

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DISEÑO ESTRUCTURAL Y CINEMÁTICO DE UN ROBOT ESCALADOR PARA INSPECCIÓN EN TANQUES DE ALMACENAMIENTO

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Brs.:
Castillo M., Héctor P.
De Mateus S., Joao R.
Para optar al título
De Ingeniero Mecánico

Caracas 2001

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

DISEÑO ESTRUCTURAL Y CINEMÁTICO DE UN ROBOT ESCALADOR PARA INSPECCIÓN EN TANQUES DE ALMACENAMIENTO

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Pedro Cadenas
TUTOR INDUSTRIAL : Dr. Juan Carlos Grieco

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Brs.:
Castillo M., Héctor P.
De Mateus S., Joao R.
Para optar al título
De Ingeniero Mecánico

Caracas 2001

© Héctor Pedro Castillo Martínez, 2001
© Joao Ricardo De Mateus Saraiva, 2001

Hecho el Depósito de Ley
Depósito Legal xxxxxxxx

DEDICATORIA

A Dios, a mis padres Adilia y Joao, por brindarme la oportunidad de ser. Mamá, de modo especial te dedico esta tesis porque gracias a ti soy lo que soy y he alcanzado mi meta.

A Mónica, por aparecer en mi vida, ser punto de apoyo, esperanza y cariño. Te amo.

A todos mis amigos y compañeros de la U.C.V.: Jhonny, Diego Rivas, Diego García, Gary, Ulises, Marcos, Pedro, Juan, Alex, Emmanuel, Hernando, Arturo, Héctor mi compañero de este trabajo y a otros que no me acuerdo en este momento. A todos ustedes, porque de una u otra forma hemos compartido, mucho o poco, pero hemos compartido. Muchas felicidades a los ingenieros y ánimo para los futuros...

Joao De Mateus

DEDICATORIA

A Santa Isabel, mi negrita y Héctor, mi padre. Viejos, nunca tendré toda la fortuna del mundo para pagarles lo que han hecho por mí.

A Miguel y Kary, mis hermanos... Ustedes son mi apoyo y motivación.

A mi Alma Mater... Un poco tarde te empecé a querer.

A mi linda Venezuela. Tu me lo has dado todo. Bendita seas tierra generosa. Ya no puedo alejarme de ti.

A mi amada patria Perú... Nunca te olvidé.

A Joao... Te confieso que sin tu ayuda nunca hubiese podido culminar este sueño.

A Mariana Romero... mi amiga desconocida.

Y en especial quiero dedicar este trabajo al ser que mas admiro... Jesucristo. Sólo tú sabes lo que hemos pasado.

Héctor Castillo Martínez

AGRADECIMIENTOS

Ningún trabajo o estudio es el resultado del esfuerzo de una sola persona, incluso cuando lo realiza un solo individuo. Un trabajo requiere la utilización de muchas fuentes, el resultado de éste, es producto de la disposición y esfuerzo de muchas personas y en especial de los autores del mismo.

A nivel personal, debemos expresar nuestro agradecimiento a las diferentes personas cuya asesoría y orientación nos permitieron clarificar las ideas y enfocarlas para hacer realidad este Trabajo de Grado.

Nuestro sincero agradecimiento:

A nuestra ilustre **Universidad Central de Venezuela**, por facilitarnos todos los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera.

Al Dr. **Juan Carlos Grieco**, por permitarnos desarrollar el presente trabajo en las instalaciones del Instituto de Ingeniería y haber sido el artífice de este proyecto.

A nuestro tutor **Prof. Ing. Pedro Cadenas**, quien nos brindó toda su colaboración, logrando aclarar las dudas que se presentaron en el camino y así lograr cumplir la meta propuesta de un modo satisfactorio.

En especial al **Ing. Orlando Reyes**, quien nos brindó toda su colaboración desinteresadamente sin la cual no hubiésemos podido culminar con éxito el proyecto.

En general a todas las personas, amigos y profesores que en algún momento nos apoyaron para la realización y cumplimiento de este Trabajo Especial de Grado.

Castillo M. Héctor P.; De Mateus S. Joao R.

DISEÑO ESTRUCTURAL Y CINEMÁTICO DE UN ROBOT ESCALADOR PARA INSPECCIÓN EN TANQUES DE ALMACENAMIENTO

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Pedro Cadenas. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de
Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica. 2001. 344 páginas.

Diseño, Estructura, Cinemático, Robot, Escalador

Se realizó el diseño de un robot escalador cuadrúpedo dotado de total autonomía de movimiento, con el objetivo de realizar labores de inspección en los tanques de almacenamiento de crudo y/o derivados de la industria petrolera. Para esto se hizo el diseño conceptual del robot, analizando cualitativamente los distintos elementos eléctricos y mecánicos que llevaría cada pata; eligiendo las mejores opciones en función del peso y la movilidad del robot. Se realizó un estudio cinemático a fin de determinar el movimiento angular relativo entre los eslabones que conforman la cadena cinemática de cada pata del robot. Este movimiento es generado a través de motores eléctricos de posición DC, que a su vez son controlados por medio de sensores (encoder) que garantizan una posición angular exacta entre los eslabones. Posteriormente se estudiaron los esfuerzos que soporta cada pata, analizando individualmente cada eslabón que conforma a la misma y estos valores se compararon con los obtenidos bajo el software Visual Nastran, verificando que no fallan. Finalmente se evaluaron los esfuerzos soportados por cada elemento mecánico, complementario del robot, comprobando su seguridad.

INDICE

	Pág.
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iv
RESUMEN	v
INDICE	vi
INDICE DE FIGURAS	xi
INDICE DE TABLAS	xv
INDICE DE GRAFICAS	xvii
INTRODUCCIÓN	1
 CAPITULO I: ANTECEDENTES	
1.1. Robot	4
1.2. Robótica	4
1.3. Historia de los robot	5
1.4. Como funcionan los robots	6
1.5. Tecnologías del futuro	7
1.6. Motivación	8
1.7. Desarrollos recientes en robots cuadrúpedos	10
1.7.1. Alexis	10
1.7.2. ARL Scout II	11
1.7.3. Geo-II	13
1.7.4. Pipe climbing robot	14
1.7.5. Rihmo	15
1.7.6. Silo4	16
 CAPITULO II: MARCO TEORICO	
2.1. Cinemática directa	18
2.1.1. Matrices de rotación	19
2.1.2. Matriz de rotación compuesta	23
2.1.3. Coordenadas homogéneas y matriz de transformación	24
2.1.4. Matriz de transformación homogénea compuesta	28
2.2. Cinemática inversa	30
2.3. Resistencia de materiales (Esfuerzos)	32
2.3.1. Consideraciones de esfuerzos y resistencia	32
2.3.2. Componentes del esfuerzo	33
2.3.3. Esfuerzos principales	34
2.3.4. Esfuerzos uniformemente distribuidos	35
2.3.5. Fuerza cortante y momento flexionante en vigas	36
2.3.6. Método de las secciones	38
2.3.7. Esfuerzos normales por flexión	39
2.3.8. Esfuerzos cortantes en vigas	43

2.3.9. Esfuerzos cortantes en vigas de sección rectangular	47
2.3.10. Flexión asimétrica	49
2.3.11. Teoría de la energía de deformación o teoría de Von Misses-Hencky	50
2.3.12. Teoría de concentración de esfuerzos	52
2.3.13. Carga variable	55
2.3.14. Límite de fatiga o límite de resistencia a la fatiga	56
2.3.15. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga	59
2.3.16. Esfuerzos fluctuantes	71
2.3.17. Resistencia a la fatiga en el caso de esfuerzos fluctuantes	73
2.3.18. Engranés cónicos	80
2.3.18.1. Análisis de fuerzas para engranes cónicos	84
2.3.18.2. Esfuerzos en los engranes cónicos	86
2.3.18.3. Fórmula de esfuerzos de la American Gear Manufacturers Association (AGMA)	86
2.3.19. Poleas y correas de sincronización	88
CAPITULO III: DISEÑO CONCEPTUAL	
3.1. Tipos de pata	93
3.1.1. Configuración tipo reptil	94
3.1.2. Configuración tipo insecto	95
3.2. Estudio comparativo de los tipos de patas	96
3.3. Diseño estructural de los eslabones	99
3.3.1. Esquema del cuerpo	99
3.3.2. Diseño de la pata	100
3.3.3. Diseño del pie (mecanismo de sujeción)	102
3.3.3.1. Ventosas de vacío	102
3.3.3.2. Pies magnéticos	102
3.3.3.3. Comparación entre las ventosas de vacío y los electroimanes	103
3.4. Dispositivos complementarios	104
3.4.1. Selección de los actuadores	104
3.4.2. Engranés cónicos	108
3.4.3. Poleas y correas de sincronización (timing)	109
3.4.4. Retenes	110
3.5. Modo de escalado	111
CAPITULO IV: CINEMÁTICA DEL ROBOT	
4.1. Cinemática directa del robot	114
4.2. Cinemática inversa del robot	123
4.2.1. Cinemática inversa del robot: pata en transferencia	126
4.2.1.1. Estudio cinemático del ángulo θ_1 : pata en transferencia	129
4.2.1.2. Estudio cinemático del ángulo θ_2 : pata en transferencia	130
4.2.1.3. Estudio cinemático del ángulo γ y θ_3 : pata en transferencia	133

4.2.2. Cinemática inversa del robot: cuerpo en movimiento	139
4.2.2.1. Estudio cinemático del ángulo θ_1 : cuerpo en movimiento	140
4.2.2.2. Estudio cinemático del ángulo θ_2 : cuerpo en movimiento	140
4.2.2.3. Estudio cinemático del ángulo γ y θ_3 : cuerpo en movimiento	142
4.3. Estudio de velocidades del robot	147
4.3.1. Determinación de la velocidad del ángulo θ_1	147
4.3.2. Determinación de la velocidad de los ángulos θ_2 y γ	148
4.3.2.1. Determinación de la velocidad de los ángulos θ_2 y γ : pata en transferencia	153
4.3.2.2. Determinación de la velocidad de los ángulos θ_2 y γ : cuerpo en movimiento	156
CAPITULO V: SOLICITACIONES EN LOS ESLABONES	
5.1. Pata en transferencia	163
5.1.1. Eslabón 3	164
5.1.1.1. Plano X_3Y_3	165
5.1.1.2. Plano X_3Z_3	178
5.1.2. Eslabón 2	185
5.1.2.1. Plano X_2Y_2	185
5.1.2.2. Plano X_2Z_2	199
5.2. Cuerpo en movimiento	207
5.2.1. Eslabón 3	214
5.2.1.1. Plano X_3Y_3	214
5.2.1.2. Plano X_3Z_3	217
5.2.2. Eslabón 2	218
5.2.2.1. Plano X_2Y_2	218
5.2.2.2. Plano X_2Z_2	228
5.2.3. Diagrama de fuerza cortante y momento flector	230
5.2.3.1. Eslabón 3	230
5.2.3.1.a. Plano X_3Y_3	230
5.2.3.1.b. Plano X_3Z_3	239
5.2.3.2. Eslabón 2	243
5.2.3.2.a. Plano X_2Y_2	243
5.2.3.2.b. Plano X_2Z_2	255
CAPITULO VI: ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN LOS ESLABONES	
6.1. Cálculo de los momentos de inercia	262
6.1.1. Para el eslabón 3	262
6.1.2. Para el eslabón 2	265
6.2. Cálculo de esfuerzos en el eslabón 3	267
6.2.1. Esfuerzo normal por flexión	268
6.2.2. Esfuerzo axial	270

6.2.3. Esfuerzo cortante	270
6.2.4. Esfuerzos principales	274
6.2.5. Criterio de falla de Von Misses-Hencky	277
6.2.6. Resistencia a la fatiga	278
6.3. Cálculo de esfuerzos en el eslabón 2	281
6.3.1. Esfuerzo normal por flexión	282
6.3.2. Esfuerzo axial	284
6.3.3. Esfuerzo cortante	285
6.3.4. Esfuerzos principales	285
6.3.5. Criterio de falla de Von Misses-Hencky	287
6.4. Análisis de esfuerzos por Visual Nastran	288
6.4.1. Esfuerzo del eslabón 2	289
6.4.2. Esfuerzo del eslabón 3	290
6.4.3. Esfuerzo del eslabón 1	291
6.4.4. Esfuerzo del eslabón 4	292
6.4.5. Esfuerzo en el cuerpo del robot	293
6.5. Deformación angular en los ejes que articulan los eslabones de la pata del robot	294
CAPITULO VII: CÁLCULO Y SELECCIÓN DE ACCESORIOS	
7.1. Cálculo de esfuerzos en las bocinas	298
7.1.1. Bocina entre el eslabón 1 y el cuerpo del robot	300
7.1.2. Bocina entre el eslabón 1 y el eslabón 2 (bocina 1-2)	302
7.1.3. Bocina entre el eslabón 3 y el eslabón 2 (bocina 2-3)	304
7.1.4. Bocina entre el eslabón 3 y el pie (bocina 3-4)	305
7.2. Cálculo de esfuerzos en los ejes de la bocinas	306
7.2.1. Eje que articula el eslabón 1 con el eslabón 2 (eje 1-2)	306
7.2.2. Eje que articula el eslabón 2 con el eslabón 3 (eje 2-3)	309
7.2.3. Eje que articula el eslabón 3 con el pie del robot (eje 3-4)	311
7.3. Cálculo de esfuerzos en las chavetas	313
7.3.1. Chavetas del eje 1-2	314
7.3.2. Chavetas del eje 2-3	315
7.4. Cálculo de esfuerzos y selección de retenes	316
7.5. Selección de poleas y correas	320
7.6. Cálculo de esfuerzos en los engranes	325
7.7. Cálculo de motores	332
CONCLUSIONES	341
RECOMENDACIONES	342
BIBLIOGRAFÍA	343
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	344
APENDICE A: Tablas y Gráficos	345
APÉNDICE B: Planos	370

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1.1 Alexis	10
FIGURA 1.2 ARL Scout II	11
FIGURA 1.3 Geo-II	13
FIGURA 1.4 Rohrkletterer	14
FIGURA 1.5 Rihmo	15
FIGURA 1.6 Silo4	16
FIGURA 2.1 Sistemas de coordenadas de referencia	19
FIGURA 2.2 Esquema de la cinemática inversa	31
FIGURA 2.3 Estado general de esfuerzos tridimensional	33
FIGURA 2.4 Direcciones de los esfuerzos principales	34
FIGURA 2.5 Diagrama de cuerpo libre de una viga con apoyos simples	36
FIGURA 2.6 Convenciones de signos para flexión y cortante	37
FIGURA 2.7 Convenciones de signos para flexión y cortante	39
FIGURA 2.8 Momento flexionante de una viga	39
FIGURA 2.9 Distribución de esfuerzos normales por flexión en una viga	42
FIGURA 2.10 Viga sometida a fuerza cortante y momento flexionante	43
FIGURA 2.11 Distribución de esfuerzos cortantes en una viga	47
FIGURA 2.12 Flexión asimétrica	49
FIGURA 2.13 Distribución de esfuerzos cerca de un orificio en una placa	53
FIGURA 2.14 Límites de fatiga en función de la resistencia a la tensión	57
FIGURA 2.15 Secciones de una viga	62
FIGURA 2.16 Falla de una pieza con temple superficial en flexión o torsión	67
FIGURA 2.17 Relaciones esfuerzo-tiempo	71
FIGURA 2.18 Diagrama de Goodman modificado	74
FIGURA 2.19 Gráfica de fallas por fatiga para esfuerzos medios	75
FIGURA 2.20 Diagrama de fatiga para acero AISI 4340	76
FIGURA 2.21 Diagrama de fatiga que representa criterios de falla	77
FIGURA 2.22 Línea de esfuerzo seguro	79
FIGURA 2.23 Nomenclatura de los engranes cónicos	80
FIGURA 2.24 Nomenclatura de los dientes de engranes rectos	82
FIGURA 2.25 Fuerzas que actúan en los dientes de un engrane cónico	85
FIGURA 2.26 Factores geométricos J para engranes cónicos	87
FIGURA 2.27 Transmisión de banda reguladora	89
FIGURA 3.1 Configuración tipo Reptil	94
FIGURA 3.2 Configuración tipo Reptil	95
FIGURA 3.3 Configuración tipo Insecto	95
FIGURA 3.4 Configuración tipo Insecto	96
FIGURA 3.5 Avance horizontal con giro del cuerpo	97
FIGURA 3.6 Avance horizontal sin giro del cuerpo	97

FIGURA 3.7	Esquema del cuerpo del robot	99
FIGURA 3.8	Esquema de las patas	100
FIGURA 3.9	Interferencia entre los eslabones 2 y 3	101
FIGURA 3.10	Esquema del pie magnético	104
FIGURA 3.11	Esquema del motor DC	105
FIGURA 3.12	Dispositivos en L de sujeción de los motores	108
FIGURA 3.13	Engranajes cónicos	109
FIGURA 3.14	Polea timing	110
FIGURA 3.15	Retenes para ejes DIN 471	110
FIGURA 4.1	Sistemas de referencia del robot	115
FIGURA 4.2	Superposición del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$	116
FIGURA 4.3	Rotación de $\alpha = 90^\circ$	116
FIGURA 4.4	Rotación de θ_1	116
FIGURA 4.5	Posición de las patas para los didintos movimientos	123
FIGURA 4.6	Vista lateral del desplazamiento S de la pata del robot	124
FIGURA 4.7	Vista superior del desplazamiento S de la pata del robot	125
FIGURA 4.8	Vista isométrica del movimiento de una pata	126
FIGURA 4.9	Vista lateral del movimiento de una pata	127
FIGURA 4.10	Vectores de las velocidades	148
FIGURA 4.11	Triángulo de velocidades	149
FIGURA 4.12	Detalle del triángulo de velocidades	149
FIGURA 5.1	Fuerzas actuantes sobre la pata en movimiento	164
FIGURA 5.2	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY	165
FIGURA 5.3	Torque necesario para mantener el pie paralelo a la pared	167
FIGURA 5.4	Fuerza F_4 que actúa sobre el eslabón 3	168
FIGURA 5.5	Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XY	173
FIGURA 5.6	Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XY	174
FIGURA 5.7	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XZ	178
FIGURA 5.8	Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XZ	179
FIGURA 5.9	Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XZ	180
FIGURA 5.10	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY	185
FIGURA 5.11	Fuerzas F_2 y F_3 que actúan sobre el eslabón 2	187
FIGURA 5.12	Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XY	193
FIGURA 5.13	Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XY	194
FIGURA 5.14	Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XY	195
FIGURA 5.15	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XZ	199
FIGURA 5.16	Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XZ	201
FIGURA 5.17	Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XZ	202
FIGURA 5.18	Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XZ	203
FIGURA 5.19	Fuerzas actuantes durante el movimiento del cuerpo	208
FIGURA 5.20	Vista de planta de la Figura 5.19	212
FIGURA 5.21	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY	214

FIGURA 5.22	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XZ	217
FIGURA 5.23	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY	218
FIGURA 5.24	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY	222
FIGURA 5.25	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY	222
FIGURA 5.26	Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XZ	228
FIGURA 5.27	Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XY	230
FIGURA 5.28	Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XY	234
FIGURA 5.29	Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XZ	239
FIGURA 5.30	Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XZ	240
FIGURA 5.31	Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XY	243
FIGURA 5.32	Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XY	247
FIGURA 5.33	Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XY	250
FIGURA 5.34	Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XZ	255
FIGURA 5.35	Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XZ	256
FIGURA 5.36	Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XZ	257
FIGURA 6.1	Eslabón 3	262
FIGURA 6.2	Secciones de corte del eslabón 3	262
FIGURA 6.3	Eslabón 2	265
FIGURA 6.4	Secciones de corte del eslabón 2	265
FIGURA 6.5	Sección donde ocurren los máximos momentos flectores	268
FIGURA 6.6	Fuerza de torsión en el eslabón 3	274
FIGURA 6.7	Distribución de esfuerzos por torsión	275
FIGURA 6.8	Sección donde ocurren los máximos momentos flectores	281
FIGURA 6.9	Sección donde ocurren los máximos momentos flectores	282
FIGURA 6.10	Análisis de esfuerzos (Von Mises) en el eslabón 2	289
FIGURA 6.11	Análisis de esfuerzos (Von Mises) en el eslabón 3	290
FIGURA 6.12	Análisis de esfuerzos (Von Mises) en el eslabón 1	291
FIGURA 6.13	Análisis de esfuerzos (Von Mises) en el eslabón 4	293
FIGURA 6.14	Análisis de esfuerzos (Von Mises) del cuerpo	294
FIGURA 6.15	Deformación angular	295
FIGURA 7.1	Momento soportado por la bocina	300
FIGURA 7.2	Fuerza radial distribuida en la bocina	300
FIGURA 7.3	Bocinas entre el eslabón 1 y 2	302
FIGURA 7.4	Bocina entre el eslabón 3 y el eslabón 2	304
FIGURA 7.5	Bocina entre el eslabón 3 y el pie	305
FIGURA 7.6	Fuerza cortante en el eje 1-2	309
FIGURA 7.7	Fuerza cortante en el eje 2-3	311
FIGURA 7.8	Fuerza cortante en el eje 3-4	313
FIGURA 7.9	Chaveta 1-2	315
FIGURA 7.10	Fuerza soportada por la chaveta	316
FIGURA 7.11	Fuerza axial en un reten	318
FIGURA 7.12	Anillo de retención para el eslabón 1	317
FIGURA 7.13	Disposición de las poleas en el robot	320

FIGURA 7.14 Fuerza en la correa	321
FIGURA 7.15 Relación de reducción	333

INDICE DE TABLAS

	Pág.
TABLA 2.1 Valor del esfuerzo cortante $\tau = C(V/A)$	48
TABLA 2.2 Factores de acabado de superficies	60
TABLA 2.3 Efecto de la temperatura de operación sobre el S_t del acero	65
TABLA 3.1 Características de distintos tipos de actuadores para robots	107
TABLA 4.1 Valores de θ_2 (pata en transferencia)	132
TABLA 4.2 Valores de γ (pata en transferencia)	134
TABLA 4.3 Valores de θ_3 (pata en transferencia)	136
TABLA 4.4 Valores del ángulo para el motor 4 (pata en transferencia)	138
TABLA 4.5 Valores de θ_2 (cuerpo en movimiento)	141
TABLA 4.6 Valores de γ (cuerpo en movimiento)	143
TABLA 4.7 Valores de θ_3 (cuerpo en movimiento)	145
TABLA 4.8 Valores de $\dot{\theta}_2$ (pata en transferencia)	153
TABLA 4.9 Valores de $\dot{\gamma}$ (pata en transferencia)	155
TABLA 4.10 Valores de $\dot{\theta}_2$ (cuerpo en movimiento)	157
TABLA 4.11 Valores de $\dot{\gamma}$ (cuerpo en movimiento)	159
TABLA 5.1 Componente R_{BX}	171
TABLA 5.2 Componente R_{BY}	172
TABLA 5.3 Momento M_{BZ}	173
TABLA 5.4 Fuerza cortante V_Y	177
TABLA 5.5 Momento flector M_Z	178
TABLA 5.6 Fuerza cortante V_Z	183
TABLA 5.7 Momento flector M_Y	184
TABLA 5.8 F_3 en función de S	189
TABLA 5.9 Componente R_{AX}	191
TABLA 5.10 Componente R_{AY}	192
TABLA 5.11 Fuerza F_2	193
TABLA 5.12 Fuerza cortante V_Y	198
TABLA 5.13 Momento flector M_Z	199
TABLA 5.14 Fuerza cortante V_Z	205
TABLA 5.15 Momento flector M_Y	206
TABLA 5.16 Fuerza axial R_{BX}	217
TABLA 5.17 Momento M_{BZ}	221
TABLA 5.18 Momento M_{CZ}	222
TABLA 5.19 Fuerza F_3	225
TABLA 5.20 Fuerza F_4	226
TABLA 5.21 Torque T_3	227

TABLA 5.22	Torque T_4	228
TABLA 5.23	Fuerza axial R_{AX}	229
TABLA 5.24	Fuerza Cortante V_Y (para $x = 100$ mm)	233
TABLA 5.25	Momento Flector M_Z (para $x = 100$ mm)	234
TABLA 5.26	Fuerza Cortante V_Y (para $x = L_3$)	236
TABLA 5.27	Momento Flector M_Z (para $x = L_3$)	237
TABLA 5.28	Fuerza Cortante V_Y	238
TABLA 5.29	Momento Flector M_Z	239
TABLA 5.30	Fuerza Cortante V_Z	242
TABLA 5.31	Momento Flector M_Y	243
TABLA 5.32	Fuerza Cortante V_Y (para $x = 40$ mm)	246
TABLA 5.33	Momento Flector M_Z (para $x = 40$ mm)	247
TABLA 5.34	Fuerza Cortante V_Y (para $x = 90$ mm)	249
TABLA 5.35	Momento Flector M_Z (para $x = 90$ mm)	250
TABLA 5.36	Fuerza Cortante V_Y (para $x = 170$ mm)	252
TABLA 5.37	Momento Flector M_Z (para $x = 170$ mm)	253
TABLA 5.38	Fuerza Cortante V_Y	254
TABLA 5.39	Momento Flector M_Z	255
TABLA 5.40	Fuerza Cortante V_Z	259
TABLA 5.41	Momento Flector M_Y	260
TABLA 6.1	Coeficientes de esfuerzo por torsión C_1 para sección rectangular	275

INDICE DE GRAFICAS

	Pág.
GRAFICA 4.1 Valores de θ_2 (pata en transferencia)	132
GRAFICA 4.2 Valores de γ (pata en transferencia)	134
GRAFICA 4.3 Valores de θ_3 (pata en transferencia)	136
GRAFICA 4.4 Relación angular de θ_2 y γ (pata en transferencia)	137
GRAFICA 4.5 Relación angular del motor 4 (pata en transferencia)	139
GRAFICA 4.6 Valores de θ_2 (cuerpo en movimiento)	141
GRAFICA 4.7 Valores de γ (cuerpo en movimiento)	143
GRAFICA 4.6 Valores de θ_3 (cuerpo en movimiento)	145
GRAFICA 4.9 Relación angular de θ_2 y γ (cuerpo en movimiento)	146
GRAFICA 4.10 Valores de $\dot{\theta}_2$ (pata en transferencia)	154
GRAFICA 4.11 Valores de $\dot{\gamma}$ (pata en transferencia)	155
GRAFICA 4.12 Relación entre las velocidades $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ (pata en transferencia)	156
GRAFICA 4.13 Valores de $\dot{\theta}_2$ (cuerpo en movimiento)	158
GRAFICA 4.14 Valores de $\dot{\gamma}$ (cuerpo en movimiento)	159
GRAFICA 4.15 Relación entre las velocidades $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ (cuerpo en movimiento)	160
GRAFICA 5.1 Relación de ángulos θ_2 , γ y $(\theta_2 + \gamma)$	169
GRAFICA 5.2 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 3. Plano XY	177
GRAFICA 5.3 Diagrama de momento flector en el eslabón 3. Plano XY	178
GRAFICA 5.4 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 3. Plano XZ	183
GRAFICA 5.5 Diagrama de momento flector en el eslabón 3. Plano XZ	184
GRAFICA 5.6 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 2. Plano XY	198
GRAFICA 5.7 Diagrama de momento flector en el eslabón 2. Plano XY	199
GRAFICA 5.8 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 2. Plano XZ	205
GRAFICA 5.9 Diagrama de momento flector en el eslabón 2. Plano XZ	206
GRAFICA 5.10 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 3. Plano XY	238
GRAFICA 5.11 Diagrama de momento flector en el eslabón 3. Plano XY	239
GRAFICA 5.12 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 3. Plano XZ	242
GRAFICA 5.13 Diagrama de momento flector en el eslabón 3. Plano XZ	243
GRAFICA 5.14 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 2. Plano XY	254
GRAFICA 5.15 Diagrama de momento flector en el eslabón 2. Plano XY	255
GRAFICA 5.16 Diagrama de fuerza cortante en el eslabón 2. Plano XZ	260
GRAFICA 5.17 Diagrama de momento flector en el eslabón 2. Plano XZ	261

INTRODUCCIÓN

En un mundo globalizado como el actual, la adopción de tecnologías foráneas para ser aplicadas a las labores industriales de nuestras empresas, es de vital importancia si se pretende mantenerse a la vanguardia o por lo menos, sobrevivir en un mercado cada vez más competitivo.

Una de estas tecnologías, que data desde hace unas cuantas décadas, es la robótica. Hoy en día los robots industriales han ganado una amplia popularidad como componentes esenciales en la automatización de los sistemas de manufactura y labores de inspección. Entre los avales que respalda dicha popularidad se pueden mencionar: el incremento de la productividad, la mejora de la calidad y la posibilidad de excluir de tareas peligrosas al operador humano.

En pro de sumarnos a estos retos tecnológicos, se presenta este Trabajo de Grado que tiene como finalidad contribuir, aunque en pequeña proporción, al desarrollo de la robótica en nuestro país. Sin embargo, no pretende ser una guía especializada en robótica, ya que este es un campo muy extenso y completo. Se trata más bien, del diseño estructural de un robot escalador cuadrúpedo, dotado de autonomía de movimiento; cuyo objetivo es realizar labores de inspección en los tanques de almacenamiento de crudo y/o derivados de la industria petrolera y termoeléctrica. Por ello, el robot puede llevar como equipo de inspección: una cámara filmadora, un equipo de ultrasonido para detectar posibles micro fisuras, un pequeño equipo de soldadura, un durómetro portátil, etc. Estos dispositivos se consideran, aquí, como una carga útil (que no sobrepase los 12 Kg.) y un volumen útil.

El trabajo está estructurado en VII capítulos:

El capítulo I muestra algunas definiciones básicas referidas a la robótica. También se presentan fotos y algunas principales características de los robots caminantes más recientes.

En el capítulo II se presentan aspectos de la teoría necesaria –sobre todo en la parte de esfuerzos en los elementos mecánicos– para comprender mejor el contenido de la obra.

El capítulo III se refiere al diseño conceptual, es decir, la forma física que tendrá el robot y se justifica cualitativamente, como y porque están colocados cada uno de los elementos que componen los brazos (también llamados patas) del robot.

Para efectos de control es menester un estudio completo de las variaciones angulares en las articulaciones de los brazos del robot que permitan conocer la posición exacta del mismo. Esto se hace, en el capítulo IV, a través de un enfoque geométrico y algebraico.

En el capítulo V se analizan las fuerzas y momentos a los que están solicitados los eslabones que forman la cadena cinemática de un brazo robótico, aplicada al robot escalador.

Los esfuerzos soportados por los brazos son analizados en el capítulo VI, en concordancia con la lógica del movimiento.

El último capítulo trata del cálculo y selección de los dispositivos mecánicos, complementarios e imprescindibles, que lleva cada uno de los brazos del robot como lo son: motores, ejes, bocinas, engranes, poleas, etc.

Al final del Trabajo se incluyen los planos del robot y un CD que permite observar al robot escalador y rotarlo en el espacio, a fin de apreciar cualquier vista que se requiera de él. Está hecho bajo el software Mechanical Desktop v.4. También se incluye en el CD la animación del movimiento, para ello es necesario tener como soporte el programa Jasc Animation Shop v.3.0 o superior.

La labor impuesta ha sido bastante compleja, tanto para dar a la redacción de la obra, la estructura y cohesión propias de un conjunto armónico, como por la gran cantidad de variables que están presentes durante el movimiento del robot. Por tal razón se ha procurado en lo posible de representar con dibujos, lo que a veces con palabras resulta muy difícil de explicar.

Finalmente, esperamos que este Trabajo de Grado sea de positiva utilidad y contribuya a sembrar el espíritu de investigación en ésta área tan interesante como lo es la robótica.

Los Autores.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES

Antes de conocer de cerca lo que ha sido la historia de los robots y mostrar un poco los desarrollos más recientes en robots caminantes, es necesario resaltar los siguientes conceptos básicos:

1.1. Robot

Máquina controlada por ordenador y programada para moverse, manipular objetos y realizar trabajos a la vez que interacciona con su entorno. Los robots son capaces de realizar tareas repetitivas de forma más rápida, barata y precisa que los seres humanos. El término procede de la palabra checa robota, que significa 'trabajo obligatorio'; fue empleado por primera vez en la obra teatral de 1921 R.U.R. (Robots Universales de Rossum) por el novelista y dramaturgo checo Karel Capek. Desde entonces se ha empleado la palabra robot para referirse a una máquina que realiza trabajos para ayudar a las personas o efectúa tareas difíciles o desagradables para los humanos. [2]

1.2. Robótica

Rama muy reciente de la informática que coordina las distintas disciplinas técnicas y teóricas con el objeto de diseñar y crear estructuras de funcionamiento electromecánico que tienden a la automaticidad. El robot, que será el producto final de esta investigación, se ha desarrollado con gran auge a partir de la introducción progresiva de elementos de microelectrónica y microinformática. El esquema básico del robot es un sistema de sensores, un ordenador y un sistema de actuadores. Su estructura física está constituida por uniones mecánicas simples de traslación y rotación. Estas uniones son los soportes de los actuadores, a través de los cuales se van a desarrollar las funciones, dirigidas y controladas por el ordenador de acuerdo con el procesamiento de la información remitida por los sensores. Recientes

investigaciones han hecho posible la puesta a punto de los sensores de visión y tacto, mientras los sensores auditivos, que permiten la introducción de sonidos como datos u órdenes del proceso, se encuentran en una fase experimental muy avanzada y existen ya en el mercado microordenadores basados en ellos.[1]

1.3. Historia de los robots.

El concepto de máquinas automatizadas se remonta a la antigüedad, con mitos de seres mecánicos vivientes. Los autómatas, o máquinas semejantes a personas, ya aparecían en los relojes de las Iglesias medievales, y los relojeros del siglo XVIII eran famosos por sus ingeniosas criaturas mecánicas.

Algunos de los primeros robots empleaban mecanismos de realimentación para corregir errores, mecanismos que siguen empleándose actualmente. Un ejemplo de control por realimentación es un bebedero que emplea un flotador para determinar el nivel del agua. Cuando el agua cae por debajo de un nivel determinado, el flotador baja, abre una válvula y deja entrar más agua en el bebedero. Al subir el agua, el flotador también sube, y al llegar a cierta altura se cierra la válvula y se corta el paso del agua.

El control por realimentación, el desarrollo de herramientas especializadas y la división del trabajo en tareas más pequeñas que pudieran realizar obreros o máquinas fueron ingredientes esenciales en la automatización de las fábricas en el siglo XVIII.

A medida que mejoraba la tecnología se desarrollaron máquinas especializadas para tareas como poner tapones a las botellas o verter caucho líquido en moldes para neumáticos. Sin embargo, ninguna de estas máquinas tenía la versatilidad del brazo humano, y no podían alcanzar objetos alejados y colocarlos en la posición deseada.

El desarrollo del brazo artificial multiarticulado, o manipulador, llevó al moderno robot. El inventor estadounidense George Devol desarrolló en 1954 un brazo primitivo que se podía programar para realizar tareas específicas. En 1975, el ingeniero mecánico estadounidense Víctor Scheinman, cuando estudiaba la carrera en la Universidad de Stanford, en California, desarrolló un manipulador polivalente realmente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable (PUMA). El PUMA era capaz de mover un objeto y colocarlo en cualquier orientación en un lugar deseado que estuviera a su alcance. El concepto básico multiarticulado del PUMA es la base de la mayoría de los robots actuales. [2]

1.4. Como funcionan los robots.

El diseño de un manipulador robótico se inspira en el brazo humano, aunque con algunas diferencias. Por ejemplo, un brazo robótico puede extenderse telescópicamente, es decir, deslizando unas secciones cilíndricas dentro de otras para alargar el brazo. También pueden construirse brazos robóticos de forma que puedan doblarse como la trompa de un elefante. Las manos están diseñadas para imitar la función y estructura de la mano humana. Muchos robots están equipados con manos especializadas para agarrar dispositivos concretos, como una gradilla de tubos de ensayo o un soldador de arco.

Las articulaciones de un brazo robótico suelen moverse mediante motores eléctricos o cilindros hidráulicos y neumáticos. En la mayoría de los robots, el pie o el brazo se mueve de una posición a otra cambiando su orientación. Una computadora calcula los ángulos de articulación necesarios para llevar la mano o pie del robot a la posición deseada, en un proceso conocido como cinemática inversa.

Algunos brazos multi-articulados están equipados con servo controladores, o controladores por realimentación, que reciben datos de un ordenador. Cada

articulación del brazo tiene un dispositivo que mide su ángulo y envía ese dato al controlador. Si el ángulo real del brazo no es igual al ángulo calculado para la posición deseada, el servo controlador mueve la articulación hasta que el ángulo del brazo coincida con el ángulo calculado.

Cualquier robot diseñado para moverse en un entorno no estructurado o desconocido necesita múltiples sensores y controles (por ejemplo, sensores ultrasónicos o infrarrojos) para evitar los obstáculos. Los robots como los vehículos planetarios de la NASA necesitan una gran cantidad de sensores y unas computadoras de a bordo muy potentes para procesar la compleja información que les permite moverse. Eso es particularmente cierto para robots diseñados para trabajar en estrecha proximidad de seres humanos, como robots que ayuden a personas discapacitadas o sirvan comidas en un hospital. La seguridad debe ser esencial en el diseño de robots para el servicio humano. [2]

1.5. Tecnologías del futuro.

Las máquinas automatizadas ayudarán cada vez más a los humanos en la fabricación de nuevos productos, el mantenimiento de las infraestructuras y el cuidado de hogares y empresas. Los robots podrán fabricar nuevas autopistas, construir estructuras de acero para edificios, limpiar conducciones subterráneas o cortar el césped. Ya existen prototipos que realizan todas esas tareas.

Una tendencia importante es el desarrollo de sistemas micro electromecánicos, cuyo tamaño va desde centímetros hasta milímetros. Estos robots minúsculos podrían emplearse para avanzar por vasos sanguíneos con el fin de suministrar medicamentos o eliminar bloqueos arteriales. También podrían trabajar en el interior de grandes máquinas para diagnosticar con antelación posibles problemas mecánicos.

Puede que los cambios más espectaculares en los robots del futuro provengan de su capacidad de razonamiento cada vez mayor. El campo de la inteligencia artificial está pasando rápidamente de los laboratorios universitarios a la aplicación práctica en la industria, y se están desarrollando máquinas capaces de realizar tareas cognitivas como la planificación estratégica o el aprendizaje por experiencia. El diagnóstico de fallos en aviones o satélites, el mando en un campo de batalla o el control de grandes fábricas correrán cada vez más a cargo de ordenadores inteligentes. [2]

1.6. Motivación.

Los robots industriales han ganado una amplia popularidad como componentes esenciales en la automatización de los sistemas de manufactura. Entre los avales que respaldan dicha popularidad se pueden mencionar la reducción de los costos de producción, el incremento de la productividad, la mejora de la calidad y la posibilidad, de excluir de tareas peligrosas al operador humano. La robótica industrial viene a ser la disciplina relacionada con el diseño y control de robots y su utilización en la industria, en donde se pueden encontrar, en la mayoría de las aplicaciones, ambientes fuertemente estructurados por lo que se requieren robots con bajos niveles de autonomía.

Son muchos los robots industriales que han sido desarrollados y puestos en operación en plantas industriales. Las primeras incursiones de la robótica dentro de la industria en tareas como transferencia de materiales y pinturas han dado paso a otras aplicaciones cada vez más complejas que permiten explotar las capacidades fundamentales de los actuales robots industriales, como son el manejo de materiales, la manipulación y el control de calidad. Hoy en día es común encontrar robots realizando labores de almacenamiento, embalaje, soldadura por arco o por punto, desbarbado o rectificado, montaje de circuitos electrónicos, control de calidad, etc.

Movidos por el deseo de llevar la robótica a entornos más complejos, muchos investigadores han conducido sus esfuerzos al diseño de máquinas caminantes dotadas de un alto grado de movilidad y autonomía dándoles la capacidad de operar en ambientes hostiles. Los avances en el área de la electrónica y de la computación han hecho posible el desarrollo de las máquinas caminantes dotadas de computadoras a bordo que facilitan las labores de coordinación de movimiento y control del robot.

Existen muchos campos de aplicación para las máquinas caminantes, entre los que cabe mencionar el transporte militar, con el consiguiente desplazamiento del vehículo sobre terreno irregular, los trabajos forestales y la agricultura en donde se aprovecha el soporte puntual del robot para minimizar los daños sobre la cosecha, las exploraciones espaciales o submarinas con sus ambientes peligrosos, etc. Especial mención requiere la aplicación en centrales nucleares, particularmente en los generadores de vapor.

Aún cuando las máquinas caminantes están concebidas para operar sobre terrenos irregulares existen muchos casos en los cuales se requiere que el robot se desplace por superficies con una pendiente muy pronunciada, o casos en los cuales el robot debe subir por paredes verticales e incluso moverse suspendido del techo. Estas exigencias se encuentran fácilmente en aplicaciones de mantenimiento de edificios, inspección de estructuras, tanques, etc.

Una propiedad que describe plenamente a un robot escalador y que lo diferencia de cualquier otro tipo de robot móvil, es la capacidad de moverse sobre superficies inclinadas y verticales.

En los últimos años la idea de desarrollar robots escaladores se ha paseado por la mente de muchos investigadores dando como resultado la aparición de varios robots con capacidad de escalar por paredes verticales. Tal es así que en nuestro país, el

Instituto de Ingeniería (ente adscrito al Ministerio de Ciencia Tecnología) puso en marcha un proyecto de diseño tecnológico que tiene como objetivo el diseño y construcción de un robot escalador para labores de inspección en tanques verticales de almacenamiento de petróleo. Este proyecto es patrocinado y financiado por el CONICIT y podríamos diferenciarlo en tres etapas:

- *La primera es el diseño estructural y cinemático del robot escalador con el correspondiente estudio de estabilidad locomotora para evitar su caída o volcamiento. Es precisamente esta primera etapa la que desarrollamos en este Trabajo Especial de Grado.*
- La segunda etapa que consistirá en el diseño del proceso de fabricación, construcción y ensamblaje de los mecanismos de locomoción (patas del robot).
- Y finalmente la automatización de la estructura previamente diseñada y construida, a fin de darle movimiento real perfectamente sincronizado en las actividades en las cuales se desempeñará.

1.7. Desarrollos recientes en robots cuadrúpedos

1.7.1. Alexis



Figura 1.1. Alexis

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **Alexis**

Comienzo y final del proyecto: 1992-1999

Grupo de Investigación:

SAE Robotique École Polytechnique de Montreal, Québec, Canadá

Encargados del proyecto:

Estudiantes de Ingeniería Mecánica

Estudiantes de Ingeniería Eléctrica

Estudiantes de Ingeniería en Computación (Sistemas)

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	1.6m	Max. Velocidad	0.7m/s	Nº de patas	4	Suministro de Energía	baterías
Ancho	1.0m	Peso	82kg	Nº Grados de Libertad Activos.	9	Suministro de Potencia	24V DC
Altura	1.0m	Carga	1kg	Nº Grados de Libertad Pasivos.	0	Consumo de Potencia	500 Watt

1.7.2. ARL Scout II

Figura 1.2 ARL Scout II

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **ARL Scout II**

Comienzo y final del proyecto: Noviembre 1997 hasta el presente

Grupo de Investigación:

Ambulatory Robotics Laboratory, Center for Intelligent Machines, McGill University
(Montreal, Québec, Canadá)

Encargados del proyecto:

Director: Profesor Martin Buehler

Principal Investigador: Robert Battaglia

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	0.26 - 0.46 m	Máx. Velocidad	1.4m/s	Nº de patas	4	Suministro de Energía	DC-servos
Alto	0.4m	Peso	27 kg	Nº Grados de Libertad Activos	4	Suministro de Potencia	Lead-Acid Batteries (7.2 Ah @ 12V)
Alto	0.45m	Carga		Nº Grados de Libertad Pasivos	4	Consumo de Potencia	7 minutos de caminado continuo

1.7.3. Geo-II

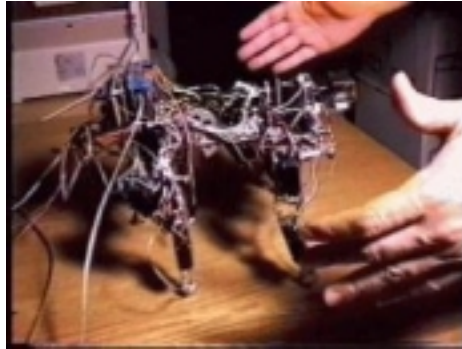


Figura 1.3 Geo-II

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **Geo-II**

Grupo de Investigación:

Iguana Robotics, Inc (Mahomet, ILLINOIS, USA)

Encargados del proyecto:

M. Anthony Lewis

Mathew Lamb

George López

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	0.12m	Max. Velocidad	6cm/s	Nº de patas	4	Suministro de Energía	
Altura		Peso	12kg	Nº Grados de Libertad Activos	19	Suministro de Potencia	
Ancho		Carga		Nº Grados de Libertad Pasivos	0	Consumo de Potencia	10 Watt

1.7.4. Pipe Climbing Robot

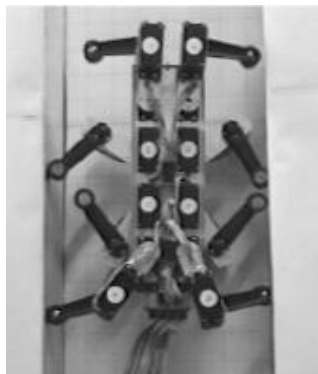


Figura 1.4 Rohrletterer

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **Pipe Climbing Robot (Rohrletterer)**

Comienzo y final del proyecto: Febrero. 1992 - Marzo. 1995

Grupo de Investigación:

Corporate Research and Development, Intelligent Systems, Siemens AG
(Munich, Germany)

Encargados del proyecto:

Dr. G. Lawitzky (director), Dipl.Ing. W. Neubauer

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	0,3m	Max. Velocidad	0,3m/s	Nº de patas	8	Suministro de Energía	DC-servos
Altura	0,15m	Peso	1,3kg	Nº Grados de Libertad Activos	16	Suministro de Potencia	5V DC
Ancho	0,12-0,3m	Carga	700g	Nº Grados de Libertad Pasivos	0	Consumo de Potencia	12-15Watt

1.7.5. RIHMO (Legged Robot For Harzardous Environments)



Figura 1.5 Rihmo

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **RIHMO**

Comienzo y final del proyecto: Enero 1990 - Diciembre 1993

Grupo de Investigación:

Institute for Industrial Automation (CSIC), Laboratory of Automatic Control (CIEMAT) (Madrid, Spain).

Encargados del proyecto:

Dr. Pablo González de Santos (Director), Dr. Manuel A. Armada, Dr. Maria A. Jiménez, Jerez Reviejo, Juan Tabera.

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	0.736m	Max. Velocidad	1cm/s	Nº de patas	4	Suministro de Energía	
Altura	0.344m	Peso	67kg	Nº Grados de Libertad Activos	12	Suministro de Potencia	
Ancho	0.719m	Carga	1kg	Nº Grados de Libertad Pasivos	4	Consumo de Potencia	15Watt

1.7.6. SIL04



Figura 1.6 Silo4

Descripción General del proyecto o Máquina caminante:

Nombre de la máquina caminante/proyecto: **SIL04**
 Comienzo y final del proyecto: 1998-1999

Grupo de Investigación:

Automatic Control Department (Madrid, Spain)

Encargados del proyecto:

P. González de Santos, M. Armada, M.A. Jiménez, J. Estremera, J.A. Gálvez, E. García, M. Prieto, M. Uquillas, R. Caballero

Datos Técnicos de la Máquina Caminante

Dimensiones		Capacidad		Movilidad		Suministro de Energía	
Largo	0.3m	Max. Velocidad	1/min	Nº de patas	4	Suministro de Energía	DC-servos
Altura	0.31m	Peso	30kg	Nº Grados de Libertad Activos	12	Suministro de Potencia	30V DC
Ancho	0.31m	Carga	20kg	Nº Grados de Libertad Pasivos	0	Consumo de Potencia	

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Cinemática directa.

Se utiliza álgebra vectorial y matricial para desarrollar un método generalizado y sistemático para describir y representar la localización de los elementos de un brazo con respecto a un sistema de referencia fijo. Como los elementos de un brazo pueden girar y/o trasladarse con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, se establecerá un sistema de coordenadas ligado al cuerpo a lo largo del eje de la articulación para cada elemento. El problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación que relaciona el sistema de coordenadas ligado al cuerpo al sistema de coordenadas de referencia. Se utiliza una matriz de rotación 3×3 para describir las operaciones rotacionales del sistema ligado al cuerpo con respecto al sistema de referencia. Se utilizan entonces las coordenadas homogéneas para representar vectores de posición en un espacio tridimensional, y las matrices de rotación se ampliarán a matrices de transformación homogénea 4×4 para incluir las operaciones traslacionales del sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Esta representación matricial de un elemento mecánico rígido para describir la geometría espacial de un brazo fue utilizada por primera vez por Denavit y Hartenberg. [5]

2.1.1. Matrices de rotación

Una matriz de rotación 3×3 se puede definir como una matriz de transformación que opera sobre un vector de posición en un espacio euclídeo tridimensional y transforma sus coordenadas expresadas en un sistema de coordenadas rotado OUVW (sistema ligado al cuerpo) a un sistema de coordenadas de referencia OXYZ.

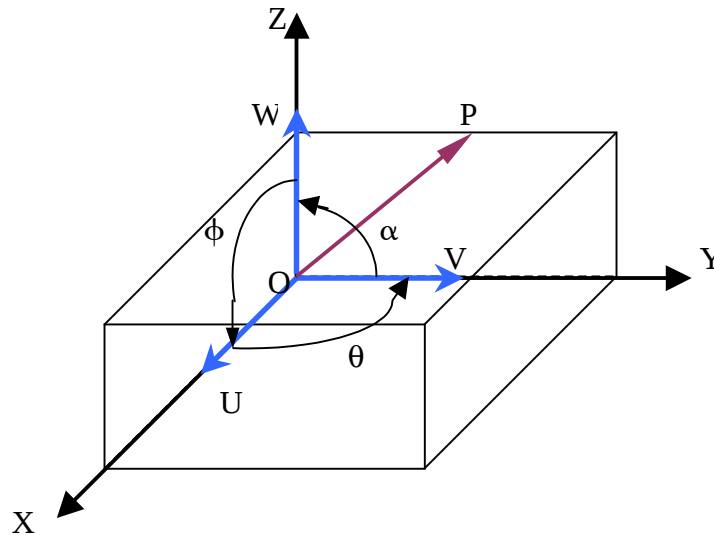


Figura 2.1. Sistemas de coordenadas de referencia. El azul es solidario al cuerpo. Se indica el sentido positivo de giro de los ángulos θ , ϕ y α .

En la figura 2.1 se dan dos sistemas de coordenadas rectangulares, uno el sistema de coordenada OXYZ, con OX, OY y OZ como sus ejes de coordenadas, y el sistema de coordenadas OVW, con OU, OV, OW como sus ejes de coordenadas. Ambos sistemas de coordenadas tienen sus orígenes coincidentes en el punto O. El sistema de coordenadas OXYZ está fijo en el espacio tridimensional y se considera que es el sistema de referencia. El sistema de coordenadas OVW puede girar con respecto al sistema de referencia OXYZ. Físicamente, uno puede considerar que el sistema de coordenadas OVW es, un sistema de coordenadas ligado al cuerpo. Esto es, está permanente y convenientemente unido al cuerpo y se mueve junto con él. Sean (i_x, j_y, k_z) y (i_u, j_v, k_w) los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas de los sistemas OXYZ y OVW, respectivamente. Un punto **p** en el espacio se puede representar por sus coordenadas con respecto a ambos sistemas de coordenadas. Para facilitar el análisis, supondremos que **p** está en reposo y fijo con respecto al sistema de coordenadas OVW. Entonces el punto **p** se puede representar por sus

coordenadas con respecto al sistema de coordenadas OVW y OXYZ, respectivamente, como

$$p_{uvw} = (p_u, p_v, p_w) \quad \text{y} \quad p_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)$$

donde p_{xyz} y p_{uvw} representan el mismo punto $\mathbf{p}$ en el espacio con respecto a diferentes sistemas de coordenadas.

Se busca encontrar una matriz R de transformación 3×3 que transformará las coordenadas de p_{uvw} a las coordenadas expresadas con respecto al sistema de coordenadas OXYZ, después de que el sistema de coordenadas OUVW ha sido girado. Esto es,

$$p_{xyz} = R \cdot p_{uvw}$$

Supongamos que físicamente el punto p_{uvw} ha sido girado junto con el sistema de coordenadas OVW.

De acuerdo a la definición de las componentes de un vector tenemos

$$p_{uvw} = p_u \mathbf{i}_u + p_v \mathbf{j}_v + p_w \mathbf{k}_w$$

donde p_x , p_y , p_z representan las componentes de $\mathbf{p}$ a lo largo de los ejes OX, OY y OZ, respectivamente, o las proyecciones de $\mathbf{p}$ sobre los ejes respectivos. Así, utilizando la definición del producto escalar y la ecuación anterior

$$p_x = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{p} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w p_w$$

$$p_y = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{p} = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w p_w$$

$$p_z = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w p_w$$

o expresado en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

Utilizando esta notación, la matriz $\mathbf{R}$ está dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}$$

Análogamente, se pueden obtener las coordenadas de p_{uvw} con las coordenadas de p_{xyz} :

$$\mathbf{p}_{uvw} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{xyz}$$

$$\text{o} \quad \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Como los productos escalares son conmutativos:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$$

donde $\mathbf{I}_3$ es la matriz identidad 3 x 3. La transformación se llama una transformación ortogonal, y como los vectores en los productos escalares son todos vectores unitarios, se llama también una transformación ortogonal.

El interés primario en desarrollar la matriz de transformación anterior es encontrar las matrices de rotación que representan rotaciones del sistema de coordenadas OUVW respecto a cada uno de los tres ejes principales del sistema de coordenadas de referencia OXYZ. Si el sistema de coordenadas OUVW se gira un ángulo α respecto al eje OX para llegar a una nueva posición en el espacio, entonces el punto p_{uvw} , que tiene coordenadas (p_u, p_v, p_w) con respecto al sistema OUVW, tendrá coordenadas diferentes (p_x, p_y, p_z) con respecto al sistema de referencia OXYZ. La matriz de transformación necesaria $R_{x,\alpha}$ se llama la matriz de rotación respecto al eje OX con ángulo α . $R_{x,\alpha}$ se puede derivar del concepto de matriz de transformación anterior, esto es,

$$p_{xyz} = R_{x,\alpha} \cdot p_{uvw}$$

con $i_x \cong i_u$, y

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Análogamente, las matrices de rotación 3x3 para rotaciones respecto al eje OY con ángulo ϕ respecto al eje OZ con ángulo θ son, respectivamente:

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices $R_{x,\alpha}$, $R_{y,\phi}$ y $R_{z,\theta}$ se llaman *las matrices de rotación básicas*. Se pueden obtener otras matrices de rotación finitas a partir de estas matrices.[5]

2.1.2. Matriz de rotación compuesta

Las matrices de rotación básicas se pueden multiplicar entre si para representar una secuencia de rotación finita respecto del eje principal del sistema de coordenadas OXYZ. Como las multiplicaciones de matrices no conmutan, es importante el orden o secuencia de realización de las rotaciones. Por ejemplo, para desarrollar una matriz de rotación que represente una rotación de ángulo α respecto del eje OX seguida por una rotación del ángulo θ respecto del eje OZ seguida por una rotación del ángulo ϕ respecto del eje OY, la matriz de rotación resultante que representa estas rotaciones es:

$$\mathbf{R} = R_{y,\phi} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{x,\alpha} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \sin \theta \cos \alpha & \cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \alpha \\ -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha & \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Esto es diferente de la matriz de rotación que representa una rotación de ángulo ϕ respecto del eje OY seguida por una rotación de ángulo θ respecto del eje OZ seguida por una rotación de ángulo α respecto del eje OX. La matriz de rotación resultante es [5]

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \cdot \mathbf{R}_{z,\theta} \cdot \mathbf{R}_{y,\phi} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \theta & \cos \phi \\ \cos \alpha \sin \theta \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi & \cos \theta \cos \alpha & \cos \alpha \sin \theta \sin \phi - \sin \alpha \cos \phi \\ \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi & \sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \sin \phi + \sin \alpha \cos \phi \end{bmatrix}$$

2.1.3. Coordenadas homogéneas y matriz de transformación

Como una matriz de rotación 3 x 3 no nos da ninguna posibilidad para la traslación, se introduce una cuarta coordenada al vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ en un espacio tridimensional que lo transforma en $\bar{\mathbf{p}} = (wp_x, wp_y, wp_z, w)$. Decimos que el vector de posición $\bar{\mathbf{p}}$ se expresa en coordenadas homogéneas. El concepto de una representación en coordenadas homogéneas en un espacio euclídeo tridimensional es útil para desarrollar transformaciones matriciales que incluyan rotación, traslación, escala y transformación de perspectiva. En general, la representación de un vector de posición de n componentes por un vector de $(n+1)$ componentes se llama representación en coordenadas homogéneas. En una representación en coordenadas homogéneas, la representación de un vector n -dimensional se efectúa en el espacio $(n+1)$ -dimensional y el vector físico n -dimensional se obtiene dividiendo las coordenadas homogéneas por la coordenada $n+1$ que es w . Así, en un espacio tridimensional, un vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ se representa por un vector

ampliado (wp_x, wp_y, wp_z, w) en la representación de coordenadas homogéneas. Las coordenadas físicas se relacionan a las coordenadas homogéneas como sigue:

$$P_x = \frac{wp_x}{w}, \quad P_y = \frac{wp_y}{w}, \quad P_z = \frac{wp_z}{w}$$

No existe una representación en coordenadas homogéneas única para una representación en un espacio tridimensional. Por ejemplo, $\bar{p}_1 = (w_1p_x, w_1p_y, w_1p_z, w_1)$ y $\bar{p}_2 = (w_2p_x, w_2p_y, w_2p_z, w_2)$ son todas coordenadas homogéneas representando el mismo vector de posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Así se puede ver a la cuarta componente de las coordenadas homogéneas w como un factor de escala. Si esta coordenada es la unidad $\{w = 1\}$, entonces las coordenadas homogéneas transformadas de un vector de posición son las mismas que las coordenadas físicas del vector. En aplicaciones de robótica, este factor de escala será siempre igual a 1, aunque se utiliza normalmente en informática gráfica como un factor de escala universal que toma cualquier valor positivo.

La matriz de transformación homogénea es una matriz 4×4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Una matriz de transformación homogénea se puede considerar que consiste en cuatro sub-matrices:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \text{transformación en perspectiva} & \text{escala} \end{bmatrix}$$

La sub-matriz 3×3 superior izquierda representa la matriz de rotación; la sub-matriz superior derecha 3×1 representa el vector de posición del origen del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de referencia; la sub-matriz inferior

izquierda 1 x 3 representa la transformación de perspectiva; y el cuarto elemento diagonal es el factor de escala global. La matriz de transformación homogénea se puede utilizar para explicar la relación geométrica entre el sistema ligado al cuerpo OUVW y el sistema de coordenadas de referencia OXYZ.

Si un vector de posición $\mathbf{p}$ en un espacio tridimensional se expresa en coordenadas homogéneas, es decir, $\bar{\mathbf{p}} = (p_x, p_y, p_z, 1)$ entonces, utilizando el concepto de matriz de transformación, una matriz de rotación 3 x 3 se puede ampliar a una matriz de rotación homogénea 4x4 $\mathbf{T}_{\text{rot}}$ para operaciones de rotación pura. Así, las matrices de rotación $R_{x,\alpha}$, $R_{z,\theta}$ y $R_{y,\phi}$ expresadas como matrices de rotación homogénea, se hacen:

$$\mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices de rotación 4 x 4 se llaman las matrices de rotación homogéneas básicas.

La sub-matriz superior derecha 3 x 1 de la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de trasladar el sistema de coordenadas OUVW que tiene ejes paralelos al sistema de coordenadas de referencia OXYZ, pero cuyo origen está en (dx, dy, dz) del sistema de coordenadas de referencia:

$$T_{\text{tras}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de transformación 4 x 4 se llama matriz de traslación homogénea básica.

La sub-matriz inferior izquierda 1 x 3 de la matriz de transformación homogénea representa la transformación de perspectiva, que es útil para visión por computadora y la calibración de modelos de cámara. Para el caso de robots, los elementos de esta matriz se fijan a cero para indicar la transformación de perspectiva nula.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz de transformación homogénea producen factor de escala local y global. Los primeros tres elementos diagonales producen un alargamiento o escala local, como en

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, los valores de las coordenadas se alargan mediante los escalares a, b y c, respectivamente. Obsérvese que las matrices de rotación básicas, T_{rot} , no producen ningún efecto de escala local.

El cuarto elemento diagonal produce escala global como en

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}$$

donde $s > 0$. Las coordenadas cartesianas físicas del vector son

$$P_x = \frac{x}{s}, \quad P_y = \frac{y}{s}, \quad P_z = \frac{z}{s}, \quad w = \frac{s}{s} = 1$$

Por tanto, el cuarto elemento diagonal en la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de reducir globalmente las coordenadas si $s > 1$ y de alargar las coordenadas si $0 < s < 1$.

En resumen, una matriz de transformación homogénea 4x4 transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas OUVW en el sistema de coordenadas de referencia OXYZ. [5]

$$\bar{p}_{xyz} = \mathbf{T} \cdot \bar{p}_{uvw}$$

y

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Matriz de transformación homogénea compuesta

Las matrices de rotación y traslación homogéneas se pueden multiplicar juntas para obtener una matriz de transformación homogénea compuesta (la llamaremos la matriz $\mathbf{T}$). Sin embargo, como la multiplicación de matrices no es conmutativa, se debe prestar una atención cuidadosa al orden en el cual se multiplican estas matrices.

Las reglas que siguen son útiles para determinar una matriz de transformación homogénea compuesta:

1. Inicialmente, ambos sistemas de coordenadas son coincidentes, ya que la matriz de transformación homogénea es una matriz identidad 4×4 , $\mathbf{I}_4$.
2. Si el sistema de coordenadas rotante OUVW está rotando y trasladándose respecto de los ejes principales del sistema OXYZ, entonces pre-multiplicar la matriz de la transformación homogénea previa (resultante) por una matriz de traslación y rotación básica apropiada.
3. Si el sistema de coordenadas rotantes OUVW está rotando y trasladándose respecto de su propio eje principal, entonces post-multiplicar la matriz de transformación homogénea (resultante) por una matriz de rotación y traslación básica apropiada.

Hemos identificado dos sistemas de coordenadas, el sistema de coordenadas de referencia fijo OXYZ y el sistema de coordenadas móvil (traslación y rotación) OUVW. Para describir la relación del desplazamiento espacial entre estos dos sistemas de coordenadas, se utiliza una matriz de transformación homogénea 4×4 . Las matrices de transformación homogénea tienen el efecto combinado de rotación y traslación cuando operan sobre vectores de posición expresados en coordenadas homogéneas.

Si estos dos sistemas de coordenadas se asignan a cada elemento del brazo del robot, por ejemplo, el elemento $i-1$ y el elemento i , respectivamente, entonces el sistema de coordenadas del elemento $i-1$ es el sistema de coordenadas de referencia y el sistema de coordenadas del elemento i es el sistema de coordenadas móvil cuando se activa la articulación i . Utilizando la matriz $\mathbf{T}$, podemos especificar un punto $\mathbf{p}_i$ en reposo

en el elemento i y expresado en el sistema de coordenadas del elemento i (u OVW) en términos del sistema de coordenadas del elemento $i-1$ (u OXYZ) como:

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_i$$

donde:

$\mathbf{T}$ = matriz de transformación homogénea 4×4 que relaciona los dos sistemas de coordenadas.

$\mathbf{p}_i$ = vector de posición ampliado 4×1 ($x_i, y_i, z_i, 1$) que representa un punto en el sistema de coordenadas del elemento i en coordenadas homogéneas.

$\mathbf{p}_{i-1}$ = es el vector de posición ampliado 4×1 ($x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1$) que representa el mismo punto $\mathbf{p}_i$ en términos del sistema de coordenadas del elemento $i-1$. [5]

2.2. Cinemática inversa

Las articulaciones de un brazo robótico suelen moverse mediante motores eléctricos. En la mayoría de los robots, el pie o el brazo se mueve de una posición a otra cambiando su orientación. Una computadora calcula los ángulos de articulación necesarios para llevar el pie a la posición deseada, un proceso conocido como cinemática inversa.

Algunos brazos multi-articulados están equipados con servo controladores, o controladores por realimentación, que reciben datos de un ordenador. Cada articulación del brazo tiene un dispositivo que mide su ángulo y envía ese dato al controlador. Si el ángulo real del brazo no es igual al ángulo calculado para la

posición deseada, el servo controlador mueve la articulación hasta que el ángulo del brazo coincida con el ángulo calculado.

Con el fin de controlar la posición y orientación del efector final (pie o brazo) del robot, es más importante la solución cinemática inversa. En otras palabras, dada la posición y orientación del efector final de una pata del robot de tres eslabones y sus parámetros de articulación, nos gustaría encontrar los ángulos de articulación correspondientes $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ del robot de manera que pueda posicionar como se desee el efector final. [4]

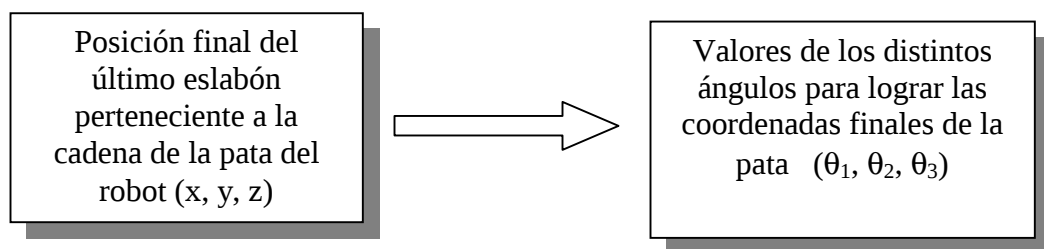


Figura 2.2 Esquema de la cinemática inversa [4]

Los métodos geométricos permiten obtener normalmente los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por los eslabones y articulaciones del robot, cuando el robot posea pocos grados de libertad.

El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos. [4]

2.3. Resistencia de materiales (Esfuerzos)

2.3.1 Consideraciones de esfuerzos y resistencia

La resistencia es una propiedad de un material o de un elemento mecánico. La resistencia de un elemento depende de la elección, el tratamiento y el procesamiento del material. Considérese por ejemplo un resorte. Se puede asociar una resistencia S al resorte. Cuando este resorte se utiliza en un mecanismo o una máquina, se aplican fuerzas externas que originan esfuerzos en el resorte, cuya magnitud depende de la configuración y es independiente del material y de su procesamiento. Si el resorte se retira de la máquina al desarmarla, el esfuerzo debido a las fuerzas externas se reduce a cero, el valor que tenía antes de su instalación. Pero la resistencia S permanece como una de las propiedades del resorte. Recuérdese, entonces, que la resistencia es una propiedad inherente de un elemento, propiedad integrada en la pieza debido al uso de un material y un proceso particulares.

A lo largo de este capítulo se usará la letra S para designar la resistencia, con marcas y subíndices apropiados para indicar la clase de resistencia. En consecuencia S_y es una resistencia de fluencia, S_u es la resistencia última a la tracción. Se emplearán las letras griegas σ (sigma) y τ (tau) para designar el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante, respectivamente.

Con frecuencia se incluye los términos esfuerzo permisible o valor permisible del esfuerzo. Estos términos indican valores de resistencia reducidos que se utilizan en el diseño para determinar las dimensiones de elementos con tamaños establecidos de acuerdo con la resistencia.[6]

2.3.2 Componentes del esfuerzo

En la figura 2.3-a se observa un elemento del estado general de esfuerzo tridimensional y se muestran tres esfuerzos normales, σ_x , σ_y , σ_z , todos positivos; y seis esfuerzos cortantes, τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} y τ_{xz} , también positivos. El elemento está en equilibrio estático y, por lo tanto,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \text{Ec.(2.1)}$$

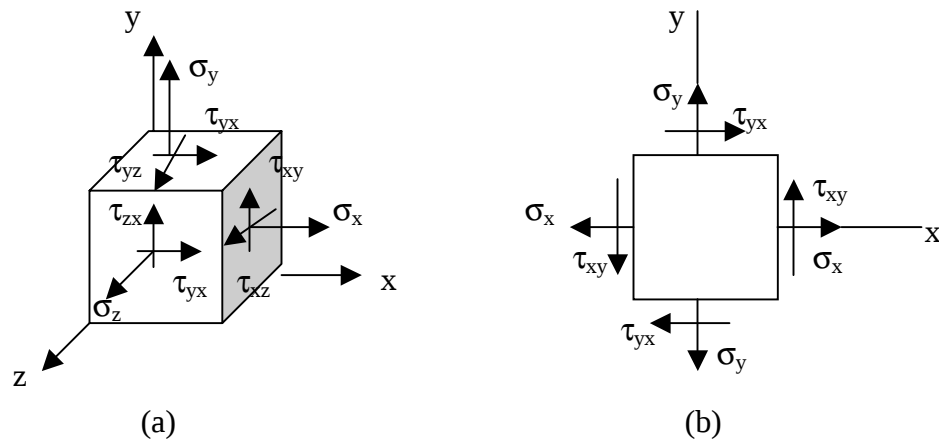


Figura 2.3. Estado general de esfuerzos tridimensional. [6]

Los esfuerzos normales dirigidos hacia afuera del elemento se consideran positivos y son de tensión. Los esfuerzos cortantes que actúan sobre una cara positiva de un elemento son positivos, si se ejercen en la dirección positiva de un eje de referencia; éste es el caso en la figura 2.3-a. El primer subíndice de una componente de esfuerzo cortante es la coordenada normal (o perpendicular) a la cara del elemento. La componente de esfuerzo cortante es paralela al eje del segundo subíndice. Como el elemento que se presenta está en equilibrio estático, las caras negativas de dicho

elemento tendrán esfuerzos cortantes que actúan en dirección opuesta, pero también se les considera positivos.

La figura 2.3-b muestra un estado de esfuerzo plano o biaxial. Los dos esfuerzos normales se indican en la dirección positiva. Los esfuerzos cortantes se tomarán como positivos cuando estén de acuerdo con el sentido en que giran las manecillas del reloj (s.r.). Por lo tanto, en la figura 2.3-b, τ_{yx} es s.r. y positivo; τ_{xy} es s.c.r. (sentido contrario a aquél en que giran las manecillas del reloj) y negativo.[6]

2.3.3 Esfuerzos principales

Los esfuerzos principales vienen dado por un plano que forma un ángulo ϕ como se ve en la figura 2.4.

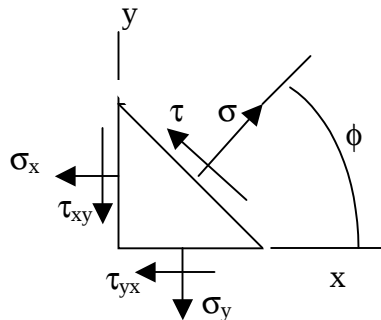


Figura 2.4. Direcciones de los esfuerzos principales. [6]

Del círculo de Mohr se obtiene que los esfuerzos principales vienen dado por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Ec.(2.2)}$$

De manera similar, los dos esfuerzos cortantes máximos serán

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Ec.(2.3)}$$

2.3.4 Esfuerzos uniformemente distribuidos

Con frecuencia, en diseño se plantea la hipótesis de que hay una distribución uniforme de esfuerzo. Generalmente, al resultado obtenido con esta suposición se le llama tensión pura, compresión pura o cortante puro, dependiendo de cómo se aplique la carga externa al cuerpo en estudio. Una barra en tensión es un ejemplo típico. En este caso, una carga de tensión F se aplica mediante los pasadores que atraviesan el extremo de la barra. La hipótesis de esfuerzo uniforme significa que si se corta la barra en una sección transversal, alejada en ambos extremos, y se separa una de las mitades, es posible sustituir su efecto aplicando una fuerza uniformemente distribuida de magnitud σ_A en el extremo cortado. Entonces se dice que el esfuerzo σ está uniformemente distribuido y se calcula por la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Ec.(2.4)}$$

La misma ecuación e hipótesis se verifican para una compresión simple. Sin embargo, una barra delgada en compresión puede fallar por pandeo, y debe excluirse esta posibilidad antes de que se use la ecuación (2.4).

Al emplear la ecuación

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{Ec.(2.5)}$$

en el caso de un cuerpo, por ejemplo un perno sometido a cortante, también se supone que hay una distribución de esfuerzo uniforme.[6]

2.3.5. Fuerza cortante y momento flexionante en vigas

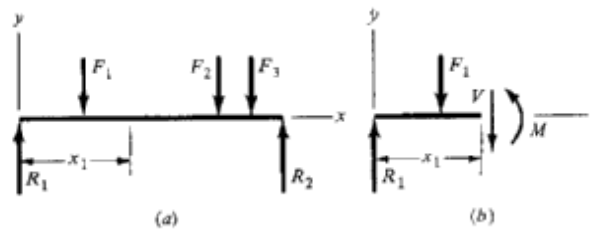


Figura 2.5 Diagrama de cuerpo libre de una viga con apoyos simples; V y M se indican en dirección positiva. [6]

La figura 2.5-a presenta una viga con reacciones R_1 y R_2 en sus apoyos y cargada con las fuerzas concentradas F_1 , F_2 y F_3 . La dirección asignada al eje y determina la convención de signos para las fuerzas. Las cargas F_1 , F_2 y F_3 , son negativas porque actúan en la dirección opuesta a la del eje y ; por lo tanto, R_1 y R_2 son positivas.

Si la viga se corta según una sección situada en $x = x_1$, y se separa la parte de la izquierda como cuerpo libre, entonces debe haber una fuerza cortante interna V y un momento flexionante M que actúen en la sección cortada para mantener el equilibrio. La fuerza cortante se determina sumando todas aquellas fuerzas que queden a la izquierda de dicha sección. El momento flexionante es la suma de los momentos de las fuerzas citadas, tomados con respecto a un eje que esté en tal sección. La fuerza cortante y el momento flexionante están relacionados por la ecuación

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \text{Ec.(2.6)}$$

A veces una carga distribuida causa una flexión. Por lo tanto, la relación entre la fuerza cortante y el momento flexionante puede escribirse como

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -w \quad \text{Ec.(2.7)}$$

donde w es una carga vertical hacia abajo en unidades de fuerza por unidad de longitud.

En la figura 2.6 se indican las convenciones de signos que se utilizan para el momento flexionante y la fuerza cortante.

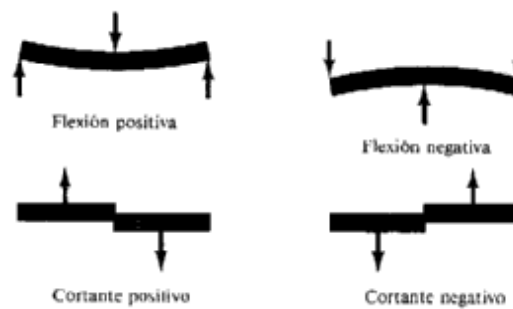


Figura 2.6 Convenciones de signos para flexión y cortante. [6]

La carga w de la ecuación (2.7) está uniformemente distribuida. Una distribución más general se puede definir mediante la ecuación

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

donde q es la intensidad de la carga; por lo tanto, $q = -w$.

Al integrar las ecuaciones (2.6) y 2.7) se encuentran otras relaciones. Así, integrando entre X_A y X_B , por ejemplo, se obtiene

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_A}^{x_B} q dx = V_B - V_A \quad \text{Ec.(2.8)}$$

que establece que el cambio en la fuerza cortante desde A hasta B es igual al área del diagrama de cargas entre X_A y X_B .

En forma análoga

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{x_A}^{x_B} V dx = M_B - M_A \quad \text{Ec.(2.9)}$$

que expresa que el cambio en el momento flexionante desde A hasta B es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre X_A y X_B . [6]

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) son utilizadas para obtener el área del diagrama de fuerza cortante y el de momento flector respectivamente, luego de haber hecho el respectivo diagrama de cuerpo libre; en un método conocido como: Método de las secciones.

2.3.6. Método de las secciones.

El método de las secciones consta simplemente en realizar un estudio de equilibrio en las direcciones X y Y del elemento, así como de momentos aplicados al mismo. Para ello las direcciones de los momentos y reacciones cortantes vienen dada por la

figura 2.7 y de acuerdo a ello se realiza una sumatoria de fuerzas aplicadas y se iguala a cero.



Figura 2.7 Convenciones de signos para flexión y cortante.

2.3.7. Esfuerzos normales por flexión

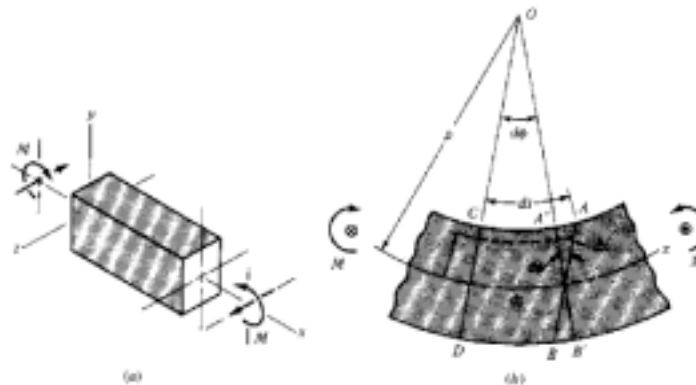


Figura 2.8 Momento flexionante en una viga [6]

En la figura 2.8-a observa parte de una viga en la que actúa el momento flexionante positivo M . El eje y es el eje de simetría. El eje x coincide con el eje neutro de la viga, y el plano xz , que contiene los ejes neutros de todas las secciones (paralelos al eje z), recibe el nombre de plano neutro (o más generalmente el de superficie neutra). Los elementos de la viga que estén en este plano tendrán deformación nula. Ahora bien, todavía no se ha definido la localización del eje neutro de una sección con respecto a la sección transversal.

Al aplicar el momento positivo la superficie superior de la viga se flexionará hacia abajo al igual que el eje neutro (Figura 2.8-b). Debido a la curvatura, habrá una sección AB (originalmente paralela a CD, puesto que la viga era recta) que girará en un ángulo $d\phi$ hasta la posición A'B'. Los trazos AB y A'B' son rectos, de modo que se ha verificado la hipótesis de que las secciones planas permanecen así durante la flexión. Si ahora se usa ρ para denotar el radio de curvatura del eje neutro de la viga, ds para la longitud de un elemento diferencial de dicho eje y $d\phi$ para el ángulo entre las rectas CD y A'B', entonces, de la definición de curvatura, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \quad (a)$$

como se muestra en la figura 2.8-b, el cambio de longitud de una "fibra", separada del eje neutro por una distancia y , es

$$dx = y d\phi \quad (b)$$

La deformación es igual a ese cambio dividido entre la longitud original, sea

$$\epsilon = -\frac{dx}{ds} \quad (c)$$

donde el signo negativo indica compresión. Al resolver simultáneamente las ecuaciones (a), (b) y (c) queda

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (d)$$

Así pues, la deformación es proporcional a la distancia desde el eje neutro. Ahora bien, como $\rho = E\epsilon$, para el esfuerzo se tiene que

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \quad (e)$$

En este caso se trata de flexión pura, lo que significa que no actúan fuerzas axiales en la viga. Lo anterior puede expresarse en la forma matemática sumando todas las fuerzas horizontales que actúan en la sección transversal e igualando la suma a cero. La fuerza que actúa sobre un elemento de área d_A es σd_A ; por consiguiente,

$$\int \sigma dA = -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \quad (f)$$

La ecuación (f) determina la localización del eje neutro de la sección. El momento del área con respecto al eje neutro es cero y, por lo tanto, dicho eje pasa por el centroide del área de la sección transversal.

En segundo lugar se observa que el equilibrio requiere que el momento flexionante interno, originado por el esfuerzo σ , sea igual al momento externo M . En otras palabras,

$$M = \int y \sigma d_A = \frac{E}{\rho} \int y^2 d_A \quad (g)$$

La segunda integral de (g) es el segundo momento (o momento de inercia) del área transversal con respecto al eje z . Esto es

$$I = \int y^2 dA \quad \text{Ec.(2.10)}$$

Si después se resuelven las ecuaciones (g) y (2.10) y se reordenan, queda

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{Ec.(2.11)}$$

Ésta es una ecuación importante para determinar las deflexiones en las vigas. Por último, al eliminar ρ de las ecuaciones (e) y (2.11), resulta

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad \text{Ec.(2.12)}$$

La ecuación (2.12) establece que el esfuerzo por flexión σ es directamente proporcional a la distancia y desde el eje neutro y al momento flexionante M , como se indica en la figura 2.9. [6]

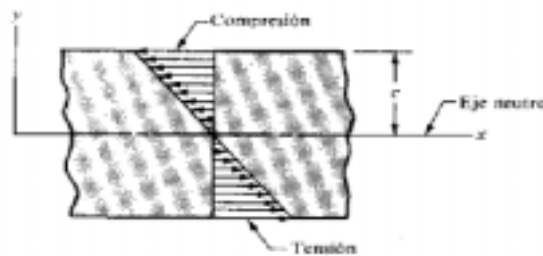


Figura 2.9 Distribución de esfuerzos normales por flexión en una viga. [6]

2.3.8. Esfuerzos cortantes en vigas

La mayoría de las vigas tienen fuerzas cortantes y también momentos flexionantes. Sólo en ocasiones se encontrarán algunas sujetas a flexión pura, es decir, en las que haya fuerza cortante nula.

Más todavía, la fórmula de la flexión fue desarrollada utilizando la hipótesis de flexión pura. De hecho, la razón por la cual se supone tal estado fue simplemente eliminar las complicaciones en la deducción debidas a los efectos de fuerza cortante. Para los fines de ingeniería, la fórmula de la flexión es válida, no importa si hay fuerza cortante o no. Por este motivo se utilizará la misma distribución normal del esfuerzo por flexión (ecuaciones 2.12) cuando también existen fuerzas cortantes.

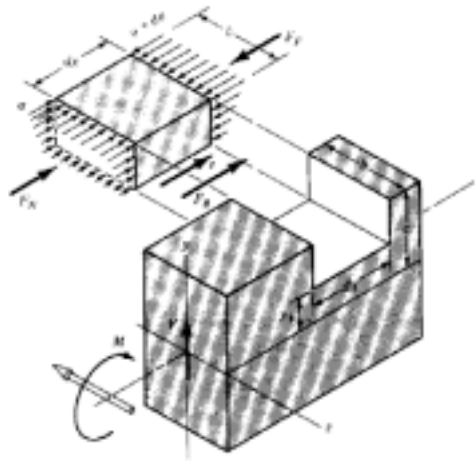


Figura 2.10 Viga sometida a fuerza cortante y momento flexionante. [6]

En la figura 2.10 se representa una viga de sección transversal constante, sometida a un fuerza cortante V y un momento flexionante M . El sentido del momento flexionante es más fácil de visualizar relacionando el vector perfilado (o flecha hueca) con la mano derecha. Este vector apunta en dirección negativa de z . Si se coloca el pulgar de la mano derecha en dicha dirección, entonces la punta de los

demás dedos, estando curvados, indicarán el sentido del momento M . Por la ecuación (2.6), la relación entre V y M es

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (a)$$

En algún punto a lo largo de la viga, se corta una porción o segmento transversal de longitud dx a una distancia y_1 por encima del eje neutro, como se muestra. El trazo respectivo se separa a fin de estudiar las fuerzas que actúan en él. Debido a que hay fuerza cortante, el momento de flexión cambiará a medida que se va a lo largo del eje x . Por consiguiente, puede designarse al momento flexionante como M en la cara cercana o próxima de la sección (con respecto al observador) y como $M + dM$ en la cara lejana. El momento M produce un esfuerzo normal σ y el momento $M + dM$, un esfuerzo normal $\sigma + d\sigma$, como se muestra. Estos esfuerzos normales producen fuerzas normales en las caras verticales del elemento, siendo de mayor intensidad la fuerza de compresión en el lado lejano que en el próximo. La resultante de estas dos fuerzas haría que la sección tendiera a deslizarse en la dirección $-x$, por lo que esta resultante debe ser equilibrada por una fuerza cortante que actúe en la dirección $+x$ en la parte inferior de la sección. Esta fuerza de corte da lugar a un esfuerzo cortante τ , como se indica. Por consiguiente, hay tres fuerzas resultantes que actúan sobre el elemento: F_N , debida a σ , que se ejerce en la cara próxima; F_F , debida a $\sigma + d\sigma$, que actúa en la cara más alejada; y F_B , debida a τ , que actúa en la cara inferior. Evaluaremos estas fuerzas.

En el caso de la cara cercana, selecciónese un elemento de área d_A . El esfuerzo que actúa en éste es σ y, por tanto, la fuerza (esfuerzo por área) es σd_A . La que se ejerce en la cara próxima en su totalidad es la suma de todas las σd_A , o bien

$$F_N = \int_{y_1}^c \sigma dA \quad (b)$$

donde los límites indican que se integra desde la parte inferior $y = y_1$, hasta la parte superior $y = c$. Utilizando $\sigma = My/I$ (ecuación 2.12), la ecuación (b) queda como

$$F_N = \frac{M}{I} \int_{y_1}^c y dA \quad (c)$$

La fuerza en la cara lejana se determina en forma semejante. Esto es

$$F_F = \int_{y_1}^c (\sigma + d\sigma) dA = \frac{M + dM}{I} \int_{y_1}^c y dA \quad (d)$$

La fuerza en la cara inferior es igual al esfuerzo cortante τ multiplicado por el área de la cara respectiva. Puesto que esta área es $b dx$, se tiene que

$$F_B = \tau b dx \quad (e)$$

La suma de estas tres fuerzas en la dirección x da

$$\sum F_x = +F_N - F_F + F_B = 0 \quad (f)$$

Si se sustituyen las expresiones de F_N y F_F dadas en (c) y (d) y se despeja F_B , resulta

$$F_B = F_F - F_N = \frac{M + dM}{I} \int_{y_1}^c y dA - \frac{M}{I} \int_{y_1}^c y dA = \frac{dM}{I} \int_{y_1}^c y dA \quad (g)$$

Utilizando ahora el valor de F_B de la ecuación (e) y despejando el esfuerzo cortante queda

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{I.b} \int_{y_1}^c y dA \quad (h)$$

Empleando la ecuación (a) finalmente se obtiene la fórmula del esfuerzo cortante

$$\tau = \frac{V}{I.b} \int_{y_1}^c y dA \quad \text{Ec.(2.13)}$$

En esta ecuación, la integral es el primer momento (o momento estático) del área de la cara vertical con respecto al eje neutro. Este momento se designa generalmente por Q . Por consiguiente,

$$Q = \int_{y_1}^c y dA \quad \text{Ec.(2.14)}$$

Con esta simplificación final, la ecuación (2.13) puede expresarse como

$$\tau = \frac{VQ}{I.b} \quad \text{Ec.(2.15)}$$

Al utilizar esta ecuación obsérvese que b es el ancho de la sección en la distancia particular y_1 desde el eje neutro. Asimismo, I es el segundo momento (o momento de inercia) de la sección total con respecto al eje neutro. [6]

2.3.9. Esfuerzos cortantes en vigas de sección rectangular.

La figura 2.11 muestra una porción de una viga sometida a fuerza cortante V y a un momento flexionante M . Como resultado de dicho momento se produce un esfuerzo normal σ en

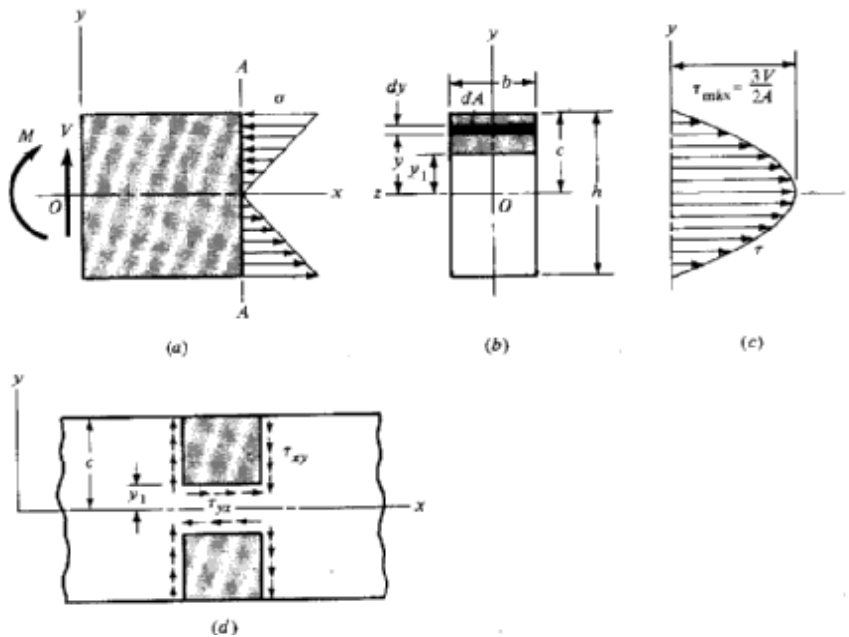


FIGURA 2.11 Distribución de esfuerzos cortantes en una viga.[6]

una sección como la determinada por A-A, que se halla en compresión por encima del eje neutro y en tensión por debajo del mismo. Para investigar el esfuerzo cortante a una distancia y_1 arriba del eje neutro, se selecciona un elemento de área dA a una distancia y sobre el eje neutro. Se tiene que $dA = b dy$ y, por tanto, la ecuación (2.14) queda

$$Q = \int_{y_1}^c y dA = b \int_{y_1}^c y dy = \frac{b}{2} (c^2 - y_1^2) \quad (a)$$

Sustituyendo Q por este valor en la ecuación (2.15) se obtiene

$$\tau = \frac{V}{2I} (c^2 - y_1^2) \quad \text{Ec.(2.16)}$$

La anterior es la ecuación general para el esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular. Para visualizarla bien, realicemos algunas sustituciones. El momento de inercia del área de una sección rectangular es $I = bh^3/12$; sustituyendo $h = 2c$ y $A = bh = 2bc$ se tiene que

$$I = \frac{Ac^2}{3} \quad (b)$$

Si ahora se usa este valor de I en la ecuación (2.16) y se redondea el resultado, da

$$\tau = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y_1^2}{c^2} \right) \quad \text{Ec.(2.17)}$$

TABLA 2.1 Valor del esfuerzo cortante $\tau = C(V/A)$

Distancia y_1	0	0.2c	0.4c	0.6c	0.8c	c
Factor C	1.5	1.44	1.26	0.96	0.54	0

Ahora se sustituirán diversos valores de y_1 comenzando con $y_1 = 0$ y finalizando con $y_1 = c$. Los resultados se presentan en la tabla 2.1. Obsérvese que el esfuerzo cortante máximo se tiene para $y_1 = 0$, que está en el eje neutro. En consecuencia,

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} \quad \text{Ec.(2.18)}$$

en el caso de una sección rectangular. A medida que se aleja el punto considerado respecto al eje neutro, el esfuerzo cortante disminuye hasta anularse en la superficie exterior, en donde $y_1 = c$. Ésta es una distribución parabólica y se indica en la figura 2.11-c. Es de particular interés y significado observar que el esfuerzo cortante es máximo en el eje neutro, donde vale cero el esfuerzo normal debido a la flexión, y que el esfuerzo cortante es nulo en la superficie exterior, en la cual el esfuerzo normal por flexión es máximo. Puesto que el esfuerzo cortante horizontal está siempre acompañado de esfuerzo cortante vertical, la distribución se esquematiza como se muestra en la figura 2.11-d. La figura 2.11-c indica que el cortante τ_{xy} en las superficies verticales varía con y . Casi siempre nos interesa el cortante horizontal, τ_{xy} en la figura 2.11-d, que es casi uniforme con y constante. El cortante horizontal máximo ocurre donde el cortante vertical es máximo. Esto suele suceder en el eje neutro, pero puede no ser así si el ancho b es menor en alguna otra parte. Además, si la sección es tal que b se pueda minimizar en un plano no horizontal, entonces el esfuerzo cortante horizontal ocurre en un plano inclinado. Por ejemplo, con 1a tubería, el esfuerzo cortante horizontal incide en un plano radial y el “cortante vertical” correspondiente no es vertical, sino tangencial. [6]

2.3.10. Flexión asimétrica.

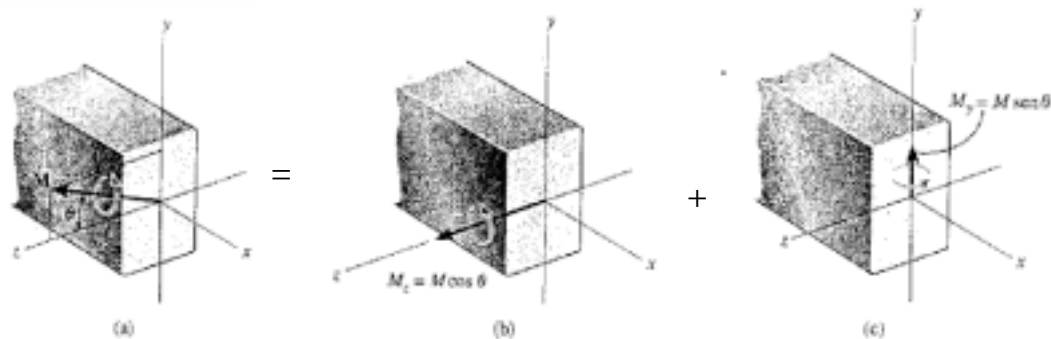


FIGURA 2.12 Flexión asimétrica.

Aplicando la fórmula de la flexión a cada componente del momento en las figuras 2.12-b y 2.12-c, podemos expresar el esfuerzo normal resultante en cualquier punto sobre la sección transversal, figura 2.12-a, en términos generales como;

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \text{Ec. (2-19)}$$

donde

σ = esfuerzo normal en el punto.

y, z = coordenadas del punto medidas desde los ejes x, y, z , que tienen su origen en el centroide de la sección transversal y forman un sistema coordenado derecho. El eje x está dirigido saliendo de la sección transversal y los ejes y y z representan respectivamente los ejes principales de momento de inercia mínimo y máximo de la sección transversal.

M_y, M_z == componentes del momento interno resultante dirigidas a lo largo de los ejes principales y y z . Ellas son positivas si están dirigidas a lo largo de los ejes $+y$ y $+z$; de otra manera, son negativas. Dicho de otra manera, $M_y = M \sin \theta$ y $M_z = M \cos \theta$, donde θ es positivo si se mide del eje $+Z$ hacia el eje $+y$

I_y, I_z = momentos de inercia principales calculados respecto a los ejes y y z , respectivamente.

2.3.11. Teoría de la energía de deformación o teoría de Von Mises-Hencky.

Expresado con palabras, la teoría de la energía de distorsión anticipa que la fluencia se producirá siempre que la energía de distorsión en una unidad de volumen sea igual a la energía de distorsión en el mismo volumen cuando se le someta a esfuerzo

uniaxial hasta el valor de la resistencia de fluencia. En el caso de un ensayo a tensión simple, $\sigma_1 = \sigma'$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. (2.20)}$$

En consecuencia, se prevé que ocurrirá fluencia cuando

$$\sigma' \geq S_y \quad \text{Ec. (2.21)}$$

Al esfuerzo σ' se le debe dar un nombre especial, puesto que representa el estado de esfuerzo completo σ_1 , σ_2 y σ_3 . Las denominaciones elegidas son esfuerzo efectivo y esfuerzo de Von Mises, en honor del doctor R. Von Mises, quien contribuyó al desarrollo de la teoría.

Para el estado de esfuerzo biaxial, σ_A y σ_B son los dos esfuerzos principales distintos de cero. Luego, en la ecuación (2.20), se obtiene

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. (2.22)}$$

La teoría de la energía de distorsión recibe también los siguientes nombres:

- Teoría de la energía de cortante.
- Teoría de Von Mises-Hencky.
- Teoría del esfuerzo cortante octaédrico.

En la teoría del esfuerzo cortante octaédrico, se supone que la falla ocurre siempre que el esfuerzo cortante octaédrico para cualquier estado de esfuerzo es igual, o

mayor que el esfuerzo cortante octaédrico del espécimen de ensayo a tensión simple en falla. La ecuación (2-21) es

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (e)$$

Utilizando los resultados del ensayo a tensión $\sigma_1 = \sigma'$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, como antes, se determina a partir de la ecuación (e) que

$$\tau_{oct} = \frac{\sigma'}{3} (2)^{\frac{1}{2}} \quad (f)$$

Despejando σ' en las ecuaciones (e) y (f), se obtiene

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (g)$$

que es idéntica a la ecuación (2.20).[6]

2.3.12. Teoría de concentración de esfuerzos.

En el desarrollo de las ecuaciones de esfuerzo básicas para tensión, compresión, flexión y torsión, antes descritas, se supuso que no hubo irregularidades en el elemento analizado. Pero es muy difícil diseñar una máquina sin que ocurran algunos cambios en las secciones transversales de los elementos. Los ejes rotatorios deben tener hombros o resaltos diseñados en ellos de manera que se puedan instalar adecuadamente los cojinetes, y que soporten cargas de empuje axial; los ejes deben

tener además ranuras integradas para sujetar poleas y engranes. Un perno tiene una cabeza en un extremo, y cuerda o rosca de tornillo en el otro, y ambos están diseñados para soportar cambios bruscos en la sección transversal. Otras partes requieren orificios, surcos para aceite y muescas o mellas de diversos tipos. Cualquier discontinuidad en una parte de la máquina altera la distribución de esfuerzo en los alrededores de la discontinuidad, y de este modo las ecuaciones básicas de esfuerzo ya no describen el estado de esfuerzo en dicha parte. A estas discontinuidades se les llama intensificadores de esfuerzo y a las regiones en que ocurre, áreas de concentración del esfuerzo.

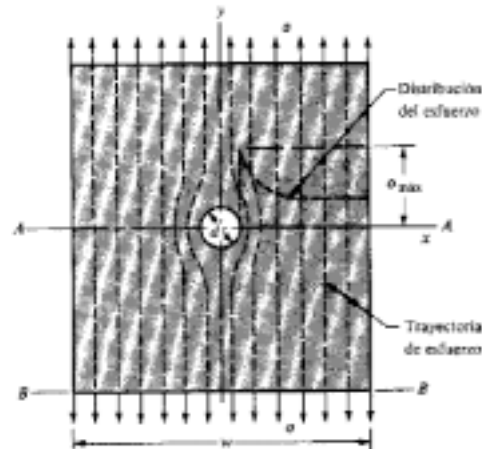


FIGURA 2.13 Distribución de esfuerzo cerca de un orificio de una placa en la que se ejerce tensión. El esfuerzo tensor en la sección B-B, alejada del orificio, es $\sigma = F/A$, donde $A = w \cdot t$ y t es el grosor de la placa. En la sección A-A, que pasa por el agujero, el área es $A_0 = (w-d)t$ y el esfuerzo nominal es $\sigma_0 = F/A_0$. Obsérvese la diferencia entre el esfuerzo nominal y el esfuerzo que se ejerce en una sección alejada de la discontinuidad.

Como se observa en la Figura 2.13, nótese que las trayectorias del esfuerzo son uniformes en todas partes menos en la vecindad del orificio. Pero en este último las líneas de fuerza deben experimentar flexión para rodearlo. La concentración del esfuerzo es un efecto altamente localizado. El esfuerzo en la placa de tensión es máximo en el borde del orificio en el plano A-A', tal esfuerzo disminuye rápidamente cuando se examinan puntos alejados del borde del agujero y pronto vuelve a ser uniforme.

Un factor de concentración del esfuerzo teórico o geométrico, K_t o K_{ts} se emplea para relacionar el esfuerzo máximo real en la discontinuidad, con el esfuerzo nominal. Los factores están definidos por las ecuaciones

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_0} \quad K_{ts} = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{\tau_0} \quad \text{Ec. (2.23)}$$

donde K_t se utiliza para esfuerzos normales y K_{ts} , para esfuerzos cortantes. El esfuerzo nominal σ_0 o τ_0 es más difícil de definir. En general, es el esfuerzo que se calcula mediante el uso de las ecuaciones de esfuerzo elementales y el área neta, o la sección transversal neta. Pero a veces se utiliza en cambio la sección transversal total; así que conviene siempre verificar esta condición antes de determinar el esfuerzo máximo.

El subíndice t en K_t significa que el valor de este factor de concentración del esfuerzo depende sólo de la geometría de la parte. Esto es, el material específico usado no tiene ningún efecto en el valor de K_t . Ésta es la razón por la que recibe el nombre de factor teórico de concentración del esfuerzo.

El análisis de figuras geométricas para determinar factores de concentración de esfuerzo es un problema difícil, y no se pueden obtener muchas soluciones. Una solución de este tipo es la de una placa infinita que contiene un orificio elíptico cargada en tensión uniforme. El resultado es

$$K_t = 1 + \frac{2b}{a} \quad \text{Ec. (2.24)}$$

donde, después de sustituir el orificio circular de la figura 2.13 por una elipse, b es el semiancho, a es la semialtura, y $w = \infty$. Por lo tanto, en el caso de un orificio circular, $b = a$ y $K_t = 3$.

Nótese que la ecuación (2.24) puede aplicarse a una grieta transversal, donde $b \gg a$, o bien a una grieta longitudinal ($b \ll a$).

La mayoría de los factores de concentración del esfuerzo se determinan a través de técnicas experimentales. Aunque se ha aplicado el método de elemento finito, el hecho de que los elementos sean en realidad finitos impide que se obtenga el esfuerzo máximo real. Entre los métodos experimentales que se aplican en general se cuentan los de foto elasticidad, métodos de retícula o rejilla, métodos de revestimiento frágil y métodos eléctricos con medidores de la deformación. Desde luego, los métodos de la rejilla y con medidores de la deformación (deformímetros) presentan el mismo inconveniente que el método del elemento finito.[6]

2.3.13. Carga variable

Para obtener las propiedades de materiales relacionados con el diagrama esfuerzo-deformación, la carga se aplica en forma gradual dando suficiente tiempo para que se desarrolle la deformación. En los casos usuales, la probeta se ensaya hasta que se destruye, de manera que los esfuerzos se aplican sólo una vez. Estas condiciones se conocen como condiciones estáticas, y se tienen con alto grado de aproximación en muchas estructuras y elementos de máquina.

Sin embargo, ocurre con frecuencia que los esfuerzos varían o fluctúan entre determinados valores. Por ejemplo, una fibra particular de la superficie de un eje rotatorio, sometido a la acción de cargas de flexión, pasa por esfuerzos de tensión y de compresión en cada revolución del eje. Si éste es parte de un motor eléctrico que gira a 1725 rpm, la fibra es esforzada en tensión y en compresión 1725 veces por minuto. Si el eje también está cargado axialmente (por ejemplo, en el caso de un engrane helicoidal o de tornillo sinfín), habrá una componente axial de esfuerzo que

se superpondrá a la componente de flexión. Esto, en cualquier, fibra, ocasionará un esfuerzo que seguirá siendo fluctuante pero que oscilará entre valores diferentes. Esas y otras clases de cargas que ocurren en elementos de máquina producen esfuerzos que se llaman repetidos, alternantes o fluctuantes,

En muchos casos hay que analizar elementos de máquina que han fallado bajo la acción de esfuerzos repetidos o fluctuantes y, sin embargo, después de un cuidadoso análisis se descubre que los esfuerzos máximos reales fueron inferiores a la resistencia última del material y, muchas veces, aun menores que la resistencia de fluencia. La característica más notable de estas falla ha sido que los esfuerzos se repitieron muchas veces. Por lo tanto, la falla se denomina falla por fatiga.

2.3.14. Límite de fatiga o límite de resistencia a la fatiga.

La determinación experimental de los límites de resistencia a la fatiga es ahora un procedimiento de rutina, aunque muy extenso y costoso. En términos generales, se prefiere realizar ensayos de esfuerzo a ensayos de deformación para determinar límites de fatiga.

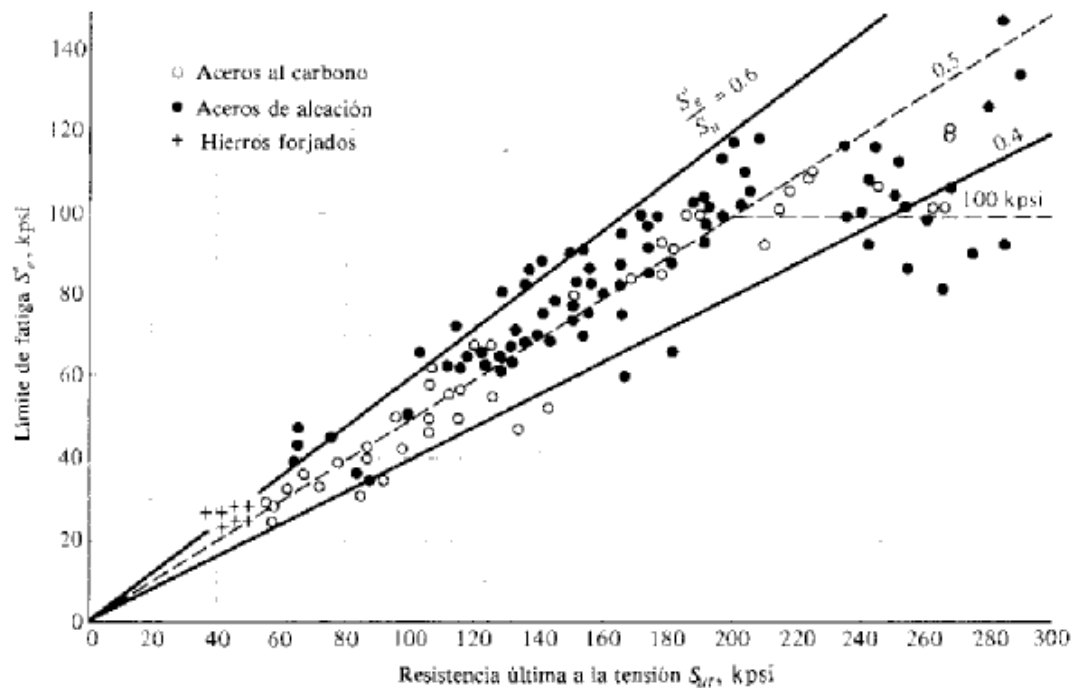


Figura 2.14 Gráfica de límites de fatiga en función de resistencia a la tensión, con base en resultados de prueba reales para un gran número de hierros y aceros forjados. Las relaciones $S_e / S_{ut} = 0.60, 0.50$ y 0.4 se indican por líneas continuas y punteadas. Obsérvese asimismo la línea punteada horizontal para $S_e = 100$ kpsi. Los puntos mostrados que corresponden a una resistencia a la tensión mayor que 200 kpsi tiene un límite de fatiga medio $S_e = 107$ kpsi y una desviación estándar de 13.5 kpsi. (Tomado de datos compilados por H. J. Grover, S. A. Gordon y L. fi. Jackson en *Fatigue of Metals and Structures*, Bureau of Naval Weapons Document NAVWEPS 00-25-534, 1960 rev.; y de *Fatigue Design Handbook*, SAF-, 1968, p. 42.) [6]

En el caso de un diseño preliminar y de prototipo, y también para algunos análisis de fallas, se necesita un método rápido de estimación. Existe una gran cantidad de datos publicados acerca de los resultados obtenidos mediante pruebas con la máquina de viga rotatoria y ensayos a tensión simple. Al granearlos, como en la figura 7-7, puede observarse si existe alguna correlación entre ambos conjuntos de resultados. La gráfica indica que el límite de fatiga varía para los aceros, desde aproximadamente 40 a 60% de la resistencia última a la tensión, hasta un valor de S_{ut} cercano a 200 kpsi (1400 MPa). Comenzando con $S_{ut} = 200$ kpsi, más o menos, la dispersión parece aumentar, pero la tendencia es hacia la nivelación, como lo indica la línea punteada horizontal en $S_e = 100$ kpsi (700 MPa).

Ahora es importante notar aquí que la dispersión de los valores de límite de fatiga no es adecuada para una diseminación o dispersión en los valores de las resistencias a la tensión de la pro beta. Este efecto ocurrirá aun cuando las resistencias a la tensión de un número considerable de probetas se conserven exactamente iguales. Téngase esto en mente cuando se elijan factores de seguridad.

Ahora se presentará un método para determinar límites de resistencia a la fatiga, obsérvese que las estimaciones obtenidas a partir de cantidades de datos adquiridos de muchas fuentes, tienen probablemente una amplia dispersión y podrían apartarse en forma significativa de los resultados obtenidos de pruebas de laboratorio reales, de las propiedades mecánicas de probetas obtenidas a través de estrictas especificaciones en órdenes de compra. Como el área de incertidumbre es mayor, debe hacerse una compensación mediante el empleo de factores de diseño mayores que los que se utilizarían en el diseño estático.

Mischke ha analizado muchos datos de pruebas reales provenientes de varias fuentes y concluyó que el límite de resistencia a la fatiga, o de fatiga, puede estar relacionado en realidad con la resistencia a la tensión. En el caso de aceros, la relación es

$$S'_e = \begin{cases} 0.504 S_{ut} & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi (1400 MPa)} \\ 100 \text{ kpsi} & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} \\ 700 \text{ MPa} & S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Ec. (2.25)}$$

donde S_{ut} es la resistencia mínima a la tensión. La marca de prima en S'_e en esta ecuación indica probeta de viga rotatoria, porque el símbolo S_e se reservará para el límite de fatiga de un elemento de máquina particular sujeto a cualquier clase de carga. Pronto se verá que estas dos resistencias pueden ser totalmente distintas.

2.3.15. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga

Se ha expresado que toda probeta para ensayo en una máquina de viga rotatoria, utilizada para determinar límites de resistencia a la fatiga, se elabora con mucho cuidado y es ensayada en condiciones controladas en forma precisa. No es realista esperar que el límite de fatiga de un elemento mecánico o estructural resulte igual a uno de los valores obtenidos en el laboratorio.

Para tener en cuenta las más importantes de estas condiciones se emplea una diversidad de factores de modificación, de los cuales cada uno corresponde a un solo efecto. Con base en lo anterior se tiene

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e S'_e \quad \text{Ec. (2.26)}$$

Donde

S_e = límite de resistencia a la fatiga del elemento mecánico

S'_e = límite de resistencia a la fatiga de la muestra de viga rotatoria

k_a = factor de superficie

k_b = factor de tamaño

k_c = factor de carga

k_d = factor de temperatura

k_e = factor de efectos diversos

Factor de superficie k_a

La superficie de la probeta de la viga rotatoria está perfectamente pulida y recibe un pulimento final en dirección axial para eliminar cualesquiera ralladuras circunferenciales. Los factores de modificación dependen de la calidad del acabado y

de la resistencia a la tensión. Para obtener una fórmula para k_a se examinó un total de 39 punios de datos para diversos acabados de superficie. Esta fórmula es

$$k_a = aS_{ut}^b \quad \text{Ec. (2.27)}$$

donde S_{ut} es la resistencia mínima a la tensión; a y b se encontrarán en la tabla 2.2.

ACABADO DE SUPERFICIE	FACTOR a		EXPONENTE b
	kpsi	MPa	
Esmerilado (rectificado)	1.34	1.58	-0.085
Maquinado o estirado en frío	2.70	4.51	-0.265
Laminado en caliente	14.4	57.7	-0.718
Forjado	39.9	272.	-0.995

Tabla 2.2 Factores de acabado de superficies. [6]

Factor de tamaño k_b

El factor de tamaño se ha evaluado utilizando 133 conjuntos de puntos de datos. Los resultados en los casos de flexión y torsión se pueden expresar como

$$k_b = \begin{cases} \left(\frac{d}{0.3} \right)^{-0.1133} \text{ in} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ \left(\frac{d}{7.62} \right)^{-0.1133} \text{ mm} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{Ec. (2.28)}$$

Para tamaños mayores, k_b varía de 0.60 a 0.75 en flexión y torsión.

En el caso de que se aplique carga axial no existe el efecto de tamaño. Por lo tanto, se utiliza

$$k_b = 1 \quad \text{Ec. (2.29)}$$

Uno de los problemas que surgen al usar la ecuación (2.28) es que hacer cuando se utiliza una sección no circular. Es decir, ¿cuál es el factor de tamaño para una barra rectangular con 6 mm de espesor y 40 mm de ancho? El método que se aplicará aquí emplea una dimensión efectiva d_e obtenida al igualar el volumen del material sometido a un nivel de esfuerzo igual a, o superior a 95% del esfuerzo máximo, con el mismo volumen de probeta de viga rotatoria. Lo anterior da por resultado que, cuando se igualan estos dos volúmenes, las longitudes se cancelan y necesitan considerarse solamente las áreas. Tratándose de una sección de viga rotatoria, el área de 95% de esfuerzo es la de un anillo que tenga un diámetro exterior d y uno interior igual a $0.95d$. De este modo, designando el área de 95% de esfuerzo con $A_{0.95\sigma}$, se tiene

$$A_{0.95\sigma} = \frac{\pi}{4} [d^2 - (0.95d)^2] = 0.0766d^2 \quad \text{Ec. (2.30)}$$

Esta ecuación es válida también para un elemento hueco circular rotatorio. En el caso de vigas redondas macizas o huecas, el área de 95% de esfuerzo es dos veces mayor que el área exterior de dos cuerdas paralelas con un espaciamiento de $0.95D$, donde D es el diámetro. Realizando un cálculo exacto, lo anterior da

$$A_{0.95\sigma} = 0.0105D^2 \quad (a)$$

cuando se redondea. Haciendo las ecuaciones (2.30) y (a) iguales entre si, podemos resolver para determinar el diámetro efectivo. Esto da

$$d_e = 0.370D \quad \text{Ec. (2.31)}$$

que es el tamaño efectivo de la viga redonda correspondiente a una viga maciza o hueca no rotatoria.

Una sección rectangular de dimensiones $h \times b$ tiene $A_{0.95\sigma} = 0.05hb$. Aplicando el mismo método que antes, se tiene

$$d_e = 0.808(h \cdot b)^{1/2} \quad \text{Ec. (2.32)}$$

Estas secciones se muestran en la figura 7-8 junto con un perfil de canal y una viga de patín ancho. En el caso del canal,

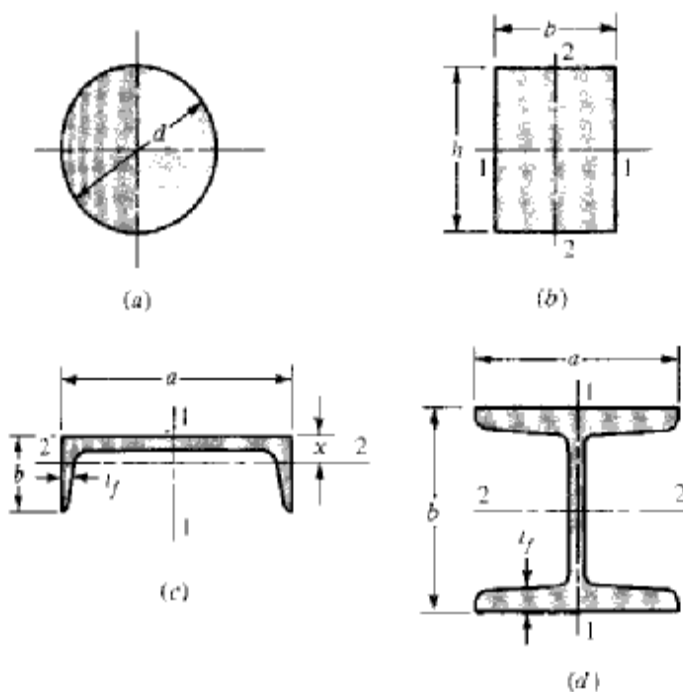


Figura 2.15 Secciones de una viga. [6]

$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.05ab & \text{eje 1-1} \\ 0.052xa + 0.1t_f(b-x) & \text{eje 2-2} \end{cases} \quad \text{Ec. (2.33)}$$

El área de 95% de esfuerzo de la viga I de patín ancho es

$$A_{0.95\sigma} = \begin{cases} 0.10at_f & \text{eje 1-1} \\ 0.05ba & t_f > 0.025a \quad \text{eje 2-2} \end{cases} \quad \text{Ec. (2.34)}$$

Factor de carga k_c

El factor de carga está dado por la ecuación

$$k_c = \begin{cases} 0.923 \text{ carga axial} & S_{ut} \leq 220 \text{ kpsi (1520 MPa)} \\ 1 \text{ carga axial} & S_{ut} > 220 \text{ kpsi (1520 MPa)} \\ 1 \text{ flexión} & \\ 0.577 \text{ torsión y cortante} & \end{cases} \quad \text{Ec. (2.35)}$$

Aunque aparentemente no hay efecto de tamaño en las probetas ensayadas en fatiga axial o con inversión, existe una diferencia definitiva entre el límite de fatiga axial y el de flexión invertida. R. W. Landgraf, quien trabaja ahora en la Ford Motor Company, ha formado una extensa colección de datos acerca de la fatiga axial. Estos resultados fueron analizados, lo que dio origen a los valores que se muestran en la ecuación (2.35) en el caso de carga axial.

Un conjunto de 52 puntos de datos, que comparan el límite de fatiga torsional con el límite de fatiga flexionante, produjeron un factor de carga en torsión de 0.565. Mediante el uso de un conjunto de puntos de datos diferente, Mischke obtuvo el resultado $k_c = 0.585$. Estos dos resultados están muy próximos al valor de 0.577 que

se observa en la ecuación (2.35), que se puede obtener a partir de la teoría de la energía de distorsión.

Factor de temperatura k_d

Cuando las temperaturas de operación son menores que la temperatura del lugar de trabajo, la fractura por fragilidad de los materiales es una posibilidad latente y debe investigarse antes de empezar a trabajar. Cuando las temperaturas de operación son mayores que la del lugar de trabajo, antes debe investigarse la fluencia porque la resistencia de fluencia disminuye muy rápido con la temperatura; véase la Figura 5-11. Cualquier esfuerzo inducirá flujo plástico en un material que opere con altas temperaturas; así que también debe tomarse en cuenta este factor. Por último, quizá resulte cierto que no existe límite de fatiga en materiales que operan con altas temperaturas. Debido a la reducción en la resistencia a la fatiga, el proceso de falla depende del tiempo hasta cierto punto.

La cantidad limitada de datos de que se dispone indica que el límite de resistencia a la fatiga para aceros aumenta ligeramente cuando se eleva la temperatura y después empieza a disminuir en el orden de los 400 a los 700°F, que no es diferente del comportamiento que observa la resistencia a la tensión. Por esta razón es probable que el límite de resistencia a la fatiga esté relacionado con la resistencia a la tensión a temperaturas elevadas en la misma forma que a la temperatura del lugar de trabajo. Por lo tanto, parece muy lógico emplear las mismas relaciones para anticipar el límite de fatiga a temperaturas elevadas que se utilizan a la temperatura del lugar de trabajo, cuando menos hasta que se disponga de datos más completos. Al menos, esta práctica proporcionará un estándar útil contra el cual se puede comparar el desempeño de diversos materiales.

TEMPERATURA, °C	S_T/S_{RT}	TEMPERATURA, °F	S_T/S_{RT}
20	1.000	70	1.000
50	1.010	100	1.008
100	1.020	200	1.020
150	1.025	300	1.024
200	1.020	400	1.018
250	1.000	500	0.995
300	0.975	600	0.963
350	0.927	700	0.927
400	0.922	800	0.872
450	0.840	900	0.797
500	0.766	1000	0.698
550	0.670	1100	0.567
600	0.546		

Tabla 2.3 Efecto de la temperatura de operación sobre la resistencia a la tensión del acero. (S_t = resistencia a la tensión a la temperatura de operación; S_{RT} = resistencia a la tensión a la temperatura del lugar de trabajo; $0.099 \leq \sigma \leq 0.110$). [6]

Nótese que la tabla 2.3 representa 145 pruebas de 21 aceros al carbono y de aleación, y que la desviación estándar máxima vale sólo 0.110.

Se presentan dos tipos de problemas cuando se toma en cuenta la temperatura. Si se conoce el límite de resistencia a la fatiga de una viga rotatoria a la temperatura del lugar de trabajo, entonces úsese en la tabla 2.3 y precédase como es habitual. Si el límite de resistencia a la fatiga de la viga giratoria no se conoce, entonces calcúlese éste utilizando la ecuación (2.36)

$$K_d = \frac{S_T}{S_{RT}} \quad \text{Ec. (2.36)}$$

y la resistencia a la tensión corregida por temperatura que se obtuvo con el factor de la tabla 2.36; luego úsese $k_d = 1$.

Factor de efectos diversos k_e

Uno de los motivos para emplear el factor k_e es tomar en cuenta la reducción en el límite de resistencia a la fatiga debida a todos los otros efectos; sin embargo, la verdadera razón de usarlo es que sirve de recordatorio de que deben considerarse dichos efectos, pues no se dispone de valores reales de k_e .

Los esfuerzos residuales o remanentes pueden servir para mejorar el límite de resistencia a la fatiga, o bien para afectarlo negativamente. Por lo general, si el esfuerzo remanente en la superficie de un elemento es de compresión, se mejora el límite mencionado. Las fallas por fatiga resultan fallas por tensión o al menos causadas por esfuerzos de tensión y, por consiguiente, todo lo que los reduzca también disminuirá la posibilidad de una falla por fatiga. Hay operaciones como graneado (o picadura) con perdigones, martillado y laminado en frío, las cuales originan esfuerzos de compresión en la superficie de una pieza y ayudan en gran medida a mejorar el límite de resistencia a la fatiga. Desde luego, el material no debe trabajarse en exceso.

El límite de fatiga de piezas formadas a partir de barras o láminas provenientes de estirado o laminación, así como aquéllas que son de forja, puede resultar afectado por las llamadas características direccionales de la operación. Por ejemplo, en elementos laminados o estirados se tiene un límite de resistencia a la fatiga en la dirección transversal, el cual puede ser de 10 a 20% menor que el límite respectivo en la dirección longitudinal.

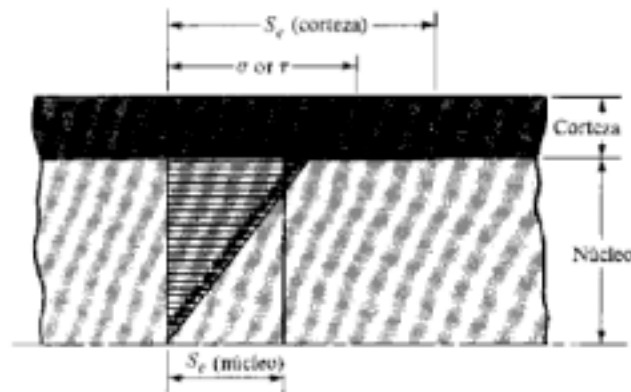


FIGURA 2.16 Falla de una pieza con temple superficial en flexión o torsión. En este ejemplo la falte ocurre en el núcleo.[6]

Las piezas con templeado superficial pueden fallar en la superficie o a la distancia del radio máximo del núcleo, dependiendo del gradiente de esfuerzo. En la figura 2.16 se muestra la distribución, normalmente triangular, del esfuerzo en una barra sometida a flexión o a torsión. La línea gruesa indica los límites de resistencia a la fatiga S_e para la capa superficial (o corteza) y para el núcleo central. En este caso, el límite de fatiga del núcleo gobierna el diseño porque, según se aprecia en la figura 2.16, el esfuerzo σ o τ , según corresponda, a la distancia del radio exterior del núcleo, es sensiblemente mayor que el límite de resistencia a la fatiga del núcleo.

Por supuesto, si también hubiera concentración de esfuerzo, el gradiente de éste correspondería a una mayor pendiente y, por lo tanto, es improbable que se produzca una falla en el núcleo.

Corrosión Es de esperar que, en piezas que funcionan en ambientes corrosivos, ocurra una disminución en su resistencia a la fatiga. Esto sucede, y se debe al ataque o picadura de la superficie a causa del material corrosivo; pero el problema no es tan simple como el de determinar el límite de fatiga de una probeta que ha sufrido corrosión. La razón de esto es que la acción corrosiva y el esforzamiento se producen

en forma simultánea. Básicamente, esto significa que, después de cierto tiempo, una pieza fallará cuando sea sometida a esfuerzos repetidos en una atmósfera corrosiva. No existe límite de fatiga. Por consiguiente, el problema del diseñador es intentar minimizar los factores que afectan la duración a la fatiga. Éstos son:

- Esfuerzo medio o estático
- Esfuerzo alternante
- Concentración de electrolito
- Oxígeno disuelto en el electrolito
- Propiedades y composición del material
- Temperatura
- Frecuencia cíclica
- Flujo o movimiento de fluido alrededor de la probeta
- Hendiduras locales

Recubrimiento electrolítico Los recubrimientos metálicos, como los de los procesos de cromado, níquelado o cadmizado, reducen el límite de resistencia a la fatiga hasta en 50%. En algunos casos la reducción debida a los recubrimientos ha sido tan severa que se ha hecho necesario eliminar el proceso de galvanostegia. El galvanizado (o revestimiento con zinc) no afecta la resistencia a la fatiga. La oxidación anódica de aleaciones ligeras reduce los límites de fatiga a la flexión hasta 39%, pero no tiene influencia en el límite de fatiga a la torsión.

Metalizado por aspersión Este proceso de recubrimiento origina imperfecciones en la superficie, que pueden ser principio de grietas. Pruebas limitadas han mostrado reducciones de 14% en la resistencia a la fatiga.

Frecuencia del esforzamiento cíclico Si, por alguna razón, el proceso de fatiga llegara a depender del tiempo, entonces también lo haría de la frecuencia. En condiciones normales la falla por fatiga es independiente de la frecuencia; pero cuando se encuentra corrosión o temperaturas elevadas, o en ambas, el factor cíclico llega a ser importante. Cuanto menor sea la frecuencia y más alta sea la temperatura, tanto mayor será la propagación de las grietas y más breve la duración a un nivel de esfuerzo dado.

Corrosión por apriete (fretage) Este fenómeno es el resultado de movimientos microscópicos en la superficie de piezas mecánicas o estructuras estrechamente ajustadas. Lo anterior ocurre en juntas atornilladas, cojinetes, cubos de ruedas y en todo conjunto de piezas de montaje apretado. El proceso implica cambio de color en la superficie, picadura y, eventualmente, fatiga. El factor de corrosión por apriete depende del material de las piezas embonantes en contacto y varía de 0.24 a 0.90.

Concentración del esfuerzo El factor de concentración del esfuerzo en fatiga k_f debe utilizarse cuando se diseñe un elemento para evitar la falla. Normalmente, este factor se utiliza para incrementar el esfuerzo.

Surge un problema en cuanto al uso del factor de concentración del esfuerzo en fatiga cuando el material es dúctil, o cuando se comporta como tal, e interesa conocer la resistencia a la fatiga de duración finita. Recuérdese que un factor de concentración del esfuerzo no necesita utilizarse con materiales dúctiles cuando éstos soporten sólo cargas estáticas, puesto que la fluencia mitigará la concentración de esfuerzo. Esto significa que en $N = 10^3$ ciclos, la carga es prácticamente estática y, por consiguiente, no necesita emplearse un factor de concentración del esfuerzo. Como se debe utilizar K_f en 10^6 ciclos, ¿qué debe hacerse con las duraciones entre 10^3 y 10^6 ciclos?

Un enfoque utilizado con frecuencia consiste en emplear el factor de efectos diversos k_e como factor de reducción de la resistencia en casos de esta naturaleza, con lo cual sólo se reduce el límite de fatiga. Con este enfoque se define

$$k_e = \frac{1}{k_f} \quad \text{Ec. (2.37)}$$

donde

$$k_f = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_0} = \frac{\text{esfuerzo máximo en probeta con muesca}}{\text{esfuerzo en probeta libre de muesca}}$$

como factor de reducción de la resistencia a la fatiga. Por lo tanto, en el diagrama S-N, k_e reduce el límite de fatiga a 10^6 ciclos pero no tiene ningún efecto a 10^3 ciclos.

Un enfoque alternativo consiste en utilizar un valor reducido de K_f , designado con K'_f , en el caso de duraciones menores que $N = 10^6$. Para lograrlo, sea $K'_f = K_f$ en 10^6 ciclos y $K'_f = 1$ en 10^3 ciclos, y escríbase

$$K'_f = aN^b \quad \text{Ec. (2.38)}$$

en esta ecuación se pueden despejar a y b , lo que da por resultado

$$a = \frac{1}{k_f} \quad b = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{k_f} \quad \text{Ec. (2.39)}$$

2.3.16. Esfuerzos fluctuantes

En muchos casos necesita determinarse la resistencia de piezas, correspondiente a estados de esfuerzo diferentes de los casos en que hay inversión completa sucesiva. En muchas ocasiones, los esfuerzos fluctúan sin pasar por cero. La Figura 2.17 muestra algunas de las diversas relaciones esfuerzo-tiempo que se pueden presentar. Las componentes de esfuerzo que se considerarán, algunas de las cuales se indican en la Figura 2.17-d, son

$\sigma_{\min}$ = esfuerzo mínimo

$\sigma_{\max}$ = esfuerzo máximo

σ_a = amplitud de esfuerzo

σ_{med} = esfuerzo a medio intervalo

σ_r = intervalo de esfuerzo

σ_s = esfuerzo constante o estático

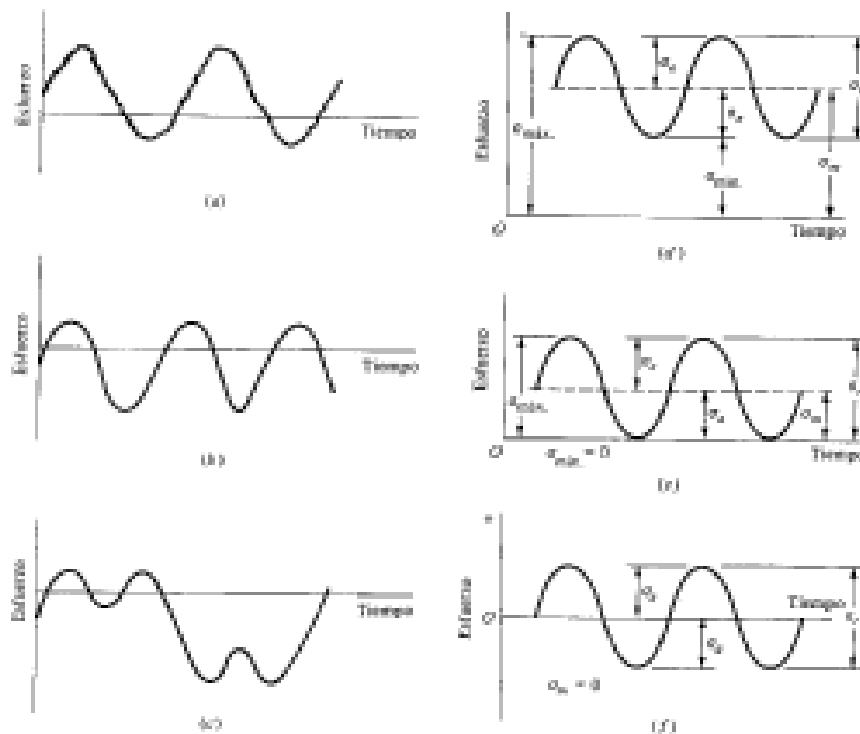


FIGURA 2.17 Relaciones esfuerzo-tiempo. [6]

El esfuerzo estacionario o estático no es igual al esfuerzo medio. De hecho, puede tener cualquier valor entre $\sigma_{\min}$ y $\sigma_{\max}$. El esfuerzo estático existe debido a una carga o precarga fija, constante en el tiempo, aplicada a la pieza. Suele ser independiente de la parte variable de la carga. Por ejemplo, un resorte helicoidal de compresión siempre trabaja colocado en un espacio cuya longitud es menor que la normal o libre del resorte. El esfuerzo originado por esta compresión inicial se llama componente estacionaria o estática del esfuerzo, y no es igual al esfuerzo medio.

Los subíndices de estas componentes se aplican tanto a esfuerzos normales como a cortantes.

En la Figura 2.17 se aprecian claramente las siguientes relaciones:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \text{Ec. (2.40)}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \text{Ec. (2.41)}$$

Aunque las componentes de esfuerzo se han definido con base en una forma senoidal de variación del esfuerzo en el tiempo, la forma exacta de la curva no parece tener particular significación.

Además, las relaciones de esfuerzo

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad \text{Ec. (2.42)}$$

y

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad \text{Ec. (2.43)}$$

se utilizan a menudo para describir esfuerzos fluctuantes.

2.3.17. Resistencia a la fatiga en el caso de esfuerzos fluctuantes

Una vez definidas las diversas componentes de esfuerzo relacionadas con el trabajo de un elemento sometido a esfuerzo fluctuante, conviene variar el esfuerzo medio y su amplitud para investigar la resistencia a la fatiga de piezas sometidas a tales esfuerzos. Por lo general, se emplean tres métodos para graficar los resultados de tales ensayos y se representan en las Figuras 2.18, 2.19 y 2.20.

En el diagrama de Goodman modificado de la figura 2.18, el esfuerzo medio es abscisa y las demás componentes son ordenadas, considerando la tensión en la dirección positiva del eje vertical. El límite de resistencia a la fatiga, la resistencia a la fatiga o la resistencia de vida finita, según el caso, se llevan como ordenadas por encima o debajo del origen. La línea de esfuerzo medio es una recta a 45°, que va del origen a la resistencia última de la pieza. El diagrama de Goodman modificado consiste en las rectas trazadas hasta S_e (o S_f), arriba y abajo del origen. Se debe notar que la resistencia de fluencia se ha marcado en ambos ejes porque la cedencia sería el criterio de falla si $\sigma_{\text{máx}}$ excediera a S_y .

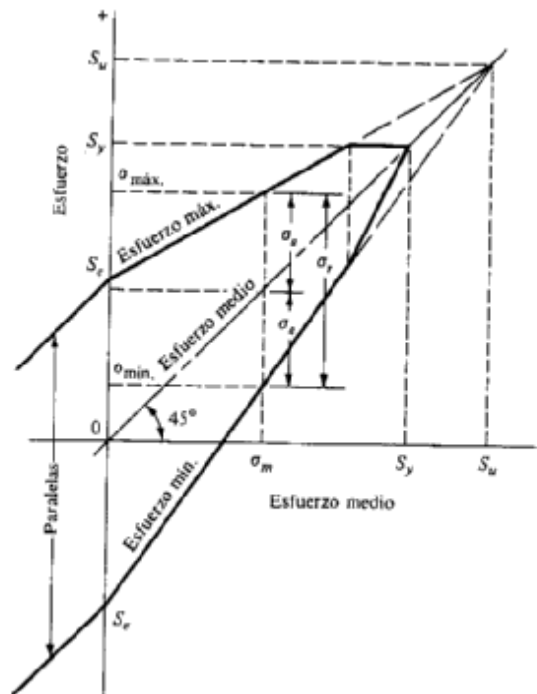


Figura 2.18 Diagrama de Goodman modificado que muestra todas las resistencias y los valores límites de las componentes de esfuerzo para un esfuerzo medio particular.

En la figura 2.19 se ve otra manera de presentar los resultados de un ensayo. Aquí, la abscisa representa la relación de la resistencia medía a la resistencia última, mientras que la tensión se indica a la derecha y la compresión a la izquierda del origen. La ordenada es la relación de la resistencia alternante al límite de resistencia a la fatiga. Entonces, la recta BC representa el criterio de Goodman modificado para los casos de falla. Nótese que la existencia de esfuerzo medio en la región de compresión tiene poco efecto sobre el límite de resistencia a la fatiga.

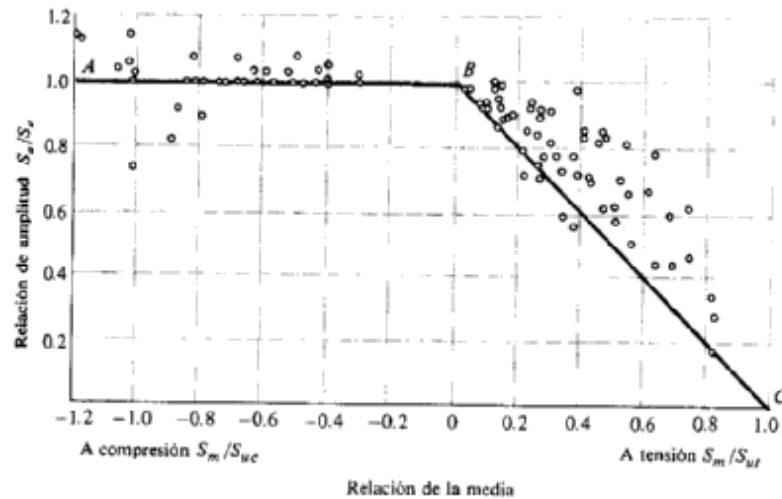


Figura 2.19 Gráfica de fallas por fatiga para esfuerzos medios en las regiones de tensión y de compresión. Al normalizar los datos utilizando las relaciones de la resistencia media a la resistencia a la tensión S_m/S_{ut} , resistencia media a la resistencia de compresión S_m/S_{uc} y amplitud de resistencia a limite de resistencias la fatiga S_a/S_e es posible trazar una gráfica de resultados experimentales para diversos aceros. [Fuente de los datos: Thomas J. Dotan, "Stress Range", sec. 6.2 en O. J. Horgef ;compilador), ASME Handbook—Metáls Engineering Design, McGraw-Hill, Nueva York. 1953.]

El diagrama de la figura 2.20, muy adecuado, es único en que representa cuatro de las componentes de esfuerzo y también las dos relaciones de esfuerzo. Una curva que representa el limite de resistencia a la fatiga para valores de R desde $R = -1$ hasta $R = 1$ comienza en S_e sobre el eje σ_a y termina en S_{ut} sobre el eje σ_m . También están representadas curvas de duración constante para $N = 10^5$ y $N = 10^4$ ciclos. Cualquier estado de esfuerzo, como el del punto A, puede describirse mediante las componentes mínima y máxima, o por medio de las componentes media y alternante. Y la seguridad se marca siempre que el punto descrito por las componentes de esfuerzo esté por debajo de la línea de vida constante.

Cuando el esfuerzo medio es de compresión, ocurre falla siempre que $\sigma_a = S_e$, o siempre que $\sigma_{máx} = S_{ec}$ como se indica en el lado izquierdo de la Figura 2.19. No

necesita elaborarse ningún diagrama de fatiga ni desarrollarse ningún otro criterio de falla.

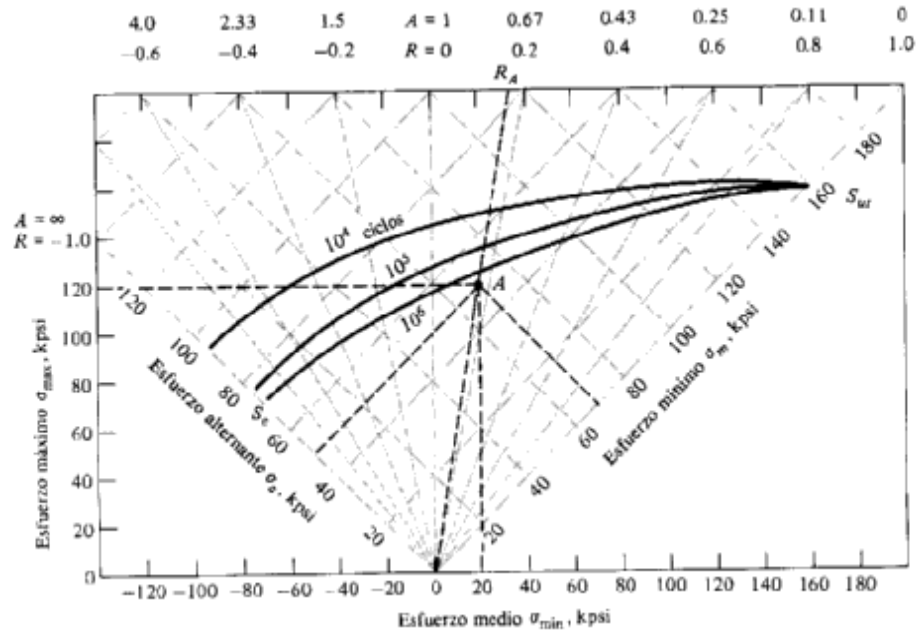


FIGURA 2.20 Diagrama de fatiga maestro creado para el acero AISI 4340 que tiene $S_{ut}=158$ Kpsi y $S_y=147$ kpsi. Las componentes de esfuerzo en A son $\sigma_{min}=20$, $\sigma_{max}=120$, $\sigma_m=70$ y $\sigma_a=50$, todos en kpsi. (Fuente: H. J. Grover, Fatigue of Aircraft Structures, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C: 1966, pp. 317, 322. Véase también J. A. Coliins, Failure of Materials in Mechanical Design, Wiley, Nueva York, 1981, p. 216.)

En la Figura 2.21 se ha vuelto a trazar la componente de tensión de la Figura 2.18, esta vez utilizando resistencias en vez de relaciones de resistencia, con el mismo criterio de Goodman modificado, además de otros tres criterios para los casos de falla. Tales diagramas se trazan a menudo para fines de análisis y diseño; son fáciles de usar y los resultados se pueden proporcionar directamente.

En la ordenada de la Figura 2.21 se representa el límite de fatigado bien la resistencia de vida finita S_f . Estos valores ya se habrán corregido utilizando los factores de Marín de la ecuación 2.26. Nótese que la resistencia de fluencia S_y , se representa también en el eje de las ordenadas. Esto sirve como recordatorio de que la fluencia, y no la fatiga, podría ser el criterio de falla.

El eje del esfuerzo medio de la figura 2.21 contiene la resistencia de fluencia S_y , y la resistencia a la tensión S_{ut} , representadas en él.

En la Figura 2.21 se presentan cuatro criterios de falla: la línea de Soderberg, la línea de Goodman modificada, la línea de Gerber y la de fluencia o cedencia. El diagrama muestra que sólo el criterio de Soderberg ofrece protección en contra de la fluencia.

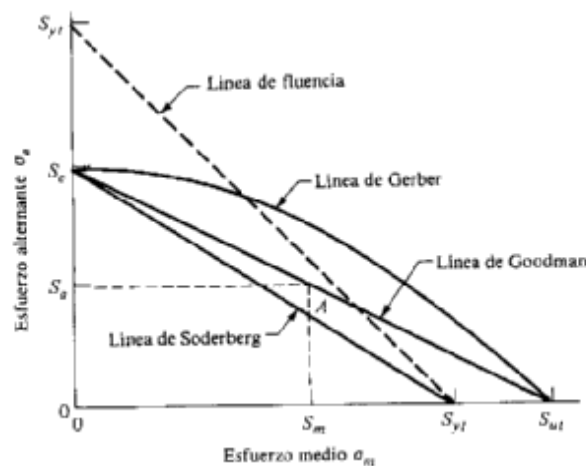


FIGURA 2.21 Diagrama de fatiga que representa diversos criterios de falla. Para cada criterio, los puntos sobre y fuera de la línea respectiva indican falla. Un punto A en la línea de Goodman, por ejemplo, da la resistencia S_m como el valor límite de σ_m correspondiente a la resistencia S_{ut} , la cual, emparejada con σ_m , es el valor límite de σ_a .

Las teorías lineales de la figura 2.21 pueden expresarse en forma de ecuación para calcularse en máquina escribiendo la ecuación de una recta en su forma de intercepciones. Tal forma es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a)$$

donde a y b son las intercepciones x y y, respectivamente. Esta ecuación de la línea de Soderberg es

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \quad \text{Ec. (2.44)}$$

En forma análoga, se tiene que la relación de Goodman modificada es

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \quad \text{Ec. (2.45)}$$

Al examinar la Figura 2.19 vemos que la línea que representa la teoría de Gerber tiene una mayor posibilidad de pasar por la parte central de los puntos de falla; en consecuencia, debe ser un medio de predicción más preciso. Esta teoría recibe también el nombre de relación parabólica de Gerber, puesto que la ecuación es

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad \text{Ec. (2.46)}$$

Aunque es innecesario, se puede completar el esquema definiendo la fluencia en el primer ciclo mediante la ecuación

$$\frac{S_a}{S_{yt}} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \quad \text{Ec. (2.47)}$$

Los esfuerzos σ_a y σ_m pueden reemplazar los términos S_a y S_m , en las ecuaciones (2.44) a (2.44), si cada resistencia se divide entre un factor de seguridad n . Sí se hace esto, la ecuación de Soderberg cambia a

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{yt}} = \frac{1}{n} \quad \text{Ec. (2.48)}$$

La relación de Goodman modificada es

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \quad \text{Ec. (2.49)}$$

y la ecuación de Gerber es

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad \text{Ec. (2.50)}$$

El significado de estas ecuaciones se aprecia en la figura 2.22, poniendo como ejemplo la teoría de Goodman modificada. Pese a que las ecuaciones (2.48) a la (2.50) representan el enfoque usual a la determinación del factor de seguridad, se pueden desarrollar otros métodos; algunos de ellos basados en el concepto de línea de carga. Los ejemplos que siguen mostrarán algunos de estos enfoques alternativos.

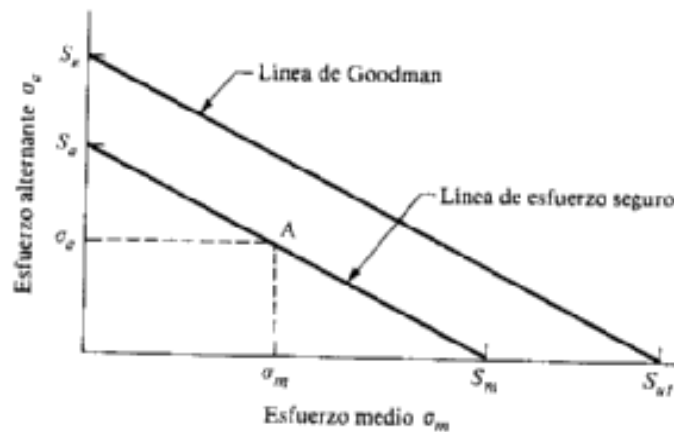


FIGURA 2.22 Línea de esfuerzo seguro.

Muchos autores utilizan las ecuaciones (2.44) a (2.50) para obtener una serie completa de fórmulas de diseño y análisis de problemas comunes que se presentan con frecuencia. Pero esta proliferación de fórmulas basadas en, por ejemplo, la línea de Goodman, reduce la sencillez básica de los enfoques gráfico y algebraico que aquí se presentan. El método gráfico es sencillo rápido y sólo requiere una regla o escala de 15 cm. Además, este enfoque de la acumulación de conocimientos pertinentes de algunos principios básicos permitirá al lector elaborar fórmulas especializadas propias para resolver casi cualquier problema que pueda presentarse.

2.3.18. Engranés cónicos.

Cuando se van a usar engranes para transmitir movimiento entre árboles o ejes con líneas centrales que se cortan, se requiere alguna forma de engrane cónico. En la Figura 2.23 muestra un par de engranes cónicos. Aunque los engranes citados suelen hacerse para un ángulo de ejes de 90° , éstos se pueden producir casi para cualquier ángulo. Los dientes pueden ser forjados, fresados o generados. Sólo los dientes generados pueden considerarse exactos.

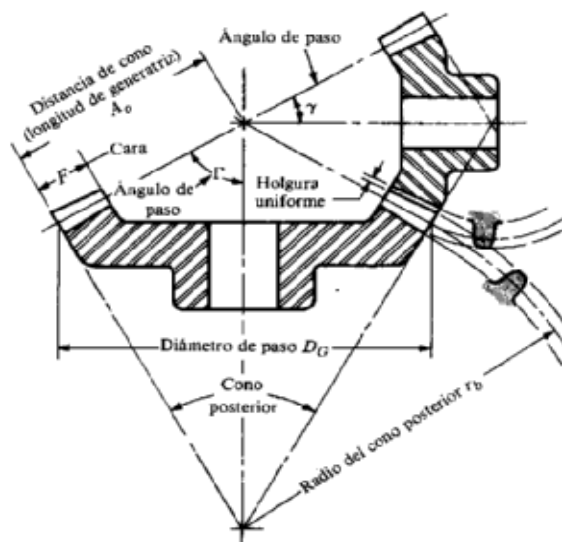


FIGURA 2.23 Nomenclatura de los engranes cónicos.[6]

La nomenclatura de los engranes cónicos comunes (con dientes rectos), se ilustra en la Figura 2.23. El paso de los engranes cónicos se mide en el extremo grande del diente, y el paso circular y el diámetro de paso se calculan en la misma forma que en el caso de engranes cilíndricos rectos. Debe observarse que la holgura es uniforme. Los ángulos de paso están definidos por los conos de paso que se enlazan en el ápice. Aquellos se hallan relacionados con los números de dientes de la manera siguiente:

$$\tan \gamma = \frac{N_p}{N_G} \quad \tan \Gamma = \frac{N_G}{N_p} \quad \text{Ec. (2.51)}$$

donde los subíndices P y G se refieren al piñón y la rueda, respectivamente, y donde γ y Γ son, respectivamente, los ángulos de paso del piñón y la rueda.

En la Figura 2.23 se indica que la forma de los dientes, cuando se proyectan en el cono anterior, es la misma que la de un engrane recto que tiene un radio igual a la distancia al cono anterior r_b . A esta aproximación se le denomina de Tredgold. El número de dientes en este engrane imaginario es

$$N' = \frac{2\pi r_b}{p} \quad \text{Ec. (2.52)}$$

donde N' es el número virtual de dientes y p es el paso circular medido en el extremo grande de los dientes.

Los engranes cónicos de dientes rectos estándares se cortan mediante el uso de un ángulo de presión de 20° , adendos y dedendos desiguales, y dientes de tamaño

completo. Esto incrementa la relación de contacto, impide el rebaje y aumenta la resistencia del piñón.

Puesto que la proyección de la forma de los dientes, en el cono anterior, es la misma que la de un engrane recto, son válidas también las definiciones y ecuaciones asociadas a los engranes rectos cuya nomenclatura es la siguiente:

La nomenclatura de los dientes de engranes rectos se indica en la Figura 2.24. La circunferencia de paso es un círculo teórico en el que generalmente se basan todos los cálculos; su diámetro es el diámetro de paso. Las circunferencias de paso de un par de engranes conectados son tangentes entre si. En un engranaje o par de engranes, al menor se le llama piñón y al mayor, rueda (o engrane mayor).

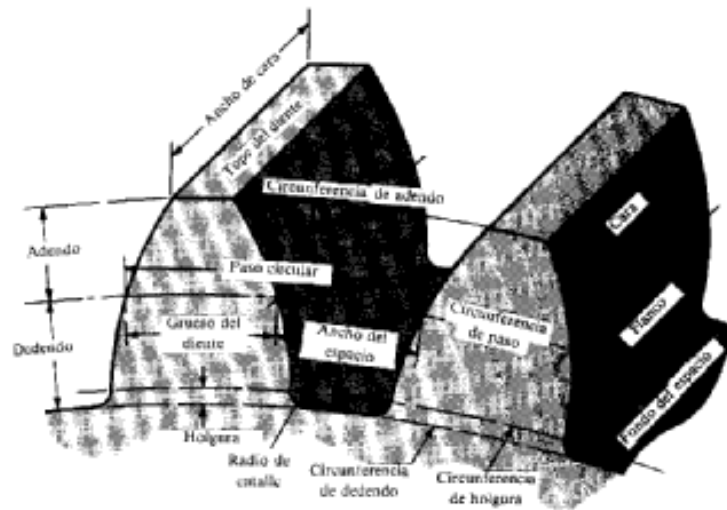


FIGURA 2.24 Nomenclatura de los dientes de engranes rectos.[6]

El paso circular p es la distancia, medida sobre la circunferencia de paso, entre determinado punto de un diente y el correspondiente de uno inmediato. De manera que el paso circular es igual a la suma del grueso del diente y el ancho del espacio entre dos consecutivos.

El módulo **m** es la razón o relación del diámetro de paso al número de dientes. La unidad de longitud que se utiliza habitualmente es el milímetro. El módulo es el Índice del tamaño de los dientes en el sistema SI.

El paso diametral **P** es la relación del número de dientes al diámetro de paso. En consecuencia, es el recíproco del módulo. El paso diametral se emplea cuando se consideran unidades inglesas y, por tanto, se expresa en dientes por pulgada (dte/in).

El adendo **a** es la distancia radial entre el tope del diente (o la circunferencia de adendo) y la circunferencia de paso. El dedendo **b** es la distancia radial entre el fondo del espacio (o la circunferencia de dedendo) y la circunferencia de paso. La altura total **h**, de un diente es la suma del adendo y el dedendo.

La circunferencia de holgura de un engrane es la circunferencia tangente a la de adendo del otro engrane conectado. La holgura **c** (o claro) es la diferencia entre el dedendo de un engrane dado que excede al adendo del engrane conectado. El juego es la diferencia del espacio entre dos dientes consecutivos y el grueso del diente del otro engrane, medidos sobre las circunferencias de paso. [6]

$$P = \frac{N}{d} \quad \text{Ec. (2.53)}$$

donde **P** = paso diametral, dientes por pulgada (dte/in).
 N = número de dientes.
 d = diámetro de paso, in

$$m = \frac{d}{N} \quad \text{Ec. (2.54)}$$

donde **m** = módulo, mm

d = diámetro de paso, in

$$p = \frac{\pi d}{N} = \pi m \quad \text{Ec. (2.55)}$$

donde p = paso circular.

$$pP = \pi \quad \text{Ec. (2.56)}$$

2.3.18.1. Análisis de fuerzas para engranes cónicos.

Al determinar las cargas en el eje o árbol y en los cojinetes de apoyo para aplicaciones de engranes cónicos, la práctica usual consiste en utilizar la carga tangencial o transmitida que ocurriría si todas estas fuerzas se concentran en el centro o punto medio del diente. Pese a que la resultante real ocurre en alguna parte entre el punto medio y el extremo grande del diente, sólo se induce un error mínimo al adoptar esta hipótesis. En el caso de la carga transmitida, esto da

$$W_t = \frac{T}{r_{med}} \quad \text{Ec. (2.57)}$$

donde T es el momento de torsión y r es el radio de paso en el centro del diente del engrane en consideración.

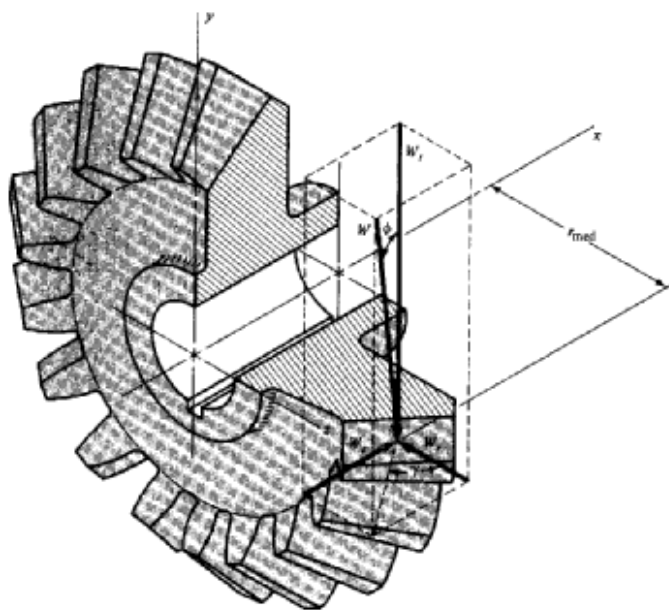


FIGURA 2.25 Fuerzas que actúan en los dientes de un engrane cónico.[6]

Las fuerzas que actúan en el centro del diente se indican en la Figura 2.25. La fuerza resultante W tiene tres componentes: una fuerza tangencial W_t , una fuerza radial W_r y una fuerza axial W_a . A partir de la trigonometría de la figura se tiene.

$$W_r = W_t \tan \phi \cos \gamma \quad \text{Ec. (2.58)}$$

$$W_a = W_t \tan \phi \operatorname{sen} \gamma \quad \text{Ec. (2.59)}$$

Las tres fuerzas W_t , W_r y W_a son perpendiculares entre si y se pueden utilizar para determinar las cargas en los cojinetes de apoyo aplicando los métodos de la estática. [6]

2.3.18.2. Esfuerzos en los engranes cónicos.

El cálculo de esfuerzos en todo tipo de engrane implica el análisis y diseño que éste debe tener para resistir la falla por flexión de los dientes y el desgaste o falla de la superficie de los mismos. La falla por flexión ocurrirá cuando el mayor esfuerzo en los dientes sea igual a /o mayor que la resistencia de fluencia o el límite de resistencia a la fatiga. Una falla en la superficie ocurre cuando el mayor esfuerzo de contacto es igual a /o mayor que la resistencia a la fatiga de la superficie. La falla superficial o desgaste está asociada a la fatiga debida a muchas repeticiones de esfuerzos de contacto intensos. Debido a que los engranes cónicos del robot trabajarán de manera intermitente y a velocidades muy lentas se puede despreciar la fatiga y considerarla mas bien en el factor de seguridad, por ésta razón no se estudiará la durabilidad de la superficie y sólo se analizará la falla por flexión. [6]

2.3.18.3. Fórmula de esfuerzo de la American Gear Manufacturers Association (AGMA).

En el enfoque AGMA se utilizan dos fórmulas fundamentales, una para el esfuerzo por flexión y una para la resistencia al desgaste. Como dijimos anteriormente sólo nos interesa la primera.

Las fórmulas fundamentales de la AGMA para el esfuerzo por flexión son:

$$\sigma = \frac{W_t \cdot K_a}{K_v} \cdot \frac{P_d}{F} \cdot \frac{K_s \cdot K_m}{J} \quad \text{Ec. (2.60)}$$

$$\sigma = \frac{W_t \cdot K_a}{K_v} \cdot \frac{1}{F \cdot m} \cdot \frac{K_s \cdot K_m}{J} \quad \text{Ec. (2.61)}$$

donde en la primera se utilizan las unidades inglesas habituales y en la segunda se emplean unidades SI. Asimismo:

σ = esfuerzo por flexión

W_t = carga tangencial transmitida.

K_a = factor de aplicación

K_v = factor dinámico

P_d = paso diametral nominal

m = módulo métrico nominal

F = ancho de cara

K_s = factor de tamaño

K_m = factor de distribución de carga

J = factor geométrico.

Donde: el factor geométrico se obtiene de la Figura 2.26.

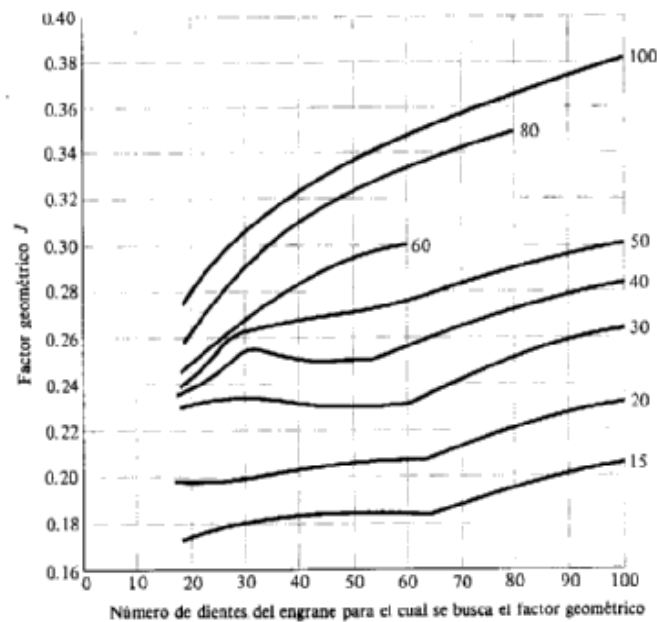


Figura 2.26 Factores geométricos J para engranes cónicos comunes; éstos corresponden a un ángulo entre ejes de 90° , un ángulo de presión de 20° y una holgura $c = 0.240/P$ in (AGMA 225.1).

Factor dinámico K_v : Cuando un engranaje o par de engranes funciona a velocidades moderadas o altas y se genera ruido, es seguro que existen efectos dinámicos. Entonces se especifica un factor de velocidad designado por K_v .

Factor de aplicación K_a : La finalidad del factor de aplicación es la de compensar el hecho de que se presentan casos donde la carga real excede a la carga tangencial nominal W_t . Los factores de aplicación suelen asignarse con base en la opinión del ingeniero de diseño.

Factor de tamaño K_s : La recomendación de la AGMA es que se utilice un factor de tamaño igual a la unidad “para la mayoría de los engranes siempre que se haga una elección adecuada del acero para el tamaño de la pieza y el tratamiento térmico y el proceso de templado o endurecimiento”. El objetivo del factor de tamaño es considerar cualquier falta de uniformidad de las propiedades del material.

Factor de distribución de carga K_m : El factor de distribución de carga se emplea para tomar en cuenta:

- Desalineamiento de los ejes geométricos de rotación
- Desviaciones en el avance
- Deflexiones elásticas causadas por la carga en ejes o árboles, cojinetes o en el alojamiento. [6]

2.3.19. Poleas y correas de sincronización.

Una banda del tipo de regulación se hace de tela revestida de caucho (o ahulada) y con refuerzo de alambre de acero para resistir la carga de tensión. Tiene dientes en su parte interior que entran en ranuras axiales formadas en dirección axial en la periferia

de las poleas Figura 2.27; estas se hallan recubiertas con tela de nylon. Una banda reguladora (llamada también Timing) no se estira o desliza y, en consecuencia, transmite potencia según una relación de velocidad angular constante. No se necesita tensión inicial. Tales bandas pueden operar con una variedad de velocidades muy amplia, tienen eficiencias en el intervalo de 97 a 99%, no requieren lubricación y son mas sencillas que las transmisiones de cadena. Son una solución adecuada para los requisitos de una transmisión de precisión.

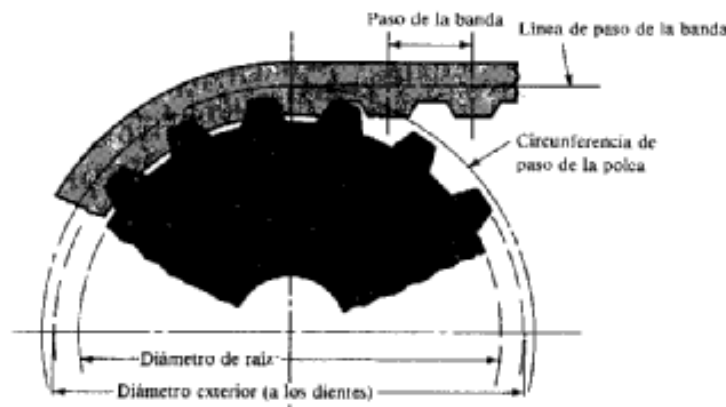


FIGURA 2.27 Transmisión de banda reguladora que muestra partes de la polea y la banda. Obsérvese que el diámetro de paso de la polea es mayor que la distancia diametral entre topes de dientes opuestos.[6]

LONGITUD DE LA BANDA.

Los cálculos que implican la longitud de la banda generalmente se basan en la longitud de paso.

La longitud efectiva o de paso de una banda Timing es calculada de la misma forma como se hace para una banda en V:

$$L = 2C + 1.57(D + d) + \frac{(D - d)^2}{4C} \quad \text{Ec. (2.62)}$$

donde C = distancia entre centros

D = diámetro de paso de la polea mayor

d = diámetro de paso de la polea menor

L = longitud de paso de la banda.

CAPÍTULO III : DISEÑO CONCEPTUAL

El diseño conceptual del robot, está limitado a ciertas características que van a influir en su aplicación, estas limitaciones están dadas por ejemplo, por el peso máximo de carga, el volumen útil del cuerpo y el grado de complejidad para el control. Tomando en cuenta estas limitaciones, se debe buscar un diseño estructural del robot lo más sencillo posible en cuanto a:

- a. *La geometría:* debe poseer un espacio de trabajo o de carga, donde estará alojado equipos e instrumentos, concernientes a la operación a desarrollar por el robot, esta área de trabajo es de 400 mm x 300 mm, y la altura máxima de carga, medida desde el cuerpo debe ser menor a 120 mm. Mayor altura de la carga produciría mayores momentos y por ende mecanismos de sujeción y geometrías más fuerte y robustos. También se debe buscar una geometría que facilite los procesos de fabricación que originará su construcción.
- b. *La cinemática:* para minimizar los números de grados de libertad que tendrá el robot, reduciendo así el número de actuadores (motores) que controlarán el movimiento de los eslabones que componen las patas, sin comprometer su funcionalidad, ni direcciones de movimiento (movilidad).
- c. *El peso:* debido a que el robot debe escalar por superficies verticales. Esta es la característica más importante a considerar en nuestro diseño; el máximo peso de la carga no debe exceder de 12 Kg. Un mayor peso implicaría la utilización de mecanismos de sujeción más fuertes, motores de mayor capacidad y estructura más robusta; elementos que son directamente proporcionales al peso. Si este fuera el caso donde el peso es

muy elevado se hace necesario el uso de otros mecanismos externos (grúas) para la colocación del robot en su superficie de escalado. Por ende a efecto de contribuir a minimizar el peso se debe colocar el menor número de dispositivos posibles.

3.1. Tipos de pata

La locomoción que poseen los diversos animales de nuestra fauna, ha sido a través de la historia una fuente de inspiración para los diseñadores de robots. Principalmente los insectos y los reptiles, debido a las múltiples ventajas y características que ellos poseen al caminar.

El diseño de la pata es un aspecto muy importante a considerar en la construcción de un robot caminante por su gran influencia que tiene sobre la movilidad total del robot y los mecanismos actuadores que le impriman movimiento en sus articulaciones.

La configuración geométrica de cada pata o el conjunto de patas del robot, depende de los diversos factores asociados con la aplicación que se pretenda abordar. Así, como los detalles del tipo de superficie, sus irregularidades, la inclinación a vencer durante el movimiento, la estabilidad y la altura del robot (donde se debe procurar mantener el centro de gravedad del escalador lo más próximo a la superficie de escalado), etc. Estas características, también reflejan su influencia en la disposición de los puntos de apoyo del robot y por ende en la forma de escalado más idónea.

Las consideraciones antes mencionadas hacen necesario que la configuración de una pata posea características particulares tales como:

- Un espacio de trabajo acorde con las especificaciones de la tarea a desarrollar.

- Altas fuerzas de tracción.
- Mínimo número de articulaciones.

Se define *espacio de trabajo*, al volumen o espacio tridimensional representado por todos los puntos alcanzables por el último eslabón o punto terminal de cada pata. Este volumen depende de los ángulos que forman, entre si, los eslabones y también de las longitudes de estos últimos.

Del mismo modo, todos los torques y fuerzas de tracción a que está sometido el robot dependen del peso, geometría, número de patas y valores angulares relativos de los eslabones que constituyen cada pata del robot escalador.

3.1.1. Configuración tipo Reptil.

Esta configuración, también llamada tipo SCARA (Figura 3.1), consta de tres eslabones con tres grados de libertad. Dos de sus eslabones (1 y 2 de la Figura 3.2), al girar, se mantienen siempre en planos paralelos a la superficie de apoyo del robot; mientras que el tercer eslabón (3 de la figura 3.2) se mueve perpendicular a dicho plano de apoyo dándole la altura al robot.

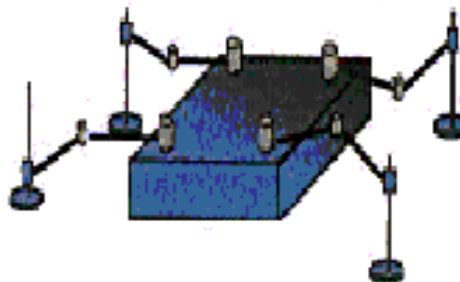


Figura 3.1 Configuración tipo REPTIL [3]

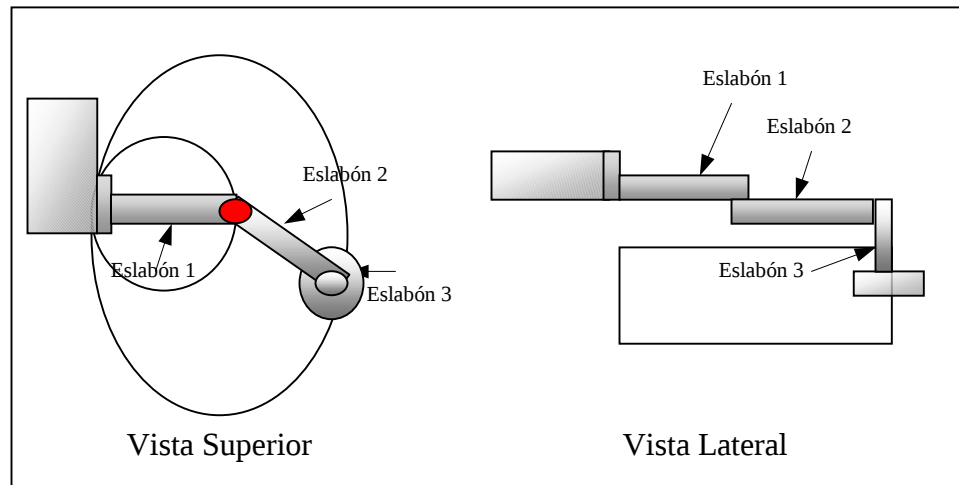


Figura 3.2 Configuración tipo REPTL.

3.1.2. Configuración tipo Insecto.

Esta configuración (Figura 3.3) consta de tres eslabones con tres grados de libertad. El eslabón 1 determina el plano en el cual se moverán los eslabones 2 y 3 (Figura 3.4). Este plano es siempre perpendicular al plano de apoyo del robot, y estos dos eslabones (2 y 3) son los que le proporcionan el movimiento de traslación al robot.

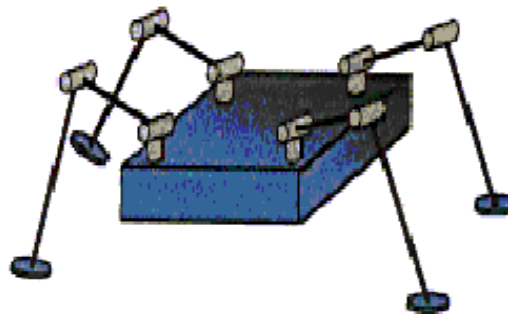


Figura 3.3 Configuración tipo INSECTO [3]

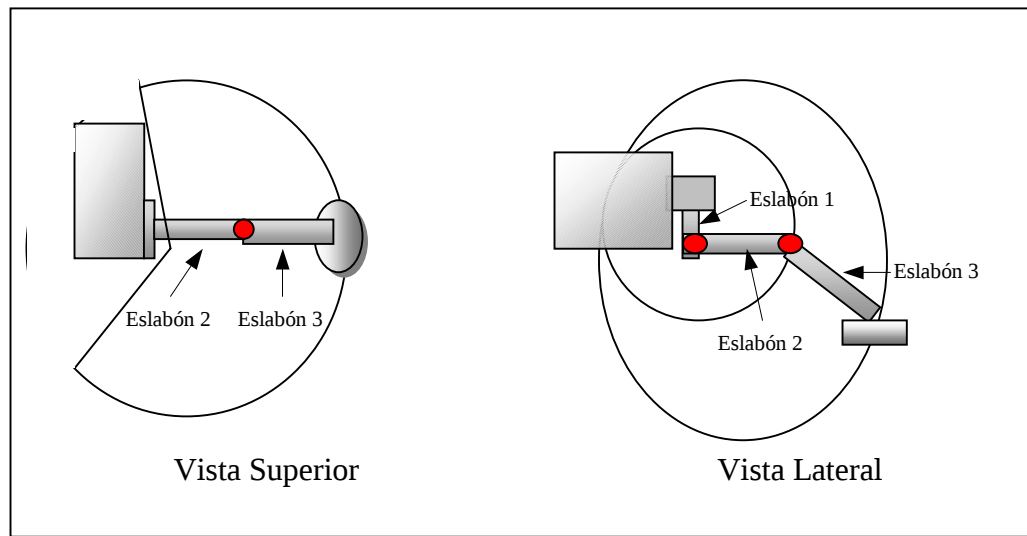


Figura 3.4 Configuración tipo INSECTO

3.2. Estudio comparativo de los tipos de patas

Como se observa, la configuración tipo *insecto* posee un mayor volumen de trabajo (vista lateral, Figura 3.4). Esto es producto de que los eslabones de mayor longitud rotan en un plano que está perpendicular a la pared de escalado; mientras que en la configuración tipo *reptil*, los eslabones de mayor longitud se mueven en un plano paralelo a la pared de escalado (vista lateral, Figura 3.2).

La configuración de tipo *insecto* proporciona una ventaja muy relevante, con respecto a la facilidad de vencer obstáculos y desniveles que se presenten durante el escalado, debido a como mencionamos su volumen de trabajo es mayor; característica en donde la configuración de tipo *reptil* está muy limitada ya que la longitud del último eslabón es el que proporciona la altura.

Con respecto a la movilidad del robot, se puede observar que la configuración de tipo *reptil* presenta el problema que al girar todo el cuerpo, cuando se desee realizar un movimiento diagonal o totalmente horizontal, lo hace mucho más lento que en

comparación con la configuración tipo *insecto* (Figura 3.5). Esto trae como consecuencia una mayor complejidad en el control de los actuadores para sincronizar los movimientos de las patas a fin de lograr el giro sin que se presenten riesgos de caída del robot.

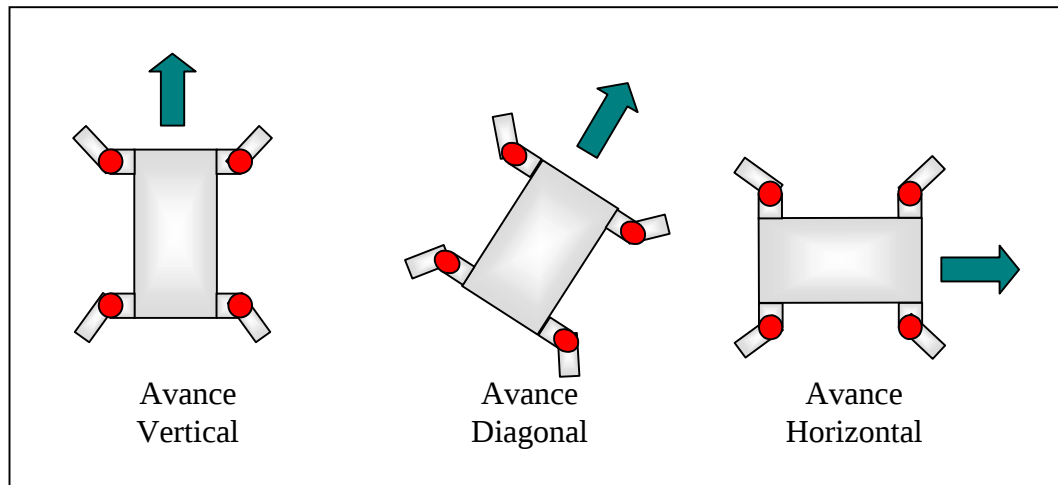


Figura 3.5 Avance horizontal con giro del cuerpo.

Mientras que en la configuración tipo insecto, esta movilidad la puede lograr o desarrollar simplemente con la rotación del plano de las patas, y ya no hace falta rotar el cuerpo (Figura 3.6).

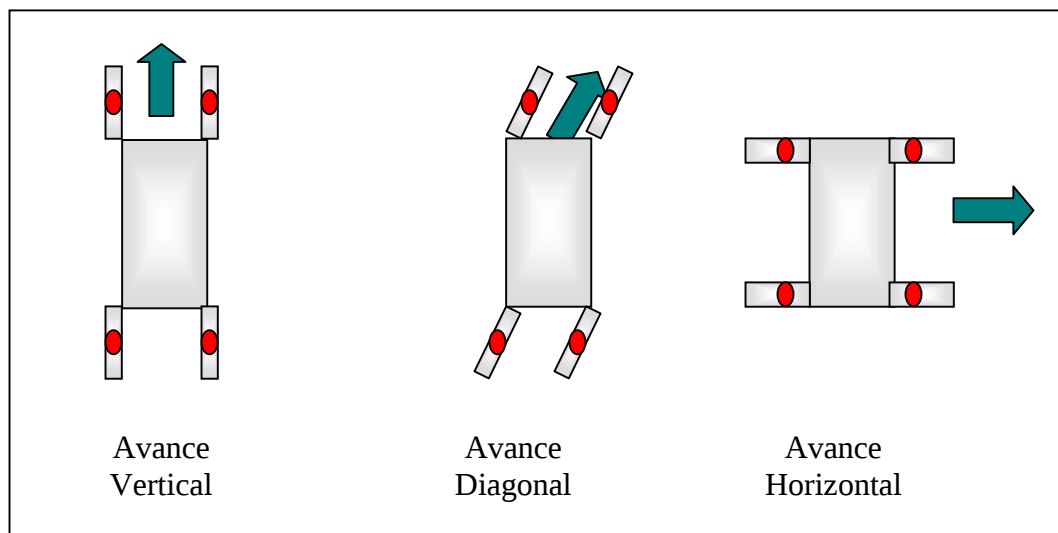


Figura 3.6 Avance horizontal con giro del cuerpo.

MATRIZ MORFOLOGICA

Para realizar la comparación entre los dos tipos de caminar antes descritos, nos apoyamos en una matriz morfológica, donde su escala de puntuación esta distribuida de la siguiente forma:

5 Puntos: Muy buena.

4 Puntos: Buena.

3 Puntos: Regular.

2 Puntos: Mala.

1 Punto: Muy mala.

FACTORES	PROMEDIO (%)	INSECTO	REPTIL	Sub. Total Insecto	Sub. Total Reptíl
Volumen de trabajo	20	4	3	0.8	0.6
Movilidad	30	5	3	1.5	0.9
Estabilidad al escalar	20	3	4	0.6	0.8
Precisión en la altura	10	4	5	0.4	0.5
Rapidez al rotar el cuerpo	20	5	3	1	0.6
TOTAL				4,3	3,4

El resultado arroja que es más conveniente en este caso, emplear la configuración tipo INSECTO.

3.3. Diseño estructural de los eslabones

3.3.1. Esquema del cuerpo.

El cuerpo del robot consiste en una placa rectangular con dos agujeros en cada esquina, para alojar el eslabón inicial (eslabón 1) de cada pata y su respectivo eje del motor (Motor 1) que le da el movimiento de rotación. Tal como se observa en la Figura 3.7, el robot tiene como objetivo llevar sobre su cuerpo una carga que se representa como peso con un volumen útil, descrito al comienzo de este capítulo. Esta carga no debe sobrepasar los 12 Kg. (condiciones de diseño) y puede ser: una tarjeta de control, un ligero equipo de ultrasonido, una cámara filmadora, un pequeño equipo de soldar, un durómetro portátil, entre otros.

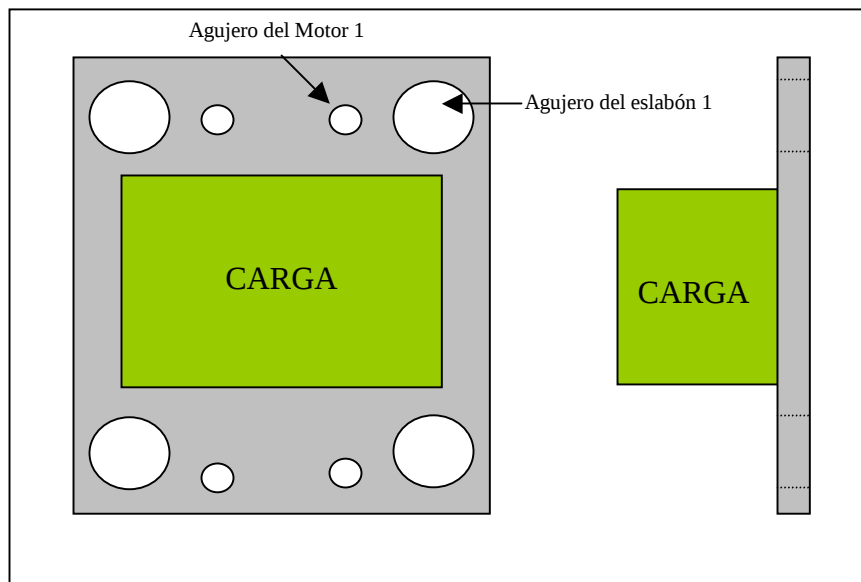


Figura 3.7 Esquema del cuerpo del robot.

3.3.2. Diseño de la pata.

Con la finalidad de hacer el diseño lo más sencillo posible, el robot posee sólo 4 patas (cuadrúpedo); todas iguales, donde cada pata está compuesta por 4 eslabones que articulados entre si forman la pata del robot.

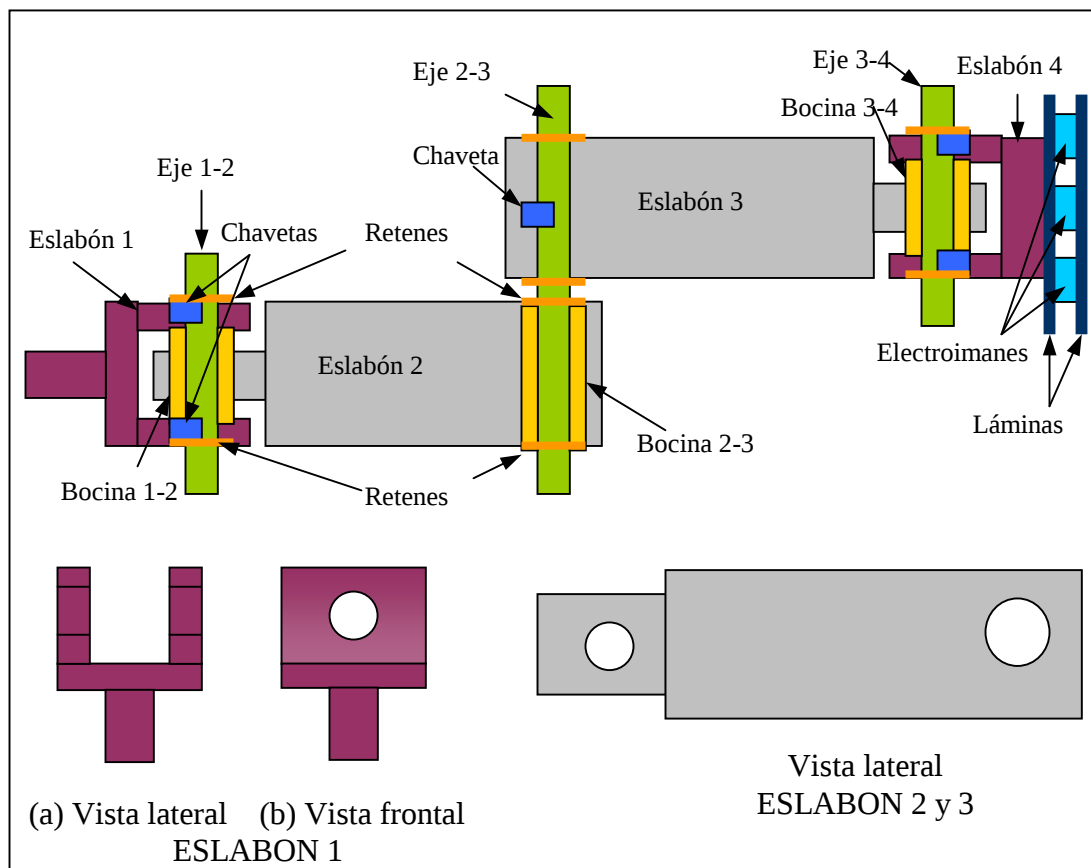


Figura 3.8 Esquema de las patas.

La Figura 3.8 ilustra una pata del robot con algunas vistas de los eslabones 1 y 2. Se observa que los eslabones 1 y 4 son algo parecidos, difieren en que el eslabón 4 lleva en su extremo dos láminas redondas, entre las cuales van los electroimanes que

generan la fuerza electromagnética necesaria para mantener el pie del robot adherido a la pared de escalado. El eslabón 2 es rectangular y lleva en uno de sus extremos una bocina (bocina 1-2) y un eje (eje 1-2) que le permite articular con el eslabón 1; mientras que en el otro extremo lleva otra bocina (bocina 2-3) y un eje o bulón (eje 2-3) que comparte con el eslabón 3. Este bulón va fijo al extremo de este eslabón 3 a través de una pequeña chaveta. En el otro extremo del eslabón 3 va una bocina (bocina 3-4) y un eje (eje 3-4) que le permite articular con el eslabón 4. Todas las chavetas tienen como función fijar los ejes, a fin de evitar la rotación relativa de éstos, respecto a eslabones correspondientes. En cada uno de los ejes, se observan unos anillos de retención (retenes) que evitan el deslizamiento coaxial de estos ejes respecto a sus bocinas. El eslabón 3 se encuentra al lado del 2 para evitar la interferencia que aparece si se colocan de la siguiente forma:

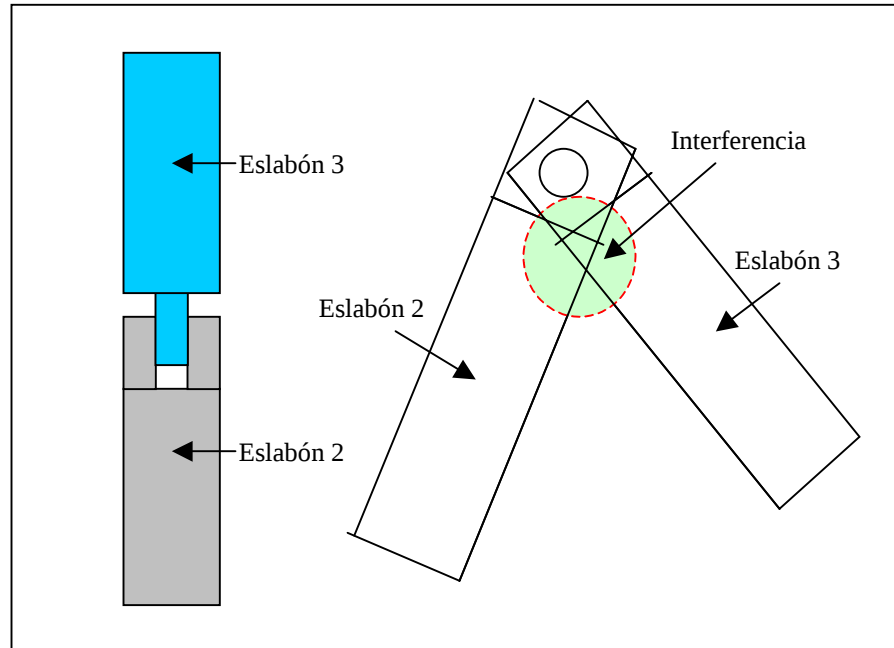


Figura 3.9 Interferencia entre los eslabones 2 y 3.

3.3.3. Diseño del pie (mecanismo de sujeción).

Dada las condiciones de operación de los robots escaladores, es necesario dotar a los mismos de dispositivos especiales de sujeción en las patas, que le permitan: mantenerse en contacto con la superficie a escalar; y moverse de manera confiable a lo largo de la misma. Entre los principales mecanismos de sujeción que existen, están:

- Las ventosas de vacío (chupones).
- Los pies magnéticos (electroimanes).

3.3.3.1. Ventosas de vacío.

Permiten fijar la pata a la superficie de escalado a través de succión o presión de vacío, creada por un transductor de venturi o una bomba de vacío, siendo esta última la que provee un mayor vacío. Generalmente están fabricadas con goma (sintética o natural) o de poliuretano. Su empleo en superficies rugosas está condicionado al uso de un sello complementario, tipo anillo de goma espuma, que reduzca el espacio libre y evite escapes de aire.

3.3.3.2. Pies magnéticos.

En caso de que la superficie de escalado sea ferromagnética se puede considerar el uso de pies magnéticos como mecanismos de sujeción. La adhesión de la pata a la superficie es realizada a través de fuerzas magnéticas provenientes de imanes permanentes o de electroimanes. Los electroimanes presentan mejores tiempos de agarre y separación que los obtenidos con imanes permanentes pero en caso de fallos en el sistema de alimentación el pie perdería contacto con la superficie. Los imanes

permanentes generalmente tienen fuerzas de agarre entre 0.5 y 1 Newton (N) por cada mm^2 de área, pero requieren de un dispositivo que facilite la separación del pie.

El uso combinado de imanes permanentes y electroimanes permite obtener lo mejor de ambos sistemas: un aumento de la fuerza de sujeción y facilidad de adherencia del pie. Estos híbridos operan como imanes permanentes durante la fase de agarre y al aplicarles corriente se anula el campo magnético permitiendo la separación del pie en la fase de transferencia. De igual forma pueden ser excitadas en sentido inverso y así reforzar el campo magnético permitiendo una mayor fuerza de sustentación, en caso de fallo de alguna de las patas en sujeción.

3.3.3.3. Comparación entre las ventosas de vacío y los electroimanes

Se seleccionó los pies magnéticos híbridos, como mecanismo de sujeción ya que en caso de un fallo en la alimentación eléctrica, el pie actuaría como imán permanente impidiendo la caída del robot, no sucede así con las ventosas de vacío que en caso de alguna fuga en la alimentación o falla en la bomba de succión, perdería el vacío haciendo caer al robot. Además, la superficie por la que escalará el robot no es totalmente lisa, incluso puede estar sucia; por lo tanto, el uso de las ventosas de vacío estaría limitado por la porosidad o suciedad de la pared, que obligaría a usar goma que haga contacto con la superficie de escalado y por el hecho de ser tanque metálico que está expuesto al sol, tiene una alta temperatura que deforma y daña la goma lo que ocasionaría la caída del robot. Además, como se dijo antes, este tipo de mecanismo de sujeción necesita de bombas de vacío que incrementan el número de dispositivos y por ende el peso del robot. Los pies magnéticos seleccionados presentan poco peso (los electroimanes usados en este proyecto pesan tan solo 500 gramos cada uno y soportan una fuerza de sujeción de hasta 42 Kg.) y no presenta problemas si la superficie del tanque está caliente.

El pie del robot tendrá la forma:

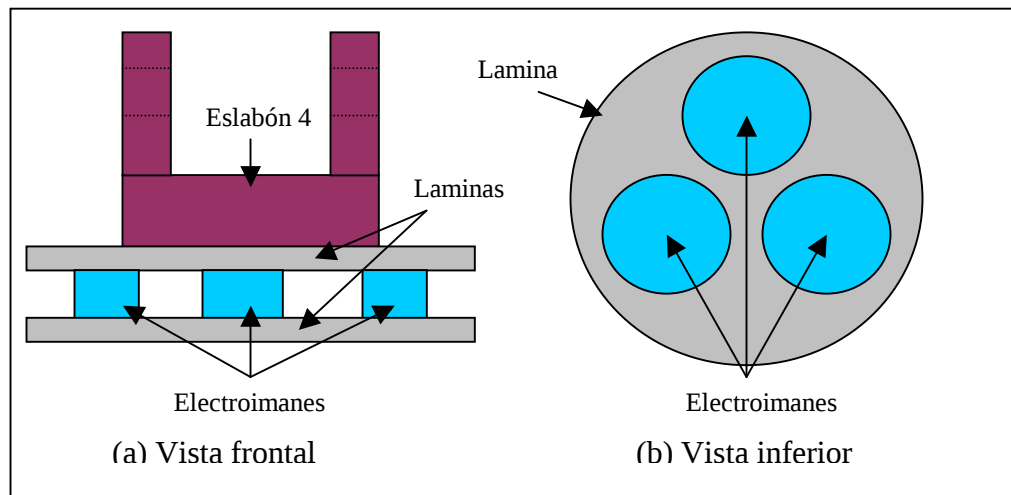


Figura 3.10 Esquema del pie magnético.

3.4. Dispositivos complementarios.

Además de la estructura mecánica de las patas, se hace necesario otros mecanismos que realicen acciones como son: proporcionar torques o momentos a los eslabones (a través de actuadores), transferir movimiento (engranes y poleas) y retener, aguantar o sostener los elementos estructurales en una posición dada (retenes y chavetas).

3.4.1. Selección de los actuadores.

Las características de control, sencillez y precisión de los accionamientos eléctricos ha hecho que sean los más usados en los robots industriales actuales.

Dentro de los actuadores eléctricos pueden distinguirse tres tipos diferentes [Cortés, 1989]:

- Motores de corriente continua (DC):
 - Controlados por inducido.
 - Controlados por excitación.

- Motores de corriente alterna (AC):
 - Síncronos.
 - Asíncronos.
- Motores paso a paso.

Motores de corriente continua (DC)

Son los más usados en la actualidad debido a su facilidad de control. En la Figura 3.11 se muestra un esquema de un motor DC seccionado, en el que se pueden apreciar sus distintos elementos. En este caso, el propio motor incluye un sensor de posición (encoder) para poder realizar su control.



Figura 3.11. Esquema de motor DC seccionado con indicación de sus distintos componentes.[4]

Los motores DC están constituidos por dos devanados internos, inductor e inducido, que se alimentan con corriente continua:

- El inductor, también denominado devanado de excitación, está situado en el estator y crea un campo magnético de dirección fija, denominado de excitación.
- El inducido, situado en el rotor, hace girar al mismo debido a la fuerza que aparece como combinación de la corriente circulante por él y del campo magnético de excitación.

Al aumentar la tensión del inducido aumenta la velocidad de la máquina. Si el motor está alimentado a tensión constante, se puede aumentar la velocidad disminuyendo el flujo de excitación. Pero cuanto más débil sea el flujo, menor será el par motor que se puede desarrollar para una intensidad de inducido constante. En el caso de control por inducido, la intensidad del inductor se mantiene constante, mientras que la tensión del inducido se utiliza para controlar la velocidad de giro. En los controlados por excitación se actúa al contrario.

Además, en los motores controlados por inducido se produce un efecto estabilizador de la velocidad de giro originado por la realimentación intrínseca que posee a través de la fuerza contraelectromotriz. Por estos motivos, de los dos tipos de motores DC es el controlador por inducido el que se usa en el accionamiento de robots.

Pero, además de actuadores eléctricos; los robots suelen usar también actuadores hidráulicos o neumáticos.

	Neumático	Hidráulico	Eléctrico
Energía	-Aire a presión (5-10 bar)	-Aceite mineral (50-100 bar)	-Corriente eléctrica
Dispositivos	-Cilindros -Válvulas direccionales -Motor de paletas -Motor de pistón -Compresor -Filtros	-Cilindros -Válvulas -Motor de paletas -Motor de pistones axiales -Bombas -Filtros	-Corriente continua -Corriente alterna -Motor paso a paso
Ventajas	-Rápidos -Sencillos -Robustos	-Rápidos -Alta relación potencia- peso -Autolubricantes -Alta capacidad de carga	-Precisos -Fiables -Fácil control -Sencilla instalación -Silenciosos
Desventajas	-Dificultad de control continuo -Instalación especial (compresor, filtros) -Ruidoso	-Difícil mantenimiento -Instalación especial (filtros, eliminación aire) -Frecuentes fugas -Pesados	-Potencia limitada

Tabla 3.1 Características de distintos tipos de actuadores para robots [4]

Como se observa en la Tabla 3.1 los actuadores neumáticos e hidráulicos requieren de numerosos dispositivos como bombas, compresores y/o bombas de vacío, válvulas, cilindros, filtros, etc. que hacen más pesado el robot, además de necesitar un mantenimiento muy riguroso e instalación especial.

Considerando que en el mercado existen motores eléctricos pequeños y muy ligeros que sirven para nuestros propósitos; se optó por estos últimos.

Observando la Figura 3.12, se puede apreciar tres placas en L apernadas a los eslabones 2 y 3. Allí van atornillados los motores que generan el movimiento relativo entre los eslabones 1 y 2, 2 con 3 y 3 con 4. Los motores se colocan paralelos a los eslabones 2 y 3 para optimizar el espacio de trabajo del robot y evitar inconvenientes de interferencia durante su desplazamiento.

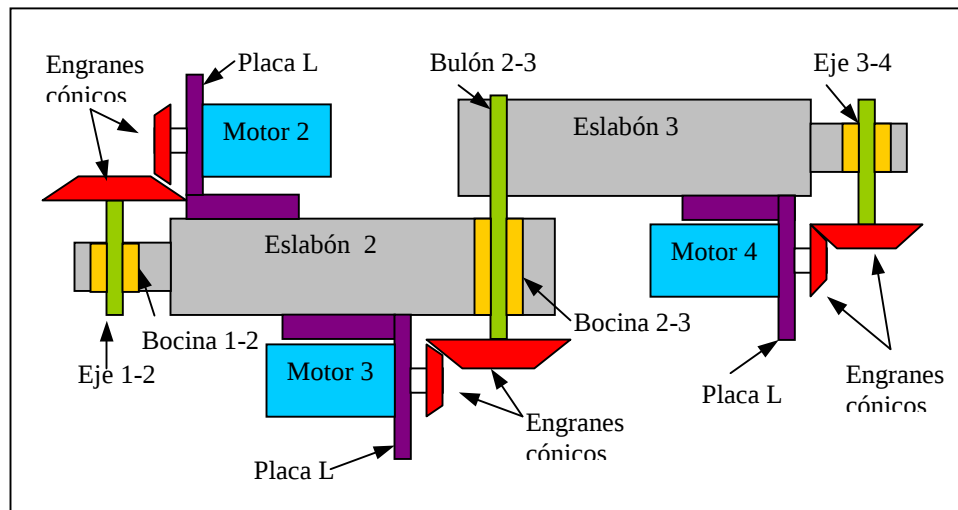


Figura 3.12 Dispositivos en L de sujeción de los motores.

3.4.2. Engranes cónicos

Se utiliza engranes cónicos (Figura 3.13) con distintas relaciones de reducción, según sea el caso, para aprovechar la propiedad de cambiar de dirección de movimiento (90°), desde la salida del motor al bulón; como se indica en la Figura 3.12.

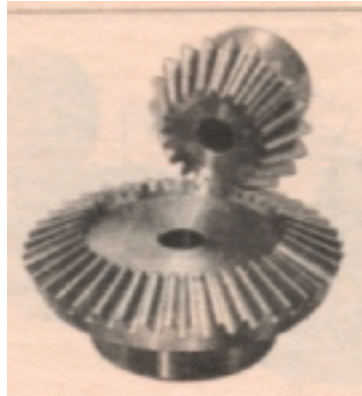


Figura 3.13 Engranés cónicos. [7]

3.4.3. Poleas y correas de sincronización (timing)

Se seleccionó las correas de sincronización (figura 3.14) sobre las correas planas, redondas o en V, porque permiten mantener una relación de posición con exactitud, que es una característica primordial durante el movimiento del robot. Las correas planas, redondas o en V, generalmente tienen un ligero deslizamiento de la correa respecto a su polea, sobre todo al momento del arranque. Los movimientos del robot son controlados con servomotores, para ello se necesita una relación exacta de posición en los eslabones que, como se dijo, lo garantiza la correa Timing. Además que el montaje de esta correa necesita una tensión previa casi despreciable que incide directamente en una menor carga radial que deberán llevar los cojinetes que soportan los ejes de las poleas; no así los otros tipos de correa, en los que es necesario una tensión previa considerable que la ajuste.

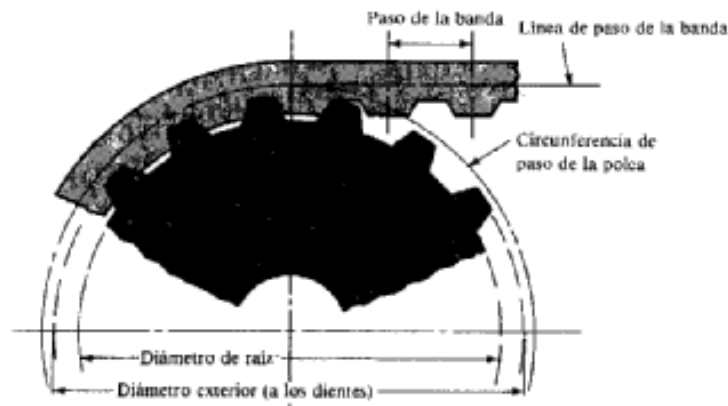


Figura 3.14 Polea Timming. [6]

3.4.4. Retenes

Con frecuencia se usa un anillo de retención en vez de un hombro de eje o un manguito para fijar axialmente en un eje o en un agujero de alojamiento. Se corta una ranura o muesca circular en el eje o hueco para recibir el retenedor elástico. El diseño ahusado de los anillos externos e internos asegura una presión uniforme contra el fondo de la ranura.[6]

Los retenes están dispuestos tal como indica la figura 3.15.

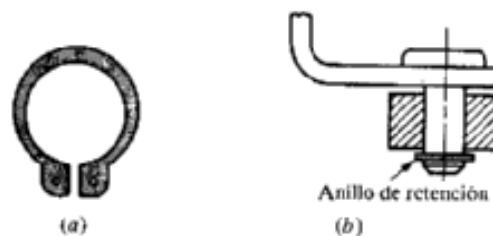


Figura 3.15 Retenes o anillos de seguridad para ejes DIN 471.[6]

Es importante destacar que los anillos de retención que se usan son del tipo DIN 471 (como lo indica la figura 3.15). Estos anillos, también llamados anillos Seeger, absorben grandes esfuerzos axiales.

3.5. Modo de escalado.

El robot se moverá de forma **discontinua**. Partiendo del hecho que se encuentra inmóvil, apoyado en sus cuatro patas, realizará la siguiente secuencia de movimientos:

1. Se energizarán los electroimanes de una de las patas delanteras a fin de crear alrededor de los imanes permanentes del pie, campos magnéticos en sentido contrario que permitan “despegar” esa pata del robot.
2. Mover ésta pata hasta su nuevo punto de apoyo en la pared. Este movimiento lo denominaremos **PATA EN TRANSFERENCIA**.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para la pata trasera diagonal a la anterior.
4. Repetir los pasos 1 y 2 , pero ahora para la otra pata trasera.
5. Repetir los pasos 1 y 2 para la pata delantera restante.
6. Activar los motores 3 y 4 de cada pata, a fin de darle movimiento al cuerpo del robot. Este movimiento lo denominaremos **CUERPO EN MOVIMIENTO**.
7. Repetir los pasos anteriores.

Durante el movimiento de la pata en transferencia, el motor 1 proporciona la dirección en que se moverá la pata. Luego de darle la dirección, se activan los motores 2 y 3, para que el pie encuentre su nuevo punto de apoyo, mientras que el motor 4 también se activa pero sólo para mantener el pie paralelo a la pared de escalado durante la transferencia. Una vez que la pata encuentre su nuevo punto de apoyo, se desactiva el motor 2 y se mantienen activados los motores 3 y 4, pero sólo para conservar los ángulos relativos que hay entre los eslabones que componen la pata.

Es de hacer notar también que antes de ejecutar el punto 6 del algoritmo, es necesario que se cumplan las siguientes restricciones:

A.- Si el movimiento es inclinado, la dirección de todas las patas debe ser la misma, es decir que los eslabones 2 y 3 que componen una pata del robot deben moverse en un plano tal que sea paralelo al los planos en que se mueven los eslabones 2 y 3 de las demás patas.

B.- Si el movimiento es horizontal, el pie de una de las patas delanteras debe moverse hasta un punto diametralmente opuesto a su colateral delantera. Del mismo modo para las patas traseras.

CAPÍTULO IV: CINEMÁTICA DEL ROBOT

Como se mencionó en el Capítulo II (Marco teórico), la cinemática se ocupa de la descripción del movimiento sin importar sus causas. Este estudio abarca la cinemática directa e inversa.

4.1 Cinemática directa del robot.

La cinemática directa, consta de conocer todos los posibles puntos de trayectoria que puede abarcar el eslabón terminal, esto es producto de la variación en las magnitudes angulares de los eslabones, es decir, debido a unas magnitudes angulares cualquiera, se calcula la posición del eslabón terminal. Es de hacer notar que la cinemática directa es muy importante cuando se habla del movimiento de la pata respecto al cuerpo, dándonos así el volumen de trabajo que posee cada pata.

Se utiliza la matriz de transformación, para describir las operaciones rotacionales del sistema ligado al cuerpo con respecto al sistema final o de referencia que deseamos. Esta matriz de transformación es simplemente la relación que existe entre las rotaciones de los distintos eslabones.

En la Figura 4.1, se observa la distribución de los diferentes sistemas de coordenadas de referencia que dan origen a las matrices de transformación:

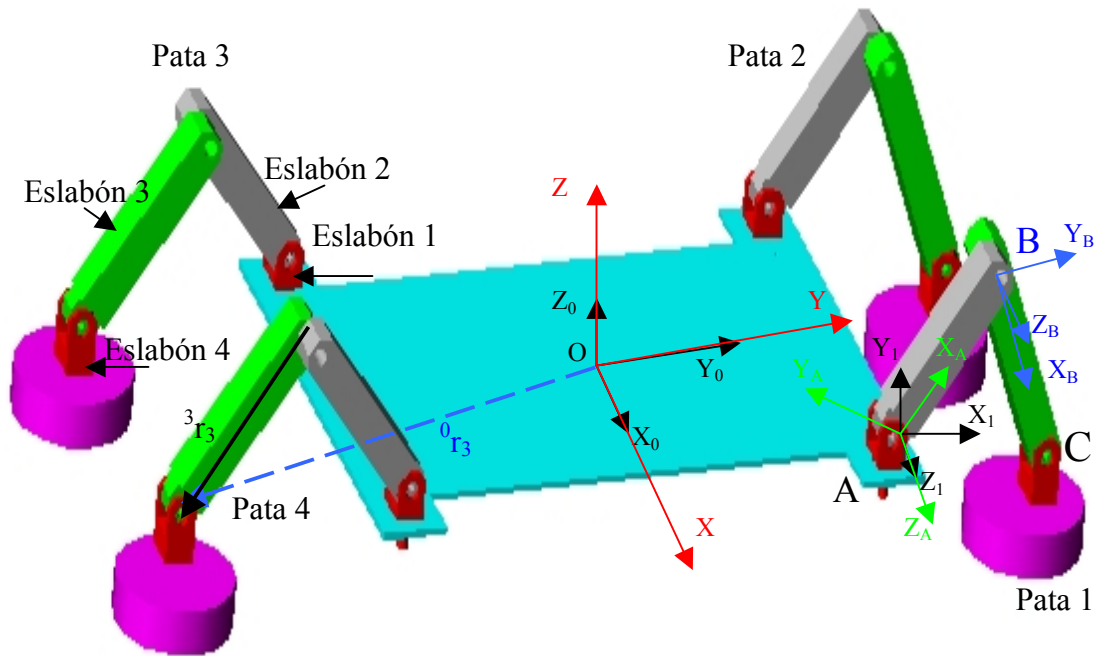


Figura 4.1. Sistemas de referencia del robot.

El análisis que sigue es válido para cualquiera de las 4 patas:

El sistema de referencia $X_0Y_0Z_0$ es solidario al cuerpo (eslabón 0) y está ubicado al centro del mismo. El sistema $X_1Y_1Z_1$ es solidario al eslabón 1 que rota (θ_1) respecto al eslabón 0 (cuerpo del robot), su origen está ubicado sobre la línea de eje del bulón que articula el eslabón 1 con el eslabón 2. El sistema de referencia $X_AY_AZ_A$ es solidario al eslabón 2 que rota θ_2 respecto al eslabón 1. El sistema $X_BY_BZ_B$ es solidario al eslabón 3 que rota θ_3 respecto a 2 (aunque el que realmente nos va a interesar para el diseño es γ). Finalmente el vector 3r_3 que va desde el origen del sistema $X_BY_BZ_B$ hasta la línea de eje del bulón que une al eslabón 4 con el 3 (punto C), medido a largo del eje BX_B .

Ahora, sobrepongamos el sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ al sistema de referencia $X_0Y_0Z_0$, haciendo coincidir sus respectivos ejes:

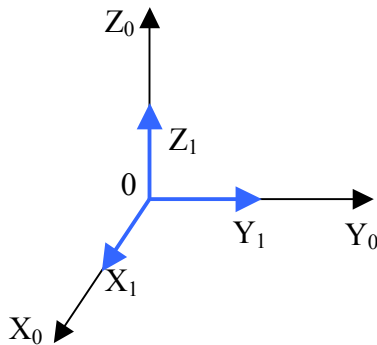


Figura 4.2 Superposición del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ al sistema de referencia $X_0Y_0Z_0$.

Y a partir de aquí se hacen, en orden estricto, los siguientes movimientos al sistema $X_1Y_1Z_1$:

1. Rotar 90° ($\alpha = 90^\circ$) respecto al eje $0X_0$

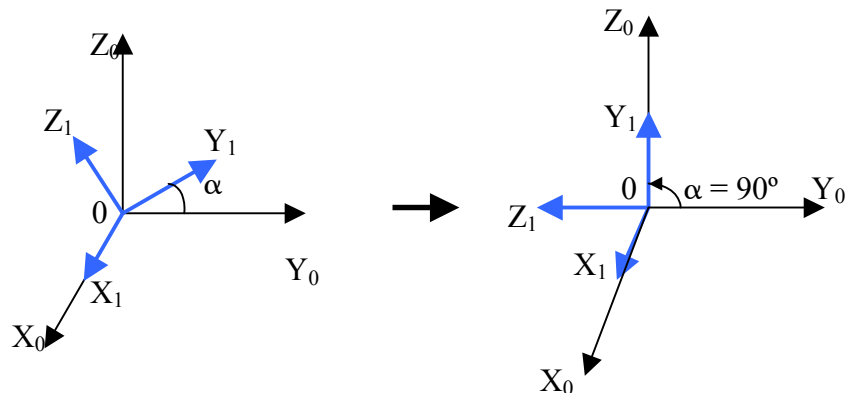


Figura 4.3 Rotación de ($\alpha = 90^\circ$).

2. Rotar un ángulo θ_1 respecto al eje $0Z_0$

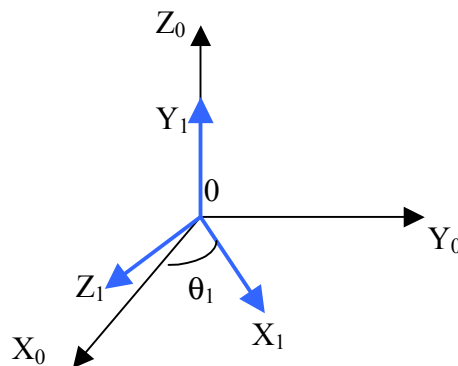


Figura 4.4. Rotación de θ_1 .

3. Finalmente una traslación hasta el punto A de coordenadas (X_A , Y_A , Z_A) igual a 160 mm, 230 mm y 21 mm, respectivamente (en el caso que se trate de la pata 1) medidos sobre los ejes $0X_0$, $0Y_0$ y $0Z_0$ (sistema de referencia del cuerpo). En el caso de las patas restantes, las coordenadas del punto A son:

PATA 2 : -160, 230, 28 mm.

PATA 3 : -160, -230, 28 mm.

PATA 4 : 160, -230, 28 mm.

Medidos en concordancia con los sentidos positivos y negativos de los ejes $0X_0$ y $0Y_0$.

Dando como resultado que la matriz de transformación homogénea que representa estos movimientos, esté compuesta por el producto de una matriz de traslación y dos de rotación.

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_A \\ 0 & 1 & 0 & Y_A \\ 0 & 0 & 1 & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha = 90^\circ$ para todas las patas. Entonces:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_A \\ 0 & 1 & 0 & Y_A \\ 0 & 0 & 1 & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & X_A \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & Y_A \\ 0 & 0 & 1 & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & X_A \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & Y_A \\ 0 & 1 & 0 & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, como el origen del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ coincide con el origen (A) del sistema de referencia $X_AY_AZ_A$ (Figura 4.1), cualquier rotación (θ_2) de este último sistema de referencia respecto al primero, que se considerará fijo (solidario al eslabón 1), será representado por la matriz de transformación homogénea:

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El movimiento del sistema de referencia $X_BY_BZ_B$ respecto al sistema $X_AY_AZ_A$ está representado por el producto de la rotación (θ_3), del eslabón 3 respecto al eslabón 2, y por la traslación del sistema $X_BY_BZ_B$, cuyo origen tendrá ahora coordenadas (170 mm, 0, -32 mm) en el caso de la pata 1 respecto al sistema $X_AY_AZ_A$. Para las patas restantes se tendrán las siguientes coordenadas:

PATA 2 : 170, 0, 32 mm.

PATA 3 : 170, 0, -32 mm.

PATA 4 : 170, 0, 32 mm.

Dando como resultado la siguiente matriz de transformación compuesta:

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & X_B \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, el vector ${}^3\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ medido a lo largo del eje BX_B , donde la

magnitud de X_C es de 170 mm para todas las patas.

Multiplicando estas matrices de transformación y el vector, obtenemos:

${}^0\mathbf{r}_3 = {}^0\mathbf{A}_3 * {}^3\mathbf{r}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 * {}^1\mathbf{A}_2 * {}^2\mathbf{A}_3 * {}^3\mathbf{r}_3$ que representa el vector que va desde el origen 0 del sistema de referencia $X_0Y_0Z_0$ hasta el extremo final del eslabón 3 (Figura 4.1).

$${}^0\mathbf{A}_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & X_A \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & Y_A \\ 0 & 1 & 0 & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & X_B \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^3\mathbf{r}_3$$

$${}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_3 & \sin \theta_1 & X_B \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + Z_B \cdot \sin \theta_1 + X_A \\ \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 & -\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_3 & -\cos \theta_1 & X_B \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - Z_B \cdot \cos \theta_1 + Y_A \\ \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_3 & -\sin \theta_2 \cdot \sin \theta_3 & 0 & X_B \cdot \sin \theta_2 + Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } {}^0\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} X_C \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_3) + X_B \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + Z_B \cdot \sin \theta_1 + X_A \\ X_C \cdot (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_3) + X_B \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - Z_B \cdot \cos \theta_1 + Y_A \\ X_C \cdot (\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_3) + X_B \cdot \sin \theta_2 + Z_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, las coordenadas del pie (eslabón 4) de la pata 1 medidas a partir del sistema de referencia solidario al cuerpo $X_0Y_0Z_0$ en dirección de sus ejes $0X_0$, $0Y_0$ y $0Z_0$ son respectivamente:

$$x = 170 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_3) + 170 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - 32 \cdot \sin \theta_1 + 160$$

Ec. 4.1

$$y = 170 \cdot (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_3) + 170 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + 32 \cdot \cos \theta_1 + 230$$

Ec. 4.2

$$z = 170.(\text{sen}\theta_2.\cos\theta_3 - \cos\theta_2.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_2 + 28 - 73$$

Ec. 4.3

A la coordenada z se le suma el término -73 , esto es producto de la altura del pie en la zonas de los electroimanes. Esto permite conocer la posición exacta del pie del robot cuando la pata esté en transferencia, en función de los ángulos de rotación θ_1 , θ_2 y θ_3 y como se dijo anteriormente permite verificar la cinemática inversa que es la que se usa para efectos de control de movimiento.

En el caso de la pata 2, las coordenadas del pie son:

$$x = 170.(\cos\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\cos\theta_1.\cos\theta_2 + 32.\text{sen}\theta_1 - 160$$

Ec. 4.4

$$y = 170.(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - 32.\cos\theta_1 + 230$$

Ec. 4.5

$$z = 170.(\text{sen}\theta_2.\cos\theta_3 - \cos\theta_2.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_2 + 28 - 73$$

Ec. 4.6

Para la pata 3, las coordenadas del pie son:

$$x = 170.(\cos\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\cos\theta_1.\cos\theta_2 - 32.\text{sen}\theta_1 - 160$$

Ec. 4.7

$$y = 170.(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 + 32.\cos\theta_1 - 230$$

Ec. 4.8

$$z = 170.(\text{sen}\theta_2.\cos\theta_3 - \cos\theta_2.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_2 + 28 - 73$$

Ec. 4.9

Y finalmente para las coordenadas del pie para la pata 4, son:

$$x = 170.(\cos\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\cos\theta_1.\cos\theta_2 + 32.\text{sen}\theta_1 + 160$$

Ec. 4.10

$$y = 170.(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2.\cos\theta_3 - \text{sen}\theta_2.\text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - 32.\cos\theta_1 - 230$$

Ec. 4.11

$$z = 170.(\text{sen}\theta_2.\cos\theta_3 - \cos\theta_2.\text{sen}\theta_3) + 170.\text{sen}\theta_2 + 28 - 73$$

Ec. 4.12

Los rangos de valores que ocupan los ángulos a lo largo del movimiento son:

$$\text{Pata 1: } -45^\circ \leq \theta_1 \leq 135^\circ$$

$$\text{Pata 2: } 45^\circ \leq \theta_1 \leq 225^\circ$$

$$\text{Pata 3: } 135^\circ \leq \theta_1 \leq 315^\circ$$

$$\text{Pata 4: } 225^\circ \leq \theta_1 \leq 45^\circ$$

Los ángulos θ_2 y θ_3 varían:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta_2 \leq 90^\circ \\ 0 \leq \theta_3 \leq -180^\circ \end{array} \right\} \text{ igual para todas las patas.}$$

4.2 Cinemática inversa del robot.

La cinemática inversa, busca la relación que debe existir entre los distintos ángulos que conforman la estructura de la pata, para un punto final determinado.

Dependiendo de la aplicación que desarrollará el robot, el mismo se moverá a lo largo de cualquiera de las tres direcciones como son (Vertical, Horizontal o inclinado), abarcando así los 360° de movimiento y así poder cumplir con esta aplicación o función.

Como se mencionó en el Capítulo 3 (Diseño Conceptual), las 4 patas que conforman el robot formarán planos paralelos de movimiento. Para el estudio de la cinemática inversa el ángulo que forma cada pata del robot con el sistema de referencia en el cuerpo del mismo es (θ_1), que proporciona la dirección del movimiento, para que luego se realice el desplazamiento (S) en esa dirección. Como se ve en las Figuras 4.5 para los movimientos vertical, horizontal e inclinado.

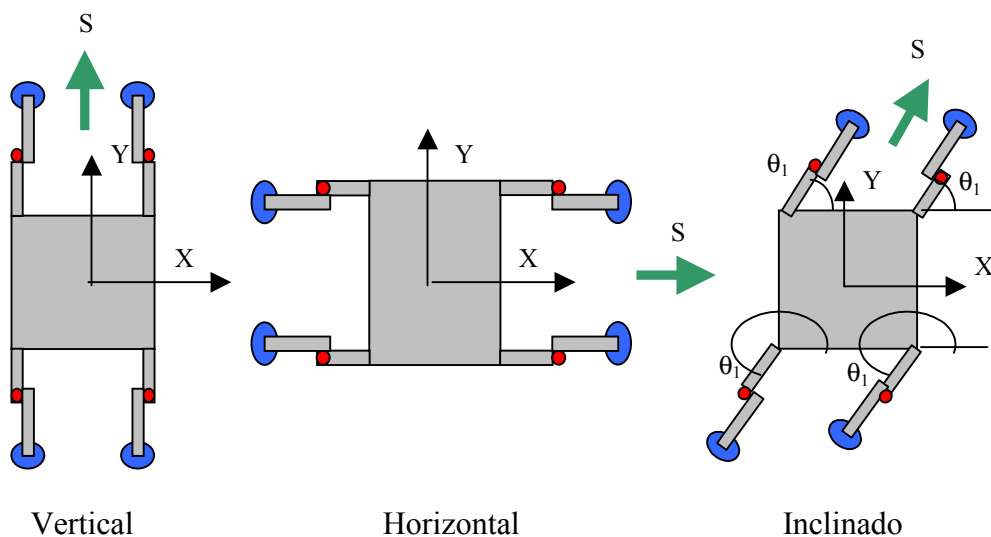


Figura 4.5 Posición de las patas para los distintos movimiento.

La magnitud de desplazamiento (S), partirá de 10 cm (100 mm) hasta una máxima de 20 cm (200 mm). Esto es producto que para magnitudes menores a 10 cm el electroimán chocaría con el cuerpo del robot y por ello se tomará como punto de partida una magnitud de S mayores de 10 cm (100 mm). De igual forma como se verá más adelante el máximo valor de S va a influir en la magnitud o valores que posea θ_2 y γ , que son los ángulos que gobiernan el desplazamiento S y altura del robot. Como se observa en la Figura 4.6.

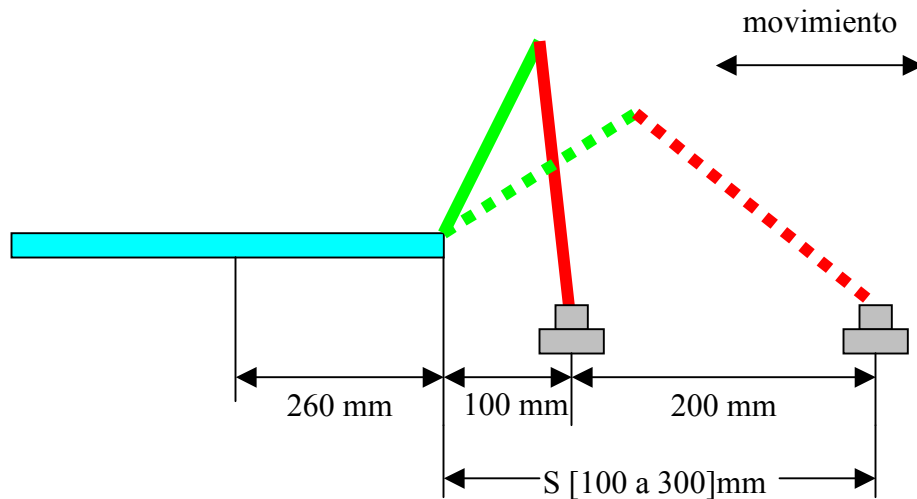


Figura 4.6. Vista lateral del desplazamiento (S) de la pata del robot desde su posición inicial hasta su posición final (posiciones extremas).

Para hacer más fácil el estudio de la cinemática inversa y de las velocidades, se puede observar que durante el movimiento del robot en cualquier dirección, éste está orientado en forma de coordenadas polares, es decir, tiene un ángulo que proporciona la dirección y luego posee la magnitud de desplazamiento (Figura 4.7).

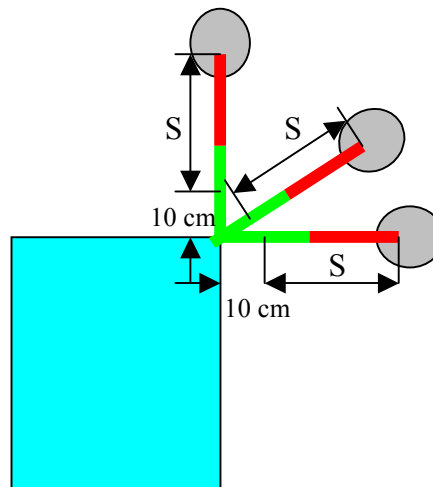


Figura 4.7. Vista superior del desplazamiento (S) de la pata del robot para los distintos valores de θ_1 .

Aparte de la dirección (vertical, horizontal e inclinado) que pueda tener el robot, el movimiento del mismo se puede dividir en dos etapas que son:

- **Movimiento de la pata:** Aquí, el robot realiza la transferencia de una de sus patas desde un punto de apoyo hasta el próximo punto de apoyo. Durante esta fase hay movimiento relativo entre los eslabones que componen la pata.
- **Movimiento del cuerpo:** después que cada una de las patas están colocadas en su posición final, se procede a realizar el movimiento del cuerpo del robot. Hay que notar que durante este movimiento todas las patas están completamente apoyadas a la pared de escalado y por esa razón su cinemática es diferente e individual a la de la pata en transferencia, donde la pata no está apoyada a la pared de escalado.

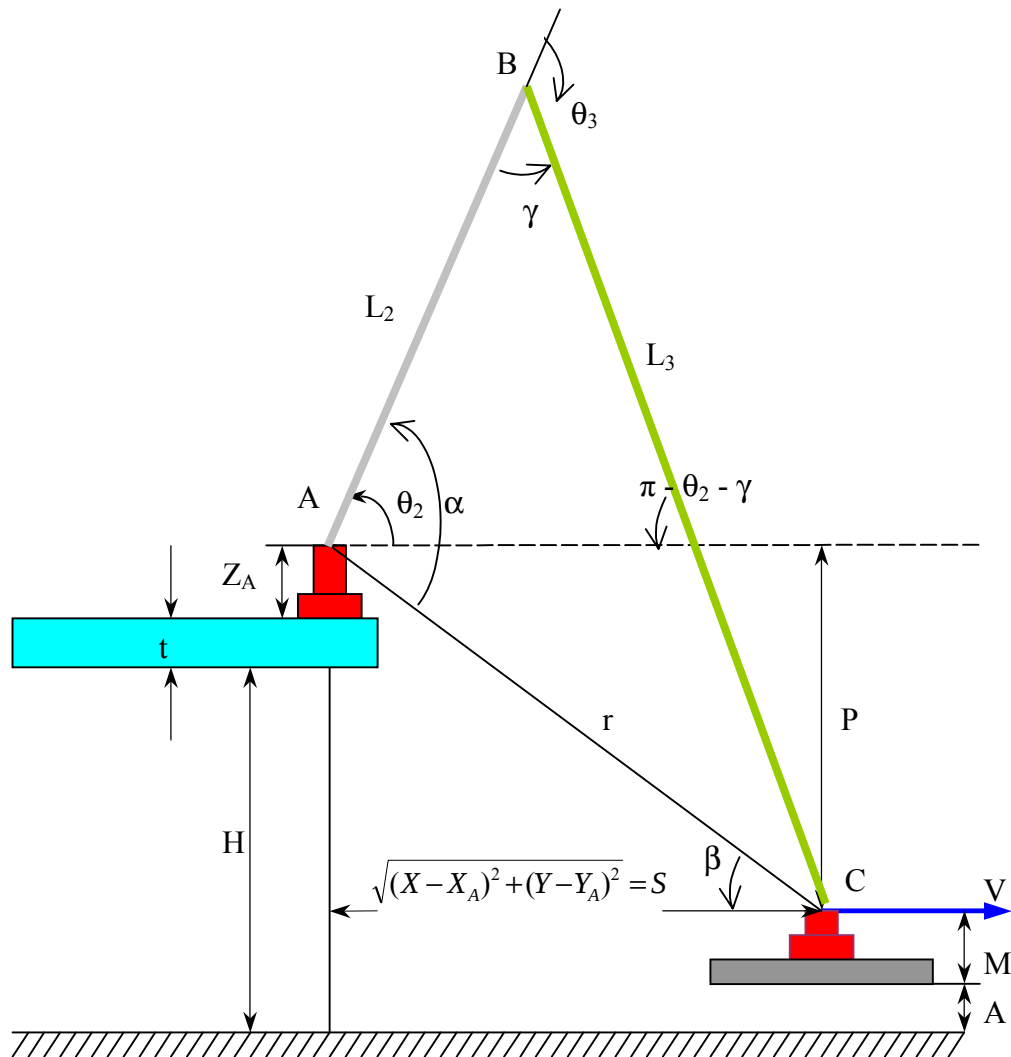


Figura 4.9. Vista lateral del movimiento del una pata.

Donde:

X : componente horizontal del vector que va desde el origen del sistema de referencia $0X_0Y_0Z_0$ hasta el extremo final del eslabón 3 (punto C), medida a lo largo del eje $0X_0$

Y : componente vertical del vector que va desde el origen del sistema de referencia $0X_0Y_0Z_0$ hasta el extremo final del eslabón 3 (punto C), medida a lo largo del eje $0Y_0$

P : Profundidad del extremo final del eslabón 3 (punto C), desde el punto O (origen del sistema de referencia $0X_0Y_0Z_0$) medida a lo largo del eje $0Z_0$

X_A : componente horizontal del vector que va desde el origen del sistema de referencia $0X_0Y_0Z_0$ hasta el origen del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ (punto A), medida a lo largo del eje $0X_0$

Y_A : componente vertical del vector que va desde el origen del sistema de referencia $0X_0Y_0Z_0$ hasta el origen del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ (punto A), medido a lo largo del eje $0Y_0$

S : Es el desplazamiento que realiza la pata del robot o el cuerpo del mismo, esta magnitud es obtenida por la proyección en la pared de escalado de las coordenadas finales de la pata menos las coordenadas iniciales del eslabón 2.

r : Menor distancia desde el extremo final del eslabón 3 (punto C) hasta el origen del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$ (punto A).

H : Altura, medida perpendicularmente, entre los planos paralelos: el que contiene los ejes $0X_0$ y $0Y_0$ del cuerpo del robot y el plano de apoyo (pared).

t : Espesor del cuerpo o plancha del robot.

Z_A: altura del eslabón 1, o sea distancia medida perpendicularmente al plano que contiene a los ejes $0X_0$ y $0Y_0$ del cuerpo del robot hasta el punto A (origen del sistema de referencia $X_1Y_1Z_1$).

M: altura del pie, es decir, altura del eslabón 4; que contiene el electroimán.

A : distancia desde la parte terminal del pie hasta la pared (plano de apoyo).

L₂ y **L₃**: longitudes de los eslabones 2 y 3 respectivamente.

θ₁, θ₂, θ₃ : son los ángulos de rotación de los primeros 3 eslabones de la pata, o sea indican los grados de libertad que tiene la pata del robot. θ_1 es el ángulo de rotación del eslabón 1 respecto al cuerpo (eslabón 0). θ_2 es el ángulo de rotación del eslabón 2 respecto al 1. θ_3 es el ángulo de rotación del eslabón 3 respecto al 2.

α, β y γ: son ángulos que se forman instantáneamente al desplazarse la pata.

De la Figura 4.8 se observa que el valor de S viene dado por:

$$S = \sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras en la Figura 4.9:

$$r = \sqrt{P^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2} \quad \text{Ec. 4.13}$$

donde:

$$P = Z_A + t + H - (M + A) \quad \text{Ec. 4.14}$$

4.2.1.1. Estudio cinemático del ángulo θ_1 : pata en transferencia

Para el cálculo de θ_1 , por relaciones trigonométricas y proyección sobre el plano XY de las coordenadas finales del punto C (Figura 4.8), se tiene:

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{Y - Y_A}{X - X_A}, \quad \text{entonces:} \quad \theta_1 = \arctg \left[\frac{Y - Y_A}{X - X_A} \right]$$

sustituyendo dimensiones geométricas del robot, tenemos:

$$\theta_1 = \arctg \left[\frac{Y - 230}{X - 160} \right] \quad \text{Ec. 4.15}$$

El rango de valores que ocupa el ángulo θ_1 a lo largo del movimiento de cada pata es respectivamente:

$$\text{Pata 1: } -45^\circ \leq \theta_1 \leq 135^\circ$$

$$\text{Pata 2: } 45^\circ \leq \theta_1 \leq 225^\circ$$

$$\text{Pata 3: } 135^\circ \leq \theta_1 \leq 315^\circ$$

$$\text{Pata 4: } 225^\circ \leq \theta_1 \leq 45^\circ$$

4.2.1.2. Estudio cinemático del ángulo θ_2 : pata en transferencia

Para el cálculo de θ_2 , por la Ley de Coseno (Figura 4.9), se tiene:

$$L_3^2 = L_2^2 + r^2 - 2L_2 \cdot r \cdot \cos \alpha$$

despejando:

$$\frac{L_3^2 - L_2^2 - r^2}{-2 \cdot L_2 \cdot r} = \cos \alpha \Rightarrow$$

sustituyendo aquí las ecuaciones 4.13 y 4.14 :

$$\alpha = \arccos \left[\frac{L_3^2 - L_2^2 - (Z_A + t + H - (M + A))^2 - (X - X_A)^2 - (Y - Y_A)^2}{-2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right]$$

Ec. 4.16

Nuevamente de la Figura 4.9, se observa que:

$$\alpha + \beta = \theta_2 \quad \text{Ec.4.17}$$

Donde, por otra parte el valor del ángulo β viene dado por:

$$\text{tg } \beta = \left[\frac{P}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] \Rightarrow$$

Sustituyendo la ecuación 4.14 :

$$\beta = \arctg \left[\frac{Z_A + t + H - (M + A)}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] \quad \text{Ec. 4.18}$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones 4.16 y 4.18 en 4.17, tenemos la ecuación general (Ec.4.19) del movimiento para el ángulo θ_2 :

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{L_3^2 - L_2^2 - (Z_A + t + H - (M + A))^2 - (X - X_A)^2 - (Y - Y_A)^2}{-2L_2 \sqrt{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] - \arctg \left[\frac{(Z_A + t + H - (M + A))}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right]$$

Ec. 4.19

sustituyendo las dimensiones geométricas:

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{\sqrt{144 + (X - 160)^2 + (Y - 230)^2}}{340} \right] - \arctg \left[\frac{-12}{\sqrt{(X - 160)^2 + (Y - 230)^2}} \right]$$

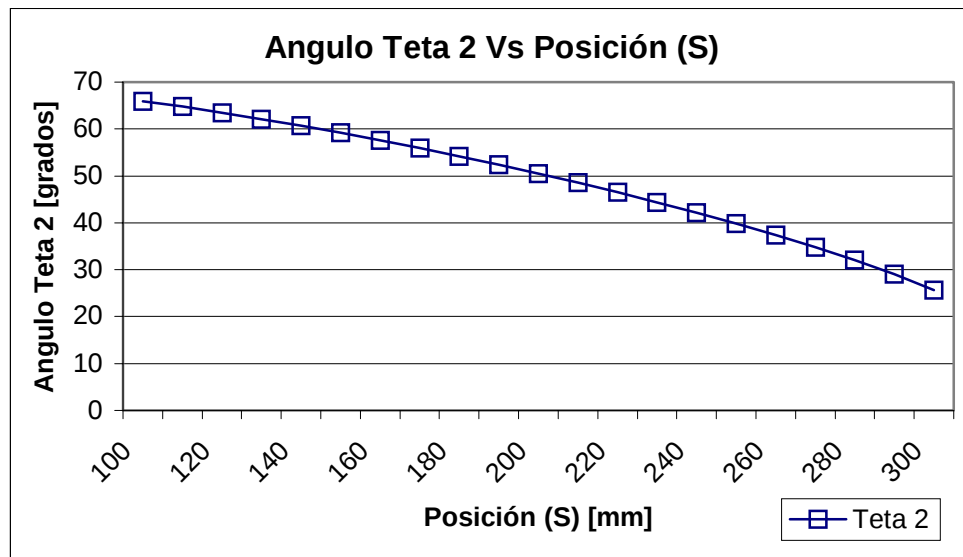
Ec.4.20

La Tabla 4.1, muestra los valores de θ_2 para las distintas posiciones (pata en transferencia), con respecto al sistema de referencia fijo $0X_0Y_0Z_0$ del robot (Figura 4.8):

Tabla 4.1 Valores de θ_2 (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	θ_2 (Radianes)	θ_2 (Grados)
100	1,15062672	65,92605485
110	1,130648727	64,7814002
120	1,108532893	63,5142562
130	1,084648277	62,14576852
140	1,059243891	60,69020441
150	1,032485907	59,15708491
160	1,004480657	57,55250224
170	0,975289016	55,87994441
180	0,94493531	54,14080519
190	0,913412483	52,33468025
200	0,880684492	50,45950446
210	0,846686386	48,51155647
220	0,811322142	46,48533455
230	0,774459951	44,37328658
240	0,735924197	42,16535052
250	0,695482656	39,84822089
260	0,652826188	37,40418533
270	0,607535771	34,80923558
280	0,559026569	32,02986304
290	0,506446745	29,01726106
300	0,448477124	25,69584644

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.1 Valores de θ_2 (Pata en transferencia).

En la Gráfica 4.1, se observa la posición del pie medida a partir del centro del cuerpo del robot. El pie se mueve dentro del intervalo de desplazamiento S desde 10 cm hasta 30 cm (Figura 4.6).

4.2.1.3. Estudio cinemático del ángulo γ y θ_3 : pata en transferencia

Para el cálculo de θ_3 , por la Ley de Coseno (Figura 4.9), se tiene:

$$r^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2L_2.L_3.\cos \gamma$$

despejando:

$$\frac{r^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2.L_2.L_3} = \cos \gamma \quad \Rightarrow$$

sustituyendo aquí las ecuaciones 4.13 y 4.14 :

$$\gamma = \arccos \left[\frac{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2.L_2.L_3} \right]$$

Ec.4.21

sustituyendo las dimensiones geométricas del robot:

$$\gamma = \arccos \left[\frac{57656 - (X - 160)^2 - (Y - 230)^2}{57800} \right]$$

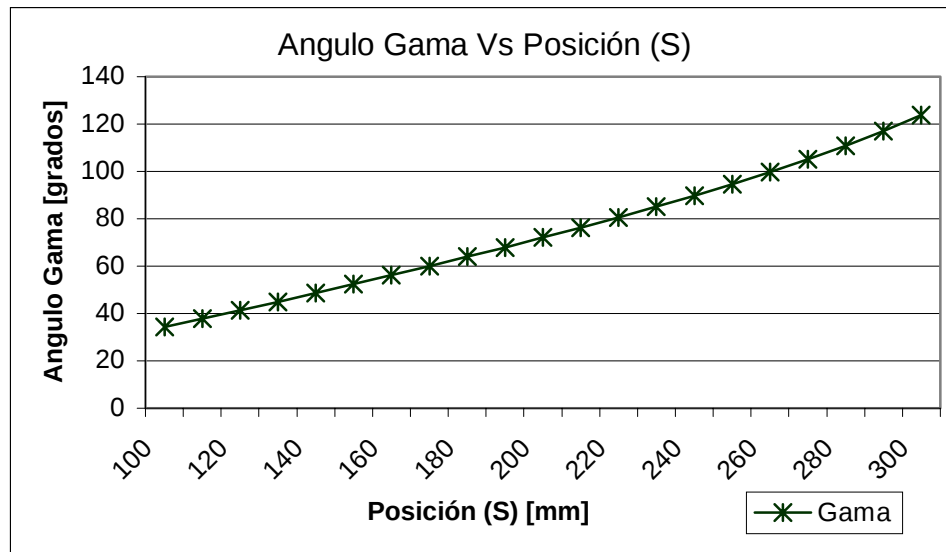
Ec. 4.22

La Tabla 4.2, muestra los valores de γ para las distintas posiciones (pata en transferencia), con respecto al sistema de referencia fijo del robot ($0X_0Y_0Z_0$):

Tabla 4.2 Valores de γ (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	γ (Radianes)	γ (Grados)
100	0,597341	34,2251
110	0,659169	37,7676
120	0,721661	41,3481
130	0,784903	44,9716
140	0,848987	48,6434
150	0,914015	52,3692
160	0,980102	56,1557
170	1,047377	60,0103
180	1,115987	63,9414
190	1,186101	67,9586
200	1,257914	72,0731
210	1,331655	76,2982
220	1,407599	80,6495
230	1,486076	85,1459
240	1,567492	89,8107
250	1,652357	94,6731
260	1,741328	99,7707
270	1,83527	105,153
280	1,935377	110,889
290	2,043363	117,076
300	2,161866	123,866

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.2 Valores de γ (Pata en transferencia).

Como se observa en la (Figura 4.9), los ángulos θ_3 y γ son suplementarios, por ello:

$$\pi + \theta_3 = \gamma \Rightarrow \theta_3 = \gamma - \pi \Rightarrow \quad \text{Ec. 4.23}$$

Sustituyendo la ecuación 4.20, en la ecuación 4.22, tenemos la ecuación general del movimiento para el ángulo θ_3 :

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2 \cdot L_2 \cdot L_3} \right] - \pi$$

Ec. 4.24

sustituyendo las dimensiones geométricas del robot:

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{57656 - (X - 160)^2 - (Y - 230)^2}{57800} \right] - \pi$$

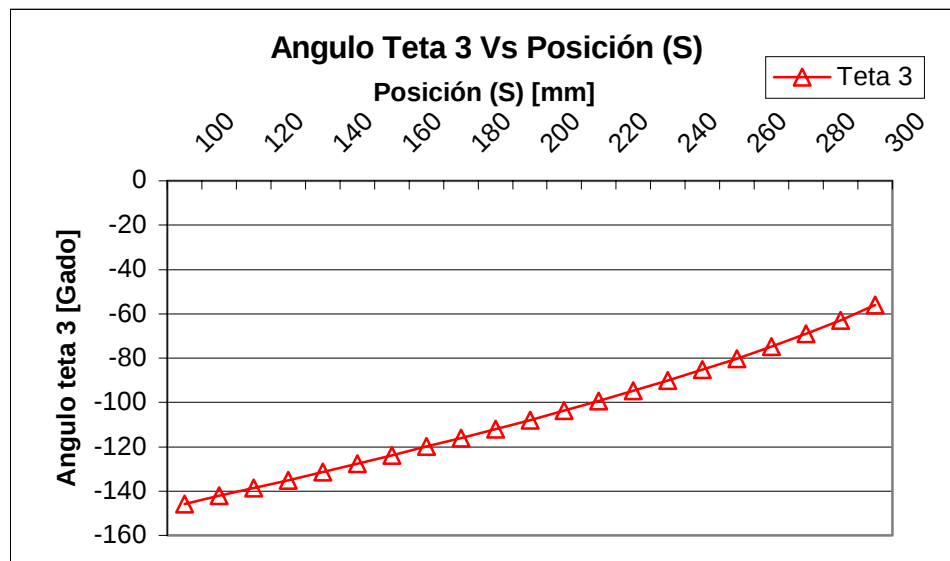
Ec.4.25

La Tabla 4.3, muestra los valores de θ_3 para las distintas posiciones (pata en transferencia), con respecto al sistema de referencia fijo del robot ($0X_0Y_0Z_0$):

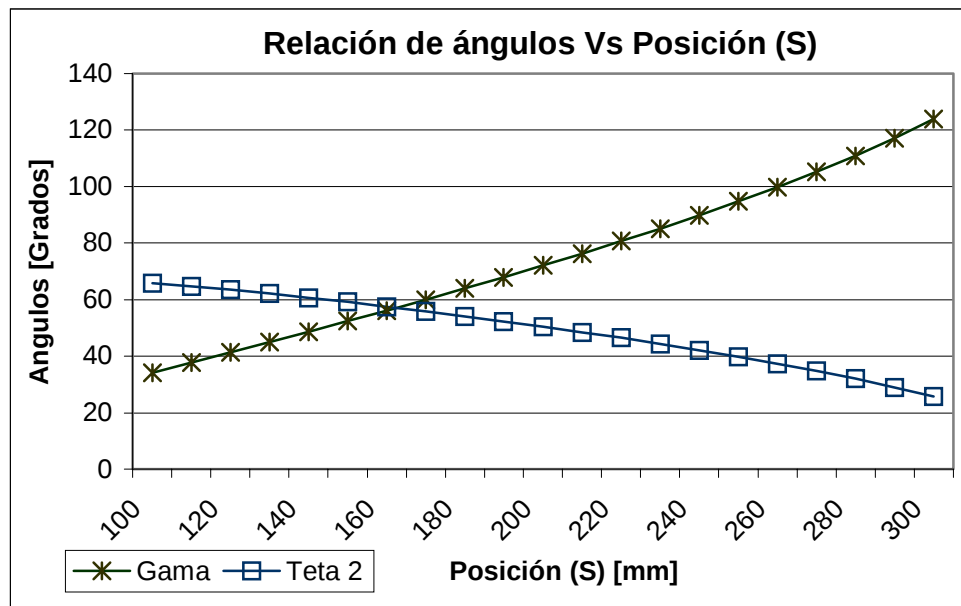
Tabla 4.3 Valores de θ_3 (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	θ_3 (Radianes)	θ_3 (Grados)
100	-2,544	-145,8
110	-2,482	-142,2
120	-2,42	-138,7
130	-2,357	-135
140	-2,293	-131,4
150	-2,228	-127,6
160	-2,161	-123,8
170	-2,094	-120
180	-2,026	-116,1
190	-1,955	-112
200	-1,884	-107,9
210	-1,81	-103,7
220	-1,734	-99,35
230	-1,656	-94,85
240	-1,574	-90,19
250	-1,489	-85,33
260	-1,4	-80,23
270	-1,306	-74,85
280	-1,206	-69,11
290	-1,098	-62,92
300	-0,98	-56,13

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.3 Valores de θ_3 (Pata en transferencia).

Como se observa de las Gráficas 4.1 y 4.2, provenientes de las ecuaciones 4.19 y 4.21, se puede obtener una relación entre los ángulos de θ_2 y γ , la cual indica que solo existe un valor de θ_2 y γ respectivo para una determinada posición (S). También en ella se puede reiterar que para el estudio del movimiento, selección del los actuadores y futuro control del robot es más trascendental el valor de γ que el valor θ_3 . Por esta razón en el siguiente Gráfico 4.4, se observa la relación que existe entre estos dos ángulos y donde su relación esta dominada por la posición final de la pata (posición S) y la altura del robot:



Gráfica 4.4 Relación angular de θ_2 y γ (Pata en transferencia).

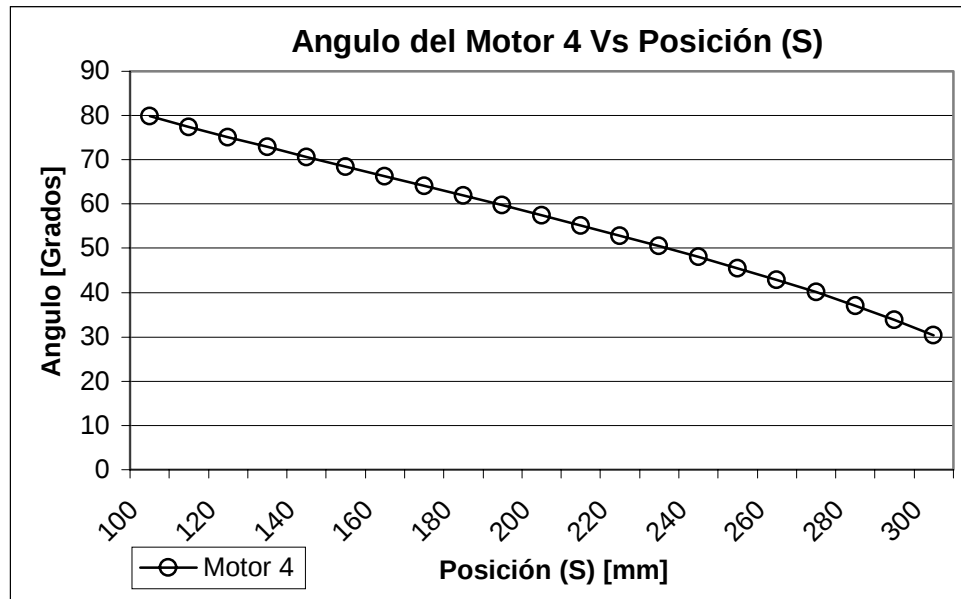
Durante el movimiento de la pata en transferencia ésta se encuentra a una distancia A (15 mm) separada de la pared de apoyo, por esta razón el robot deberá poseer un dispositivo o mecanismo de tal forma que siempre durante cualquier instante del movimiento el electroimán permanezca paralelo a la pared. De esta forma se asegura que la unión entre la pared y la pata es la mejor posible. La forma de ese mecanismo es la utilización de un motor o actuador localizado en el eslabón 3, que hace rotar el eslabón 4 alrededor de su unión.

Debido a lo antes expuesto, la relación angular del actuador 4 debe estar dada por los ángulos que actúan durante el movimiento que son θ_2 y γ . De esta forma observando la Figura 4.9, éstos ángulos forman un triángulo y por ello el valor del ángulo del actuador 4 viene dado por $\pi - \theta_2 - \gamma$. La Tabla 4.4, indica los valores de este ángulo, al cual llamaremos ángulo del motor 4:

Tabla 4.4 Valores del ángulo para el motor 4 (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	Motor 4 (Radianes)	Motor 4 (Grados)
100	1,3936246	79,8488096
110	1,3517754	77,4510235
120	1,3113986	75,1376045
130	1,2720413	72,8825957
140	1,2333619	70,6664305
150	1,1950917	68,4737118
160	1,1570099	66,2917816
170	1,1189263	64,1097545
180	1,0806699	61,9178259
190	1,0420792	59,7067426
200	1,0029947	57,4673604
210	0,9632513	55,1902343
220	0,9226717	52,8651936
230	0,8810571	50,4808513
240	0,8381766	48,0239836
250	0,7937527	45,4786789
260	0,7474389	42,8250958
270	0,6987868	40,0375328
280	0,6471896	37,0812317
290	0,5917831	33,9066724
300	0,53125	30,4383838

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:



Gráfica 4.5 Relación angular del motor 4 (Pata en transferencia).

4.2.2. Cinemática inversa del robot: cuerpo en movimiento.

Como se mencionó anteriormente para el estudio cinemático del cuerpo del robot en movimiento, todas las patas del robot deben estar apoyadas a la pared de escalado. En este caso, el valor de A, que se observa en la Figura 4.9, es igual a cero.

Al representar los movimientos de los eslabones que conforman la pata del robot, estando éstas apoyadas a la pared de escalado, se puede tomar de igual forma las mismas ecuaciones anteriores (Ec. 4. 15, Ec. 4.19, Ec. 4.21 y Ec. 4.24), para los valores de los ángulos θ_1 , θ_2 , γ y θ_3 , respectivamente. Pero donde el valor de P, viene dado ahora por :

$$P = Z_A + t + H - M$$

4.2.2.1. Estudio cinemático del ángulo θ_1

El valor de este ángulo es igual como en el caso anterior, solo depende de las coordenadas X y Y de la pata con respecto al sistema de referencia fijo del cuerpo.

$$\theta_1 = \arctg \left[\frac{Y - 230}{X - 160} \right] \quad \text{Ec. 4.15}$$

4.2.2.2. Estudio cinemático del ángulo θ_2 : cuerpo en movimiento

El valor de θ_2 viene dado por:

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{L_3^2 - L_2^2 - (Z_A + t + H - M)^2 - (X - X_A)^2 - (Y - Y_A)^2}{-2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{(Z_A + t + H - M)^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] - \arctg \left[\frac{(Z_A + t + H - M)}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] \quad \text{Ec. 4.26}$$

Como se mencionó anteriormente, en este caso el valor de $A = 0$, por eso aquí no aparece en comparación con la ecuación 4.19. Sustituyendo las demás dimensiones geométricas y simplificando se tiene:

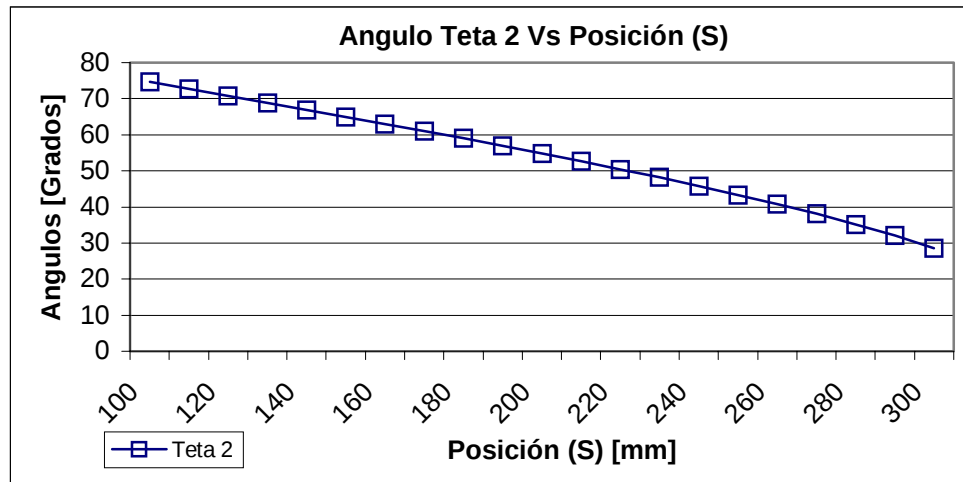
$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{\sqrt{9 + (X - 160)^2 + (Y - 230)^2}}{340} \right] - \arctg \left[\frac{-3}{\sqrt{(X - 160)^2 + (Y - 230)^2}} \right] \quad \text{Ec.4.27}$$

La Tabla 4.5, muestra los valores de θ_2 para las distintas posiciones para el cuerpo en movimiento, con respecto al sistema de referencia fijo del robot :

Tabla 4.5 Valores de θ_2 (cuerpo en movimiento).

Posición (S) [mm]	θ_2 (Radianes)	θ_2 (Grados)
100	1,302116681	74,60579024
110	1,268478017	72,67843677
120	1,234960536	70,75802656
130	1,201417598	68,83615778
140	1,16772818	66,9058963
150	1,133786149	64,96116118
160	1,09949306	62,99631192
170	1,064752884	61,0058465
180	1,029467742	58,98415678
190	0,993534025	56,92530645
200	0,956838447	54,82280468
210	0,919253587	52,66935086
220	0,880632433	50,45652172
230	0,840801247	48,17436284
240	0,799549765	45,81082702
250	0,756617095	43,35096626
260	0,711670506	40,77571637
270	0,664271926	38,05997779
280	0,613821952	35,16940724
290	0,559459367	32,05466053
300	0,499863237	28,64005382

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.6 Valores de θ_2 (cuerpo en movimiento).

4.2.2.3. Estudio cinemático del ángulo γ y θ_3 : cuerpo en movimiento

El ángulo γ viene dado por :

$$\gamma = \arccos \left[\frac{(Z_A + t + H - M)^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2 \cdot L_2 \cdot L_3} \right]$$

Ec. 4.28

Sustituyendo dimensiones geométricas del robot:

$$\gamma = \arccos \left[\frac{57791 - (X - 160)^2 - (Y - 230)^2}{57800} \right]$$

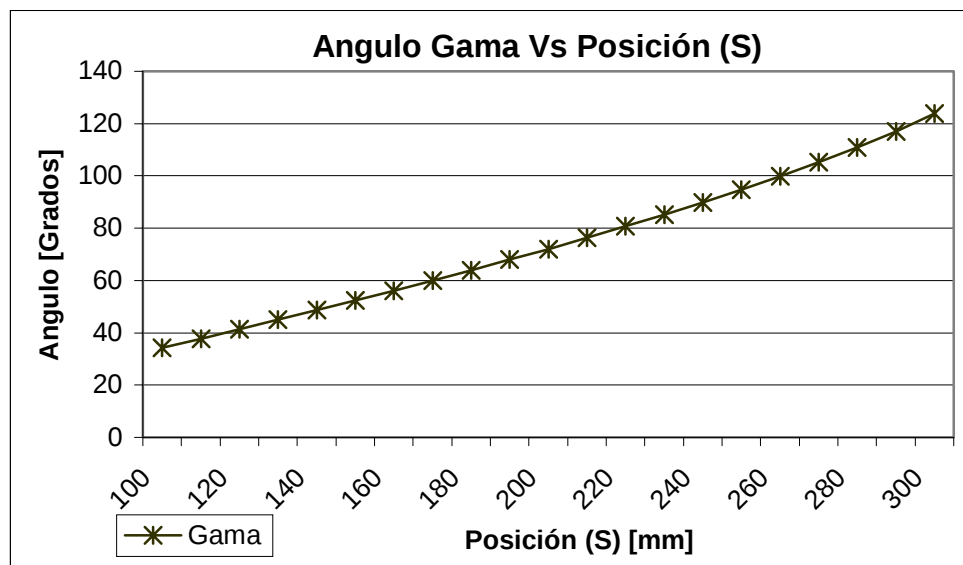
Ec. 4.29

La Tabla 4.6, muestra los valores de γ para las distintas posiciones (S) con respecto al sistema de referencia fijo en el cuerpo del robot :

Tabla 4.6 Valores de γ (cuerpo en movimiento).

Posición (S) [mm]	γ (Radianes)	γ (Grados)
100	0,597341	34,2251
110	0,659169	37,7676
120	0,721661	41,3481
130	0,784903	44,9716
140	0,848987	48,6434
150	0,914015	52,3692
160	0,980102	56,1557
170	1,047377	60,0103
180	1,115987	63,9414
190	1,186101	67,9586
200	1,257914	72,0731
210	1,331655	76,2982
220	1,407599	80,6495
230	1,486076	85,1459
240	1,567492	89,8107
250	1,652357	94,6731
260	1,741328	99,7707
270	1,83527	105,153
280	1,935377	110,889
290	2,043363	117,076
300	2,161866	123,866

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.7 Valores de γ (cuerpo en movimiento).

Como el ángulo θ_3 es suplementario al ángulo γ , tenemos que:

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{(Z_A + t + H - M)^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2 \cdot L_2 \cdot L_3} \right] - \pi$$

Ec. 4.30

Sustituyendo dimensiones geométrica, se tiene:

$$\theta_3 = \arccos \left[\frac{57791 - (X - 160)^2 - (Y - 230)^2}{57800} \right] - \pi$$

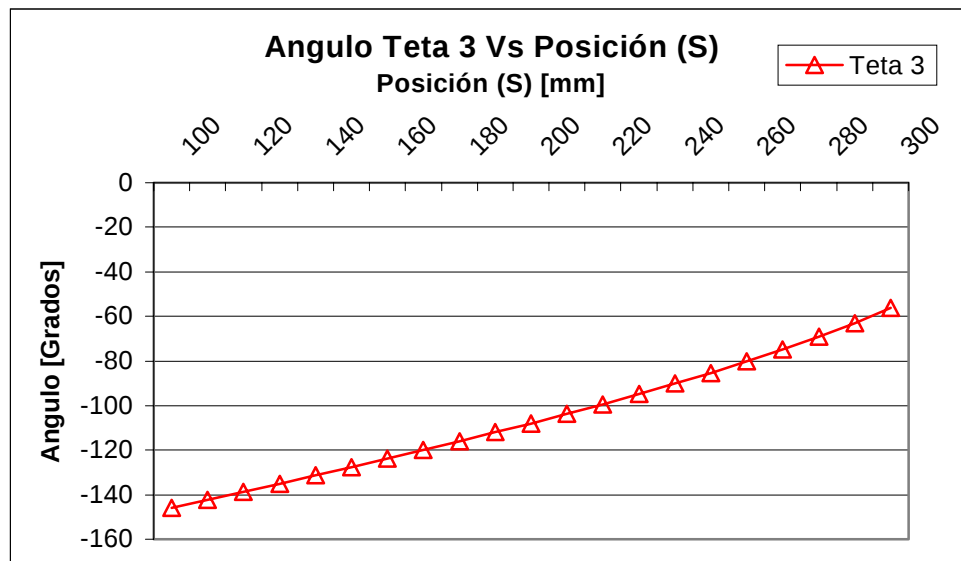
Ec.4.31

La Tabla 4.7, muestra los valores de θ_3 para las distintas posiciones con respecto al sistema de referencia del robot :

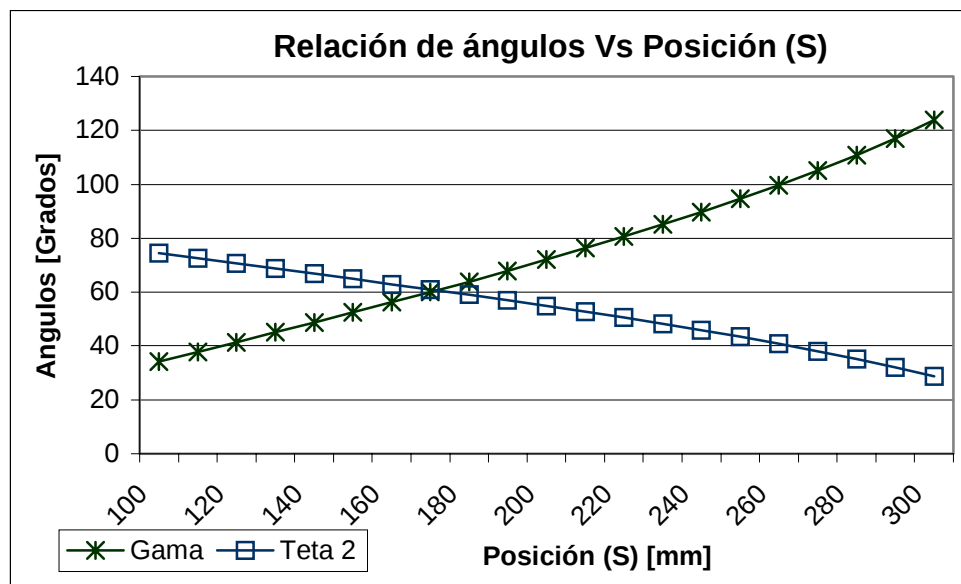
Tabla 4.7 Valores de θ_3 (cuerpo en movimiento).

Posición (S) [mm]	θ_3 (Radianes)	θ_3 (Grados)
100	-2,544	-145,8
110	-2,482	-142,2
120	-2,42	-138,7
130	-2,357	-135
140	-2,293	-131,4
150	-2,228	-127,6
160	-2,161	-123,8
170	-2,094	-120
180	-2,026	-116,1
190	-1,955	-112
200	-1,884	-107,9
210	-1,81	-103,7
220	-1,734	-99,35
230	-1,656	-94,85
240	-1,574	-90,19
250	-1,489	-85,33
260	-1,4	-80,23
270	-1,306	-74,85
280	-1,206	-69,11
290	-1,098	-62,92
300	-0,98	-56,13

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.8 Valores de θ_3 (cuerpo en movimiento).

Como se observa de las Gráficas 4.6 y 4.7, provenientes de las ecuaciones 4.26 y 4.28, se puede obtener una relación entre los ángulos de θ_2 y γ , la cual indica que solo existe un valor de θ_2 y γ respectivo para una determinada posición (S). Por esta razón en el siguiente Gráfico 4.9, se observa la relación que existe entre estos dos ángulos y donde su relación esta dominada por la posición final de la pata posición S y la altura del robot:



Gráfica 4.9 Relación entre los valores angulares de θ_2 y γ (cuerpo en movimiento).

4.3. Estudio de velocidades del robot

El modelado cinemático de un robot busca la relación entre los ángulos y la posición (expresada normalmente en forma de coordenadas cartesianas) del extremo final de la pata del robot. En esta relación no se tienen en cuenta las fuerzas o pares que actúan sobre el robot (actuadores, cargas, fricciones, etc.) que pueden originar el movimiento del mismo. Sin embargo, se debe conocer, además, la relación entre estos ángulos y sus respectivas derivadas. Así, el sistema de control del robot debe establecer qué velocidades debe imprimir a cada articulación (a través de sus respectivos actuadores) para conseguir que el extremo desarrolle una trayectoria temporal concreta, por ejemplo, una línea recta a velocidad constante.

Para este y otros fines, se debe disponer de la relación entre las velocidades de las coordenadas articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) y las de la posición y orientación del pie del robot o extremo final de la pata del robot (p_x, p_y, p_z).

El cálculo de las velocidades de cada eslabón se desarrolla mediante del triángulo de velocidades del robot, para el momento donde se realiza el movimiento de la pata, y de igual modo cuando el cuerpo esta en transferencia.

4.3.1. Determinación de la velocidad del ángulo θ_1

La variación de θ_1 respecto al tiempo ($\dot{\theta}_1$) es totalmente independiente de los ángulos θ_2 y γ . En este caso, se considera conveniente tomar una velocidad angular en el rango de 1 r.p.m hasta 5 r.p.m.. Este rango de velocidades no es muy elevada y por ello su inercia es despreciable, beneficiando el control de los motores.

4.3.2. Determinación de la velocidad de los ángulos θ_2 y γ ($\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$)

Para la determinación de las velocidades de los ángulos θ_2 y γ , obsérvese la Figura 4.10. La característica principal para la obtención de estas velocidades ($\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$) es que el electroimán se desplaza con una velocidad constante de 30 mm/seg, sin importar su dirección (θ_1).

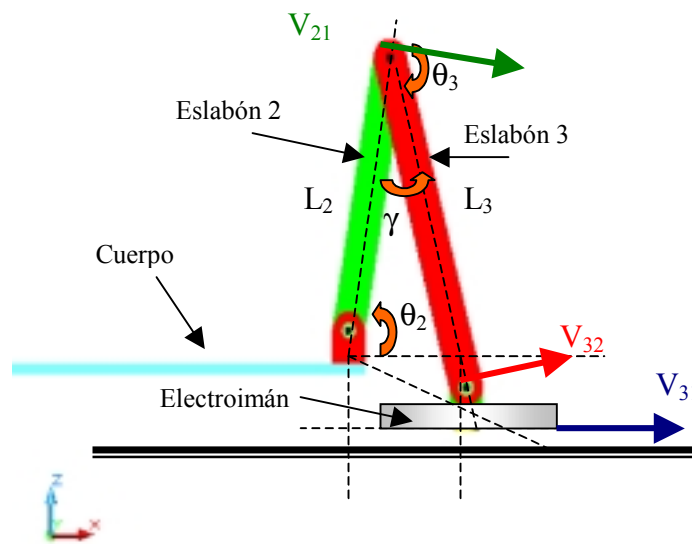


Figura 4.10 Vectores de las velocidades.

Donde:

V_{31} = velocidad del pie respecto al cuerpo. El cuerpo se considera fijo.

V_{32} = velocidad del extremo del eslabón L_3 respecto al eslabón L_2 .

V_{21} = velocidad del extremo del eslabón L_2 respecto al cuerpo.

En la Figura 4.11 se puede observar el triángulo de velocidades para el instante de tiempo de la Figura 4.10, se puede recordar que este cambia con el tiempo:

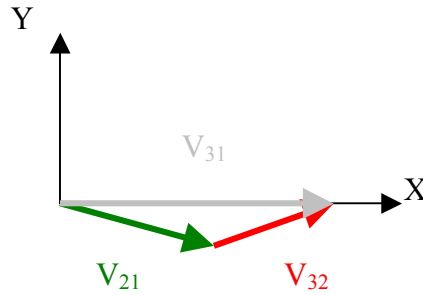


Figura 4.11 Triángulo de velocidades.

Como el robot debe realizar el movimiento de la pata a lo largo de su trayectoria y para ello debe modificar los valores de los ángulos (θ_2 , θ_3), ésta es solo una de las tantas combinaciones de direcciones de velocidades. Para mayor facilidad se realizará un estudio donde este triángulo esté más abierto para poder ver el cambio de los valores de θ_2 y θ_3 en el tiempo.

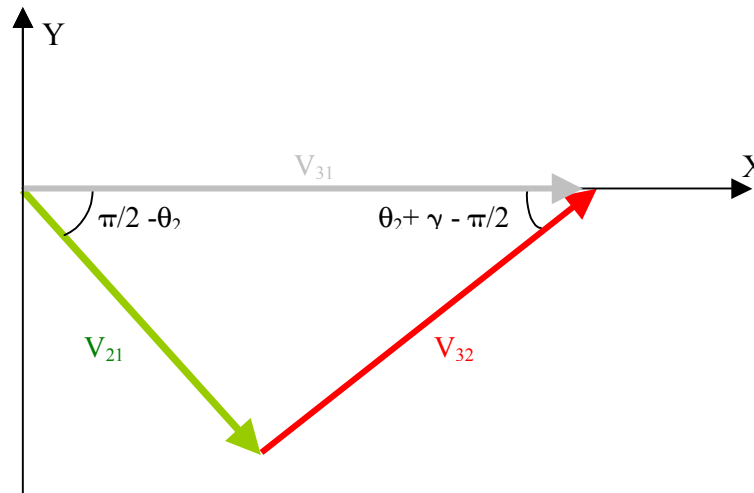


Figura 4.12 Detalle del triángulo de velocidades.

Donde:

$$V_{21} = \dot{\theta}_2 \cdot L_2$$

$$V_{32} = \dot{\gamma} \cdot L_3$$

$$V_{31} = V = 3 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

Entonces:

Descomponiendo los vectores velocidad en las direcciones X e Y, tenemos:

En X:

$$\dot{\gamma} \cdot L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}) + \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) = V \quad \text{Ec.4.31}$$

En Y:

$$\dot{\gamma} \cdot L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}) = \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_2) \quad \text{Ec.4.32}$$

Pero por identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta_2 + \gamma)$$

$$\sin(\theta_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta_2 + \gamma)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \sin \theta_2$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \cos \theta_2$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones 4.31 y 4.32 nos queda:

En X:

$$V = \dot{\gamma} \cdot L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) + \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \sin \theta_2 \quad \text{Ec.4.33}$$

En Y:

$$-\dot{\gamma} \cdot L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) = \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_2 \quad \text{Ec. 4.44}$$

Despejando $\dot{\gamma}$ de la ecuación 4.33:

$$\dot{\gamma} = \frac{V - \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \sin \theta_2}{L_3 \cdot \sin(\theta_2 + \gamma)} \quad \text{Ec.4.45}$$

Sustituyendo la ecuación 4.45 en la ecuación 4.44:

$$-\left[\frac{V - \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \text{sen } \theta_2}{L_3 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma)} \right] \cdot L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) = \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_2$$

simplificando:

$$\frac{-V \cdot L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma)}{L_3 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma)} + \frac{\dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \text{sen} \theta_2 \cdot L_3 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma)}{L_3 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma)} = \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$-V \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma) + \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma) = \dot{\theta}_2 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$\dot{\theta}_2 \cdot [L_2 \cdot \cos \theta_2 - L_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)] = -V \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)$$

despejando $\dot{\theta}_2$:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-V \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)}{L_2 [\cos \theta_2 - \text{sen } \theta_2 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)]} \quad \text{Ec.4.46}$$

Sustituyendo la ecuación 4.46 en 4.45, tenemos:

$$\dot{\gamma} = \frac{V - \left[\frac{-V \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)}{L_2 [\cos \theta_2 - \text{sen } \theta_2 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)]} \right] \cdot L_2 \cdot \text{sen } \theta_2}{L_3 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma)} \quad \text{Ec.4.47}$$

sustituyendo dimensiones en las ecuaciones 4.46 y 4.47:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-3 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)}{17 [\cos \theta_2 - \text{sen } \theta_2 \cdot \text{ctg}(\theta_2 + \gamma)]} \quad \text{Ec.4.48}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{3}{17} + \left[\frac{3 \cdot \text{ctg} (\theta_2 + \gamma)}{17 [\cos \theta_2 - \text{sen} \theta_2 \cdot \text{ctg} (\theta_2 + \gamma)]} \right] \cdot \text{sen} \theta_2}{\text{sen} (\theta_2 + \gamma)}$$

Ec.4.49

Observando las ecuaciones 4.46 y 4.47 se tiene que $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ dependen de L_2 (170 mm) y L_3 (170 mm) que son las longitudes de los eslabones 2 y 3 respectivamente y son valores fijos; al igual que V (30 mm/seg). También dependen de θ_2 y γ que son variables. Pero como se dijo en la sección 4.2 (Cinemática inversa) θ_2 y γ varían en función de las coordenadas X , Y y Z . Recordemos las ecuaciones 4.19 y 4.21.

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{L_3^2 - L_2^2 - (Z_A + t + H - (M + A))^2 - (X - X_A)^2 - (Y - Y_A)^2}{-2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right] - \arctg \left[\frac{(Z_A + t + H - (M + A))}{\sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2}} \right]$$

$$\gamma = \arccos \left[\frac{(Z_A + t + H - (M + A))^2 + (X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 - L_2^2 - L_3^2}{-2 \cdot L_2 \cdot L_3} \right]$$

Como se demuestra en las secciones anteriores 4.2.1 y 4.2.2, las magnitudes angulares de θ_2 y γ varían dependiendo si la pata está en transferencia o en apoyo. Por esta razón como se puede ver en las ecuaciones 4.46 y 4.47 los valores de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ también se ven afectados por el tipo de movimiento (pata en apoyo o en transferencia). Por ello se realizará un estudio bajo los dos movimientos.

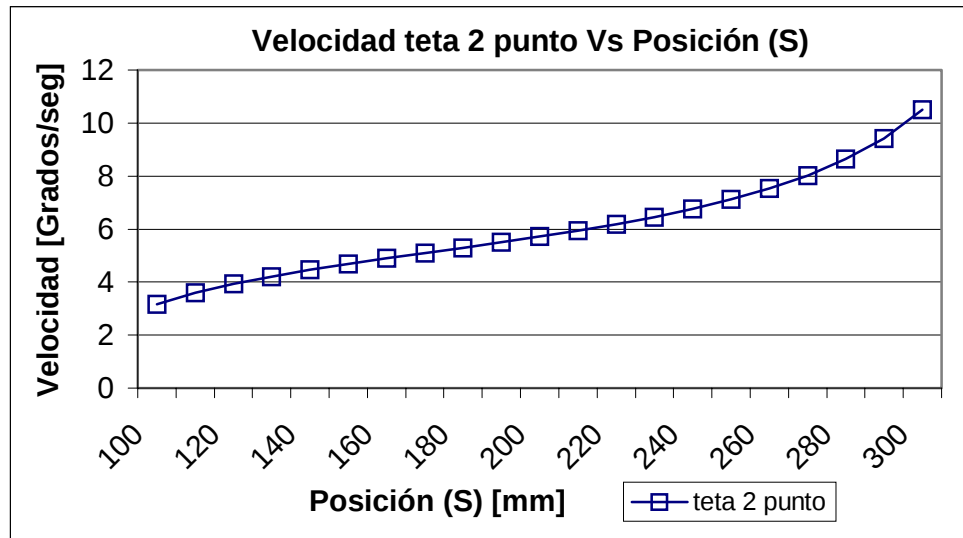
4.3.2.1. Determinación de la velocidad del ángulo θ_2 y γ ($\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$): pata en transferencia

La Tabla 4.8, muestra los valores de $\dot{\theta}_2$ para las distintas posiciones de la ecuación 4.46, con respecto al sistema de referencia fijo en el cuerpo del robot con la pata en transferencia:

Tabla 4.8 Valores de $\dot{\theta}_2$ (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	$\dot{\theta}_2$ (Radianes/seg)	$\dot{\theta}_2$ (Grados/seg)
100	0,055298234	3,168355434
110	0,062604081	3,586949646
120	0,068516806	3,925723796
130	0,073491636	4,21076059
140	0,077834741	4,459602177
150	0,08176156	4,684592325
160	0,085431068	4,894839645
170	0,088966957	5,097431162
180	0,092471499	5,298226628
190	0,096035309	5,502417891
200	0,099744947	5,714964495
210	0,103689687	5,940981424
220	0,10796855	6,186142263
230	0,112698811	6,457166252
240	0,11802761	6,762483926
250	0,124149404	7,11323688
260	0,131334246	7,524898024
270	0,13997695	8,020088456
280	0,150689238	8,633857328
290	0,164488766	9,424512053
300	0,183235127	10,49859946

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:



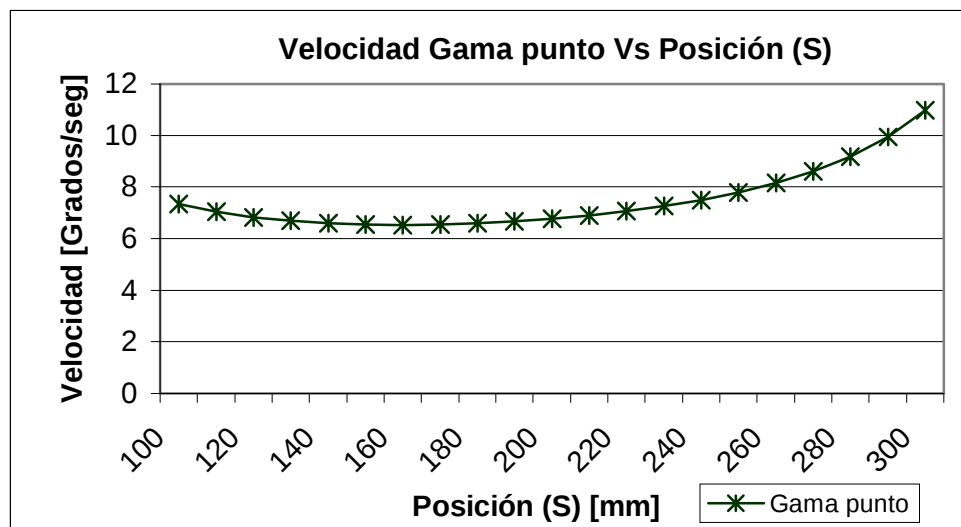
Gráfica 4.10 Valores de $\dot{\theta}_2$ (Pata en transferencia).

La Tabla 4.9, muestra los valores de $\dot{\gamma}$ para las distintas posiciones en la ecuación 4.47, con respecto al sistema de referencia fijo en el cuerpo del robot con la pata en transferencia:

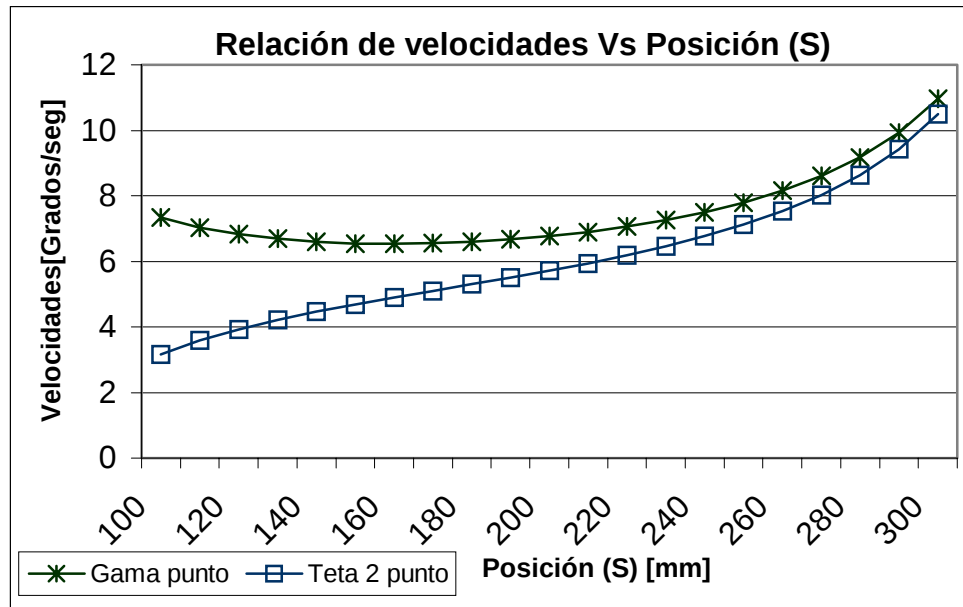
Tabla 4.9 Valores de $\dot{\gamma}$ (Pata en transferencia).

Posición (S) [mm]	$\dot{\gamma}$ (Radianes)	$\dot{\gamma}$ (Grados)
100	0,127985681	7,333039382
110	0,122766184	7,033984195
120	0,119130494	6,825674506
130	0,116661432	6,684207671
140	0,115090073	6,59417547
150	0,114240411	6,545493421
160	0,113997556	6,53157886
170	0,114288986	6,548276523
180	0,115073434	6,593222099
190	0,116334572	6,665479996
200	0,118077975	6,765369623
210	0,120330694	6,894440914
220	0,123143326	7,055592831
230	0,126595019	7,253360288
240	0,130802599	7,494436887
250	0,135936215	7,788571385
260	0,142246303	8,150112804
270	0,150111807	8,600773002
280	0,160131674	9,174869084
290	0,173313511	9,930132708
300	0,19150964	10,97269412

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:


 Gráfica 4.11 Valores de $\dot{\gamma}$ (Pata en transferencia).

Como resultado del estudio anterior de las Gráficas 4.10 y 4.11, se puede obtener la relación entre los ángulos de $\dot{\theta}_2$ y el ángulo $\dot{\gamma}$. Por esta razón en el siguiente gráfico se observará la relación que debe existir entre las velocidades angulares de los actuadores que dominan estas velocidades:



Gráfica 4.12 Relación entre las velocidades angulares de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ (Pata en transferencia).

4.3.2.2. Determinación de la velocidad del ángulo θ_2 y γ ($\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$): cuerpo en movimiento

Como se mencionó en la sección 4.2 (Cinemática Inversa del Robot), a medida que la pata se mueve; ésta mantiene el pie a una altura constante que la llamamos A y que es igual a 5 centímetros. Sin embargo, cuando el cuerpo es quien se mueve, la altura A es cero porque las 4 patas están adheridas a la pared, por lo tanto el valor de Z en las ecuaciones 4.19 y 4.21 es distinto. Entonces, para el mismo recorrido S (ahora del

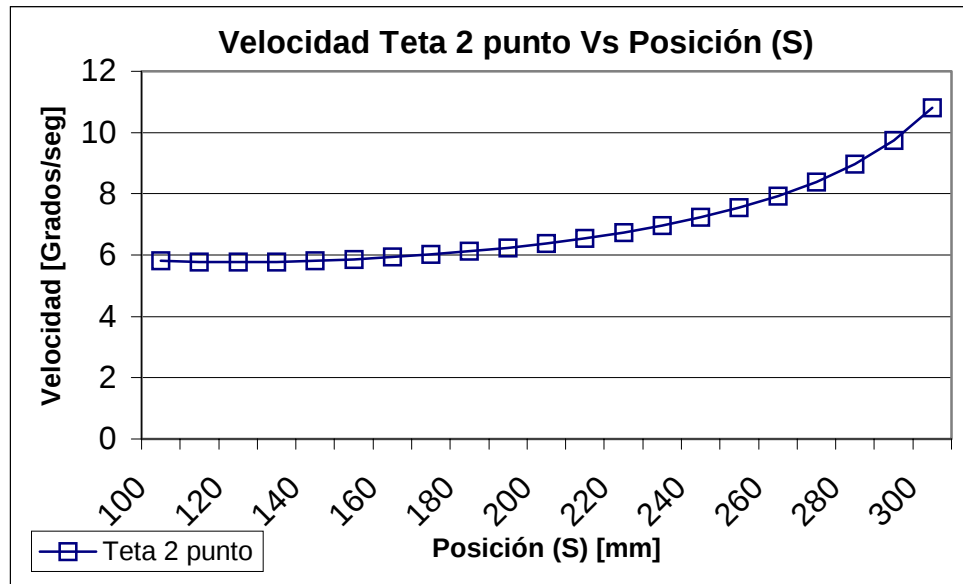
cuerpo) los valores de θ_2 y γ varían como se muestra en las Tablas 4.10 y 4.11, respectivamente

La Tabla 4.10, muestra los valores de $\dot{\theta}_2$ para las distintas posiciones de la ecuación 4.46, con respecto al sistema de referencia fijo en el cuerpo del robot con el mismo en transferencia:

Tabla 4.10 Valores de $\dot{\theta}_2$ (Cuerpo en movimiento).

Posición (S) [mm]	$\dot{\theta}_2$ (Radianes/seg)	$\dot{\theta}_2$ (Grados/seg)
100	0,101272943	5,802512194
110	0,100652362	5,766955517
120	0,100525024	5,759659628
130	0,100792598	5,774990457
140	0,101396628	5,809598859
150	0,102304523	5,861617386
160	0,103501815	5,930217199
170	0,104987986	6,015368493
180	0,106774476	6,117726828
190	0,108884251	6,23860801
200	0,111352661	6,380037497
210	0,114229653	6,544877025
220	0,117583662	6,737047588
230	0,121507902	6,96188996
240	0,12613041	7,226740165
250	0,131630365	7,541864349
260	0,138265547	7,922032295
270	0,146420932	8,389301415
280	0,156700473	8,978275725
290	0,170115998	9,746928738
300	0,188523492	10,80160042

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:



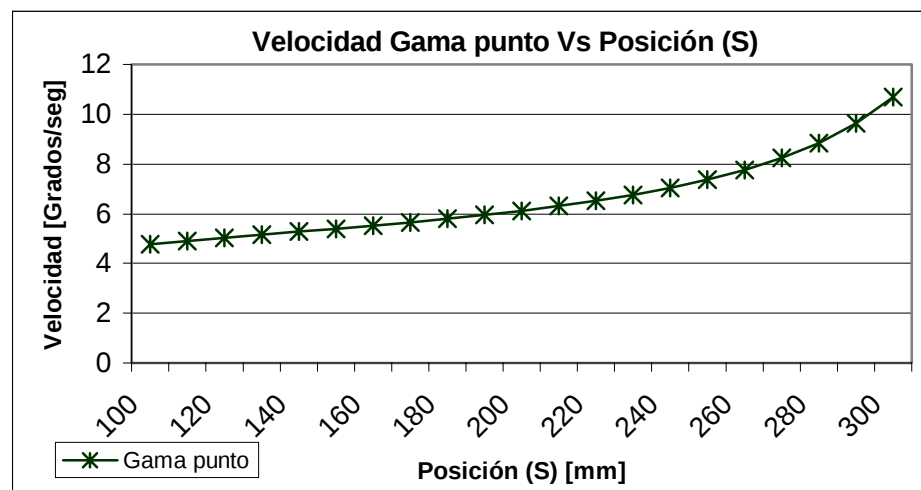
Gráfica 4.13 Valores de $\dot{\theta}_2$ (Cuerpo en movimiento).

La Tabla 4.11, muestra los valores de $\dot{\gamma}$ para las distintas posiciones en la ecuación 4.47, con respecto al sistema de referencia fijo en el cuerpo del robot con el cuerpo en transferencia:

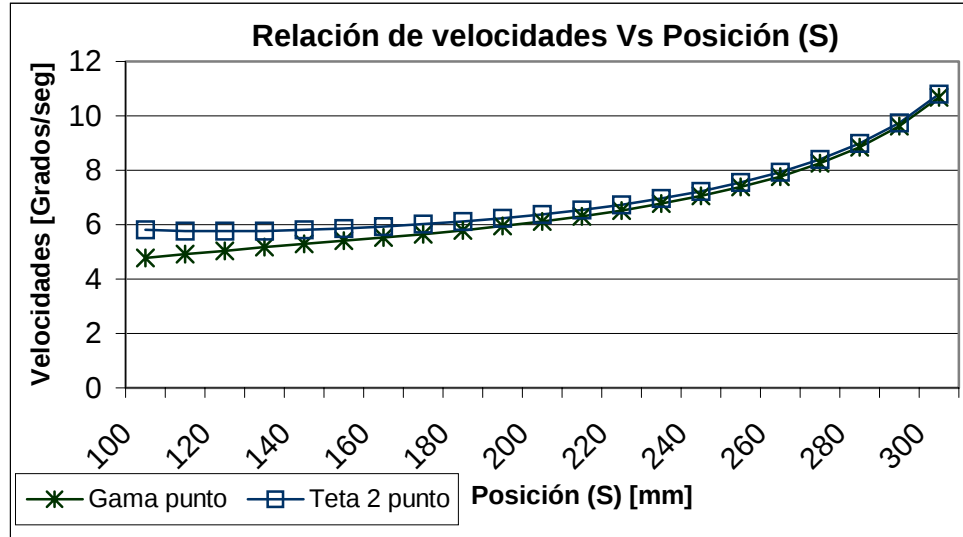
Tabla 4.11 Valores de $\dot{\gamma}$ (Cuerpo en movimiento).

Posición (S) [mm]	$\dot{\gamma}$ (Radianes)	$\dot{\gamma}$ (Grados)
100	0,083289128	4,77211552
110	0,085787385	4,915255103
120	0,088032832	5,043909727
130	0,090147379	5,165064364
140	0,09221717	5,283654634
150	0,094307722	5,403434424
160	0,096473037	5,52749783
170	0,098761551	5,658620064
180	0,101220463	5,799505337
190	0,103899344	5,952993888
200	0,106853673	6,122264488
210	0,110148853	6,311064417
220	0,113865345	6,524003726
230	0,118105834	6,766965839
240	0,123005898	7,047718826
250	0,128750779	7,376876262
260	0,13560318	7,769489877
270	0,143952101	8,247847818
280	0,154404818	8,846744392
290	0,167975918	9,624311178
300	0,186523692	10,68702031

La gráfica en función de la posición (S), viene dada de la siguiente forma:

Gráfica 4.14 Valores de $\dot{\gamma}$ (Cuerpo en movimiento).

Como resultado del estudio anterior de las Gráficas 4.13 y 4.14, se pudo obtener la relación entre los ángulos de $\dot{\theta}_2$ y el ángulo $\dot{\gamma}$ para el cuerpo en movimiento. Por esta razón en el siguiente gráfico se observa la relación que existe entre estos dos ángulos:



Gráfica 4.15 Relación entre las velocidades $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\gamma}$ (Cuerpo en movimiento).

Como se mencionó con anterioridad, la suma de los ángulos γ y θ_2 es siempre igual a 180° , es decir, son ángulos complementarios. De esta forma, se puede observar que la expresión de $\dot{\theta}_3$ es igual a la de $\dot{\gamma}$, por propiedades de derivadas:

$$\begin{aligned}\gamma + \theta_2 &= 180^\circ \\ \dot{\gamma} + \dot{\theta}_2 &= 0 \\ \dot{\gamma} &= -\dot{\theta}_2\end{aligned}$$

Las ecuaciones mostradas, a lo largo de éste capítulo, permiten conocer las relaciones angulares que existen entre los eslabones que conforman las patas del robot. Esto es la base para el control de la posición que se desee tenga el pie del robot.

Por otra parte, es importante conocer las velocidades angulares relativas entre los eslabones, ya que con éstas se puede calcular la magnitud de la potencia que deberán entregar los motores. No obstante, es necesario conocer también los torques que ofrecen éstos. Para ello se presenta el próximo capítulo, en el cual no sólo se analizan los torques necesarios para el movimiento, sino también las distintas fuerzas a las que están sometidos los eslabones.

CAPITULO V: SOLICITACIONES EN LOS ESLABONES

En este capítulo, se analizan las reacciones que actúan en las articulaciones y las respectivas fuerzas cortantes y momentos flectores que éstos soportan.

Para el cálculo de los esfuerzos en los eslabones 2 y 3, se procede de la siguiente manera:

Se realiza un estudio de las fuerzas cortantes y momentos flectores que actúan en cada uno de ellos, considerando para esto, dos casos:

- a) cuando la pata está realizando la transferencia a su nuevo punto de apoyo.
- b) cuando el cuerpo está en movimiento.

Luego, se analizan los momentos torsores que soportan los eslabones. Posteriormente en el capítulo VI, con las condiciones más desfavorables (relación entre la magnitud de la fuerza cortante, momento flector, momento torsor y la robustez de la sección en la cual aplica) se calculan los esfuerzos axiales, esfuerzos normales por flexión y los esfuerzos cortantes (producto de las fuerzas cortantes y momentos torsores) que soportan los eslabones, respectivamente. Con estos valores máximos se calculan los esfuerzos principales que actúan en cada uno de los eslabones. Finalmente, se emplea la teoría de Von Misses-Hencky para evaluar el riesgo de falla de los eslabones.

Sin embargo estos esfuerzos soportados por los eslabones serán evaluados en el próximo capítulo (VI), en conjunto con los eslabones 1 y 4 que se analizan por el programa Visual Nastran v.6.2.

Para el análisis de las fuerzas cortantes y momentos flectores que actúan en los eslabones, se considera el escalado vertical para el análisis en el plano XY del eslabón y el escalado horizontal cuando se analice el plano XZ; ya que las máximas proyecciones de las fuerzas que soportan los eslabones, en el plano XY, se producen cuando el robot se mueve verticalmente; mientras que las máximas proyecciones de estas mismas fuerzas, en el plano XZ, se producen cuando el robot se mueve horizontalmente. Es importante recordar que los ejes X_i , Y_i y Z_i forman un sistema de referencia solidario al eslabón i ; donde $i = 1, 2, \dots, 4$. Así, por ejemplo, si se tienen los ejes X_2 , Y_2 y Z_2 del eslabón 2; se puede descomponer las fuerzas que actúan sobre él, proyectándolos sobre los planos X_2Y_2 y X_2Z_2 que forman los referidos ejes.

5.1 Pata en transferencia.

Decir que la pata está en movimiento es equivalente a decir que hay movimientos relativos, entre sí, de los eslabones que componen la pata. Esto lógicamente es un mecanismo; sin embargo, el movimiento de éste es muy lento ya que el hecho de mover el pie siempre paralelo a la pared (Figura 5.1), a una velocidad lineal constante de 30 mm/seg, origina que la máxima velocidad angular ($\dot{\gamma}$) que se presenta en el movimiento relativo entre los eslabones, sea de 0,1915 rad/seg (10,97 grados/seg).

Los elementos a mover son muy livianos (los eslabones pesan sólo 472 gramos) por lo que la inercia a vencer es poca. Por estas razones, el análisis de las fuerzas cortantes y momentos flectores se pueden enfocar a través de las ecuaciones de la estática para instantes de tiempo determinado.

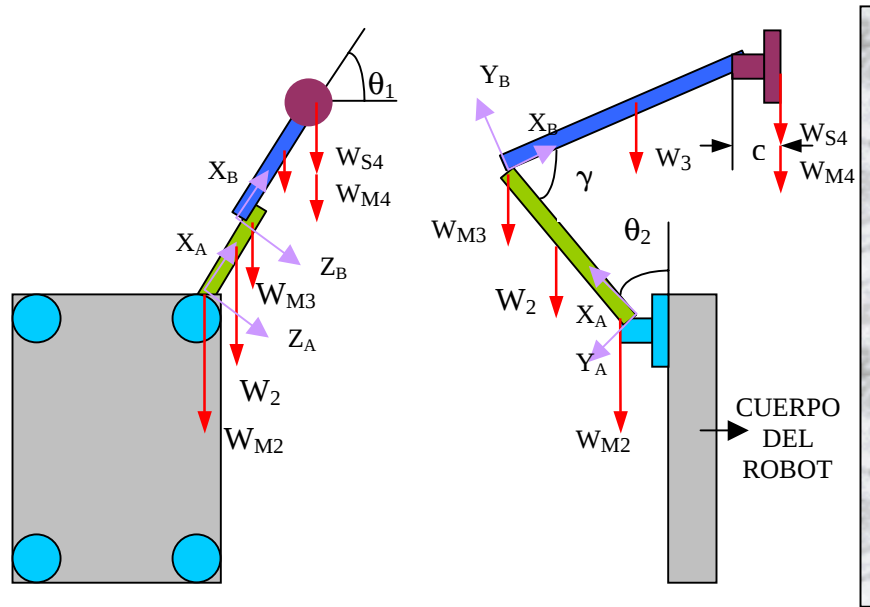


Figura 5.1 Fuerzas actuantes sobre la pata en movimiento.

5.1.1 Solicitaciones en el Eslabón 3

En lo sucesivo cuando nos referimos al plano $X_i Y_i$ o $X_i Z_i$ de un eslabón, estaremos hablando del plano formado por los ejes X_i y Y_i y X_i y Z_i que forman el sistema de referencia $X_i Y_i Z_i$ solidario al eslabón. (Figura 4.1).

5.1.1.1 Plano X_3Y_3

Diagrama de cuerpo libre:

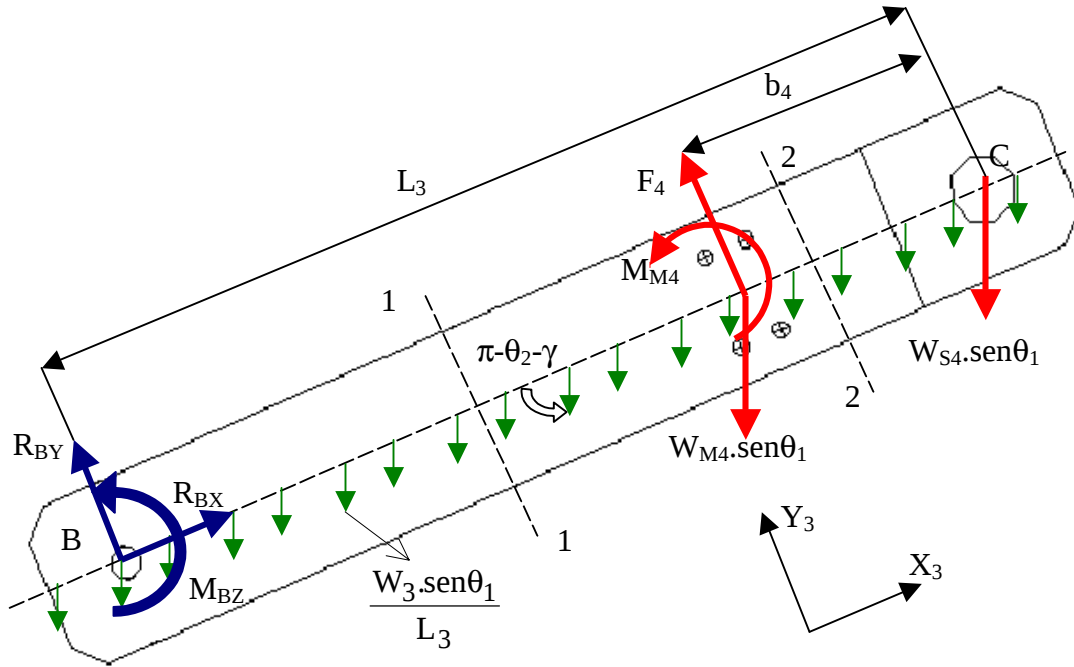


Figura 5.2 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY.

Donde:

$W_{\text{Electroímán}}$ = peso de los electroimanes = 1,5 Kg.

W_4 = peso del eslabón 4 = 0,142 Kg.

W_{Engrane} = 0,090 Kg.

$W_{S4} = W_{\text{Electroímán}} + W_4 + W_{\text{Engrane}} = 2 + 0,142 + 0,090 = 2,232$ Kg.

W_{M4} = peso del motor 4 = 0,356 Kg.

W_3 = peso del eslabón 3 = 0,472 Kg.

L_3 = longitud del eslabón 3 = 170 mm.

b_4 = brazo de aplicación de la fuerza F_4

M_{M4} = momento flector del motor 4

$$= \frac{\text{Longitud del motor}}{2} \cdot W_{M4} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) = \frac{125 \text{ mm}}{2} \cdot 0,356 \text{ Kg} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma)$$

$$= 22,25 \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Por propiedades trigonométricas:

$$\cos (\pi-\theta_2-\gamma) = -\cos (\theta_2+\gamma)$$

$$\operatorname{sen} (\pi-\theta_2-\gamma) = \operatorname{sen} (\theta_2+\gamma)$$

Ahora, haciendo suma de fuerzas en dirección BX_3 :

$$\text{Por } \Sigma FX_3 = 0$$

$$R_{BX} - (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \cos (\pi-\theta_2-\gamma) \cdot \operatorname{sen} \theta_1 = 0$$

$$R_{BX} = - (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \cos (\theta_2+\gamma) \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \quad \text{Ec. 5.1}$$

Por suma de fuerzas en dirección BY_3

$$\text{Por } \Sigma FY_3 = 0$$

$$R_{BY} - (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \operatorname{sen} (\pi-\theta_2-\gamma) \cdot \operatorname{sen} \theta_1 + F_4 = 0$$

$$R_{BY} = (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \operatorname{sen} (\theta_2+\gamma) \cdot \operatorname{sen} \theta_1 - F_4 \quad \text{Ec. 5.2}$$

Donde F_4 es una fuerza que aplica al eslabón y que se obtiene de la siguiente manera: Cuando una pata se encuentra en transferencia, el extremo de ésta (pie) debe permanecer separada de la pared a una cierta distancia y siempre paralela a dicha pared, mientras la pata se mueve hasta posicionar el pie en su nuevo punto de apoyo. A medida que esto sucede, el pie de esta pata en transferencia tiende a girar, por efecto de la gravedad, hacia el eslabón 3 (Figura 5.3), acercándose a éste; ya que el eslabón 3 se encuentra articulado al pie (eslabón 4). Se hace necesario, entonces, que el motor 4 permita mantener el pie siempre paralelo a la pared de apoyo; haciendo un torque que se ve reflejado en el elemento de sujeción, o sea placa en L, del motor con el eslabón 3. Los tornillos que unen esta placa L al eslabón 3, se ven sometidos a una fuerza cortante (F_4) que incide directamente sobre este eslabón 3; creando en él un momento flector y torsor.

El torque 4, necesario para mantener el pie siempre paralelo a la pared, viene dado por el producto del peso W_{S4} y el brazo c (Figura 5.3) que es una característica geométrica del eslabón 4 y cuya magnitud es $c = 58 \text{ mm}$.

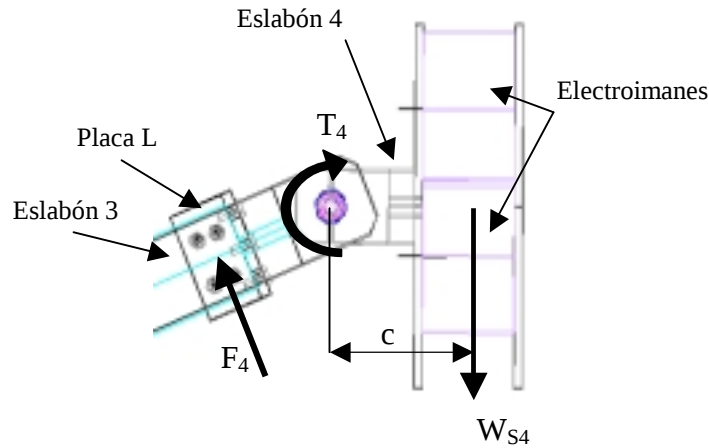


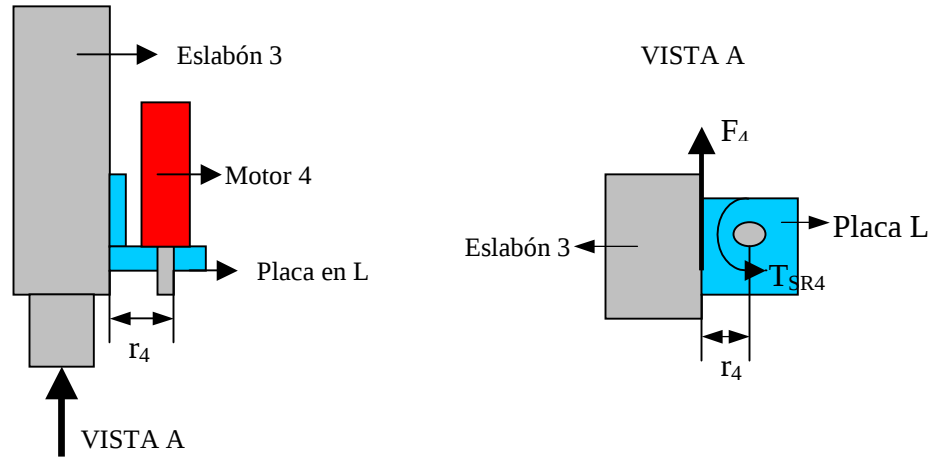
Figura 5.3 Torque necesario para mantener el pie paralelo a la pared de apoyo.

$$T_4 = W_{S4} \cdot c = 2,232 \text{ Kg} \cdot 58 \text{ mm} = 129,46 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Debido a que a la salida del moto reductor 4 hay una relación de engranes cónicos 3: 1, se tiene que la Rueda hace $T_4 = 129,46 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$; mientras que el Piñón hace un

$$\text{torque } T_{SR4} = \frac{T_4}{3} = \frac{129,46 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{3} = 43,15 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Finalmente, la fuerza F_4 a la que se hizo referencia anteriormente se puede obtener dividiendo el torque T_{SR4} entre la distancia (r_4) que hay desde el eje del motor hasta la cara del eslabón que contiene a la placa L donde va el este motor (Figura 5.4).


 Figura 5.4 Fuerza F_4 que actúa sobre el eslabón 3.

$$F_4 = \frac{T_{SR4}}{r_4} = \frac{43,15 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{24 \text{ mm}} = 1,8 \text{ Kg}$$

Por otra parte, de la Figura 5.2, haciendo suma de momentos en $B = 0$, se obtiene:

Ec. 5.3:

$$M_{BZ} = \left[\left(\frac{W_3}{2} + W_{S4} \right) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot (L_3 - b_4) \right] \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot \sin \theta_1 - F_4 \cdot (L_3 - b_4) - M_{M4}$$

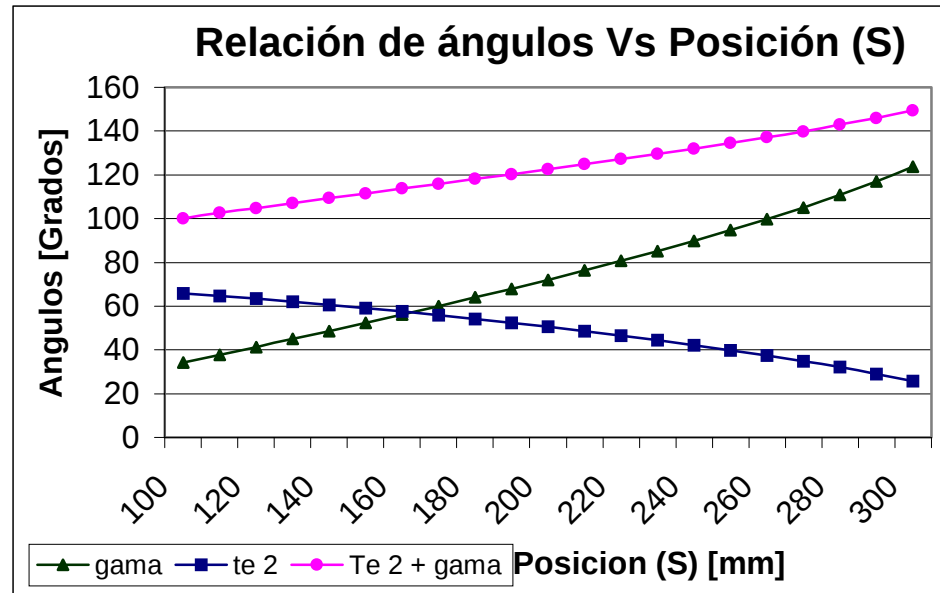
Este momento M_{BZ} es proporcionado por el motor 3, a través de una relación de engranes cónicos (3:1), o sea cuando la pata está en transferencia :

Ec. 5.4:

$$T_3 = M_{BZ} = \left[\left(\frac{W_3}{2} + W_{S4} \right) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot (L_3 - b_4) \right] \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot \sin \theta_1 - F_4 \cdot (L_3 - b_4) - M_{M4}$$

Se puede notar del Capítulo IV (Cinemática del robot), durante todo el ciclo de movimiento de la pata, siempre la suma de los ángulos $\theta_2 + \gamma$ es:

$$90^\circ < \theta_2 + \gamma < 180^\circ$$



Gráfica 5.1 Relación de ángulos (θ_2), (γ) y ($\theta_2 + \gamma$).

Como puede observarse, las ecuaciones 5.1 , 5.2 y 5.3 dependen de los ángulos θ_1 , θ_2 y γ . Anteriormente se mencionó que para el análisis de fuerzas que actúan en el eslabón, en el plano XY, se considera el escalado vertical porque es la condición más desfavorable; por lo tanto, $\theta_1 = 90^\circ$. Los ángulos θ_2 y γ varían a medida que la pata del robot se mueve para ubicar su pie en su nuevo punto de apoyo; pero como se señaló en el Capítulo IV (Cinemática del Robot), estos ángulos están en función del desplazamiento S del pie del robot (Figura 4.8 y 4.9) . Por lo tanto las magnitudes de R_{BX} (Tabla 5.1), R_{BY} (Tabla 5.2) y el momento M_{BZ} (Tabla 5.3) varían con este desplazamiento S.

La Tabla 5.1, muestra los valores de R_{BX} , para las distintas posiciones (pata en transferencia):

Tabla 5.1 Componente R_{BX} .

Posición (S) [mm]	R_{BX} [Kg]
100	0,5393
110	0,6649
120	0,7849
130	0,9007
140	1,0131
150	1,1228
160	1,2304
170	1,3361
180	1,4405
190	1,5435
200	1,6456
210	1,7468
220	1,8473
230	1,9472
240	2,0466
250	2,1456
260	2,2443
270	2,3428
280	2,4412
290	2,5396
300	2,6383
Máximo	2,6383

La Tabla 5.2, muestra los valores de R_{BY} , para las distintas posiciones (pata en transferencia):

Tabla 5.2 Componente R_{BY} .

Posición (S) [mm]	R_{BY} [Kg]
100	1,2121
110	1,1869
120	1,1576
130	1,1245
140	1,0874
150	1,0466
160	1,0018
170	0,9529
180	0,8998
190	0,8422
200	0,7798
210	0,7124
220	0,6395
230	0,5605
240	0,4749
250	0,3817
260	0,2801
270	0,1685
280	0,045
290	-0,093
300	-0,25
Máximo	1,2121

La Tabla 5.3, muestra los valores de M_{BZ} , para las distintas posiciones (pata en transferencia):

Tabla 5.3 Momento M_{BZ} .

Posición (S) [mm]	M_{BZ} [Kg·mm]
100	213,518
110	209,887
120	205,669
130	200,889
140	195,555
150	189,666
160	183,209
170	176,166
180	168,512
190	160,215
200	151,233
210	141,518
220	131,009
230	119,631
240	107,291
250	93,8714
260	79,2209
270	63,1391
280	45,3513
290	25,4636
300	2,87513
Máximo	213,518

Los máximos valores de R_{BX} , R_{BY} y M_{BZ} se muestran en la tablas anteriores, son:

$$R_{BX} = 2,6383 \text{ [Kg]}$$

$$R_{BY} = 1,2121 \text{ [Kg]}$$

$$M_{BZ} = 213,518 \text{ [Kg} \cdot \text{mm]}$$

Comparando las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3, se tiene que los máximos valores de R_{BX} , R_{BY} y M_{BZ} no ocurren simultáneamente. El máximo valor de R_{BX} es cuando $S = 300 \text{ mm}$ (que de acuerdo con la Gráfica 5.1, corresponde a $\theta_2 + \gamma = 149,56^\circ$); mientras que el máximo valor de R_{BY} y M_{BZ} ocurre cuando $S = 100 \text{ mm}$ (que corresponde a $\theta_2 + \gamma = 100,15^\circ$).

Fuerza cortante y momento flector:

Empleando el método de las secciones:

Corte 1-1

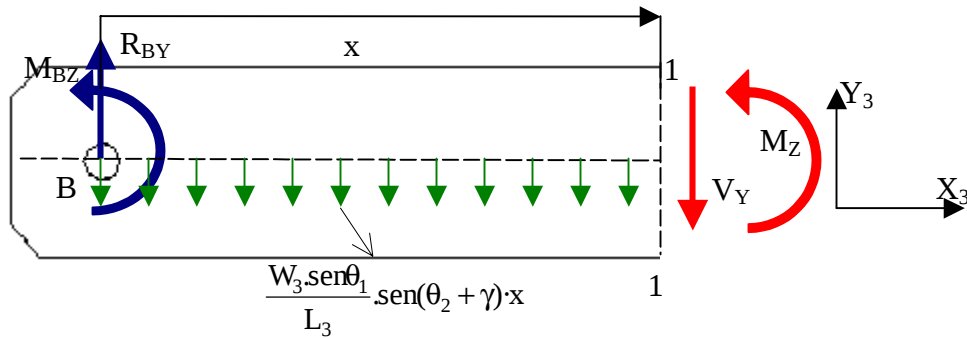


Figura 5.5 Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XY.

Fuerza cortante:

$$V_Y = R_{BY} - \frac{W_3}{L_3} \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot x \quad \text{Ec. 5.5}$$

Momento flector:

$$M_Z = -M_{BZ} + R_{BY} \cdot x - \frac{W_3 \cdot \text{sen} \theta_1}{2 \cdot L_3} \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.6}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (5.5) y (5.6) con los máximos valores de R_{BY} , M_{BZ} y evaluando también $\theta_2 + \gamma = 100,15^\circ$ y $\theta_1 = 90^\circ$, nos quedan la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de la sección del eslabón que se analice a x centímetros del punto B.

Así:

$$V_Y = 1,2121 - \frac{0,472}{170} \cdot \text{sen}(100,15^\circ) \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot x$$

$$V_Y = 1,2121 - 2,733 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.7}$$

$$M_Z = -213,518 + 1,2121 \cdot x - \frac{0,472 \cdot \text{sen}90^\circ}{2 \cdot 170} \cdot \text{sen}(100,15^\circ) \cdot x^2$$

$$M_Z = -213,518 + 1,2121 \cdot x - 1,366 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.8}$$

Donde $0 \leq x \leq (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm}$

Corte 2-2

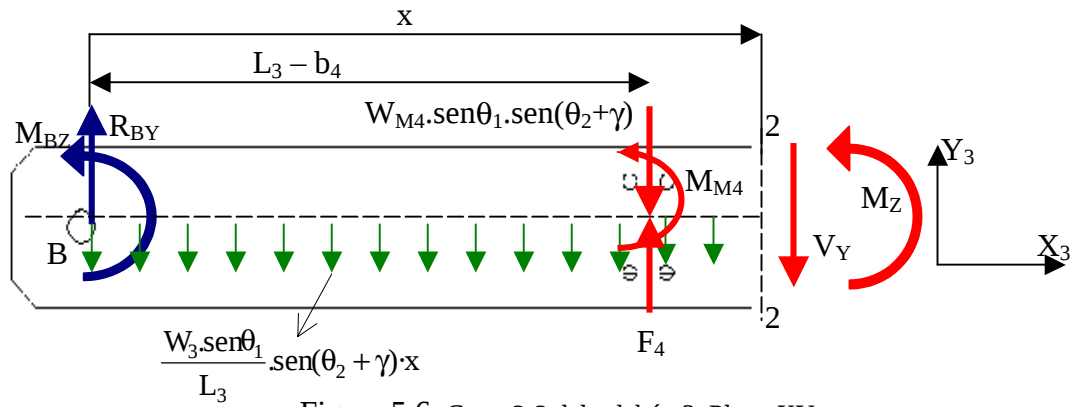


Figura 5.6 Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XY.

Aquí, se puede obviar la expresión “sen (θ_1)”, ya que sen (90°) = 1

Fuerza cortante:

$$V_Y = R_{BY} + F_4 - (W_{M4} + \frac{W_3}{L_3} \cdot x) \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \quad \text{Ec. 5.9}$$

Momento flector:

Ec. 5.10 :

$$M_Z = R_{BY} \cdot x - M_{BZ} + [(F_4 - W_{M4}) \cdot [x - (L_3 - b_4)] - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot x^2] \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) - M_{M4}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (5.9) y (5.10) los máximos valores de R_{BY} , M_{BZ} , M_{M4} y sustituyendo también $\theta_2 + \gamma = 100,15^\circ$ y $\theta_1 = 90^\circ$, nos quedan la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de la sección del eslabón que se analice a x centímetros del punto B.

Así:

$$V_Y = 1,2121 + 1,8 - (0,356 + \frac{0,472}{170} \cdot x) \cdot \text{sen}(100,15^\circ)$$

$$V_Y = 2,652 - 2,733 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.11}$$

$$M_Z = 1,2121 \cdot x - 213,518 + [(1,8 - 0,356) \cdot [x - (170 - 47,5)] - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2] \cdot \text{sen}(100,15^\circ) - 22,25 \cdot \text{sen}(100,15^\circ)$$

$$M_Z = -409,54 + 2,652 \cdot x - 1,366 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.12}$$

Donde $(L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$

Las Tablas (5.4 y 5.5), muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.7 y 5.11) y del momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.8 y 5.12) a lo largo del eslabón 3:

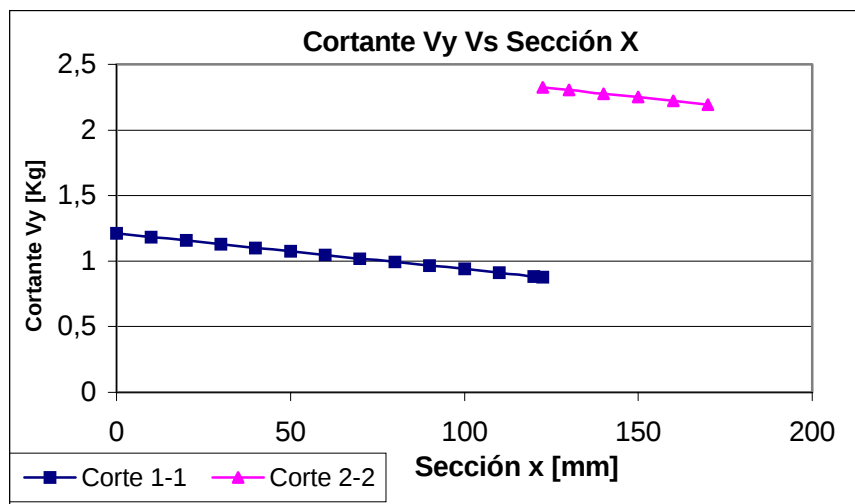
Tabla 5.4 Fuerza cortante V_Y .

Sección (x) [mm]	V_Y [Kg]
0	1,2121
10	1,1848
20	1,1574
30	1,1301
40	1,1028
50	1,0755
60	1,0481
70	1,0208
80	0,9935
90	0,9661
100	0,9388
110	0,9115
120	0,8841
122,5	0,8773
122,5	2,3252
130	2,3047
140	2,2774
150	2,2501
160	2,2227
170	2,1954
Máximo	2,1954

Tabla 5.5 Momento flector M_z

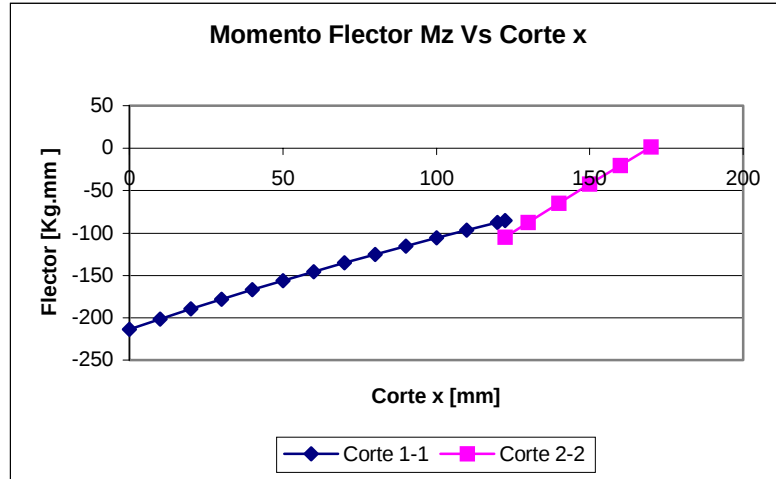
Sección (x) [mm]	M_z [Kg.mm]
0	-213,5
10	-201,5
20	-189,8
30	-178,4
40	-167,2
50	-156,3
60	-145,7
70	-135,4
80	-125,3
90	-115,5
100	-106
110	-96,72
120	-87,74
122,5	-85,53
122,5	-105,2
130	-87,85
140	-65,02
150	-42,46
160	-20,17
170	1,8396
Máximo	-213,5

Diagrama de Fuerza cortante:



Gráfica 5.2 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 3. Plano XY.

Diagrama de Momento flector:



Gráfica 5.3 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 3. Plano XY.

5.1.1.2 Plano X_3Z_3

Diagrama de cuerpo libre:

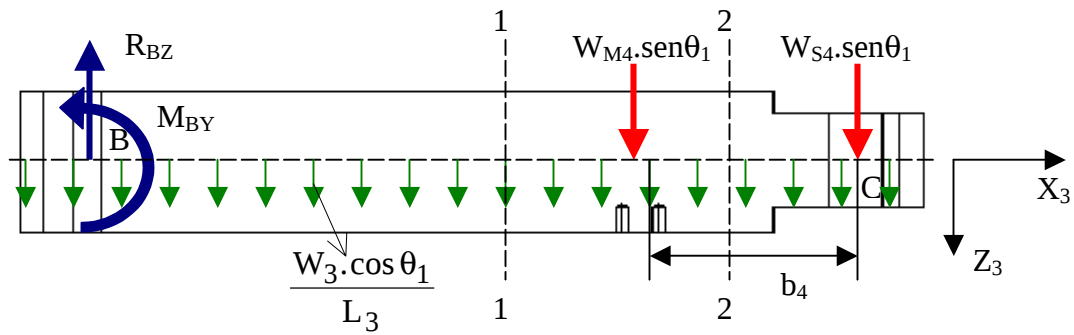


Figura 5.7 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XZ.

Por $\sum F_{Z_3} = 0$

$$-R_{BZ} + (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \cos \theta_1 = 0$$

$$R_{BZ} = (W_3 + W_{S4} + W_{M4}) \cdot \cos \theta_1$$

Ec. 5.13

Suma de momentos en B = 0 :

$$M_{BY} = \left[\left(\frac{W_3}{2} + W_{S4} \right) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot (L_3 - b_4) \right] \cdot \cos \theta_1 \quad \text{Ec. 5.14}$$

Las ecuaciones anteriores dependen del ángulo θ_1 que forma el eslabón 1 con el cuerpo del robot, pero aquí a diferencia del caso anterior; la condición más desfavorable se presenta cuando el robot se encuentra en posición de escalado horizontal ($\theta_1 = 0^\circ$), sustituyendo dimensiones en las ecuaciones 5.13 y 5.14, nos queda:

$$R_{BZ} = (0,472 + 2,232 + 0,356) \cdot \cos (0^\circ) = 3,06 \text{ Kg}$$

$$M_{BY} = \left[\left(\frac{0,472}{2} + 2,232 \right) \cdot 170 + 0,356 \cdot (170 - 47,5) \right] \cdot \cos (0^\circ) = 463,17 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Como se observa, cuando el robot está en posición de escalado horizontal y tiene la pata en transferencia; la componente R_{BZ} y el momento M_{BY} que sufre el eslabón 3 de esta pata, son constantes y no dependen de los ángulos θ_2 y γ .

Fuerza cortante y momento flector:

Corte 1-1:

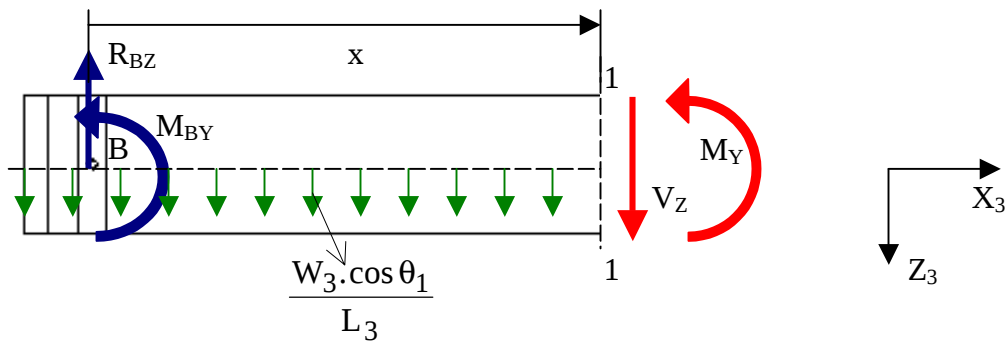


Figura 5.8 Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XZ.

Fuerza cortante:

$$V_Z = R_{BZ} - \frac{W_3 \cdot \cos \theta_1}{L_3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.15}$$

Momento Flector:

$$M_Y = -M_{BY} + R_{BZ} \cdot x - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot \cos \theta_1 \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.16}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 5.15 y 5.16 los valores de R_{BZ} y M_{BY} , nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de x .

$$V_Z = 3,06 - \frac{0,472 \cdot \cos(0^\circ)}{170} \cdot x$$

$$V_Z = 3,06 - 2,776 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.17}$$

$$M_Y = -463,17 + 3,06 \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \cos(0^\circ) \cdot x^2$$

$$M_Y = -463,17 + 3,06 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.18}$$

Donde $0 \leq x \leq (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm}$

Corte 2-2:

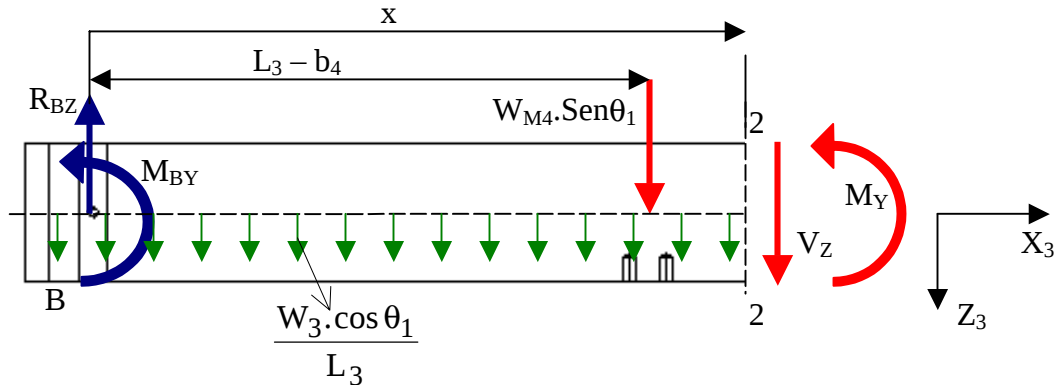


Figura 5.9 Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XZ.

Fuerza cortante:

$$V_Z = R_{BZ} - W_{M4} \cdot \cos\theta_1 - \frac{W_3}{L_3} \cdot \cos\theta_1 \cdot x \quad \text{Ec. 5.19}$$

Momento Flector:

$$M_Y = -M_{BY} + R_{BZ} \cdot x - W_{M4} \cdot \cos\theta_1 \cdot [x - (L_3 - b_4)] - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot \cos\theta_1 \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.20}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 5.19 y 5.20 los valores de R_{BZ} y M_{BY} , nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de x .

$$V_Z = 3,06 - 0,356 \cdot \cos(0^\circ) - \frac{0,472}{170} \cdot \cos(0^\circ) \cdot x$$

$$V_Z = 2,704 - 2,776 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.21}$$

$$M_Y = -462,17 + 3,06 \cdot x - 0,356 \cdot \cos(0^\circ) \cdot [x - (170 - 47,5)] - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \cos(0^\circ) \cdot x^2$$

$$M_Y = -418,56 + 2,704 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.22}$$

Donde $(L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$

Las Tablas 5.6 y 5.7, muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.17 y 5.21) y del momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.18 y 5.22) a lo largo del eslabón 3:

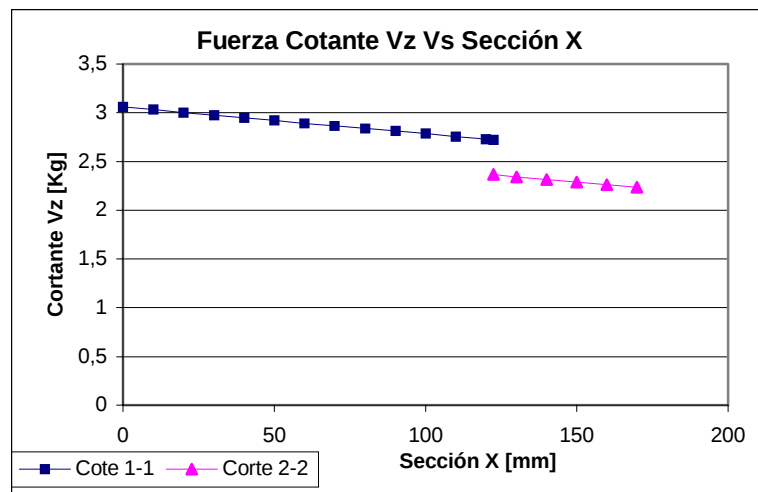
Tabla 5.6 Fuerza cortante V_Z .

Sección (x) [mm]	V_Z [Kg]
0	3,06
10	3,0322
20	3,0045
30	2,9767
40	2,949
50	2,9212
60	2,8934
70	2,8657
80	2,8379
90	2,8102
100	2,7824
110	2,7546
120	2,7269
122,5	2,7199
122,5	2,3639
130	2,3431
140	2,3154
150	2,2876
160	2,2598
170	2,2321
Máximo	3,06

Tabla 5.7 Momento flector M_Y .

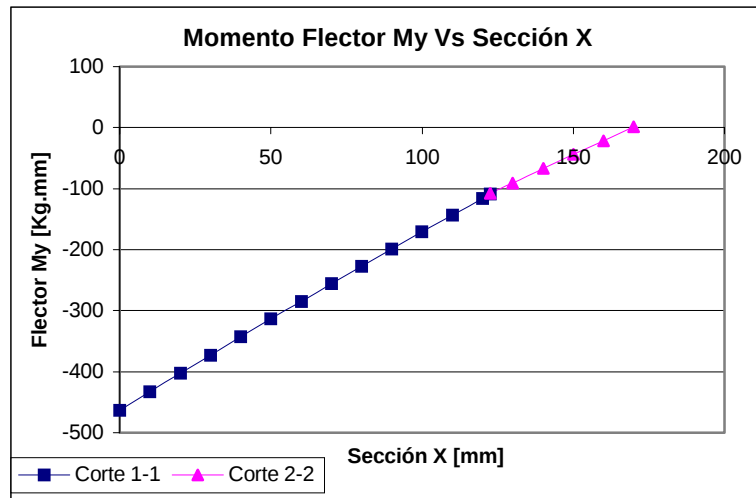
Sección (x) [mm]	M_Y [Kg·mm]
0	-463,2
10	-432,7
20	-402,5
30	-372,6
40	-343
50	-313,6
60	-284,6
70	-255,8
80	-227,3
90	-199
100	-171,1
110	-143,4
120	-116
122,5	-109,1
122,5	-109,1
130	-90,5
140	-67,2
150	-44,19
160	-21,45
170	1,0068
Máximo	-463,2

Diagrama de Fuerza cortante.



Gráfica 5.4 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 3. Plano XZ

Diagrama de Momento flector:



Gráfica 5.5 Diagrama de Momento Flector del eslabón 3. Plano XZ

5.1.2 Solicitaciones en el eslabón 2

5.1.2.1 Plano X_2Y_2

Diagrama de cuerpo libre:

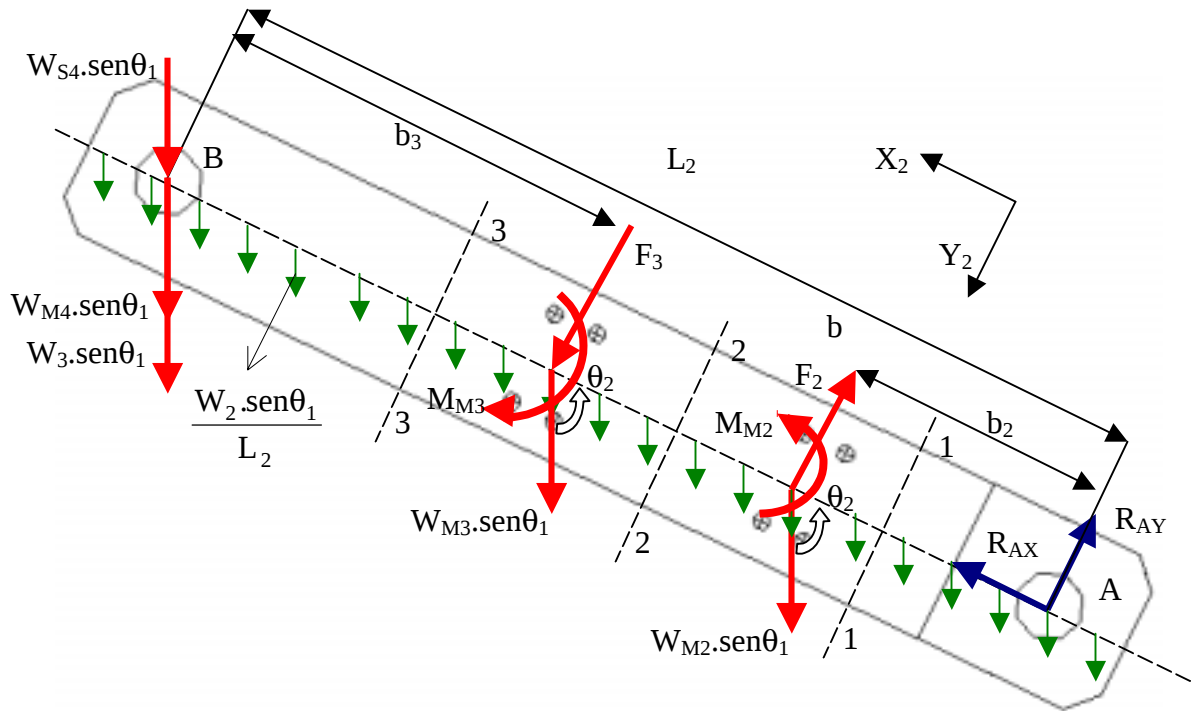


Figura 5.10 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY

Donde:

W_{M2} = peso del motor 2 = 0,356 Kg.

W_{M3} = peso del motor 3 = 0,356 Kg.

W_2 = peso del eslabón 2 = 0,472 Kg.

L_2 = longitud del eslabón 2 = 170 mm.

b_2 = brazo de aplicación de la fuerza F_2 = 47,5 mm

b_3 = brazo de aplicación de la fuerza F_3 = 74,5 mm

M_{M3} = momento flector del motor 3

$$= \frac{\text{Longitud del motor}}{2} \cdot W_{M3} \cdot \text{sen}\theta_2 = \frac{125 \text{ mm}}{2} \cdot 0,356 \text{ Kg} \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$= 22,25 \cdot \text{sen}\theta_2 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

M_{M2} = momento flector del motor 2

$$= \frac{\text{Longitud del motor}}{2} \cdot W_{M2} \cdot \text{sen}\theta_2 = \frac{125 \text{ mm}}{2} \cdot 0,356 \text{ Kg} \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$= 22,25 \cdot \text{sen}\theta_2 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

De manera semejante al caso anterior (fuerza F_4 actuante en el plano XY del eslabón 3), las fuerzas F_2 y F_3 son fuerzas producidas por los tornillos que unen las placas L (que soportan los motores 2 y 3) al eslabón 2 y producen en él momento flector y momentos torsores.

La fuerza F_3 se puede obtener fácilmente, ya que a que a la salida del moto reductor 3 hay una relación de engranes cónicos 4: 1. Se tiene entonces que de ese engranaje, la Rueda hace un torque T_3 que varía según la ecuación 5.4; mientras que el Piñón hace un torque

$$T_{SR3} = \frac{T_3}{4} \quad \text{Ec. 5.23}$$

Sustituyendo la ecuación 5.4 en la 5.23 se obtiene:

$$T_{SR3} = \frac{\left[\left(\frac{W_3}{2} + W_{S4} \right) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot (L_3 - b_4) \right] \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \cdot \text{sen} \theta_1 - F_4 \cdot (L_3 - b_4) - M_{M4}}{4} \quad \text{Ec. 5.24}$$

Finalmente, la fuerza F_3 a la que se hizo referencia anteriormente se puede obtener dividiendo el torque T_{SR3} entre la distancia (r_3) que hay desde el eje del motor hasta la cara del eslabón que contiene a la placa L donde va este motor (Figura 5.11).

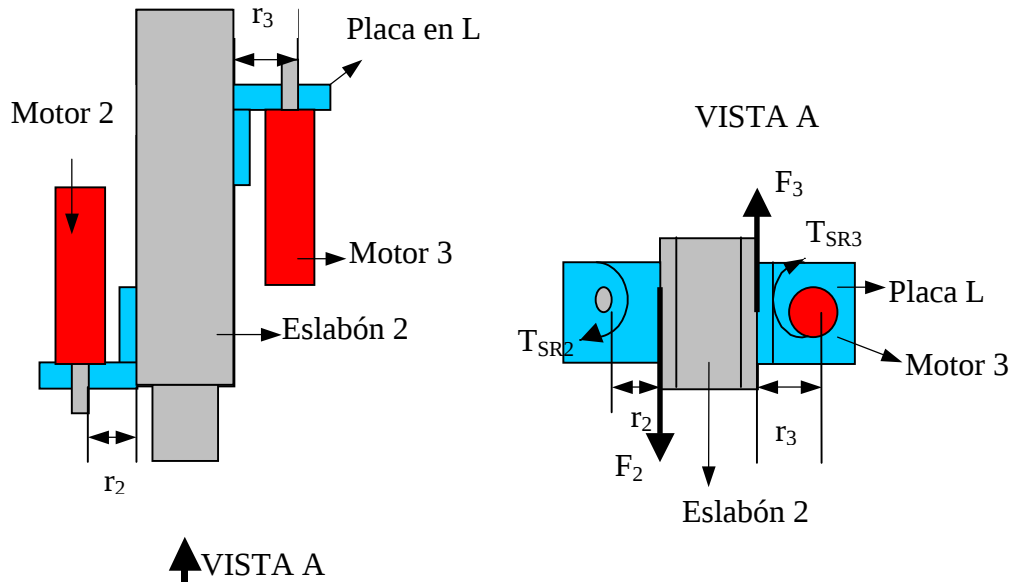


Figura 5.11 Fuerzas F_2 y F_3 que actúan sobre el eslabón 2

Ec. 5.25

$$F_3 = \frac{T_{SR3}}{r_3} = \frac{\left[\left(\frac{W_3}{2} + W_{S4} \right) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot (L_3 - b_4) \right] \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot \sin \theta_1 - F_4 \cdot (L_3 - b_4) - M_{M4}}{24\text{mm}}$$

Como se observa en la ecuación 5.25, F_3 es variable y depende únicamente de los ángulos θ_2 y γ , que a su vez dependen de la posición en que se encuentre la pata respecto al cuerpo, es decir, del desplazamiento S del pie del robot. La Tabla 5.8 muestra esta variación en función del desplazamiento S .

Tabla 5.8 F_3 en función de S.

Posición (S) [mm]	F_3 [Kg]
100	2,2241
110	2,1863
120	2,1424
130	2,0926
140	2,0370
150	1,9757
160	1,9084
170	1,8351
180	1,7553
190	1,6689
200	1,5753
210	1,4741
220	1,3647
230	1,2462
240	1,1176
250	0,9778
260	0,8252
270	0,6577
280	0,4724
290	0,2652
300	0,0299
Máximo	2,2241

Obsérvese que el máximo valor de F_3 es 2,2241 Kg y se produce para un ángulo $\theta_2 + \gamma = 100,15^\circ$.

Por otra parte, de la Figura 5.10, haciendo suma de fuerzas en dirección $X_2 = 0$, se obtiene:

$$\Sigma F_{X_2} = 0$$

$$R_{AX} - (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = 0$$

$$R_{AX} = (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \quad \text{Ec. 5.26}$$

Por $\Sigma F_{Y_2} = 0$

$$- R_{AY} + (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 - F_2 + F_3 = 0$$

$$R_{AY} = (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 - F_2 + F_3 \quad \text{Ec. 5.27}$$

Por suma de momentos en A = 0:

$$\left[\left(\frac{W_2}{2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} \right) \cdot L_2 + W_{M2} \cdot b_2 + W_{M4} \cdot (L_2 - b_3) \right] \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + F_3 \cdot (L_2 - b_3) - F_2 \cdot b_2 - M_{M3} + M_{M2} = 0 \quad \text{Ec. 5.28}$$

Los momentos flectores producidos por los motores, son de igual magnitud pero en sentido contrario ($M_{M2} = M_{M3}$); por lo tanto se anulan.

De esta ecuación 5.28 se conocen todas las magnitudes, excepto F_2 y F_3 . No obstante, F_3 está expresado según la ecuación 5.25. Sustituyendo 5.25 en 5.28, se puede despejar F_2 .

$$F_2 = \frac{\left[\left(\frac{W_2}{2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} \right) \cdot L_2 + W_{M2} \cdot b_2 + W_{M4} \cdot (L_2 - b_3) \right] \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + F_3 \cdot (L_2 - b_3)}{b_2} \quad \text{Ec. 5.29}$$

Es importante recordar que esta fuerza F_2 es proporcionada por el motor 2 a través de su relación de engranes. Se observa que las ecuaciones 5.26 , 5.27 y 5.29 dependen de los ángulos θ_1 , θ_2 y γ . Ya se dijo que $\theta_1 = 90^\circ$, porque para el análisis de fuerzas y momentos en el plano XY (en este caso X_2Y_2) se considera el escalado vertical; de tal manera que queda sólo en función de θ_2 y γ ; pero como se mencionó anteriormente, estos ángulos varían con el desplazamiento S del pie del robot. Las Tablas 5.9, 5.10 y 5.11 muestran la variación de estas magnitudes con S, para R_{AX} , R_{AY} y F_2 , respectivamente:

Tabla 5.9 Componente R_{AX} .

Posición (S) [mm]	R_{AX} [Kg]
100	1,7312
110	1,8083
120	1,8927
130	1,9829
140	2,0776
150	2,1758
160	2,2770
170	2,3806
180	2,4861
190	2,5933
200	2,7018
210	2,8115
220	2,9222
230	3,0336
240	3,1457
250	3,2583
260	3,3713
270	3,4846
280	3,5979
290	3,7113
300	3,8243
Máximo	3,8243

Tabla 5.10 Componente R_{AY}

Posición (S) [mm]	R_{AY} [Kg]
100	-10,12
110	-10,01
120	-9,884
130	-9,739
140	-9,578
150	-9,401
160	-9,206
170	-8,994
180	-8,763
190	-8,513
200	-8,243
210	-7,95
220	-7,633
230	-7,29
240	-6,918
250	-6,514
260	-6,072
270	-5,588
280	-5,051
290	-4,451
300	-3,77
Máximo	-10,12

Tabla 5.11 Fuerza F_2

Posición (S) [mm]	F_2 [Kg]
100	16,22
110	16,037
120	15,825
130	15,584
140	15,316
150	15,02
160	14,696
170	14,342
180	13,958
190	13,542
200	13,091
210	12,603
220	12,076
230	11,504
240	10,885
250	10,211
260	9,4756
270	8,6679
280	7,7745
290	6,7752
300	5,6397
Máximo	16,22

Los máximos valores de R_{AX} , R_{AY} y F_2 son:

$$R_{AX} = 3,8243 \text{ Kg}$$

$$R_{AY} = -10,12 \text{ Kg}$$

$$F_2 = 16,22 \text{ Kg}$$

Comparando las Tablas 5.9, 5.10 y 5.11, se tiene que los máximos valores de R_{AX} , R_{AY} y F_2 no ocurren simultáneamente. El máximo valor de R_{AX} es cuando $S = 100$ mm (que de acuerdo con la Gráfica 5.1, corresponde a $\theta_2 = 65,92^\circ$); mientras que el máximo valor de R_{AY} y F_2 ocurre cuando $S = 300$ mm (que corresponde a $\theta_2 = 25,69^\circ$).

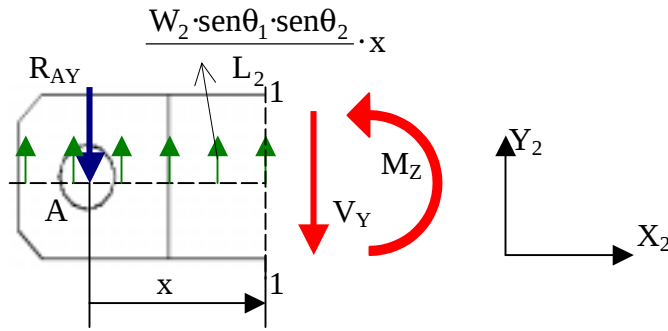
Fuerza cortante y momento flector:Corte 1-1

Figura 5.12 Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XY

Fuerza cortante:

$$V_Y = -R_{AY} + \frac{W_2}{L_2} \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot x \quad \text{Ec. 5.30}$$

Momento flector:

$$M_Z = -R_{AY} \cdot x + \frac{W_2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.31}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 5.30 y 5.31, el máximo valor de R_{AY} y $\theta_2 = 65,92^\circ$, nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de x .

$$V_Y = 10,12 + \frac{0,472}{170} \cdot \text{sen}(65,92) \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot x$$

$$V_Y = 10,12 + 2,53 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.32}$$

$$M_Z = 10,12 \cdot x + \frac{0,472 \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \text{sen}(65,92)}{2 \cdot 170} \cdot x^2$$

$$M_Z = 10,12 \cdot x + 1,267 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.33}$$

Donde $0 \leq x \leq b_2 = 47,5 \text{ mm}$

Corte 2-2

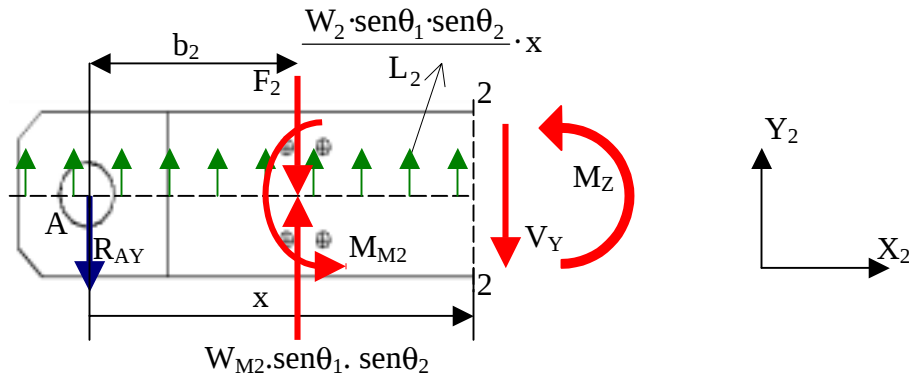


Figura 5.13 Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XY

Fuerza cortante:

$$V_Y = -R_{AY} - F_2 + W_2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 + \frac{W_2}{L_2} \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot x \quad \text{Ec. 5.34}$$

Momento flector:

Ec. 5.35:

$$M_Z = -R_{AY} \cdot x + (-F_2 + W_2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2) \cdot (x - b_2) + \frac{W_2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 - M_{M2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 5.34 y 5.35 los máximos valores de R_{AY} , F_2 y $\theta_2 = 65,92^\circ$, nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de x .

$$V_Y = 10,12 - 16,22 + 0,472 \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \text{sen}(65,92^\circ) + \frac{0,472}{170} \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \text{sen}(65,92^\circ) \cdot x$$

$$V_Y = -5,669 + 2,53 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.36}$$

$$M_Z = 10,12 \cdot x + (-16,22 + 0,472 \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \text{sen}(65,92^\circ)) \cdot (x - 47,5) + \frac{0,472 \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \text{sen}(65,92^\circ)}{2 \cdot 170} \cdot x^2 - 22,25 \cdot \text{sen}(65,92^\circ)$$

$$M_Z = 729,66 - 5,669 \cdot x + 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.37}$$

Donde $b_2 = 47,5 \text{ mm} \leq x \leq (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm}$

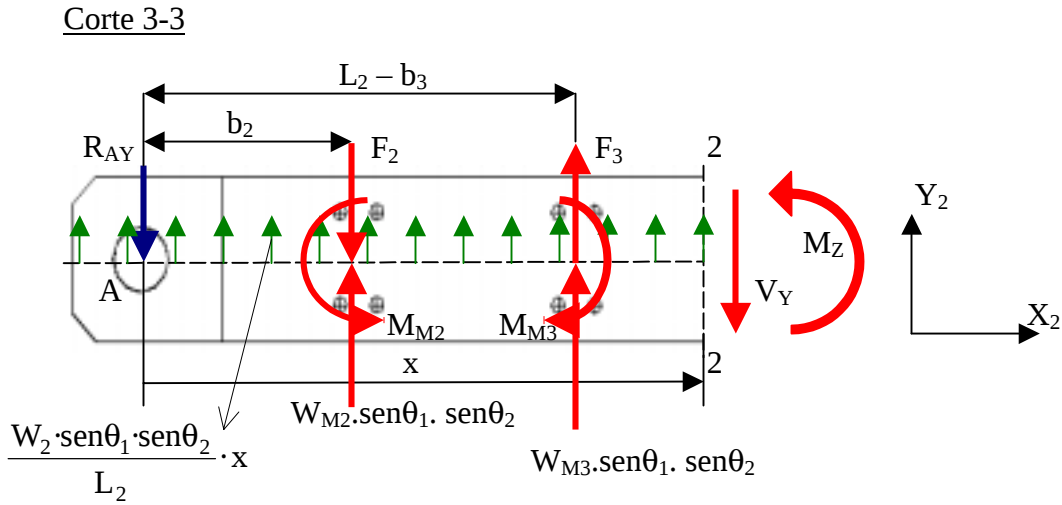


Figura 5.14 Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XY

Fuerza cortante:

$$V_Y = -R_{AY} - F_2 + F_3 + (W_{M2} + W_{M3}) \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 + \frac{W_2}{L_2} \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot x \quad \text{Ec. 5.38}$$

Momento flector:

$$M_Z = -R_{AY} \cdot x + (-F_2 + W_2 \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) \cdot (x - b_2) + (F_3 + W_{M3} \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) \cdot [x - (L_2 - b_3)] + \frac{W_2 \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.39}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 5.38 y 5.39 los máximos valores de R_{AY} , F_2 , F_3 y $\theta_2 = 65,92^\circ$, nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de x .

$$V_Y = 10,12 - 16,22 + 2,22 + (0,356 + 0,356) \cdot \sin(90^\circ) \cdot \sin(65,92^\circ) + \frac{0,472}{170} \cdot \sin(90^\circ) \cdot \sin(65,92^\circ) \cdot x$$

$$V_Y = -3,229 + 2,53 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.40}$$

$$M_Z = 10,12 \cdot x + (-16,22 + 0,472 \cdot \sin(90^\circ) \cdot \sin(65,92^\circ)) \cdot (x - 47,5) + (2,22 + 0,356 \cdot \sin(90^\circ) \cdot \sin(65,92^\circ)) \cdot [x - (170 - 74,5)] + \frac{0,472 \cdot \sin(90^\circ) \cdot \sin(65,92^\circ)}{2 \cdot 170} \cdot x^2$$

$$M_Z = 506,931 - 3,229 \cdot x + 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.41}$$

$$\text{Donde } (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$$

Las Tablas 5.12 y 5.13 muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.32, 5.36 y 5.40) y del momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.33, 5.37 y 5.41) a lo largo del eslabón 3:

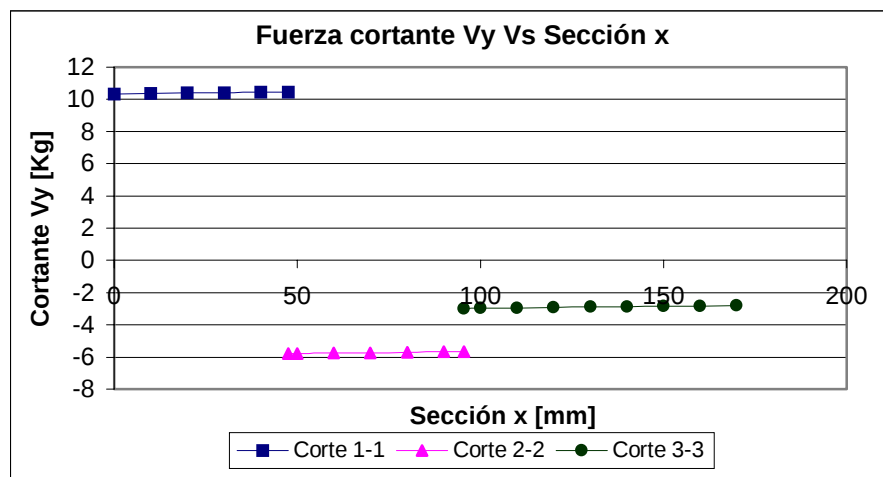
Tabla 5.12 Fuerza cortante V_Y

Sección (x) [mm]	V_Y [Kg]
0	10,120
10	10,145
20	10,171
30	10,196
40	10,221
47,5	10,240
47,5	-5,549
50	-5,543
60	-5,517
70	-5,492
80	-5,467
90	-5,441
95,5	-5,427
95,5	-2,987
100	-2,976
110	-2,951
120	-2,925
130	-2,900
140	-2,875
150	-2,850
160	-2,824
170	-2,799
Máximo	10,12

Tabla 5.13 Momento flector M_z

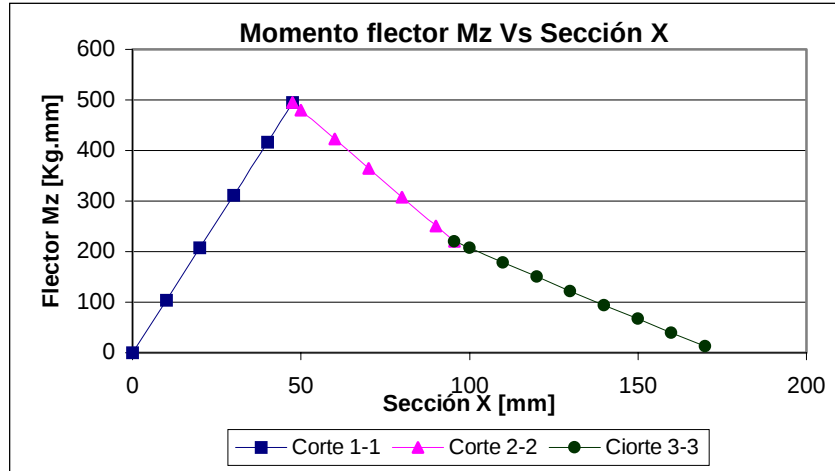
Sección (x) [mm]	M_z [Kg.mm]
0	0
10	101,33
20	202,91
30	304,74
40	406,83
47,5	483,56
47,5	483,56
50	449,36
60	394,06
70	339,00
80	284,2,0
90	229,66
95,5	199,76
95,5	210,05
100	196,63
110	166,99
120	137,60
130	108,46
140	79,567
150	50,931
160	22,547
170	-5,585
Máximo	483,56

Diagrama de Fuerza cortante.



Gráfica 5.6 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 2. Plano XY

Diagrama de Momento flector.



Gráfica 5.7 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 2. Plano XY

5.1.2.2 Plano X_2Z_2

Diagrama de cuerpo libre:

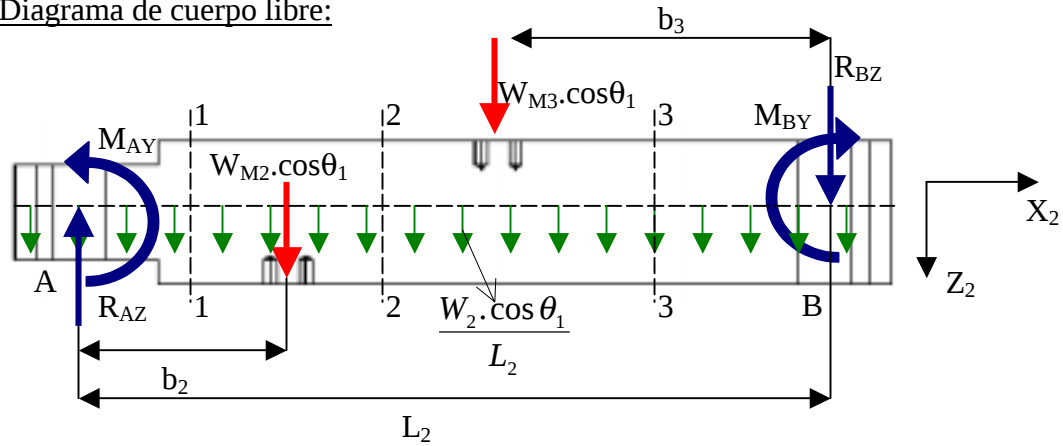


Figura 5.15 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XZ

Por $\sum F_{Z_A} = 0$:

$$- R_{AZ} + (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \cos \theta_1 = 0$$

$$R_{AZ} = (W_2 + W_{M2} + W_3 + W_{S4} + W_{M3} + W_{M4}) \cdot \cos \theta_1 \quad \text{Ec. 5.43}$$

Por suma de momentos en A = 0:

$$M_{AY} = \left[\left(\frac{W_2}{2} + W_3 + W_{S4} + W_{M4} \right) \cdot L_2 + W_{M2} \cdot b_2 + W_{M3} \cdot (L_2 - b_3) \right] \cdot \cos \theta_1 + M_{BY} \quad \text{Ec. 5.44}$$

Este momento M_{AY} es proporcionado, a través de una relación de engranes cónicos por el motor 1, o sea cuando la pata está en transferencia :

$$T_1 = M_{AY} = \left[\left(\frac{W_2}{2} + W_3 + W_{S4} + W_{M4} \right) \cdot L_2 + W_{M2} \cdot b_2 + W_{M3} \cdot (L_2 - b_3) \right] \cdot \cos \theta_1 + M_{BY}$$

Ec. 5.45

Tomando $\theta_1 = 0^\circ$ y sustituyendo dimensiones en las ecuaciones 5.43 y 5.44, nos queda:

$$R_{AZ} = (0,472 + 0,356 + 0,472 + 2,232 + 0,356 + 0,356) \cdot \cos(90^\circ) = 4,244 \text{ Kg}$$

$$M_{AY} = \left[\left(\frac{0,472}{2} + 0,472 + 2,232 + 0,356 \right) \cdot 170 + 0,356 \cdot 170 + 0,356 \cdot (170 - 74,5) \right] \cdot$$

$$\cos(0^\circ) + 463,17 = 1074,4 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Fuerza cortante y momento flector.

Corte 1-1

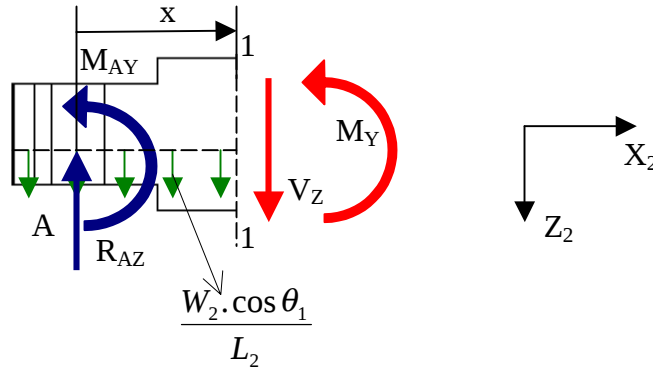


Figura 5.16 Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza cortante:

$$V_Z = R_{AZ} - \left(\frac{W_2 \cdot \cos \theta_1}{L_2} \right) \cdot x \quad \text{Ec. 5.46}$$

Momento flector:

$$M_Y = R_{AZ} \cdot x - \frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot \cos \theta_1 \cdot x^2 - M_{AY} \quad \text{Ec. 5.47}$$

Sustituyendo $\theta_1 = 0^\circ$ y los valores de R_{AZ} y M_{AY} , nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de la longitud x . Así:

$$V_Z = 4,244 - \left(\frac{0,472}{170} \cos(0^\circ) \right) \cdot x$$

$$V_Z = 4,244 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.48}$$

$$M_Y = 4,244 \cdot x - \left(\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \cos(0^\circ) \right) \cdot x^2 - 1074,4$$

$$M_Y = -1074,4 + 4,244 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.49}$$

Donde $0 \leq x \leq b_2 = 47,5 \text{ mm}$

Corte 2-2

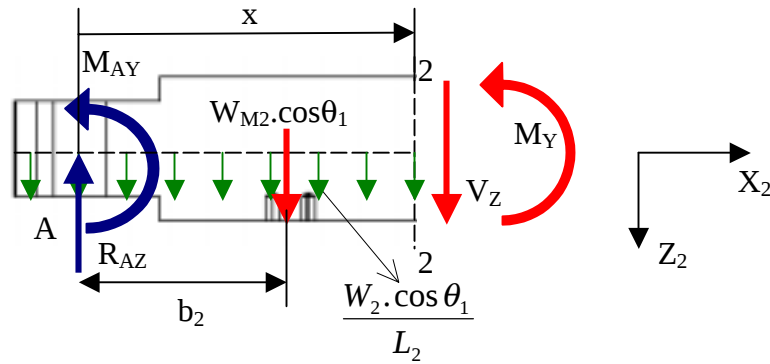


Figura 5.17 Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza cortante:

$$V_Z = R_{AZ} - W_{M2} \cdot \cos \theta_1 - \frac{W_2 \cdot \cos \theta_1}{L_2} \cdot x \quad \text{Ec. 5.50}$$

Momento flector:

$$M_Y = R_{AZ} \cdot x - \left[\frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 + W_{M2} \cdot (x - b_2) \right] \cdot \cos \theta_1 - M_{AY} \quad \text{Ec. 5.51}$$

Sustituyendo $\theta_1 = 0^\circ$ y los valores de R_{AZ} y M_{AY} , nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de la longitud x .

$$V_Z = 4,244 - 0,356 \cdot \cos(0^\circ) - \frac{0,472 \cdot \cos(0^\circ)}{170} \cdot x$$

$$V_Z = 3,888 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.52}$$

$$M_Y = 4,244 \cdot x - \left[\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 + 0,356 \cdot (x - 47,5) \right] \cdot \cos(0^\circ) - 1074,4$$

$$M_Y = -1057,49 + 3,888 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.53}$$

Donde $b_2 = 47,5 \text{ mm} \leq x \leq (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm}$

Corte 3-3

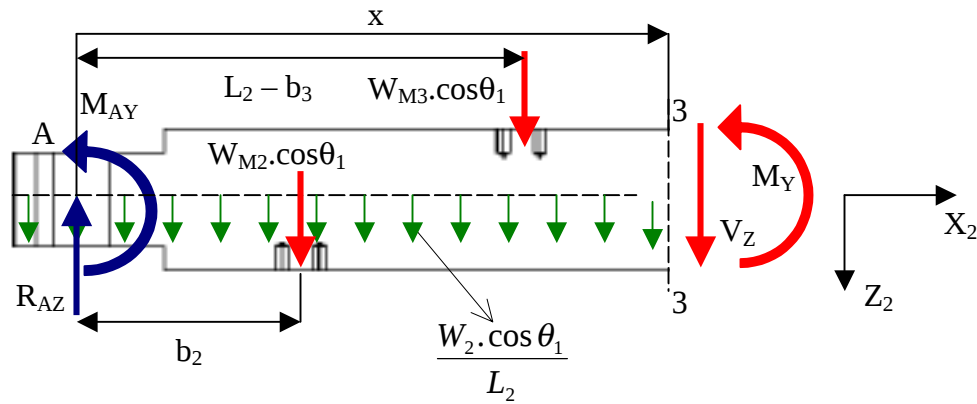


Figura 5.18 Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza cortante:

$$V_Z = R_{AZ} - (W_{M2} + W_{M3}) \cdot \cos \theta_1 - \frac{W_2 \cdot \cos \theta_1}{L_2} \cdot x \quad \text{Ec. 5.54}$$

Momento flector:

$$M_Y = R_{AZ} \cdot x - \left[\frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 + W_{M2} \cdot (x - b_2) + W_{M3} \cdot (x - (L_2 - b_3)) \right] \cdot \cos \theta_1 - M_{AY}$$

Ec. 5.55

Sustituyendo $\theta_1 = 0^\circ$ y los valores de R_{AZ} y M_{AY} , nos queda la fuerza cortante y el momento flector sólo en función de la longitud x .

$$V_Z = 4,244 - (0,356 + 0,356) \cdot \cos(0^\circ) - \frac{0,472 \cdot \cos(0^\circ)}{170} \cdot x$$

$$V_Z = 3,532 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.56}$$

$$M_Y = 4,244 \cdot x - \left[\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 + 0,356 \cdot (x - 47,5) + 0,356 \cdot (x - (170 - 74,5)) \right] \cdot \cos(0^\circ) - 1074,4$$

$$M_Y = -1091,488 + 3,532 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.57}$$

Donde $(L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm} \leq x \leq L_2 = 170 \text{ mm}$

Las Tablas 5.14 y 5.15 muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.48, 5.52 y 5.56) y del momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.49, 5.53 y 5.57) a lo largo del eslabón 2:

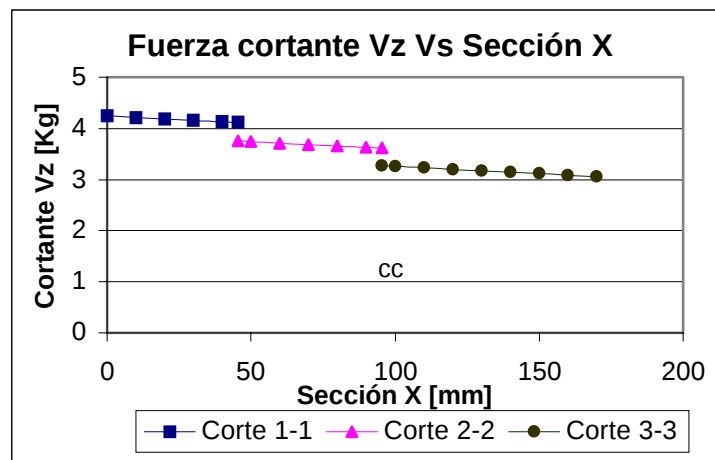
Tabla 5.14 Fuerza cortante V_Z

Sección (x) [mm]	V_Z [Kg]
0	4,244
10	4,2163
20	4,1886
30	4,1609
40	4,1332
47,5	4,118
47,5	3,754
50	3,7415
60	3,7138
70	3,6861
80	3,6584
90	3,6307
95,5	3,6155
95,5	3,2675
100	3,255
110	3,2273
120	3,1996
130	3,1719
140	3,1442
150	3,1165
160	3,0888
170	3,0611
Máximo	4,24

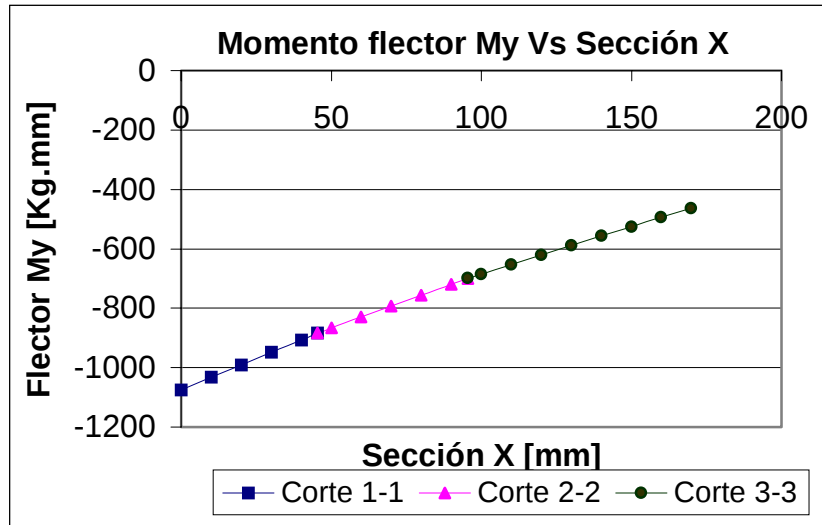
Tabla 5.15 Momento flector M_Y

Sección (x) [mm]	M_Y [Kg·mm]
0	-1074
10	-1032
20	-990,1
30	-948,3
40	-906,9
47,5	-884,2
47,5	-884,2
50	-867
60	-829,7
70	-792,7
80	-756
90	-719,5
95,5	-699,6
95,5	-698,8
100	-684,2
110	-651,8
120	-619,6
130	-587,8
140	-556,2
150	-524,9
160	-493,9
170	-463,2
Máximo	-1074

Diagrama de Fuerza cortante.



Gráfica 5.8 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 2. Plano XZ.

Diagrama de Momento Flector

Gráfica 5.9 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 2. Plano XZ.

Es importante destacar que en el análisis de fuerzas y momentos, actuantes en este eslabón 2, también aparecen momentos torsores producto de la “tendencia a la rotación” que se manifiestan en los elementos de sujeción (véase placas en L de la Figura 5.11) de los motores 2 y 3. Estos momentos torsores no se representan en los planos XY ni XZ; mas bien aparecen en el plano YZ del eslabón, pero se analizarán mejor cuando se evalúe el esfuerzo cortante al que está sometido éste eslabón.

5.2 Cuerpo en movimiento.

Cuando el cuerpo se mueve, las 4 patas deben estar firmemente apoyadas. Sin embargo, la condición más crítica se presenta cuando el robot sólo está apoyado en tres patas mientras realiza la transferencia de la otra pata. En este instante, el cuerpo está quieto y los motores (recordando que son motores de posición) hacen que las articulaciones queden fijas, o sea que no haya movimiento relativo entre los eslabones que componen las tres patas en apoyo, lo que significa que el mecanismo se convierte temporalmente en una estructura y el uso de las ecuaciones de la estática para el análisis de las fuerzas actuantes en los eslabones es perfectamente válido.

Como se observa en la Figura 5.19, para facilitar los cálculos de las componentes normales (R_{PN} y R_{QN}) de las reacciones en P y en Q, se puede suponer que el peso total del robot $W_{\text{TOTAL DEL ROBOT}}$ (35 Kg.) actúa a una distancia H. Habría un margen de error despreciable ya que el elemento que mas aporta peso es la carga que debe llevar el robot (12 Kg.); además los únicos elementos cuyo centro de gravedad, con respecto a la pared, sobrepasa esta altura H son los motores que generan el movimiento entre los eslabones 2 y 3; y estos motores pesan muy poco (356 gr.) en comparación con la carga. Incluso todos los demás elementos tienen su centro de gravedad por debajo de esta altura. Este razonamiento beneficia el diseño.

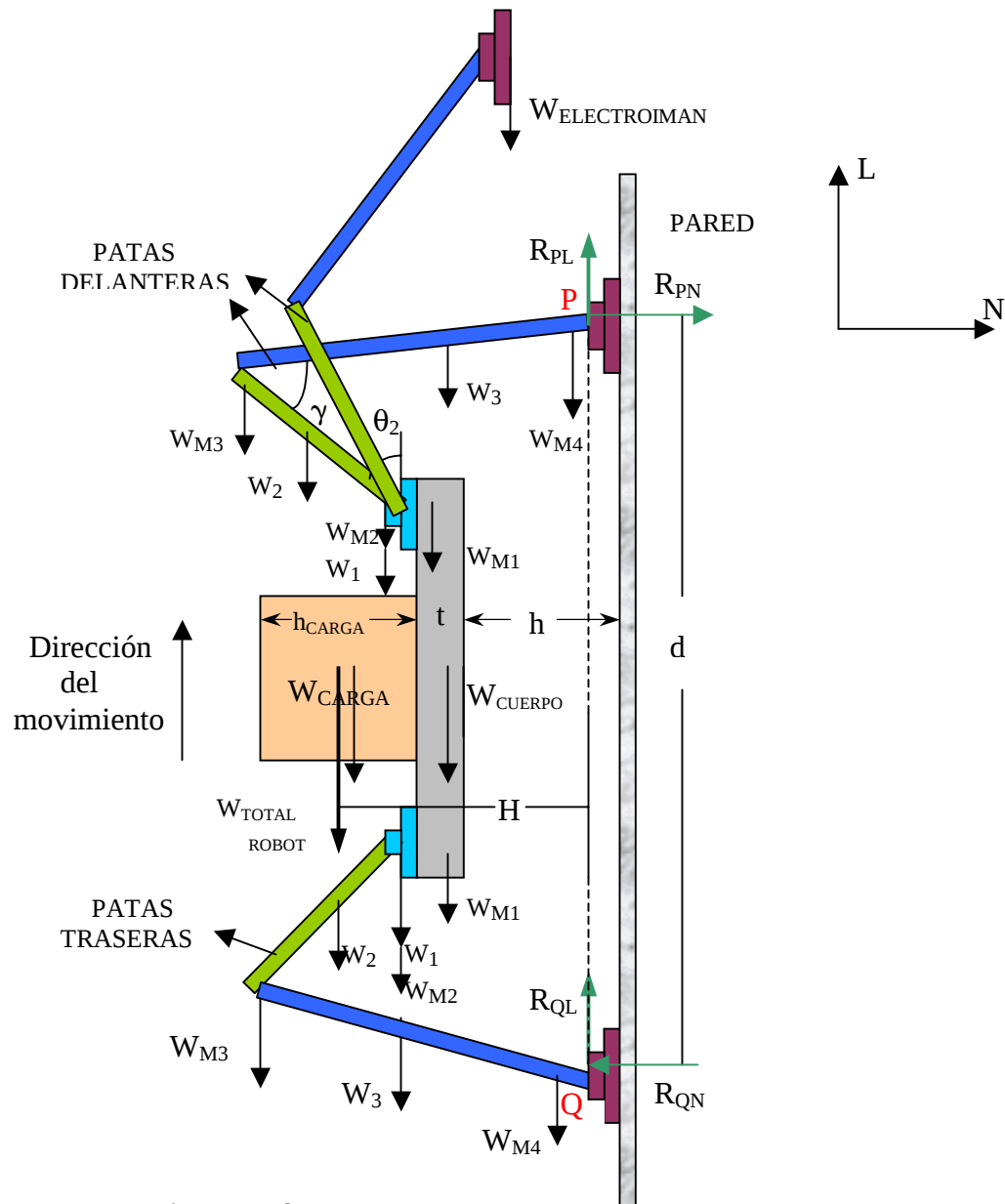


Figura 5.19 Fuerzas actuantes durante el movimiento del cuerpo

Ahora bien, $H = h_{CARGA} + t + h$ Donde:

h = altura del cuerpo del robot hasta la línea que une los puntos P y Q. Esta altura es aproximadamente igual a la altura del cuerpo a la pared. Esta altura se debe mantener constante en 50 milímetros (es una condición de diseño) durante todo el

desplazamiento del robot. Incluso cuando esté realizando la transferencia de una de sus patas.

t = espesor de la placa (cuerpo del robot). Es igual a 5 milímetros.

h_{CARGA} = altura máxima permitida de la carga. Como se mencionó en el “Capítulo 3 Diseño Conceptual”, no debe exceder esta altura a los 120 milímetros.

Como se dijo anteriormente, la condición más crítica se presenta cuando el robot sólo está apoyado en tres patas, mientras realiza la transferencia de la restante. Si la pata restante que realiza la transferencia es una pata delantera; entonces en ese momento los electroimanes de la pata delantera que queda en apoyo tienen que hacer la suficiente fuerza magnética para evitar el volcamiento del robot; ya que, por efecto de la carga y su propio peso, tiende a girar haciendo pivot en las dos patas traseras. Por estas razones, la dirección y sentido de la componente normal a la pared (R_{PN}) de la pata delantera en apoyo es como indica la Figura 5.19, lo que significa que eslabón 3 de esta pata está sometido a tracción.

Si se presenta la situación contraria, es decir que el robot esté realizando la transferencia de una de las patas traseras, la única pata trasera que quede en apoyo estará sometida a compresión, lo que se traduce en un beneficio mayor para el apoyo, ya que además de la fuerza electromagnética tendrá un empuje adicional por la compresión. Todo lo dicho anteriormente se cumple no sólo para el escalado o desplazamiento vertical del robot (que es el que indica la figura), sino también para el desplazamiento horizontal e inclinado; siendo el horizontal el más desfavorable, ya que en este caso la distancia “ d ” que se observa en la Figura 5.19 es la mínima posible, e incluso menor al largo del cuerpo del robot (460 mm).

Entonces, del diagrama de cuerpo libre de la “estructura” completa (Figura 5.19), se obtiene:

Haciendo suma de momentos en Q = 0:

$$W_{\text{TOTAL ROBOT}} \cdot \left(\frac{h_{\text{CARGA}}}{2} + t + h \right) = R_{\text{PN}} \cdot d$$

$$\Rightarrow R_{\text{PN}} = \frac{W_{\text{TOTAL ROBOT}} \cdot \left(\frac{h_{\text{CARGA}}}{2} + t + h \right)}{d} = \frac{35 \cdot \left(\frac{120}{2} + 5 + 50 \right)}{460} = 8,75 \text{ Kg}$$

$$\Rightarrow R_{\text{PN}} = 8,75 \text{ Kg.}$$

Haciendo suma de momentos en P = 0:

$$W_{\text{TOTAL ROBOT}} \cdot \left(\frac{h_{\text{CARGA}}}{2} + t + h \right) = 2 \cdot R_{\text{QN}} \cdot d$$

$$R_{\text{QN}} = \frac{W_{\text{TOTAL ROBOT}} \cdot \left(\frac{h_{\text{CARGA}}}{2} + t + h \right)}{2 \cdot d} = \frac{35 \cdot \left(\frac{120}{2} + 5 + 50 \right)}{2 \cdot 460} = 4,375 \text{ Kg.}$$

$$\Rightarrow R_{\text{QN}} = 4,375 \text{ Kg.}$$

Como se mencionó con anterioridad estas reacciones son máximas cuando el valor de “d” es mínima, es decir cuando el robot se desplaza horizontalmente. Cuando el valor de “d” aumenta estas reacciones van disminuyendo hasta llegar al escalado vertical, donde el valor de “d” alcanza un máximo de d = 800 mm; donde :

$$R_{\text{PN}} = 5,03 \text{ Kg.}$$

$$R_{\text{QN}} = 2,51 \text{ Kg.}$$

Por otro lado, las componentes R_{PL} y R_{QL} se obtienen de la siguiente forma:

Obsérvese la Figura 5.20, que representa una “vista de planta” de la Figura 5.19, pero con la pata en transferencia señalada con líneas punteadas.

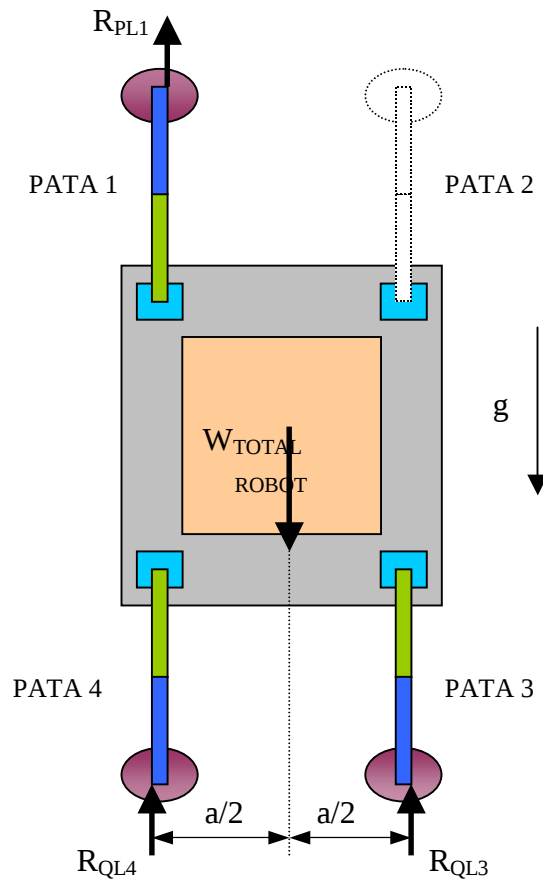


Figura 5.20 Vista de planta de la Figura 5.30

Por suma de fuerzas:

$$R_{PL1} + R_{QL3} + R_{QL4} = W_{TOTAL \text{ DEL ROBOT}} \quad \text{Ec. 5.58}$$

Ahora bien, si se hace suma de momentos = 0 en el punto donde actúa la fuerza R_{QL4} , se obtiene:

$$- R_{QL3} \cdot a + W_{TOTAL\ DEL\ ROBOT} \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \text{Ec. 5.59}$$

Despejando R_{QL3} de la ecuación 5.59:

$$R_{QL3} = \frac{W_{TOTAL\ ROBOT}}{2} = \frac{35\ Kg}{2} = 17,5\ Kg.$$

Sustituyendo este valor de R_{QL3} en la ecuación 5.58 revela que :

$$R_{PL1} + R_{QL4} = \frac{W_{TOTAL\ ROBOT}}{2}$$

Se puede decir que cada uno soporta un cuarto del peso del robot; es decir, que cuando una de las patas delanteras está en transferencia, su correspondiente colateral trasera (pata 3) soporta la mitad del peso del robot mientras que las otras dos (patas 1 y 4) soportan cada una un cuarto del peso del robot.

Si por el contrario, una de las patas traseras es la que está en transferencia mientras las dos delanteras se encuentran apoyadas, se obtendrá que la pata colateral delantera correspondiente a esa pata trasera en transferencia es la que soportará la mitad del peso del robot, mientras que las dos restantes patas en apoyo soportarán, cada una, la cuarta parte del peso del robot.

Se tienen entonces dos situaciones, cuando la pata en transferencia es una de las delanteras:

- La otra pata delantera en apoyo (pata 1 de la Figura 5.30) soporta sólo una cuarta parte del peso del robot ($R_L = \frac{W_{\text{TOTAL ROBOT}}}{4} = 8,75$); pero la componente normal de la reacción, en esa pata, es $R_N = 8,75$ Kg.
- La pata trasera colateral a la que se encuentra en transferencia, o sea la pata 3 de la Figura 5.19, es la que soporta la mitad del peso del robot ($R_L = 17,5$ Kg.) pero la componente normal de la reacción, en esa pata, es $R_N = 4,375$ Kg.

A efecto de beneficiar el diseño, es conveniente hacer el análisis de esfuerzos en la pata delantera que está en apoyo en la Figura 5.19 y tomar las siguientes valores de R_{PN} y R_{PL} :

$$R_{PN} = 8,75 \text{ Kg.}$$

$$R_{PL} = \frac{W_{\text{TOTAL ROBOT}}}{2} = 17,5 \text{ Kg.}$$

Es importante resaltar que, aunque un poco sobredimensionados, estos valores permanecen siempre constantes para cualquier posición del robot en la cual inicie la transferencia de una de sus patas.

5.2.1. Solicitaciones en el eslabón 3

5.2.1.1. Plano X_3Y_3

Diagrama de cuerpo libre.

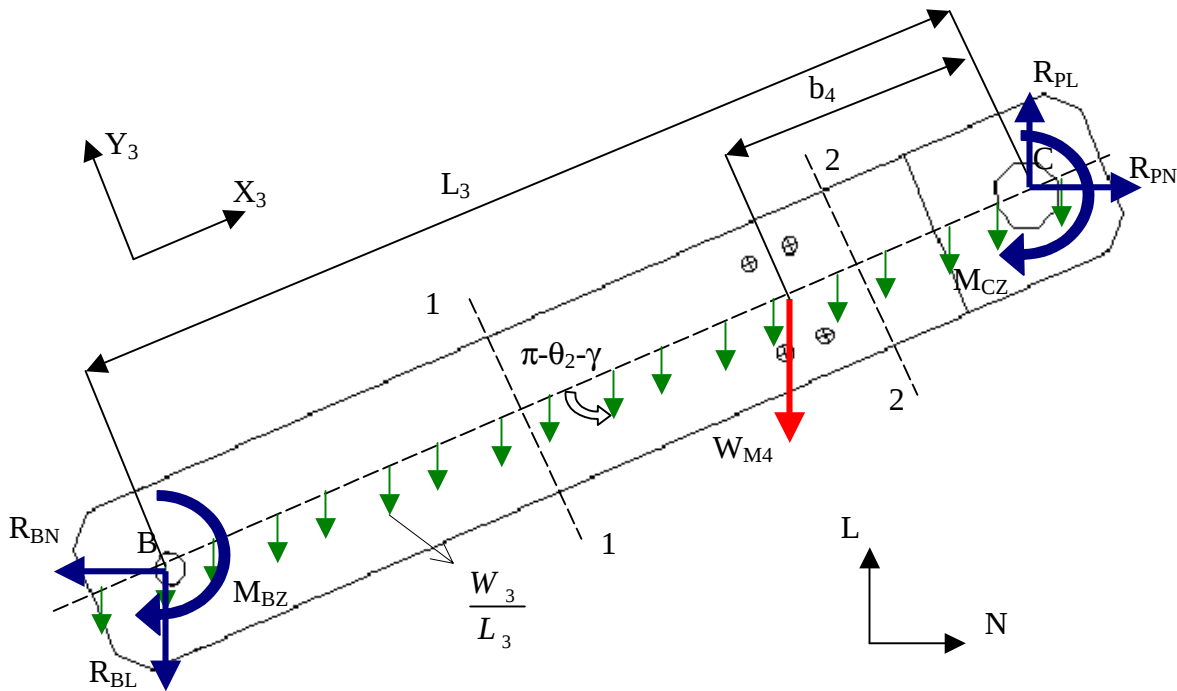


Figura 5.21 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY

Por identidades trigonométricas:

$$\cos(\pi - \theta_2 - \gamma) = -\cos(\theta_2 + \gamma)$$

$$\sin(\pi - \theta_2 - \gamma) = \sin(\theta_2 + \gamma)$$

$$\cos(\theta_2 + \gamma - \pi/2) = \sin(\theta_2 + \gamma)$$

$$\sin(\theta_2 + \gamma - \pi/2) = -\cos(\theta_2 + \gamma)$$

Es de hacer notar que siempre, durante todo el movimiento de la pata:

$$90^\circ \leq (\theta_2 + \gamma) \leq 180^\circ$$

Por $\Sigma F_N = 0$:

$$R_{PN} - R_{BN} = 0$$

$$R_{BN} = 8,75 \text{ Kg.}$$

Ec. 5.60

Por otra parte, cuando el peso del motor 4 se traslada al eslabón 3; aparece también en éste último, un momento flector concentrado M_{M4} (asociado al peso de dicho motor) que no se representa en el diagrama de cuerpo libre porque es despreciable en comparación con las magnitudes de los momentos flectores totales que actúan sobre el eslabón.

Por $\Sigma F_L = 0$:

$$R_{PL} - W_3 - W_{M4} - R_{BL} = 0$$

$$R_{BL} = 17,5 - 0,472 - 0,356 = 16,672 \text{ Kg.} \quad \text{Ec. 5.61}$$

Haciendo suma de momentos en el punto B de la Figura 5.21, tenemos:

$$-M_{BZ} - M_{CZ} + (R_{PL} - \frac{W_3}{2}) \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \cdot L_3 + R_{PN} \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) \cdot L_3 - W_{M4} \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) \cdot (L_3 - b_4) = 0$$

$$\text{Ec. 5.62}$$

Se hace necesario entonces, para conocer M_{BZ} y M_{CZ} , disponer de otras ecuaciones que permitan calcular estas incógnitas. Para ello se aplica las tres ecuaciones fundamentales de la estática al diagrama de cuerpo libre, en el plano XY, del eslabón 2 que se analiza más adelante.

Es de hacer notar que el eslabón está sometido además a una fuerza axial de tracción, durante todo su movimiento, tal como se aprecia en la Figura 5.21. Llamemos R_{BX} a esta fuerza axial; entonces su valor está dado por:

$$R_{BX} = R_{BN} \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) - (R_{BL} + W_{M4} + W_3) \cdot \cos(\theta_2 + \gamma)$$

$$R_{BX} = 8,75 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) - (16,672 + 0,356 + 0,472) \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) \quad \text{Ec. 5.63}$$

La Tabla 5.16, muestra la variación de la fuerza axial R_{BX} , de la ecuación 5.63, en función del desplazamiento S :

Tabla 5.16 Fuerza axial R_{BX}

Posición (S) [mm]	R_{BX} [Kg]
100	13,93
110	14,312
120	14,692
130	15,07
140	15,442
150	15,808
160	16,166
170	16,516
180	16,857
190	17,186
200	17,504
210	17,809
220	18,099
230	18,372
240	18,628
250	18,862
260	19,073
270	19,255
280	19,404
290	19,51
300	19,563
Máximo	19,563

5.2.1.2 Plano X_3Z_3

Diagrama de cuerpo libre.

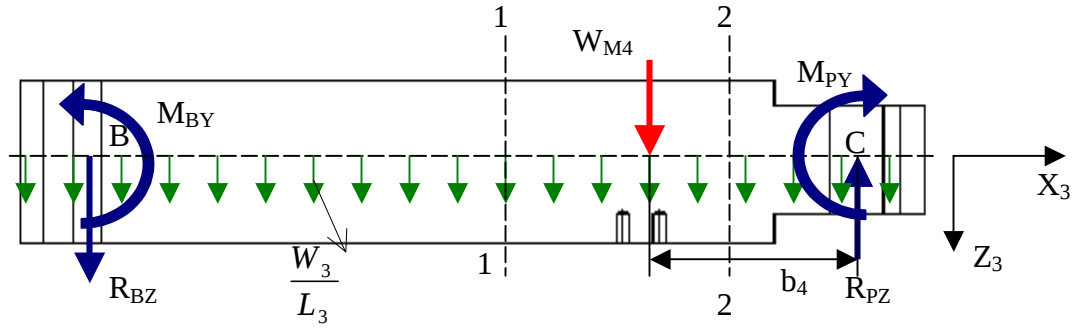


Figura 5.22 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XZ

Por $\Sigma FZ_3 = 0$

$$R_{BZ} = R_{PZ} - W_3 - W_{M4} = 17,5 - 0,472 - 0,356 = 16,672 \text{ Kg.}$$

$$\Rightarrow R_{BZ} = 16,672 \text{ Kg.}$$

Haciendo suma de momentos en el punto C que se observa en la Figura 5.22 :

$$M_{PY} = (R_{BZ} + \frac{W_3}{2}) \cdot L_3 + W_{M4} \cdot b_4 + M_{BY}$$

Se conocen todas las magnitudes, excepto M_{BY} . No obstante, ésta magnitud es calculada cuando se analiza el plano XZ del eslabón 2 (ver sección 5.2.2.1.2.2) y su valor es 2743,212 Kg · mm.

Entonces :

$$M_{PY} = (16,672 + \frac{0,472}{2}) \cdot 170 + 0,356 \cdot 47,5 + 2743,212 = 5634,482 \text{ Kg} \cdot \text{mm.}$$

5.2.2 Solicitaciones en el eslabón 2

5.2.2.1 Plano X_2Y_2

Diagrama de cuerpo libre

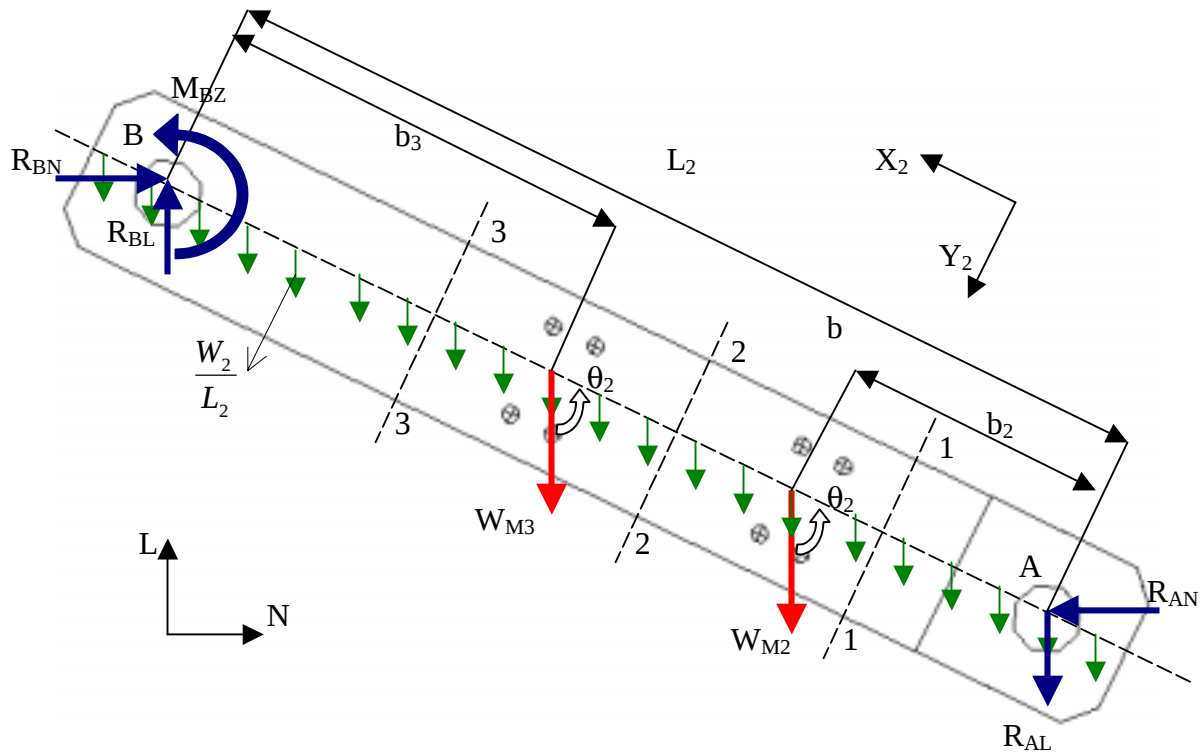


Figura 5.23 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY.

Por identidades trigonométricas:

$$\text{sen}(\pi/2 - \theta_2) = \cos\theta_2$$

$$\cos(\pi/2 - \theta_2) = \text{sen}\theta_2$$

$$\text{Por } \Sigma F_N = 0$$

$$R_{BN} - R_{AN} = 0$$

$$R_{AN} = 8,75 \text{ Kg.}$$

Ec. 5.64

Por $\Sigma F_L = 0$

$$R_{BL} - W_2 - W_{M3} - W_{M2} - R_{AL} = 0$$

$$R_{AL} = 16,672 - 0,472 - 0,356 - 0,356 = 15,488 \text{ Kg.} \quad \text{Ec. 5.65}$$

Aquí, al igual que para el eslabón 2, cuando el peso de los motores 2 y 3 se trasladan al eslabón 2; aparecen también en éste último, momentos flectores concentrados asociados al peso; que no se representan en el diagrama de cuerpo libre porque son despreciables en comparación con las magnitudes de los momentos flectores totales que actúan sobre el eslabón.

Haciendo suma de momentos en el punto B que se observa en la Figura 5.23, se obtiene :

$$-[(R_{AL} + \frac{W_2}{2}) \cdot \sin \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2] \cdot L_2 - [W_{M3} \cdot b_3 + W_{M2} \cdot (L_2 - b_2)] \cdot \sin \theta_2 + M_{BZ} = 0$$

despejando M_{BZ} :

$$M_{BZ} = [(15,488 + \frac{0,472}{2}) \cdot \sin(\theta_2) + 8,75 \cdot \cos(\theta_2)] \cdot 170 + [0,356 \cdot 74,5 + 0,356 \cdot (170 - 47,5)] \cdot \sin(\theta_2)$$

$$M_{BZ} = 2743,212 \cdot \sin(\theta_2) + 1487,5 \cdot \cos(\theta_2) \quad \text{Ec. 5.66}$$

Sustituyendo la ecuación 5.66 en 5.62, se tiene el valor de M_{CZ} , en función de los ángulos θ_2 y γ :

$$M_{CZ} = -2743,212 \cdot \sin(\theta_2) - 1487,5 \cdot \cos(\theta_2) + (17,5 - \frac{0,472}{2}) \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot 170 + 8,75 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) \cdot 170 - 0,356 \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot (170 - 47,5)$$

$$M_{CZ} = -2743,212 \cdot \text{sen}(\theta_2) - 1487,5 \cdot \cos(\theta_2) + 2971,27 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \gamma) + 1487,5 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma)$$

Ec. 5.67

La Tabla 5.17 y 5.18, muestra la variación de los momentos M_{BZ} y M_{CZ} , respectivamente, de las ecuación 5.66 y 5.67, en función del desplazamiento S:

Tabla 5.17 Momento M_{BZ}

Posición (S) [mm]	M_{BZ} [Kg.mm]
100	3021,1
110	3043,3
120	3062
130	3077,3
140	3089,2
150	3097,5
160	3102,4
170	3103,6
180	3101
190	3094,4
200	3083,5
210	3068
220	3047,6
230	3021,8
240	2990
250	2951,6
260	2905,5
270	2850,5
280	2785
290	2706,4
300	2611,1
Máximo	3103,6

Tabla 5.18 Momento M_{CZ}

Posición (S) [mm]	M_{CZ} [Kg.mm]
100	-688,8
110	-778,6
120	-868,7
130	-959,1
140	-1050
150	-1141
160	-1232
170	-1323
180	-1415
190	-1508
200	-1600
210	-1693
220	-1787
230	-1880
240	-1975
250	-2070
260	-2166
270	-2262
280	-2360
290	-2459
300	-2559
Máximo	2559

Debido a la configuración geométrica (motores acoplados en las placas L) de la pata (Figura 5.11), estos momentos M_{BZ} y M_{CZ} , actúan en los eslabones 2 y 3, como fuerzas cortantes, es decir, el momento M_{BZ} es transmitido por los engranes cónicos por su relación de engrane (a), por el brazo (r_3) y por la fuerza aplicada sobre el eslabón 2 (F_3) como se ven en las Figuras 5.35 y 5.36, para los eslabones 3 y 2, respectivamente:

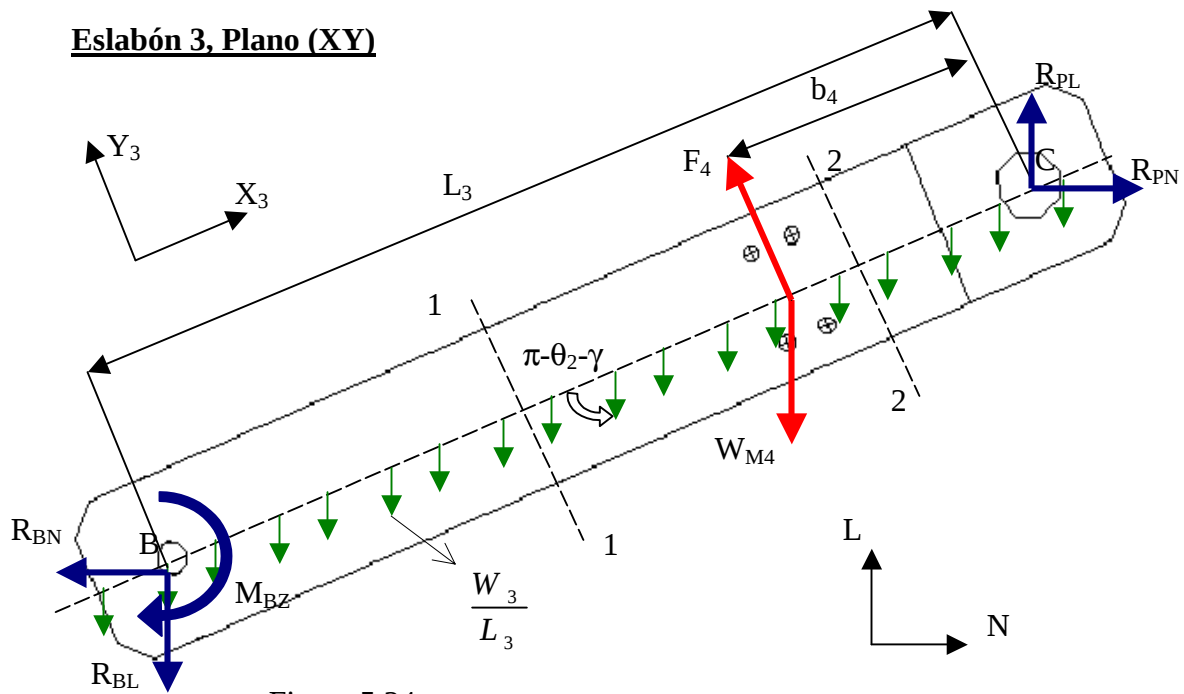


Figura 5.24 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 3. Plano XY.

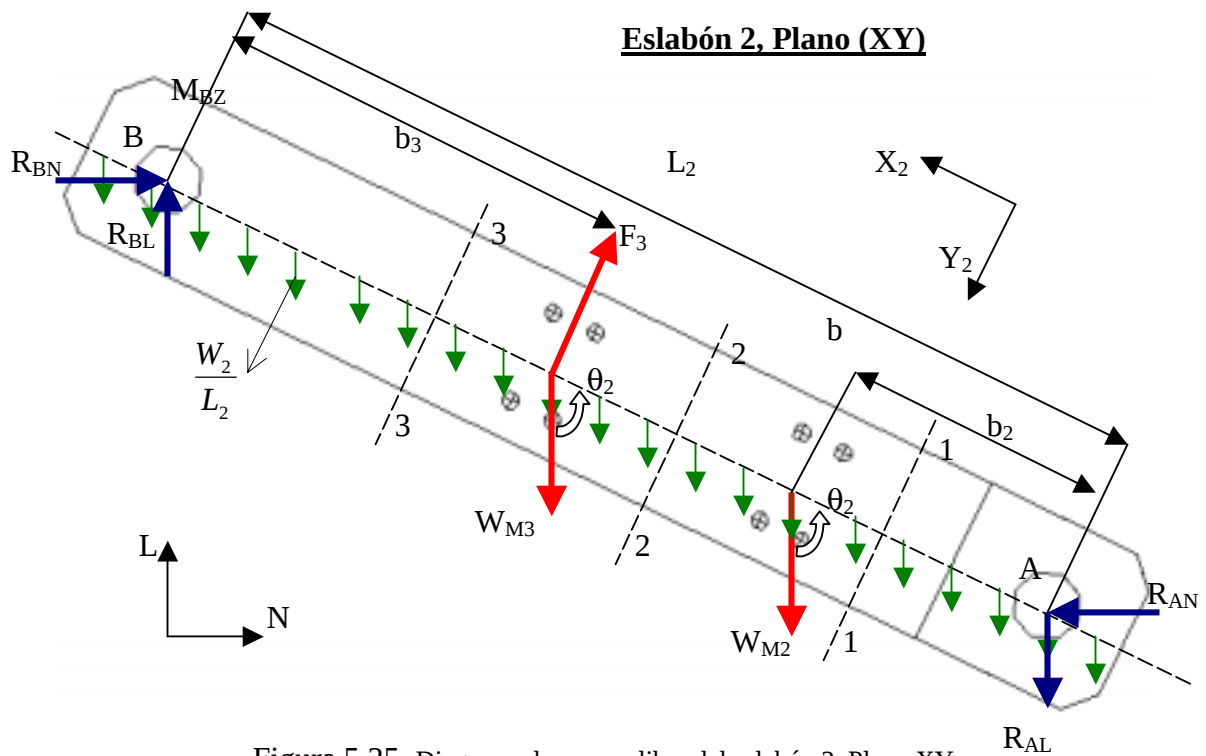


Figura 5.25 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XY.

$$F_4 \cdot r_4 \cdot a = M_{CZ} = T_4 \cdot a \quad \text{Ec.5.68}$$

$$F_3 \cdot r_3 \cdot a = M_{BZ} = T_3 \cdot a \quad \text{Ec.5.69}$$

Donde :

“a” es una relación de reducción de engranes cónicos. Anteriormente se dijo que a la salida del moto reductor 3 hay una relación de engranes cónicos 4:1, mientras que para los motores 2 y 4, la relación es de 3:1. Entonces $a = 4$ para el motor 3 y $a = 3$ para los motores 2 y 4.

“ r_3 ” es la distancia que hay desde el eje del motor 3 hasta la cara del eslabón que contiene a la placa L donde va este motor (Figura 5.11), debido que la relación de engranes no es la misma su diámetros no son iguales por ello las distancias $r_3 = 39 \text{ mm}$ para el motor 3 y $r_2 = r_4 = 24 \text{ mm}$ para los motores 2 y 4.

La Tabla 5.19 y 5.20, muestra la variación de las fuerzas F_3 y F_4 , respectivamente, de las ecuación 5.68 y 5.69, en función del desplazamiento S :

Tabla 5.19 Fuerza F_3

Posición (S) [mm]	F_3 [Kg]
100	19,3662
110	19,508535
120	19,628404
130	19,72629
140	19,802265
150	19,856083
160	19,887229
170	19,894935
180	19,878186
190	19,835697
200	19,765878
210	19,666779
220	19,536011
230	19,370629
240	19,166963
250	18,92037
260	18,624857
270	18,272482
280	17,85235
290	17,34882
300	16,737975
Máximo	19,89

Tabla 5.20 Fuerza F_4

Posición (S) [mm]	F_4 [Kg]
100	-9,566624
110	-10,81447
120	-12,06589
130	-13,32099
140	-14,57989
150	-15,84275
160	-17,10975
170	-18,38109
180	-19,65703
190	-20,93785
200	-22,22389
210	-23,51558
220	-24,81339
230	-26,11792
240	-27,42993
250	-28,75032
260	-30,0803
270	-31,42145
280	-32,77593
290	-34,14683
300	-35,53889
Máximo	-35,53

Se puede también ahora conocer la variación del torque T_3 y T_4 en función del desplazamiento S , multiplicando cada uno de los valores obtenidos en la Tabla 5.19 y Tabla 5.20 por el factor “a” correspondiente a la relación de engranes, tal como lo indica en las ecuaciones 5.68 y 5.69. Se obtiene así las Tablas 5.21 y 5.22:

Tabla 5.21 Torque T_3

Posición (S) [mm]	T_3 [Kg· mm]
100	77,4648
110	78,034141
120	78,513617
130	78,90516
140	79,20906
150	79,424333
160	79,548914
170	79,579741
180	79,512746
190	79,342788
200	79,06351
210	78,667115
220	78,144045
230	77,482518
240	76,667853
250	75,681481
260	74,49943
270	73,08993
280	71,409402
290	69,395278
300	66,951899
Máximo	79,57

Tabla 5.22 Torque T_4

Posición (S) [mm]	T_4 [Kg· mm]
100	-229,599
110	-259,5473
120	-289,5814
130	-319,7038
140	-349,9175
150	-380,2261
160	-410,634
170	-441,1462
180	-471,7686
190	-502,5083
200	-533,3734
210	-564,3738
220	-595,5213
230	-626,8302
240	-658,3182
250	-690,0077
260	-721,9273
270	-754,1149
280	-786,6222
290	-819,5238
300	-852,9333
Máximo	-852,93

Se puede notar que el eslabón 2 está sometido además a una fuerza axial de compresión y tracción durante todo su movimiento. Llamemos R_{AX} a esta fuerza axial; entonces su valor está dado por:

$$R_{AX} = R_{AN} \cdot \sin \theta_2 - (R_{AL} + W_{M2} + W_{M3} + W_2) \cdot \cos \theta_2 \quad \text{Ec.5.70}$$

Como puede observarse R_{AX} depende de R_{AN} , R_{AL} y θ_2 . Pero como ya se conocen estas magnitudes, la tabla siguiente muestra la variación de R_{AX} en función del desplazamiento S :

Tabla 5.23 Fuerza axial R_{AX}

Posición (S) [mm]	R_{AX} [Kg]
100	4,0103
110	3,3894
120	2,7668
130	2,1406
140	1,5093
150	0,8716
160	0,2262
170	-0,428
180	-1,092
190	-1,766
200	-2,453
210	-3,153
220	-3,867
230	-4,598
240	-5,347
250	-6,117
260	-6,911
270	-7,733
280	-8,589
290	-9,486
300	-10,44
Máximo	-10,44

5.2.2.2 Plano X_2Z_2

Diagrama de cuerpo libre.

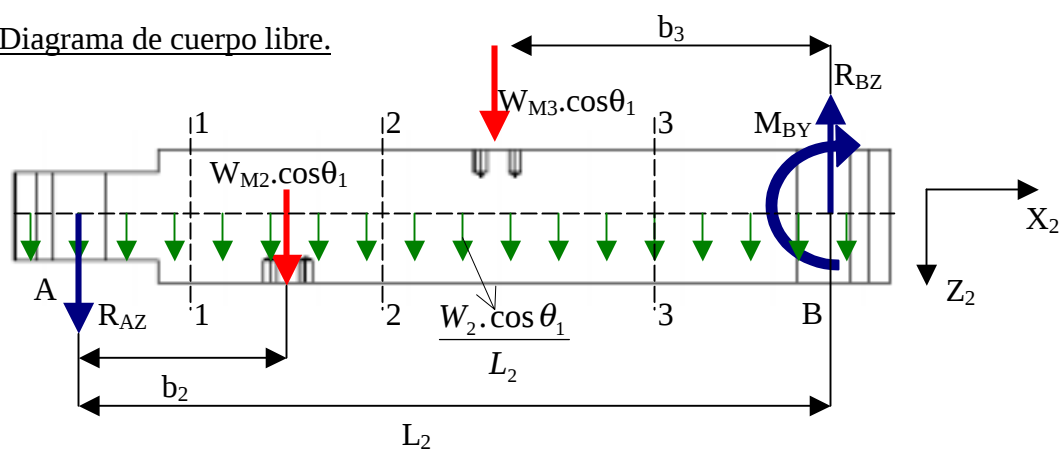


Figura 5.26 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2. Plano XZ

Por $\Sigma FZ_2 = 0$:

$$R_{AZ} = -R_{BZ} + W_2 + W_{M3} + W_{M2} \Rightarrow$$

$$R_{AZ} = 16,672 - 0,472 - 0,356 - 0,356 = 15,488 \text{ Kg.}$$

Por suma de momentos en B = 0 :

$$M_{BY} = (R_{AZ} + \frac{W_2}{2}) \cdot L_2 + W_{M2} \cdot (L_2 - b_2) + W_{M3} \cdot b_3 \Rightarrow$$

$$M_{BY} = (15,488 + \frac{0,472}{2}) \cdot 170 + 0,356 \cdot (170 - 47,5) + 0,356 \cdot 74,5 = 2743,212 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

5.2.3 Diagrama de Fuerza Cortante y Momento Flector.

5.2.3.1 Fuerza Cortante y Momento Flector en el eslabón 3

5.2.3.1.a. Plano X_3Y_3

Se empleará el método de las secciones para analizar los cortes que aparecen en la Figura 5.24.

Corte 1-1:

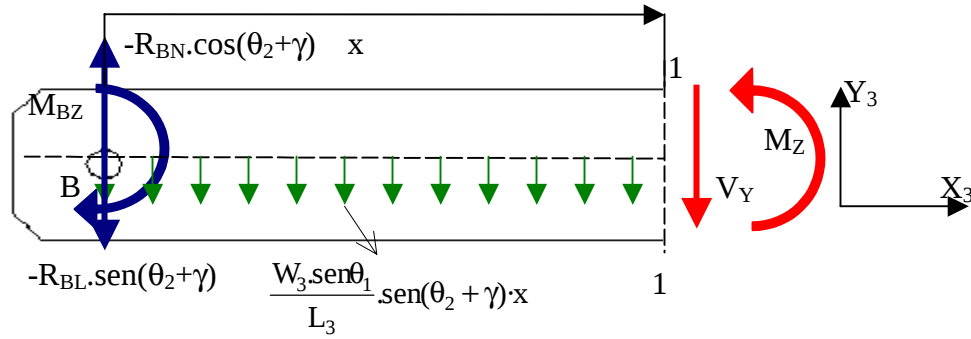


Figura 5.27 Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XY

Fuerza cortante.

$$V_Y = -R_{BN} \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) - \left(-R_{BL} + \frac{W_3}{L_3} \cdot x\right) \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \quad \text{Ec. 5.71}$$

Momento Flector.

$$M_Z = (-R_{BN} \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) + R_{BL} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma)) \cdot x - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot x^2 + M_{BZ} \quad \text{Ec. 5.72}$$

Donde $0 \leq x \leq (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm}$

Puesto que las ecuaciones 5.71 y 5.72 no sólo dependen de la sección x que se analice del eslabón, sino también del ángulo $\theta_2 + \gamma$ que aparece explícito como argumento de senos y cosenos e implícito en el términos T_3 (ya que éste a su vez depende del ángulo $\theta_2 + \gamma$); se hace necesario entonces expresar éstas ecuaciones en función de una sola variable, bien sea en función de la sección x o bien en función del ángulo $\theta_2 + \gamma$, que a su vez depende del desplazamiento S . Tomando esta última opción, se puede suponer como valor de referencia $x = L_3$ (100 mm) y así quedarían las ecuaciones 5.71 y 5.72 sólo en función del ángulo $\theta_2 + \gamma$.

Las Tablas 5.24 y 5.25 muestran estas variaciones en función del ángulo e indican cual es el máximo valor de la fuerza cortante y el momento flector para esa sección estudiada (para $x = 100$ mm). Posteriormente, de la Tabla 5.24, se toma para que ángulo ocurrió la máxima fuerza cortante y se sustituyen en la ecuación 5.71. Se obtiene de esta forma la expresión de la fuerza cortante V_Y en función de x solamente, como lo muestra la ecuación 5.73.

El mismo análisis se hace para el momento flector, o sea de la Tabla 5.25. Se toma para qué ángulo ocurrió el máximo momento flector. Con éste ángulo (que corresponde a un desplazamiento S determinado) se busca su valor correspondiente de T_3 que se obtienen de la Tabla 5.21 respectivamente y estos valores se sustituyen en la ecuación 5.72. Se obtiene de esta forma la expresión del momento flector M_Z en función de x solamente, tal como lo muestra la ecuación 5.74.

Tabla 5.24 Fuerza Cortante V_Y (para $x = 100$ mm)

Angulo ($\theta_2 + \gamma$) [°]	V_Y [Kg] (para $x = 100$ mm)
108,83	18,341
110,44	18,418
112,10	18,482
113,80	18,531
115,54	18,565
117,33	18,582
119,15	18,580
121,01	18,559
122,92	18,517
124,88	18,453
126,89	18,364
128,96	18,249
131,10	18,106
133,32	17,931
135,62	17,720
138,02	17,470
140,54	17,174
143,21	16,825
146,05	16,413
149,13	15,922
152,50	15,330
Máximo	18,58

Tabla 5.25 Momento Flector M_Z (para $x = 100$ mm)

Angulo ($\theta_2 + \gamma$) [°]	M_Z [Kg · mm] (para $x = 100$ mm)
108,83	1924,7
110,44	1932,9
112,10	1939,6
113,80	1944,7
115,54	1948,2
117,33	1949,9
119,15	1949,7
121,01	1947,4
122,92	1942,9
124,88	1936,0
126,89	1926,6
128,96	1914,4
131,10	1899,2
133,32	1880,6
135,62	1858,4
138,02	1831,9
140,54	1800,7
143,21	1763,9
146,05	1720,4
149,13	1668,7
152,50	1606,4
Máximo	1949,9

$$V_Y = -8,75 \cdot \cos(117,33^\circ) - (-16,672 + \frac{0,472}{170} \cdot x) \cdot \sin(117,33^\circ) \Rightarrow$$

$$V_Y = 18,65 + 2,62 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.73}$$

$$M_Z = [-8,75 \cdot \cos(117,33^\circ) + 16,672 \cdot \sin(117,33^\circ)] \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \sin(117,33^\circ) \cdot x^2 + (3103,6)$$

$$M_Z = 3103,6 + 18,65 \cdot x + 1,31 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.74}$$

Donde $0 \leq x \leq (L_3 - b_4) = 122,5$ mm

Corte 2-2:

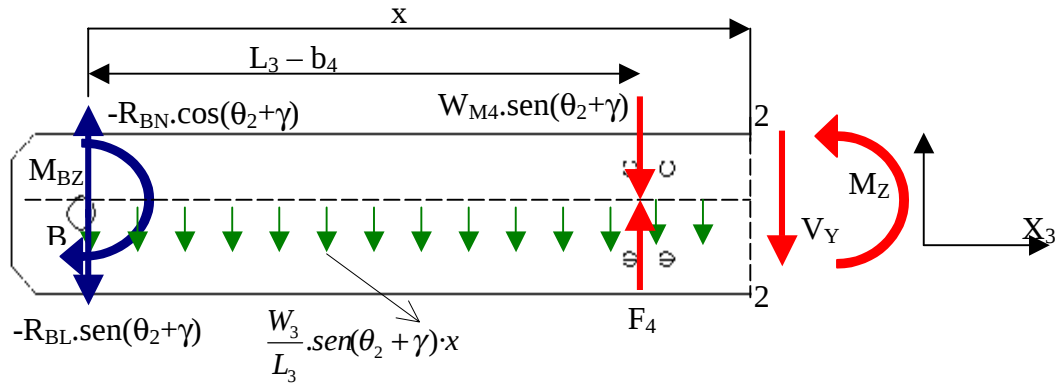


Figura 5.28 Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XY

Fuerza cortante.

$$V_Y = -R_{BN} \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) - (-R_{BL} + \frac{W_3}{L_3} \cdot x + W_{M4}) \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) + F_4 \quad \text{Ec. 5.75}$$

Momento Flector.

$$M_Z = (-R_{BN} \cdot \cos(\theta_2 + \gamma) + R_{BL} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma)) \cdot x - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) \cdot x^2 + M_{BZ} - (W_{M4} \cdot \sin(\theta_2 + \gamma) - F_4) \cdot [x - (L_3 - b_4)] \quad \text{Ec. 5.76}$$

$$\text{Donde } (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$$

Se observa que al igual que en el corte 1-1, las ecuaciones 5.75 y 5.76 dependen tanto del ángulo $\theta_2 + \gamma$ como de la sección x que se analice del eslabón. Obviamente, interesa expresar estas ecuaciones únicamente en función de x . Para ello, se hace el mismo análisis que en el corte anterior. Se supondrá $x = L_3$ (170 mm) en ambas ecuaciones, a fin de conocer cuales son la máxima fuerza cortante y el máximo momento flector quedando así las ecuaciones 5.75 y 5.76 sólo en función del ángulo

$\theta_2 + \gamma$. Las Tablas 5.26 y 5.27 muestran estas variaciones en función del ángulo $\theta_2 + \gamma$ e indican cual es el máximo valor de la fuerza cortante y el momento flector para esa sección estudiada (o sea para $x = L_3$). Posteriormente, de estas tablas, se toman los ángulos en que ocurrieron la máxima fuerza cortante y el máximo momento flector. Con éstos ángulos, se buscan los valores correspondientes de R_{BN} , R_{BL} , F_4 y M_{BZ} y estos valores se sustituyen en las ecuaciones 5.75 y 5.76. Se obtienen, de esta forma, la expresión de la fuerza cortante V_Y y el momento flector M_Z solo en función de x .

Tabla 5.26 Fuerza Cortante V_Y (para $x = L_3$)

Angulo ($\theta_2 + \gamma$) [°]	V_Y [Kg] (para $x = L_3 = 170$ mm)
108,83	92,174
110,44	91,625
112,10	90,963
113,80	90,187
115,54	89,298
117,33	88,293
119,15	87,168
121,01	85,918
122,92	84,537
124,88	83,018
126,89	81,352
128,96	79,529
131,10	77,534
133,32	75,352
135,62	72,962
138,02	70,34
140,54	67,452
143,21	64,255
146,05	60,69
149,13	56,671
152,50	52,069
Máximo	92,17

Tabla 5.27 Momento Flector M_Z (para $x = L_3$)

Angulo ($\theta_2 + \gamma$) [°]	M_Z [Kg · mm] (para $x = L_3 = 170$ mm)
108,83	9667,0
110,44	9661,9
112,10	9661,6
113,80	9646,2
115,54	9619,8
117,33	9582,2
119,15	9533,2
121,01	9472,2
122,92	9398,5
124,88	9311,6
126,89	9210,4
128,96	9093,9
131,10	8960,7
133,32	8809,4
135,62	8637,9
138,02	8443,7
140,54	8223,6
143,21	7973,5
146,05	7687,4
149,13	7357,1
152,50	6969,9
Máximo	9667,0

$$V_Y = -8,75 \cdot \cos(108,83^\circ) - (-16,672 + \frac{0,472}{170} \cdot x + 0,356) \cdot \sin(108,83^\circ) + (74,35)$$

$$V_Y = 92,61 - 2,62 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.75}$$

$$M_Z = (-8,75 \cdot \cos(108,83^\circ) + 16,672 \cdot \sin(108,83^\circ)) \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \sin(108,83^\circ) \cdot x^2 + (3021,1) - (0,356 \cdot \sin(108,83^\circ) - (74,35)) \cdot [x - (170 - 47,5)]$$

$$M_Z = -6045,5 + 92,61 \cdot x - 1,31 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.76}$$

$$\text{Donde } (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$$

Finalmente, las Tablas 5.28 y 5.29 muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.73 y 5.75) y el momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.74 y 5.76) a lo largo del eslabón 3:

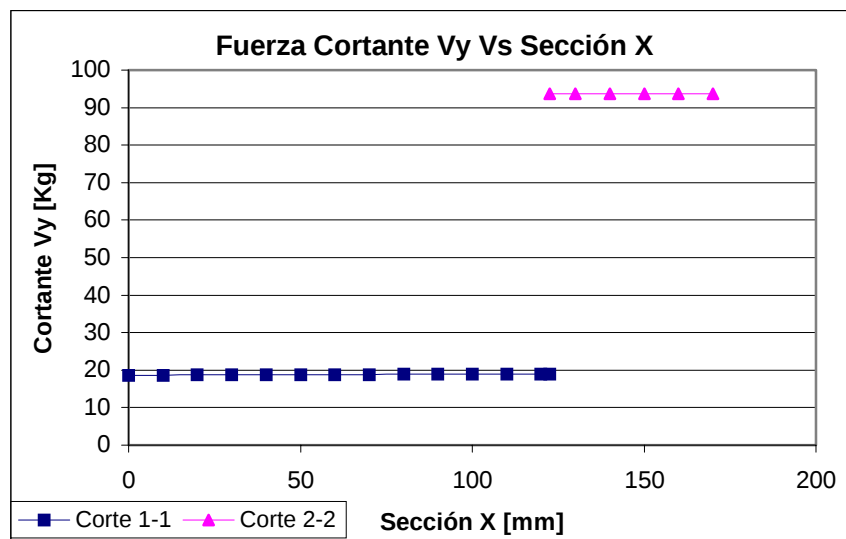
Tabla 5.28 Fuerza Cortante V_Y

Sección (x) [mm]	V_Y [Kg]
0	18,650
10	18,676
20	18,702
30	18,729
40	18,755
50	18,781
60	18,807
70	18,833
80	18,860
90	18,886
100	18,912
110	18,938
120	18,964
122,5	18,971
122,5	93,611
130	93,631
140	93,657
150	93,683
160	93,709
170	93,735
Máximo	93,735

Tabla 5.29 Momento Flector M_z

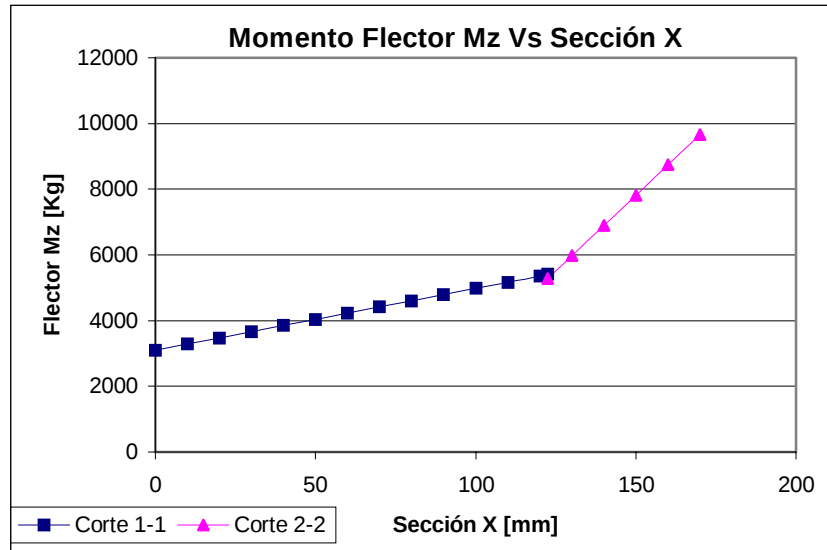
Sección (x) [mm]	M_z [Kg · mm]
0	3103,6
10	3290,2
20	3477,1
30	3664,3
40	3851,7
50	4039,4
60	4227,3
70	4415,5
80	4604
90	4792,7
100	4981,7
110	5171
120	5360,5
122,5	5407,9
122,5	5407,9
130	5971,7
140	6894,2
150	7816,5
160	8738,6
170	9660,3
Máximo	9660,3

Diagrama de Fuerza Cortante.



Gráfica 5.10 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 3. Plano XY

Diagrama de Momento Flector.



Gráfica 5.11 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 3. Plano XY

5.2.3.1.b Plano X_3Z_3

Corte 1-1:

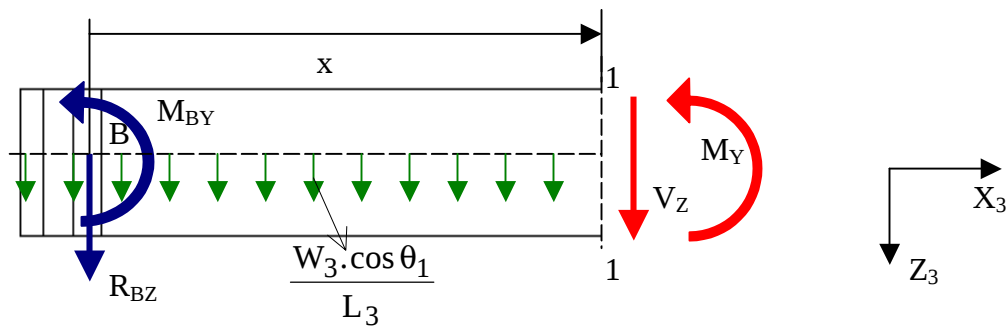


Figura 5.29 Corte 1-1 del eslabón 3. Plano XZ

Fuerza Cortante

$$V_Z = -R_{BZ} - \frac{W_3}{L_3} \cdot x = -16,672 - \frac{0,472}{170} \cdot x \Rightarrow$$

$$V_Z = -16,672 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.77}$$

Momento Flector

$$M_Y = -M_{BY} - R_{BZ} \cdot x - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot x^2 = -2743,2 - 16,672 \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$M_Y = -2743,2 - 16,672 \cdot x - 1,38 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.78}$$

Donde $0 \leq x \leq (L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm}$

Corte 2-2 :

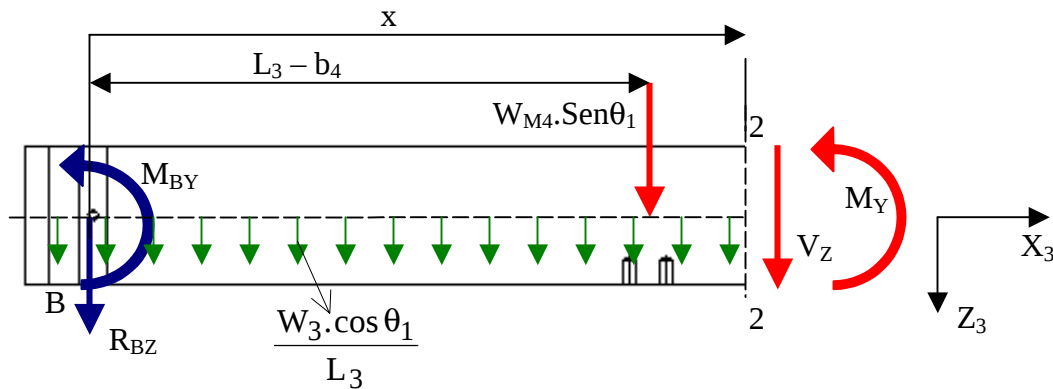


Figura 5.30 Corte 2-2 del eslabón 3. Plano XZ

Fuerza Cortante

$$V_Z = -R_{BZ} - \frac{W_3}{L_3} \cdot x - W_{M4} = -16,672 - \frac{0,472}{170} \cdot x - 0,356 \Rightarrow$$

$$V_Z = -17,028 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.79}$$

$$M_Y = - M_{BY} - R_{BZ} \cdot x - \frac{W_3}{2 \cdot L_3} \cdot x^2 - W_{M4} \cdot [x - (L_3 - b_4)] = -2743,2 - 16,672 \cdot x -$$

$$\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 - 0,356 \cdot [x - (170 - 47,5)] \Rightarrow$$

$$M_Y = - 2699,6 - 17,028 \cdot x - 1,38 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.80}$$

Donde $(L_3 - b_4) = 122,5 \text{ mm} \leq x \leq L_3 = 170 \text{ mm}$

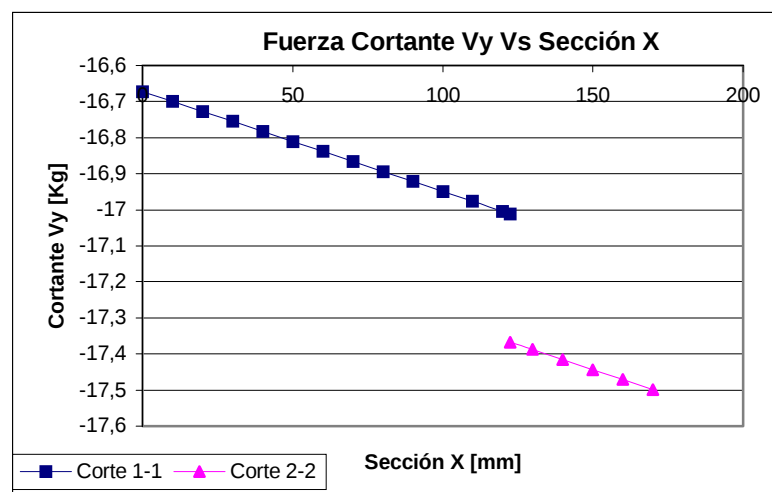
Las Tablas 5.30 y 5.31 muestran la variación de la fuerza cortante V_Z (considerando las ecuaciones 5.77 y 5.79) y el momento flector M_Y (considerando las ecuaciones 5.78 y 5.80) a lo largo del eslabón 3:

Tabla 5.30 Fuerza Cortante V_Z

Sección (x) [mm]	V_Z [Kg]
0	-16,67
10	-16,70
20	-16,73
30	-16,76
40	-16,78
50	-16,81
60	-16,84
70	-16,87
80	-16,89
90	-16,92
100	-16,95
110	-16,98
120	-17,00
122,5	-17,01
122,5	-17,37
130	-17,39
140	-17,42
150	-17,44
160	-17,47
170	-17,5
Máximo	-17,5

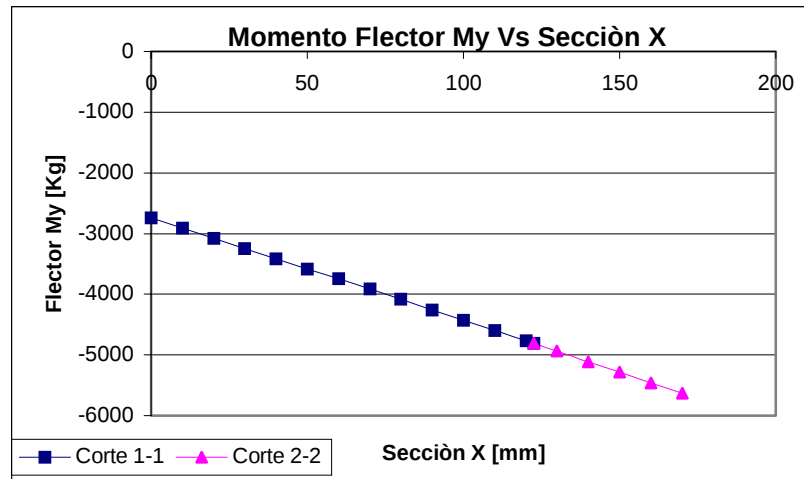
Tabla 5.31 Momento Flector M_Y

Sección (x) [mm]	M_Y [Kg.mm]
0	-2743
10	-2910
20	-3077
30	-3245
40	-3412
50	-3580
60	-3748
70	-3917
80	-4086
90	-4255
100	-4424
110	-4594
120	-4764
122,5	-4806
122,5	-4806
130	-4937
140	-5111
150	-5285
160	-5459
170	-5634
Máximo	-5634

Diagrama de Fuerza Cortante

Gráfica 5.12 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 3. Plano XZ

Diagrama de Momento Flector



Gráfica 5.13 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 3. Plano XZ

5.2.3.2. Fuerza Cortante y Momento Flector en el eslabón 2

5.2.3.2.a Plano X_2Y_2

Corte 1-1:

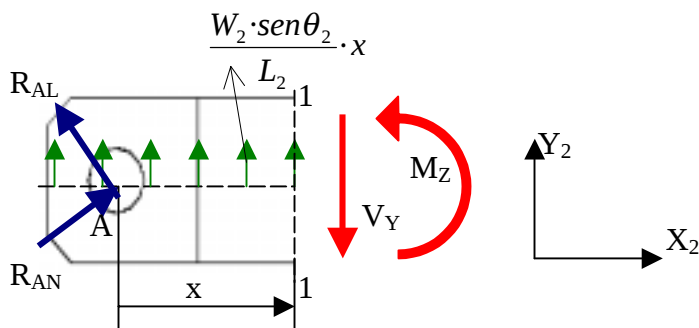


Figura 5.31 Corte 1-1 en el eslabón 2. Plano XY

Fuerza Cortante

$$V_Y = R_{AL} \cdot \sen \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2 + \frac{W_2}{L_2} \cdot \sen \theta_2 \cdot x \quad \text{Ec. 5.81}$$

Momento Flector

$$M_Z = (R_{AL} \cdot \sen \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2) \cdot x + \frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot \sen \theta_2 \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.82}$$

Donde $0 \leq x \leq b_2 = 47,5 \text{ mm}$

Al igual que en los casos anteriores (corte 1-1 y corte 2-2 del eslabón 3), las ecuaciones 5.81 y 5.82 dependen tanto del ángulo θ_2 como de la sección x que se analice del eslabón. Haciendo el mismo análisis que en estos casos, obtenemos las Tablas 5.32 y 5.33 y las ecuaciones 5.83 y 5.84. Estas ecuaciones expresan la fuerza cortante V_Y y el momento flector M_Z únicamente en función de x . En los sucesivos cortes también se emplea la misma metodología.

Tabla 5.32 Fuerza Cortante V_Y (para $x = 40$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	V_Y [Kg] (para $x = 40$ mm)
74,60	17,362
72,67	17,497
70,75	17,611
68,83	17,706
66,90	17,781
64,96	17,836
62,99	17,871
61,00	17,885
58,98	17,877
56,92	17,847
54,82	17,791
52,66	17,710
50,45	17,600
48,17	17,459
45,81	17,284
43,35	17,071
40,77	16,814
38,05	16,506
35,16	16,138
32,05	15,695
28,64	15,156
Máximo	17,885

Tabla 5.33 Momento Flector M_Z (para $x = 40$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	M_Z [Kg · mm] (para $x = 40$ mm)
74,60	692,35
72,67	697,75
70,75	702,35
68,83	706,17
66,90	709,2
64,96	711,44
62,99	712,87
61,00	713,47
58,98	713,19
56,92	712,00
54,82	709,83
52,66	706,62
50,45	702,28
48,17	696,71
45,81	689,78
43,35	681,31
40,77	671,10
38,05	658,87
35,16	644,23
32,05	626,62
28,64	605,18
Máximo	713,47

$$V_Y = 15,48 \cdot \text{sen}(74,6^\circ) + 8,75 \cdot \cos(74,6^\circ) + \frac{0,472}{170} \cdot \text{sen}(74,6^\circ) \cdot x$$

$$V_Y = 17,24 + 2,67 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.83}$$

$$M_Z = (15,48 \cdot \text{sen}(74,6^\circ) + 8,75 \cdot \cos(74,6^\circ)) \cdot x + \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \text{sen}(74,6^\circ) \cdot x^2$$

$$M_Z = 17,24 \cdot x + 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.84}$$

Corte 2-2 :

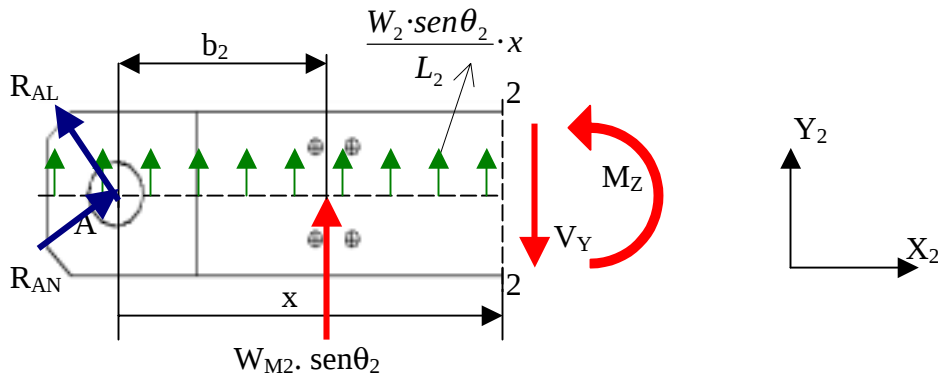


Figura 5.32 Corte 2-2 en el eslabón 2. Plano XY

Fuerza Cortante

$$V_Y = R_{AL} \cdot \sin \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2 + \left(\frac{W_2}{L_2} \cdot x + W_{M2} \right) \cdot \sin \theta_2 \quad \text{Ec. 5.85}$$

Momento Flector

$$M_Z = (R_{AL} \cdot \sin \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2) \cdot x + \left[\frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 + W_{M2} \cdot (x - b_2) \right] \cdot \sin \theta_2 \quad \text{Ec. 5.86}$$

Donde $b_2 = 47,5 \text{ mm} \leq x \leq (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm}$

Tabla 5.34 Fuerza Cortante V_Y (para $x = 90$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	V_Y [Kg] (para $x = 90$ mm)
74,60	17,839
72,67	17,969
70,75	18,078
68,83	18,167
66,90	18,236
64,96	18,285
62,99	18,312
61,00	18,318
58,98	18,302
56,92	18,261
54,82	18,196
52,66	18,103
50,45	17,981
48,17	17,828
45,81	17,639
43,35	17,411
40,77	17,137
38,05	16,811
35,16	16,423
32,05	15,957
28,64	15,393
Máximo	18,318

Tabla 5.35 Momento Flector M_Z (para $x = 90$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	M_Z [Kg · mm] (para $x = 90$ mm)
74,60	1578,4
72,67	1590,3
70,75	1600,5
68,83	1608,8
66,90	1615,4
64,96	1620,1
62,99	1623,0
61,00	1624,0
58,98	1623,0
56,92	1619,9
54,82	1614,6
52,66	1606,9
50,45	1596,6
48,17	1583,5
45,81	1567,3
43,35	1547,6
40,77	1523,9
38,05	1495,6
35,16	1461,8
32,05	1421,2
28,64	1371,9
Máximo	1624

$$V_Y = 15,488 \cdot \sin(61^\circ) + 8,75 \cdot \cos(61^\circ) + \left(\frac{0,472}{170} \cdot x + 0,356 \right) \cdot \sin(61^\circ)$$

$$V_Y = 18,09 + 2,42 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.87}$$

$$M_Z = (15,488 \cdot \sin(61^\circ) + 8,75 \cdot \cos(61^\circ)) \cdot x + \left[\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 + 0,356 \cdot (x - 47,5) \right] \cdot \sin(61^\circ)$$

$$M_Z = -14,78 + 18,09 \cdot x + 1,21 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.88}$$

Donde $b_2 = 47,5 \text{ mm} \leq x \leq (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm}$

Corte 3-3 :

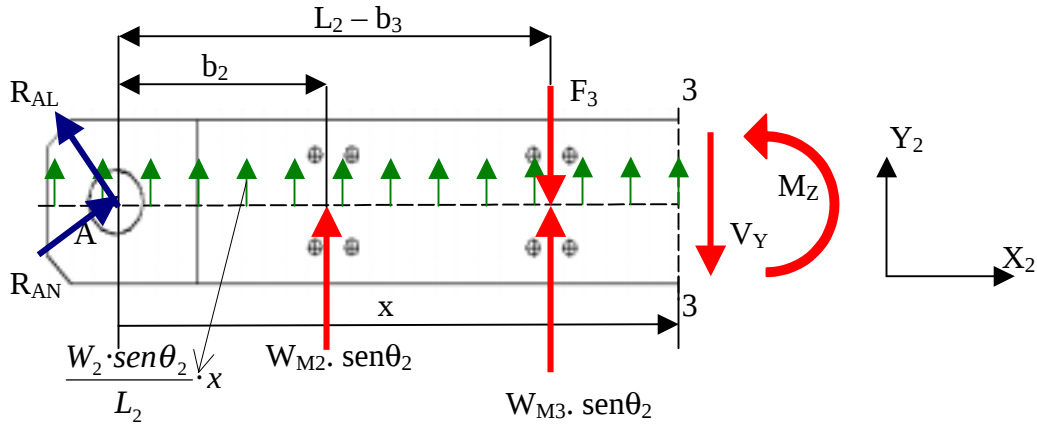


Figura 5.33 Corte 3-3 en el eslabón 2. Plano XY

Fuerza Cortante

$$V_Y = R_{AL} \cdot \sin \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2 + \left(\frac{W_2}{L_2} \cdot x + W_{M2} + W_{M3} \right) \cdot \sin \theta_2 - F_3 \quad \text{Ec. 5.89}$$

Momento Flector

$$M_Z = (R_{AL} \cdot \sin \theta_2 + R_{AN} \cdot \cos \theta_2) \cdot x + \left[\frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot \sin \theta_2 \cdot x^2 + W_{M2} \cdot \sin \theta_2 \cdot (x - b_2) + (W_{M3} \cdot \sin \theta_2 - F_3) \cdot [x - (L_2 - b_3)] \right] \quad \text{Ec. 5.90}$$

Donde $(L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm} \leq x \leq L_2 = 170 \text{ mm}$

Tabla 5.36 Fuerza Cortante V_Y (para $x = 170$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	V_Y [Kg] (para $x = L_2$)
74,60	-0,970
72,67	-0,987
70,75	-1,004
68,83	-1,020
66,90	-1,034
64,96	-1,048
62,99	-1,060
61,00	-1,071
58,98	-1,081
56,92	-1,090
54,82	-1,098
52,66	-1,104
50,45	-1,109
48,17	-1,112
45,81	-1,113
43,35	-1,113
40,77	-1,110
38,05	-1,105
35,16	-1,097
32,05	-1,085
28,64	-1,068
Máximo	-1,113

Tabla 5.37 Momento Flector M_Z (para $x = 170$ mm)

Angulo (θ_2) [°]	M_Z [Kg · mm] (para $x = L_2$)
74,60	1596,9
72,67	1608,3
70,75	1617,9
68,83	1625,6
66,90	1631,6
64,96	1635,7
62,99	1637,9
61,00	1638,3
58,98	1636,5
56,92	1632,7
54,82	1626,6
52,66	1618,1
50,45	1607,0
48,17	1593,0
45,81	1575,9
43,35	1555,2
40,77	1530,5
38,05	1501,1
35,16	1466,0
32,05	1424,1
28,64	1373,4
Máximo	1638,3

$$V_Y = 15,488 \cdot \sin(61^\circ) + 8,75 \cdot \cos(61^\circ) + \left(\frac{0,472}{170} \cdot x + 0,356 + 0,356 \right) \cdot \sin(61^\circ) - (19,89)$$

$$V_Y = -1,48 + 2,42 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.91}$$

$$M_Z = (15,488 \cdot \sin(61^\circ) + 8,75 \cdot \cos(61^\circ)) \cdot x + \left[\frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot \sin(61^\circ) \cdot x^2 + 0,356 \cdot \sin(61^\circ) \cdot (x - 47,5) + (0,356 \cdot \sin(61^\circ) - 19,89) \cdot [x - (170 - 74,5)] \right]$$

$$M_Z = 1884,55 - 1,48 \cdot x + 1,231 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.92}$$

Donde $(L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm} \leq x \leq L_2 = 170 \text{ mm}$

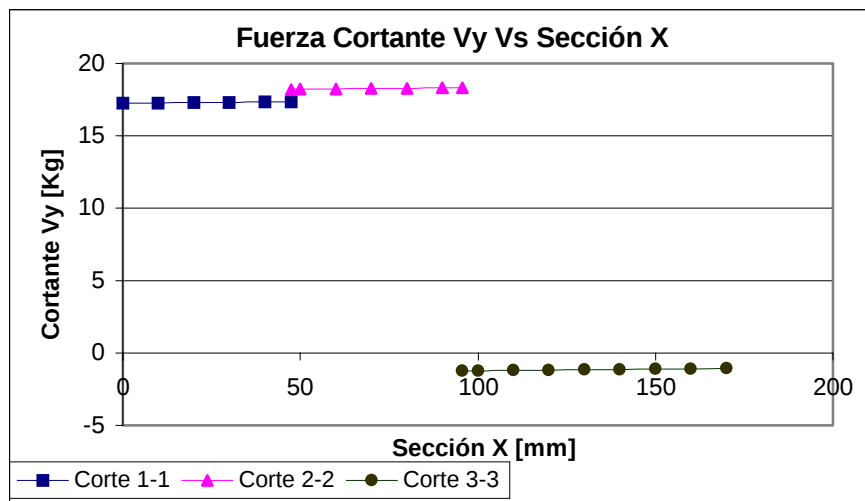
Finalmente, las Tablas 5.38 y 5.39 muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.83, 5.87 y 5.91) y el momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.84, 5.88 y 5.92) a lo largo del eslabón 2:

Tabla 5.38 Fuerza Cortante V_Y

Sección (x) [mm]	V_Y [Kg]
0	17,240
10	17,267
20	17,293
30	17,320
40	17,347
47,5	17,367
47,5	18,205
50	18,211
60	18,235
70	18,259
80	18,284
90	18,308
95,5	18,321
95,5	-1,249
100	-1,238
110	-1,214
120	-1,190
130	-1,165
140	-1,141
150	-1,117
160	-1,093
170	-1,069
Máximo	17,24

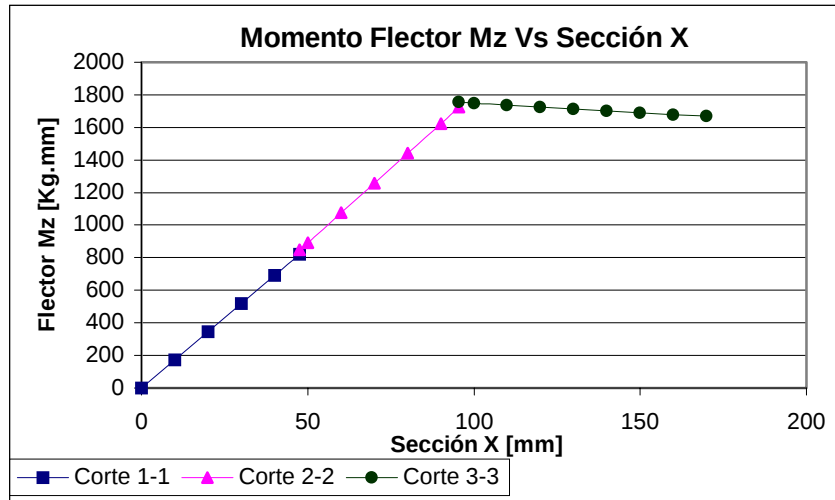
Tabla 5.39 Momento Flector M_z

Sección (x) [mm]	M_z [Kg · mm]
0	0
10	172,53
20	345,33
30	518,40
40	691,73
47,5	822,38
47,5	822,38
50	892,75
60	1075,0
70	1257,4
80	1440,2
90	1623,1
95,5	1754,4
95,5	1754,4
100	1748,9
110	1736,6
120	1724,7
130	1713,0
140	1701,5
150	1690,2
160	1679,3
170	1668,5
Máximo	1754,4

Diagrama de Fuerza Cortante

Gráfica 5.14 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 2. Plano XY

Diagrama de Momento Flector



Gráfica 5.15 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 2. Plano XY

5.2.3.2.b Plano X_2Z_2

Corte 1-1:

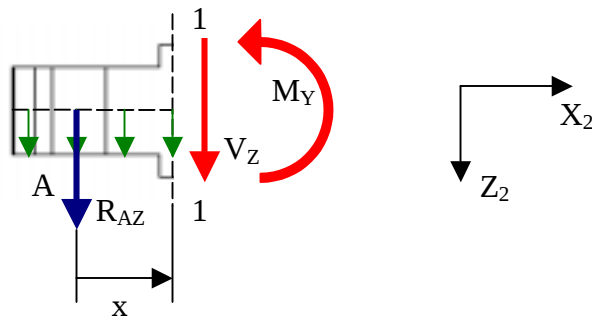


Figura 5.34 Corte 1-1 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza Cortante

$$V_z = -R_{AZ} - \frac{W_2}{L_2} \cdot x = -15,488 - \frac{0,472}{170} \cdot x \quad \Rightarrow$$

$$V_z = -15,488 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x$$

Ec. 5.93

Momento Flector

$$M_Y = -R_{AZ} \cdot x - \frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 = -15,488 \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$M_Y = -15,488 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.94}$$

Donde $0 \leq x \leq b_2 = 47,5 \text{ mm}$

Corte 2-2:

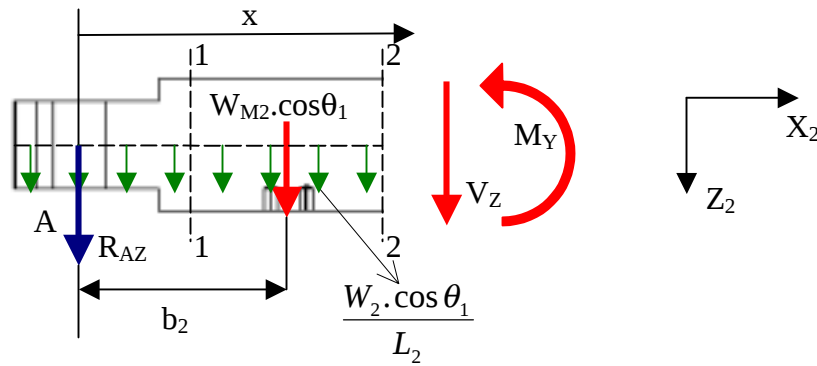


Figura 5.35 Corte 2-2 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza Cortante

$$V_Z = -R_{AZ} - \frac{W_2}{L_2} \cdot x - W_{M2} = -15,488 - \frac{0,472}{170} \cdot x - 0,356$$

$$V_Z = -15,844 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.95}$$

Momento Flector

$$\begin{aligned} M_Y &= -R_{AZ} \cdot x - \frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 - W_{M2} \cdot (x - b_2) \\ &= -15,488 \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 - 0,356 \cdot (x - 47,5) \end{aligned}$$

$$M_Y = 16,91 - 15,844 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.96}$$

$$\text{Donde } b_2 = 47,5 \text{ mm} \leq x \leq (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm}$$

Corte 3-3 :

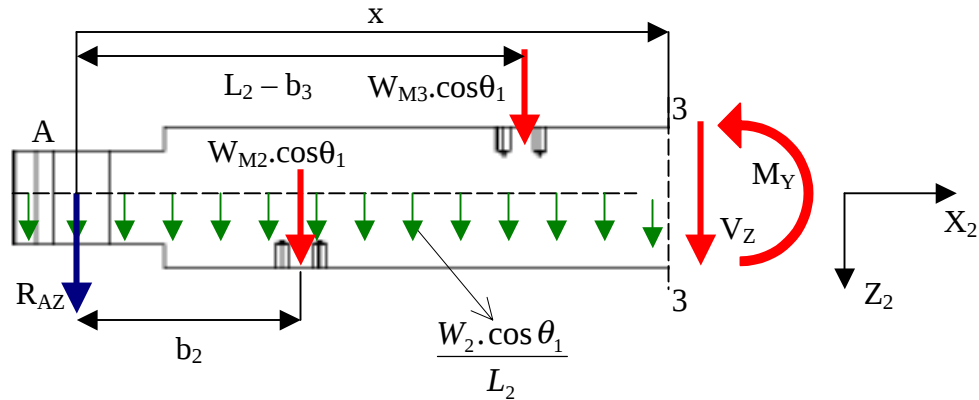


Figura 5.36 Corte 3-3 del eslabón 2. Plano XZ

Fuerza Cortante

$$V_Z = -R_{AZ} - \frac{W_2}{L_2} \cdot x - W_{M2} - W_{M3} = -15,488 - \frac{0,472}{170} \cdot x - 0,356 - 0,356$$

$$V_Z = -16,2 - 2,77 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad \text{Ec. 5.97}$$

Momento Flector

$$\begin{aligned} M_Y &= -R_{AZ} \cdot x - \frac{W_2}{2 \cdot L_2} \cdot x^2 - W_{M2} \cdot (x - b_2) - W_{M3} \cdot [x - (L_2 - b_3)] \\ &= -15,488 \cdot x - \frac{0,472}{2 \cdot 170} \cdot x^2 - 0,356 \cdot (x - 47,5) - 0,356 \cdot [x - (170 - 74,5)] \end{aligned}$$

$$M_Y = 50,9 - 16,2 \cdot x - 1,388 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad \text{Ec. 5.98}$$

$$\text{Donde } (L_2 - b_3) = 95,5 \text{ mm} \leq x \leq L_2 = 170 \text{ mm}$$

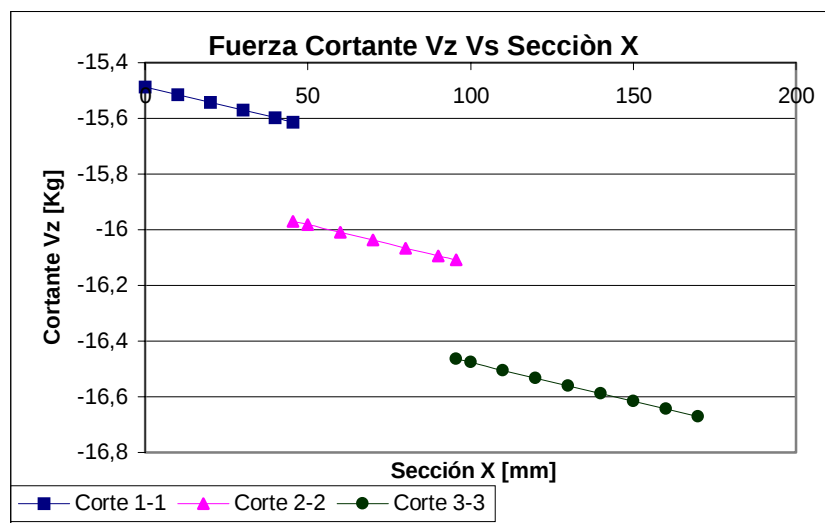
Como se observa, todas estas ecuaciones anteriores, correspondientes a los cortes en el plano X_2Z_2 del eslabón 2, están en función solamente de la longitud x . Las Tablas 5.40 y 5.41, muestran la variación de la fuerza cortante V_Y (considerando las ecuaciones 5.93, 5.95 y 5.97) y el momento flector M_Z (considerando las ecuaciones 5.94, 5.96 y 5.98) a lo largo del eslabón.

Tabla 5.40 Fuerza Cortante V_Z

Sección (x) [mm]	V_Z [Kg]
0	-15,49
10	-15,52
20	-15,54
30	-15,57
40	-15,60
47,5	-15,61
47,5	-15,97
50	-15,98
60	-16,01
70	-16,04
80	-16,07
90	-16,09
95,5	-16,11
95,5	-16,46
100	-16,48
110	-16,50
120	-16,53
130	-16,56
140	-16,59
150	-16,62
160	-16,64
170	-16,67
Máximo	-16,67

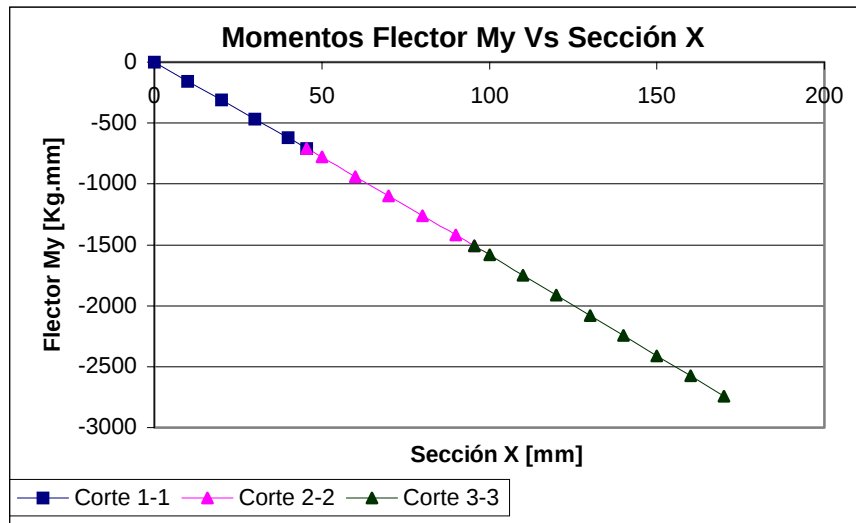
Tabla 5.41 Momento Flector M_Y

Sección (x) [mm]	M_Y [Kg · mm]
0	0
10	-155
20	-310,3
30	-465,9
40	-621,7
47,5	-707,6
47,5	-706,9
50	-778,8
60	-938,7
70	-1099
80	-1259
90	-1420
95,5	-1509
95,5	-1509
100	-1583
110	-1748
120	-1913
130	-2079
140	-2244
150	-2410
160	-2577
170	-2743
Máximo	-2743

Diagrama de Fuerza Cortante

Gráfica 5.16 Diagrama de Fuerza Cortante en el eslabón 2. Plano XZ

Diagrama de Momento Flector



Gráfica 5.17 Diagrama de Momento Flector en el eslabón 2. Plano XZ

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN LOS ESLABONES

6.1 Cálculo de los momentos de inercia.

Antes del estudio de los distintos esfuerzos que está sometido cada eslabón, es necesario para cada sección, realizar el cálculo de sus respectivos momentos de inercia.

6.1.1 Para el eslabón 3.

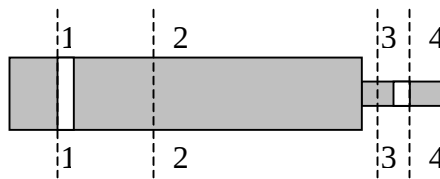


Figura 6.1 Eslabón 3.

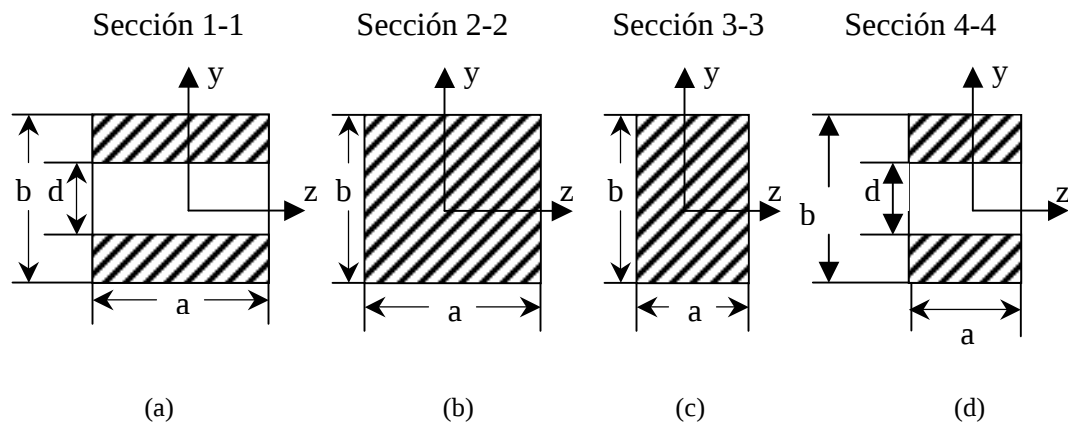


Figura 6.2 Secciones de corte del eslabón 3.

Los momentos de inercia en estas secciones son:

Sección 1-1:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{a \cdot d^3}{12} = \frac{a \cdot (b^3 - d^3)}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{d \cdot a^3}{12} = \frac{(b - d) \cdot a^3}{12}$$

Para $a = 30 \text{ mm}$
 $b = 30 \text{ mm}$
 $d = 6 \text{ mm}$

Resulta:

$$I_Z = 66960 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 54000 \text{ mm}^4$$

Sección 2-2:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

Para $a = 30 \text{ mm}$
 $b = 30 \text{ mm}$

Tenemos:

$$I_Z = 67500 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 67500 \text{ mm}^4$$

Sección 3-3:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

Evaluando

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

Nos queda:

$$I_Z = 45000 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 20000 \text{ mm}^4$$

Sección 4-4:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{a \cdot d^3}{12} = \frac{a \cdot (b^3 - d^3)}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{d \cdot a^3}{12} = \frac{(b - d) \cdot a^3}{12}$$

Donde

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

resultando:

$$I_Z = 37944 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 15946 \text{ mm}^4$$

6.1.2. Para el eslabón 2.

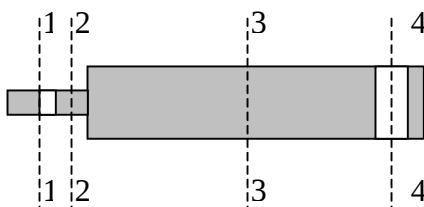


Figura 6.3 Eslabón 2.

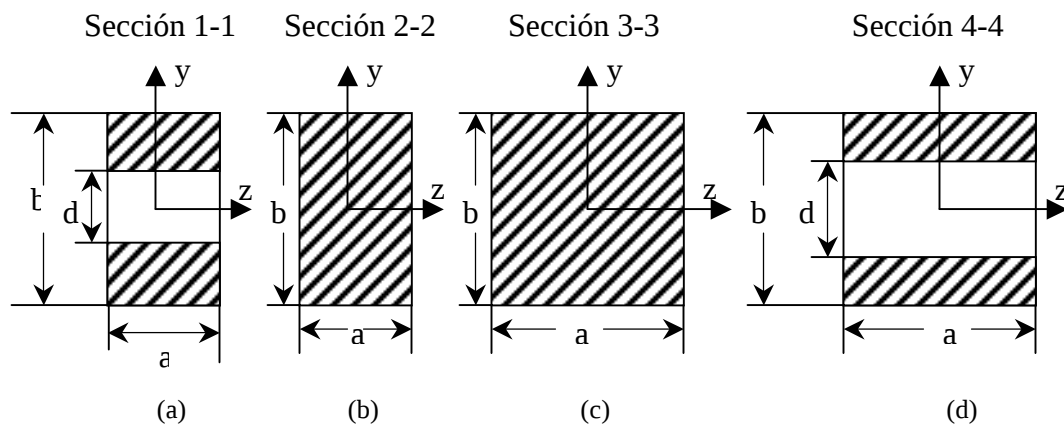


Figura 6.4 Secciones de corte del eslabón 2.

Los momentos de inercia son:

Sección 1-1:

$$I_z = \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{a \cdot d^3}{12} = \frac{a \cdot (b^3 - d^3)}{12}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{d \cdot a^3}{12} = \frac{(b - d) a^3}{12}$$

Donde

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

Entonces:

$$I_Z = 37944 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 15946 \text{ mm}^4$$

Sección 2-2:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

Evaluyendo

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

Nos queda:

$$I_Z = 45000 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 20000 \text{ mm}^4$$

Sección 3-3:

$$I_Z = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

Para:

$$a = 30 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

Tenemos:

$$I_Z = 67500 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 67500 \text{ mm}^4$$

Sección 4-4:

$$I_z = \frac{a \cdot b^3}{12} - \frac{a \cdot d^3}{12} = (b^3 - d^3) \cdot \frac{a}{12} \qquad I_y = \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{d \cdot a^3}{12} = (b - d) \cdot \frac{a^3}{12}$$

Donde

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

Resultando:

$$I_z = 63180 \text{ mm}^4$$

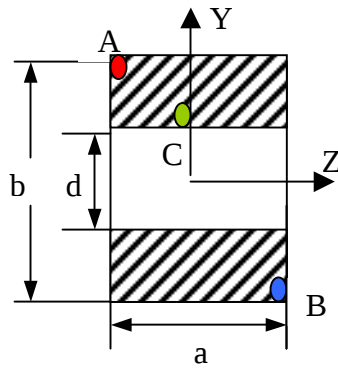
$$I_y = 40500 \text{ mm}^4$$

6.2 Cálculo de esfuerzos en el eslabón 3

Como se observó en los Diagramas de Momento Flector para los planos XY y XZ, correspondientes a este eslabón, los momentos flectores son mayores cuando el cuerpo está en movimiento en comparación a los momentos flectores que sufre el eslabón cuando la pata está en transferencia. Lo mismo sucede con los Diagramas de Fuerza Cortante que soporta el eslabón en los planos XY y XZ ; son mayores cuando el cuerpo está en movimiento, que cuando está fijo mientras se realiza la transferencia de la pata. Mas aún, estos máximos momentos flectores y fuerzas cortantes ocurren en el extremo del eslabón; donde la sección que las soporta es la de menor área (Figura 6.2-d).

Por esta razón, el criterio que se usa es el de evaluar, a través de la Teoría de Falla de Von Misses-Hencky, el esfuerzo en ésta sección y comprobar que no fallará, comparando con el esfuerzo de fluencia del material del cual está hecho. Si ésta sección no falla; mucho menos las otras donde los momentos flectores M_Z y M_Y y las fuerzas cortantes V_Z y V_Y son menores y además actúan sobre secciones más robustas.

Entonces, la sección a evaluar es:



Donde:

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

Y los Momentos de Inercia son:

$$I_Z = 37944 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = 15946 \text{ mm}^4$$

Figura 6.5 Sección transversal del eslabón donde ocurren los máximos momentos flectores y fuerzas cortantes.

6.2.1 Esfuerzo normal por flexión.

El esfuerzo normal por flexión en una viga se calcula por la ecuación:

Ecuación Generalizada del esfuerzo normal:

$$\sigma_x = \frac{(M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz})Z - (M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz})Y}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \quad \text{Ec 6.1}$$

La geometría de la Figura 6.5 es simétrica, con respecto al eje Y como con respecto al eje Z, por lo que el producto de inercia $I_{YZ} = 0$. Entonces, la ecuación 6.1 se reduce a:

$$\sigma_x = \frac{(M_y \cdot I_z) \cdot Z - (M_z \cdot I_y) \cdot Y}{I_y \cdot I_z} \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_y \cdot Z}{I_y} - \frac{M_z \cdot Y}{I_z} \quad \text{Ec. 6.2}$$

Los momentos M_Y y M_Z para la sección que se evalúa, se obtienen de las Tablas 5.31 y 5.29, respectivamente y sus magnitudes son:

$$M_Y = -5634 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

$$M_Z = 9660 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

En la Figura 6.5 se observa los puntos A y B en la sección. El punto A representa la fibra donde ocurre la máxima tracción y el punto B donde ocurre la máxima compresión. Evaluando el esfuerzo en estos dos puntos tenemos:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN MAX.}} = \frac{M_Y \cdot (-\frac{a}{2})}{I_Y} - \frac{(M_Z) \cdot \frac{b}{2}}{I_Z} = \frac{-5634 \cdot (-\frac{20}{2})}{15946} + \frac{9660 \cdot \frac{30}{2}}{37944} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ TRACCIÓN MÁX.}} = 7,25 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

$$\sigma_{x \text{ COMPRESIÓN MAX.}} = \frac{M_Y \cdot \frac{a}{2}}{I_Y} - \frac{(M_Z) \cdot (-\frac{b}{2})}{I_Z} = \frac{-5634 \cdot \frac{20}{2}}{15946} + \frac{9660 \cdot (-\frac{30}{2})}{37944} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{COMPRESIÓN MÁX.}} = -7,25 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

6.2.2 Esfuerzo axial.

Cuando sobre una viga actúan fuerzas axiales, se produce en cualquiera de sus secciones transversales una distribución uniforme de esfuerzos que podemos evaluar a través de la ecuación 6.3.

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad \text{Ec. 6.4}$$

Donde:

F: es la fuerza axial que soporta el eslabón y cuyo máximo valor se obtiene de la Tabla 5.16.

A: es el área de la sección transversal del eslabón.

En este caso:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN AXIAL}} = \frac{F}{A} = \frac{R_{BX}}{\text{Area}} = \frac{19,56}{(a) \cdot (b-d)} = \frac{19,56}{360} = 0,054 \text{ Kg/mm}^2$$

6.2.3 Esfuerzo cortante

Se usa la ecuación del Esfuerzo Cortante Generalizado:

$$\tau_x^y = \frac{V_y \cdot (I_{yz} \int z \cdot d_A - I_y \int y \cdot d_A)}{a \cdot (I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \text{Ec. 6.5}$$

$$\tau_x^z = \frac{V_z \cdot (I_{yz} \int y \cdot d_A - I_z \int z \cdot d_A)}{b \cdot (I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \text{Ec. 6.6}$$

La ecuación 6.5 permite evaluar el esfuerzo cortante en dirección Y, mientras que la ecuación 6.6 lo evalúa en dirección Z.

Como hay simetría en la sección de la Figura 6.5, el producto de inercia $I_{YZ} = 0$. Entonces nos queda:

$$\tau_y = \frac{-V_y \int y \cdot d_A}{a \cdot I_z} \quad \text{Ec. 6.7} \quad ; \quad \tau_z = \frac{-V_z \int z \cdot d_A}{b \cdot I_y} \quad \text{Ec. 6.8}$$

Las fuerzas cortantes V_Y y V_Z , para esta sección, se obtienen de las Tablas 5.28 y 5.30, respectivamente y sus magnitudes son:

$$V_Y = 93,73 \text{ Kg}$$

$$V_Z = -17,5 \text{ Kg}$$

Simplificando las ecuaciones anteriores :

$$\tau_y = \frac{-V_y \int y \cdot d_A}{a \cdot I_z} = \frac{-V_y \cdot \left(\frac{b}{2} - y \right) \cdot a \cdot \left(\frac{b}{2} - y \right)}{a \cdot I_z}$$

$$\Rightarrow \tau_y = \frac{-V_y \cdot \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right)}{2 \cdot I_z} \quad \text{Ec. 6.9}$$

Del mismo modo:

$$\tau_z = \frac{-V_z \int z \cdot d_A}{b \cdot I_y} = \frac{-V_z \cdot \left(\frac{\frac{a}{2} - z}{2} + z\right) \cdot b \cdot \left(\frac{a}{2} - z\right)}{b \cdot I_y}$$

$$\Rightarrow \tau_z = \frac{-V_z \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2\right)}{2 \cdot I_y} \quad \text{Ec. 6.10}$$

Las ecuaciones 6.9 y 6.10 dependen de la fibra que se analice. En la ecuación 6.9, la fibra se representa en función del valor de “y” que se tome. Como se observa en la Figura 6.5, “y” varía desde d/2 hasta b/2. Analizando estos extremos:

Para y = d/2 :

$$\tau_y = \frac{-V_y \cdot \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)}{2 \cdot I_z} = \frac{-(93,73) \cdot \left(\left(\frac{30}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2\right)}{2 \cdot 37944} = 0,23 \text{ Kg/mm}^2$$

Para y = b/2 :

$$\tau_y = \frac{-V_y \cdot \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}{2 \cdot I_z} = 0$$

Tal como era de esperarse, en una sección sometida a esfuerzo cortante τ_y es máximo cuando y = d/2, es decir en la periferia, y es cero cuando y = b/2.

En el caso de τ_z , la fibra se representa por la variación de z que se tome. En este caso, como se observa en la Figura 6.5, “z” varía desde 0 hasta a/2. Analizando ahora estos extremos:

Para $z = 0$:

$$\tau_z = \frac{-V_z \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 0\right)}{2 \cdot I_y} = \frac{(-17,5) \cdot \left(\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 0\right)}{2 \cdot 15946} = -0,054 \text{ Kg/mm}^2$$

Para $z = a/2$:

$$\tau_z = \frac{-V_z \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}{2 \cdot I_y} = 0$$

Después de haber hecho el análisis, se observa que el esfuerzo cortante (tanto τ_y como τ_z) es menor en comparación con la magnitud de σ_x correspondiente a la fibra en la cual τ_y y τ_z son máximos.

Comparemos:

Veremos cuanto vale σ por flexión en el punto C de la Figura 6.5 que es donde τ se hace máximo. Entonces:

$$\sigma_{x \text{ (EN C)}} = \frac{-M_Y \cdot (0)}{I_Y} - \frac{(-M_Z) \cdot \frac{d}{2}}{I_Z} = \frac{-5634 \cdot (0)}{15946} + \frac{9660 \cdot \frac{12}{2}}{37944} > \tau_{\text{máx.}}$$

$$1,52 \text{ Kg/mm}^2 > 0,23 \text{ Kg/mm}^2$$

Por esta razón se analizará las fibras más exteriores, donde $\tau = 0$ y σ_x TRACCIÓN por flexión es máxima.

6.2.4 Esfuerzos principales

Los esfuerzos principales vienen dados por:

$$1. \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} \quad \text{Ec. 6.11}$$

$$2. \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} \quad \text{Ec. 6.12}$$

Donde σ_x es resultado de sumar el Esfuerzo Normal por Flexión más el Esfuerzo Axial. Puesto que el mayor esfuerzo axial se produce a tracción, le sumaremos a éste el esfuerzo normal por flexión en la fibra A de la Figura 6.5. Entonces:

$$\sigma_x = \sigma_{x \text{ POR FLEXIÓN}} + \sigma_{x \text{ POR AXIAL}} = 7,25 + 0,054 = 7,304 \text{ Kg/mm}^2$$

En lo que respecta a τ se considera la torsión que le produce al eslabón la fuerza F_4 , que actúa en él como indica la Figura 6.6.

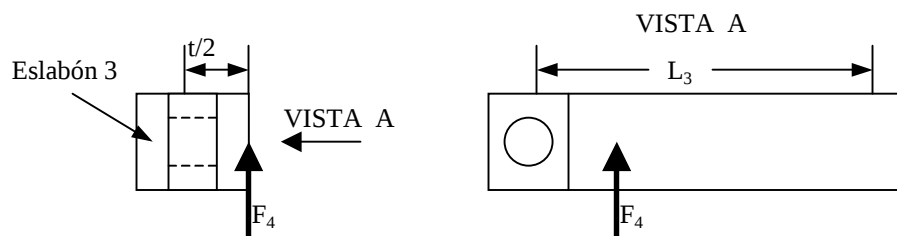


Figura 6.6 Fuerza de torsión en el eslabón 3

Esta fuerza F_4 le produce al eslabón 3, un momento torsor M_T :

$$M_T = F_4 \cdot \frac{t}{2};$$

Donde: F_4 : se obtiene de la Tabla 5.20 y tiene un máximo valor $F_4 = 35,53 \text{ Kg}$

t: es el espesor del eslabón 3 y vale $t = 30 \text{ mm}$.

$$\Rightarrow M_T = 35,53 \text{ Kg} \cdot \frac{30 \text{ mm}}{2} = 532,95 \text{ Kg} \cdot \text{mm}.$$

Sin embargo este momento torsor produce en el eslabón un esfuerzo muy pequeño, que se evalúa así:

Para una viga de sección maciza:

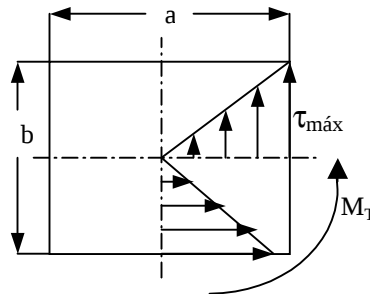


Figura 6.7 Distribución de esfuerzos por torsión

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{C_1 \cdot a \cdot b^3} \quad a > b$$

donde C_1 se obtiene de la Tabla 6.1:

a/b	C_1
1	0,208
1,2	0,219
1,5	0,231
2	0,246
2,5	0,258
3	0,267
4	0,282
5	0,291
10	0,312
∞	0,333

Tabla 6.1 Coeficientes de esfuerzos por torsión C_1 para una sección rectangular

Para la sección que se analiza (Figura 6.5):

$$\left. \begin{array}{l} a = 30 \text{ mm} \\ b = 20 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 0,231$$

Luego:

$$\tau_{\max} = \frac{532,95 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{0,231 \cdot 30 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^2} = 0,192 \text{ Kg/mm}^2$$

Por esta razón, las ecuaciones 6.11 y 6.12 se reducen a:

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} = \frac{7,304}{2} \pm \sqrt{\frac{(7,304)^2}{4} + (0,192)^2} \\ \sigma_2 = -0,005 \text{ Kg/mm}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_1 = 7,31 \text{ Kg/mm}^2$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} = \pm \sqrt{\frac{(7,304)^2}{4} + (0,192)^2} \\ \tau_2 = -3,657 \text{ Kg/mm}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_1 = 3,657 \text{ Kg/mm}^2$$

6.2.5. Criterio de falla de Von Misses-Hencky

Para evitar la falla, siempre se debe cumplir que:

$$\sigma' \leq S_y \quad \text{Donde:}$$

$$\sigma' = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}$$

S_Y es el esfuerzo a la fluencia del material.

Entonces:

$$\sigma' = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2} = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot 0 + 0^2)^{1/2} = \sigma_1 = 7,31 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

Obsérvese que se desprecia el valor de σ_2 , ya que su valor es apenas $0,005 \text{ Kg/mm}^2$.

No obstante, la sección de la Figura 6.5 presenta concentración de esfuerzos. Por lo tanto se debe considerar el correspondiente factor k_t que se toma de la Gráfica (Apéndice A.1). De allí se obtiene $k_t = 1,8$

Entonces, el máximo esfuerzo es: $\sigma' = 7,31 \cdot 1,8 = 13,16 \text{ Kg/mm}^2$

El eslabón es de Aluminio 2024 T3 (Nomenclatura ASTM) cuya composición es la siguiente:

4,5% Cu,
1.5% Mg,
0.6% Mn,

y que presenta una resistencia a la fluencia de $34,4 \text{ Kg./mm}^2$ (Apéndice A.2).

Este tipo de aluminio presenta además la siguientes propiedades:

Resistencia a la tracción $S_{ut} = 482 \text{ Mpa} \cong 48 \text{ Kg/mm}^2$

Resistencia a la fluencia $S_y = 345 \text{ Mpa} \cong 34,5 \text{ Kg/mm}^2$

Efectivamente,

$$\sigma' = 13,16 \text{ Kg/mm}^2 < S_Y = 34,5 \text{ Kg./mm}^2$$

Sin embargo, este valor de σ' sólo considera el máximo esfuerzo a que está sometido el eslabón pero de forma estática. Lógicamente el robot se moverá y aunque de modo discontinuo, hay una fluctuación en los esfuerzos que sufre el eslabón. Por esta razón, se debe comparar el esfuerzo máximo obtenido (σ') con el valor de resistencia a la fatiga del elemento.

6.2.6 Resistencia a la fatiga.

El límite de resistencia a la fatiga S_f' para los aluminios se considera arbitrariamente como el esfuerzo que corresponde a la falla después de 500 millones de ciclos de carga, ya que las aleaciones de aluminio no tienen límite de fatiga. Sin embargo, en el caso del robot, cada ciclo de carga corresponde a un avance del robot y puesto que cada avance del robot dura aproximadamente 80 segundos; se tiene que trabajando a un ritmo de 8 horas diarias, el robot sólo puede hacer 360 ciclos; o sea 360 avances al día. Entendiéndose por avance al movimiento del robot desde una posición en la cual están apoyadas sus 4 patas hasta otra posición exactamente igual a la anterior, incluyendo la transferencia de cada una de sus patas.

Suponiendo, entonces, como límite de fatiga (S_f') el esfuerzo correspondiente a la falla para $5 \cdot 10^6$ ciclos de carga (vida finita) se obtiene de la Tabla A.3, para el aluminio 2024 T3:

$$S_e' = 25 \cdot 10^3 \text{ psi} = 17,6 \text{ Kg/mm}^2$$

Para $5 \cdot 10^6$ ciclos de carga, el eslabón tendría una vida de 38 años

$$\frac{5 \cdot 10^6 \text{ ciclos} \cdot \text{dia} \cdot 1 \text{ año}}{360 \text{ ciclos} \cdot 365 \text{ dias}} = 38 \text{ años.}$$

Ahora bien, el límite de fatiga para la geometría en particular del eslabón 3 puede ser obtenido, según la ecuación 2.26, como:

$$S_f = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot S_f'$$

Evaluando estos factores de Marín:

Factor de superficie k_a .

De acuerdo a la Tabla 2.2, para un acabado maquinado:

$$a = 4,51 \text{ y } b = -0,265$$

Según la ecuación 2.27

$$k_a = a \cdot S_{ut}^b. \text{ Entonces:}$$

$$k_a = 4,51 \cdot 482^{-0,265} = 0,8773$$

Factor de tamaño k_b .

Para la sección rectangular de la Figura 6.5, según la ecuación 2.32, tenemos que el diámetro equivalente es:

$$d_e = 0,808 \cdot (h \cdot b)^{1/2} = 0,808 \cdot (20\text{mm} \cdot 30\text{mm})^{1/2} = 19,791 \text{ mm.}$$

Entonces, la ecuación 2.28 permite evaluar el valor de k_b :

$$k_b = \left(\frac{19,791}{7,62} \right)^{-0,1133} = 0,8975$$

Factor de carga k_c .

De la ecuación 2.35, para flexión:

$$k_c = 1$$

Factor de temperatura k_d .

De la Tabla 2.3 , $k_d = 1$ ya que el robot opera a temperatura ambiente.

Factor de efectos diversos k_e .

$$k_e = \frac{1}{k_f}, \text{ donde } k_f = 1 + q \cdot (k_t - 1)$$

q es la sensibilidad a la muesca y se obtiene de la Gráfica (Apéndice A.4).

$$q = 0,75$$

Entonces,

$$k_f = 1 + 0,75 \cdot (1,18 - 1) = 1,135$$

Luego,

$$K_e = \frac{1}{1,135} = 0,88$$

Finalmente,

$$S_f = 0,8773 \cdot 0,8975 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,88 \cdot 17,6 \text{ Kg/mm}^2 = 12,2 \text{ Kg/mm}^2$$

Lo que deja un factor de seguridad de:

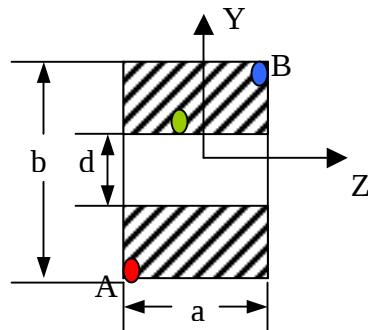
$$F.S. = \frac{S_f}{\sigma} = \frac{12,2}{7,31} = 1,67$$

6.3 Cálculo de esfuerzos en el eslabón 2

Aquí a diferencia del eslabón 3, los máximos esfuerzos no se reflejan claramente, ya que como puede apreciarse en las Figuras 5.49, 5.50, 5.52 y 5.53, para la pata en

transferencia, los mayores momentos flectores y fuerzas cortantes ocurren en A que es la sección más débil del eslabón (Figura 6.4-a). Sin embargo, los máximos momentos flectores y fuerzas cortantes se producen, en el eslabón, cuando el cuerpo está en movimiento y son mayores que los anteriores pero ocurren en la sección que se observa en la Figura 6.4-d, que no es precisamente la más débil, así que hay que comparar estas dos situaciones a fin de determinar cuáles son los mayores esfuerzos que soporta el eslabón.

Entonces, las secciones a evaluar son:



Donde:

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

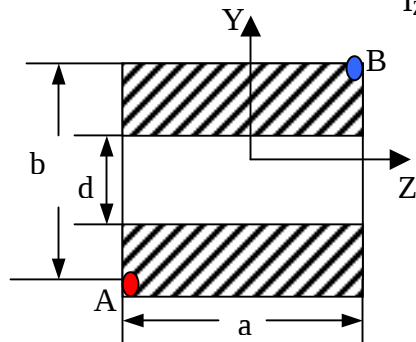
$$d = 12 \text{ mm}$$

Figura 6.8 Sección transversal del eslabón donde ocurren los mayores momentos flectores y fuerzas cortantes cuando la pata está en transferencia.

Y los Momentos de Inercia son:

$$I_Y = 15946 \text{ mm}^4$$

$$I_Z = 37944 \text{ mm}^4$$



Donde:

$$a = 30 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$

Figura 6.9 Sección transversal del eslabón donde ocurren los máximos momentos flectores y fuerzas cortantes cuando la pata está fija, mientras el cuerpo está en movimiento.

Y los Momentos de Inercia son:

$$I_Y = 40500 \text{ mm}^4$$

$$I_Z = 63180 \text{ mm}^4$$

6.3.1 Esfuerzo normal por flexión.

Las Figuras 6.8 y 6.9 son simétricas, con respecto al eje Y como con respecto al eje Z. Por lo tanto el producto de inercia $I_{YZ} = 0$. Entonces, se evalúa el esfuerzo normal por flexión, en ambas secciones, a través de la ecuación 6.2

1.- Sección de la Figura 6.8:

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot Z}{I_y} - \frac{M_z \cdot Y}{I_z}$$

Los momentos M_Z y M_Y , se obtienen de las Tablas 5.13 y 5.15 respectivamente para la pata en transferencia, y sus magnitudes son:

$$M_Z = 0 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

$$M_Y = -1074 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

El punto A de la Figura 6.8 representa la fibra donde ocurre la máxima tracción y el punto B donde ocurre la máxima compresión. Evaluando el esfuerzo en estos dos puntos tenemos:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN MÁX.}} = \frac{M_Y \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)}{I_Z} = \frac{-1074 \cdot \left(-\frac{20}{2}\right)}{15946} + \frac{0 \cdot \left(-\frac{30}{2}\right)}{37944} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ TRACCIÓN MÁX.}} = 0,673 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

$$\sigma_{x \text{ COMPRESIÓN MAX.}} = \frac{M_Y \cdot \frac{a}{2}}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot \frac{b}{2}}{I_Z} = \frac{-1074 \cdot \frac{20}{2}}{15946} + \frac{0 \cdot \frac{30}{2}}{37944} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ COMPRESIÓN MÁX.}} = -0,673 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

2.- Sección de la Figura 6.9:

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot Z}{I_y} - \frac{M_z \cdot Y}{I_z}$$

Los momentos M_Y y M_Z , se obtienen de las Tablas 5.41 y 5.39, respectivamente y sus magnitudes son con el cuerpo en movimiento:

$$M_Y = -2743 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

$$M_Z = 1668,5 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

El punto A de la Figura 6.9 representa la fibra donde ocurre la máxima tracción y el punto B donde ocurre la máxima compresión. Evaluando el esfuerzo en estos dos puntos, se tiene:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN MAX.}} = \frac{M_Y \cdot (-\frac{a}{2})}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot (-\frac{b}{2})}{I_Z} = \frac{-2743 \cdot (-\frac{30}{2})}{40500} - \frac{1668,5 \cdot (-\frac{30}{2})}{63180} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ TRACCIÓN MÁX.}} = 1,41 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

$$\sigma_{x \text{ COMPRESIÓN MAX.}} = \frac{M_Y \cdot \frac{a}{2}}{I_Y} - \frac{M_Z \cdot \frac{b}{2}}{I_Z} = \frac{-2743 \cdot \frac{30}{2}}{40500} - \frac{1668,5 \cdot \frac{30}{2}}{63180} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ COMPRESIÓN MÁX.}} = -1,41 \text{ [Kg/mm}^2\text{]}$$

6.3.2 Esfuerzo axial.

Comparando las Tablas 5.9 y 5.23 se puede apreciar que es mayor la fuerza axial que soporta el eslabón cuando el cuerpo está en movimiento, que cuando la pata se encuentra en transferencia. En el primer caso, cuando el cuerpo está en movimiento, la mayor fuerza axial que soporta el eslabón es $R_{AX} = 10.44 \text{ Kg}$ de tracción, mientras que cuando la pata está en transferencia, la mayor fuerza axial que soporta es $R_{AX} = 3.8 \text{ Kg}$. a compresión. Evaluando estas fuerzas axiales en sus correspondientes secciones de las Figuras 6.8 y 6.9:

1.- Sección de la Figura 6.8:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN AXIAL}} = \frac{R_{AX}}{\text{Area}} = \frac{R_{AX}}{(a) \cdot (b - d)} =$$

$$\Rightarrow \sigma_{x \text{ TRACCIÓN AXIAL}} = \frac{3,8 \text{ Kg}}{360 \text{ mm}^2} = 0,01 \text{ Kg/mm}^2$$

2.- Sección de la Figura 6.9:

$$\sigma_{x \text{ TRACCIÓN AXIAL}} = \frac{R_{AX}}{\text{Area}} = \frac{R_{AX}}{a \cdot (b - d)} = \frac{10,44 \text{ Kg}}{540 \text{ mm}^2} = 0,02 \text{ Kg/mm}^2$$

6.3.3 Esfuerzo cortante

Al igual que en el eslabón 3, el máximo esfuerzo cortante a que está sometido éste eslabón es pequeño en comparación con el esfuerzo normal; por lo tanto no hay necesidad de calcularlo. Al igual que en el caso anterior se usa el criterio de Von Misses.

6.3.4 Esfuerzos principales

Del mismo modo que en el caso anterior, los esfuerzos principales vienen dados por:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} \quad ; \quad \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2}$$

Donde σ_x es resultado de sumar el Esfuerzo Normal por Flexión más el Esfuerzo Axial.

Cálculo de σ_x para la sección de la Figura 6.8 :

Puesto que el mayor esfuerzo axial se produce en la sección de la Figura 6.8, se le suma a éste, el esfuerzo normal por flexión en la fibra sometida a mayor tracción (punto A en la Figura 6.8). Entonces:

$$\sigma_x = \sigma_{x \text{ POR FLEXIÓN}} + \sigma_{x \text{ POR AXIAL}} = 0,673 + 0,01 = 0,683 \text{ Kg/mm}^2$$

Cálculo de σ_x para la sección de la Figura 6.9 :

Puesto que cuando el cuerpo está en movimiento, el mayor esfuerzo axial en el eslabón 2 se produce a tracción, le sumaremos a éste, el esfuerzo normal por flexión en la fibra sometida a mayor tracción (punto A en la Figura 6.9). Entonces:

$$\sigma_x = \sigma_x \text{ POR FLEXIÓN} + \sigma_x \text{ POR AXIAL} = 1,41 + 0,02 = 1,43 \text{ Kg/mm}^2$$

De los cálculos anteriores se concluye que el máximo esfuerzo normal (σ_x) para el eslabón, se produce cuando el cuerpo está en movimiento; es decir, para la sección de la Figura 6.9.

Por otra parte, en la fibra más exterior, se puede aproximar $\tau = 0$, ya que el esfuerzo de torsión es muy pequeño. Además los motores actúan a ambos lados del eslabón, lo que minimiza el esfuerzo de torsión. Tomando este valor, las ecuaciones de los esfuerzos principales se reducen a:

$$1. \quad \sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 0} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{\sigma_x}{2} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_x = 1,43 \text{ Kg/mm}^2 \\ \sigma_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$2. \quad \tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau^2} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + 0} = \pm \frac{\sigma_x}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{\sigma_x}{2} = 0,715 \text{ Kg/mm}^2 \\ \tau_2 = -\frac{\sigma_x}{2} = -0,715 \text{ Kg/mm}^2 \end{array} \right.$$

6.3.5. Criterio de falla de Von Misses-Hencky

Para evitar la falla, siempre se debe cumplir que:

$$\sigma' \leq S_y$$

Donde:

$$\sigma' = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}$$

S_Y es el esfuerzo a la fluencia del material.

Entonces:

$$\sigma' = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2} = (\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot 0 + 0^2)^{1/2} = \sigma_x = 1,43 \text{ Kg/mm}^2$$

No obstante, la sección de la Figura 6.9 presenta concentración de esfuerzos, que se evalúa a través de la Grafica (Apéndice A.1). De allí se obtiene el valor de $K_t = 2$.

Entonces el máximo esfuerzo es: $\sigma' = 1,43 \cdot 2 = 2,86 \text{ Kg/mm}^2$

El eslabón también está hecho de Aluminio 2024T3 (Nomenclatura ASTM) que presenta una resistencia a la fluencia de $34,5 \text{ [Kg/mm}^2 \text{]}$.

Efectivamente,

$$\sigma = 2,86 \text{ Kg/mm}^2 < S_Y = 34,5 \text{ [Kg/mm}^2 \text{]}$$

Por ser esta sección más robusta que la analizada en el eslabón 3 y debido que los esfuerzos son menores, el cálculo de falla por fatiga no es necesario.

Lo que deja un factor de seguridad de:

$$F.S. = \frac{S_Y}{\sigma} = \frac{34,5}{2,86} = 12,06$$

6.4. Análisis de esfuerzos por Visual Nastran v. 6.2.

Los esfuerzos calculados de manera convencional, se pueden verificar a través del software Visual Nastran v. 6.2, que evalúa los esfuerzos en una pieza específica usando el método de elementos finitos.

Para evaluar los esfuerzos en una pieza, es necesario introducir en el programa el tipo de sollicitación que ésta soporta.

6.4.1. Esfuerzos en el eslabón 2.

Apoyados en las Figuras 5.36 y 5.37, se puede visualizar las distintas cargas y momentos en este eslabón para cada plano de referencia XY y XZ.

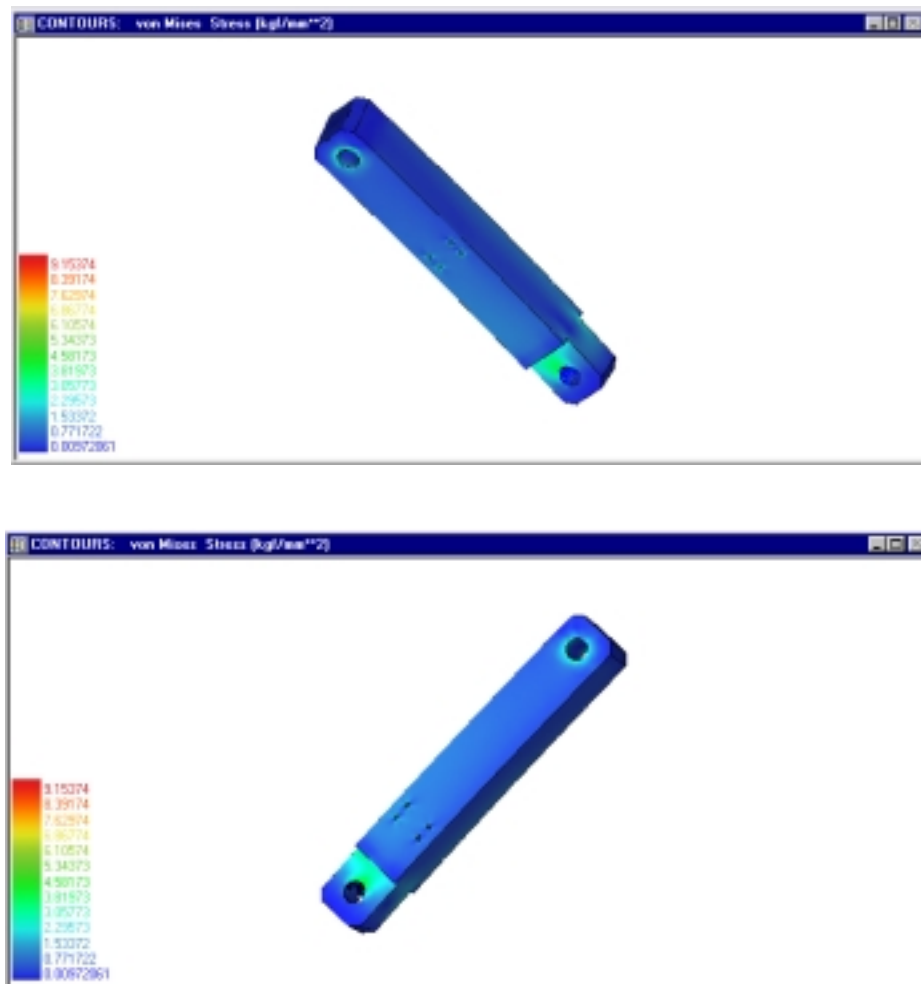


Figura 6.10. Análisis de esfuerzos (Von Mises) del eslabón 2.

6.4.2. Esfuerzos en el eslabón 3.

Apoyados en las Figuras 5.33 y 5.35, se puede visualizar las distintas cargas y momentos en este eslabón para cada plano de referencia XY y XZ.

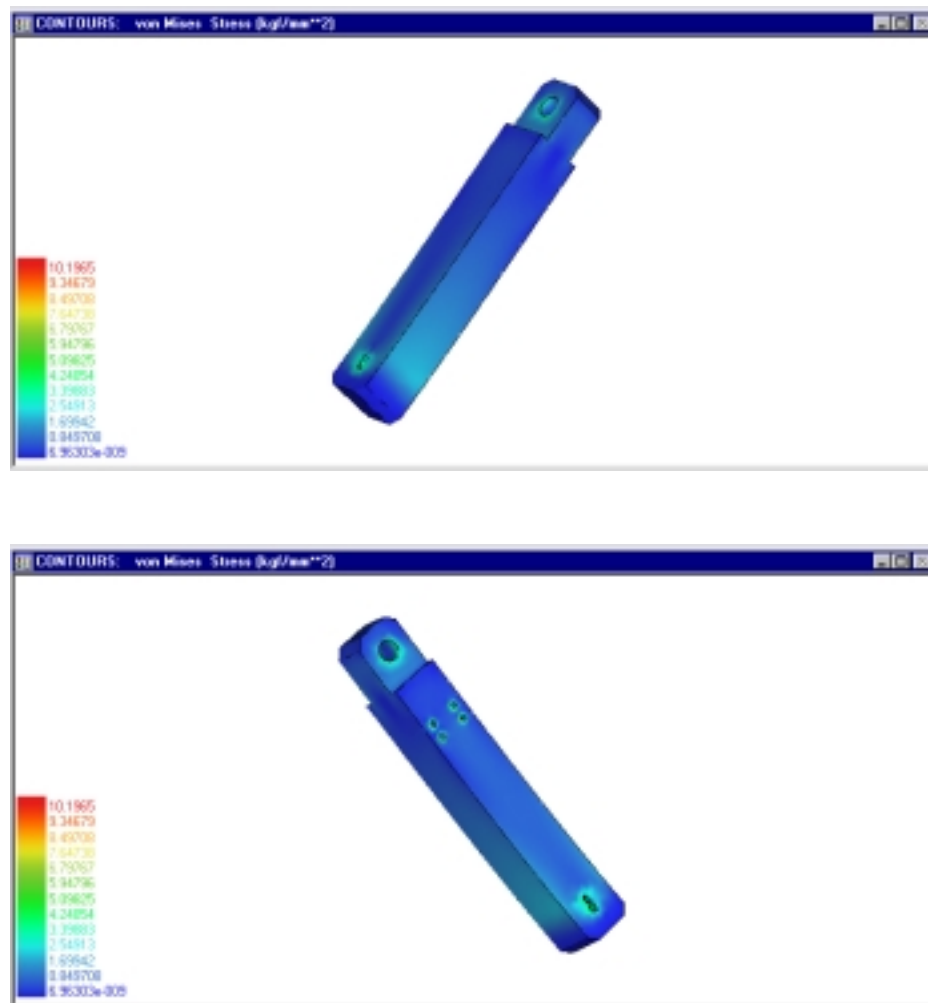


Figura 6.11. Análisis de esfuerzos (Von Mises) del eslabón 3.

6.4.3. Esfuerzos en el eslabón 1.

Debido a la complejidad de la geometría, solo se evalúan los esfuerzos soportados por éste eslabón usando el software Visual Nastran. Las solicitaciones que soportan vienen dadas por la interacción que éste tiene con respecto al eslabón 2 y el cuerpo del robot, a través de sus articulaciones.

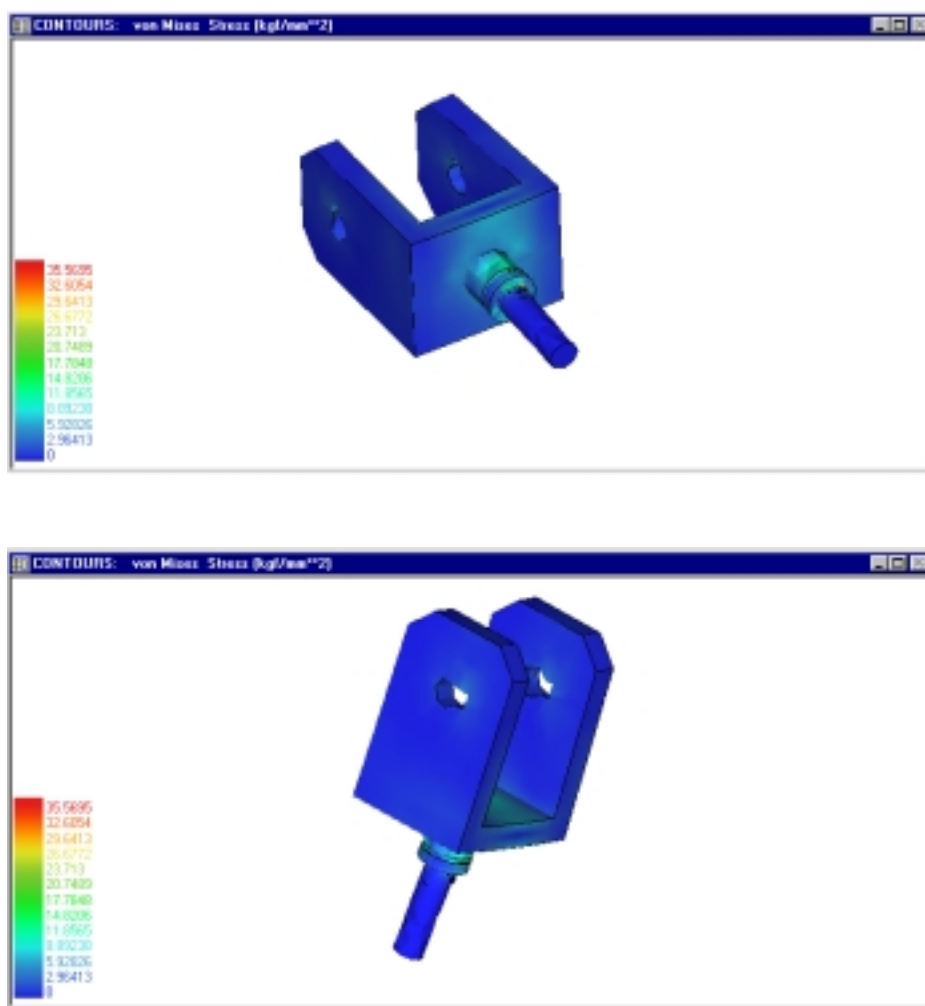


Figura 6.12. Análisis de esfuerzos (Von Mises) del eslabón 1.

Como lo indica la Figura 6.12, el máximo esfuerzo que éste eslabón soporta es $\sigma = 35,57 \text{ Kg/mm}^2$. Para garantizar que este eslabón no falle se debe cumplir que:

$$\sigma < S_y$$

Donde S_y es el esfuerzo de fluencia del material con que está hecho. El eslabón es de acero AISI 4340, que tiene un $S_y = 70 \text{ Kg/mm}^2$ (Apéndice A.5). Comparando:

$$\sigma = 35,57 \text{ Kg/mm}^2 < S_y = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

6.4.4. Esfuerzos en el eslabón 4.

También, debido a la complejidad de su geometría, solo se evalúan los esfuerzos soportados por éste eslabón usando el software. Las solicitaciones que soportan vienen dadas por la interacción que éste tiene con respecto al eslabón 3 y la pared de escalado.

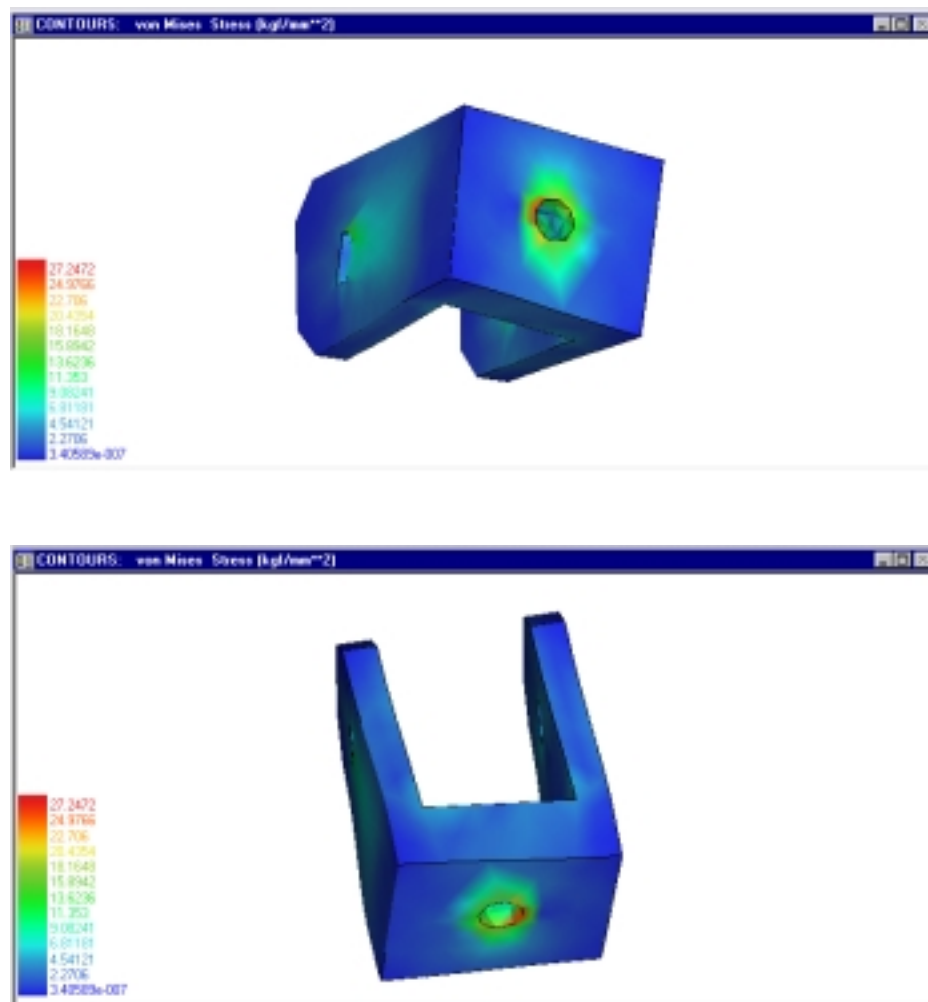


Figura 6.13. Análisis de esfuerzos (Von Mises) del eslabón 4.

Como lo indica la Figura 6.13, el máximo esfuerzo que éste eslabón soporta es $\sigma = 27,24 \text{ Kg/mm}^2$. También éste eslabón es de acero AISI 4340, que tiene un $S_y = 70 \text{ Kg/mm}^2$. Comparando:

$$\sigma = 27,24 \text{ Kg/mm}^2 < S_y = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

6.4.5. Esfuerzo en el cuerpo del robot.

Al igual que en los eslabones 1 y 4, solo se evalúan los esfuerzos soportados por éste eslabón usando el software. Las solicitaciones que soportan vienen dadas por la interacción que éste tiene con respecto a lo eslabones 1 de cada pata.

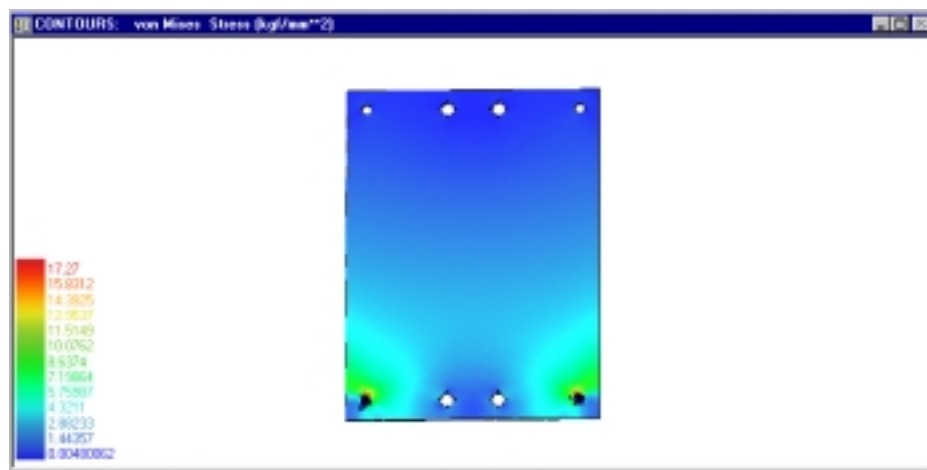


Figura 6.14. Análisis de esfuerzos (Von Mises) del cuerpo.

Como lo indica la Figura 6.14, el máximo esfuerzo que éste eslabón soporta es $\sigma = 17,27 \text{ Kg/mm}^2$. El cuerpo está hecho de aluminio 2024 T3, que tiene un $S_y = 32,4 \text{ Kg/mm}^2$. Comparando:

$$\sigma = 17,27 \text{ Kg/mm}^2 < S_y = 32,4 \text{ Kg/mm}^2$$

6.5. Deformación angular en los ejes que articulan los eslabones de la pata del robot.

Para efecto del control, es conveniente mantener las coordenadas exactas de los pies del robot a fin de garantizar que durante la fase de transferencia de cada pata algunas pequeñas deformaciones elásticas, sobre todo en los elementos menos robustos de la pata, puedan afectar dicho control.

6.5.1. Deformación en el eje 3-4:

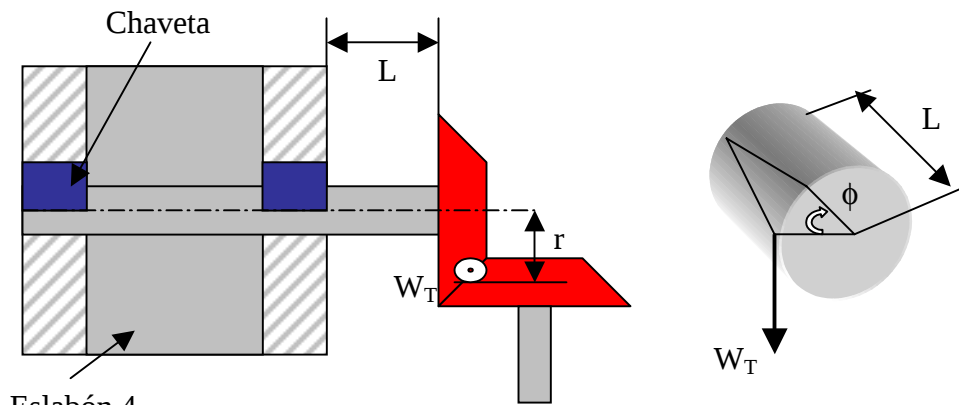


Figura 6.15. Deformación angular.

Puesto que el eje es una barra redonda maciza, la deformación angular viene dada por la siguiente ecuación:

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad \text{Ec. 6.13.}$$

En esta ecuación:

T: Momento torsor que sufre el eje y se calcula así:

$$T = (F_{4\text{máx}} \cdot r_4 \cdot a)$$

Donde: $F_{4\text{máx}} = 35,5 \text{ Kg.}$ (se obtiene de la Tabla 5.20)

$r_4 = 24 \text{ mm}$ (Figura 5.11)

$a = 3$ (relación de engrane)

Entonces:

$$T = 35,5 \text{ Kg} \cdot 24 \text{ mm} \cdot 3 = 2556 \text{ Kg}\cdot\text{mm}$$

L: Longitud del eje deformado

G: Modulo de rigidez del material $G = 11,5 \text{ Mpsi} = 7930 \text{ Kg/mm}^2$

(Apéndice A.6)

J: Momento polar de inercia de la sección transversal del eslabón

Para una barra redonda:

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad \text{Ec. 6.14}$$

Sustituyendo la ecuación 6.14 en la 6.13, se obtiene:

$$\phi = \frac{32 \cdot T \cdot L}{G \cdot \pi \cdot d^4} \quad \text{Ec.6.15}$$

Luego, para un eje de 6 mm de diámetro:

$$\phi = \frac{32 \cdot 2556 \cdot 11,5}{7930 \cdot \pi \cdot 6^4} = 2,91 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,6^\circ$$

6.5.2. Deformación en el eje 2-3:

En este caso:

$$T = 3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm} \text{ (Tabla 5.17)}$$

$$L = 37 \text{ mm}$$

Sustituyendo en la ecuación 6.15, se obtiene:

$$\phi = \frac{32 \cdot 3103,6 \cdot 43,5}{7930 \cdot \pi \cdot 6^4} = 0.06 \text{ rad} = 3,4^\circ$$

CAPITULO VII: CÁLCULO Y SELECCIÓN DE ACCESORIOS

7.1 Cálculo de esfuerzo en las bocinas.

Los materiales que se usaron para las bocina y los ejes son los siguientes:

Para el Eje:

Usaremos un acero AISI 1045 CD de 6 milímetros de diámetro. Este ofrece:

Resistencia a la tracción = 110 Kg/mm^2

Resistencia a la fluencia = 70 Kg/mm^2

Las Tablas (Apéndice A.5) y (Apéndice A.7) muestran algunas características de este tipo de acero.

Para la Bocina:

Usaremos Bronce Grafitado Sinterizado Autolubricante SAE 660.

Las bocinas sinterizadas, a diferencia de las clásicas fabricadas con bronce fundido centrifugado de estructura maciza, son producidas a partir del compactado a elevada presión, de polvos metálicos y grafito, y sinterizadas a alta temperatura bajo atmósfera controlada, obteniéndose así una estructura metálica con millones de poros interconectados (20% del volumen de la bocina) y millones de partículas de grafito uniformemente dispersas. Dichos poros interconectados, luego son saturados con aceite lubricante mediante alto vacío.

De esta forma se obtiene una bocina “autolubricante”, la que luego en su trabajo, sometida a presión y temperatura (ambas generadas por el eje en rotación), exuda

aceite por su diámetro interior formando una película autolubrificante que evita el contacto metálico entre ella y su eje.

Dicha película lubricante no se pierde (aún en aplicaciones verticales), ya que cuando el eje se detiene, todo el aceite exudado es nuevamente reabsorbido por la capilaridad en la bocina. Además, la gran ventaja de disponer en su estructura, de millones de partículas de grafito, algo que no es posible metalúrgicamente con broncees fundidos, le otorga una gran capacidad antifricción y de lubricación en seco.

La lubricación adicional prolonga de por vida la duración de estas bocinas sinterizadas. Se recomienda lubricar con aceite SAE 30 (previamente calentado a 60°C). Dada la característica de porosidad interconectada de estas bocinas, no es necesario efectuar agujeros y/o ranuras interiores de lubricación para que el aceite llegue al eje. Basta con que el aceite aportado entre en contacto con cualquier superficie externa de la bocina, (algunos de sus cantos o diámetro exterior), para que por acción de capilaridad (como una esponja) la bocina resulte saturada permanentemente con aceite.

Este tipo de bronce presenta, además una las siguientes propiedades:

Resistencia a la tracción $S_{ut} = 25 \text{ Kg/mm}^2$

Resistencia a la fluencia $S_y = 12,6 \text{ Kg/mm}^2$

Las Tablas (Apéndice A.5) y (Apéndice A.7) muestran algunas características de esta aleación de bronce.

Por otra parte, para el cálculo de esfuerzos en cada una de las bocinas, se consideran las mismas fuerzas y momentos que actúan sobre las articulaciones de los eslabones 2 y 3 cuando se hizo el análisis del cuerpo en movimiento en el Capítulo 5. Para

mayor claridad, es conveniente recordar la Figura 3.8 cuando se haga el cálculo de cada bocina.

7.1.1 Bocina entre el eslabón 1 y el cuerpo del robot.

Cuando el cuerpo está en posición de escalado vertical, en el extremo A del eslabón 2 se produce una fuerza $R_{AL} = 15,48 \text{ Kg.}$ (Figura 5.23) que actúa a una distancia $Z_A + t/2$ del centro de la bocina (tal como lo indica la Figura 7.1-a), lo que genera un Momento que puede ser definido también como un par de fuerzas F actuando en sentidos opuestos en los bordes de la bocina (Figura 7.1-b).

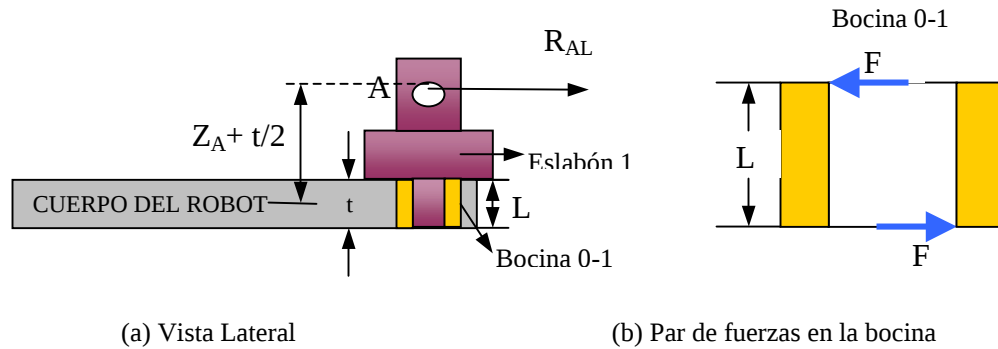


Figura 7.1 Momento soportado por la bocina.

Para efectos de cálculo, puede tomarse una de estas fuerzas F y considerarse uniformemente distribuida a todo lo largo (L) de la bocina. Tal como lo muestra la siguiente figura:

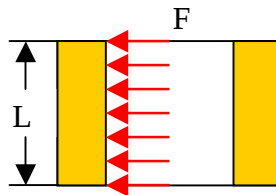


Figura 7.2 Fuerza radial distribuida en la bocina.

Para esta bocina de 3 milímetros de espesor y $L = 6$ milímetros. Entonces:

$$F = \frac{R_{AL} \cdot (Z_A + \frac{t}{2})}{L} = \frac{15,48 \text{ Kg} \cdot (27 + \frac{5}{2}) \text{ mm}}{6 \text{ mm}} = 76,11 \text{ Kg}.$$

Considerando la teoría del esfuerzo de apoyo, se tiene que el contacto eje-bocina produce un área proyectada que es igual a $L \cdot d$; donde L es el largo de la bocina y d es el diámetro interno de la bocina o lo que es lo mismo: es el diámetro del eje. Se pueden suponer casi iguales estos diámetros, para efectos de cálculos, ya que el juego que presentan es muy pequeño (presenta un ajuste con juego A11).

Así, la presión o esfuerzo máximo que soporta la bocina es, en consecuencia:

$$\sigma_{\text{máxima}} = \frac{F}{L \cdot d} = \frac{76,11 \text{ Kg}}{6 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}} = 1,27 \text{ Kg/mm}^2$$

El criterio que se usa para evaluar el riesgo de falla es el del American Institute of Steel Construction (AISC):

$$\sigma_{\text{permisible por aplastamiento}} = 0,9 \cdot S_y$$

Donde S_y es el esfuerzo de fluencia del material con que está hecha la bocina.

Esto permite comparar el esfuerzo máximo con este esfuerzo permisible por aplastamiento.

Así, la bocina no fallará si se cumple que:

$$\sigma_{\text{máxima}} \leq 0,9 \cdot S_y$$

Efectivamente:

$$\sigma_{\text{máxima}} = 1,27 \text{ Kg/mm}^2 < 0,9 \cdot S_y = 0,9 \cdot 12,6 = 11,34 \text{ Kg/mm}^2$$

También, sobre un extremo de este eslabón actúa la fuerza $R_{AZ} = 15,48$ (Figura 5.26) que se manifiesta cuando el robot se encuentra en posición de desplazamiento horizontal. Esta fuerza se transmite directamente a la bocina que articula el eslabón 1 con el cuerpo del robot, actuando en ella como una fuerza radial distribuida como indica la Figura 7.2.

La presión o esfuerzo que soporta la bocina, por consecuencia de ésta fuerza se calcula dividiendo R_{AZ} entre el área proyectada de la bocina, pero como R_{AZ} es menor que $F = 76,11 \text{ Kg.}$, el esfuerzo resulta menor que el anteriormente calculado.

7.1.2 Bocina entre el eslabón 1 y el eslabón 2 (Bocina 1-2)

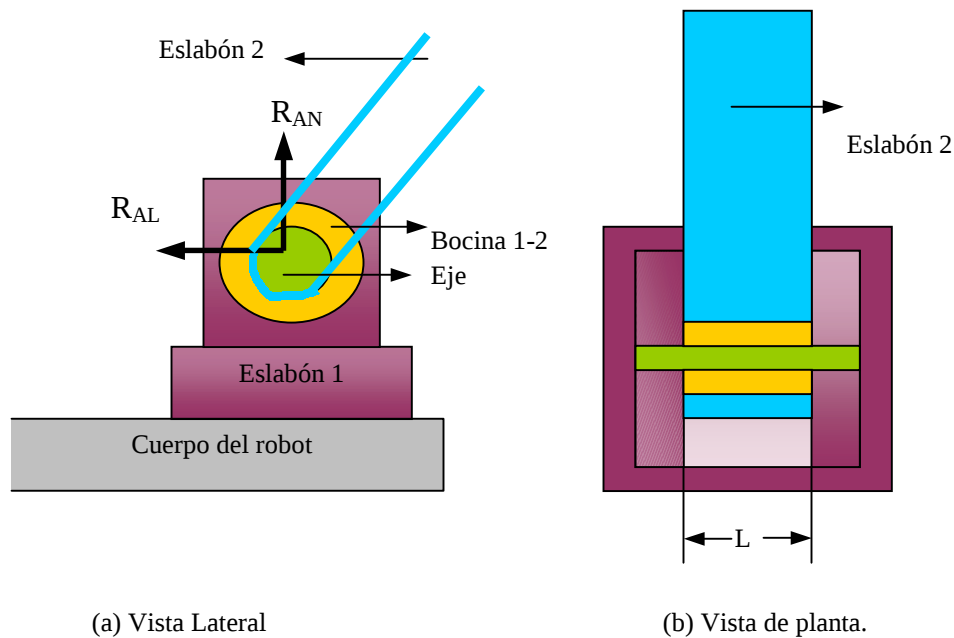


Figura 7.3 Bocinas entre el eslabón 1 y 2.

La máxima fuerza que soporta esta bocina está dada por la resultante vectorial de las componentes R_{AN} y R_{AL} que se muestran en la figura 5.23.

En este caso la bocina soporta una fuerza radial uniformemente distribuida, que llamaremos F , donde:

$$F = R_A = \sqrt{R_{AN}^2 + R_{AL}^2} = \sqrt{8,75^2 + 15,48^2} = 17,78 \text{ Kg.}$$

La longitud L (Figura 7.3-b) de la bocina es de 22 milímetros. Y al igual que en el caso anterior; para efectos de cálculo de esfuerzo en la bocina se considera que el diámetro interno de la bocina es aproximadamente igual al diámetro del eje (ésta consideración se hace para el cálculo de todas las bocinas), que en este caso es de 6 mm.

El esfuerzo máximo que soporta la bocina es:

$$\sigma_{\text{máxima}} = \frac{F}{L \cdot d} = \frac{17,78 \text{ Kg}}{22 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm}} = 0,134 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando esta presión máxima con el esfuerzo permisible por aplastamiento:

$$\sigma_{\text{máxima}} = 0,134 \text{ Kg/mm}^2 < 0,9 \cdot S_y = 11,34 \text{ Kg/mm}^2$$

7.1.3 Bocina entre el eslabón 3 y el eslabón 2 (Bocina 2-3)

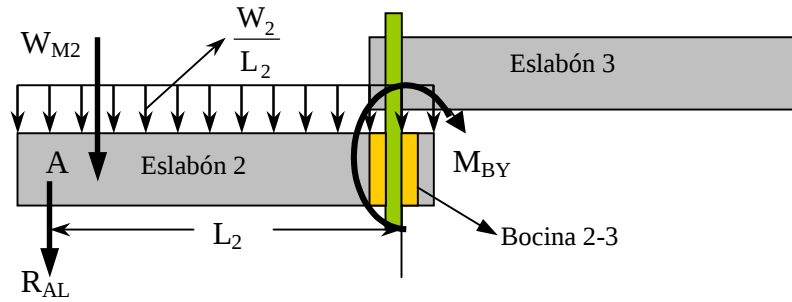


Figura 7.4 Bocina entre el eslabón 3 y el eslabón 2

El momento M_{BY} es soportado por la bocina 2-3, tal como se indica en la figura 7.4. Este momento es igual a 2743,2 Kg · mm y se origina cuando se analiza el plano XZ en el eslabón 2 con el cuerpo en movimiento. Al igual que para el caso de la bocina entre el eslabón 1 y el cuerpo, el momento M_{BY} puede ser definido también como un par de fuerzas F actuando en sentidos opuestos en los bordes de la bocina (Figura 7.2).

Considerando una de estas fuerzas uniformemente distribuidas a lo largo L de la bocina, se tiene que para esta bocina de $L = 30$ milímetros:

$$F = \frac{M_{BY}}{L} = \frac{2743,2 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{30 \text{ mm}} = 91,44 \text{ Kg.}$$

El esfuerzo máximo que soporta la bocina , considerando un bulón de $d = 6$ mm, es:

$$\sigma_{\text{máxima}} = \frac{F}{L \cdot d} = \frac{91,44 \text{ Kg}}{30 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm}} = 0,51 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando este esfuerzo con el permisible por aplastamiento:

$$\sigma_{\text{máxima}} = 0,51 \text{ Kg/mm}^2 < 0,9 \cdot S_y = 11,34 \text{ Kg/mm}^2$$

7.1.4 Bocina entre el eslabón 3 y el pie (Bocina 3-4)

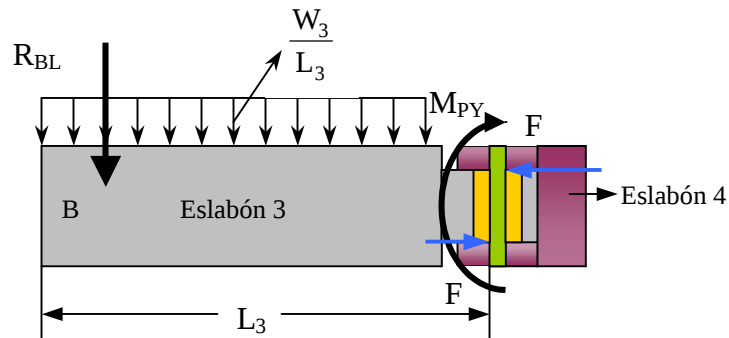


Figura 7.5 Bocina entre el eslabón 3 y el pie

El momento M_{PY} que se observa en la Figura 7.5 se origina cuando se analiza el plano XZ en el eslabón 3 con el cuerpo en movimiento. Este momento es de $5634,5 \text{ Kg/mm}^2$ y es soportado por la bocina que se indica en la misma Figura 7.5.

Definiendo (como en el caso anterior) este momento, como un par de fuerzas F actuando en sentidos opuestos en los bordes de la bocina, y considerando estas fuerzas F uniformemente distribuidas a todo lo largo (L) de la bocina, se tiene que para una bocina de $L = 22$ milímetros:

$$F = \frac{M_{PY}}{L} = \frac{5634,5 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{30 \text{ mm}} = 256,11 \text{ Kg}.$$

El esfuerzo máximo que soporta la bocina, considerando un eje de $d = 6 \text{ mm}$, es:

$$\sigma_{\text{máxima}} = \frac{F}{L \cdot d} = \frac{256,11 \text{ Kg}}{22 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm}} = 1,94 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando esta presión máxima con el esfuerzo permisible por aplastamiento:

$$\sigma_{\text{máxima}} = 1,94 \text{ Kg/mm}^2 < 0,9 \cdot S_y = 11,34 \text{ Kg/mm}^2$$

7.2 Cálculo de esfuerzo en los ejes de las bocinas

Los bulones están sometidos a cortante y a torsión. Para el cálculo de esfuerzos en estos ejes, es conveniente recordar la Figura 3.8.

7.2.1 Eje que articula el eslabón 1 con el eslabón 2 (Eje 1-2)

Este eje soporta una fuerza cortante R_A , cuyas componentes R_{AN} y R_{AL} se pueden apreciar en la Figura 7.3. Esta fuerza R_A , es la máxima que soporta el eje y su magnitud es:

$$R_A = \sqrt{R_{AN}^2 + R_{AL}^2} = \sqrt{8,75^2 + 15,48^2} = 17,78 \text{ Kg.}$$

Puesto que este eje está soportado por dos extremos con el eslabón 1, queda:

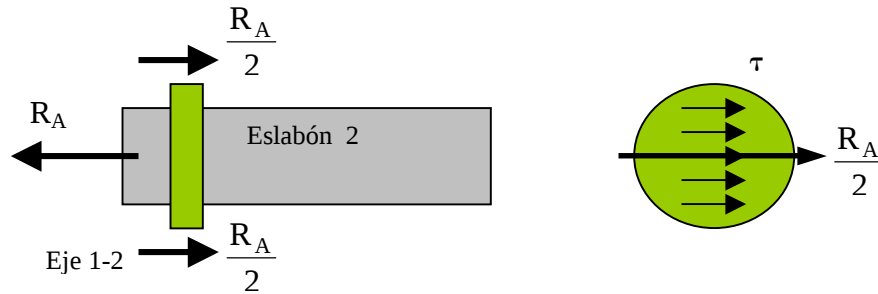


Figura 7.6 Fuerza cortante en el eje 1-2

Ahora bien, el máximo esfuerzo cortante que soporta un eje de sección redonda sometido a cortante (Figura 7.6), viene dado por la ecuación 7.1:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A} \quad \text{Ec. 7.1}$$

En este caso:

$$V = \frac{R_A}{2} \quad \text{y} \quad A = \text{área de la sección transversal} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Para un eje de diámetro $d = 6$ milímetros , se obtiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{R_A}{2}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{17,78 \text{ Kg}}{2}}{\frac{\pi \cdot (6 \text{ mm})^2}{4}} = 0,42 \text{ Kg/mm}^2$$

Este esfuerzo, se debe comparar con el esfuerzo permisible (de fluencia) del material con que estará hecho el eje, que como se dijo anteriormente es un acero AISI 4340 con una resistencia a la fluencia = 70 Kg/mm^2

Entonces, para asegurar que el eje no falle, se debe cumplir que:

$$\tau_{\text{MÁX}} < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}}$$

En efecto,

$$\tau_{\text{MÁX}} = 0,42 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

Pero además de estar sometido a cortante, también soporta torsión que es transmitida del motor 2 a éste eje a través de una relación de engranes cónicos.

El esfuerzo por torsión viene dado por:

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \quad \text{Ec. 7.2}$$

Para una barra redonda, la ecuación 7.2 se puede expresar de la forma:

$$\tau = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \quad \text{Ec. 7.3}$$

En este caso:

$$T = M_{AZ} = F_{2\text{máx}} \cdot r_2 \cdot a$$

Donde:

$F_{2\text{máx}}$: se obtiene de la Tabla 5.11 y su valor es: 16,22 Kg.

r_2 : es la distancia que hay desde el eje del motor 2 hasta la cara del eslabón 2 en la cual va atornillada la placa L que soporta este motor (Figura 5.11). $r_2 = 24 \text{ mm}$.

a : es la relación de engranes cónicos a la salida del motor. $a = 3$.

Entonces:

$$T = M_{AZ} = 16,22 \cdot 24 \cdot 3 = 1167,84 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Así, para un eje de 6 mm de diámetro:

$$\tau = \frac{16 \cdot 1167,84}{\pi \cdot 6^3} = 27,53 \text{ Kg/mm}^2$$

Este esfuerzo también se debe comparar con el esfuerzo permisible del material con que está hecho el eje.

$$\tau_{\text{MÁX}} < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}}$$

En efecto,

$$\tau_{\text{MÁX}} = 27,53 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

7.2.2 Eje que articula el eslabón 2 con el eslabón 3 (Eje 2-3)

Cuando en una sección anterior se analizaba el plano NL para el eslabón 3, con el cuerpo en movimiento (Figura 5.21), se señaló que sobre el extremo B del eslabón actúa una fuerza R_B de componentes R_{BN} y R_{BL} , cuyas magnitudes son 8,75 Kg. y 16,67 Kg., respectivamente. Esta fuerza cortante es soportada por el eje, tal como indica la siguiente figura:

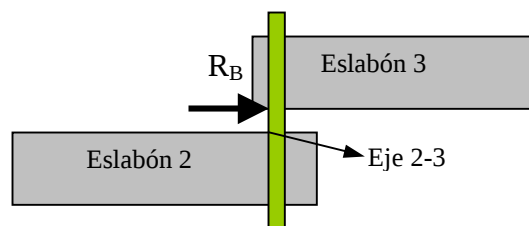


Figura 7.7 Fuerza cortante en el eje 2-3

Para este eje se selecciona el mismo acero 4340, pero con un tratamiento térmico especial (templado y revenido a 800 °C) que le permite alcanzar un esfuerzo de fluencia 147 Kg/mm² (Apéndice A.10).

Entonces,

$$R_B = \sqrt{R_{BN}^2 + R_{BL}^2} = \sqrt{8,75^2 + 16,67^2} = 18,82 \text{ Kg.}$$

Luego, para un eje de diámetro $d = 6 \text{ mm}$, se tiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R_B}{\pi \cdot d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{18,82 \text{ Kg}}{\pi \cdot (6 \text{ mm})^2} = 0,88 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando éste esfuerzo con el permisible del material:

$$\tau_{\text{MÁX}} = 0,88 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 147 \text{ Kg/mm}^2$$

Este eje 2-3, también está sometido a torsión. Pero a diferencia del anterior, si ocurre simultáneamente.

En este caso:

$$\tau = \frac{16 \cdot M_{BZ}}{\pi \cdot d^3}$$

donde:

M_{BZ} : se obtiene de la Tabla 5.17 y su valor es: 3103,6 Kg · mm.

Entonces, para el eje de diámetro $d = 6 \text{ mm}$, se tiene:

$$\tau = \frac{16 \cdot 3103,6}{\pi \cdot 6^3} = 73,17 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando este esfuerzo con el permisible del material.:

$$\tau_{\text{MÁX}} = 73,17 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 147 \text{ Kg/mm}^2$$

7.2.3 Eje que articula el eslabón 3 con el pie del robot (eslabón 4)

En la Figura 5.21, cuando se analiza el plano NL para el eslabón 3 con el cuerpo del robot en movimiento, se observa en el extremo P del referido eslabón, una fuerza R_P de componentes R_{PN} y R_{PL} cuyas magnitudes son 8,75 Kg. y 17,5 Kg., respectivamente.

Este eje es soportado por la bocina que se observa en la Figura 7.8:

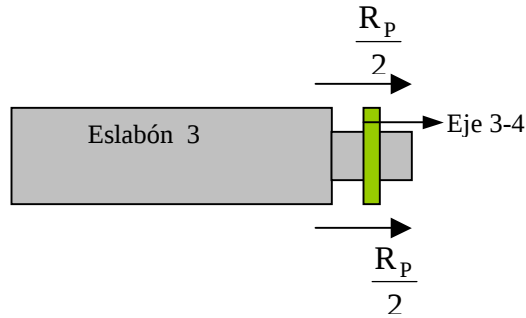


Figura 7.8 Fuerza cortante en el eje 3-4.

Entonces,

$$R_P = \sqrt{R_{PN}^2 + R_{PL}^2} = \sqrt{8,75^2 + 17,5^2} = 19,56 \text{ Kg.}$$

Luego, para un eje de diámetro $d = 6 \text{ mm}$, se tiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{R_P}{2}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{19,56 \text{ Kg}}{2}}{\frac{\pi \cdot (6 \text{ mm})^2}{4}} = 0,46 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando éste esfuerzo con el permisible del material:

$$\tau_{\text{máx}} = 0,46 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

Al igual que en los otros dos casos, también se presenta torsión en este eje. Esta es calculada de manera similar.

$$\tau = \frac{16 \cdot M_{PZ}}{\pi \cdot d^3}$$

En este caso:

$$M_{PZ} = F_{4\text{máx}} \cdot r_4 \cdot a$$

donde:

$F_{4\text{máx}}$: es la máxima fuerza F_4 obtenida de la Tabla 5.20. $F_{4\text{máx}}$: 35,53 Kg.

r_4 : es la distancia que hay desde el eje del motor 4 hasta la cara del eslabón 3 en la cual va atornillada la placa L que soporta este motor (Figura 5.11). $r_4 = 24 \text{ mm}$.

a : es la relación de engranes cónicos a la salida del motor 4. $a = 3$.

Entonces:

$$M_{PZ} = 35,5 \text{ Kg} \cdot 24 \text{ mm} \cdot 3 = 2556 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$$

Así, para un eje de 6 mm de diámetro:

$$\tau = \frac{16 \cdot 2556}{\pi \cdot 6^3} = 60,26 \text{ Kg/mm}^2$$

Comparando este esfuerzo con el esfuerzo permisible del material.

$$\tau_{\text{máx}} = 60,26 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE (DEL MATERIAL)}} = 70 \text{ Kg/mm}^2$$

7.3 Cálculo de esfuerzo en las chavetas

Las chavetas se usan generalmente para transmitir momento de rotación o para fijar un eje a su alojamiento y evitar así el deslizamiento relativo entre ellas. Las chavetas están solicitadas a cortante.

Se usan 5 chavetas rectangulares. Cuatro de éstas chavetas son exactamente iguales. La restante, está ubicada en la articulación entre los eslabones 2 y 3 y se usa para fijar al eslabón 3 de su eje. Todas son hechas de acero AISI 1045, que ofrece:

$$\text{Resistencia a la tracción } S_{ut} = 63 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\text{Resistencia a la fluencia } S_y = 53 \text{ Kg/mm}^2$$

La ubicación de éstas chavetas se observa en la Figura 3.8 del Capítulo 3. Los tamaños estándares de éstas, junto con el intervalo de diámetros de ejes aplicables, se enlistan en la Tabla (Apéndice A.12). Usando esta tabla como apoyo, se seleccionan cuatro chavetas de 3 x 3 mm y una de 3 x 5 mm. La longitud de la chaveta se basa en la longitud del cubo y la carga torsional a transmitir.

7.3.1 Chavetas del eje 1-2

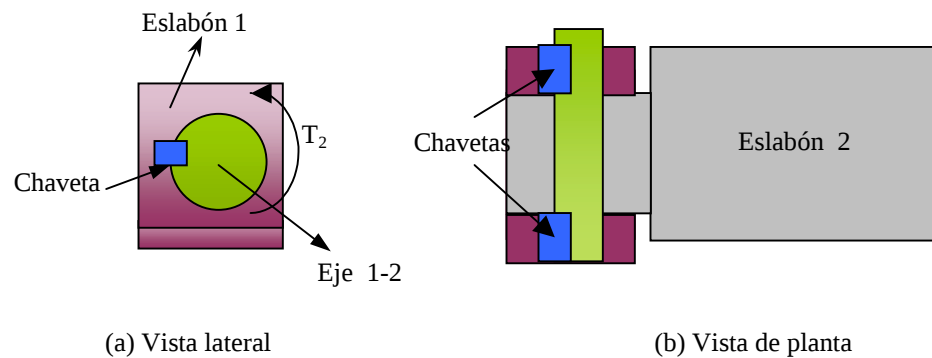


Figura 7.9 Chaveta 1-2

El torque M_{AZ} que aparece en la Figura 7.9, es el resultado de multiplicar la máxima fuerza F_2 , que se obtiene de la Tabla 5.11, por la distancia r_2 que se observa en la Figura 5.11 y cuya magnitud es $r_2 = 24 \text{ mm}$.

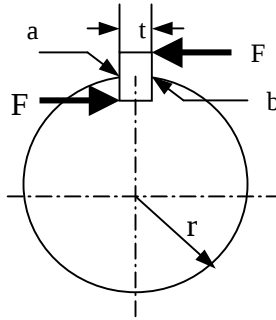


Figura 7.10 Fuerza soportadas por la chaveta

En relación con la Figura 7.10, la fuerza tangencial F en la superficie del eje es:

$$F = \frac{M_{AZ}}{r}; \text{ donde } r = \text{radio del eje 1-2}$$

$$\text{Entonces: } F = \frac{570,31 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{3 \text{ mm}} = 190,1 \text{ Kg.}$$

Por la teoría de la energía de distorsión, la resistencia al cortante es:

$$S_C = 0,577 \cdot S_y \quad \text{Ec. 7.4}$$

Donde S_y es la resistencia a la fluencia del material. Así:

$$S_C = 0,577 \cdot 53 \text{ Kg/mm}^2 = 30,58 \text{ Kg/mm}^2$$

La falla por corte a través del área “ab” (Figura 7.10) origina un esfuerzo τ que viene dado por la ecuación:

$$\tau = \frac{F}{t \cdot L}$$

Sustituyendo τ por la resistencia dividida entre el factor de seguridad, que se toma como $n = 2$, resulta:

$$\frac{S_C}{n} = \frac{F}{t \cdot L} \quad \text{o bien} \quad \frac{30,58 \text{ Kg/mm}^2}{2} = \frac{190,1 \text{ Kg}}{3 \text{ mm} \cdot L}$$

O sea $L = 4,14 \text{ mm}$. Esto significa que con una chaveta de 4,14 mm o más de longitud no habrá falla. Se toma 2 chavetas de $L = 5 \text{ mm}$ cada una, por ser más fácil de mecanizar.

7.2.3 Chaveta del eje 2-3

El cálculo para ésta chaveta se hace de forma idéntica que para la chaveta 1-2, pero en este caso la fuerza tangencial en la superficie del eje es:

$$F = \frac{M_{BZ}}{r}$$

donde M_{BY} es el máximo torque que se obtiene de la Tabla 5.17 y cuya magnitud es $M_{BZ\text{máx}} = 3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$ y “r” es el radio del eje 2-3.

Entonces:

$$F = \frac{3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{3 \text{ mm}} = 1034,5 \text{ Kg.}$$

Luego, el esfuerzo por corte es:

$$\tau = \frac{F}{t \cdot L} = \frac{1034,5 \text{ Kg}}{3 \text{ mm} \cdot L}$$

Al igual que en el caso anterior, sustituyendo τ por la resistencia al cortante dividida entre el factor de seguridad, resulta:

$$\frac{S_C}{n} = \frac{F}{t \cdot L} \quad \text{o bien} \quad \frac{30,58 \text{ Kg/mm}^2}{2} = \frac{1034,5 \text{ Kg}}{3 \text{ mm} \cdot L} \Rightarrow L = 22,5 \text{ mm}$$

O sea, se toma $L = 30 \text{ mm}$.

7.4 Cálculo de esfuerzo y selección de retenes

Si se observa nuevamente la Figura 3.8 del Capítulo 3, se pueden apreciar unos anillos de retención cuya función es evitar el deslizamiento coaxial del eje en relación a su bocina respectiva. Cuando el robot se encuentra en posición de desplazamiento inclinado u horizontal se producen, en las articulaciones, fuerzas que deben ser soportadas por estos anillos y que originan esfuerzos cortantes uniformemente distribuidos en ellos. Estas fuerzas axiales para el retén (Figura 7.11), se acentúan más en el caso de desplazamiento horizontal que para el caso inclinado.

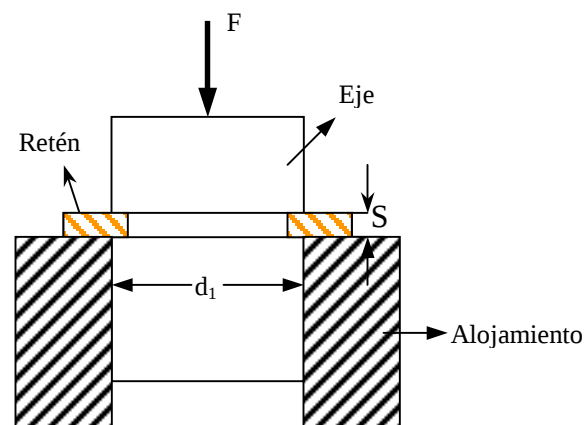


Figura 7.11 Fuerza axial en un reten

Donde:

F = Fuerza axial que soporta el reten

d_1 = diámetro nominal del reten

S = espesor del reten

Cada pata debe llevar 9 retenes, de los cuales 8 tienen exactamente las mismas dimensiones geométricas (dispuestas como se indica en la Figura 3.8), ya que van colocados sobre ejes de 6 milímetros de diámetro.

Además, todos deben soportar fuerzas axiales que actúan en ellos como cortantes. Por lo tanto, se calcula sólo el anillo de retención que soporta la mayor fuerza.

Sin embargo, el restante anillo va ubicado en el eslabón 1 (Figura 7.12), para evitar su salida del cuerpo del robot. La carga axial que soporta es casi nula, por ende no es necesario calcular esfuerzos aquí y con sólo seleccionarlo del catálogo del fabricante es suficiente.

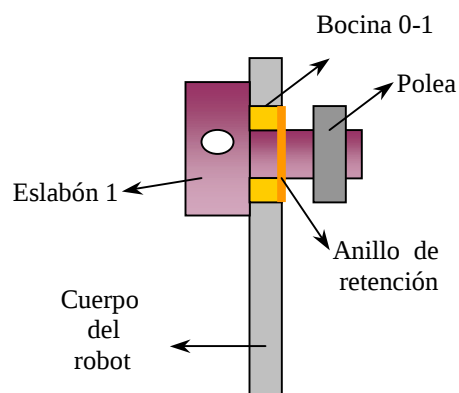


Figura 7.12 Anillo de retención para el eslabón 1

De los 8 retenes que están dispuestos como se indica en la Figura 3.8, los que soportan mayor fuerza axial son los que están colocados en el eje 3-4. Estos soportan

una fuerza axial $R_{PZ} = R_{PL} = 17,5 \text{ Kg}$, que se obtiene de analizar el plano XZ del eslabón 3 con el cuerpo en movimiento (ver Figura 5.22).

En el país existen muchas firmas que comercializan los anillos de retención (anillos Seeger), con la ventaja añadida de que estos se encuentran estandarizados bajo la norma DIN 471. La Tabla (Apéndice A.13) muestra las características geométricas de los retenes para una gran variedad de ejes.

El tipo de anillo seleccionado para un eje de 6 milímetros de diámetro, presenta las siguientes características:

d_3 = diámetro interno del anillo libre = 5,6 milímetros

d_2 = diámetro de la ranura del eje donde alojará el reten = 5,7 milímetros

S = espesor del anillo = 0,7 milímetros

Calculando el esfuerzo que soporta el reten que está sometido a la mayor fuerza axial:

El esfuerzo soportado por un anillo de retención viene dado por la ecuación 7.5

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{Ec. 7.5}$$

Donde F = fuerza axial soportada por el anillo.

A = área de la sección que soporta los esfuerzos. Es igual al perímetro del eje (d_1 en la Tabla Apéndice A.13) multiplicado por el espesor del retén.

Entonces, para el anillo seleccionado:

$$\tau = \frac{R_{PL}}{\pi \cdot d_1 \cdot S} = \frac{17,5 \text{ Kg}}{\pi \cdot 6 \text{ mm} \cdot 0,7 \text{ mm}} = 1,32 \text{ Kg/mm}^2$$

Este esfuerzo, se debe comparar con la resistencia al cortante del material con que está hecho este tipo de retenes, que es un acero AISI 1020.

Por la teoría de la energía de distorsión, la resistencia al cortante es:

$$S_C = 0,577 \cdot S_y$$

donde S_y es la resistencia a la fluencia del material, que para un acero AISI 1020 (apéndice A.11) es $S_y = 39 \text{ Kg/mm}^2$.

Así:

$$S_C = 0,577 \cdot 39 \text{ Kg/mm}^2 = 22,5 \text{ Kg/mm}^2$$

Selección del anillo de retención de la figura 7.11

En este caso, el retén va sobre el extremo cilíndrico del eslabón 1, que además soporta a la polea que le transmite el movimiento que viene del motor 1.

Para un diámetro de 10 milímetros, se selecciona el anillo que según la Tabla (Apéndice) A.13 presenta las siguientes características:

$$d_1 = 10 \text{ mm}$$

$$d_2 = 9,3 \text{ mm}$$

$$d_3 = 9,6 \text{ mm}$$

$$S = 1 \text{ mm}$$

7.5 Selección de poleas y correas

El robot lleva un total de 8 poleas, dos (2) por cada pata dispuestas de la siguiente manera:

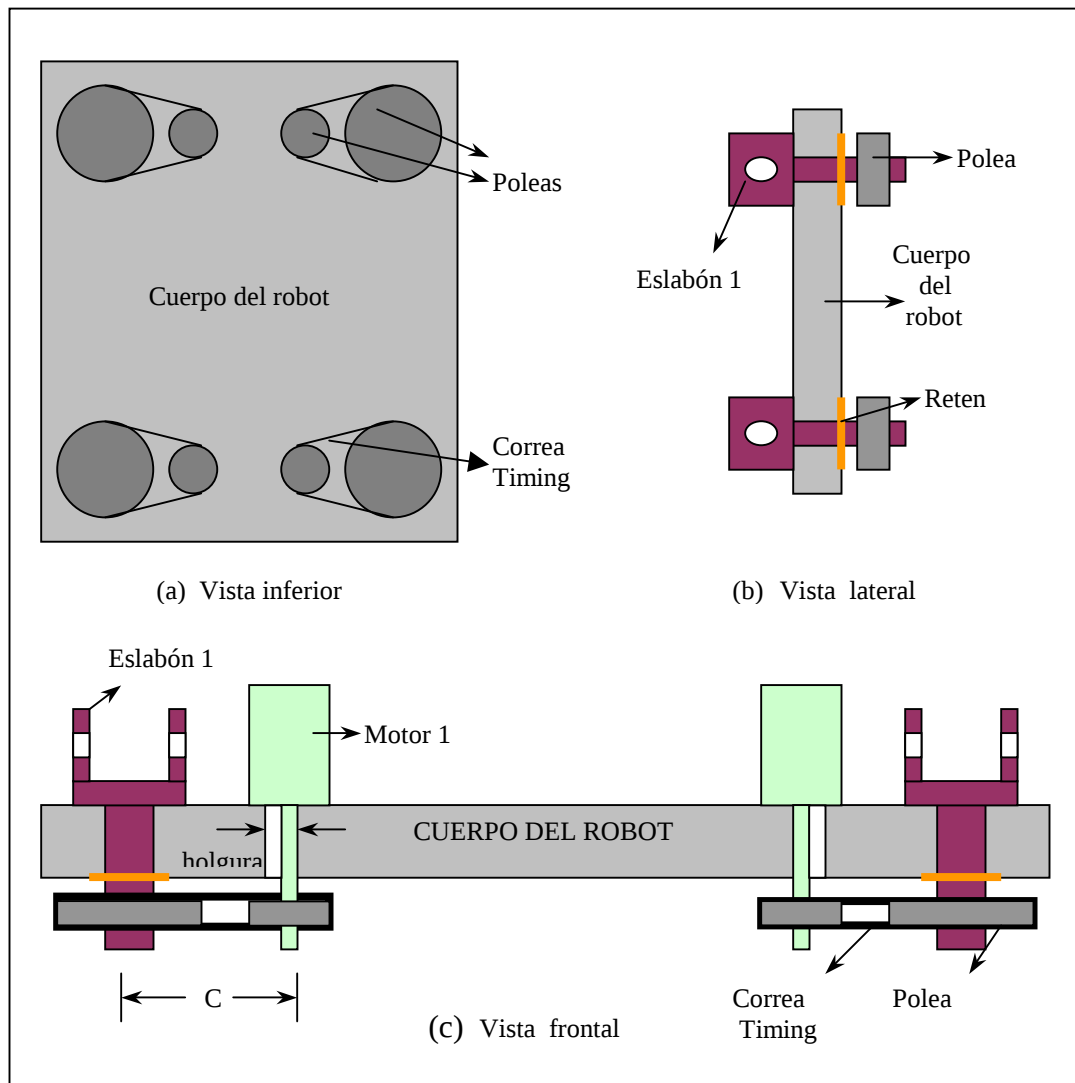


Figura 7.13 Disposición de las poleas en el robot

En la Figura 7.13 se puede observar que por cada pata hay un Motor 1 (en realidad es un moto reductor) que tiene acoplado en su eje de salida una polea que le transmite el movimiento de rotación al eslabón 1, en cuyo extremo cilíndrico va también una polea. El movimiento es transmitido a través de una correa Timing o de sincronización.

Para efectos de minimizar el peso de la caja reductora y del motor, fue necesario el uso de una reducción adicional en las poleas de 2:1. Una reducción de este tipo, implica que una de las poleas tendrá el doble del diámetro de la otra.

Existen en el mercado, muchas firmas comercializadoras de este tipo de poleas timing. Del catálogo de la casa SDP (Stock Drive Products) se seleccionan las correas y poleas que aquí se usan. Estas son de aluminio y se muestran en las Tablas (Apéndice A.14) para la correa y (Apéndice A.15) para la polea, respectivamente.

Como es sabido en estos casos, la selección de la polea y su respectiva correa, adecuada al diseño, se hace por “tanteo”.

La correa es de neoprene y presenta una resistencia a la rotura (breaking strength) de 167 Newton por cada milímetro de espesor de ancho de correa (belt width). Esta correa viene en anchos que van desde los 3 mm hasta los 9,5 mm, pasando por 4,5 ; 6 y 8 milímetros.

Se debe, entonces, conocer la fuerza que soporta la correa para verificar que no falle. Para ello se hace el siguiente análisis:

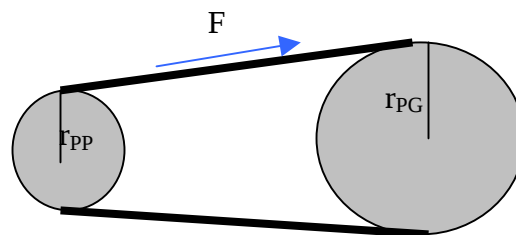


Figura 7.14 Fuerza en la correa.

De esta figura se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$F \cdot r_{PP} = T_S \quad \text{Ec. 7.6}$$

$$F \cdot r_{PG} = T_1 \quad \text{Ec. 7.7}$$

Donde:

F = fuerza tangencial a las poleas. Es la tensión que va a soportar la correa.

r_{PP} = radio de paso de la polea pequeña.

r_{PG} = radio de paso de la polea grande.

T_S = torque a la salida del reductor y es transmitido a través de la polea pequeña.

T_1 = torque que debe transmitirse, a través de la polea grande, para mover el eslabón 1.

Se conoce el valor de $T_1 = 624,65 \text{ Kg} \cdot \text{mm} = 6,24 \text{ N} \cdot \text{m}$. Por lo tanto de la ecuación 7.7, se despeja F :

$$F = \frac{T_1}{r_{PG}}$$

Para un diámetro de paso “inicial” de la polea grande de 38,8 milímetros, se tiene:

$$F = \frac{5940 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{38,8 \text{ mm}}{2}} = 322 \text{ N}$$

Luego, para un ancho de correa (belt width) de 6 mm, el esfuerzo de rotura de la misma es:

$$167 \text{ N/mm} \times 6 \text{ mm} = 1002 \text{ N} > F = 306,18 \text{ N}$$

Se selecciona entonces una correa de 6 mm de ancho.

Ahora bien, de la Tabla (Apéndice A.15), se selecciona los diámetros de paso (P.D) de las poleas que cumplen con la reducción requerida. Tenemos entonces poleas con las siguientes características:

Para la polea grande:

Peso estimado: 50 gramos.

Sujeción en su eje a través tornillos fijadores (Se necesita sólo una pequeña chaveta).

Diámetro de paso (P.D) = 38,8 mm

Diámetro externo (O.D) = 38,3 mm

Número de dientes (Nº of Grooves) = 60

Taladro (Bore) = 6 mm

Para la polea pequeña:

Peso estimado: 10 Kg.

Sujeción en su eje a través tornillos fijadores (Se necesita sólo una pequeña chaveta).

Diámetro de paso (P.D) = 19,4 mm

Diámetro externo (O.D) = 18,9 mm

Número de dientes (Nº of Grooves) = 30

Taladro (Bore) = 6 mm

Para conocer ahora, la longitud de la correa, supongamos que la distancia entre centros (C) de cada polea (Figura 7.13-c) debe ser 120 mm. Entonces, de acuerdo a la ecuación 7.8, la longitud de una correa de sincronización se calcula así:

$$L = 2C + 1.57(D + d) + \frac{(D - d)^2}{4C} \quad \text{Ec. 7.8}$$

Donde:

C = distancia entre centros de los ejes de las poleas.

D = diámetro de paso de la polea grande.

d = diámetro de paso de la polea pequeña.

Sustituyendo $C = 120$, $d = 19,4 \text{ mm}$ y $D = 38,8 \text{ mm}$, se tiene:

$$L = 332,16 \text{ mm}$$

De la Tabla del Apéndice A.14, se toma la longitud de paso (Pitch Length) de la correa más próxima. Esta es $L = 335,28 \text{ mm}$.

Recalculando la distancia entre centros de los ejes de las poleas (C), a través de la ecuación 7.8:

$$C = 121,56 \text{ mm}$$

Esta es la distancia exacta entre los centros de las poleas. Y no es necesario dispositivos o mecanismos que permitan el movimiento entre los ejes de las poleas para poder hacer el montaje a tensión de la correa, porque simplemente este tipo de correa no necesita una tensión inicial previa. Además para facilitar el montaje de la correa, se le dejará una holgura suficiente entre el cuerpo del robot y el eje de salida del motor (Figura 7.13-c) que permita acercar un poco la polea pequeña a la grande para montar la correa, antes de apernar el motor 1 al cuerpo del robot.

7.6 Cálculo de esfuerzo en los engranes

Si observamos la figura 3.12, se puede apreciar que los ejes de salida de los motores 2, 3 y 4 (en realidad son los ejes de salida de las cajas reductoras de esos motores) son perpendiculares a los ejes 1-2, 2-3 y 3-4 respectivamente. Es menester entonces, colocar allí engranes cónicos que permitan transmitir el movimiento de los motores a los ejes respectivos.

A fin de bajar el torque que deba entregar el reductor que va acoplado al motor y por ende minimizar el peso de la caja reductora, se colocan engranes con reducción 3:1; a excepción del motor 3 en cuya caja reductora de salida se colocarán engranes con reducción 4:1.

Entre la gran cantidad de casas comercializadoras de engranes cónicos; se selecciona, del catálogo de la SDP (Stock Drive Products), los tipos de engranes que aquí se utilizan y que se muestran en las Tablas (Apéndice A.16) para la relación 3:1 y (Apéndice A.17) para la relación 4:1.

Los engranes son hechos de acero S45C (JIS G 4051) con un ángulo de presión $\phi = 20^\circ$. Y presentan una resistencia a la tracción $S_{ut} = 70 \text{ Kg/mm}^2$ y un resistencia a la fluencia $S_y = 50 \text{ Kg/mm}^2$

Calculando ahora los esfuerzos por flexión que soportan los dientes de los engranes:

1.- Esfuerzo en los engranes a la salida del motor 2.

En la Tabla (Apéndice A.16), se observa los engranes seleccionados para esta situación . Estos permiten reducción 3:1 con un módulo $m = 1$, y presentan además las siguientes características:

Piñón

Peso estimado: 90 gramos.
Sujeción en su eje con ajuste H7
Diámetro de paso = 15 mm
Ancho de cara = 6 mm
15 dientes ($z = 15$)
Taladro (Bore) = 6 mm

Rueda

Peso estimado: 10 gramos.
Sujeción en su eje con ajuste H7
Diámetro de paso = 45 mm
Ancho de cara = 6 mm
45 dientes ($z = 45$)
Taladro (Bore) = 8 mm

Los engranes deben soportar una fuerza tangencial (w_T) que viene determinada por la siguiente ecuación:

$$w_T = \frac{T}{r_{\text{paso}}} \quad \text{Ec. 7.9}$$

Donde:

T = Torque. En el caso de la Rueda es el torque máximo que se entrega al eje que articula los eslabones 1 y 2 para darle movimiento rotacional a estos. Este torque lo llamamos M_{AZ} y es igual al producto que resulta de multiplicar la máxima fuerza F_2 , que se obtiene de la Tabla 5.11, por la distancia r_2 (Figura 5.11) y por la relación de reducción “a” en los engranes que es $a = 3$. Pero en el caso del piñón, el torque usado en la ecuación 7.9 es sólo $F_{2\text{máx}} \cdot r_2$.

r_{paso} = radio de paso del engrane.

Entonces:

Para el Piñón:

$$w_T = \frac{\frac{F_{2\text{máx}} \cdot r_2}{2}}{\frac{\text{diámetro de paso del piñón}}{2}} = \frac{7,92 \text{ Kg} \cdot 24 \text{ mm}}{\frac{15 \text{ mm}}{2}} = 25,3 \text{ Kg.}$$

Para la Rueda:

$$w_T = \frac{\frac{M_{AZ}}{2}}{\frac{\text{diámetro de paso de la rueda}}{2}} = \frac{7,92 \cdot 24 \cdot 3}{\frac{45 \text{ mm}}{2}} = 25,3 \text{ Kg.}$$

Para evaluar el esfuerzo se usa la ecuación del esfuerzo de la AGMA:

$$\sigma = \frac{w_T \cdot K_a}{K_v} \cdot \frac{1}{F \cdot m} \cdot \frac{K_s \cdot K_m}{J} \quad \text{Ec. 7.10}$$

Donde:

F = ancho de cara

m = módulo

J = factor geométrico

K_a = factor de aplicación

K_s = factor de tamaño

K_m = factor de distribución de carga

K_v = factor dinámico

K_v es un factor que considera efectos dinámicos cuando un engrane o par de engranes funciona a velocidades altas. En nuestro caso el movimiento además de ser relativamente lento (la máxima velocidad angular es $10,49^\circ/\text{seg} \cong 1,74 \text{ rpm}$) es intermitente, por lo que $K_v = 1$.

Los demás factores K_a , K_s y K_m son factores que estiman sobrecargas en el engrane asociadas a defectos en las propiedades del material con que se fabrica el engrane, condiciones críticas de trabajo, falta de uniformidad en la superficie debido al mecanizado, etc. Por ende son factores de situación empíricos que, en este caso, se considera igual a la unidad, debido al excelente acabado que presentan los engranes seleccionados. Así:

$$\sigma = \frac{w_T \cdot K}{F \cdot m \cdot J}, \text{ donde } K \text{ es un factor integral. Será estimado en } K = 1.$$

Por otro lado, el factor geométrico J se obtiene de la gráfica de la Tabla (Apéndice A.18):

Para el piñón de 15 dientes se obtiene, de esta gráfica $J = 0,235$. Y para el engrane (45 dientes) $J = 0,185$.

Entonces, el esfuerzo que soportan los dientes del piñón es:

$$\sigma = \frac{w_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{25,3 \text{ Kg}}{6 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 0,235} = 17,94 \text{ Kg/mm}^2$$

Para evaluar el riesgo de falla en el diente, se debe comparar este esfuerzo con el esfuerzo permisible (de fluencia) del acero S45C.

Efectivamente:

$$\sigma = 17,94 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

Del mismo modo para la rueda:

$$\sigma = \frac{w_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{25,3 \text{ Kg}}{6 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 0,185} = 22,79 \text{ Kg/mm}^2$$

Evalutando el riesgo de falla:

$$\sigma = 22,79 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

2.- Esfuerzo en los engranes a la salida del motor 4.

Se usa los mismos engranes que los del caso anterior.

En este caso, las fuerzas w_T que soportarán los engranes son:

Para la Rueda:

$$w_T = \frac{M_{CZ}}{\frac{\text{diámetro de paso de la rueda}}{2}}$$

donde $M_{CZ} = 688,8 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$ es el torque máximo que se debe entregar al eje 3-4 para originar el movimiento relativo entre los eslabones 3 y 4 y se obtiene de la Tabla 5.18. Entonces:

$$w_T = \frac{688,8 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{\frac{45 \text{ mm}}{2}} = 30,61 \text{ Kg}.$$

Para el Piñón:

$$W_T = 30,61 \text{ Kg}.$$

Evaluando el esfuerzo en los dientes:

Para el piñón:

$$\sigma = \frac{w_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{30,61 \text{ Kg}}{6 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 0,235} = 21,71 \text{ Kg/mm}^2$$

Se cumple que:

$$\sigma = 21,71 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

Luego, para la Rueda:

$$\sigma = \frac{w_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{30,61 \text{ Kg}}{6 \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 0,185} = 27,57 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma = 27,57 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

3.- Esfuerzo en los engranes a la salida del motor 3

Se observa en la Tabla (Apéndice A.17), los engranes seleccionados para esta condición.

Estos permiten reducción 4:1 con un modulo $m = 1,5$ y presentan las siguientes características:

Piñón

Peso estimado: 40 gramos.

Sujeción en su eje con ajuste H7

Diámetro de paso = 22,5 mm

Ancho de cara = 12 mm

15 dientes ($z = 15$)

Taladro (Bore) = 8 mm

Rueda

Peso estimado: 620 gramos.

Sujeción en su eje con ajuste H7

Diámetro de paso = 90 mm

Ancho de cara = 12 mm

60 dientes ($z = 60$)

Taladro (Bore) = 12 mm

En este caso las fuerzas tangenciales que soportan los engranes son:

Para la Rueda:

$$w_T = \frac{M_{BZ}}{\frac{\text{diámetro de paso de la rueda}}{2}}$$

donde $M_{BZ} = 3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm}$ es el torque máximo que se debe entregar al eje 2-3 para originar el movimiento relativo entre los eslabones 2 y 3. Este torque se obtiene de la Tabla 5.17. Entonces:

$$w_T = \frac{3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm}}{\frac{90 \text{ mm}}{2}} = 68,96 \text{ Kg}.$$

Para el Piñón:

$$W_T = 68,96 \text{ Kg.}$$

De la Gráfica (Apéndice A.18), se obtiene $J = 0,24$ para el Piñón; mientras que para la Rueda $J = 0,185$.

Luego, evaluando el esfuerzo en el diente del Piñón:

$$\sigma = \frac{W_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{68,96 \text{ Kg}}{12 \text{ mm} \cdot 1,5 \text{ mm} \cdot 0,24} = 15,96 \text{ Kg/mm}^2$$

Evaluando el riesgo de falla en el diente:

Se cumple que:

$$\sigma = 15,96 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

Del mismo modo, para la Rueda:

$$\sigma = \frac{W_T}{F \cdot m \cdot J} = \frac{68,96 \text{ Kg}}{12 \text{ mm} \cdot 1,5 \text{ mm} \cdot 0,185} = 20,7 \text{ Kg/mm}^2$$

Evaluando el riesgo de falla en el diente:

$$\sigma = 20,7 \text{ Kg/mm}^2 < \sigma_{\text{PERMISIBLE}} = 50 \text{ Kg/mm}^2$$

7.7 Cálculo de motores.

En concordancia con la filosofía de este diseño de minimizar al máximo el peso del robot, se utilizaron servomotores eléctricos DC para controlar las posiciones relativas de los eslabones durante el movimiento del robot. De la casa Maxon Motor, se seleccionó 1 motor que tiene una excelente relación de Torque/Peso. El robot debe llevar 4 de estos motores por cada pata; para un total de 16.

La Tabla (Apéndice A.19) muestra el motor seleccionado. Se trata del modelo RE 025-055-38EBA201A y presenta, entre otras, las siguientes características:

- Potencia de 20 watts
- Máxima velocidad permisible = 11000 rpm
- Máximo torque continuo = 30,31 mN· m (milinewton x metro)
- Torque de parada = 262 mN· m
- Escobillas de grafito
- Peso = 130 gramos

Como se ha mencionado con anterioridad, se utilizarán 4 motores, llamados Motor 1, Motor 2, Motor 3 y Motor 4, por cada pata; a fin de generar el movimiento rotacional relativo entre los eslabones 1, 2, 3, 4 y el cuerpo del robot. Aun cuando se utiliza el mismo tipo de motor en todo el robot, se sigue usando esta nomenclatura, es decir Motor 1, Motor 2, etc.

A la salida de cada motor se coloca una pequeña caja reductora, también de la Maxon Motor, perfectamente “compatible” con el tipo de motor que se seleccionó. Sin embargo, la caja reductora usada para el motor 3 será distinta a las usadas para los restantes motores, pero sólo en cuanto a la reducción que proporciona; ya que las dimensiones geométricas son exactamente las mismas. Incluso el peso es el mismo.

En la Tabla (Apéndice A.20) se puede ver la caja reductora seleccionada. Se observa también en esa tabla, la reducción usada para el motor 3 y la usada para los restantes motores (ambas reducciones están subrayadas). La caja es del tipo GP032A050 y pesa sólo 226 gramos.

Para los motores 1,2 y 4 se usa una reducción 410,8 : 1 con una eficiencia del 60%, mientras que para el motor 3 la reducción es de 530,8 : 1 ; también con eficiencia del 60%.

Finalmente a la salida de las cajas reductoras 2, 3 y 4 (de los motores 2, 3 y 4 respectivamente) se coloca una reducción adicional, a través de un engranaje cónico, que es de 3:1 para los motores 2 y 4, y de 4:1 para el motor 3. Por otra parte, a la salida de la caja reductora 1 también va una reducción adicional pero con polea tipo timing. Esta reducción es de 2:1.

Antes de explicar la “metodología” usada para seleccionar los motores y sus respectivas cajas reductoras, es conveniente primero observar la siguiente figura:

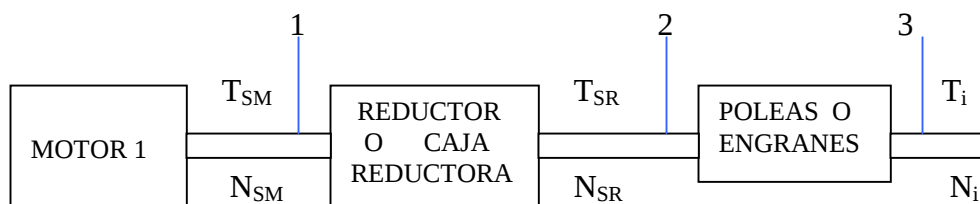


Figura 7.15 Relación de reducción

Donde:

T_i = torque aplicado al eje que articula el eslabón i con el eslabón $i-1$. $i = 1,2...4$.

N_i = velocidad (en rpm) del eslabón i con respecto al eslabón $i-1$. $i = 1,2...4$.

T_{SR} = torque a la salida del reductor.

N_{SR} = velocidad a la salida del reductor.

T_{SM} = torque a la salida del motor. Es el torque de entrada al reductor.

N_{SM} = velocidad a la salida del motor. Es la velocidad de entrada al reductor.

Entonces, el motor adecuado se seleccionó usando la siguiente lógica:

1.- De la Tabla (Apéndice A.21), se selecciona una caja reductora del menor peso posible que cubra los requerimientos de torque T_{SR} ; donde T_{SR} se obtiene así:

$$T_i \cdot N_i = T_{SR} \cdot N_{SR} \Rightarrow T_{SR} = \frac{T_i \cdot N_i}{N_{SR}} \quad \text{Ec. 7.11}$$

Pero si tenemos una reducción en las poleas o en los engranes, según sea el caso, de $a : 1$; entonces:

$$\frac{N_i}{N_{SR}} = a \quad \text{Ec. 7.12}$$

Sustituyendo la ecuación 7.12 en la 7.11:

$$T_{SR} = \frac{T_i}{a} \quad \text{Ec. 7.13}$$

donde T_i es variable, pero se toma el máximo para obtener el $T_{Srm\acute{a}x}$.

También para la velocidad:

$$N_{SR} = N_i \cdot a \quad \text{Ec. 7.14}$$

También en la ecuación 7.14 se toma el N_i máximo.

Este T_{SR} máximo se compara, en la Tabla (Apéndice A.20), con el Torque continuo máximo que soporta la caja reductora, aún cuando los motores funcionan intermitentemente; sin embargo este criterio beneficia el diseño.

2.- Se hace un “balance de potencia” entre los puntos 1 y 2 de la figura 7.15:

$$T_{SM} \cdot N_{SM} = \eta_{reductor} \cdot T_{SR} \cdot N_{SR}$$

Luego:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR} \cdot N_{SR}}{N_{SM} \cdot \eta_{reductor}} \quad \text{Ec. 7.15}$$

Para una reducción, en la caja reductora de $b:1$

$$\frac{N_{SR}}{N_{SM}} = b \quad \text{Ec. 7.16}$$

Sustituyendo la ecuación 7.16 en la 7.15, se obtiene:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR}}{b \cdot \eta_{reductor}} \quad \text{Ec. 7.17}$$

También para la velocidad: $N_{SM} = N_{SR} \cdot b$

3.- Se calcula la potencia máxima (P) que debe entregar el motor, o sea la potencia requerida:

$$P = T_{SM} \cdot N_{SM}$$

4.- Se selecciona, de la Tabla (Apéndice A.22), el motor “compatible” (con el menor peso posible) con el tipo de caja seleccionada y se verifica, en la Tabla (Apéndice A.19), que cubra con la potencia requerida y que no sobrepase el máximo torque

continuo y la máxima velocidad permisible para el motor comparando con T_{SM} y N_{SM} , respectivamente.

CÁLCULO DE LOS MOTORES:

Considerando que el Motor 1 y el Motor 2 sólo se accionan cuando la pata del robot está en fase de transferencia, se usa esta condición para el cálculo de estos motores. Pero para el cálculo de los motores 3 y 4 se usa la condición de cuerpo en movimiento, que es cuando se producen los máximos torques para estos motores.

MOTOR 1

$$T_1 = 624,65 \text{ Kg}\cdot\text{mm} \cong 6,24 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\theta_{1\text{máx}} = 30^\circ/\text{seg} = 5 \text{ rpm}$$

$$P_{1\text{máx}} = T_1[\text{N}\cdot\text{m}] \cdot \theta_1[\text{rev/seg}] = 6,24 \text{ N}\cdot\text{m} \cdot \frac{5}{60} \text{ rev/seg} = 3,26 \text{ watts}$$

Con una reducción de poleas 2:1, queda:

$$T_{SR} = \frac{6,24}{2} = 3,12 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$N_{SR} = 5 \text{ rpm} \cdot 2 = 10 \text{ rpm}$$

Para la caja reductora 410,8 : 1, de eficiencia $\eta_{\text{reductor}} = 0,6$, se tiene:

$$\text{Torque continuo máximo que soporta} = 4,5 \text{ N} \cdot \text{m} > T_{SR} = 3,12 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Calculando, ahora, el torque y la velocidad de entrada al reductor que es lo mismo a decir, el torque y la velocidad de salida del motor:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR}}{b \cdot \eta_{\text{reductor}}} = \frac{3,12 \text{ N}\cdot\text{m}}{410,8 \cdot 0,6} = 12,65 \text{ mN}\cdot\text{m}$$

$$N_{SM} = N_{SR} \cdot b = 10 \text{ rpm} \cdot 410,8 = 4108 \text{ rpm}$$

Luego:

$$T_{SM} = 12,65 \text{ mN} \cdot \text{m} < \text{Torque continuo máximo del motor} = 30,31 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = 4108 \text{ rpm} < \text{Máxima velocidad permisible del motor} = 11000 \text{ rpm}$$

Finalmente, la potencia entregada por el motor se puede obtener de la siguiente forma:

$$P_M = T_{SM} \cdot N_{SM} = 12,65 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \frac{4108}{60} \text{ rev/seg} \Rightarrow P_M = 5,44 \text{ watts.}$$

Es de hacer notar que si se pone el motor a trabajar a su máxima velocidad permisible (11000 rpm) y manteniendo el torque que entrega ($T_{SM} = 12,04 \cdot 10^{-3}$), nunca sobrepasa los 20 watts.

MOTOR 2

$$T_2 = M_{AZ\text{máx}} = 570,32 \text{ Kg} \cdot \text{mm} \cong 5,7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\theta_{2\text{máx}} = 10,49 \text{ }^\circ/\text{seg} = 1,74 \text{ rpm}$$

$$P_{2\text{máx}} = 1,04 \text{ watts}$$

Con la reducción de engranes cónicos 3:1, se obtiene:

$$T_{SR} = \frac{5,7 \text{ N} \cdot \text{m}}{3} = 1,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$N_{SR} = 1,74 \cdot 3 = 5,22 \text{ rpm}$$

Para la caja reductora 410,8:1 :

$$\text{Torque continuo máximo que soporta} = 4,5 \text{ N} \cdot \text{m} > T_{SR} = 1,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Calculando, ahora, el torque y la velocidad de salida del motor:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR}}{b \cdot \eta_{reductor}} = \frac{1,9 \text{ N} \cdot \text{m}}{410,8 \cdot 0,6} = 7,7 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = N_{SR} \cdot b = 5,22 \text{ rpm} \cdot 410,8 = 2144,3 \text{ rpm}$$

Luego:

$$T_{SM} = 7,7 \text{ mN} \cdot \text{m} < \text{Torque continuo máximo del motor} = 30,31 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = 2144,3 \text{ rpm} < \text{Máxima velocidad permisible del motor} = 11000 \text{ rpm}$$

$$\text{Finalmente, } P_M = 5,7 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \frac{2144,3}{60} \text{ rev/seg} = 3,55 \text{ watts.}$$

MOTOR 3

$$T_3 = M_{BZ\text{máx}} = 3103,6 \text{ Kg} \cdot \text{mm} \cong 31,03 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 10,97 \text{ }^\circ/\text{seg} = 1,82 \text{ rpm}$$

$$P_{3\text{máx}} = 5,94 \text{ watts}$$

Con una reducción de engranes cónicos 4:1, nos queda:

$$T_{SR} = \frac{31,03 \text{ N} \cdot \text{m}}{4} = 7,75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$N_{SR} = 1,82 \cdot 4 = 7,28 \text{ rpm}$$

Para la caja reductora 530,8 : 1, de eficiencia $\eta_{reductor} = 0,6$, se tiene:

$$\text{Torque intermitente máximo que soporta} = 6,5 \text{ N} \cdot \text{m} < T_{SR} = 7,75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Calculando, ahora, el torque y la velocidad de salida del motor:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR}}{b \cdot \eta_{reductor}} = \frac{7,75 \text{ N} \cdot \text{m}}{530,8 \cdot 0,6} = 24,33 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = N_{SR} \cdot b = 7,28 \text{ rpm} \cdot 530,8 = 3864 \text{ rpm}.$$

Luego:

$$T_{SM} = 24,33 \text{ mN} \cdot \text{m} < \text{Torque continuo máximo del motor} = 30,31 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = 3864 \text{ rpm} < \text{Máxima velocidad permisible del motor} = 11000 \text{ rpm}$$

MOTOR 4

$$T_4 = M_{PZ\text{máx}} = 688,8 \text{ Kg} \cdot \text{mm} \cong 6,88 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\theta_{4\text{máx}} = 21,48 \text{ }^\circ/\text{seg} = 3,58 \text{ rpm}$$

$$P_{4\text{máx}} = 4,79 \text{ watts}$$

Con una reducción de engranes cónicos 3:1, nos queda:

$$T_{SR} = \frac{6,88 \text{ N} \cdot \text{m}}{3} = 2,29 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$N_{SR} = 3,58 \cdot 3 = 10,74 \text{ rpm}$$

Para la caja reductora 410,8:1, se tiene:

$$\text{Torque continuo máximo que soporta} = 4,5 \text{ N} \cdot \text{m} > T_{SR} = 2,29 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Calculando, ahora, el torque y la velocidad de salida del motor:

$$T_{SM} = \frac{T_{SR}}{b \cdot \eta_{\text{reductor}}} = \frac{2,29 \text{ N} \cdot \text{m}}{410,8 \cdot 0,6} = 9,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = N_{SR} \cdot b = 10,74 \text{ rpm} \cdot 410,8 = 4412 \text{ rpm}$$

Luego:

$$T_{SM} = 9,3 \text{ N} \cdot \text{m} < \text{Torque continuo máximo del motor} = 30,31 \text{ mN} \cdot \text{m}$$

$$N_{SM} = 4412 \text{ rpm} < \text{Máxima velocidad permisible del motor} = 11000 \text{ rpm}$$

CONCLUSIONES

Después de realizar todos los cálculos estructurales y cinemáticas, se concluye que el robot cumple con los objetivos propuestos.

- La forma de escalado tipo Insecto es el más adecuado para los fines de movilidad que se pretende tener con el robot.
- Las ecuaciones de cinemática inversa son de gran utilidad, porque permiten expresar los ángulos entre los eslabones que componen la pata o brazo del robot, en función de la posición exacta que se requiera en el efector final (o pie). No obstante la deformación angular en los ejes de las articulaciones influye en ésta posición final del pie, por lo que es necesario tenerla en cuenta cuando se realice el control del robot.
- El robot tiene una buena estabilidad durante el escalado, siempre que no sobrepase las limitantes que se le impusieron, es decir, que la carga útil que lleva no sobrepase los 12 Kg., ni exceda los 12 cm de altura; aún cuando tiene un factor de seguridad aceptable.
- Los motores seleccionados representan la mejor opción para el escalado debido a su alta relación Torque/Peso. Estos motores DC, traen además un encoder como sensor de posición angular relativa entre los eslabones de las patas, que los hacen muy fáciles de controlar.
- Los electroimanes tipo híbrido que lleva los pies del robot, garantizan que ante una falla de alimentación eléctrica; estos queden como imanes permanentes, evitando así la caída del robot.
- Los resultados arrojados por el software Visual Nastran, indican unos valores de esfuerzos que difieren muy poco a los calculados por las ecuaciones teóricas convencionales. Esto confirma la seguridad de los elementos estudiados ante la falla.

RECOMENDACIONES

- Poner a funcionar el motor 2, en el instante que el robot se encuentre apoyado sólo en 3 patas (mientras realiza la transferencia de la restante). Esto permitiría bajar los torques que entregan los motores 3 y 4.
- Tomar en consideración la variación de la posición final del pie del robot, producto de las deformaciones angulares en los ejes que articulan los eslabones.
- Se recomienda a futuro, aumentar los diámetros de los ejes que articulan los eslabones; en especial el eje entre los eslabones 2 y 3, a fin de hacer más pequeñas estas deformaciones angulares.
- No sobrepasar el peso de la carga útil, ni la altura de ésta respecto al cuerpo del robot.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gran Enciclopedia de la Ciencia y la Técnica. Vol 8. Grupo Editorial Océano. Barcelona España. 1986
- [2] Enciclopedia Multimedia Encarta 98. Microsoft Corp. 1998
- [3] Grieco Silva, Juan C. “Robots escaladores. Consideraciones acerca del diseño, estabilidad y estrategias de control”. Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias. Departamento de Informática. Valladolid. España. 1997.
- [4] Barrientos, Antonio. Peñin, Luis Felipe. Balaguer, Carlos y Aracil, Rafael. “Fundamentos de Robótica”. Universidad Politécnica de Madrid. Mc.Graw-Hill. Madrid. 1997.
- [5] Fu, K.S., González, R.C. y Lee, C.S. “Robótica. Control, detección, visión e inteligencia”. Mc.Graw-Hill, Inc. Madrid. 1998.
- [6] Shigley, Joseph. Mischke, Charles. “Diseño en Ingeniería Mecánica”. Mc.Graw-Hill. México. 1990.
- [7] SDP-SI. “Handbook of Timing Belts, Chains & Friction Drives” Catalog D210-2. New Hyde Park, New York. 1995.
- [8] SDP-SI. “Handbook of Metric Gears” Catalog Q400. New Hyde Park, New York. 1996.
- [9] Hibbeler, Russell Charles. “Mecánica de materiales”. Prentice Hall. México. 1992
- [10] Beer, Ferdinand P. Johnston, E. Russell. “Mecánica de Materiales”. Mc. Graw-Hill. Bogotá Colombia. 1982.
- [11] Mott Robert. “Diseño de elementos de Máquinas”. Prentice Hall. México. 1986
- [12] Spotts, M. F. Shoup, T. E. “Elementos de Máquinas”. Prentice Hall. México. 1999.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [BahryYin. 1994] Bahr, B. y Yin, Y. "Wall aiming Robots for Aircran, Ships, Nuclear Power Plants, Sfcy Scrapere, etc." Proc. Fifth Int. Sym. on Robotics and eawfactunnf. ISRAM 94, Hawaii, USA. Aogost 1994.
- [Luk y otros. 1995a] Luk, B.L., Cookc, D.S. y Colüc, A.A., "An Arthropodo Robot for Woridng in Hazardous EnviTomnents". 2n IFAC Conf. on Intell. Autonomous Vehicles. Espc Fitüand. June 1995.
- [Lukyotros. 1995b] Luk, B.L-, Cooke. D.S., Collie, A.A. y White, T.S. " Arachnid Robot for Walidng and Climbing in Disorder Hazardous Environments". Proc. Int. Conf on Inte Autonomous Systems IAS-4. Karlsruhe, Gcrmany. Man 1995.
- [McGhee y Fraiík. 1968] R.B. y Frank, A.A "On the Stability Properti druped Creeping Gaits". Mathematical Biosciencie 1/2. 1968.
- [Nagakubo e Hirosc, Nagakubo. A. e Hirose, S "Wafldng and Rmmmg of The 1994] Qaadruped Wall-aimbing Robot". Proc. IKEE Íívt. Conf RohAvtom. pp. 1005-1012. San Diego (1994).
- [Rosheim. 1994] Roshcim, M. "Robot Evolotion, The Develop-iet of Antitrobotics". Jofm Wiley & Sons, /nc. 1994.
- [Sato y otros, 1991] Sato. K., Honda, K., Hasegawa. A. Shwta, T. y Morita, H-On-Wall Locomotwe Vehiclc". ISART 91.