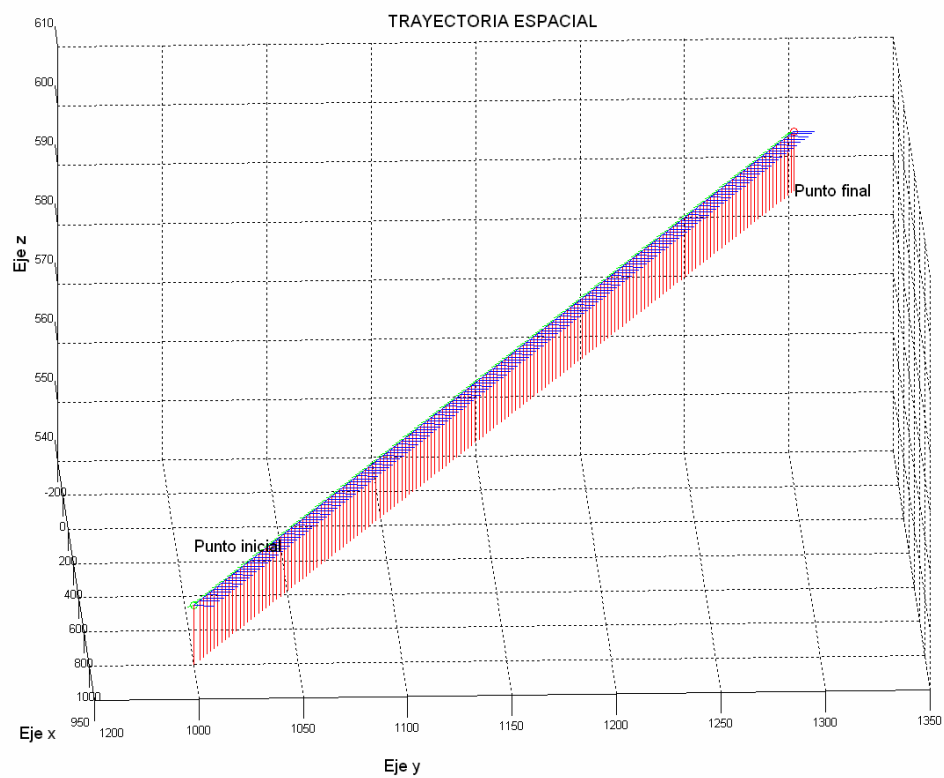


Figura A5.2. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Tramo A-B

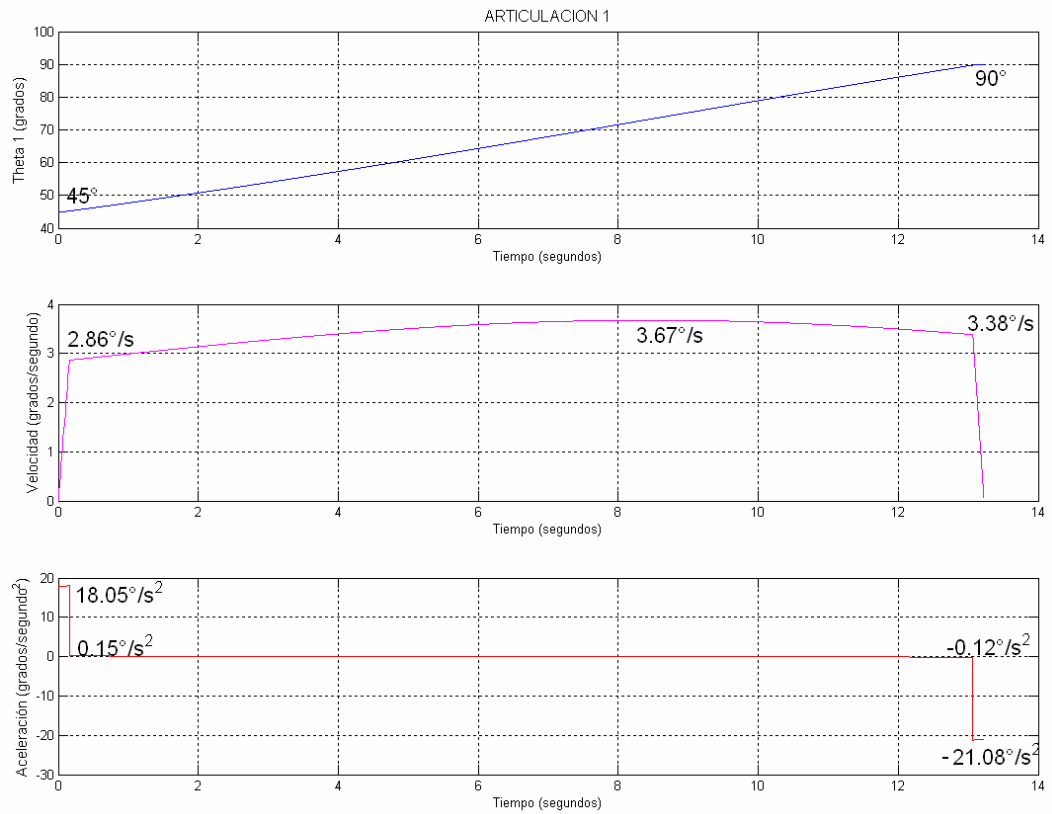


Figura A5.3. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

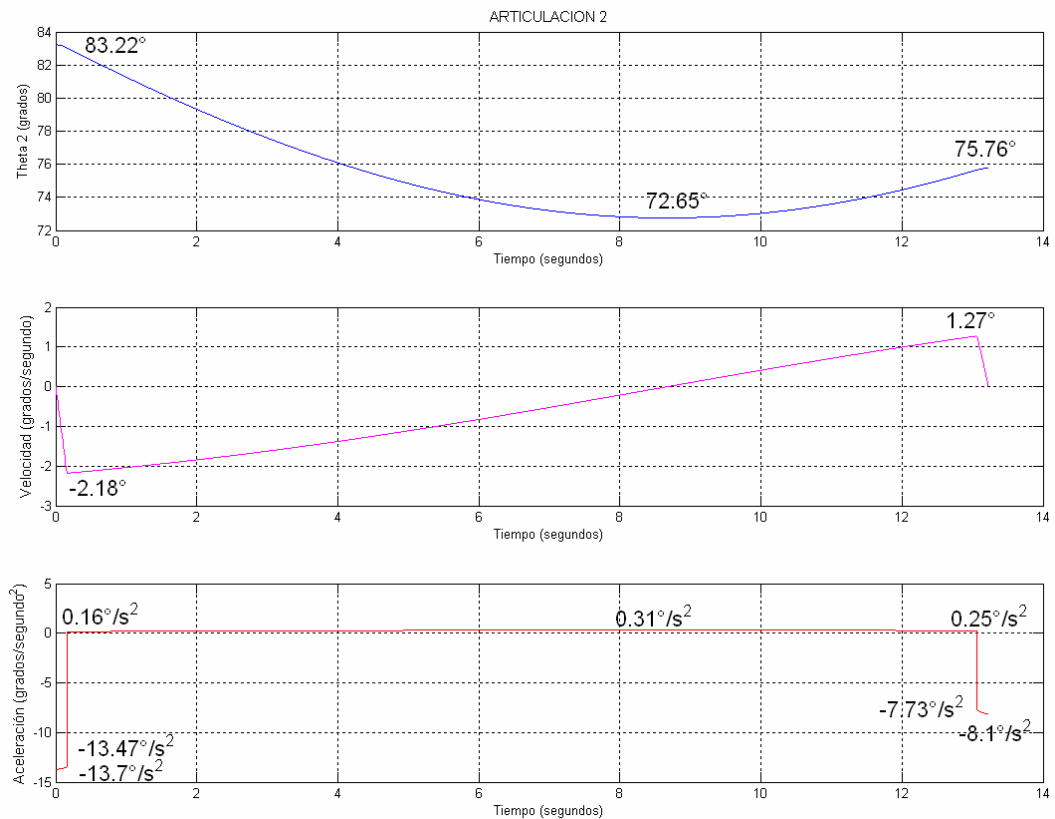


Figura A5.4. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

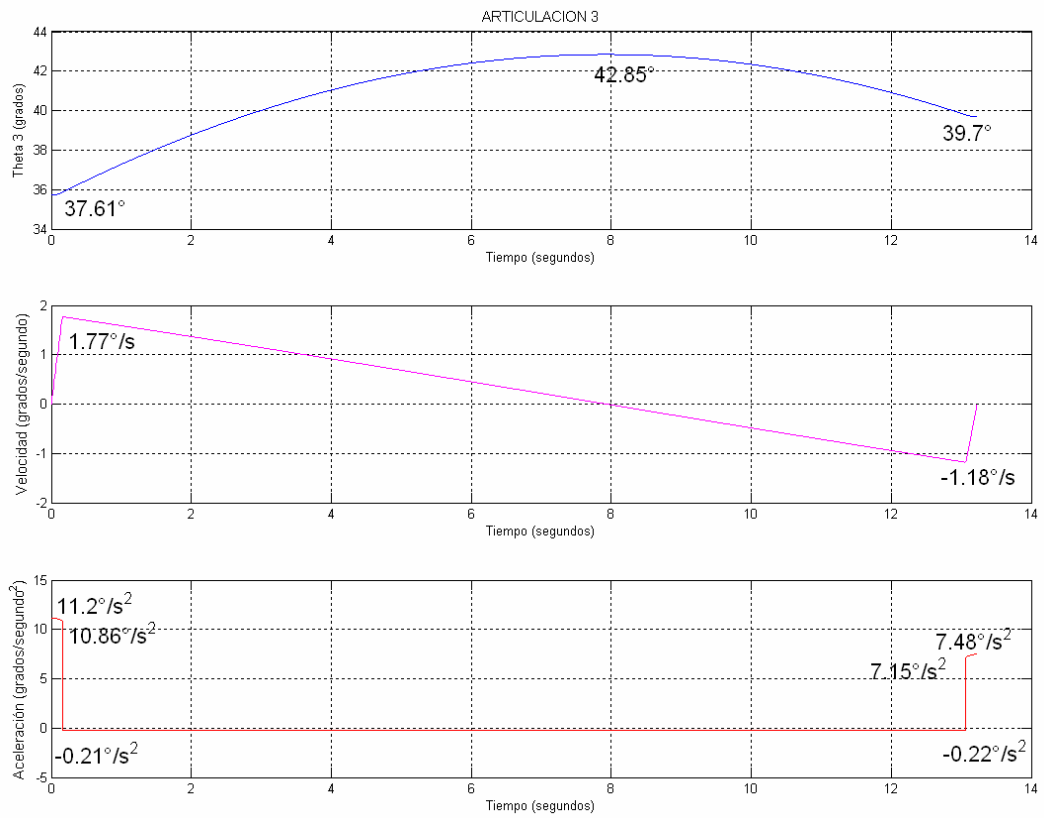


Figura A5.5. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

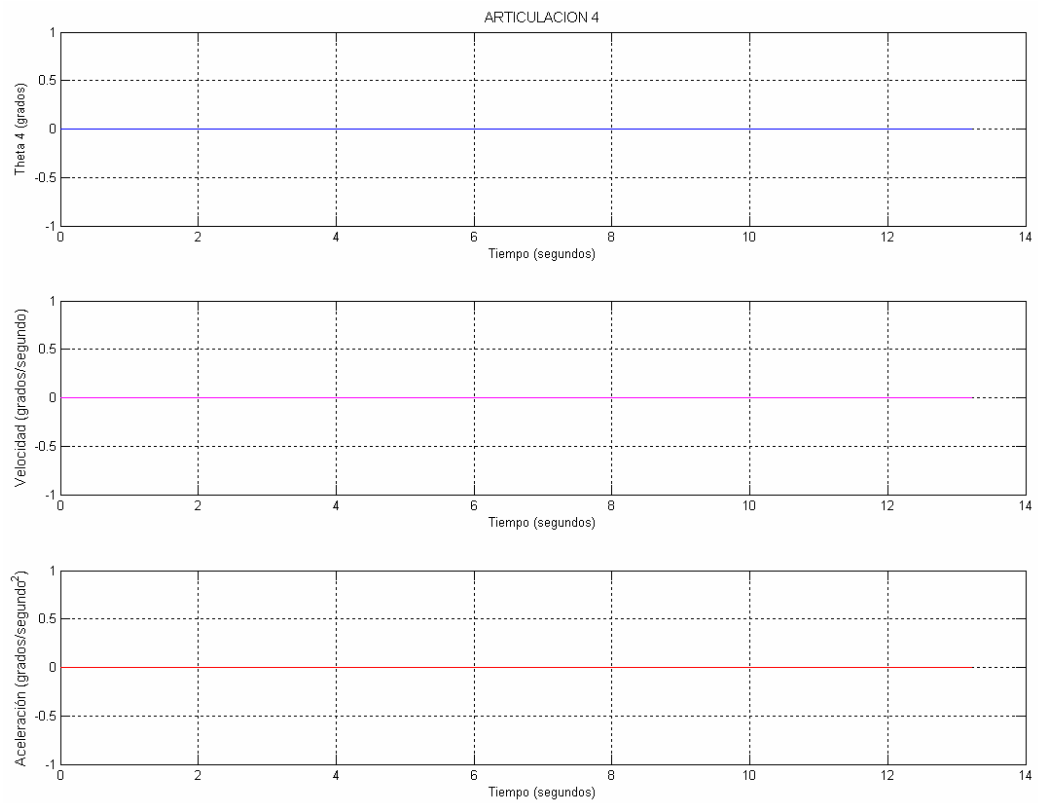


Figura A5.6. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

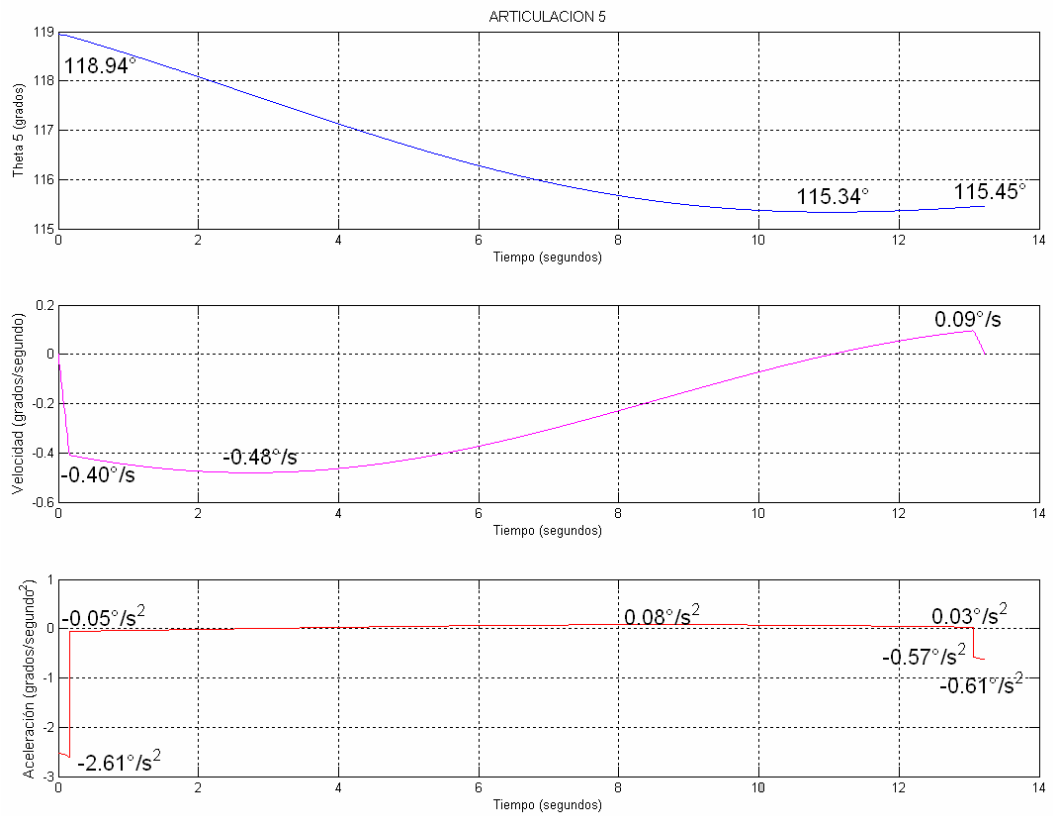


Figura A5.7. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

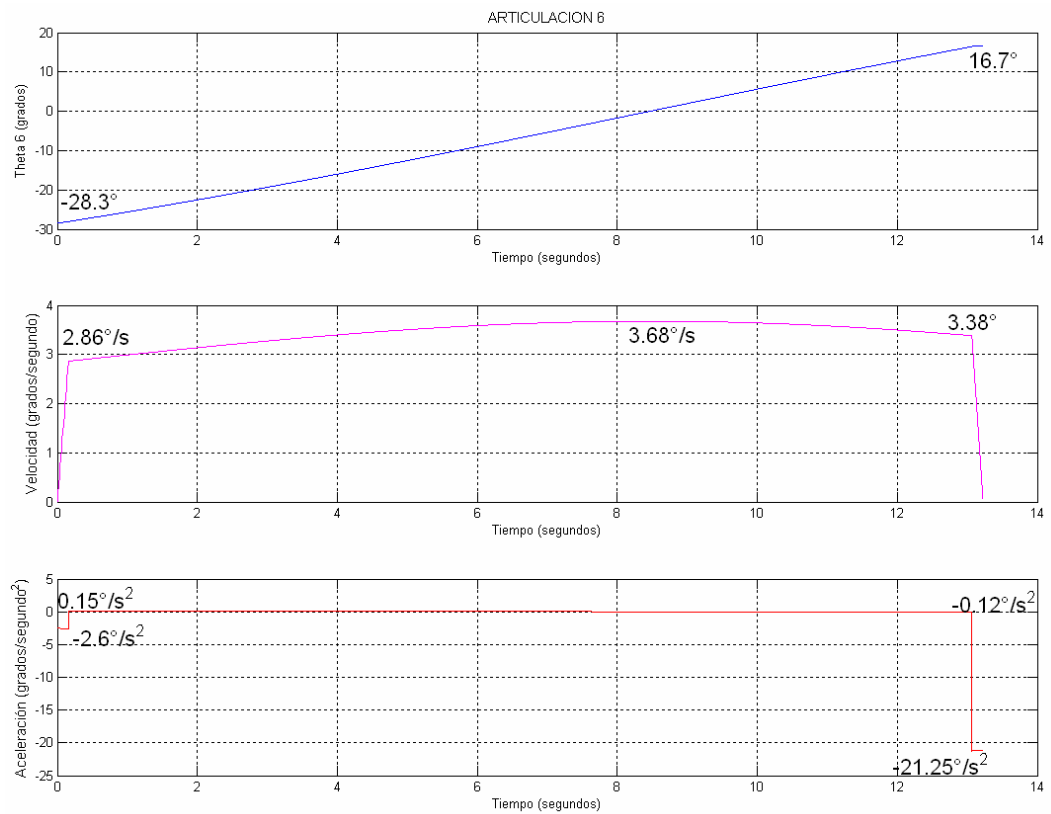


Figura A5.8. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

APENDICE 6

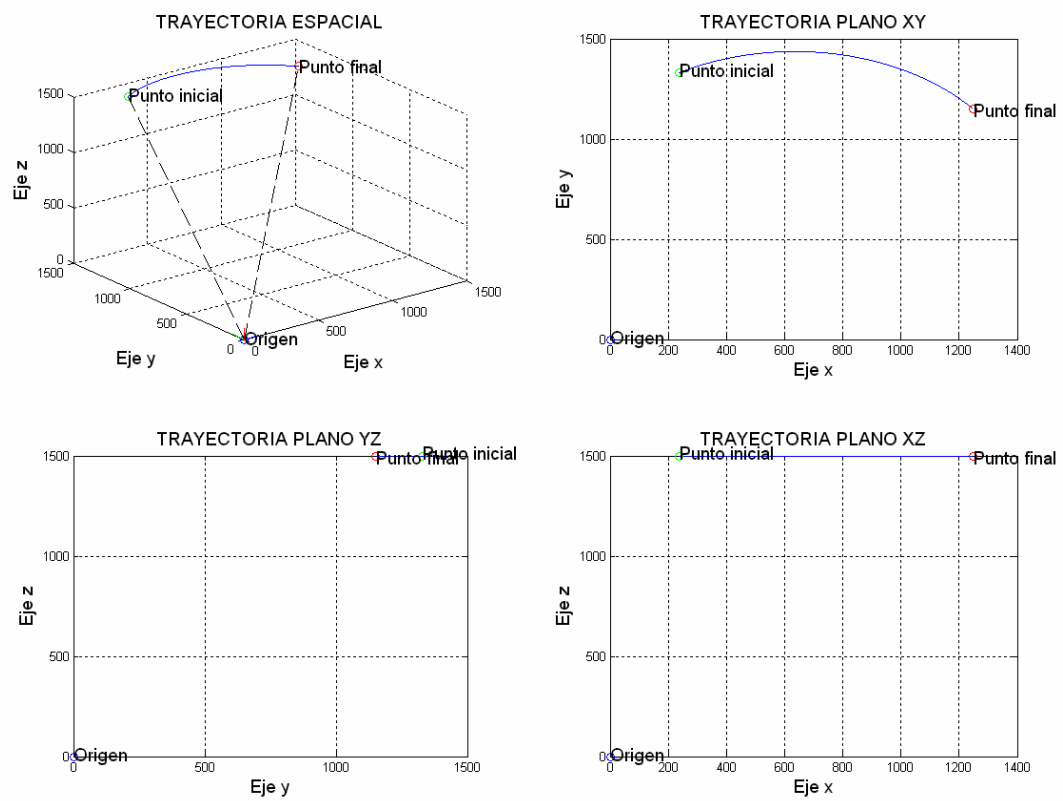


Figura A6.1. Trayectoria Espacial del extremo final del brazo. Segmento A-C

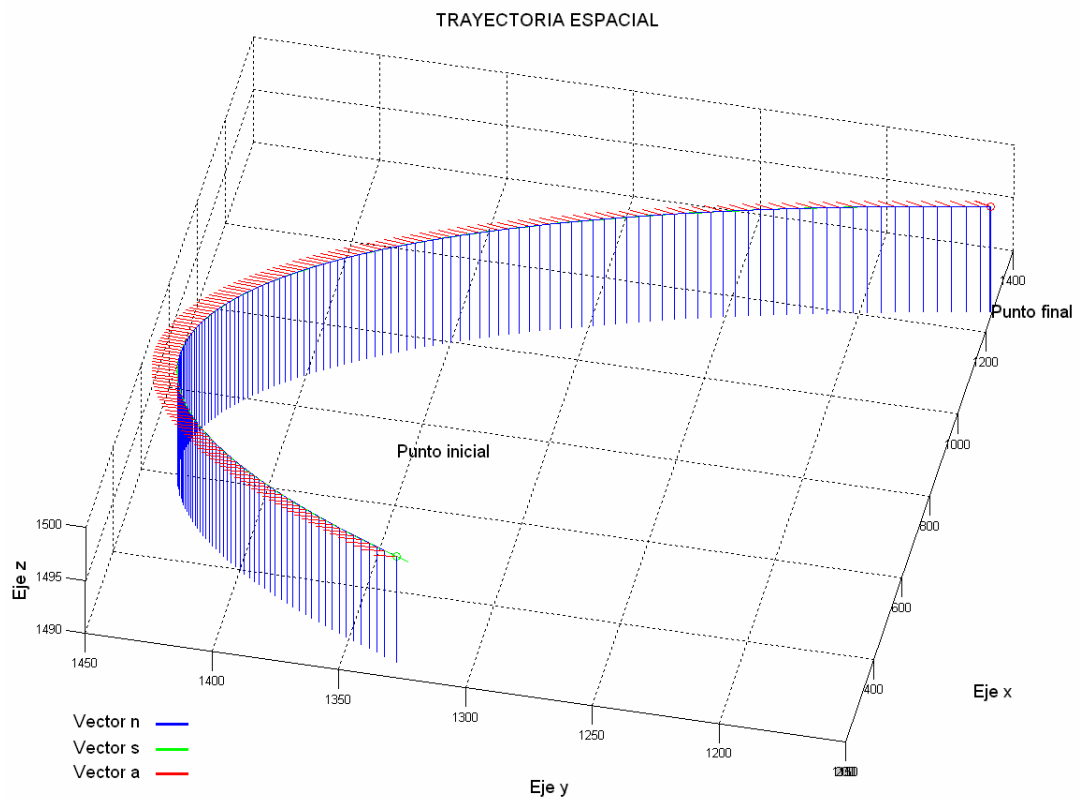


Figura A6.2. Orientaciones del extremo final del brazo (con herramienta). Segmento A-C

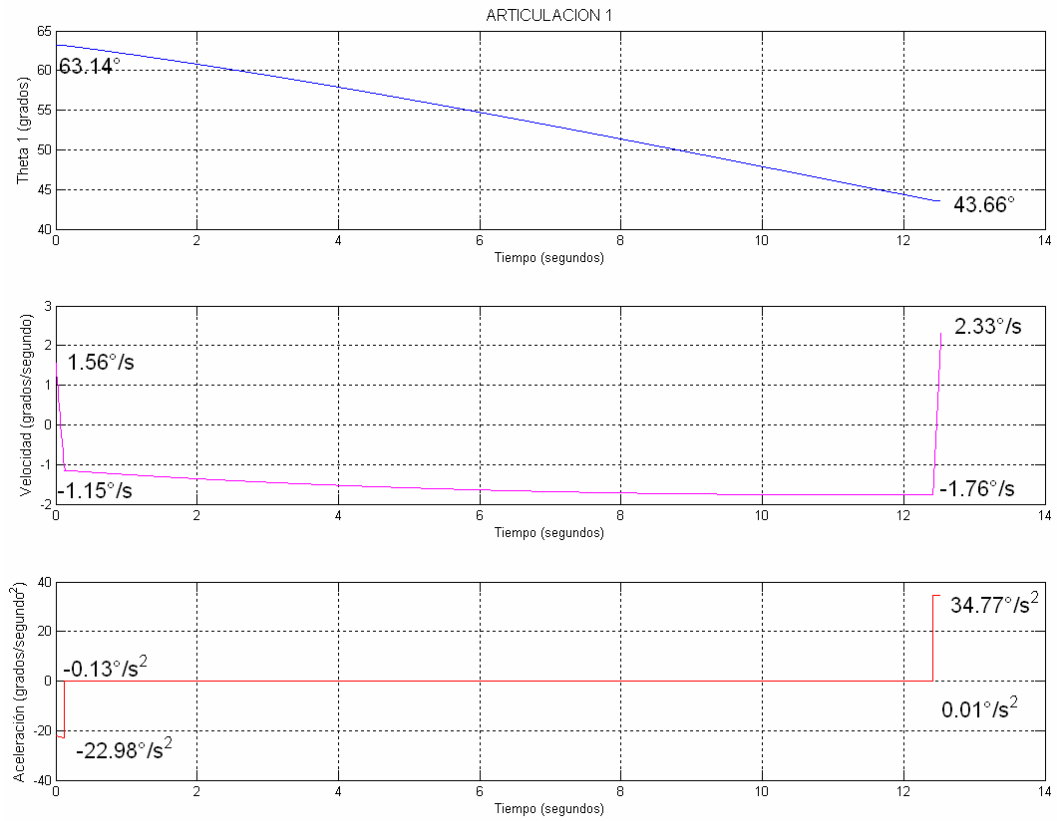


Figura A6.3. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 1

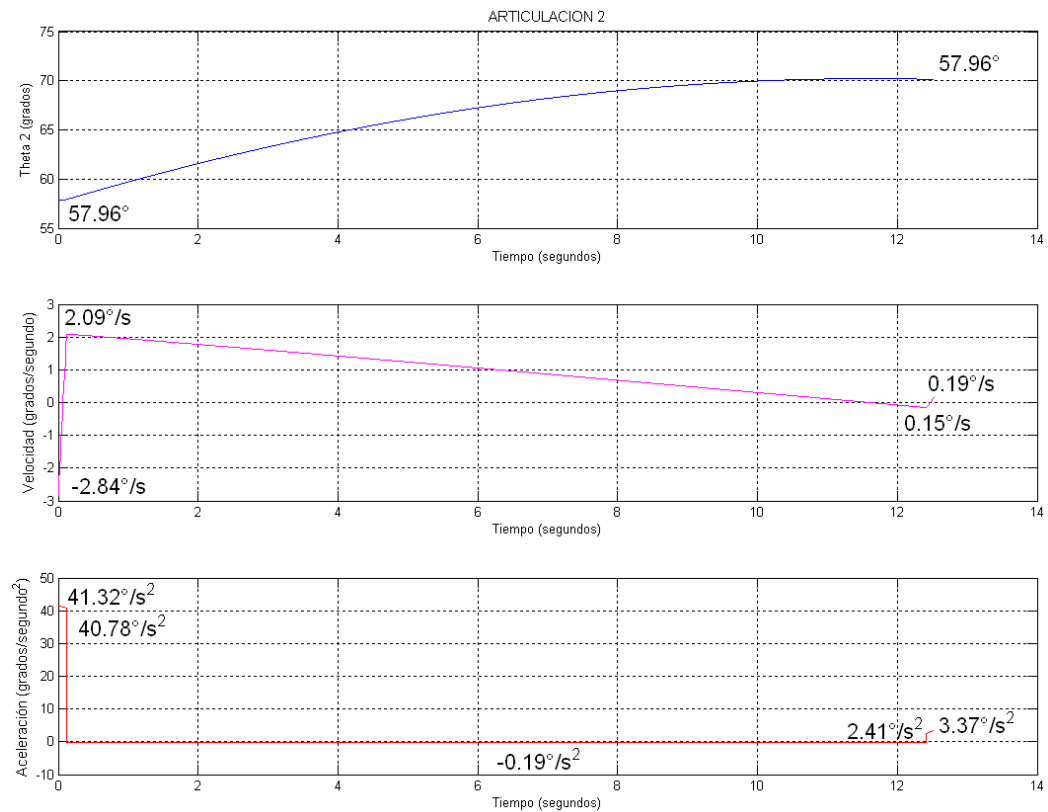


Figura A6.4. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 2

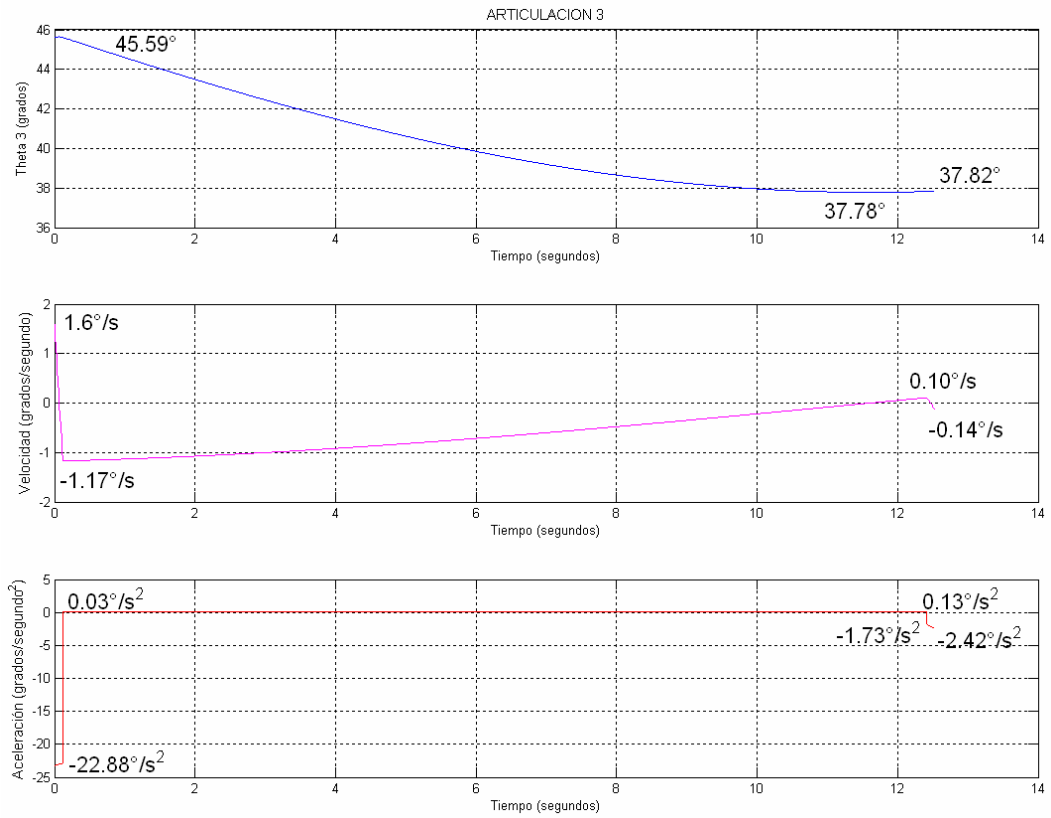


Figura A6.5. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 3

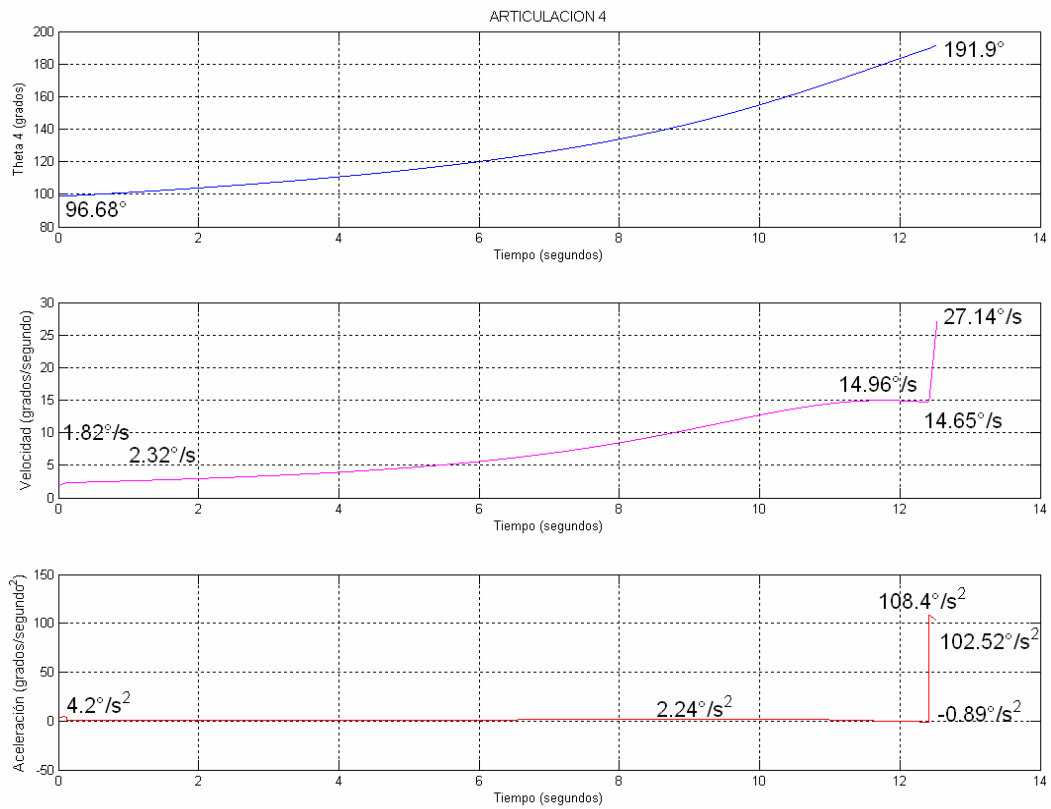


Figura A6.6. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 4

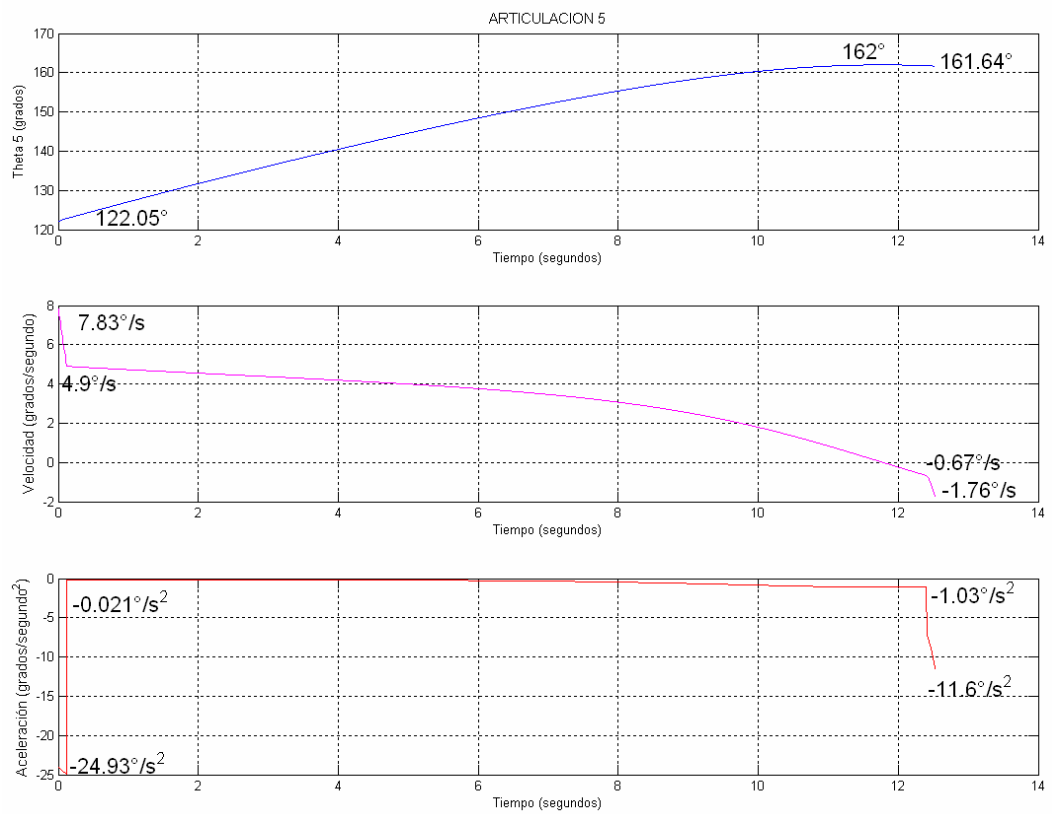


Figura A6.7. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 5

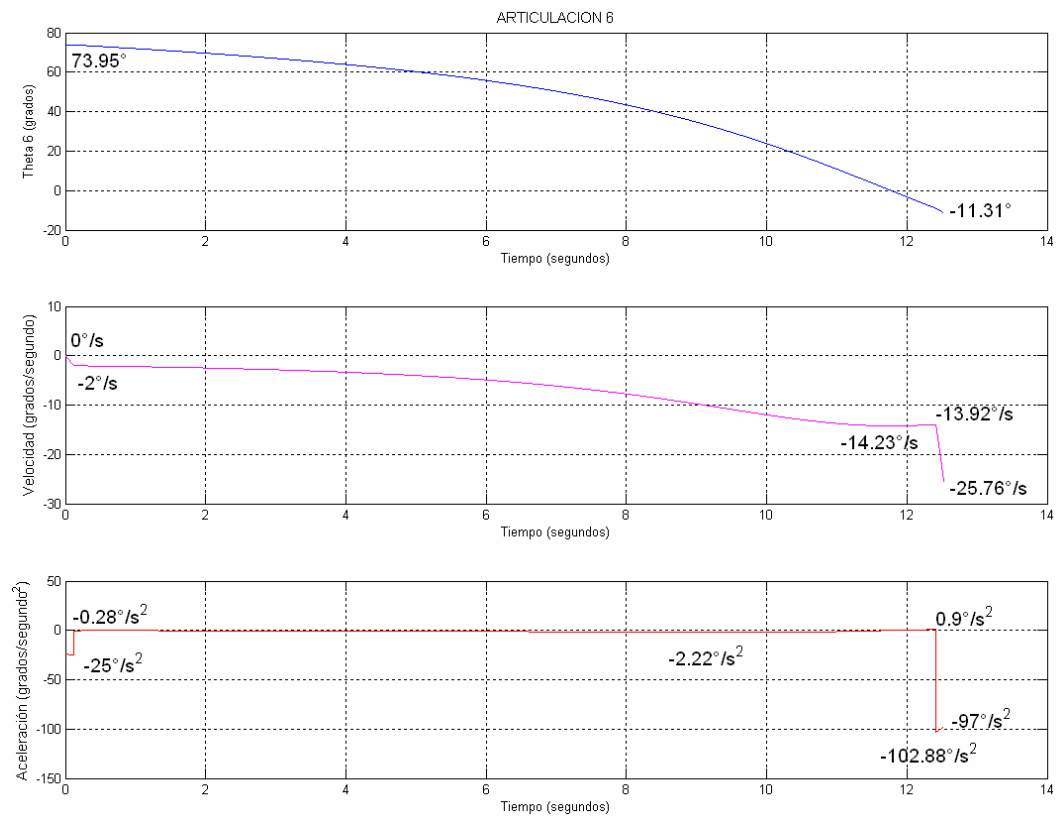


Figura A6.8. Posición, Velocidad y aceleración de la articulación 6

BIBLIOGRAFÍA

- Avallone, E. y Baumeister III, T. (1.998) Marks Manual del Ingeniero Mecánico, 9ª ed. Colombia. Editorial Mc Graw Hill.
- Barrientos, A. (1.997) Fundamentos de Robótica, México. Editorial McGraw Hill.
- Burden, R. y Faires, D. (1.998), Análisis Numérico, 6ª ed. México. Editorial Thompson Paraninfo.
- Craig, J. (2.003) Introduction to robotics: mechanics and control, 3ª ed. Estados Unidos. Editorial Prentice Hall.
- Davidson, J. y Hunt, K. (2004) Robots and screw theory: applications of kinematics and statics to robotics, Estados Unidos. Oxford University Press.
- Duffy, J. (1.996) Statics and kinematics with applications to robotics, Estados Unidos. Cambridge University Press.
- Groover, M., Weiss, M., Nagel, R., Odrey, N. (1.989). Robótica Industrial, tecnología, programación y aplicaciones, España. Editorial McGraw Hill.
- Hudson, R. (1.975) Manual del Ingeniero, México. Editorial Limusa.
- Koren, Y. (1.985) Robotics for engineers, Estados Unidos. Editorial McGraw Hill.
- Kreys, E. (1.976) Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, México. Editorial Limusa.
- King Sun, F., Gonzalez, R. (1.988) Robótica: control, detección, visión e inteligencia, España. Editorial Mc Graw Hill.
- López, P. y Neuma, J.F. (1.987) Introducción a la Robótica II (Comunicaciones Hombre-Máquina, Programación y Control), Madrid. Editorial Arcadia.
- Leithold, L. (1.998) El cálculo, 7ª ed. México. Oxford University Press.
- Marsden, J. y Tromba, A. (1.991) Calculo Vectorial, 3ª ed. Estados Unidos. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Mott, R. (1.995) Diseño de Elementos de Máquinas, 2ª ed. México. Editorial Prentice Hall.
- Nakamura, S. (1997) Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB, México. Prentice Hall Hispanoamericana.

- Pita, C. (1.995) Calculo Vectorial, México. Prentice Hall Hispanoamericana.
- Shigley, J. (1.999) Diseño en Ingeniería Mecánica, 4ª ed. México. Editorial Mc Graw Hill.
- Timoshenko, S. (1.976) Resistencia de Materiales, Madrid. Editorial Espasa-Calpe.
- Van Vlack, L. (1.980) Materiales para Ingeniería, México. Editorial Continental.
- Zill, D. (1.997) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, 6ª ed. México. International Thomson Editores.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

- Origen y desarrollo de la Robótica

http://cfievalladolid2.net/tecno/cyr_01/robotica/historia.htm [Consulta: 2006, Junio, 15].

- Introducción a la Robótica

<http://www.monografias.com/trabajos16/robotica-introduccion/robotica-introduccion.shtml> [Consulta: 2006, Junio, 22].

- La Robótica

<http://www.monografias.com/trabajos6/larobo/larobo.shtml> [Consulta: 2006, Junio, 27].

- Industrial robot

<http://www.answers.com/topic/industrial-robot> [Consulta: 2006, Julio, 8].

- Giro de un punto arbitrario del espacio alrededor de un eje arbitrario del espacio

http://www.josechu.com/mates/giros_espacio_es.htm [Consulta: 2006, Noviembre, 12].

- Quaternion

<http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions> [Consulta: 2006, Noviembre, 28].

- Cinemática

<http://proton.ucting.udg.mx/materias/robotica/r166/r78/r78.htm> [Consulta: 2007, Junio, 1].

- Cinemática

<http://64.233.169.104/search?q=cache:liJ8mwigL7f0J:www.vc.ehu.es/ingme/cinema.pdf+capitulo+4+cinematica&hl=es&ct=clnk&cd=4&gl=ve>

<http://www.unalmed.edu.co/~daristiz/preuniversitario/unidades/cinematica/definiciones/concepto/> [Consulta: 2007, Junio, 2].

http://automation21xx.expo21xx.com/10268_st3_control-equipment/default.htm [Consulta: 2007, Julio, 28].

- Kawasaki Robots

<http://www.kawasakirobotics.com> [Consulta: 2007, Julio, 28].

- Kuka Industrial Robots

<http://www.kuka.com> [Consulta: 2007, Julio, 28].

- Fanuc Robotics

<http://www.fanucrobotics.es> [Consulta: 2007, Julio, 29].

- Motoman Robotec

<http://www.motoman.de/de/index.html> [Consulta: 2007, Julio, 30].

- Denso Robotics

<http://www.densorobotics.com/> [Consulta: 2007: Julio, 30].

- Panasonic Industrial Europe

<http://www.panasonic-industrial.com/public/eu/en/> [Consulta: 2007, Julio, 29].

- Sweetser, D. (2.003) Doing Physics with Quaternions [Documento en línea]. Estados Unidos. Disponible: <http://world.std.com/~sweetser/quaternions/ps/book.pdf> [Consulta: 2007, Julio, 29].

- Sanchez, R. (2.004) Cinemática [Documento en línea]. España. Disponible: http://bacterio.uc3m.es/docencia/profesores/raul/fisica1-tel/ficheros/notas/pdf/curso04-05/cinematica_f1.pdf [Consulta: 2006, Agosto, 16].