

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS EN ENGRANAJES DEL MOTOR LUGO DE ENCENDIDO POR CHISPA BAJO EL CICLO ATKINSON MODIFICADO

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de
Venezuela

Por los Brs. Arenas Barberi, Juan Marcos
Serpa Hurtado, Natalia
Para optar al Título
De Ingeniero Mecánico

Caracas, 2001

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS EN ENGRANAJES DEL MOTOR LUGO DE ENCENDIDO POR CHISPA BAJO EL CICLO ATKINSON MODIFICADO

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Enrique Limongi

TUTOR INDUSTRIAL: Ing. Luis Marino González

Presentado ante la ilustre

Universidad Central de

Venezuela

Por los Brs. Arenas Barberi, Juan Marcos

Serpa Hurtado, Natalia

Para optar al Título

De Ingeniero Mecánico

Caracas, 2001

© Juan Marcos Arenas Barberi, 2001

© Natalia Serpa Hurtado, 2001

Hecho el Depósito de Ley.

Depósito Legal N° Ift4872001620132

Arenas B., Juan Marcos. Serpa H., Natalia

ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS EN ENGRANAJES DEL MOTOR LUGO DE ENCENDIDO POR CHISPA BAJO EL CICLO ATKINSON MODIFICADO

**Tutor Académico: Prof. Enrique Limongi. Tutor Industrial: Ing. Luis Marino
González. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería
Mecánica. 2001, N° págs. 193.**

Análisis de los esfuerzos, Engranajes, Motor LUGO.

El motor LUGO de combustión interna, encendido por chispa que trabaja bajo el ciclo termodinámico Atkinson modificado, posee la ventaja de lograr una mejor conversión de la energía química en energía mecánica a través de un mecanismo innovador el cual varía la carrera del pistón. Este mecanismo consta de un sistema de engranes que convierten el movimiento lineal del pistón en movimiento de rotación del cigüeñal y que además se encuentra solicitado por una serie de fuerzas alternativas. Se estudió el funcionamiento del mecanismo y de los esfuerzos del sistema de engranajes, para de esta forma respaldar y asegurar la factibilidad del adecuado funcionamiento de este innovador mecanismo de carrera variable para motores de combustión interna.

El análisis se fundamentó en la evaluación de las fuerzas que actúan sobre los dientes de los engranajes, producto de las presiones que se presentan en el cilindro. Las presiones están regidas por un ciclo termodinámico ideal donde no existe transferencia de calor, ni pérdidas por fricción.

De los resultados obtenidos, la aplicación de las presiones de un ciclo termodinámico ideal producen valores de esfuerzos sobre los engranajes sumamente elevados. Se evaluaron las presiones máximas que soportan los dientes de los engranajes que se encuentran contruidos de un acero 4142. Las anteriores se encuentran por debajo de las presiones máximas que se alcanzan en un motor de características similares al motor LUGO.

Finalmente se seleccionó un acero 4140 tratado térmicamente, que soporta las condiciones de carga que se producen en un motor Otto de características similares al motor LUGO.

ÍNDICE DE CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN.	1
 CAPÍTULO I. Marco Teórico.	
1.1. Los sistemas discretos en general.	3
1.1.1. Elemento finito.	4
1.1.2. El proceso general para la aproximación del comportamiento del continuo.	5
1.2. Engranajes rectos.	7
1.3. Fuerzas sobre un motor alternativo.	13
1.3.1. Fuerzas debido a la presión del fluido activo.	14
1.3.2. Fuerzas de inercia de las masas alternas.	14
1.4. Centro de masa.	16
1.5. Momento de inercia.	17
1.5.1. Teorema de los ejes paralelos.	18
1.5.2. Momentos de inercia de cuerpos compuestos.	19
1.6. El ciclo Atkinson.	20
1.7. El ciclo aire combustible.	23
1.7.1. Usos del ciclo aire combustible.	23
1.7.2. Alcance del ciclo aire combustible.	23
1.7.3. Suposiciones.	24
1.7.4. Composición de los gases.	24
1.8. Diagramas de combustión.	25
1.8.1. Diagramas para mezclas no quemadas.	25
1.8.2. Diagramas para mezclas quemadas.	28
1.8.3. El proceso de combustión.	29
1.9. Esfuerzos.	32
1.9.1. Teoría de falla por tensión máxima por esfuerzo de corte.	32
1.9.2. Teoría de la distorsión de la energía.	32

1.9.3. Fuerzas en los dientes de los engranajes.	33
1.9.4. Fórmula de Lewis.	34
1.9.5. Tensiones en los dientes de los engranajes según la AGMA.	35

CAPÍTULO II. Marco Práctico.

2.1. Descripción y funcionamiento del mecanismo.	47
2.2. Determinación de la geometría de los engranajes.	83
2.3. Cinemática del mecanismo.	87
2.3.1. Análisis de desplazamiento.	89
2.3.1.1. Análisis de desplazamiento del punto A.	89
2.3.1.2. Análisis de desplazamiento del punto C.	90
2.3.1.3. Análisis de desplazamiento del punto D.	91
2.3.2. Análisis de velocidad.	91
2.3.2.1. Análisis de velocidad del punto A.	91
2.3.2.2. Análisis de velocidad del punto C.	92
2.3.2.3. Análisis de velocidad del punto D.	93
2.3.3. Análisis de aceleración.	94
2.3.3.1. Análisis de aceleración del punto A.	94
2.3.3.2. Análisis de aceleración del punto C.	94
2.3.3.3. Análisis de aceleración del punto D.	95
2.4. Análisis de fuerzas.	96
2.4.1. Análisis de fuerzas sobre el pistón.	96
2.4.2. Análisis de fuerzas sobre la biela.	97
2.4.3. Análisis de fuerzas sobre el cigüeñal principal.	98
2.4.4. Análisis de fuerzas sobre el cigüeñal secundario.	99
2.5. Masas de los componentes del sistema.	102
2.6. Determinación del centro de masa.	106
2.6.1. Determinación del centro de masa del cigüeñal principal.	108
2.6.2. Determinación del centro de masa del cigüeñal secundario.	110

2.6.3.	Determinación del centro de masa de la biela.	111
2.6.4.	Determinación del centro de masa del pistón.	112
2.7.	Determinación del momento de inercia.	119
2.7.1.	Determinación del momento de inercia del cigüeñal principal.	121
2.7.1.1.	Determinación del momento de inercia del eje 1.	121
2.7.1.2.	Determinación del momento de inercia del eje 2.	122
2.7.1.3.	Determinación del momento de inercia del eje 3.	122
2.7.1.4.	Determinación del momento de inercia del contrapeso.	123
2.7.2.	Determinación del momento de inercia del cigüeñal secundario.	124
2.7.3.	Determinación del momento de inercia de la biela.	125
2.8.	Determinación de la carrera del pistón.	127
2.8.1.	Determinación de la carrera de admisión.	128
2.8.2.	Determinación de la carrera de compresión.	128
2.8.3.	Determinación de la carrera de expansión.	129
2.8.4.	Determinación de la carrera de descarga.	129
2.9.	Determinación de los volúmenes de las carreras.	131
2.9.1.	Determinación del volumen de la carrera de expansión.	131
2.9.2.	Determinación del volumen de la carrera de descarga.	132
2.9.3.	Determinación del volumen de la carrera de admisión.	133
2.9.4.	Determinación del volumen de la carrera de compresión.	133
2.10.	Construcción del diagrama termodinámico del ciclo aire combustible.	136
2.10.1.	Compresión de la mezcla.	138
2.10.2.	Combustión de la mezcla.	139
2.10.3.	Expansión de los productos.	139
2.11.	Determinación de las aceleraciones.	141
2.11.1.	Determinación de las aceleraciones del pistón.	142
2.11.2.	Determinación de las aceleraciones del cigüeñal principal.	143
2.11.3.	Determinación de las aceleraciones del cigüeñal secundario.	143
2.11.4.	Determinación de las aceleraciones de la biela.	144
2.12.	Determinación de las fuerzas.	158

2.12.1. Ecuaciones de fuerzas para el pistón.	158
2.12.2. Ecuaciones de fuerzas para la biela.	159
2.12.3. Ecuaciones de fuerzas para el cigüeñal principal.	160
2.12.4. Ecuaciones de fuerzas para el cigüeñal secundario.	161
2.13. Determinación de los esfuerzos.	169
2.13.1. Determinación de los esfuerzos mediante Proengineer.	169
2.13.1.1. Análisis 1.	170
2.13.1.2. Análisis 2.	172
2.13.2. Determinación del esfuerzo según Lewis.	174
2.13.3. Determinación de los esfuerzos según la AGMA.	176
ANÁLISIS DE RESULTADOS.	185
CONCLUSIONES.	190
RECOMENDACIONES.	191
BIBLIOGRAFÍA.	192
ANEXOS. (Planos y Diagramas)	Ver sobre final tomo

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO I.

	Página
1. Factor de aplicación Ka.	40
2. Factor de tamaño Ks.	41
3. Coeficiente elástico Cp.	45

CAPÍTULO II.

4. Geometría de los engranajes.	87
5. Masas de los elementos.	103
6. Cálculo del centro de masa del contrapeso.	108
7. Cálculo del centro de masa del eje 1.	109
8. Cálculo del centro de masa del eje 2.	109
9. Cálculo del centro de masa del eje 3.	109
10. Cálculo del centro de masa del cigüeñal principal.	110
11. Cálculo del centro de masa del cigüeñal secundario.	111
12. Cálculo del momento de inercia del eje 1.	121
13. Cálculo del momento de inercia del eje 2.	122
14. Cálculo del momento de inercia del eje 3.	122
15. Cálculo del momento de inercia del contrapeso.	123
16. Cálculo del momento de inercia del cigüeñal principal.	123
17. Cálculo del momento de inercia del cigüeñal secundario.	125
18. Propiedades del fluido en el estado 1.	138
19. Propiedades del fluido en el estado 2.	138
20. Propiedades del fluido en el estado 3.	139
21. Propiedades del fluido en el estado 4.	140
22. Aceleración del punto A para 1600 rpm.	146
23. Aceleración del punto C para 1600 rpm.	146

24. Aceleración del centro de masa de la biela para 1600 rpm.	146
25. Aceleración del punto A para 1700 rpm.	147
26. Aceleración del punto C para 1700 rpm.	147
27. Aceleración del centro de masa de la biela para 1700 rpm.	147
28. Aceleración del punto A para 1800 rpm.	148
29. Aceleración del punto C para 1800 rpm.	148
30. Aceleración del centro de masa de la biela para 1800 rpm.	148
31. Aceleración del punto A para 1900 rpm.	149
32. Aceleración del punto C para 1900 rpm.	149
33. Aceleración del centro de masa de la biela para 1900 rpm.	149
34. Aceleración del punto A para 2000 rpm.	150
35. Aceleración del punto C para 2000 rpm.	150
36. Aceleración del centro de masa de la biela para 2000 rpm.	150
37. Aceleración del punto A para 2100 rpm.	151
38. Aceleración del punto C para 2100 rpm.	151
39. Aceleración del centro de masa de la biela para 2100 rpm.	151
40. Aceleración del punto A para 2200 rpm.	152
41. Aceleración del punto C para 2200 rpm.	152
42. Aceleración del centro de masa de la biela para 2200 rpm.	152
43. Aceleración del punto A para 2300 rpm.	153
44. Aceleración del punto C para 2300 rpm.	153
45. Aceleración del centro de masa de la biela para 2300 rpm.	153
46. Aceleración del punto A para 2400 rpm.	154
47. Aceleración del punto C para 2400 rpm.	154
48. Aceleración del centro de masa de la biela para 2400 rpm.	154
49. Aceleración del punto A para 2500 rpm.	155
50. Aceleración del punto C para 2500 rpm.	155
51. Aceleración del centro de masa de la biela para 2500 rpm.	155
52. Aceleración del punto A para 2600 rpm.	156
53. Aceleración del punto C para 2600 rpm.	156

54. Aceleración del centro de masa de la biela para 2600 rpm.	156
55. Aceleración del punto A para 1000 rpm.	157
56. Aceleración del punto C para 1000 rpm.	157
57. Aceleración del centro de masa de la biela para 1000 rpm.	157
58. Fuerzas sobre los elementos para 1600 rpm.	163
59. Fuerzas sobre los elementos para 1700 rpm.	163
60. Fuerzas sobre los elementos para 1800 rpm.	163
61. Fuerzas sobre los elementos para 1900 rpm.	164
62. Fuerzas sobre los elementos para 2000 rpm.	164
63. Fuerzas sobre los elementos para 2100 rpm.	164
64. Fuerzas sobre los elementos para 2200 rpm.	165
65. Fuerzas sobre los elementos para 2300 rpm.	165
66. Fuerzas sobre los elementos para 2400 rpm.	165
67. Fuerzas sobre los elementos para 2500 rpm.	166
68. Fuerzas sobre los elementos para 2600 rpm.	166
69. Fuerzas sobre los elementos para 1000 rpm.	166
70. Fuerzas sobre los elementos para 1000 rpm y una presión de 740 psi.	167
71. Valores del factor de forma de Lewis.	175
72. Especificaciones del catalogo FERRUM.	180
73. Valores de presiones y relaciones de compresión Otto y Diesel.	183
74. Propiedades para el acero 4140 tratado térmicamente.	184
75. Análisis de Resultados.	189

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I.

	Página
1. Características de los dientes de los engranajes.	10
2. Evolvente de los dientes.	12
3. Diagrama presión-volumen y temperatura-entropía del ciclo Atkinson.	21
4. Fuerzas sobre los dientes de los engranajes.	38
5. Factor de geometría J.	39
6. Factor de distribución de carga Km.	42
7. Factor de espesor de la corona Kb.	43
8. Factor de dinámica Kv.	44
9. Factor de geometría I.	46

CAPÍTULO II.

10. Ensamblaje 4.	48
11. Eje1.	49
12. Eje 2.	50
13. Contrapeso.	51
14. Eje 3.	52
15. Piñón.	53
16. Cigüeñal secundario.	54
17. Biela.	56
18. Ensamblaje 1.	57
19. Ensamblaje 2.	58
20. Ensamblaje 3.	59
21. Ensamblaje 5.	60
22. Ensamblaje 6.	61
23. Ensamblaje 7.	62

24. Ensamblaje 8.	63
25. Ensamblaje 9.	64
26. Vista lateral del mecanismo.	66
27. Vista frontal del mecanismo.	67
28. Mecanismo representado por eslabones.	68
29a, 29b y 29c. Carrera de expansión.	69
29a', 29b' y 29c'. Carrera de expansión 2.	70
29c, 29d y 29e. Carrera de descarga.	72
29c', 29d' y 29e'. Carrera de descarga 2.	73
29e, 29f y 29g. Carrera de admisión.	74
29e', 29f' y 29g'. Carrera de admisión 2.	75
29g, 29h y 29i. Carrera de compresión.	76
29g', 29h' y 29i'. Carrera de compresión 2.	77
30. Trayectoria de la biela convencional y modificada.	78
31. Diagrama termodinámico Atkinson modificado.	80
32. Geometría del diente.	85
33. Geometría del piñón.	86
34. Diagrama cinemático del mecanismo.	88
35. Diagrama de cuerpo libre del pistón.	97
36. Diagrama de cuerpo libre de la biela.	98
37. Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal principal.	99
38. Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal secundario.	100
39. Biela.	103
40. Centro de masa de formas comunes de volúmenes.	107
41. Contrapeso.	113
42. Eje 1.	114
43. Eje 2.	115
44. Eje 3.	116
45. Piñón.	117
46. Cigüeñal secundario.	118

47. Momento de inercia de masas de formas geométricas comunes.	120
48. Diagrama presión-volumen del ciclo Atkinson modificado.	134
49. Diagrama del ciclo Atkinson modificado.	136
50 y 51. Análisis 1.	171
52 y 53. Análisis 2.	173

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

a = aceleración.

a = addendum del engranaje

A_A = aceleración del punto A

A_B = aceleración de B

A_b = aceleración de la biela

A_C = aceleración de C

A_{CB} = aceleración de C con respecto a B

A_{CB}^N = aceleración CB normal

A_{CB}^T = aceleración CB tangencial

$A_{CM\ BIELA}$ = aceleración del centro de masa de la biela

A_D = aceleración de D

$AD = L$ = longitud de la biela

A_{DC} = aceleración de D con respecto a C

A_{DC}^N = aceleración DC normal

A_{DC}^T = aceleración DC tangencial

A_{E1} = aceleración del cigüeñal principal

A_{E2} = aceleración del cigüeñal secundario

A_p = aceleración del pistón

A_p = área del piñón.

B = calibre o diámetro interior del cilindro.

b = dedendum del engranaje

B = punto fijo al bloque del motor, centro del piñón

BA = vector de longitud variable. Distancia pistón-origen.

$BC = E_1$ = excentricidad del cigüeñal principal

Cb = distancia del punto C al centro de masa de la biela

$CD = E_2$ = excentricidad del cigüeñal secundario

C_p = coeficiente elástico

C_v = calor de combustión a volumen constante.

D = diámetro

D_{base} = diámetro base

D_{dedendum} = diámetro de dedendum

D_p = diámetro de paso del piñón

F = ancho de cara (pulgadas)

F = fuerza

F_A = fuerza pistón-biela

F_B = fuerza en el centro del piñón fijo al bloque

F_C = fuerza manivela principal-manivela secundaria

F_D = fuerza biela-manivela secundaria

F_G = fuerza de los gases

F_g = fuerza que ejerce el gas sobre el piñón.

F_O = fuerza entre el cigüeñal secundario (corona) y el piñón

F_o = fuerza total sobre el diente

FS = factor de seguridad

h = profundidad del diente

I = factor de geometría

I_b = momento de inercia de la biela

I_{E1} = momento de inercia del cigüeñal principal

I_{E2} = momento de inercia del cigüeñal secundario

J = factor de geometría

K_a = factor de aplicación

K_B = factor de espesor de la corona

K_m = factor de distribución de carga

K_s = factor de tamaño

K_v = factor de dinámica

L_{ADM} = longitud de la carrera de admisión

L_{COM} = longitud de la carrera de compresión

L_{DES} = longitud de la carrera de descarga

L_{EXP} = longitud de la carrera de expansión

m = masa

m = módulo del engranaje

M_A = momento en el punto A

m_b = masa de la biela

M_B = momento en el punto B

m_c = masa del combustible.

M_D = momento en el punto D

m_{E1} = masa del cigüeñal principal

m_{E2} = masa del cigüeñal secundario

m_i = representa la masa de cada elemento que compone el sistema.

m_p = masa del pistón

N = número de dientes

n_p = revoluciones por minuto del piñón

O = punto de engrane entre la corona del cigüeñal secundario y el piñón fijo al bloque

P = distancia BO = distancia BC , del centro del piñón al punto de engrane o centro de la corona.

P = paso diametral (dientes/pulgada)

P = presión (atm, psi)

P_b = peso de la biela

P_{E1} = peso del cigüeñal principal

P_{E2} = peso propio del cigüeñal secundario

P_g = presión del gas sobre el piñón.

P_p = peso propio del pistón

r = radio

r_{cil} = radio del cilindro

r_{cil} = radio del cilindro

r_{cil} = radio del cilindro

r_{cil} = radio del cilindro

$R_v = V_4 / V_3$ = relación volumétrica de la expansión adiabática.

$r_v = V_1 / V_2$ = relación volumétrica de la compresión adiabática.

S_{ut} = resistencia última a la tracción

S_y = límite de fluencia

T = temperatura (K, R)

U_c energía del combustible proveniente de la ecuación:

U_s es la energía sensible y se obtiene del diagrama de la mezcla combustible-aire.

V = volumen (m^3 , ft^3)

V = velocidad

V_1 = volumen del punto 1

V_2 = volumen del punto 2

V_3 = volumen del punto 3

V_4 = volumen del punto 4

V_A = velocidad del punto A

V_{ADM} = volumen de admisión

V_B = velocidad del punto B

V_C = velocidad del punto C

V_{CAMARA} = volumen de la cámara

V_{CB} = velocidad de C con respecto a B

V_{COM} = volumen de compresión

V_D = velocidad del punto D

V_{DC} = velocidad de D con respecto a C

V_{DES} = volumen de descarga

V_{EXP} = volumen de expansión

V_i = volumen de la división i.

v_t = velocidad de línea de paso

V_T = volumen del elemento.

W_t = fuerza tangencial que actúa sobre el diente

x = centro de masa del elemento.

x = desplazamiento del pistón con respecto al eje horizontal

x_i = distancia del centro de masa al eje de referencia.

x_i = representa la distancia entre el centro de masa y el eje o punto de referencia.

Y = factor de forma de Lewis

α = desplazamiento angular de la manivela principal

α doble punto = aceleración angular de la manivela principal

α punto = velocidad angular de la manivela principal

β = desplazamiento angular de la biela

β doble punto = aceleración angular de la biela

β punto = velocidad angular de la biela

γ = desplazamiento angular de la manivela secundaria

γ doble punto = aceleración angular de la manivela secundaria

γ punto = velocidad angular de la manivela secundaria

σ = esfuerzo según Lewis

σ_{adm} = esfuerzo admisible

σ_{cg} = esfuerzo por contacto de la rueda

σ_{cp} = esfuerzo por contacto del piñón

σ_t = esfuerzo por flexión

σ_{tg} = esfuerzo por flexión de la rueda

σ_{tp} = esfuerzo por flexión del piñón

Ψ = ángulo de presión.

INTRODUCCIÓN

A través del tiempo, el ser humano, se ha visto en la necesidad de desarrollar métodos y tecnologías que le puedan proporcionar un mejor nivel de vida. Es así como la historia nos muestra una continua lucha del hombre por dominar la naturaleza, creando nuevas formas para la transformación y aprovechamiento de la energía, entre ellas se encuentran turbinas, cámaras de combustión y motores. Los motores, transforman alguna forma de energía no utilizable directamente en energía mecánica que se manifiesta como fuerza y movimiento, y por lo tanto en trabajo mecánico. La transformación de la energía no se efectúa íntegramente debido a que una parte de ésta se pierde en forma de calor, la relación entre la energía obtenida y la introducida constituye el rendimiento de la máquina.

El ingeniero venezolano, Luis Marino González, bajo el apoyo del Instituto de Ingeniería, la Universidad Simón Bolívar, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas y el Ministerio de Ciencia y Tecnología, diseñó y patentó un motor de combustión interna (U.S.Patente N° 5.927.236, Julio 1999). El motor LUGO de combustión interna, encendido por chispa que trabaja bajo el ciclo termodinámico Atkinson modificado, posee la ventaja de lograr una mejor conversión de la energía química en energía mecánica a través de un mecanismo innovador el cual varía la carrera del pistón. Este mecanismo consta de un sistema de engranes que convierten el movimiento lineal del pistón en movimiento de rotación del cigüeñal y que además se encuentra solicitado por una serie de fuerzas alternativas.

Surge entonces la inquietud acerca de los esfuerzos actuantes sobre los engranes, los cuales serán objeto de esta investigación. El resultado de la misma servirá como apoyo y respaldo de la viabilidad del prototipo y como fundamento para su futura mejora.

Se presenta un estudio del funcionamiento del mecanismo y de los esfuerzos del sistema de engranajes propuesto por el ingeniero Luis Marino González, para de esta forma respaldar y asegurar la factibilidad del adecuado funcionamiento de este innovador mecanismo de carrera variable para motores de combustión interna.

El objetivo principal del trabajo especial de grado que a continuación se desarrolla, es realizar el análisis de los esfuerzos sobre los engranajes que transmiten la potencia producida por el motor LUGO. Dicho análisis se ejecutará a través del empleo del programa Proengineer. Establecidas previamente características tales como geometría, tipo de material constructivo y las condiciones de carga bajo las cuales trabajan los elementos, el programa Proengineer es capaz de evaluar y arrojar los valores de los esfuerzos producidos, mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

1.1. LOS SISTEMAS DISCRETOS EN GENERAL

Para sistemas complejos en general, que debido a su magnitud se ha tendido a separarlos en componentes individuales o pequeños elementos, cuyo comportamiento se pueda determinar sin dificultad, para a posterior reensamblar el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

En el caso en que obtengamos un modelo adecuado empleando una cantidad finita de componentes totalmente definidos, estaremos en presencia de los denominados problemas discretos. Aunque en determinados casos nos encontraremos con que la separación de componentes no sigue una tendencia finita, lo que conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes, en cuyo caso estamos en presencia de sistemas llamados continuos.

Con el recurso de las computadoras los problemas discretos se han podido resolver sin mucho problema, a diferencia de los continuos que sólo se resuelven de manera exacta a través de manipulaciones matemáticas, ya que la capacidad de las computadoras es finita. Para este inconveniente planteado se han ido desarrollando diversos métodos de discretización, éstos efectúan una aproximación esperando que esté lo más cerca posible a la solución continua verdadera a medida que se aumente el número de variables discretas.

Éstos métodos siguen un patrón general que puede adaptarse a todos los sistemas discretos, con dicho patrón general nos referimos a un sistema discreto tipo.

La primera definición del método de los elementos finitos como procedimiento de aproximación de problemas continuos surge de la existencia de una manera única para abordar los problemas discretos tipo, la cual expresa: el continuo se divide en un número finito de partes, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros, y la solución del sistema completo como ensamblaje de los elementos sigue precisamente las mismas reglas que se aplican a los problemas discretos tipo.

En esta categoría hallaremos diversos métodos matemáticos clásicos de aproximación y métodos de aproximaciones de naturaleza técnica. Por ende, no es fácil hablar del origen del método de los elementos finitos y del instante preciso de su invención.¹

1.1.1. ELEMENTO FINITO

El método de elemento finito es un método de análisis numérico en el cual una región compleja que define a un continuo se discretiza en forma geométricas más simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes, son consideradas sobre esos elementos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes del elemento. Un proceso de ensamblaje, cuando se consideran debidamente las cargas y restricciones da lugar a un conjunto de ecuaciones. La solución de esas ecuaciones nos da el comportamiento aproximado del continuo.

Las ideas básicas del método del elemento finito se originaron gracias a los avances en el análisis estructural de las aeronaves. En 1941, Hrenikoff presentó una

solución de problemas de la elasticidad usando el método de trabajo del marco. En un artículo publicado en 1943, Courant usó la interpolación polinomial por parte sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armadura, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough fue el primero en acuñar y emplear el término de elemento finito en 1960. Los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas al principio de los años 60. Un libro de Argyris, fue publicado en 1955, sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimentó métodos adicionales en los estudios del elemento finito. El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Chung fue publicado en 1967. A finales de la década de los 60 y principio de la 70 el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. Las bases matemáticas se fijaron en la década de los 70.

1.1.2. EL PROCESO GENERAL PARA LA APROXIMACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL CONTINUO

Dado un elemento o grupo de ellos a los cuales se requiera analizar, se debe seguir los siguientes pasos para lograr una aproximación:

Primer paso: se determinan las propiedades de cada elemento a partir de la geometría del problema, de los datos de carga y de la naturaleza del material. Se determina la matriz de rigidez para cada elemento así como para las correspondientes “cargas nodales”. Cada elemento tiene su propio número de identificación y sus conexiones nodales especificadas.

Segundo paso: es el ensamblaje de las ecuaciones finales. Esto se puede realizar simplemente mediante la adición de todos los números en el lugar

¹ Referencia 5

correspondiente de la matriz global. Como todas las matrices son simétricas, en realidad sólo tenemos que calcular la mitad superior de la diagonal. Todos los coeficientes no nulos están confinados dentro de una banda que puede calcularse a priori a partir de la posición de las conexiones nodales.

Tercer paso: introducir las ecuaciones de contorno en la matriz final ya ensamblada.

Paso final: es la resolución del sistema de ecuaciones resultantes.²

Todo el procedimiento anteriormente descrito es realizado por el programa Proengineer, determinando de esta forma, los esfuerzos a los cuales es sometido un elemento o conjunto de ellos. Los elementos bajo estudio en nuestro caso en particular, son un conjunto de engranajes cuyas características serán descritas en la siguiente sección.

² Referencia 22

Los engranajes son elementos mecánicos dentados que se emplean para la transmisión de potencia o de velocidad entre dos ejes que conforman un sistema. Sus características físicas determinan cómo se realiza dicha transmisión y los materiales constructivos su longevidad. A continuación se realiza una descripción del tipo de engranajes utilizados en el motor LUGO.

1.2. ENGRANAJES RECTOS

El motor LUGO transforma el movimiento alternativo y lineal del pistón en el movimiento circular del eje cigüeñal a través de un innovador mecanismo conformado por engranajes rectos.

Los engranajes rectos se utilizan para transmitir movimientos de rotación entre ejes paralelos; normalmente tienen forma cilíndrica y sus dientes son rectos y paralelos a los ejes de rotación. Por engranajes se entiende el conjunto de dos o más piezas que engranan. En comparación con transmisión por fricción o bandas, se diferencian en que se adaptan especialmente donde se requiere una relación exacta de velocidad, o donde la relación entre los miembros motriz y movido accionado deben de conservar una relación definida de fase. Con relación a otros sistemas de transmisión el sistema de engranes da por resultado menores presiones en los puntos de apoyo, menor desgaste en la superficie de los cojinetes, y una mayor eficiencia.

La circunferencia teórica que es la base de todos los cálculos se conoce con el nombre de circunferencia primitiva. El diámetro primitivo o de paso se define:

$$D = N \cdot m \rightarrow (Ec.1.2.1)$$

Donde:

D = diámetro de paso

N = número de dientes

m = módulo en mm

Y el diámetro base se expresa:

$$D_{base} = D \cdot \cos \psi \rightarrow (Ec.1.2.2)$$

Donde:

D_{base} = diámetro base

Ψ = ángulo de presión

Cuando dos ruedas dentadas engranan, sus circunferencias primitivas son tangentes. La superficie primitiva de los engranes se define como una superficie imaginaria que gira conjuntamente con otra, sin resbalamientos, semejante a los cuerpos circulares con rodamiento friccional.³

Entre dos ruedas que engranan la de menor radio recibe el nombre de piñón y la de mayor radio el de corona.

El paso diametral métrico se llama módulo de generación y es el cociente entre el diámetro primitivo y el número de dientes. El módulo indica el tamaño de diente utilizado en el engrane y los engranes que se pretenden hacer girar uno sobre otro deben tener el mismo paso, así como también los perfiles de los dientes de la misma forma. La ecuación para la determinación del módulo es:

$$m = \frac{D_{\text{dedendum}}}{N + 2} \rightarrow (\text{Ec.1.2.3})$$

Donde:

D_{dedendum} = diámetro de dedendum

El adendum es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia exterior. En la rueda con engrane interior, el adendum es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia interior, cuya ecuación es:

$$a = 1 \cdot m \rightarrow (\text{Ec.1.2.4})$$

Donde:

a = adendum

El dedendum es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de fondo. En engranes internos es la distancia radial entre la circunferencia primitiva y la circunferencia exterior, cuya ecuación:

$$b = 1.167 \cdot m \rightarrow (Ec.1.2.5)$$

Donde:

b = dedendum

El ángulo de presión en un engranaje es aquel ángulo entre el eje de transmisión y la dirección de la velocidad en el punto de contacto. Los ángulos de presión en los engranajes se tienen estandarizados en unos pocos valores por los fabricantes de engranes. Los valores estándares son de 14.5, 20 y 25 grados, y 20 grados es el más comúnmente utilizado.

La profundidad del diente corresponde a la suma del addendum y el dedendum:

$$h = a + b \rightarrow (Ec.1.2.6)$$

El espacio libre de fondo es la cantidad en que el addendum del diente excede al dedendum del diente conjugado.⁴

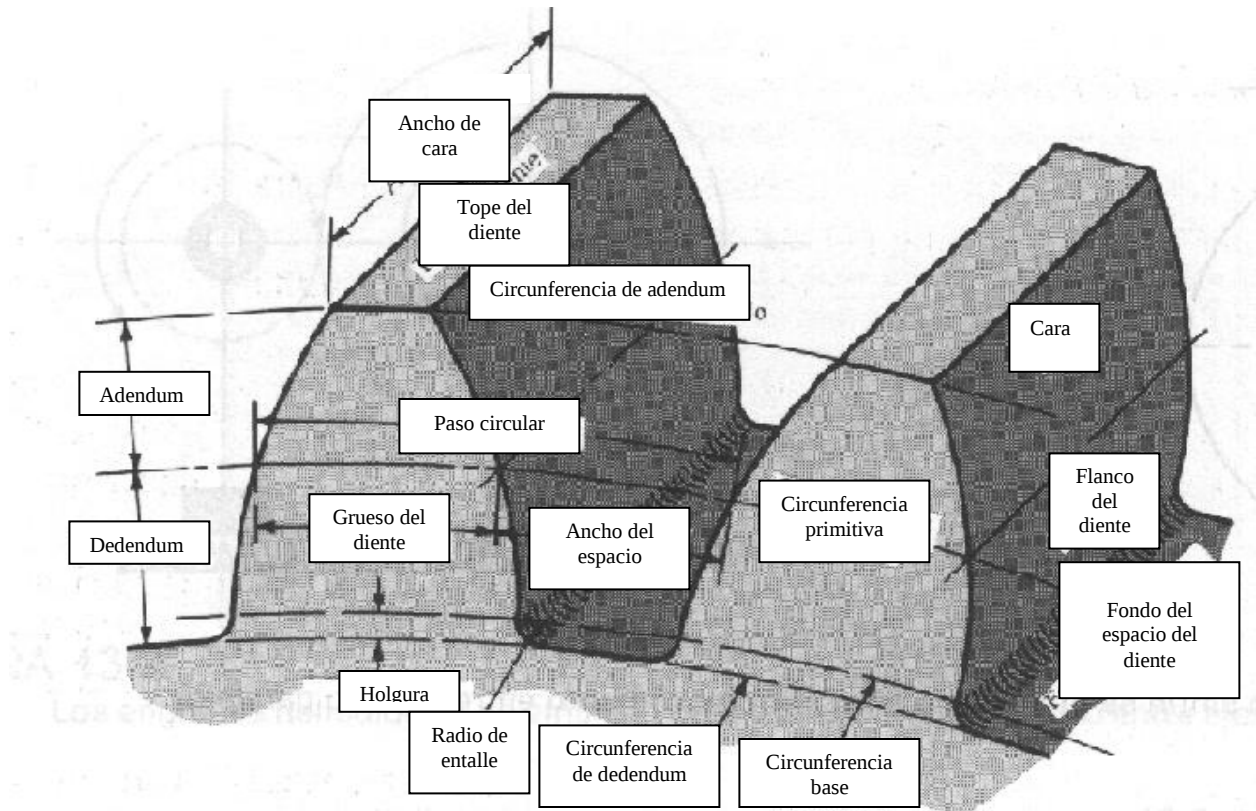
La cara del diente es la superficie de un diente entre el círculo primitivo y el círculo formado a la altura de la cabeza del diente. El espesor de la cara es el ancho del engrane medido sobre la superficie primitiva en un plano contenido en el eje de rotación. El flanco del diente es la superficie de un diente entre el círculo primitivo y la circunferencia de fondo.

³ Referencia 8

⁴ Referencia 18

La superficie superior es la superficie plana de un diente entre las caras del mismo diente. La superficie inferior es la superficie de un engrane entre los flancos de dientes adjuntos de un mismo engrane. El filete es la superficie curva que une el flanco de un diente con la superficie inferior.

FIGURA 1
Características de los dientes de los engranajes⁵



En los engranes internos los dos centros de los engranes están del mismo lado del punto de contacto y, en consecuencia, las posiciones de las circunferencias que definen los extremos del diente aparecen invertidas con respecto a la circunferencia primitiva. En el mecanismo del motor LUGO, en la corona interna la circunferencia interior queda dentro de la circunferencia primitiva, de la que dista el adendum. Análogamente, la circunferencia de fondo queda por fuera de la circunferencia

primitiva y dista de ella el dedendum. La circunferencia base permanece dentro de la circunferencia primitiva y próxima a la circunferencia interior.

Una vez determinada la geometría de los engranes se define el perfil de los dientes. Los perfiles de los dientes se modelan para producir una relación de transformación, o relación de velocidades de reducción o de multiplicación, constante durante todo el engranaje. El lugar geométrico de los puntos de contacto entre la rueda y el piñón está definido por la circunferencia de paso de cada uno de los elementos. En el punto de contacto la velocidad lineal de los elementos es la misma y el radio de paso del engrane define la velocidad angular de cada eje mediante la relación:

$$v = r \cdot \omega \rightarrow (\text{Ec.1.2.7})$$

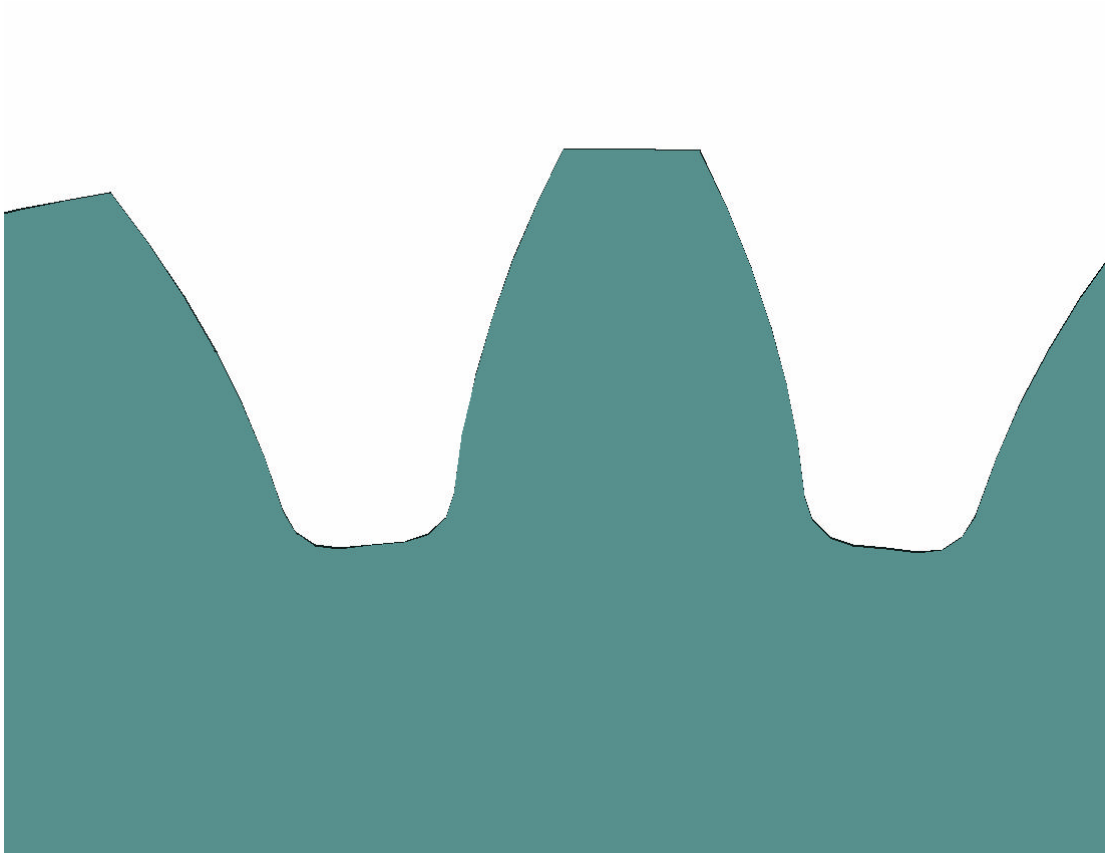
De esta forma, si la corona se ubica en el eje conductor, se obtendrá una relación de velocidades de multiplicación y si al contrario es el piñón, entonces se tendrá una relación de velocidades de reducción. En el mecanismo la corona posee el doble del diámetro del piñón lo que implica una relación de transmisión de dos a uno, es decir, por cada vuelta de la corona el piñón ejecuta dos vueltas.

El perfil de dos dientes que engranan se modela mediante el método de la evolvente. En este método se cumple la condición de que la normal común a todos los puntos de contacto pasa por la circunferencia primitiva. La curva evolvente es la trayectoria que marca un punto trazador de un hilo cuando se desenrolla de un cilindro conocido como cilindro base de la evolvente. La distancia del punto de contacto al punto trazador es el valor instantáneo del radio de curvatura que varía continuamente, generando el perfil del diente. Un par de dientes cuyos perfiles son determinados mediante el método de la evolvente se llaman conjugados y tienen la particularidad de no presentar interferencia durante su funcionamiento, evitando la aparición de problemas como ruido, vibración, choque y falla por fatiga. Además

⁵ Referencia 12

entre ellos se produce un contacto con rodamiento puro entre las superficies primitivas.

FIGURA 2
Evolvente de los dientes.



Las superficies de contacto entre los engranajes, son las superficies sobre las cuales se aplica la fuerza responsable de mover todo el sistema, esta fuerza responde a la 3^{era} Ley de Newton según la cual la variación en función del tiempo del impulso mv es producida por la aplicación de una fuerza. El estudio de las fuerzas actuantes en el motor LUGO se debe realizar de acuerdo al análisis para motores alternativos a cuatro tiempos presentado en la siguiente sección.

1.3. FUERZAS SOBRE UN MOTOR ALTERNATIVO

Como bien es conocido, los motores a cuatro tiempos constan de un conjunto de elementos mecánicos que conectados entre sí son capaces de restringir el movimiento del pistón en un movimiento alternativo sobre el eje vertical del cilindro que lo contiene, realizando procesos de admisión, compresión, expansión y descarga sobre el fluido de trabajo.

La fuerza resultante que, dirigida según el eje del cilindro, actúa en cada instante sobre la manivela, se obtiene efectuando la composición de los valores que en cada momento adquieren la fuerza debido a la presión del fluido activo sobre el pistón y la fuerza alterna de la inercia. Según estos componentes estén dirigidos en el mismo sentido o en sentido opuesto, la fuerza resultante será la suma o la diferencia de los mismos. Así, por ejemplo, al comienzo de la carrera de expansión, la fuerza alterna de inercia se opone a la correspondiente presión del gas, por lo que se reduce el empuje transmitido por el pistón a la biela y al eje cigüeñal.

Analizando las diversas fases del ciclo, podemos observar que en la primera carrera, es decir, en la de aspiración, actúa únicamente la fuerza de inercia de las masas alternas, por cuanto la fuerza debida a la ligera depresión que ocurre en el cilindro es de carácter despreciable. En la segunda carrera al moverse el pistón de abajo hacia arriba el diagrama de fuerzas de inercia se invierte, y la presión causada por la compresión se opone, evidentemente al movimiento del pistón. En la primera parte de la carrera de expansión, la fuerza de inercia se opone a la presión de combustión. En la carrera de escape, el cilindro está en comunicación con el exterior, los gases ofrecen una resistencia mínima al movimiento del pistón y, por ello, actúa sobre la manivela solamente la fuerza de inercia.⁶

⁶ Referencia 7

Analizadas la composición de las fuerzas en las distintas las fases del ciclo termodinámico, se procede ahora a efectuar el desarrollo de las fuerzas debidas a la presión del fluido y posteriormente las fuerzas de inercia de las masas.

1.3.1. FUERZAS DEBIDO A LA PRESIÓN DEL FLUIDO ACTIVO

La llamada también fuerza de gas, se debe a la presión que ejercen los gases de combustión como resultado de la ignición de la mezcla aire combustible que actúa contra la cabeza del pistón:

$$F_g = -P_g \cdot A_p \rightarrow (Ec.1.3.1.1)$$

$$A_p = \frac{\pi}{4} \cdot B^2 \rightarrow (Ec.1.3.1.2)$$

$$F_g = -P_g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot B^2 \rightarrow (Ec.1.3.1.3)$$

Donde:

F_g : fuerza de gas

P_g : presión de gas

A_p : área útil del pistón

B : calibre o diámetro interior del cilindro

La presión de gas en esta expresión es una función del ángulo que forma la manivela con la vertical y está determinado por la termodinámica del motor.

1.3.2. FUERZAS DE INERCIA DE LAS MASAS ALTERNAS

Las partes dotadas de movimiento alterno están sometidas a fuerzas de inercia. El análisis de las fuerzas dinámicas se centra en la aplicación de las Leyes de Newton que pueden expresarse como:

- Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en tal estado, y un cuerpo en movimiento a velocidad constante tiende a mantener esa velocidad, a menos que actúe sobre uno u otro una fuerza externa.
- La tasa de variación en el tiempo de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la magnitud de la fuerza aplicada y actúa en la dirección y sentido de la fuerza.
- Para toda fuerza de acción existe una fuerza de reacción igual y opuesta.⁷

De acuerdo a lo anterior las fuerzas bajo las cuales estará sometido el sistema pueden expresarse por medio la aplicación de la fórmula newtoniana:

$$F = m \cdot a \rightarrow (Ec.1.3.2.1)$$

En donde:

m: masa

a: aceleración

F: fuerza

Finalmente, para el análisis de las fuerzas se requiere conocer cual será el punto de aplicación las fuerzas producidas por el peso de los elementos y los momentos de inercia de estos. En la sección siguiente se realizará su deducción, definición y forma de cálculo para elementos homogéneos.

⁷ Referencia 13

En el estudio de las fuerzas que actúan en nuestro sistema nos encontramos con las fuerzas sobre cada uno de los miembros, las fuerzas entre estos y además se deben considerar los pesos propios de cada elemento los cuales están aplicados en el centro de masa de cada uno de los miembros.

1.4. CENTRO DE MASA

El momento de masa para el sistema se define como la suma de los momentos de masa de todas las partículas. Por lo tanto, si M_0 constituye el momento de masa respecto al origen, entonces:

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \rightarrow (Ec.1.4.1.)$$

Donde:

m_i : representa la masa de cada elemento que compone el sistema.

x_i : representa la distancia entre el centro de masa y el eje o punto de referencia.

Deseamos encontrar un punto $\bar{x}$ tal que si la masa total del sistema se encontrara allí, su momento de masa respecto al origen sería igual al momento de masa del sistema respecto al origen. Entonces $\bar{x}$ debe satisfacer la ecuación:

$$\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \rightarrow (Ec.1.4.2)$$

Y así:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \rightarrow (Ec1.4.3)$$

El punto $\bar{x}$ se denomina centro de masa del sistema, y es el punto donde el sistema estará equilibrado. La posición del centro de masa es independiente de la del origen; es decir, la ubicación del centro de masa, relativa a la posición de las partículas, no cambia cuando cambia el origen. El centro de masa es importante porque el comportamiento de todo sistema de partículas se puede describir por el centro de masa del sistema.

Debido a que el sistema posee un material homogéneo, es decir, de densidad constante y sabiendo que la densidad se define como la relación entre la masa y el volumen la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \rightarrow (Ec1.4.4)$$

1.5. MOMENTO DE INERCIA

Uno de los elementos indispensables en nuestro estudio de fuerzas, es el momento de inercia, que no es más que la resistencia que el sistema opone a ponerse en movimiento, ya que este se encuentra involucrado en nuestro análisis de momentos flectores del sistema.

El momento de inercia de una partícula cuya masa es m alrededor de un eje, se define como la masa por el radio al cuadrado, donde r es la distancia perpendicular de la partícula al eje.

Si tenemos un sistema de n partículas, el momento de inercia se define como la suma de los momentos de inercia de todas las partículas.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \rightarrow (Ec.1.5.1)$$

1.5.1. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Consideremos un cuerpo de masa m . Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares con origen en un punto arbitrario O , y $Gx'y'z'$ un sistema paralelo de ejes centroidales, es decir, un sistema con origen en el centro de gravedad G del cuerpo y ejes x' , y' , z' paralelos, respectivamente, a los ejes x , y , z . Denotando con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ las coordenadas de G respecto a $Oxyz$, escribimos las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y, z del elemento respecto al sistema $Oxyz$ y sus coordenadas x', y', z' respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \rightarrow (Ec.1.5.1.1)$$

$$y = y' + \bar{y} \rightarrow (Ec.1.5.1.2)$$

$$z = z' + \bar{z} \rightarrow (Ec.1.5.1.3)$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \rightarrow (Ec.1.5.1.4)$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \rightarrow (Ec.1.5.1.5)$$

Por lo tanto tenemos:

$$I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \rightarrow (Ec.1.5.1.6)$$

De manera más sencilla en el plano, denotando por r a la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje paralelo centroidal BB' , podemos escribir la siguiente relación

general entre el momento de inercia I de un cuerpo respecto a AA' y su momento de inercia I barra respecto a BB' :⁸

$$I = \bar{I} + m \cdot r^2 \rightarrow (Ec.1.5.1.7)$$

1.5.2. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

El momento de inercia respecto a un eje de un cuerpo formado por varias formas tridimensionales simples, de las cuales se tienen tabulados sus momentos de inercia, o de formas complejas, puede obtenerse calculando el momento de inercia de cada parte respecto al eje dado y sumándose y restándose los mismos según sea el caso, para las partes sólidas se sumará y para los agujeros se restará su momento.

⁸ Referencia 2

Una vez mencionado y explicado de manera general el basamento del método de los elementos finitos, el comportamiento de las fuerzas, su cálculo y aplicación, hablaremos un poco acerca de la historia, algunas aplicaciones y el fundamento del ciclo termodinámico bajo el cual trabaja el motor LUGO y que es de indispensable estudio para nuestro objetivo.

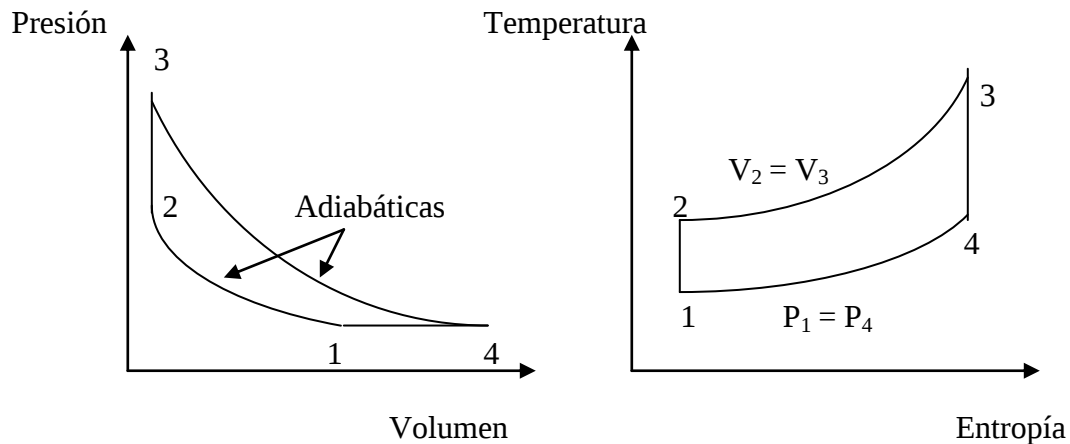
1.6. EL CICLO ATKINSON

El ciclo debe su nombre a J. Atkinson, un ingeniero británico, quien en 1885 realizó trabajo sobre el motor de gas. Una particularidad del motor de gas de Atkinson era sus carreras alternativas variables que se obtenían mediante un mecanismo especial de eslabones. La carrera corta era la carrera de compresión mientras que la larga correspondía a la de expansión. De esta forma, Atkinson esperaba obtener un trabajo mayor en relación a lo obtenido de un ciclo de volumen constante. De hecho, una pequeña cantidad adicional de trabajo obtenido no justificaba realmente el incremento del volumen del cilindro requerido en este caso un mecanismo de eslabonamiento más complejo necesario para dar las carreras alternativas de compresión y expansión.

Este ciclo también ha sido usado en un ciclo de turbina a gas; entre ellas resaltó Holtzwarth Constant Volume, 1908. En este tipo de turbina a gas, el aire era comprimido y pasado a una cámara de combustión de volumen constante. El combustible era inyectado en la cámara de combustión en donde se incendiaba, y la presión incrementaba o volumen constante. Las altas presiones del gas eran entonces liberadas para expandirse a través de la turbina a gas y luego descargadas en la atmósfera. Este tipo de turbina a gas fue luego desarrollada en Suiza en 1930.

El ciclo Atkinson, es un ciclo de potencia que se origina de la sucesión de una serie de procesos termodinámicos, produciendo el diagrama que se presenta a continuación:

FIGURA 3
Diagramas Presión-Volumen y Temperatura-Entropía del
Ciclo Atkinson



De 1 a 2: compresión adiabática de acuerdo con la ley $P.V^\gamma = C$.

presión aumenta de P_1 a P_2

temperatura se incrementa de T_1 a T_2

volumen se reduce de V_1 a V_2

entropía constante $S_1 = S_2$

De 2 a 3: adición de calor a volumen constante

presión aumenta de P_2 a P_3

temperatura se incrementa de T_2 a T_3

volumen permanece constante $V_2 = V_3$

entropía aumenta de S_2 a S_3

De 3 a 4: Expansión adiabática de acuerdo con la ley $P.V^\gamma = C$.

presión decrece de P_3 a P_4

temperatura disminuye de T_3 a T_4

volumen aumenta de V_3 a V_4

entropía permanece constante $S_3 = S_4$

De 4 a 1: Rechazo de calor a presión constante.

presión permanece constante $P_4 = P_1$

temperatura decrece de T_4 a T_1

volumen disminuye de V_4 a V_1

entropía decrece de S_4 a S_1

Este proceso completa el ciclo y devuelve el gas a su estado original.

Teniendo claro los procesos del ciclo Atkinson, es muy sencillo visualizar los procesos del ciclo Atkinson modificado, el cual es reproducido por los componentes de nuestro sistema. Los procesos del punto 1 al punto 2 y del punto 2 al 3 son iguales para ambos ciclos, la diferencia está en que en el ciclo modificado la expansión no ocurre hasta el volumen inicial, sino hasta un volumen un poco menor. El ciclo que origina nuestro mecanismo puede ser visualizado posteriormente en la sección de la descripción y funcionamiento del mecanismo.

Una vez estudiado el comportamiento ideal del ciclo, ahora se procede con el ciclo de aire-combustible, que representa una aproximación bastante cercana al ciclo real, y con el cual podremos realizar nuestro análisis.

En la aproximación del ciclo de aire se asume como simplificación que el cilindro contiene solamente aire y que este aire se comporta como un gas perfecto con un calor específico constante. La absorción y el rechazo de calor son a volumen constante y la compresión y la expansión son asumidas como procesos adiabáticos y libres de fricción.

1.7. EL CICLO AIRE COMBUSTIBLE.⁹

Si las propiedades físicas de los gases dentro cilindro, antes y después de la combustión, son tomadas en cuenta, se puede obtener una muy cercana aproximación a los valores reales de presión y temperatura. Los datos calculados mediante esta aproximación son, para motores bien diseñados, un pequeño porcentaje alrededor de los obtenidos mediante pruebas. Este ciclo teórico basado en las propiedades reales de los gases del cilindro es llamado aproximación del ciclo aire combustible y representa un patrón ideal para la comparación con el rendimiento real.

1.7.1. USOS DEL CICLO AIRE COMBUSTIBLE.

Mientras que el ciclo de aire muestra el efecto general de la relación de compresión sobre la eficiencia del motor, el ciclo de aire combustible puede ser calculado para varios tipos de mezcla, presiones internas, así como temperaturas. Cuando esto se realiza, se encuentra que la eficiencia del motor, basada en el trabajo que se realiza sobre el pistón es principalmente afectada por la relación de compresión y la proporción de aire combustible.

1.7.2. ALCANCE DEL CICLO AIRE COMBUSTIBLE

Los cálculos para el ciclo de aire combustible toman en consideración:

1. La composición real de los gases del cilindro.

2. La variación en el calor específico de los gases con la temperatura.
3. El hecho que el combustible y el aire no se combinan completamente a altas temperaturas.
4. La variación en el número de moléculas presentes en el cilindro como un cambio en la presión y temperatura.

1.7.3. SUPOSICIONES

En el ciclo de aire combustible se realizan las siguientes suposiciones:

1. El combustible es completamente vaporizado y mezclado con el aire.
2. La combustión ocurre instantáneamente en el punto muerto superior.
3. No existe intercambio de calor entre los gases y las paredes del cilindro.
4. La compresión y la expansión son procesos adiabáticos y libres de roce.

1.7.4. COMPOSICIÓN DE LOS GASES

La relación aire combustible es constantemente cambiada durante la operación del motor. Esto no solo afecta la composición de los gases después de la combustión sino que también cambian las cantidades relativas de dióxido y monóxido de carbono vapor de agua en los productos. Para eludir cálculos laboriosos, el ciclo aire combustible es construido con la ayuda de diagramas termodinámicos que contienen las características de los gases del cilindro. Un diagrama termodinámico distinto para la mezcla de gases no quemados puede ser construido por cada relación de aire combustible de interés. Un diagrama termodinámico, correspondiente a los productos de la combustión también puede ser construido para cada mezcla de aire combustible.

⁹ Referencia 14

Si bien los análisis del ciclo de aire ayudan al entendimiento general del problema termodinámico, se requieren análisis más exactos para valorizar cada proceso específico del motor existente. En virtud de que el fluido real para el motor de combustión es una mezcla de aire y un combustible complejo y siendo quemada esa alimentación en el motor, obteniéndose diferentes productos de su combustión, será conveniente tomar en consideración las propiedades de los fluidos verdaderos.

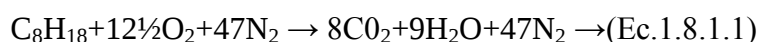
1.8. DIAGRAMAS DE COMBUSTIÓN.

Si se trata de calcular las propiedades del fluido, el trabajo resulta extremadamente tedioso y lento. Por otra parte, los resultados de tales cálculos llevados a un alto grado de precisión han sido ordenados en forma de tablas y gráficas.

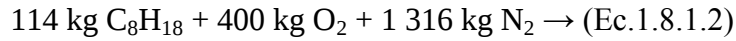
1.8.1. DIAGRAMAS PARA MEZCLAS NO QUEMADAS.

El diagrama para mezclas no quemadas permite la valuación rápida de las propiedades de la mezcla, obtenidas durante cualquier etapa del proceso de compresión (suponiendo que en este proceso no ocurre ni la combustión ni la reacción química). Las propiedades del fluido dependen directamente de las cantidades relativas de combustible, aire y residuos en la mezcla. En virtud de que para todas las condiciones de funcionamiento, no son constantes ni la relación aire-combustible ni la cantidad de residuos, será necesario, teóricamente un número infinito de diagramas. A pesar de esto, se presentarán tres diagramas que satisfacen la variedad de mezclas encontradas ordinariamente en los motores de encendido por chispa. Un diagrama es para la mezcla teóricamente correcta de aire y octano (C_8H_{18}), otra para mezclas pobres y otra para mezclas ricas.

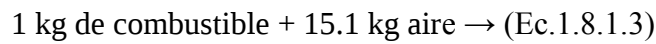
Para la elaboración del diagrama se procede de la siguiente manera, considerando la reacción del octano con la cantidad teóricamente correcta de aire:



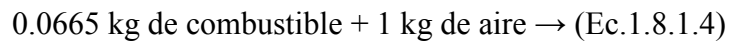
El peso de la alimentación se obtiene multiplicando cada cantidad de moles en la ecuación por el peso molecular apropiado:



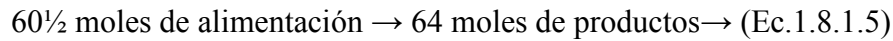
ó



ó



El diagrama para la mezcla teóricamente correcta esta basado en 1.0665 kg de diferentes gases. Sin embargo, la ecuación muestra que:



Entonces 1.0665 kg de alimentación representan:

$$\frac{60,5 \text{ moles.alimentacion}}{(400 + 1316) \text{ kg.aire}} = 0,0353 \cdot \frac{\text{moles.alimentacion}}{\text{kg.aire}} = 0,0353 \cdot \frac{\text{moles.alimentacion}}{1,0665 \text{ kg.alimentacion}} (\text{Ec.1.8.1.6})$$

y 1.0665 kg de productos (mezcla quemada) representan:

$$\frac{64 \text{ moles.productos}}{(400 + 1316) \text{ kg.aire}} = 0,0373 \cdot \frac{\text{moles.productos}}{\text{kg.aire}} = 0,0373 \cdot \frac{\text{moles.productos}}{1,0665 \text{ kg.alimentacion}} (\text{Ec.1.8.1.7})$$

En el motor real, permanece en el volumen de compresión una fracción f en peso de los productos de la combustión que diluye la fracción en peso $(1-f)$, de la alimentación entrante. Los moles totales de la mezcla en el cilindro del motor serán:

$$0.0373(f) + 0.0353(1-f) = (0.0353 + 0.002f) \text{ moles} \rightarrow (\text{Ec.1.8.1.8})$$

Al construir un diagrama de compresión para la mezcla no quemada, se presentan varias complicaciones. El combustible que entra al motor puede tener predominantemente los estados líquidos o gaseosos, y las cantidades del gas residual varían con las condiciones del motor. Consecuentemente no se obtendrá una respuesta

exacta y general mediante un solo diagrama. Sin embargo, para simplificar, se supondrá:

- Que el fluido es una mezcla homogénea de gases.
- Que el residuo del escape es constante para un valor de $f = 0.10$.

Con estos supuestos y los datos obtenidos es posible determinar los componentes de las mezclas para el diagrama de compresión de mezcla correcta. (Estos componentes serán fijos porque se ha supuesto que no ocurre cambio químico durante el proceso de compresión). Así pues; el diagrama del proceso de compresión de la mezcla químicamente correcta representa 1.0665 kg de mezcla formada de:

$$0.9 \text{ kg de aire} + (0.9 * 0.0665 = 0.05985) \text{ kg de comb.} + 0.10665 \text{ kg} \rightarrow (\text{Ec.1.8.1.9})$$

de productos (residuos)

Una vez determinados los componentes típicos, podrán calcularse las propiedades de la mezcla. Las relaciones pVT se encuentran a partir de la ecuación del estado de los gases perfectos:

$$pV=nR_0T \rightarrow (\text{Ec.1.8.1.10})$$

A la energía interna de la mezcla no quemada, se le llama energía interna sensible (U_s o E_s) porque no ocurren ni los cambios en fase ni la reacción química y, por lo tanto, los cambios en la energía sensible serán reflejados por los cambios correspondientes en temperatura y presión. El efecto de la presión es comúnmente pequeño, y para los gases perfectos, inexistente. Por consiguiente, los valores de la energía interna se calcularán con aceptable precisión solamente arriba de una referencia de temperatura: 288.5 K (520 R).

De todos modos, la entropía de una sustancia es función de dos propiedades, y son necesarias dos propiedades para describir el estado de referencia de cero entropía. El valor de cero entropía se asigna a cada componente gaseoso a 1.033 kg/cm^2 abs y 15.5°C (14.7 Ib/pulg^2 abs y 60°F) (520 R). Por lo cual la entropía de la mezcla de gases será igual a la suma de las entropías individuales de los componentes.

1.8.2. DIAGRAMAS PARA MEZCLAS QUEMADAS.

Los diagramas para las mezclas quemadas se preparan en una forma similar a la empleada para los diagramas de compresión (sin embargo, los cálculos son muchísimo más elaborados) y para el mismo peso de mezcla.

Los componentes de la mezcla quemada, diferentes de la mezcla no quemada, no son constantes sino que varían con la temperatura y la presión. Por esta razón la energía interna, por ejemplo, de la mezcla quemada, incluye tanto la forma de la energía sensible como la de la química. La referencia arbitraria para la energía interna se estimó que fuera 288.5 K (520 R), pero en vista de que están presentes varias especies químicas, es necesario especificar también los componentes que tengan cero energía interna, en el estado de referencia. La selección se ha hecho para corresponder con los componentes también presentes en la mezcla no quemada: CO_2 , H_2O (vapor), O_2 y N_2 . La energía interna de cualquier sustancia en la mezcla en equilibrio químico se valoriza enfriándola desde la temperatura de equilibrio hasta la de referencia de 288.5 K (520 R), obteniéndose así la parte sensible de la energía interna. Enseguida, se convierte la sustancia a volumen constante en uno o más de los componentes base (CO_2 , etc.), obteniéndose otro tipo de energía interna (el calor de reacción a volumen constante, positivo o negativo dependiendo de si se libera o absorbe energía), proveniente del cambio químico. Al repetir este procedimiento para cada uno de los componentes de la mezcla en equilibrio, sumando los cambios en las energías química e interna sensible, se encuentra la energía interna total U para la mezcla compleja en equilibrio.

La entropía total de la mezcla en equilibrio, se encuentra en una forma similar a la descrita arriba para la energía interna. La entropía sensible de cada componente se valoriza arriba de un estado de referencia, arbitrario, de cero entropía sensible: 1 atm y 288.5 K (520 R). También se considera este estado como de entropía total cero para los componentes bases CO_2 , H_2O , (vapor), O_2 y N_2 . El problema es calcular las entropías relativas de los otros componentes con respecto a los cuatro componentes bases. Este paso no es difícil porque ya se han calculado los valores de las entropías absolutas, y los resultados se han puesto en tablas. Por lo tanto, la entropía del CO relativa al CO_2 , por ejemplo a 288.5 K y 1 atm, se encuentra rápidamente mediante la diferencia de los

valores de las tablas. Enseguida, se suman los valores relativos y sensibles de los componentes para obtener la entropía total de la mezcla.

Cuando se sigue el procedimiento discutido anteriormente y se consignan los resultados, se obtiene un diagrama. Se debe advertir que los valores de U y U_s en el diagrama de la mezcla rica no son iguales, porque U contiene energía interna en forma química latente: hay combustibles presentes en la mezcla. Por otra parte, los diagramas muestran que $U = U_s$ en la región de baja temperatura para la mezcla químicamente correcta y para la mezcla pobre, porque las cantidades de combustibles tales como el H_2 y el CO , son extremadamente pequeñas. Adviértase también que por definición:

$$H = U + \frac{p \cdot V}{J} \rightarrow (Ec.1.8.2.1)$$

$$H_s = U_s + \frac{p \cdot V}{J} \rightarrow (Ec.1.8.2.2)$$

Los valores sensibles de las entalpías y de la energía interna son de utilidad cuando se estudia la combinación de los residuos y la alimentación, porque en dicha combinación se supone que no ocurren cambios en la composición química.

1.8.3. EL PROCESO DE COMBUSTIÓN.

El diagrama de compresión contiene solamente la trayectoria de la mezcla no quemada. Cuando la mezcla se quema adiabáticamente a volumen constante, el calor y el trabajo no son transferidos, pero en su lugar se llevan los productos hasta el estado de equilibrio químico. Aplicando la Primera Ley a este proceso adiabático se tiene que:

$$Q - W = \Delta U = U_3 - U_2 = 0 \rightarrow (Ec.1.8.3.1)$$

ó

$$U_3 \text{ (de los productos)} = U_2 \text{ (de la mezcla)} \rightarrow (Ec.1.8.3.2)$$

El problema es valorizar a U_2 de la mezcla a la temperatura T_2 de compresión.

Considerando que el cambio en energía interna entre los estados es igual a:

$\Delta U_{AF} = (\text{peso del combustible}) (\text{calor de combustión [el inferior]} \text{ a volumen constante para combustibles gaseosos}) \rightarrow (\text{Ec.8.3.3})$

Para la mezcla teóricamente correcta (por ejemplo), están presentes 0.0665 kg de combustible por kg de aire; o bien se induce al motor (1-f) (0.0665) kg de combustible. El poder calorífico inferior del octano gaseoso a volumen constante y 288.5 K (520 R) se tomó como 10.791 kcal/kg (19.270 Btu/lb). Por lo tanto:

$$U_C = \Delta U_{AF} = 10.791(1-f)(0.0665) = 718(1-f) \text{ Kcal} \rightarrow (\text{Ec.18.3.4})$$

se valoriza la ecuación en la forma siguiente:

$$U_3 = U_2 = \Delta U_{AF} + \Delta U_{FE} \rightarrow (\text{Ec.18.3.5})$$

o

$$U_3 = U_C + U_{s2} \rightarrow (\text{Ec.18.3.6})$$

De la primera ecuación se obtienen los valores de U_C para la mezcla correcta y los de U_{s2} de los diagramas de compresión. Adviértase que el valor de f no puede suponerse igual a 0,10 como en casos anteriores, ya que U_C ; depende directamente del valor seleccionado para f .

Al repetir el cálculo de U_C , pero para una mezcla pobre, el resultado es:

$$U_C = 653 (1 - f) \text{ kcal} \rightarrow (\text{Ec.1.8.3.7})$$

Para la mezcla rica, el residuo del escape contiene H_2 y CO . Suponiendo que la energía química de estos gases sea de 170 kcal por 1,0782 kg de productos, se encuentra que el valor de U_C es:

$$U_C = 844(1 - f) + 170f \rightarrow (\text{Ec.1.8.3.8})$$

Resumiendo, los diagramas para mezclas quemadas y sin quemar, son compatibles por el hecho de que ambas (un juego) representan el mismo peso del material. El diagrama de compresión puede emplearse para diferentes proporciones de gases residuales aun cuando teóricamente es solo correcta para un residuo de 10%. El error tenido con esta suposición es insignificante puesto que los calores específicos de la alimentación y del residuo no varían apreciablemente de uno a otro. Por otra parte, el diagrama de combustión requiere que se valore la energía química liberada, y este factor requiere que se emplee la f correcta en los cálculos de combustión. Nótese que en la combustión la alimentación fresca se quema, resultando productos que se unen con los productos residuales, resultando homogénea la mezcla completa.¹⁰

Estando estudiados todos los basamentos teóricos que se requieren para lograr nuestra meta final, por último, realizaremos una reseña acerca de los esfuerzos, los cuales nos permitirán establecer una comparación con los esfuerzos admisibles para determinar si el sistema de engranajes presentes en el motor es adecuado.

¹⁰ Referencia 14

Para alcanzar nuestro objetivo, necesitamos estudiar las principales teorías de esfuerzos, tipos y las herramientas para el cálculo de los esfuerzos en los engranajes rectos que posee el sistema.

1.9. ESFUERZOS.

El esfuerzo o tensión se puede definir como la resistencia interna que ofrece una unidad de área de un material hacia una carga que se aplica en forma externa. Para una pieza que soporta carga en la cual la carga externa está distribuida de manera uniforme a lo largo de la sección transversal de la pieza, la magnitud del esfuerzo será igual a la fuerza entre el área. Los esfuerzos tiende a generar diversos tipos de falla a los materiales. En general se presentan principalmente cuatro teorías de fallas por esfuerzos, las cuales se presentan a continuación:

1.9.1. TEORÍA DE FALLA POR TENSIÓN MÁXIMA POR ESFUERZO DE CORTE.

Esta teoría establece que un material comienza a deformarse cuando la tensión máxima por esfuerzo de corte en una pieza que soporta carga excede la tensión máxima por esfuerzo de corte que se presenta en un espécimen que se somete a pruebas cuando se inicia la deformación. Cuando se inicia la deformación, la tensión que se aplica es, por definición igual a S_y . La tensión máxima por esfuerzo de corte correspondiente es $S_{sy} = S_y/2$. Se ha demostrado, por medio de experimentos, que la teoría de falla por tensión máxima debida al esfuerzo de corte resulta un poco conservadora para materiales dúctiles que se someten a cualquier combinación de tensiones normales y tensiones por esfuerzo de corte.

1.9.2. TEORÍA DE LA DISTORSIÓN DE LA ENERGÍA.

Esta teoría, a la que en ocasiones se asigna el nombre teoría de Von Mises, ofrece una proyección muy precisa de fallas en materiales dúctiles que se someten a la acción de cargas estáticas, tensiones combinadas, tensiones por esfuerzo de corte, o bien, tensiones normales inversas por completo. Si las dos tensiones principales del círculo de Mohr se denominan σ_1 y σ_2 la tensión de Von Mises es:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \rightarrow (Ec.1.9.2.1)$$

Así, la teoría de distorsión de la energía para fallas establece que la falla se origina cuando la tensión de Von Mises excede la resistencia a punto cedente del material.

Luego de haber citado las teorías anteriores, debemos mencionar que para un elemento sometido a una carga, si el esfuerzo máximo del material no excede su límite elástico, éste retornará a sus condiciones iniciales cuando se retira la carga. Ciertamente se podría concluir que una carga dada puede repetirse muchas veces, siempre que los esfuerzos permanezcan en el rango elástico. Tal conclusión es correcta para ciclos que se repitan unas pocas docenas o centenares de veces. Sin embargo, no es cierto cuando los ciclos se repiten miles o millones de veces. En tales casos, la ruptura ocurrirá a esfuerzos mucho más bajos que la resistencia estática de ruptura, este fenómeno se conoce como fatiga. Una falla por fatiga es de naturaleza frágil aun para materiales normalmente dúctiles.¹¹ El caso mencionado anteriormente de fatiga, es la situación presente en nuestro sistema de engranajes, ya que para cada carrera del pistón la tensión que se produce en los dientes fluctúa, originado esto por los diversos procesos que ocurren dentro de la cámara de combustión y el cilindro en donde se mueve el pistón.

¹¹ Referencia 1

1.9.3. FUERZAS EN LOS DIENTES DE LOS ENGRANES.

Los engranajes transmiten potencia al ejercer una fuerza, mediante los dientes impulsores sobre los dientes que son impulsados, en tanto la fuerza de reacción actúa de regreso sobre los dientes del engrane impulsor. Debido a la forma evolvente del diente, la fuerza total que es transferida de un diente al diente con el que embona actúa en forma normal respecto al perfil evolvente. La fuerza tangencial es la componente horizontal de la fuerza total y la fuerza radial corresponde a la componente vertical de la fuerza total:¹²

$$W_r = W_t \cdot \tan \psi \rightarrow (Ec.19.3.1)$$

$$W_n = W_t / \cos \psi \rightarrow (Ec.19.3.2)$$

Donde:

W_t = fuerza total

W_r = fuerza radial

W_n = fuerza normal

Ψ = ángulo de presión

1.9.4. FÓRMULA DE LEWIS.

Wilfred Lewis fue el primero que presentó una fórmula para calcular el esfuerzo por flexión en dientes de engranajes, en la que interviene la forma de los mismos. El esfuerzo según Lewis será igual:¹³

$$\sigma = \frac{W_t \cdot P}{F \cdot Y} \rightarrow (Ec.19.4.1)$$

¹² Referencia 12

¹³ Referencia 19

Donde:

W_t = fuerza tangencial que actúa sobre el diente (en este caso se toma como carga estática)

P = paso diametral

F = ancho de cara

Y = factor de forma de Lewis

1.9.5. TENSIONES EN LOS DIENTES DE LOS ENGRANES SEGÚN LA AGMA.

La fuerza tangencial genera un momento de flexión en los dientes del engrane. La tensión por flexión resultante es máxima en la base de los dientes en el chaflán que une al perfil evolvente con la parte inferior del espacio entre dientes. A continuación se presentará la ecuación de Lewis modificada, para la determinación de la tensión en la base del perfil evolvente:

$$\sigma_t = \frac{W_t \cdot P_d}{F \cdot J} \cdot \frac{K_a \cdot K_s \cdot K_m \cdot K_B}{K_v} \rightarrow (Ec.19.5.1)$$

Donde:

P_d = es el paso diametral del diente

F = es el espesor de la cara del diente

J = factor de geometría

K_a = factor de aplicación para la resistencia a la flexión

K_s = factor de tamaño para la resistencia a la flexión

K_m = factor de distribución de carga para la resistencia a la flexión

K_B = factor de espesor de la corona

K_v = factor de dinámica para la resistencia a la flexión

El factor de geometría J viene dado en la figura 5 por el número de dientes en el piñón y en el engrane.

El factor de aplicación K_a depende de la fuente de poder y del tipo de máquina que es impulsada, según la tabla 1.

El factor de tamaño K_s está regido por el paso diametral, tabla 2.

El factor de distribución de carga K_m depende de varios factores, del ancho de cara, de la relación entre el ancho de cara y el diámetro de paso, y de las condiciones de los engranes: abiertos, compactados o de precisión, véase la figura 6.

El factor de espesor de la corona K_B se ve afectado por el espesor de la corona entre la profundidad total de los dientes del engrane a la cual se llama relación de respaldo m_B , figura 7.

El factor de dinámica K_v viene dado por los números de calidad Q_v y la velocidad de la línea de paso, según la figura 8.

La propiedad más importante de los dientes de engranes que proporciona resistencia a la corrosión es la dureza de la superficie de los dientes. Cuanto más dura sea la superficie, más alta es la resistencia a la corrosión del material. La tensión por contacto será:

$$\sigma_c = C_p \cdot \sqrt{\frac{C_a \cdot C_s \cdot C_m \cdot W_t}{C_v \cdot F \cdot D \cdot I}} \rightarrow (Ec.19.5.2)$$

Donde:

C_p = coeficiente elástico

$C_a = K_a$ = factor de aplicación

$C_s = K_s$ = factor de tamaño

$C_m = K_m$ = factor de distribución de carga

$C_v = K_v$ = factor de dinámica

I = factor de geometría

D = diámetro de paso del piñón

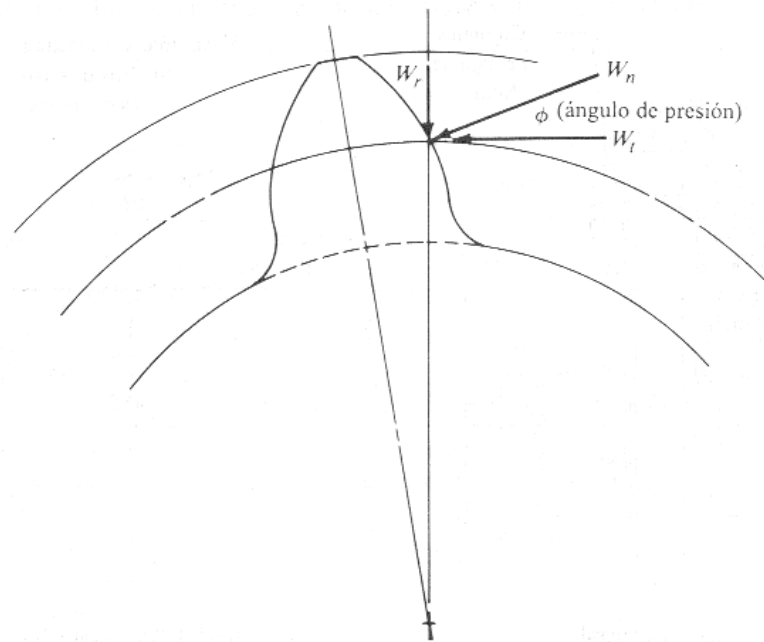
F = espesor de cara

El coeficiente elástico C_p lo encontramos a través del material del piñón y el material de la corona, con la tabla 3.

El factor de geometría I depende de la geometría del diente y de la relación de engrane, los valores pueden conseguirse a partir de la figura 9.¹⁴

Una vez conocidas todas las herramientas que se requieren para nuestro análisis de esfuerzos, continuaremos aplicando los conocimientos, ecuaciones y relaciones que se aportaron, para así poder cuantificar las variables que nos conducirán a la determinación de los esfuerzos en los dientes del sistema de engranajes del motor LUGO.

FIGURA 4
Fuerzas sobre los dientes de los engranajes



¹⁴ Referencia 12

FIGURA 5
Factor de Geometría J

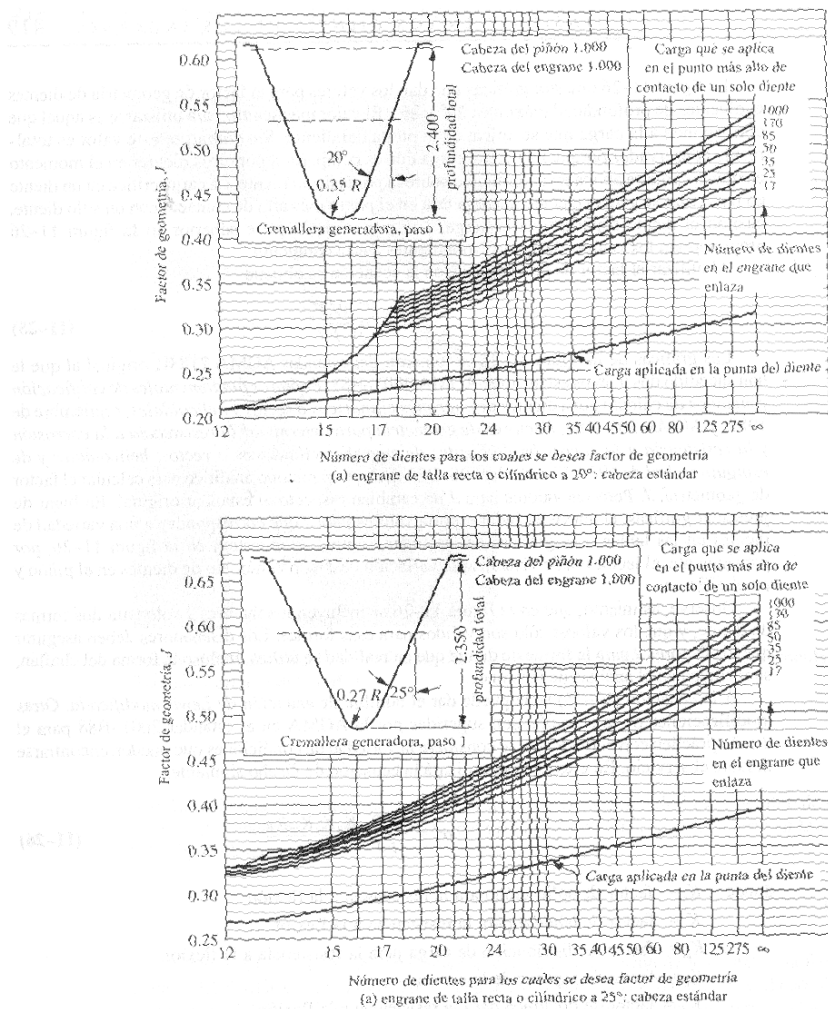


TABLA 1
Factor de aplicación Ka

<i>Fuente de poder</i>	<i>Máquina que es impulsada</i>			
	<i>Uniforme</i>	<i>Choque ligero</i>	<i>Choque moderado</i>	<i>Choque pesado</i>
Uniforme	1.00	1.25	1.50	1.75
Choque ligero	1.20	1.40	1.75	2.25
Choque moderado	1.30	1.70	2.00	2.75

TABLA 2
Factor de Tamaño Ks

<i>Paso diametral, P_d</i>	<i>Módulo métrico, m</i>	<i>Factor de tamaño, K_s</i>
≥ 5	≤ 5	1.00
4	6	1.05
3	8	1.15
2	12	1.25
1.25	20	1.40

FIGURA 6
Factor de Distribución de Carga K_m

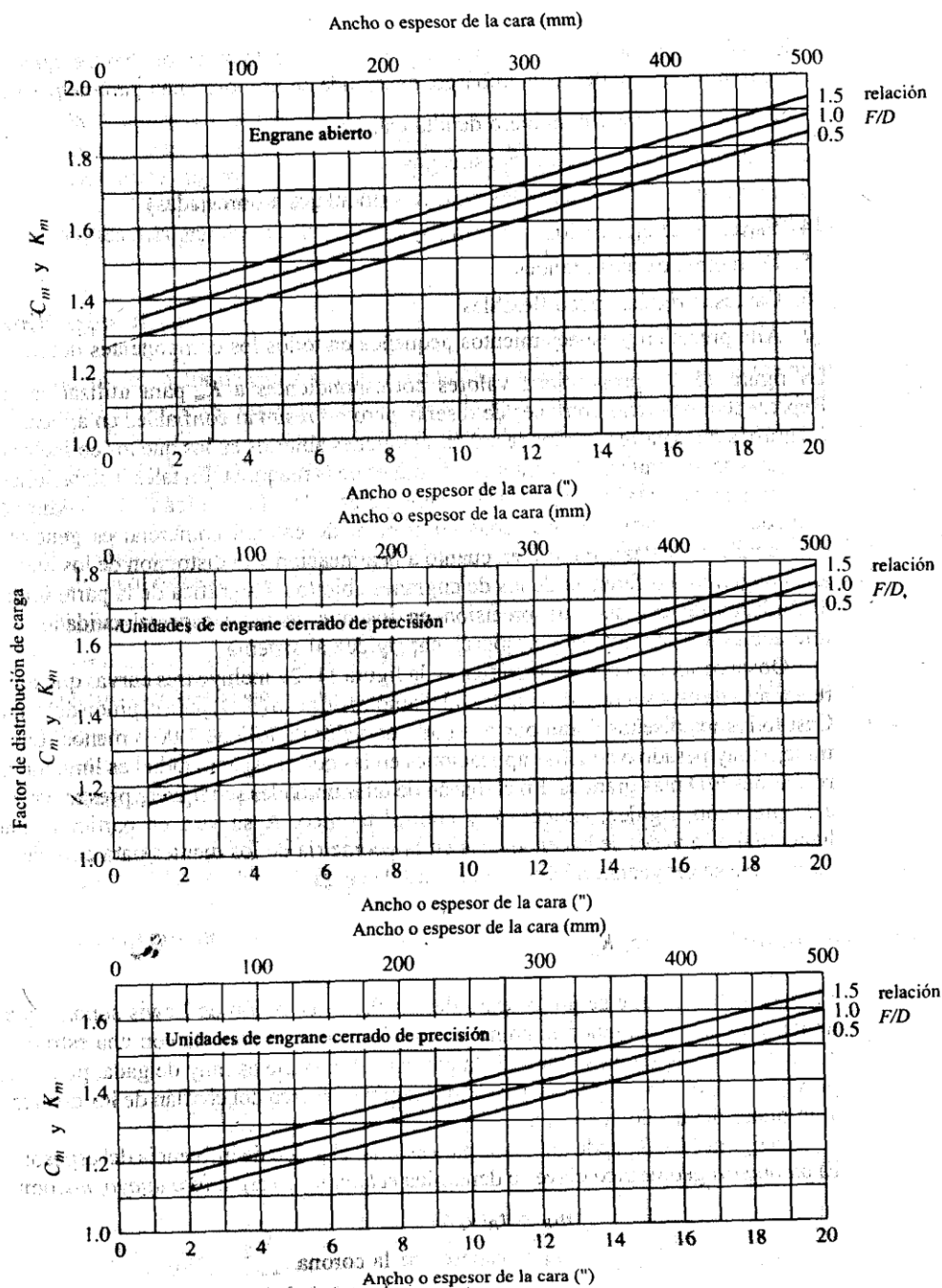


FIGURA 7
Factor de Espesor de la Corona K_B

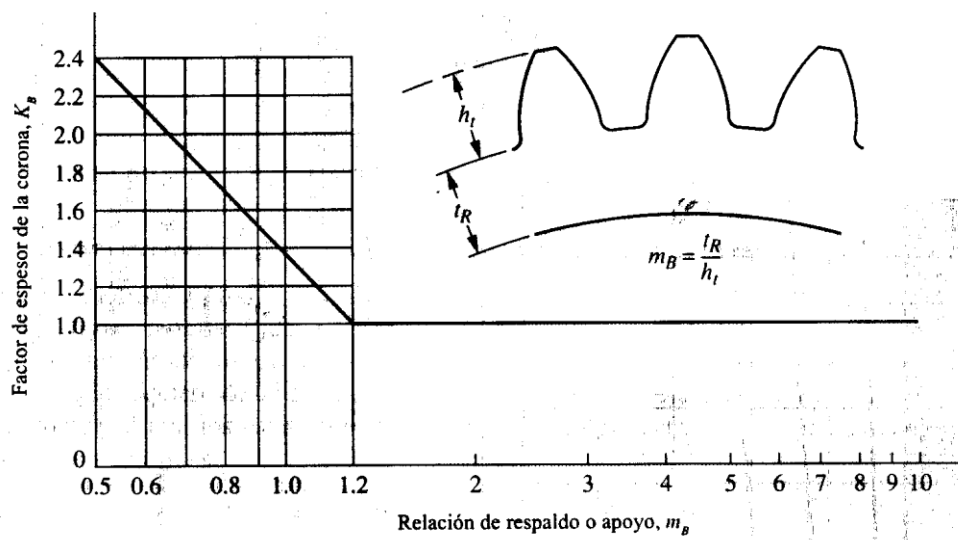


FIGURA 8. Factor de Dinámica Kv

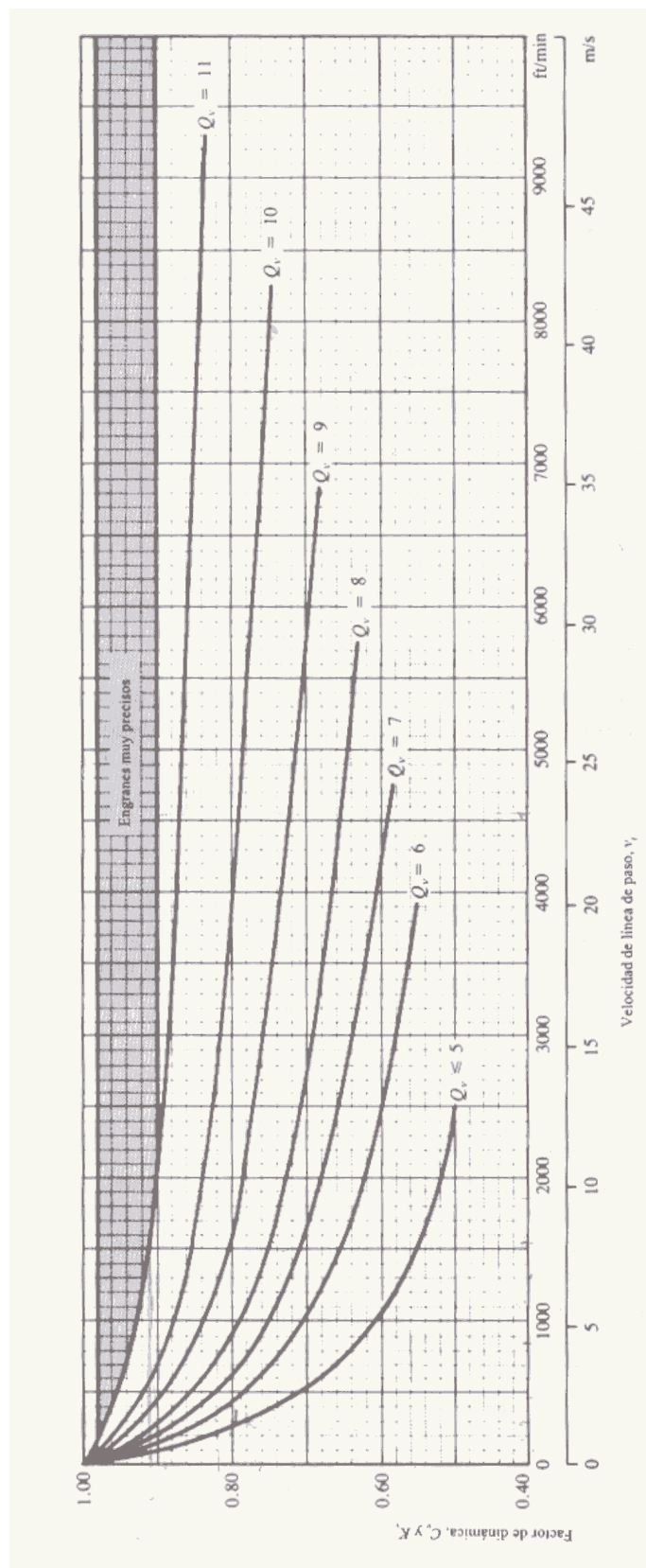


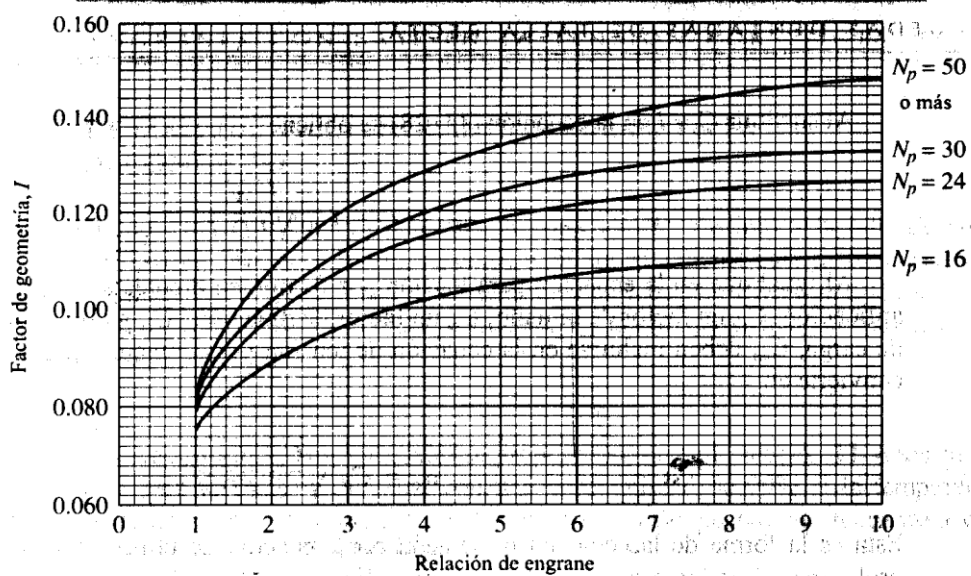
TABLA 3
Coeficiente Elástico C_p

Material para el piñón	Módulo de elasticidad, E_p , lb/pulg ² (MPa)	Material para fabricar engranes y módulo de elasticidad, E_g , lb/pulg ² (MPa)					
		Acero 30×10^6 (2×10^5)	Hierro maleable 25×10^6 (1.7×10^5)	Hierro nodular 24×10^6 (1.7×10^5)	Hierro fundido 22×10^6 (1.5×10^5)	Bronce con aluminio 17.5×10^6 (1.2×10^5)	Bronce con estaño 16×10^6 (1.1×10^5)
Acero	30×10^6 (2×10^5)	2 300 (191)	2 180 (181)	2 160 (179)	2 100 (174)	1 950 (162)	1 900 (158)
Hierro maleable	25×10^6 (1.7×10^5)	2 180 (181)	2 090 (174)	2 070 (172)	2 020 (168)	1 900 (158)	1 850 (154)
Hierro nodular	24×10^6 (1.7×10^5)	2 160 (179)	2 070 (172)	2 050 (170)	2 000 (166)	1 880 (156)	1 830 (152)
Hierro fundido	22×10^6 (1.5×10^5)	2 100 (174)	2 020 (168)	2 000 (166)	1 960 (163)	1 850 (154)	1 800 (149)
Bronce con aluminio	17.5×10^6 (1.2×10^5)	1 950 (162)	1 900 (158)	1 880 (156)	1 850 (154)	1 750 (145)	1 700 (141)
Bronce con estaño	16×10^6 (1.1×10^5)	1 900 (158)	1 850 (154)	1 830 (152)	1 800 (149)	1 700 (141)	1 650 (137)

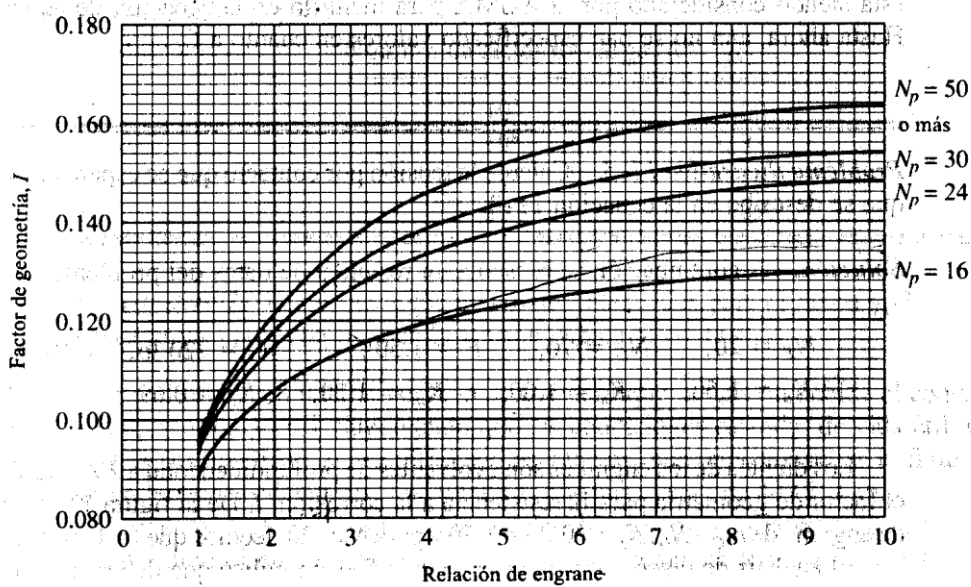
Nota: razón de Poisson = 0.30; las unidades para C_p son (lb/pulg²)^{0.5} o (MPa)^{0.5}.

Fuente: Se tomó del estándar AGMA-2001-B88, *Factores fundamentales para calificación y métodos de cálculo para dientes evolventes de engranes de talla recta o cilíndricos y helicoidales*, con permiso del editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King Street, Suite 201, Alexandria, Va. 22314.

FIGURA 9
Factor de Geometría I



(a) ángulo de presión a 20° (diente de profundidad total = $1/P_d$)



(a) ángulo de presión a 20° (diente de profundidad total = $1/P_d$)

Antes de dar comienzo a toda la serie de cálculos que se requieren para la determinación de los esfuerzos en el sistema de engranajes, es necesario realizar una explicación del funcionamiento y operación del sistema mecánico.

2.1. DESCRIPCIÓN Y FUNCIONAMIENTO DEL MECANISMO

El objeto principal del trabajo especial de grado es realizar el análisis numérico de un sistema de engranes que forman parte del sistema que transmite la energía química liberada en el proceso de combustión durante la operación del motor LUGO. Para realizar dicho estudio se requiere conocer la descripción y el principio de funcionamiento básico del motor.

El motor LUGO es un motor de combustión interna de encendido por chispa de cuatro tiempos y movimiento reciprocante. Este posee un mecanismo que actúa para aumentar la eficiencia del motor con relación a los motores convencionales, al imponer una carrera de expansión más larga y una carrera de admisión más corta; paralelamente, el brazo del cigüeñal se agrandará gradualmente durante la explosión o carrera de expansión y gradualmente se reducirá durante la admisión. El ciclo termodinámico Atkinson modificado es el resultado de este movimiento particular del pistón.

El motor LUGO es un motor de pistón reciprocante que contiene dos engranes montados en el árbol del cigüeñal (vea figura 10). La figura 11 y 12 son los ejes que van unidos a los contrapesos, estos ejes se ubican en cada extremo del sistema. La figura 13 corresponde al contrapeso, el mecanismo posee un par de ellos posicionados a los extremos del cigüeñal principal. La figura 14 nos muestra el cigüeñal principal con su respectiva excentricidad. La figura 15 es el piñón con dientes externos; esta parte va fija a la estructura del motor y es concéntrico al eje del cigüeñal de rotación; también funciona internamente como un asiento. La figura 16 representa al cigüeñal secundario el cual está provisto de dientes internos que se

FIGURA 10
Ensamblaje 4

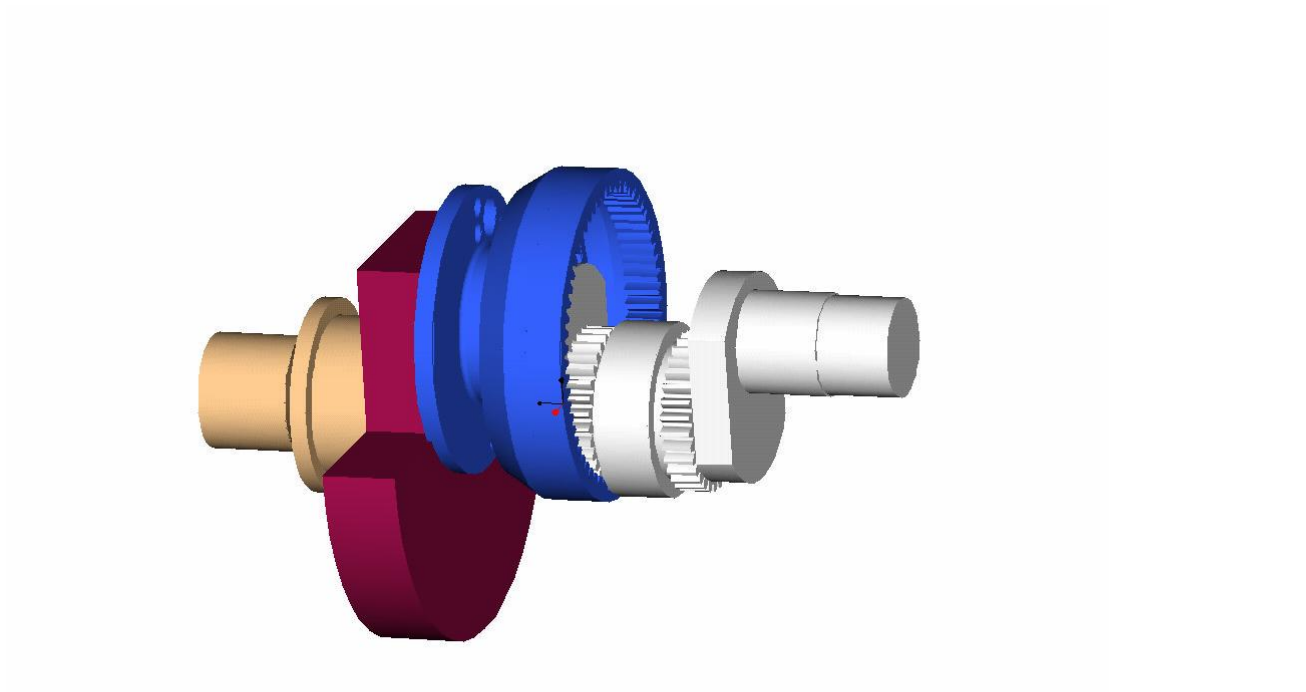


FIGURA 11
Eje 1

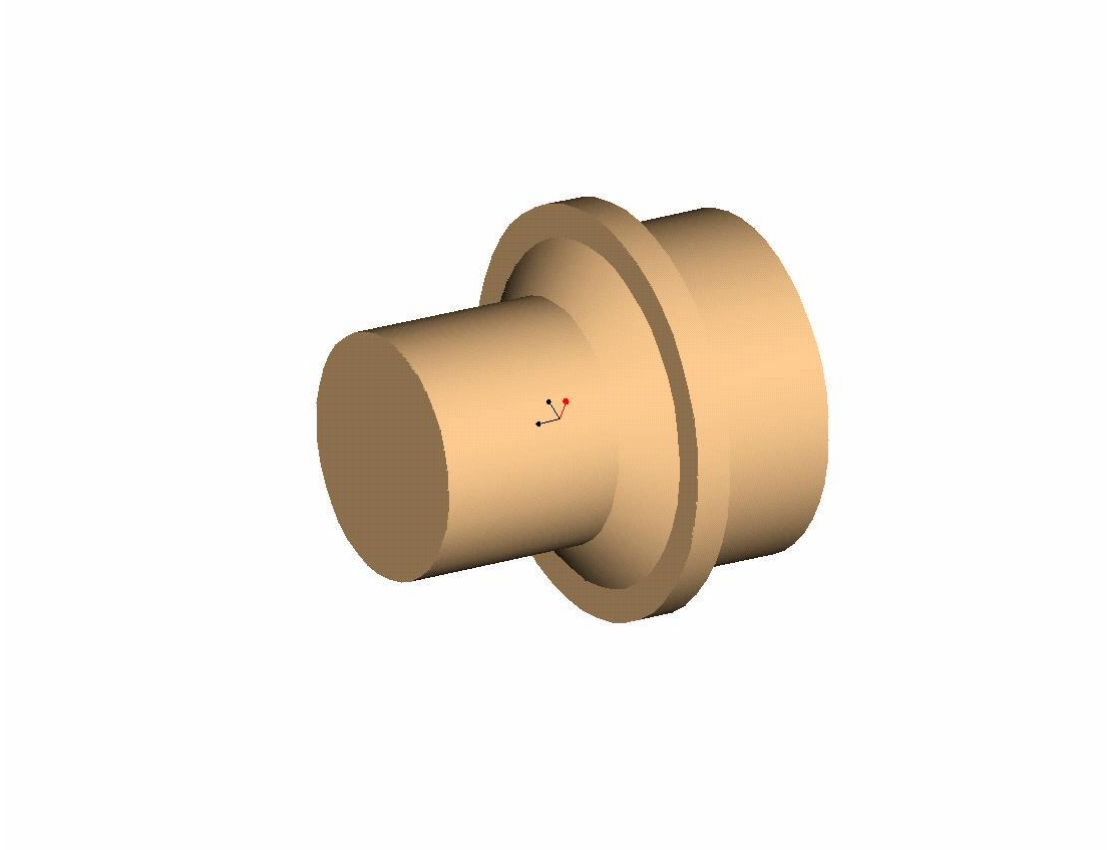


FIGURA 12
Eje 2

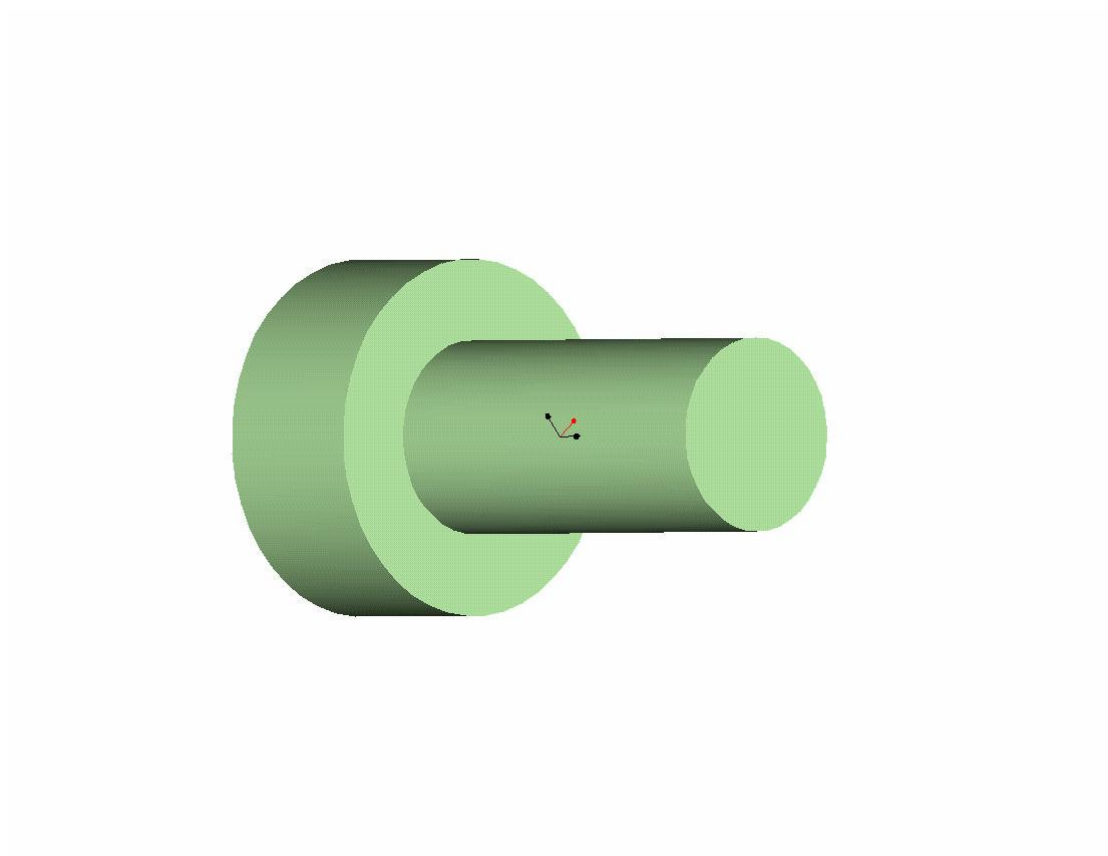


FIGURA 13
Contrapeso

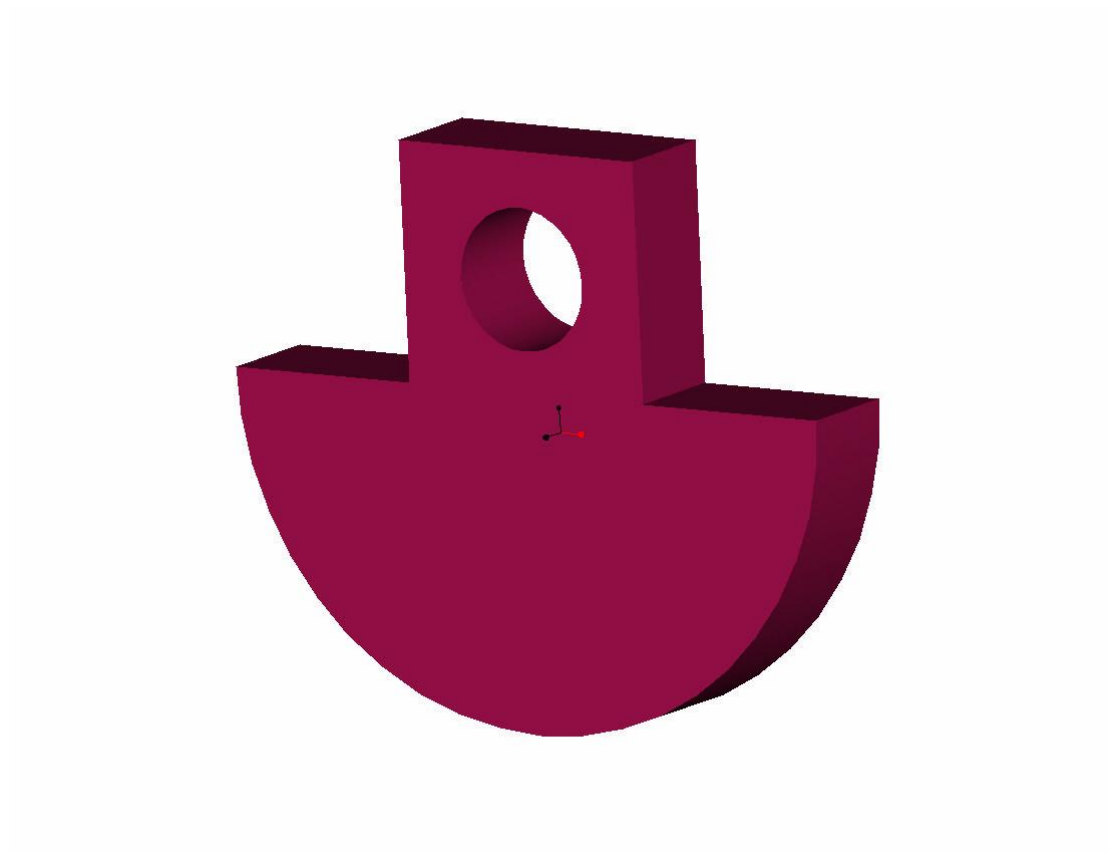


FIGURA 14
Eje 3

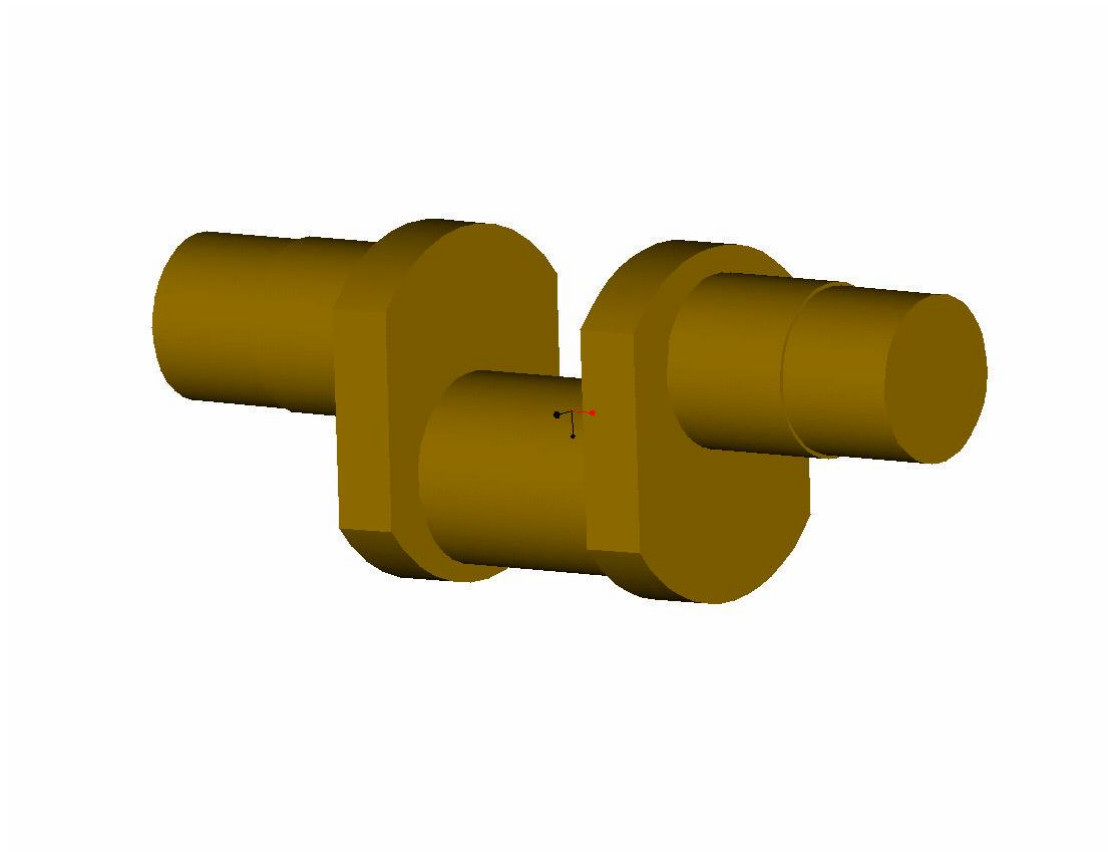


FIGURA 15
Piñón

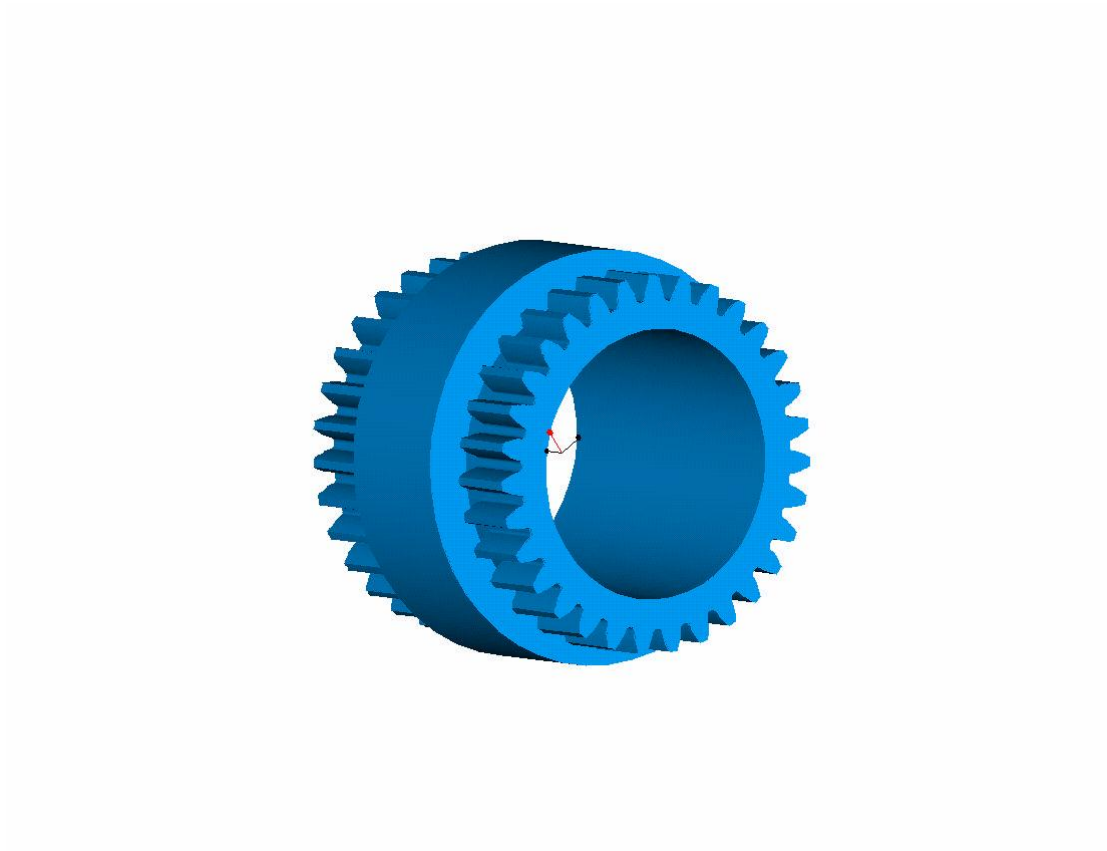
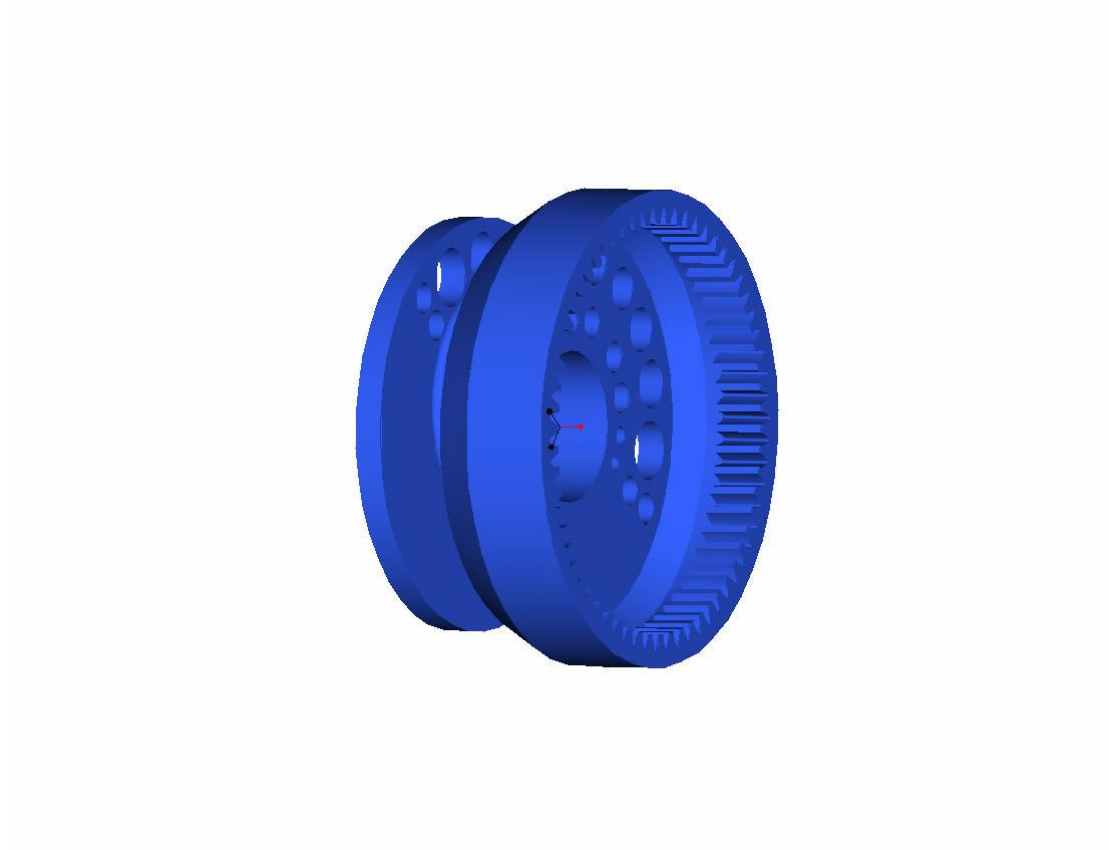


FIGURA 16
Cigüeñal secundario



apoyan en el piñón, y posee una geometría adecuada producto del balanceo dinámico, además de contar con una sección excéntrica. La figura 17 presenta la biela, el sistema está equipado con un par de ellas; el pie de la biela va unido a la excentricidad que presenta el cigüeñal secundario.

Una vez descrito de forma individual todos los componentes del sistema se ilustrará paso a paso el ensamblaje del mecanismo. En la figura 18 tenemos el eje que se encuentra en uno de los extremos unido al contrapeso, éste eje de rotación corresponde al eje de la salida de la potencia. En la figura 19 se acopla el cigüeñal principal donde una parte va encajada a la sección circular hueca del contrapeso y su excentricidad corresponde con el eje de salida de la potencia. En la figura 20 se añade el piñón que es concéntrico a la excéntrica del cigüeñal principal. La figura 10 adiciona el cigüeñal secundario que presenta la corona de dientes internos cuyo eje central coincide con el eje de la sección circular hueca del contrapeso, además de poseer una sección circular excéntrica al cual se acopla el pie de la biela (figura 21). Por último, en las figuras 22, 23, 24 y 25 se acoplan los componentes restantes, el cigüeñal secundario, el contrapeso, la biela y el eje correspondiente al otro extremo del sistema. Nótese que el conjunto de elementos antes mencionados son simétricos, exceptuando los ejes de sus extremos que poseen secciones circulares distintas.

El dispositivo puede entenderse como dos cigüeñales o manivelas acopladas, una dentro de la otra y rotando en la misma dirección. Refiriéndose a la figura 28, el cigüeñal que posee el brazo más grande o excentricidad E_1 ; su eje de rotación es concéntrico con el eje de rotación del motor. El cigüeñal secundario con una excentricidad E_2 corresponde a la corona con el segundo excéntrico pegado a él mostrado en la figura 16; es montado en la manivela del cigüeñal principal y se sincroniza tal que su velocidad angular sea la mitad de la velocidad angular del cigüeñal principal. En otras palabras, cuando el cigüeñal principal ha concluido dos

FIGURA 17
Biela



FIGURA 18
Ensamblaje 1

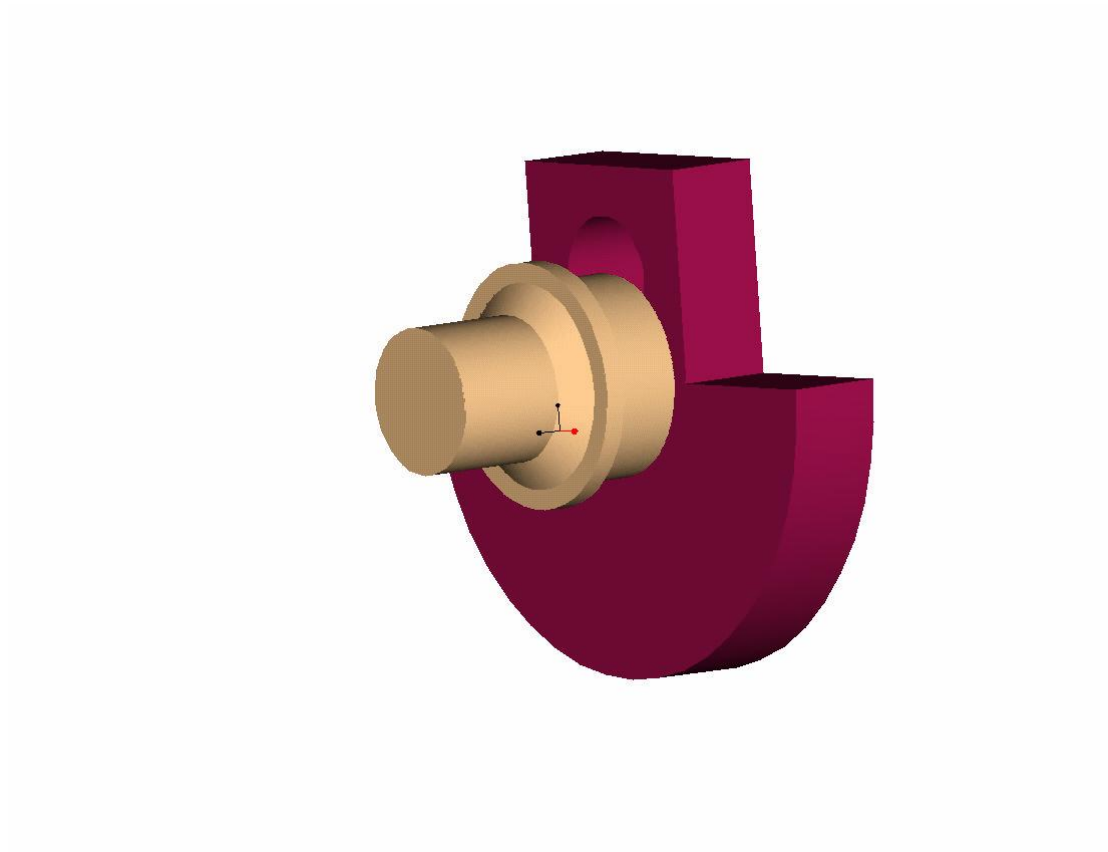


FIGURA 19
Ensamblaje 2

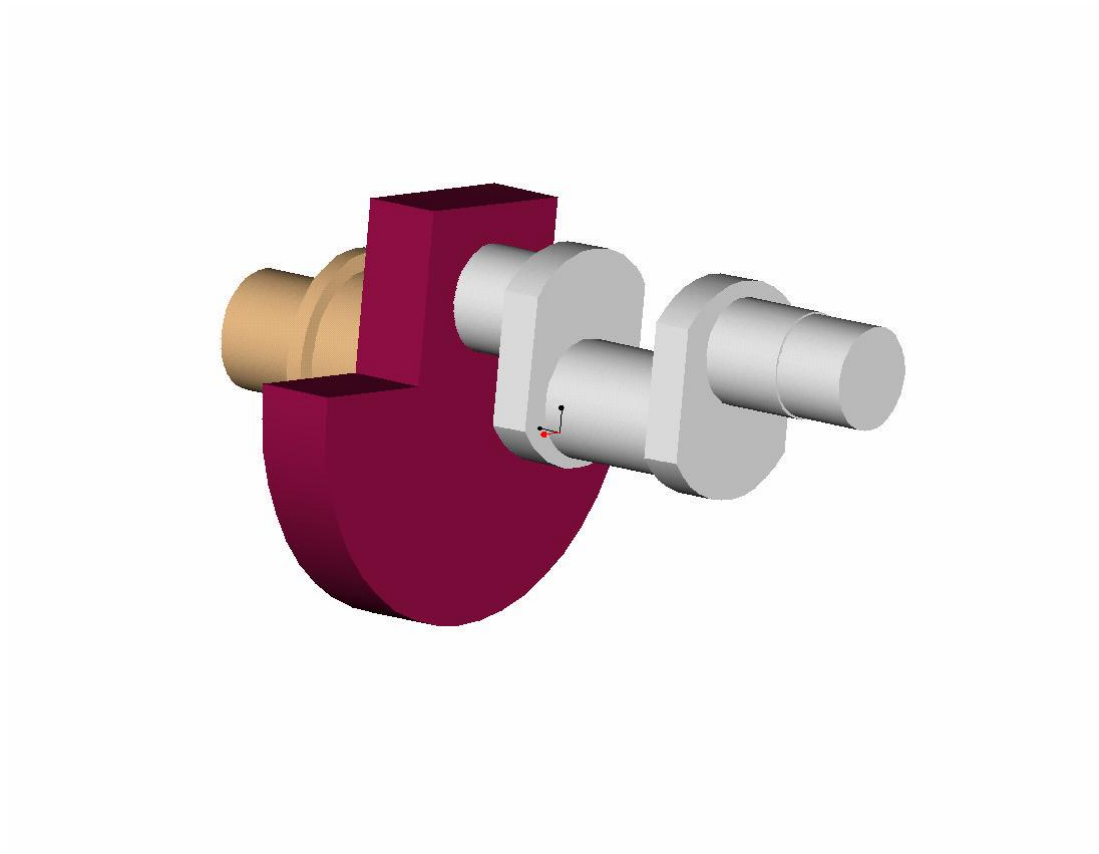


FIGURA 20
Ensamblaje 3

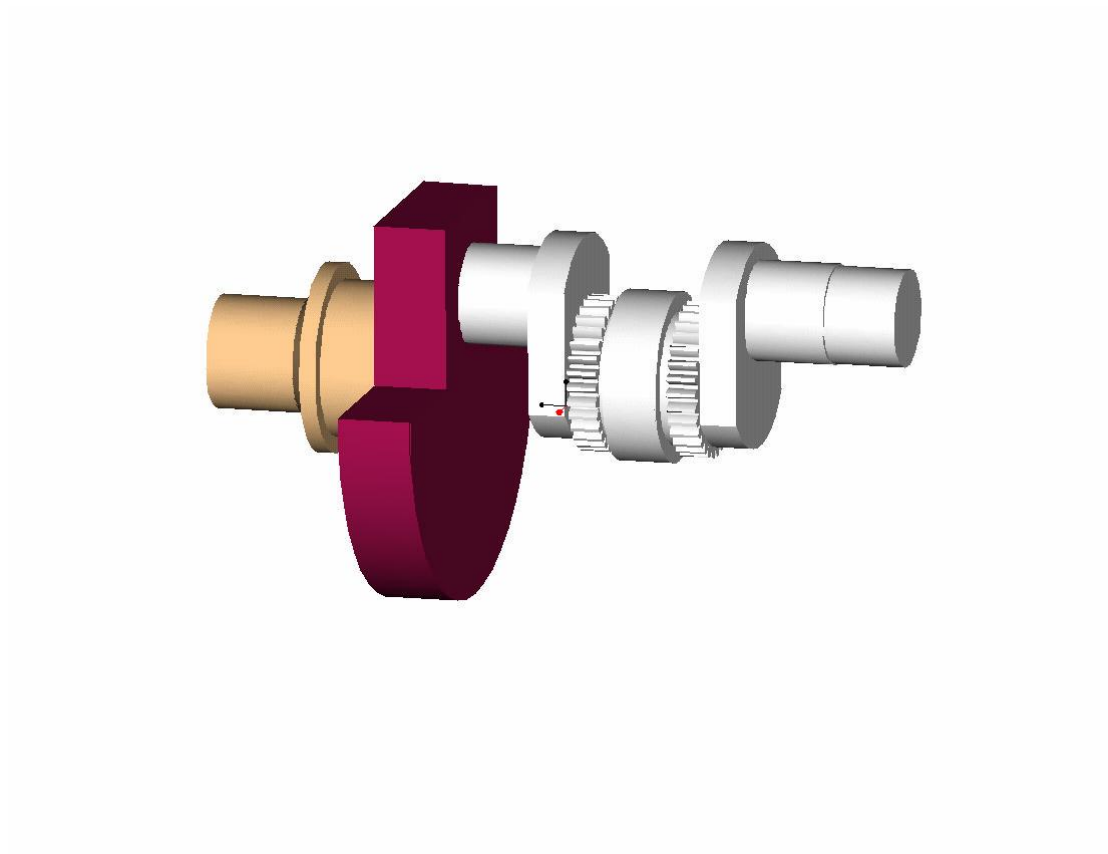


FIGURA 21
Ensamblaje 5

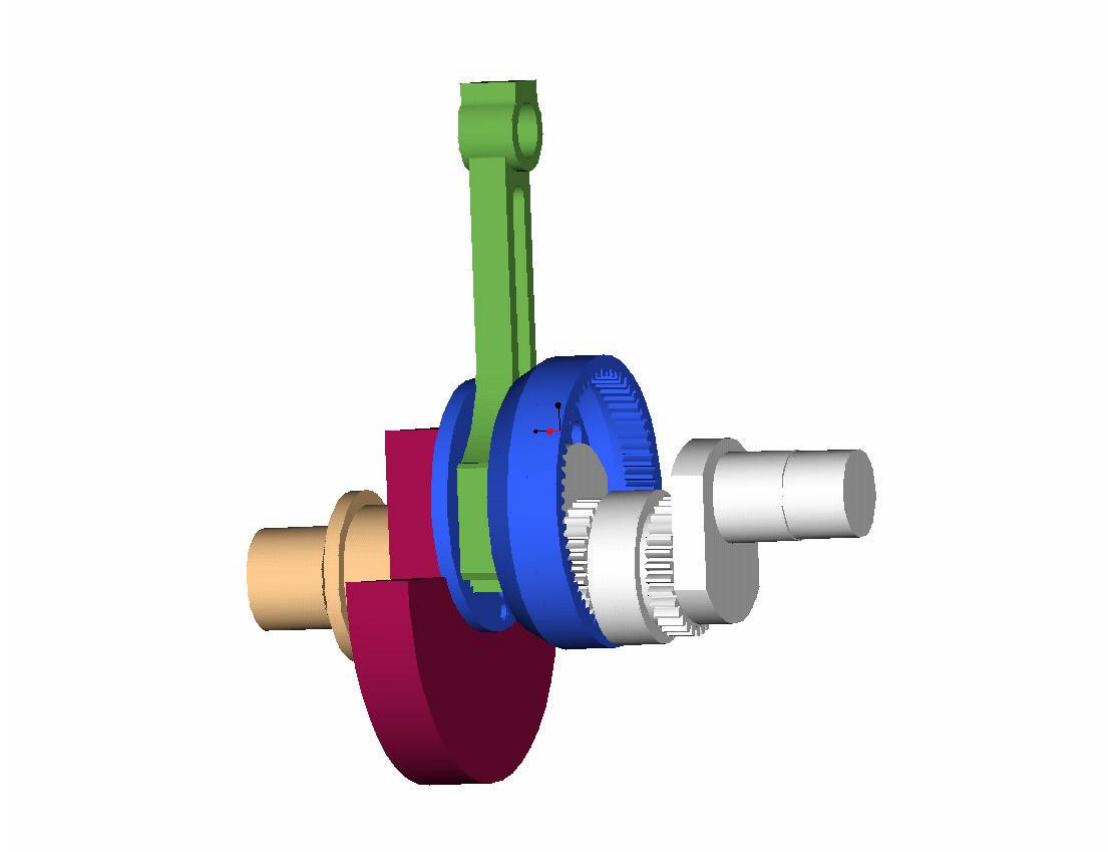


FIGURA 22
Ensamblaje 6

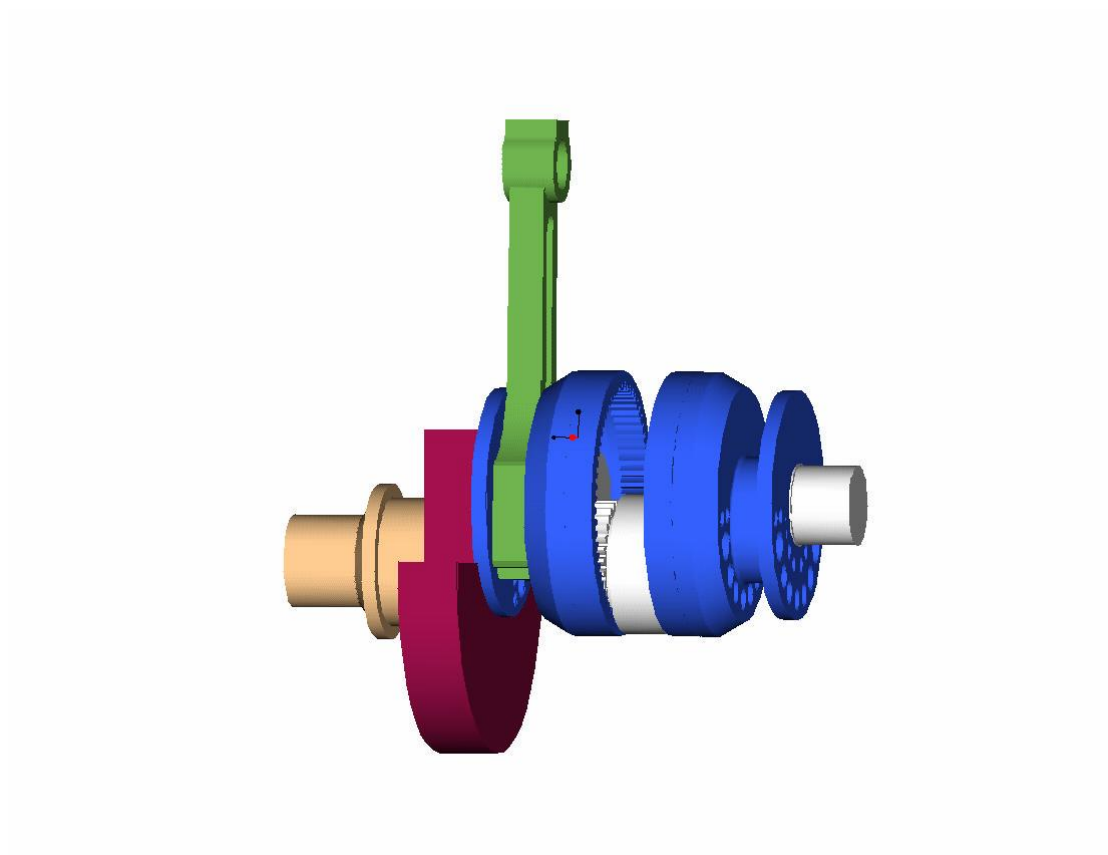


FIGURA 23
Ensamblaje 7

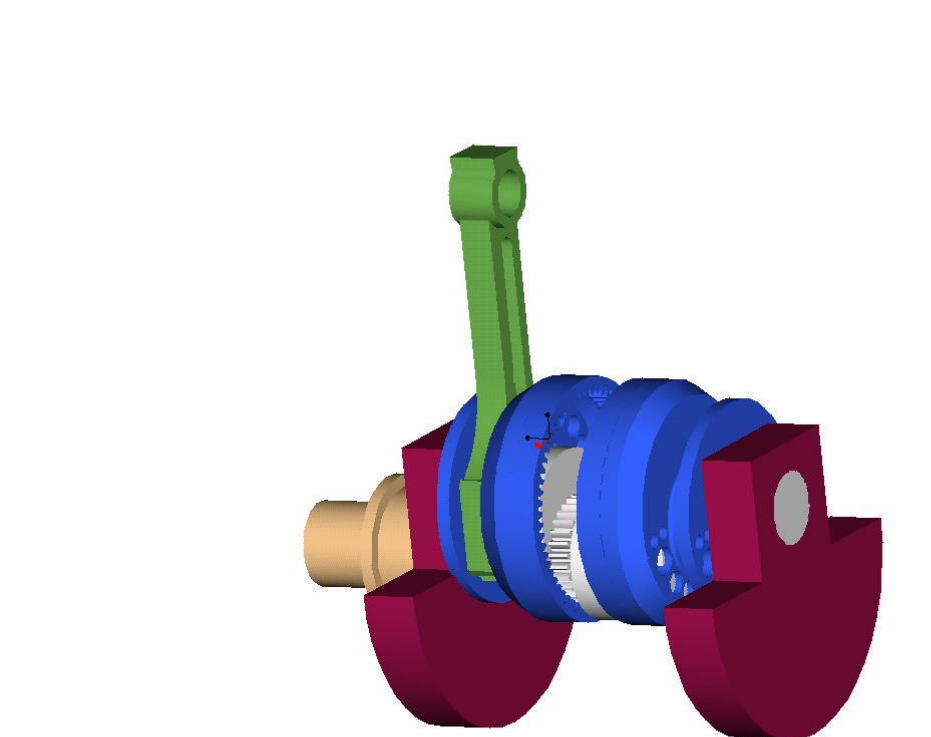


FIGURA 24
Ensamblaje 8

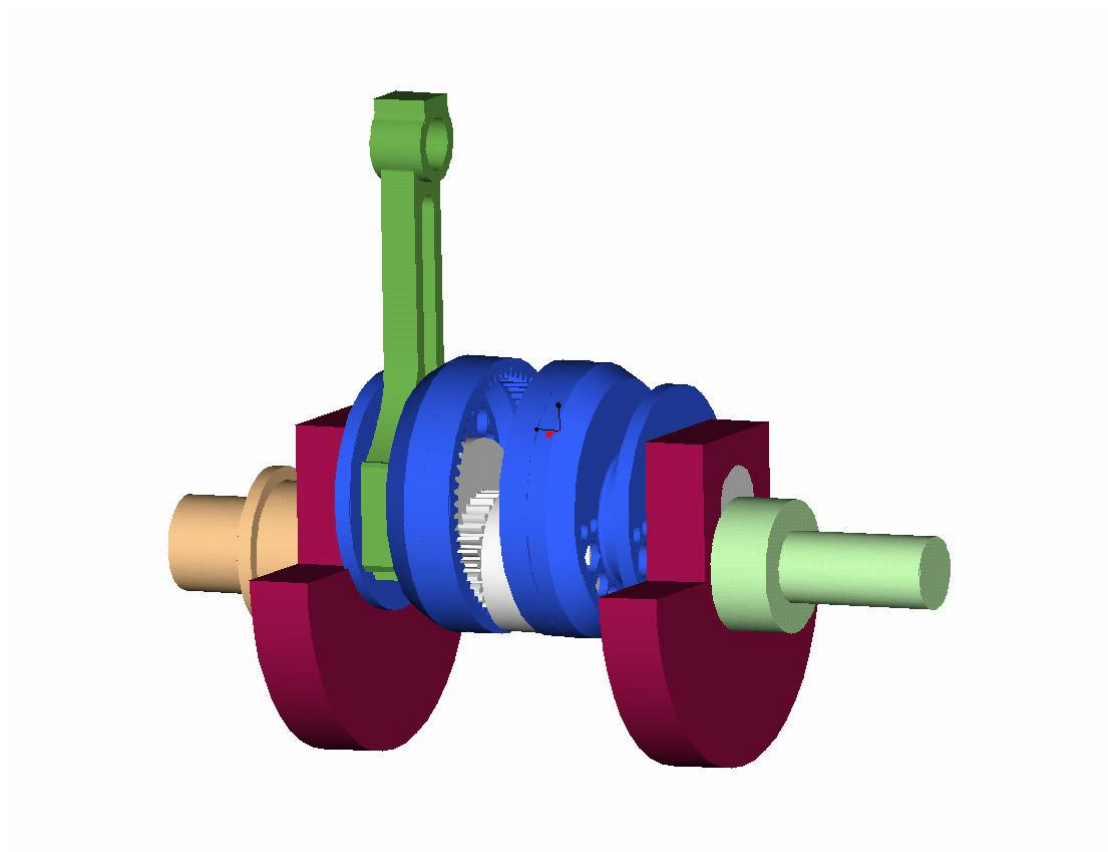
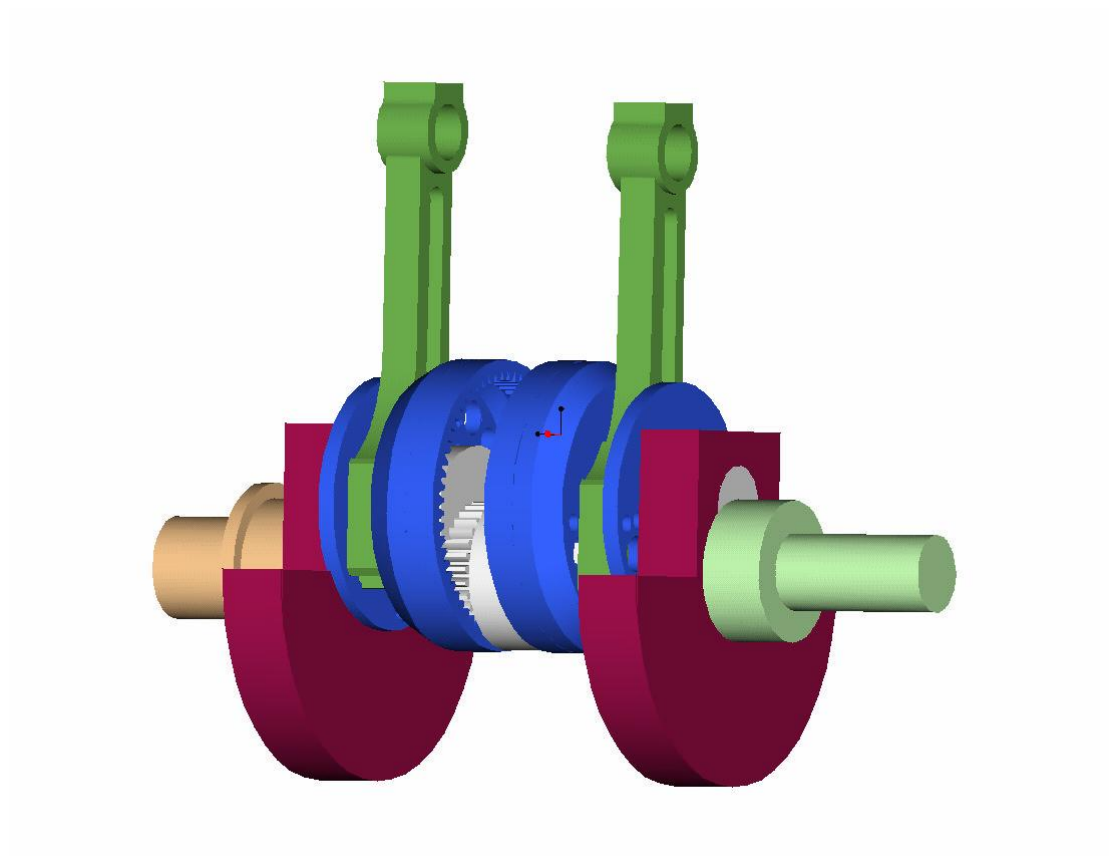


FIGURA 25
Ensamblaje 9



revoluciones alrededor de su eje completando un ciclo, el segundo cigüeñal ha realizado una revolución alrededor de la manivela del cigüeñal. Nótese que el piñón está fijado a la estructura del motor; este no rota. La corona dentada tiene dos movimientos simultáneos: el primero alrededor de la manivela del cigüeñal y el segundo alrededor del eje del motor. La biela está montada en el segundo cigüeñal o excéntrica véase las figuras 26 y 27.

Figura 28: Las dos excentricidades se muestran posicionadas en el punto muerto superior.

Ahora, como se muestra en la figura 29a, cuando la carrera de expansión comienza en el punto muerto superior, el primer cigüeñal E_1 , se alinea verticalmente y el segundo cigüeñal E_2 ; se posiciona cuarenta y cinco grados en el sentido de las agujas del reloj con respecto al punto del extremo del primero (este ángulo podría establecerse de 45° a 90° para optimizar la cantidad de gas residual retenida al final de la carrera de descarga.) Al cambiar este ángulo la relación entre los eslabones mecánicos cambia de acuerdo a la relación de la cinemática existente entre las partes mecánicas). Ésta es la posición donde el pistón se encuentra más próximo a la parte superior del cilindro. Si el cigüeñal principal gira noventa grados (figura 29b), el segundo cigüeñal girará sólo cuarenta y cinco grados. En este punto, los dos cigüeñales se alinean perfectamente y el brazo efectivo del motor es máximo. Cuando el cigüeñal principal continúa rotando, el segundo cigüeñal se rezaga al final de la carrera de expansión en el punto muerto inferior (figura 29c), el segundo cigüeñal E_2 , está en sentido contrario a las agujas del reloj cuarenta y cinco grados con respecto al extremo de E_1 . Nótese que el brazo efectivo es el producto de la sumatoria del efecto de los dos cigüeñales. Este brazo efectivo es más largo que el brazo de un motor convencional durante toda la carrera de expansión y, para la misma fuerza que actúa sobre el pistón, hay entonces un mayor torque en el motor. Además, el pistón viaja durante más tiempo realizando más trabajo. Es más, incluso inmediatamente después del punto muerto superior (figura 29a)

FIGURA 26
Vista lateral del mecanismo

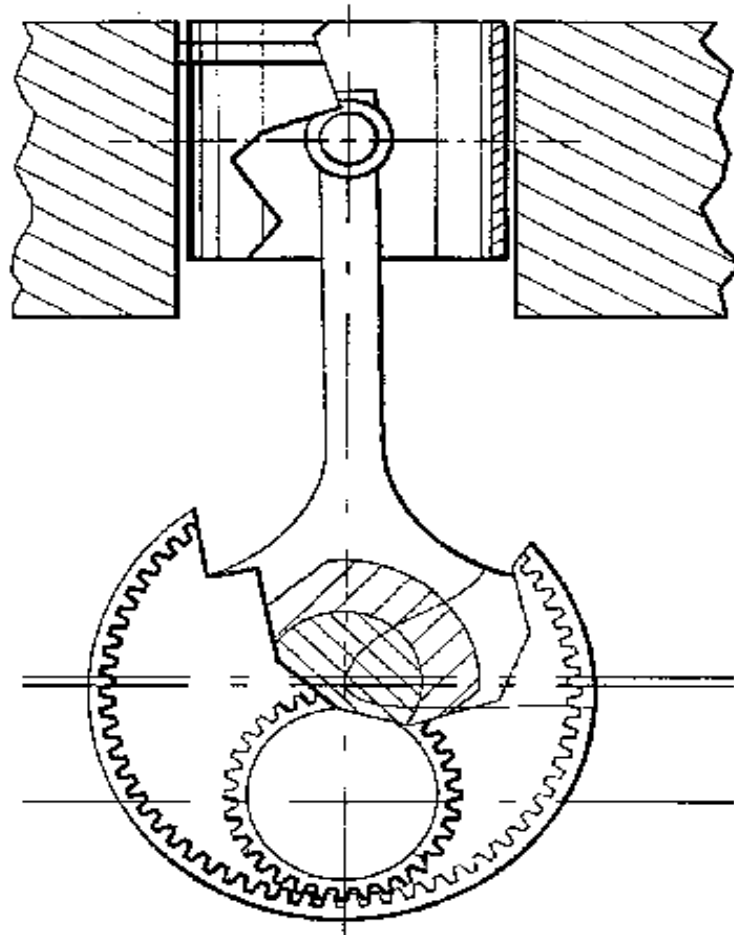


FIGURA 27
Vista frontal del mecanismo

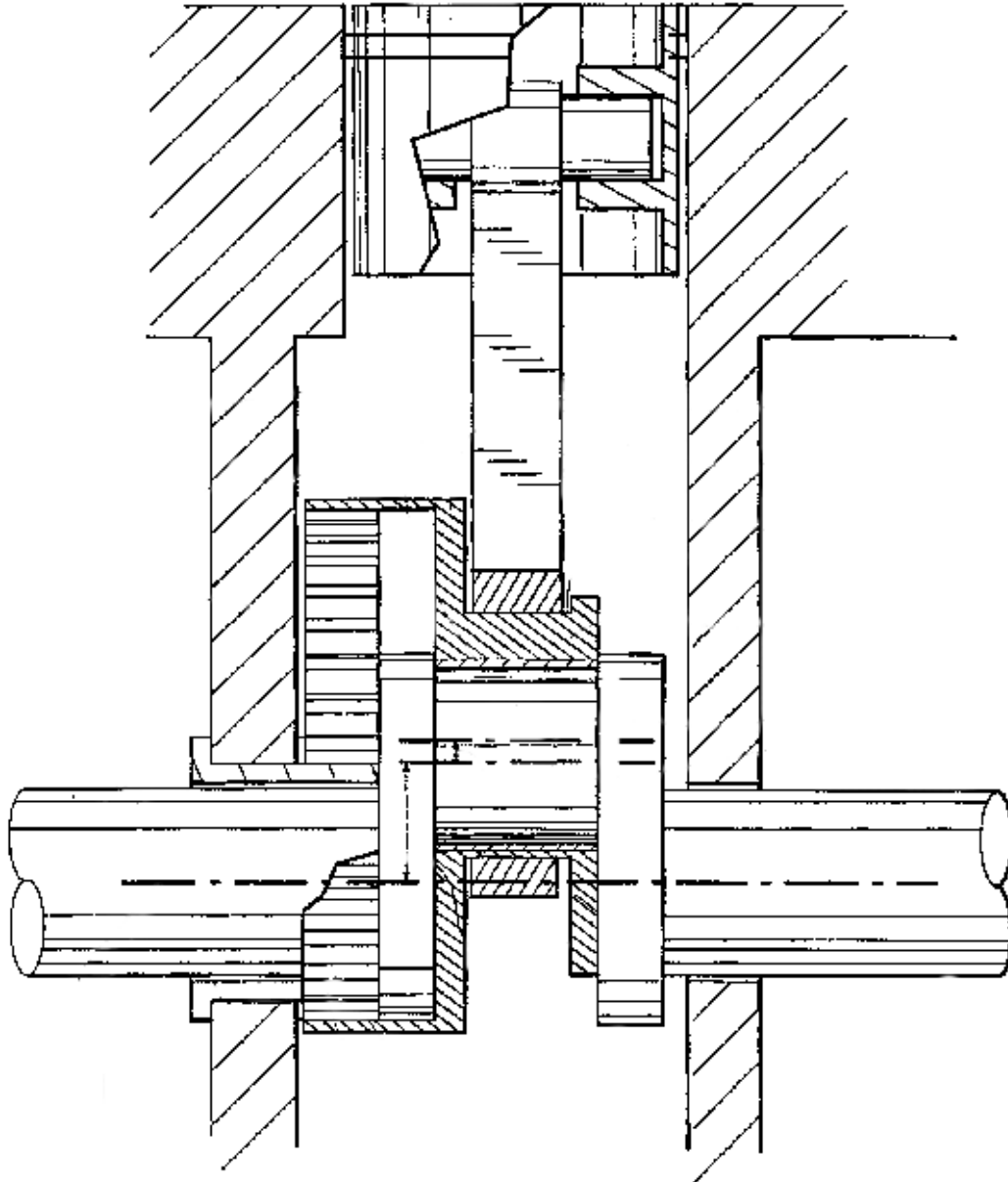
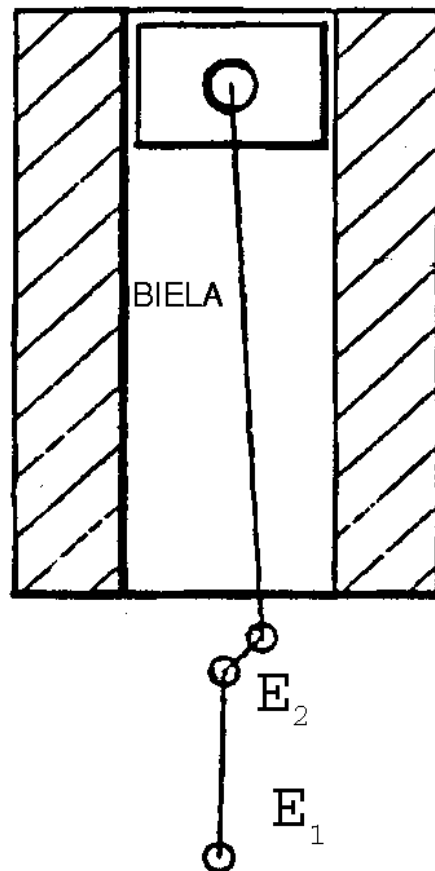


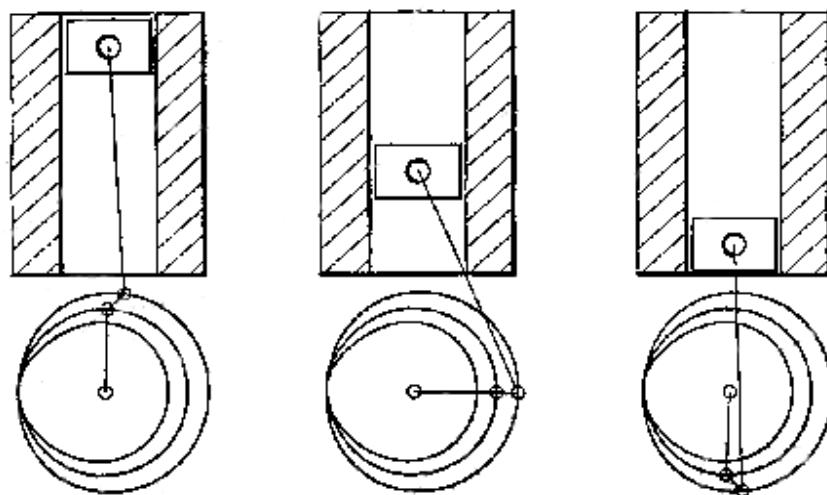
FIGURA 28
Mecanismo representado por eslabones

I

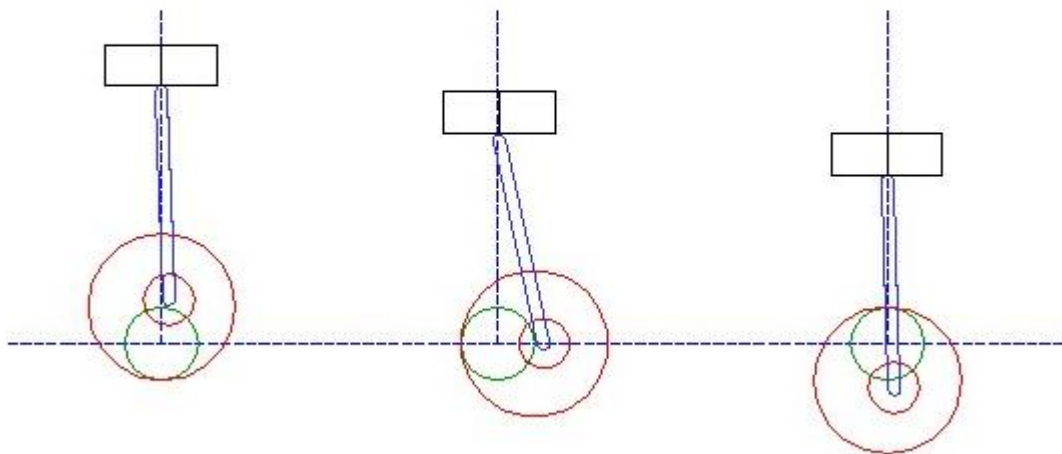
$45^\circ - 90^\circ$



FIGURAS 29a, 29b y 29c.
Carrera de expansión



FIGURAS 29a', 29b' y 29c'
Carrera de expansión 2

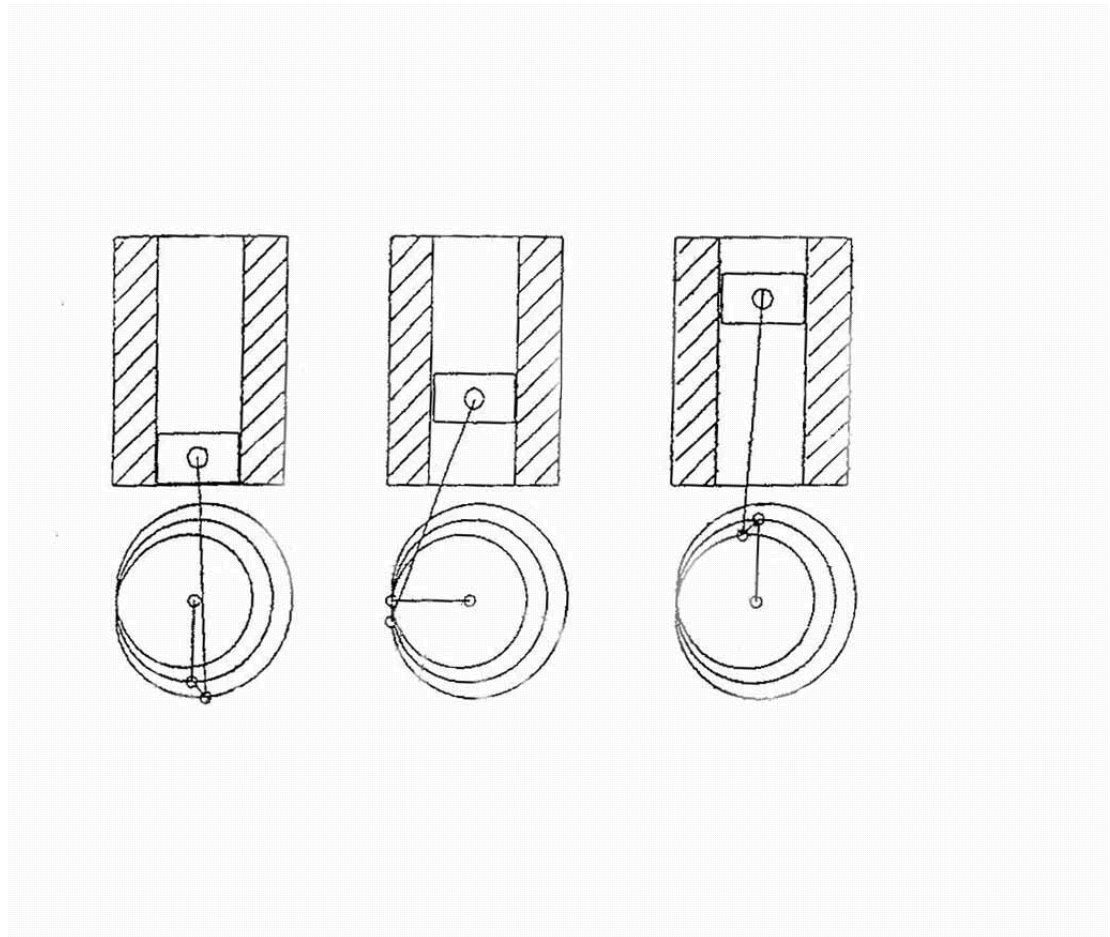


y en el punto muerto inferior (figura 29c), existe un torque positivo debido a la inclinación de la biela como resultado de la combinación de los cigüeñales; éste es uno de los rasgos más importantes y únicos de este motor.

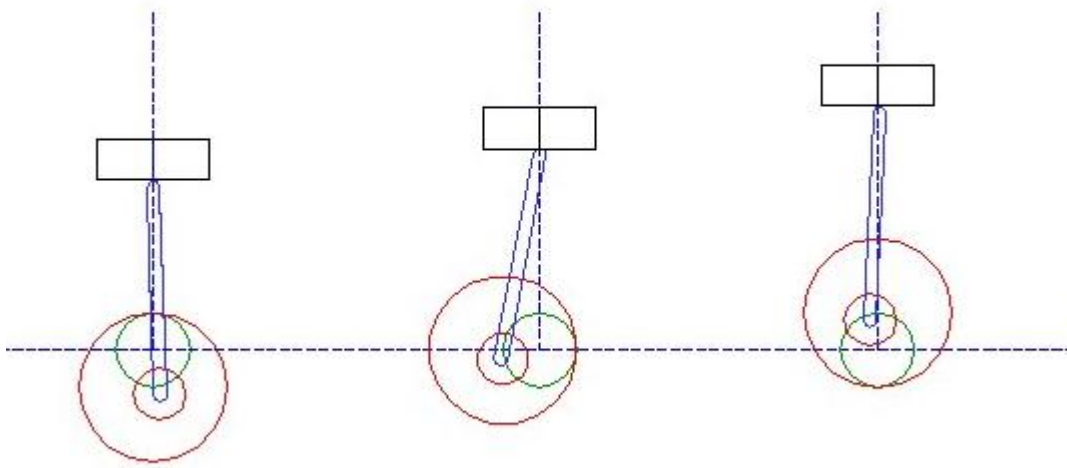
La carrera de descarga mostrada en la figura 29c, 29d y 29e. Empieza cuando termina la carrera previa; por esta razón la figura 29c se repite. Note que, al final de esta carrera, figura 29e, el pistón no alcanza el mismo punto muerto superior. En este punto, la carrera de admisión comienza y la posición del brazo efectivo de la carrera de expansión es invertido; es decir, las excéntricas se restan y el brazo efectivo es más pequeño, siendo mínimo a la mitad de la carrera. Esto se muestra en la figura 29e, 29f y 29g. En este caso, el pistón no alcanza el mismo punto muerto inferior y la cantidad de mezcla de aire-combustible admitida es menor. Nótese que el pistón viaja menos, requiriendo menos energía. Entonces, esta mezcla es comprimida luego, durante la carrera de compresión, figura 29g, 29h y 29i, siendo figura 29i coincidente con figura 29a. En las figuras 29' se puede observar el movimiento del cigüeñal secundario, con respecto al piñón fijo al bloque del motor. El cigüeñal secundario está representado por un par de circunferencias, donde la de mayor diámetro corresponde a la corona y la de menor diámetro corresponde a la unión del pie de biela, excéntrica a la corona.

La figura 30 muestra la trayectoria de la biela principal; es decir, si se sigue el movimiento de la biela al segundo centro excéntrico, describirá una curva o vuelta como 1 en la figura 30 (La Figura 30 se ha calculado para un ángulo de 45° para la segunda excentricidad) El cambio de este ángulo modificará la trayectoria. La biela de un motor convencional describirá un círculo como 1 también mostrado dentro del círculo de la misma figura. Debido a que el pistón está unido al otro extremo de la biela el movimiento del pistón también es modificado y los volúmenes para las carreras de expansión, descarga, admisión y compresión son todos distintos entre sí. Como una consecuencia, el ciclo de Otto regular es transformado en un ciclo Atkinson modificado.

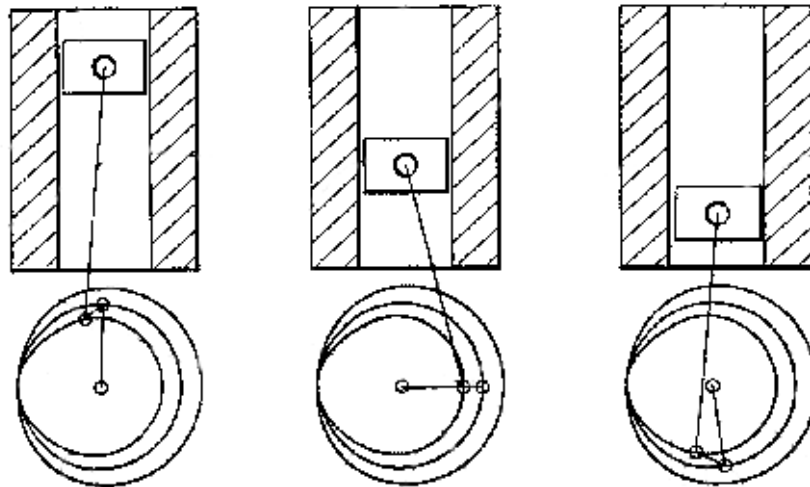
FIGURAS 29c, 29d y 29e
Carrera de descarga



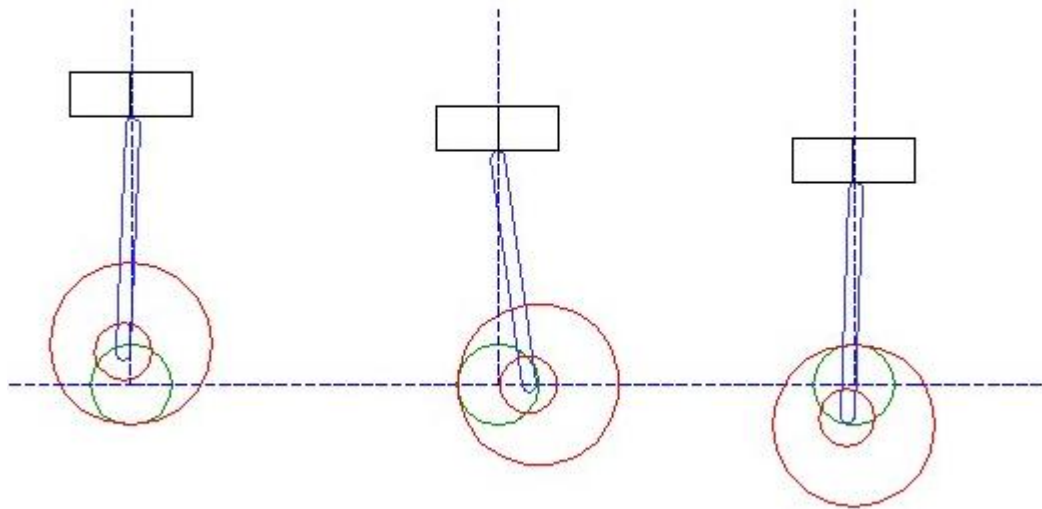
FIGURAS 29c' 29d' y 29e'
Carrera de descarga 2



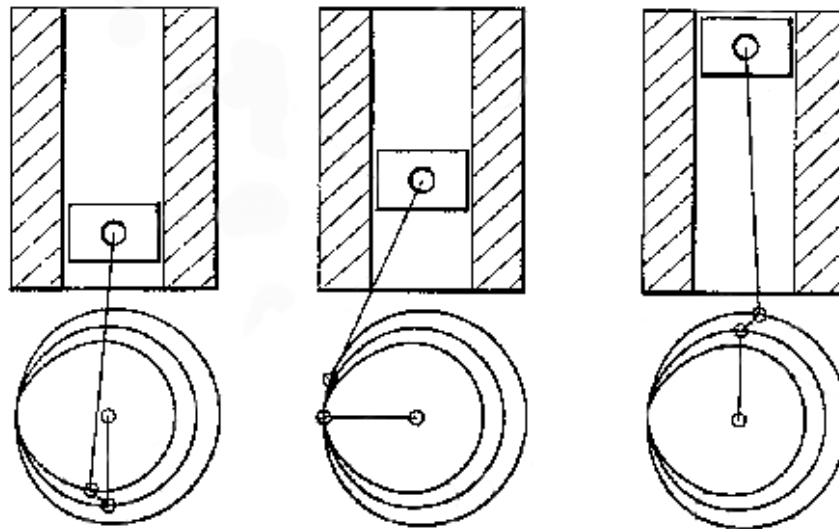
FIGURAS 29e 29f y 29g
Carrera de admisión



FIGURAS 29e', 29f' y 29g'
Carrera de admisión 2



FIGURAS 29g 29h y 29i
Carrera de compresión



FIGURAS 29g', 29h' y 29i'
Carrera de compresión 2

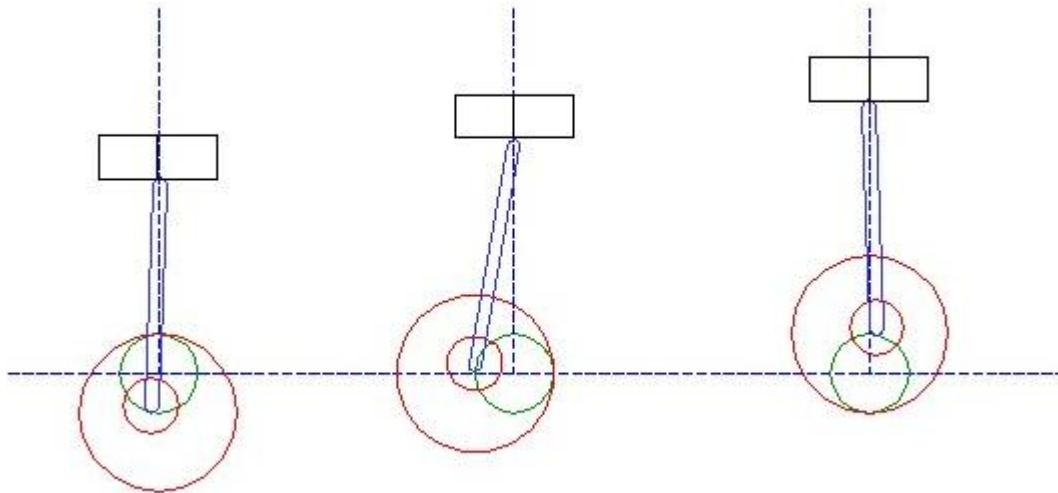
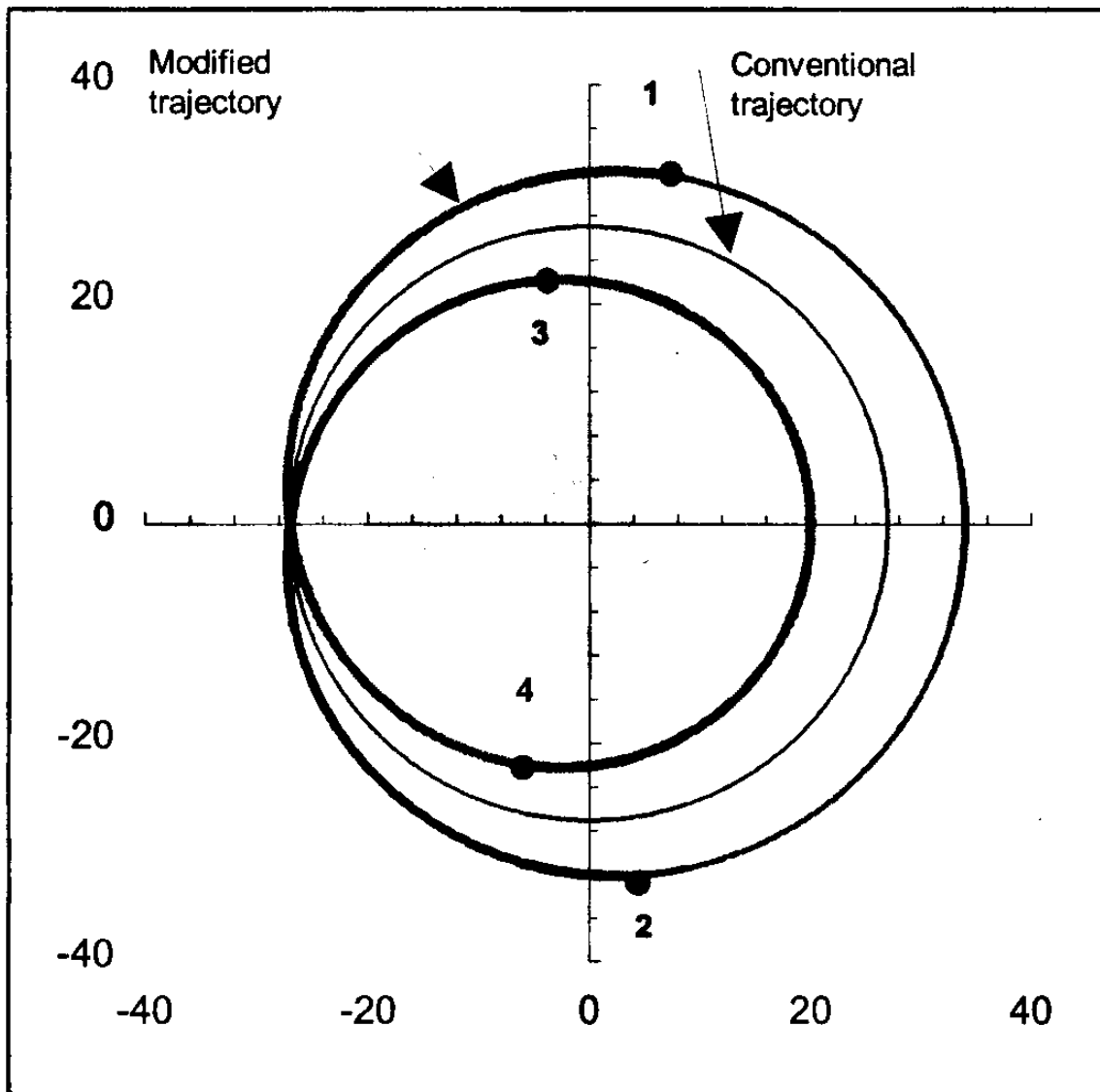


FIGURA 30
Trayectoria de la biela convencional y modificada



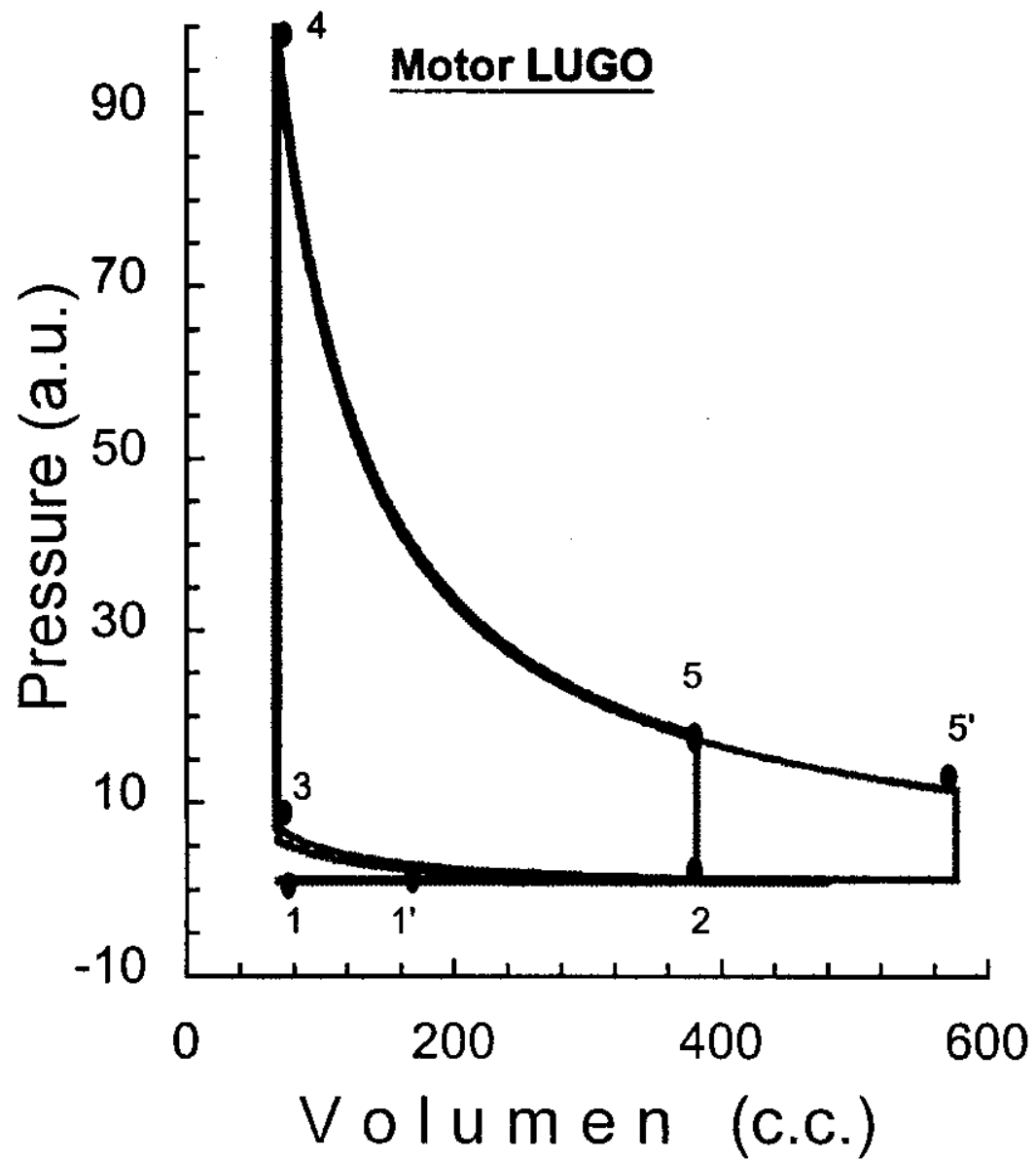
La Figura 30 muestra la trayectoria de los puntos descritos por la biela durante las cuatro carreras del ciclo. La trayectoria del punto 1 al 2 corresponde a la carrera de expansión; del punto 2 al 3, es la carrera de descarga; del punto 3 al 4 es la carrera de admisión y desde el punto 4 al 1 es la carrera de compresión. El círculo interior describe la trayectoria correspondiente a un ciclo Otto convencional.

El ciclo Atkinson modificado ha sido objeto de investigaciones recientes. Para ver las diferencias entre el ciclo Otto convencional y el ciclo Atkinson modificado observaremos el diagrama P-V de la Figura 31.

El ciclo de Otto comienza con la carrera de admisión en el punto 1; en este punto el pistón está en el punto muerto superior con el volumen mínimo y la presión atmosférica. El ciclo modificado, por otro lado, comienza su carrera de admisión en el punto 1'. Nótese que el volumen mínimo es mayor que el anterior a la misma presión atmosférica. Luego, en ambos casos, el pistón se mueve hacia el punto 2. Ahora, la válvula de admisión cierra y, de nuevo, en ambos casos el pistón sube al punto 3, guardando la misma relación de compresión. La explosión de la mezcla ocurre, en teoría, a volumen constante, y, hay un incremento instantáneo de presión hasta el punto 4. Después, durante la carrera de expansión, el ciclo de Otto al punto 5 mientras que el ciclo modificado alcanza el punto 5'; esto significa que el pistón, en el ciclo modificado, va más allá haciendo más trabajo y extrayendo más energía del combustible. Finalmente, el ciclo de Otto vuelve al punto 1 y el Atkinson al punto 1'. Puesto que el área bajo la curva representa el trabajo realizado, se puede observar que el ciclo modificado es más eficiente. También puede verse en esta figura que la relación de expansión es mayor que la relación de compresión; ésta es la característica principal del ciclo de Atkinson.

Otra ventaja de este mecanismo es el incremento del brazo efectivo durante el funcionamiento o carrera de expansión; este brazo más largo representa un

FIGURA 31
Diagrama termodinámico Atkinson modificado



incremento del torque del motor. Por otro lado, la reducción del brazo efectivo durante la carrera de admisión se traduce en menos trabajo de bombeo.

Figura 6: Superposición de los diagramas P-V Otto-Atkinson.

Adicionalmente, si se asume una velocidad angular constante del árbol cigüeñal, la velocidad del pistón, durante la carrera de admisión será menor, favoreciendo la eficiencia volumétrica. Al observarse la figura 30, puede verse que si el tiempo para ir del punto 1 al punto 2 es el mismo tiempo requerido para ir del punto 3 al 4, entonces, debido a que la distancia del punto 3 al 4 es menor, la velocidad también es menor. Por otro lado, durante la carrera de compresión y expansión, la velocidad del pistón será más grande, así minimizando las pérdidas de calor.

Resumen de algunas de las características:

- El motor LUGO opera bajo el ciclo Atkinson modificado.
- Durante la carrera de expansión hay un brazo del cigüeñal efectivo mayor que aumenta al máximo el torque; la velocidad del pistón es mayor, disminuyendo las pérdidas de calor; el pistón viaja una distancia mayor, trabajando más.
- Durante la carrera de admisión y de descarga hay un menor brazo efectivo del cigüeñal que minimiza la potencia requerida para el bombeo; la velocidad del pistón es menor, favoreciendo la eficiencia volumétrica; el pistón viaja una distancia más pequeña, requiriendo de menos energía.

De cada uno de los elementos que componen el sistema antes descrito, se pueden encontrar los planos anexados al final del tomo.

En las características anteriores se basa singularidad del motor LUGO. Como se dijo previamente, este motor de pistón reciprocante contiene engranes montados en el árbol del cigüeñal, estos engranajes son los responsables de proveer al sistema las

ventajas que posee, en lo que a aspectos energéticos se refiere. Dicho esto, se ha de establecer la geometría de los engranajes para, posteriormente realizar el análisis dinámico que nos compete.

El mecanismo estudiado transmite el movimiento y la potencia generada por la reacción exotérmica que ocurre dentro de la cámara de combustión del motor, a través de un sistema de engranajes rectos conformados por un piñón de dientes externos y una corona de dientes internos.

2.2. DETERMINACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LOS ENGRANAJES

A través de mediciones directas sobre estos elementos se pudo determinar el diámetro de dedendum y el número de dientes tanto del piñón como de la corona, para luego mediante relaciones dadas establecer las características geométricas de los engranajes.

Conocidos el número de dientes de los engranes y el valor del diámetro de dedendum de la corona medido directamente sobre el mecanismo, se determina la geometría de los engranes:

$$D_{dedendumrueda} = 112mm \rightarrow (Ec.2.2.1)$$

$$N_{piñon} = 31dientes \rightarrow (Ec.2.2.2)$$

$$N_{corona} = 62dientes \rightarrow (Ec.2.2.3)$$

1. Determinación del módulo.

$$D_{dedendum} = (N + 2) \cdot m \rightarrow (Ec.2.2.4)$$

$$m = \frac{D_{dedendum}}{N_{rueda} + 2} \rightarrow (Ec.2.2.5)$$

$$m = \frac{112}{62 + 2} \rightarrow (Ec.2.2.6)$$

$$m = 1,75mm \rightarrow (Ec.2.2.7)$$

2. Determinación de los diámetros de paso.

$$D = N \cdot m \rightarrow (Ec.2.2.8)$$

$$D_{pasocorona} = 62 \cdot 1,75 \rightarrow (Ec.2.2.9)$$

$$D_{pasocorona} = 108,5mm \rightarrow (Ec.2.2.10)$$

$$D_{pasopiñon} = 31 \cdot 1,75 \rightarrow (Ec.2.2.11)$$

$$D_{pasopiñon} = 54,25mm \rightarrow (Ec.2.2.12)$$

3. Determinación de los diámetros base.

$$D_{base} = d_{paso} \cos(\psi) \rightarrow (Ec.2.2.13)$$

$$D_{base\text{rueda}} = 108,5 \cdot \cos(20) \rightarrow (Ec.2.2.14)$$

$$D_{base\text{rueda}} = 101,95\text{mm} \rightarrow (Ec.2.2.15)$$

$$D_{base\text{piñon}} = 54,25 \cdot \cos(20) \rightarrow (Ec.2.2.16)$$

$$D_{base\text{piñon}} = 50,97\text{mm} \rightarrow (Ec.2.2.17)$$

4. Determinación del adendum.

$$a = 1 \cdot m \rightarrow (Ec.2.2.18)$$

$$a = 1 \cdot 1,75 \rightarrow (Ec.2.2.19)$$

$$a = 1,75\text{mm} \rightarrow (Ec.2.2.20)$$

5. Determinación del dedendum.

$$b = 1,167 \cdot m \rightarrow (Ec.2.2.21)$$

$$b = 1,167 \cdot 1,75 \rightarrow (Ec.2.2.22)$$

$$b = 2,04\text{mm} \rightarrow (Ec.2.2.23)$$

6. Determinación de la profundidad del diente.

$$h = a + b \rightarrow (Ec.2.2.24)$$

$$h = 1,75 + 2,04 \rightarrow (Ec.2.2.25)$$

$$h = 3,79\text{mm} \rightarrow (Ec.2.2.26)$$

Donde :

D: diámetro.

N: número de dientes.

m: módulo en milímetros.

ψ : ángulo de presión.

a: adendum.

b: dedendum.

h: profundidad del diente.

De los cálculos anteriores nos queda definida la geometría de los dientes:

FIGURA 32
Geometría del diente.

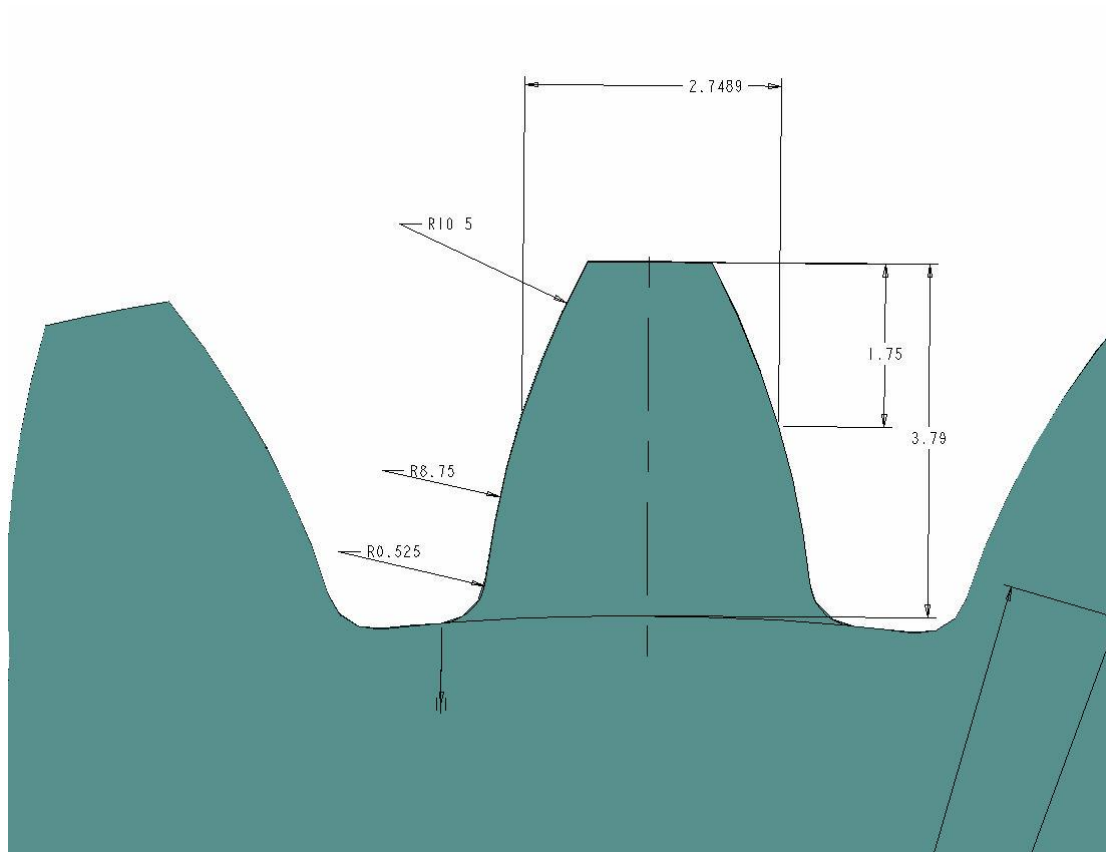
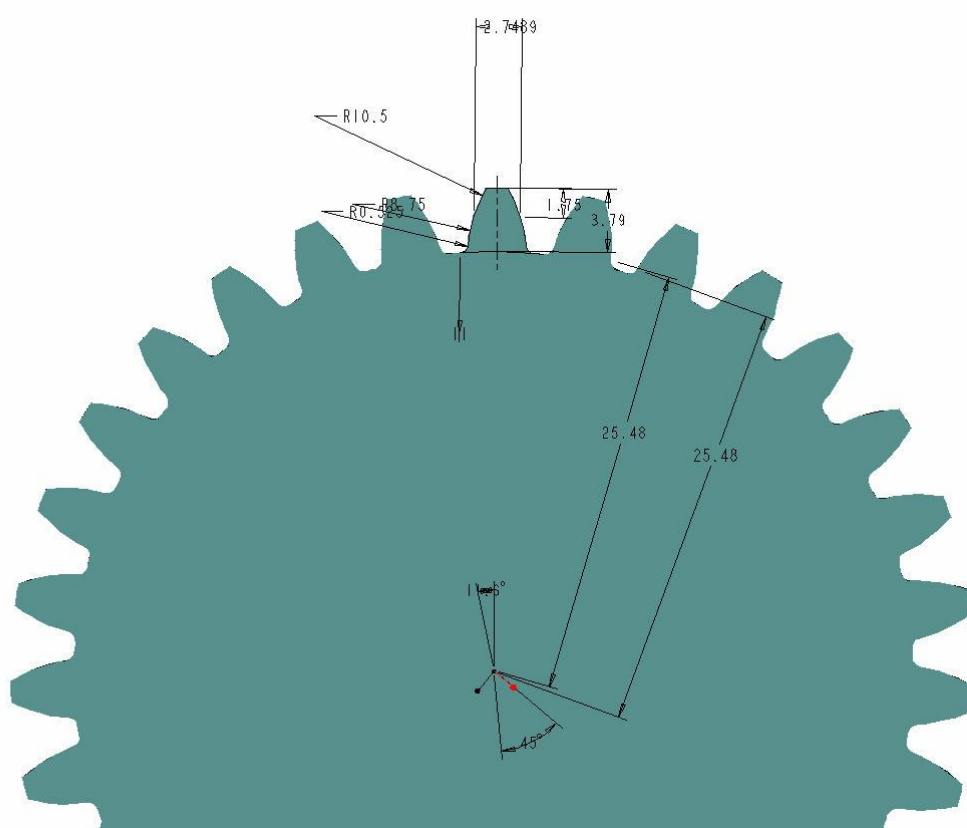


FIGURA 33
Geometría del piñón.



De los cálculos anteriores se obtiene la siguiente tabla:

TABLA 4
Geometría de los engranajes.

	Corona o Rueda	Piñón
Módulo	1,75 mm	1,75 mm
Diámetro de paso	108,5 mm	54,25 mm
Diámetro base	101,95 mm	50,97 mm
Adendum	1,75 mm	1,75 mm
Dedendum	2,04 mm	2,04 mm
Profundidad	3,79 mm	3,79 mm

La geometría de los engranajes es la responsable directa de las relaciones de velocidades que se establecen entre los elementos. A continuación se procederá a realizar el análisis cinemático del mecanismo, para desarrollar ecuaciones que describan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de las partes móviles del motor.

2.3. CINEMÁTICA DEL MECANISMO

Se define cinemática como el estudio del movimiento sin consideración de las fuerzas. Para realizar el análisis dinámico del mecanismo del motor LUGO se considerará en primer lugar los movimientos producto de la geometría y especificaciones del diseño, para determinar subsecuentemente las fuerzas asociadas al movimiento y las fuerzas producto de la combustión. La meta principal del análisis cinemático consiste en determinar las aceleraciones de todas las partes móviles del conjunto debido a que estas son proporcionales a las fuerzas dinámicas.

Como se explicó, el motor LUGO, consta de un mecanismo de engranajes que puede ser modelado como un sistema de dos cigüeñales, uno principal y uno secundario que se presenta esquemáticamente a continuación:

$AD = L$ = longitud de la biela

$BC = E_1$ = excentricidad del cigüeñal principal

$CD = E_2$ = excentricidad del cigüeñal secundario

x = desplazamiento del pistón con respecto al eje horizontal

α = desplazamiento angular de la manivela principal

β = desplazamiento angular de la biela

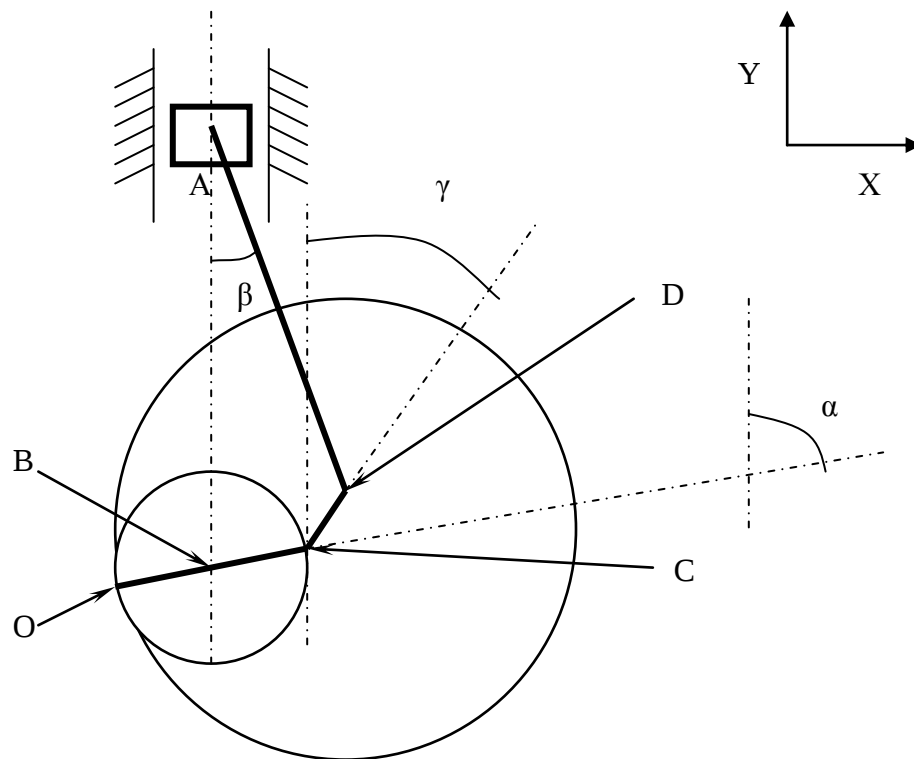
γ = desplazamiento angular de la manivela secundaria

B = punto fijo al bloque del motor

O = punto de engrane entre la corona del cigüeñal secundario y el piñón fijo al bloque

FIGURA 34

Diagrama cinemático del mecanismo



Se puede observar en el esquema que el pistón posee un movimiento rectilíneo que se transforma en movimiento circular del cigüeñal principal mediante el sistema de engranajes y biela. El pie de biela, por su unión con el pistón está sometido a un movimiento rectilíneo alterno, y la cabeza de la biela sigue una trayectoria regida por la excéntrica de la corona.

2.3.1. ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO

El desplazamiento de un cuerpo es su cambio de posición con respecto a un punto fijo. Con objeto de definir completamente el desplazamiento de un punto o un cuerpo es necesario establecer tanto dirección como distancia con respecto a un marco de referencia.

2.3.1.1. ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO A

La posición del punto A con respecto a los ejes coordenados se obtiene de la suma de los vectores que representan cada uno de los elementos. El punto A representa al pistón y este se desplaza sobre el eje del cilindro que lo contiene y este desplazamiento está restringido por las paredes del mismo. Es así como la posición del pistón para cualquier instante posee solo componente vectorial en y. La relación entre los ángulos se obtiene al igualar las longitudes en el eje de las ordenadas.

En donde:

$$\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \rightarrow (Ec.2.3.1.1.1)$$

$$\overline{BA} = BCy + CDy + ADy \rightarrow (Ec.2.3.1.1.2)$$

$$BCy = E1 \cdot \cos \alpha \rightarrow (Ec.2.3.1.1.3)$$

$$CDy = E2 \cdot \cos \gamma \rightarrow (Ec.2.3.1.1.4)$$

$$DAy = L \cdot \cos \beta \rightarrow (Ec.2.3.1.1.5)$$

$$\overline{BA} = (L \cdot \cos \beta + E1 \cdot \cos \alpha + E2 \cdot \cos \gamma) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.1.6)$$

$$L \cdot \sin \beta = E1 \cdot \sin \alpha + E2 \cdot \sin \gamma \rightarrow (Ec.2.3.1.1.7)$$

BA = vector de longitud variable. Distancia pistón-origen.

BC = vector de longitud constante. Distancia excéntrica, cigüeñal principal = E_1

CD = vector de longitud constante. Distancia excéntrica, cigüeñal secundario = E_2

AD = vector de longitud constante. Distancia biela = L

α = ángulo de la manivela principal.

β = ángulo de la biela.

γ = ángulo de la manivela secundaria.

El ciclo completo se realiza por el motor cuando γ alcance los 360° . La ecuación que establece la posición del pistón se presenta en función del ángulo γ .

$$\overline{BA} = (L \cdot \cos \beta + E_1 \cdot \cos \alpha + E_2 \cdot \cos \gamma) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.1.8)$$

$$L \cdot \sin \beta = E_1 \cdot \sin \alpha + E_2 \cdot \sin \gamma \rightarrow (Ec.2.3.1.1.9)$$

$$\sin \beta = \frac{[E_1 \cdot \sin \alpha + E_2 \cdot \sin \gamma]}{L} \rightarrow (Ec.2.3.1.1.10)$$

$$\beta = \arcsen \left[\frac{[E_1 \cdot \sin \alpha + E_2 \cdot \sin \gamma]}{[L]} \right] \rightarrow (Ec.2.3.1.1.11)$$

2.3.1.2. ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO C

El cigüeñal principal esta representado por el vector BC. El punto B está fijo al marco de referencia, mientras que el punto C describe una trayectoria circular en torno a B (distancia BC permanece constante). El cigüeñal principal está sometido a un movimiento de rotación pura, las coordenadas de C para cada instante se obtienen de la proyección del vector BC sobre cada uno de los ejes.

$$\overline{BC} = \overline{BCx} \hat{i} + \overline{BCy} \hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.2.1)$$

$$BCx = E_1 \cdot \sin \alpha \rightarrow (Ec.2.3.1.2.2)$$

$$BCy = E_1 \cdot \cos \alpha \rightarrow (Ec.2.3.1.2.3)$$

$$\overline{BC} = (E_1 \cdot \sin \alpha) \hat{i} + (E_1 \cdot \cos \alpha) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.2.4)$$

2.3.1.3. ANÁLISIS DE DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO D

El cigüeñal secundario se presenta la composición de dos eslabones el BC que corresponde a la excéntrica 1, y el CD correspondiente a la excéntrica 2. Para obtener el desplazamiento definitivo del cigüeñal se descomponen ambos eslabones en el eje horizontal y vertical, agrupándose los primeros y los últimos entre sí.

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} \rightarrow (Ec.2.3.1.3.1)$$

$$\overline{BD} = (BC_x + CD_x)\hat{i} + (BC_y + CD_y)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.3.2)$$

$$BC_x = E_1 \cdot \sin \alpha \rightarrow (Ec.2.3.1.3.3)$$

$$BC_y = E_1 \cdot \cos \alpha \rightarrow (Ec.2.3.1.3.4)$$

$$CD_x = E_2 \cdot \sin \gamma \rightarrow (Ec.2.3.1.3.5)$$

$$CD_y = E_2 \cdot \cos \gamma \rightarrow (Ec.2.3.1.3.6)$$

$$\overline{BD} = (E_1 \cdot \sin \alpha + E_2 \cdot \sin \gamma)\hat{i} + (E_1 \cdot \cos \alpha + E_2 \cdot \cos \gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.1.3.7)$$

2.3.2. ANÁLISIS DE VELOCIDAD

La velocidad se define como la tasa de variación de la posición con respecto al tiempo. Un cuerpo puede cambiar su posición por traslación a través del espacio o por movimiento angular. De esta forma se puede obtener velocidad lineal o angular.

2.3.2.1. ANÁLISIS DE VELOCIDAD DEL PUNTO A

La velocidad punto A del pistón es un vector cuya dirección es paralela al eje del cilindro y su magnitud es consecuencia de las velocidades angulares de los elementos en rotación y de sus respectivas longitudes.

El diámetro del piñón es la mitad del diámetro de la corona, es decir, la velocidad y aceleración angular del piñón será el doble que la de la corona:

$$\dot{\alpha} = 2\dot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.1)$$

$$\ddot{\alpha} = 2\ddot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.2)$$

$$\overline{V_A} = \frac{d\overline{BA}}{dt} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.3)$$

$$\overline{BA} = BCy\hat{j} + CDy\hat{j} + DAy\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.4)$$

$$\overline{BA} = L \cdot \cos \beta + E1 \cdot \cos \alpha + E2 \cdot \cos \gamma \rightarrow (Ec.2.3.2.1.5)$$

$$\frac{d\overline{BA}}{dt} = -L\dot{\beta} \sin \beta - E1\dot{\alpha} \sin \alpha - E2\dot{\gamma} \sin \gamma \rightarrow (Ec.2.3.2.1.6)$$

$$\overline{V_A} = -(L\dot{\beta} \sin \beta + E1\dot{\alpha} \sin \alpha + E2\dot{\gamma} \sin \gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.7)$$

$$\cos \beta \cdot \dot{\beta} = [E1 \cdot 2\dot{\gamma} \cdot \cos \alpha + E2\dot{\gamma} \cos \gamma] \frac{1}{L} \rightarrow (Ec.2.3.2.1.8)$$

Donde:

V_A = velocidad del punto A

α punto = velocidad angular de la manivela principal

β punto = velocidad angular de la biela

γ punto = velocidad angular de la manivela secundaria

2.3.2.2. ANÁLISIS DE VELOCIDAD DEL PUNTO C

Cuando un elemento es sometido a rotación, el vector velocidad de cada uno de sus puntos tiene siempre una dirección perpendicular al radio de rotación y es tangente a la trayectoria del movimiento. El valor de la velocidad es directamente proporcional a la velocidad angular a la cual gira y a la distancia al eje de revolución.

$$\overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}} \rightarrow (Ec.2.3.2.2.1)$$

$$\overline{V_B} = 0 \rightarrow (Ec.2.3.2.2.2)$$

$$\overline{V_C} = \overline{V_{CB}} \rightarrow (Ec.2.3.2.2.3)$$

$$\overline{V_C} = \frac{d\overline{CB}}{dt} \rightarrow (Ec.2.3.2.2.4)$$

$$\overline{CB} = -(E_1 \cdot \sin \alpha)\hat{i} - (E_1 \cdot \cos \alpha)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.2.5)$$

$$\overline{V_C} = -(E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha)\hat{i} + (E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.2.6)$$

Donde:

V_C = velocidad del punto C

V_B = velocidad del punto B

V_{CB} = velocidad de C con respecto a B

2.3.2.3. ANÁLISIS DE VELOCIDAD DEL PUNTO D

El punto D del cigüeñal secundario posee un movimiento de rotación y uno de traslación, la suma de estos dos movimientos es equivalente al movimiento total. El cigüeñal secundario, gira con respecto al eje del cilindro y se desplaza con respecto al origen gracias a la unión con el cigüeñal principal en la base y con la biela en el extremo. Se obtiene entonces que la velocidad del punto D con respecto al marco de referencia, será igual a la velocidad total del punto C más la velocidad de D con respecto a C.

$$\overline{V_D} = \overline{V_C} + \overline{V_{DC}} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.1)$$

$$\overline{V_C} = -(E1\dot{\alpha} \cos \alpha)\hat{i} + (E1\dot{\alpha} \sin \alpha)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.2)$$

$$\overline{V_{DC}} = \frac{d\overline{DC}}{dt} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.3)$$

$$\overline{DC} = -(E2 \sin \gamma)\hat{i} - (E2 \cos \gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.4)$$

$$\frac{d\overline{DC}}{dt} = -(E2\dot{\gamma} \cos \gamma)\hat{i} + (E2\dot{\gamma} \sin \gamma)\hat{j} \rightarrow \hat{j}(Ec.2.3.2.3.5)$$

$$\overline{V_D} = -(E1\dot{\alpha} \cos \alpha + E2\dot{\gamma} \cos \gamma)\hat{i} + (E1\dot{\alpha} \sin \alpha + E2\dot{\gamma} \sin \gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.6)$$

$$\dot{\alpha} = 2\dot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.3.2.3.7)$$

$$\overline{V_D} = -(2E1\dot{\gamma} \cos \alpha + E2\dot{\gamma} \cos \gamma)\hat{i} + (2E1\dot{\gamma} \sin \alpha + E2\dot{\gamma} \sin \gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.23.2.3.8)$$

Donde:

V_D = velocidad del punto D

V_{DC} = velocidad de D con respecto a C

2.3.3. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

Es la relación del cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Puesto que la velocidad puede ser lineal o angular de igual forma se presenta la aceleración.

2.3.3.1 ANÁLISIS DE ACELERACIÓN DEL PUNTO A

Debido a que la velocidad es lineal, la aceleración del unto A del pistón será paralela a la velocidad (paralela al eje del cilindro) y su dirección será igual o contraria a la dirección de la velocidad de acuerdo a si se está aumentando o disminuyendo la cantidad de movimiento.

$$\overline{V}_A = -(L\dot{\beta}\sin\beta + E1\dot{\alpha}\sin\alpha + E2\dot{\gamma}\sin\gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.3.1.1)$$

$$\overline{A}_A = \frac{d\overline{V}_A}{dt} \rightarrow (Ec.2.3.3.1.2)$$

$$\overline{A}_A = -(L\ddot{\beta}\sin\beta + L\dot{\beta}^2\cos\beta + E1\ddot{\alpha}\sin\alpha + E1\dot{\alpha}^2\cos\alpha + E2\ddot{\gamma}\sin\gamma + E2\dot{\gamma}^2\cos\gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.3.3.1.3)$$

Donde:

A_A = aceleración del punto A

β doble punto = aceleración angular de la biela

2.3.3.2. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN DEL PUNTO C

La aceleración absoluta del punto C del cigüeñal principal, producto de su movimiento rotatorio, será la composición de la aceleración normal y la tangencial. La aceleración tangencial está siempre en una dirección perpendicular al radio de rotación , y es por lo tanto, tangente a la trayectoria del movimiento. La aceleración normal o centrípeta estará siempre dirigida hacia el centro o eje de rotación.

$$\overline{A_C} = \overline{A_B} + \overline{A_{CB}} \rightarrow (Ec.2.3.3.2.1)$$

$$\overline{A_B} = 0 \rightarrow (Ec.2.3.3.2.2)$$

$$\overline{A_{CB}} = A_{CB}^T + A_{CB}^N \rightarrow (Ec.2.3.3.2.3)$$

$$\overline{A_C} = A_{CB}^T + A_{CB}^N \rightarrow (Ec.2.3.3.2.4)$$

$$\overline{A_C} = \dot{\alpha}^2 \cdot \overline{CB} + \ddot{\alpha} \times \overline{BC} \rightarrow (Ec.2.3.3.2.5)$$

Donde:

A_C = aceleración de C

A_B = aceleración de B

A_{CB} = aceleración de C con respecto a B

A_{CB}^T = aceleración CB tangencial

A_{CB}^N = aceleración CB normal

α doble punto = aceleración angular de la manivela principal

2.3.3.3. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN DEL PUNTO D

Al igual que lo mencionado en el análisis de velocidad, el cigüeñal secundario presenta movimiento de rotación y traslación, por esto la aceleración de D es igual a la aceleración de C más la aceleración de D con respecto a C, en sus componente normal y tangencial.

$$\overline{A_D} = \overline{A_C} + \overline{A_{DC}}^N + \overline{A_{DC}}^T \rightarrow (Ec.2.3.3.3.1)$$

$$\overline{A_D} = \dot{\alpha}^2 \cdot \overline{CB} + \ddot{\alpha} \times \overline{BC} + \dot{\gamma}^2 \cdot \overline{DC} + \ddot{\gamma} \times \overline{CD} \rightarrow (Ec.2.3.3.3.2)$$

Donde:

A_D = aceleración de D

A_{DC} = aceleración de D con respecto a C

A_{DC}^T = aceleración DC tangencial

A_{DC}^N = aceleración DC normal

γ doble punto = aceleración angular de la manivela secundaria

Después de concluido el análisis de velocidades y aceleraciones, se debe resaltar que el punto O perteneciente al cigüeñal secundario, por ser un punto de engrane, presenta velocidad y aceleración nulas.

Una vez desarrolladas las ecuaciones que describen el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de las partes móviles del mecanismo, se continúa con el análisis de las fuerzas que actúan sobre el sistema.

2.4. ANÁLISIS DE FUERZAS

La fuerza originada por la presión del gas contenido dentro del cilindro y las fuerzas de inercia de las masas, se transmiten a través de la cadena de eslabones que componen el sistema. Según el principio de acción y reacción (3^{era} Ley de Newton) a toda fuerza le corresponde una fuerza igual y de sentido contrario, es así como las fuerzas que se producen en las uniones de eslabones continuos, son de la misma magnitud. Estas fuerzas pueden ser calculadas mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, derivado del análisis de los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los componentes.

2.4.1. ANÁLISIS DE FUERZAS SOBRE EL PISTÓN (p)

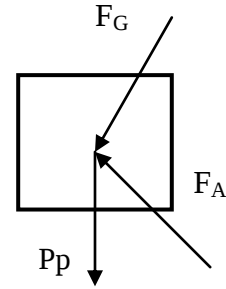
El movimiento del pistón se ve limitado por las paredes del cilindro, este únicamente puede moverse en la dirección vertical, por lo que teniendo el diagrama de cuerpo libre se realizó la suma de fuerzas en el eje vertical igual a la masa por la aceleración, y la suma en el eje horizontal igual a cero por la restricción nombrada anteriormente.

FIGURA 35

Diagrama de cuerpo libre del pistón

$$-F_{GX} - F_{AX} = m_p \cdot A_{pX} \rightarrow (Ec.24.1.1)$$

$$F_{AY} - F_{GY} - P_p = m_p \cdot A_{pY} \rightarrow (Ec.24.1.2)$$



No existe movimiento en X, por lo tanto no hay componente en X, ni velocidad, ni aceleración angular, de donde: $m_p \cdot A_{pX} = 0$

Donde:

F_G = fuerza de los gases

F_A = fuerza pistón-biela

P_p = peso propio del pistón

m_p = masa del pistón

A_p = aceleración del pistón

2.4.2 ANÁLISIS DE FUERZAS SOBRE LA BIELA (b)

En el análisis de la biela se construyó su diagrama de cuerpo libre, en donde visualizamos las direcciones de las fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, para con ello proceder a sumarlas en cada una de sus componentes por separado. Como la inercia se halló a partir del punto A, se hizo sumatoria de momento en ese punto.

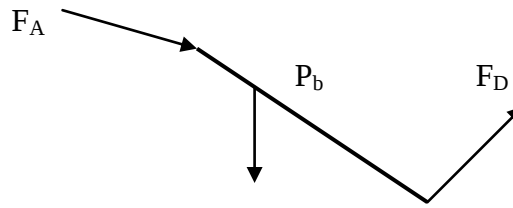


FIGURA 36

Diagrama de cuerpo libre de la biela.

$$F_{AX} + F_{DX} = m_b \cdot A_{bX} \rightarrow (Ec.2.4.2.1)$$

$$F_{DY} - F_{AY} - P_b = m_b \cdot A_{bY} \rightarrow (Ec.2.4.2.2)$$

$$\sum M_A = -P_b \cdot \left(\frac{L}{2} \cdot \sin \beta \right) + F_{DY} \cdot (L \cdot \sin \beta) + F_{DX} \cdot (L \cdot \cos \beta) = I_b \cdot \ddot{\beta} \rightarrow (Ec.2.4.2.3)$$

Donde:

F_D = fuerza biela-manivela secundaria

P_b = peso de la biela

m_b = masa de la biela

A_b = aceleración de la biela

M_A = momento en el punto A

I_b = momento de inercia de la biela

2.4.3 ANÁLISIS DE FUERZAS SOBRE EL CIGÜEÑAL PRINCIPAL (E_1)

Para este análisis de fuerzas se dibujó un diagrama de cuerpo libre, las fuerzas actuantes fueron descompuestas en la dirección horizontal y vertical, para luego proceder a la sumatoria de éstas en cada una de sus direcciones según el sistema de

ejes tomado a posterior. Y por último, se realizó momento en el punto B respecto al cual se calculó la inercia.

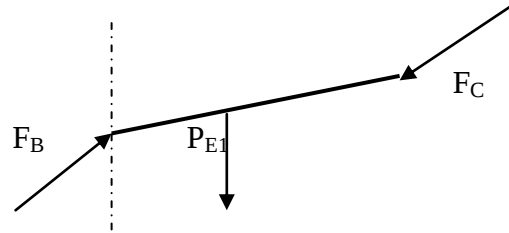


FIGURA 37

Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal principal

$$F_{BX} - F_{CX} = m_{E1} \cdot A_{E1X} \rightarrow (Ec.2.4.3.1)$$

$$F_{BY} - F_{CY} - P_{E1} = m_{E1} \cdot A_{E1Y} \rightarrow (Ec.2.4.3.2)$$

$$\sum M_B = -P_{E1} \cdot \left(\frac{E_1}{2} \cdot \cos(90 - \alpha) \right) - F_{CY} \cdot (E_1 \cdot \cos(90 - \alpha)) + F_{CX} \cdot (E_1 \cdot \sin(90 - \alpha)) = I_{E1} \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow (Ec.2.4.3.3)$$

Donde:

F_B = fuerza en el centro del piñón fijo al bloque

F_C = fuerza manivela principal-manivela secundaria

m_{E1} = masa del cigüeñal principal

A_{E1} = aceleración del cigüeñal principal

P_{E1} = peso del cigüeñal principal

M_B = momento en el punto B

I_{E1} = momento de inercia del cigüeñal principal

2.4.4 ANÁLISIS DE FUERZAS SOBRE EL CIGÜEÑAL SECUNDARIO (E_2)

Para el análisis de fuerzas se realizó inicialmente el diagrama de cuerpo libre del cigüeñal secundario, en donde se asignaron las fuerzas con una dirección tomada arbitrariamente. Según el sistema de ejes ya seleccionado, se ejecutó la sumatoria de fuerzas en los ejes horizontal y vertical, que originado por el movimiento existente

son iguales a la masa por la aceleración. Luego se hizo la sumatoria de momento en el punto D, debido a que con respecto a ese punto se calculó la inercia del cigüeñal secundario.

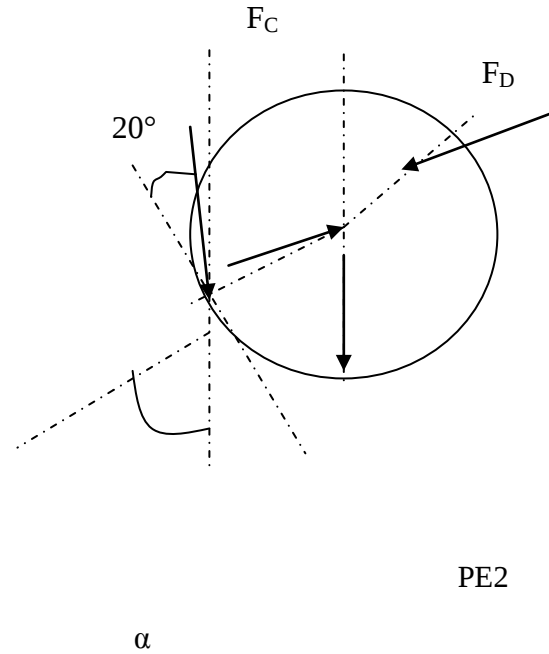


FIGURA 38

Diagrama de cuerpo libre del cigüeñal secundario

$$F_{OX} = F_O \cdot \sin(90 - 20 - \alpha) \rightarrow (Ec.2.4.4.1)$$

$$F_{OY} = F_O \cdot \cos(90 - 20 - \alpha) \rightarrow (Ec.2.4.4.2)$$

$$F_{CX} - F_{DX} + F_{OX} = m_{E2} \cdot A_{E2X} \rightarrow (Ec.2.4.4.3)$$

$$F_{CY} - P_{E2} - F_{DY} - F_{OY} = m_{E2} \cdot A_{E2Y} \rightarrow (Ec.2.4.4.4)$$

$$\sum M_C = F_{OX} (2 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha) + F_{OY} (2 \cdot E_1 \cdot \sin \alpha) - F_{DY} (E_2 \cdot \sin \gamma) + F_{DX} (E_2 \cdot \cos \gamma) = I_{E2} \cdot \ddot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.4.4.5)$$

Donde:

F_O = fuerza entre el cigüeñal secundario (corona) y el piñón

m_{E2} = masa del cigüeñal secundario

A_{E2} = aceleración del cigüeñal secundario

P_{E2} = peso propio del cigüeñal secundario

M_D = momento en el punto D

P = distancia BO, del centro del piñón al punto de engrane

I_{E2} = momento de inercia del cigüeñal secundario

Las ecuaciones derivadas del análisis del diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos, constituyen un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución nos indicará la magnitud, dirección y sentido de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Para ello, es necesario establecer los términos de las ecuaciones que son conocidos o constantes a través del funcionamiento del equipo sin importar las condiciones de carga. Estos son masa, ubicación del centro de gravedad, momento de inercia con respecto al eje de giro y valores de velocidad y aceleración, lineales y angulares para unas revoluciones dadas del eje de salida.

En el planteamiento de las ecuaciones de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo y en la sumatoria de momento para los diversos componentes, se puede observar que se requiere conocer la masa de cada uno de los elementos.

2.5. MASAS DE LOS COMPONENTES DEL SISTEMA.

Para la obtención de las masas, en primer lugar se desmontaron todos las partes del equipo, para luego proceder a pesarlas. Fueron utilizadas dos balanzas, las cuales se especifican a continuación:

- Balanza “Triple Beam Balance” (700 Series), con una capacidad de medición de 2610 gr = 2.61 Kg, OHAUS, US path, 2,729,439., perteneciente a la UCV cuyo número asignado es 08-37354. Ésta balanza fue suministrada por el Prof. Orlando Reyes de la Escuela de Mecánica.
- Balanza “Triple Beam Balance” OHAUS, New Jersey USA, con una capacidad de medición de 20000 gr = 20 Kg. Perteneciente a la UCV, sin número asignado. Ésta balanza fue suministrada por el Prof. Héctor Torres, encargado del galpón de la Escuela de Química.

Las ecuaciones de fuerzas y momentos planteadas en la sección del análisis de las fuerzas, fueron realizadas para cuatro elementos los cuales son: el pistón (incluye el elemento de fijación a la biela, llamado bulón), la biela, el cigüeñal principal conformado por los dos contrapesos, los ejes 1,2 y 3, y la pieza que contiene al piñón, nomenclatura ya especificada anteriormente, y el cigüeñal secundario que es el componente que contiene a la corona.

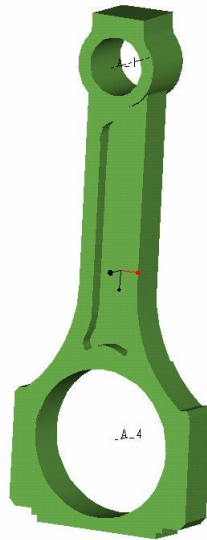
Luego de haber hecho las mediciones se obtienen las siguientes masas:

TABLA 5
Masas de los elementos.

Componente	Masa (Kg)
Pistón	0.685
Cigüeñal Principal	11.4957
Cigüeñal Secundario	1.1186

Debido a la complejidad de la geometría que presenta la biela del motor LUGO, realizamos todas las medidas pertinentes y nos apoyamos en el programa Proengineer, para con sus diversas herramientas dibujarla. De esta forma, haciendo un análisis del modelo, introduciendo la densidad del acero $7.85 \times 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$, correspondiente al material de la biela, se obtuvo a través de la información arrojada por el programa la masa, el centro de masa y el momento de inercia, los dos últimos respecto al origen del dibujo realizado, los cuales deben ser ajustados para el cálculo a nuestro sistema coordenado, y en el caso del momento de inercia aplicar el teorema de Steinner. Los datos suministrados por el programa son los siguientes:

FIGURA 39. Biela



MASS PROPERTIES OF THE PART BIELA3

VOLUME = 7.9989212e+04 MM^3
 SURFACE AREA = 2.9043086e+04 MM^2
 DENSITY = 7.8500000e-09 TONNE / MM^3
 MASS = 6.2791531e-04 TONNE

CENTER OF GRAVITY with respect to _BIELA3 coordinate frame:
 X Y Z -3.9279273e-04 -1.1520288e+01 9.8066673e+01 MM

INERTIA with respect to _BIELA3 coordinate frame: (TONNE * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 8.8937716e+00 -2.9559810e-06 1.6603248e-05
 Iyx Iyy Iyz -2.9559810e-06 9.0547807e+00 7.1180106e-01
 Izx Izy Izz 1.6603248e-05 7.1180106e-01 3.6143436e-01

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to _BIELA3 coordinate frame:
 (TONNE * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 2.7717295e+00 0.0000000e+00 -7.5839726e-06
 Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 3.0160737e+00 2.4097844e-03
 Izx Izy Izz -7.5839726e-06 2.4097844e-03 2.7809931e-01

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (TONNE * MM^2)

I1 I2 I3 2.7809719e-01 2.7717295e+00 3.0160758e+00

ROTATION MATRIX from _BIELA3 orientation to PRINCIPAL AXES:

0.00000	1.00000	0.00000
-0.00088	0.00000	1.00000
1.00000	0.00000	0.00088

ROTATION ANGLES from _BIELA3 orientation to PRINCIPAL AXES
 (degrees):

angles about x y z -89.950 0.000 -90.000

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

R1 R2 R3 2.1044943e+01 6.6439275e+01 6.9305961e+01 MM

De los resultados arrojados por el programa obtenemos:

$$\text{Volumen} = 7.9989212\text{E}4 \text{ mm}^3$$

$$\text{Masa} = 6.2791531\text{E}-4 \text{ Toneladas} = 627.92 \text{ Kg}$$

Centro de Masa con respecto a los ejes coordenados del dibujo

$$X = -3.9279273\text{E}-4 \text{ mm}$$

$$Y = -1.1520288\text{E}1 \text{ mm}$$

$$Z = 9.8066673\text{E}1 \text{ mm}$$

Momento de Inercia con respecto a los ejes coordenados del dibujo

$$I_{XX} = 8.8937716 \text{ Ton. mm}^2$$

$$I_{YY} = 9.0547807 \text{ Ton. mm}^2$$

$$I_{ZZ} = 3.6143436\text{E}-1 \text{ Ton. mm}^2$$

Ya conociendo las masas de los componentes en estudio del sistema, determinaremos ahora la ubicación de los centros de masa y momentos de inercia de cada uno de los componentes restantes con respecto a un sistema de coordenadas que será fijado.

En secciones anteriores se desarrolló un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución nos ofrece los valores de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos que componen el motor. Este sistema, nos establece la relación entre las fuerzas producidas por la presión del gas contenido en el cilindro y las fuerzas de inercia debidas a la masa y a la geometría de los elementos.

Para la resolución del sistema de ecuaciones lineales se requieren datos como la ubicación del centro de gravedad con respecto a un marco de referencia dado y los valores del momento de inercia. A continuación se procede a efectuar el desarrollo de los cálculos que permitan establecer los parámetros antes mencionados.

2.6. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASA

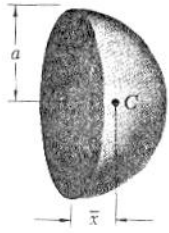
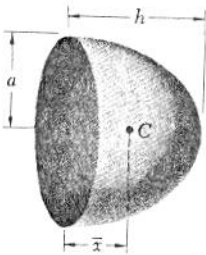
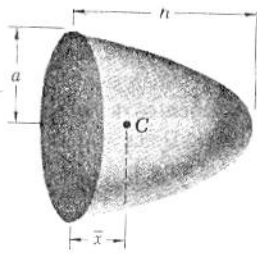
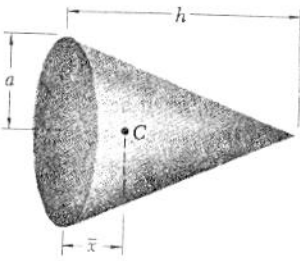
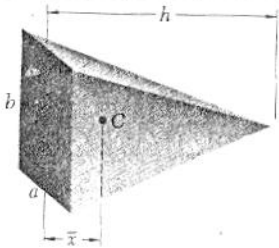
Para la determinación del centro de masa de los elementos que componen el sistema se realizaron los siguientes pasos:

- Se estableció un sistema ejes coordenados.
- Se dividió cada uno de los elementos en formas geométricas más sencillas cuyos centros de masa son conocidos (ver figura 40).¹
- Se estableció un valor de densidad igual a $7,85 \times 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$, constante para todo el elemento y correspondiente a la densidad del acero.
- Se calculó el volumen de cada división, asignando signo negativo a aquellos volúmenes que correspondan a los espacios vacíos en los elementos.
- Se determinó la posición del centro de masa de cada una de las divisiones, con respecto al sistema de ejes coordenados previamente establecido.
- Finalmente se calculó el centro de masa, obtenido de acuerdo a la ecuación:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n V_T} \rightarrow (Ec.2.6.1)$$

¹ Referencia 2

FIGURA 40. Centros de masa de formas comunes de volúmenes

Forma		$\bar{x}$	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semi-elipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

En donde:

x = centro de masa del elemento.

V_T = volumen del elemento.

V_i = volumen de la división i .

x_i = distancia del centro de masa al eje de referencia.

2.6.1.DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASA DEL CIGÜEÑAL PRINCIPAL

El cigüeñal principal está conformado por una serie de ejes y los contrapesos. Para determinar el centro de masa el cigüeñal principal es necesario determinar previamente el centro de masa de cada una de sus partes.

El contrapeso fue dividido en tres figuras geométricas: un prisma rectangular, un cilindro hueco y un semi-disco (Ver figura 41). El plano XY es un plano de simetría por tanto la coordenada Z del centro de gravedad tiene un valor igual a cero. El signo negativo en un volumen representa un vacío en la pieza, es decir, una masa que se restó al sólido. La serie de ejes son denominados ejes 1, 2 y 3. Los ejes 1 y 2 (ver figuras 42 y 43) se extienden de los contrapesos a los extremos del sistema y están conformados por una serie de elementos de sección transversal circular. El eje 3 (ver figura 44) constituye la parte interna en contacto con el cigüeñal secundario, y abarca el espacio comprendido entre los contrapesos. El eje 3 atraviesa al piñón, y este último permanece fijo al bloque del motor, que por su geometría su centro de masa coincide con el eje de salida de la potencia (ver figura 45).

TABLA 6

Cálculo del centro de masa del contrapeso.

Elemento	Área (mm ²)	Ancho (mm)	Volumen (mm ³)	Xi (mm)	Yi (mm)	VixXi	VixYi
1 (semidisco)	14446.3	27.4	395829	13.7	59.6	5422857.9	23591410.8
2 (prisma)	4170.1	27.4	114260.5	13.7	126.3	1565368.4	14425383.8
3(cilind.hueco)	1023.5	27.4	-28045	13.7	114	-384216	-3195723.4
			482044.5			6604010.3	34821071.3
X =	13.7						
Y =	72.2						

El centro de masa del contrapeso: $X = 13.7(\text{mm})$, $Y = 72.2(\text{mm})$

TABLA 7

Cálculo del centro de masa del eje 1.

Elemento	Área (mm2)	Ancho (mm)	Volumen (mm3)	Xi (mm)	Yi (mm)	VixXi	VixYi
1 (cilindro)	1385,4	32,7	45304,0	16,4	0,0	740719,8	0,0
2 (cono t)	2003,0	6,8	13620,1	37,8	0,0	514841,3	0,0
3 (cilindro)	3881,5	6,2	24065,4	42,6	0,0	1025184,0	0,0
4 (cilindro)	2651,2	22,7	60182,2	57,1	0,0	3433394,1	0,0
			143171,6			5714139,2	0,0
X=		39,9111082					
Y=		0					

El centro de masa del eje 1: $X = 39.91(\text{mm})$, $Y = 0(\text{mm})$

TABLA 8

Cálculo del centro de masa del eje 2.

Elemento	Área (mm2)	Ancho (mm)	Volumen (mm3)	Xi (mm)	Yi (mm)	VixXi	VixYi
1 (cilindro)	2669,5	26,4	70474,3	13,2	0,0	930261,1	0,0
2 (cilindro)	789,2	67,3	53115,8	60,1	0,0	3189601,9	0,0
			123590,1			4119863,0	
X=	33,33489681						
Y=	0						

El centro de masa del eje 2: $X = 33.33(\text{mm})$, $Y = 0(\text{mm})$

TABLA 9

Cálculo del centro de masa del eje 3.

forma geométrica	Área (mm2)	Volumen(mm3)	Yi(mm)	VixYi
1(cilindro)	1017.87602	54965.30507	0	0
2(cilindro)	1104.466167	66267.97004	0	0
3(prisma)	3696	103488	-13.65	-1412611.2
4(cilindro)	1339.645793	68991.75836	-27.4	-1890374.18
		293713.0335		-3302985.38
X =		0		
Y =		-11.24562073		

El centro de masa del eje 3: $X=0(\text{mm})$, $Y= -11.2456(\text{mm})$

TABLA 10

Cálculo del centro de masa del cigüeñal principal.

Elemento	Volumen	X_i	Y_i	$V_i X_i$	$V_i Y_i$
Contrapeso 1	401215,4	-83,25	-20,13	-33401182,1	-8074459,9
Contrapeso 2	401215,4	83,25	-20,13	33401182,1	-8074459,9
Eje 1	143171,6	125,24	0,00	17930811,2	0,0
Eje 2	123590,1	130,08	0,00	16076600,2	0,0
Eje 3	293713,0	0,00	15,88	0,0	4664162,9
	1362905,5			34007411,4	-11484756,9

X=	24,9521413
Y=	-8,42667131

El centro de masa del cigüeñal principal: $X = 24,952 \text{ mm}$, $Y = -8.426 \text{ mm}$.

2.6.2. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASA DEL CIGÜEÑAL SECUNDARIO

Para el sistema de ejes coordenados establecido, el plano XY corresponde a un plano de simetría de la pieza, por ende la componente Z del centro de masa es igual a cero. El cigüeñal secundario es una pieza que se encuentra en rotación y que es la responsable de la variación de la carrera del pistón, a su excéntrica se une el pie de la biela y a través de sus dientes internos engrana con el piñón. Su particular geometría es producto del balanceo dinámico al que fue sometido, el cual garantiza que al estar en funcionamiento, en contacto con la biela, su centro de masa se desplazará al eje de giro evitando vibraciones. Para calcular el centro de masa del cigüeñal secundario, se dividió éste en 27 cilindros circulares (ver figura 46) de distinta sección transversal y mediante la utilización de una hoja de cálculo de Excel se obtuvieron los resultados que se presentan a continuación:

TABLA 11
Cálculo del centro de masa del cigüeñal secundario.

Nº	Radio(mm)	Ancho (mm)	Volumen (mm3)	Xi (mm)	Yi (mm)	VixXi	VixYi
1	52,00	7,00	59464,07	3,50	52,00	208124,23	3092131,42
2	28,50	18,00	45931,66	16,00	59,00	734906,49	2709967,67
3	60,00	33,00	373221,21	41,50	52,00	15488680,10	19407502,78
4	19,00	32,00	-36291,68	16,00	52,00	-580666,85	-1887167,27
5	54,37	8,00	-74294,82	37,00	52,00	-2748908,28	-3863330,56
6	56,75	5,00	-50588,48	42,50	52,00	-2150010,29	-2630600,83
7	54,37	13,00	-120729,08	51,50	52,00	-6217547,62	-6277912,16
8	4,00	7,00	-703,72	3,50	58,96	-2463,01	-41492,08
9	4,00	7,00	-703,72	3,50	57,48	-2463,01	-40446,26
10	7,50	7,00	-2474,00	3,50	71,25	-8659,01	-176268,67
11	6,25	7,00	-1718,06	3,50	84,80	-6013,20	-145683,63
12	5,75	7,00	-1454,16	3,50	92,47	-5089,58	-134463,70
13	5,50	7,00	-665,23	3,50	95,00	-2328,31	-63197,06
14	5,00	32,00	-5026,55	16,00	79,04	-80424,77	-397298,37
15	3,00	32,00	-1809,56	16,00	73,28	-28952,92	-132597,13
16	2,50	32,00	-1256,64	16,00	65,39	-20106,19	-82172,63
17	2,00	32,00	-804,25	16,00	58,47	-12867,96	-47024,69
18	4,00	7,00	-703,72	28,50	58,96	-20055,93	-41492,08
19	4,00	7,00	-703,72	28,50	57,48	-20055,93	-40446,26
20	7,50	7,00	-2474,00	28,50	71,25	-70509,12	-176268,67
21	6,25	7,00	-1718,06	28,50	84,80	-48964,67	-145683,63
22	5,75	7,00	-1454,16	28,50	92,47	-41443,69	-134463,70
23	5,50	7,00	-665,23	28,50	95,00	-18959,12	-63197,06
25	39,00	2,50	-5022,87	1,25	80,00	-6278,59	-401829,60
26	39,00	2,50	-5022,87	30,75	80,00	-154453,25	-401829,60
27	60,00	5,75	-16185,49	28,50	52,00	-461286,33	-841645,24
			146146,87			3723203,17	7043091,00
X=	25,48						
Y=	48,19						

El centro de masa del cigüeñal secundario: X= 25.48(mm), Y= 48.19(mm)

2.6.3. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASA DE LA BIELA

El centro de masa de la biela fue determinado a partir del programa Proengineer, y puede observarse en la sección anterior.

2.6.4. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASA DEL PISTÓN

Se considera que no es necesario calcular la altura precisa del centro de masa del pistón, ya que sólo requerimos conocer la línea en donde este centro se encuentra, que no es más que el eje que pasa por el centro geométrico de su superficie circular, el eje de simetría vertical, a través del cual presenta su movimiento de traslación.

Habiendo calculado la posición en el espacio de los centros de masa de cada componente del sistema, procederemos a determinar el momento de inercia de aquellos elementos que describan un movimiento de rotación.

Debido a que las ecuaciones planteadas en la sección del análisis de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo, se encuentran igualadas a la aceleración angular por el momento de inercia, procedemos a la determinación del momento de inercia de cada elemento.

2.7. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA

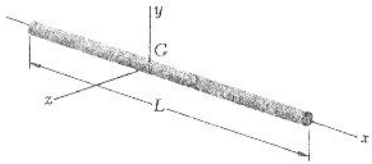
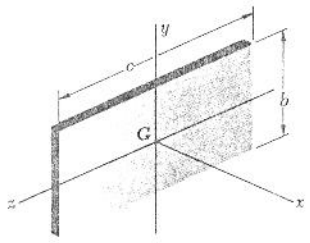
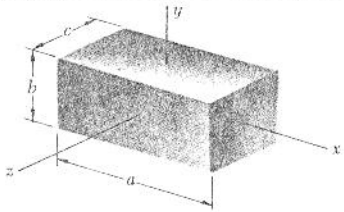
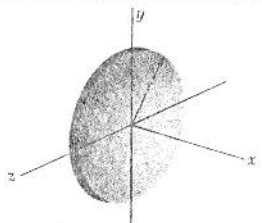
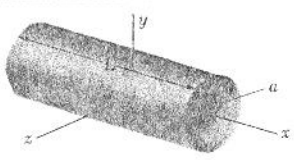
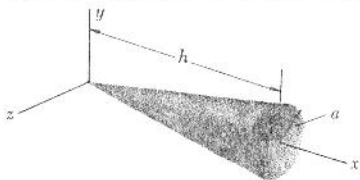
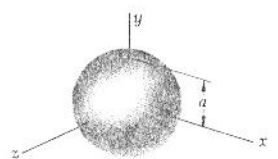
La inercia de un sólido con respecto a un punto o eje particular es una característica inherente a la geometría y a la distribución de la masa del propio elemento. Para la determinación de dicho momento se realizaron los pasos que se presentan a continuación:

- a) Se estableció un sistema de coordenadas, tal que el eje X es paralelo al eje de rotación del cigüeñal principal.
- b) Se establecieron formas geométricas sencillas cuyos momentos de inercia son conocidos (ver figura 47).² Al igual que para el estudio del centro de masa, el arreglo de estas figuras dan como resultado los elementos en estudio.
- c) Se calcularon los volúmenes de cada una de las figuras geométricas y se obtuvo la masa de cada una de ellas, al establecer un valor de densidad constante e igual a $7,85 \times 10^{-6} \text{ Kg/mm}^3$, (correspondiente a la densidad del acero) a través de todo el sólido.
- d) Se calcularon los momentos de inercia con respecto al eje X de las figuras.
- e) Se aplicó el teorema de los ejes paralelos.
- f) Finalmente se estableció el momento de inercia del elemento mediante la aplicación de la ecuación que se presenta a continuación:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \rightarrow (\text{Ec.2.7.1})$$

² Referencia 2

FIGURA 47
Momentos de inercia de las masas de formas geométricas comunes

Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{20}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}ma^2$

En la cual los signos positivos en la sumatoria representan las figuras geométricas macizas, y los negativos las huecas.

2.7.1. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DEL CIGÜEÑAL PRINCIPAL.

El cigüeñal principal está conformado por tres ejes denominados 1,2 y 3 y por los contrapesos. Se debe acotar que el piñón no posee momento de inercia ya que éste se encuentra fijo al bloque del motor.

2.7.1.1. DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA DEL EJE 1.

El eje 1 es un elemento del cigüeñal principal, el cual se dividió en 5 partes, un cilindro, un cono a y un cono b donde restando uno de otro obtenemos un cono truncado, un disco a y un disco b (ver figura 42). El sistema de ejes seleccionado pasa por el centro geométrico de todas las partes, por lo que no se requiere la aplicación del teorema de los ejes paralelos. El eje X coincide con el eje de rotación del elemento. Dada la densidad del acero y los volúmenes se calcularon las masas. Luego se determinó el momento de inercia de cada parte respecto al eje de rotación y se realizó la sumatoria de los mismos.

TABLA 12
Cálculo del momento de inercia del eje 1.

Forma geométrica	Volumen (mm ³)	Masa (Kg)	Inercia (Kg.m ²)
1 (cilindro)	45304.0	0.356	0.000078498
2(cono)	7758.0	0.061	-0.000383670
3(cono)	21528.7	0.169	0.000044100
4 (cilindro)	24076.4	0.189	0.000117000
5 (cilindro)	60127.4	0.472	0.000199000
			0.000054928

El momento de inercia del eje1: 0.000054928 (Kg.m²)

2.7.1.2. DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA DEL EJE 2.

El eje 2 forma parte del cigüeñal principal y consta de dos cilindro circulares. (ver figura 43). Se tomó un sistema de ejes, en donde el eje X corresponde con su eje de rotación y pasa por los centros del disco y el cilindro respectivamente, por ende no es necesario para este caso aplicar el teorema de los ejes paralelos. Luego con la densidad del acero y el volumen obtenido de la geometría se calcularon las masas. Se determinaron las inercias respecto al eje X y por último se realizó la sumatoria.

TABLA 13

Cálculo del momento de inercia del eje 2.

Forma geométrica	Volumen (mm ³)	Masa (Kg)	Inercia (Kg.m ²)
1 (cilindro)	53115,76858	0,416958783	5,23747E-05
2 (cilindro)	70474,32384	0,553223442	2,35043E-04
			2,87418E-04

El momento de inercia del eje 2: 2.87418E-04 (Kg.m²)

2.7.1.3. DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA DEL EJE 3

El eje 3 contiene la excéntrica del cigüeñal principal, está conformado por tres cilindros macizos y un prisma rectangular (ver figura 44). Para calcular la inercia del eje 3 se ubicó el marco de referencia tal que el eje x coincide con el eje de giro, y el eje y es un eje de simetría.

TABLA 14

Cálculo del momento de inercia del eje 3.

Forma Geométrica	Volumen (mm ³)	Masa(Kg)	Inercia (Kg.m ²)
1 (cilindro)	54965,30507	0,431477645	0,000393856
2 (cilindro)	66267,97004	0,520203565	0,000481985
3 (prisma)	103488	0,8123808	0,0006542
4 (cilindro)	68991,75836	0,541585303	0,000115475
			0,001645516

El momento de inercia del eje 3: 0.001645516 (Kg.m²)

2.7.1.4. DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA DEL CONTRAPESO.

El contrapeso es otro de los componentes del cigüeñal principal, éste se dividió en 3 partes, un cilindro hueco, un prisma rectangular y un semidisco (ver figura 41). Se tomó un sistema de ejes coordenados de tal manera que el eje X coincidiera con el eje que pasa por el centro del cilindro hueco. Como se tiene la densidad del contrapeso de acero y las dimensiones de cada parte, determinamos sus volúmenes y con ellos las masas. Luego se calculó el momento de inercia de cada parte para el eje X. Debido a que en las tablas los momentos de inercia están formulados para el eje que pasa por el centro de las partes, se aplicó el teorema de ejes paralelos al prisma rectangular y al semidisco. Y por último, teniendo los momentos de inercia de todas las partes, se realizó su sumatoria.

TABLA 15

Cálculo del momento de inercia del contrapeso.

Forma	Área (mm ²)	Ancho (mm)	Volumen (mm ³)	Masa (Kg)	Inercia (Kg.m ²)
1(semidisco)	11496.3	27.4	314999.9	2.473	0.006670
2(prisma)	4170.1	27.4	114260.5	0.897	0.000412
3(cilindro)	1023.5	27.4	28045.0	0.220	0.0000358
					0.0070462

El momento de inercia total del contrapeso: 0.0070462 (Kg.m²)

TABLA 16

Cálculo del momento de inercia del cigüeñal principal.

Elemento	Inercia (Kg.m ²)	Masa (Kg)	Radio (mm)	Inercia (Kg.m ²)
Contrapeso 1	0,0070462	3,5898	27,125	0,009687451
Contrapeso 2	0,0070462	3,5898	27,125	0,009687451
Eje 1	0,000054928	1,247	0	0,000054928
Eje 2	0,00028741	0,9701	0	0,00028741
Eje 3	0,0016455	2,305	0	0,0016455
				0,021362741

El momento de inercia del cigüeñal principal es: $0.021362741 \text{ (Kg.m}^2\text{)}$

2.7.2. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DEL CIGÜEÑAL SECUNDARIO.

Para la determinación del momento de inercia del cigüeñal secundario, en primer lugar se ubicó el marco de referencia de forma tal que el eje X coincida con el eje del cilindro que se encuentra en contacto con el cigüeñal principal, posteriormente y de la misma forma que se realizó para la determinación del centro de masa, el cigüeñal secundario fue dividido en 27 cilindros circulares, de distinta sección transversal, que por la simetría se reducen a 18 cilindros (ver figura 46).

Con los valores de volumen y densidad, se calculó la masa de cada división. De acuerdo con la ecuación de inercia con respecto al eje X para cilindros circulares y la aplicación del teorema de ejes paralelos, se calculó la inercia del cigüeñal secundario al realizar la sumatoria del momento de inercia de cada división dando valores positivos para formas macizas y negativos para vacíos.

TABLA 17

Cálculo del momento de inercia del cigüeñal secundario.

Nº	R(mm)	T(mm)	V(mm ³)	M(Kg)	I (kg.m ²)	r(mm)	I (Kg.m ²)	I.Total(Kg.m ²)
1	52.0	7.0	59464.1	0.467	0.000631104	0.0	0.000000000	0.00063110
2	28.6	18.0	46125.3	0.362	0.000147671	7.0	0.000017742	0.00016541
3	60.0	33.0	373221.2	2.930	0.005273616	0.0	0.000000000	0.00527362
4	19.0	32.0	36291.7	0.285	0.000051423	0.0	0.000000000	-0.00005142
5	54.3	8.0	73967.2	0.581	0.000854434	0.0	0.000000000	-0.00085443
6	56.8	5.0	50588.5	0.397	0.000639474	0.0	0.000000000	-0.00063947
7	54.4	13.0	120729.1	0.948	0.001400781	0.0	0.000000000	-0.00140078
8	4.0	7.0	351.9	0.003	0.000000022	44.5	0.000005470	-0.00002197
9	4.0	7.0	351.9	0.003	0.000000022	35.0	0.000003384	-0.00001362
10	7.5	7.0	1237.0	0.010	0.000000273	41.0	0.000016323	-0.00006639
11	6.3	7.0	859.0	0.007	0.000000132	42.2	0.000012009	-0.00004856
12	5.8	7.0	727.1	0.006	0.000000094	42.8	0.000010455	-0.00004220
13	5.5	7.0	665.2	0.005	0.000000079	43.0	0.000009656	-0.00003894
14	3.0	32.0	904.8	0.007	0.000000032	28.0	0.000005568	-0.00001120
15	4.0	32.0	1608.5	0.013	0.000000101	27.0	0.000009205	-0.00001861
16	2.5	32.0	628.3	0.005	0.000000015	26.0	0.000003334	-0.00000670
17	2.0	32.0	402.1	0.003	0.000000006	25.0	0.000001973	-0.00000396
18	60.0	5.8	16185.5	0.127	0.000403800	0.0	0.000000000	-0.00040380
								0.00244808

El momento de inercia del cigüeñal secundario es: 2448.08(Kg.mm²)

2.7.3. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA BIELA.

Con la biela, se finaliza el cálculo de los momentos de inercia de los elementos, y está dado a través del programa Proengineer presentado en secciones anteriores.

El momento de inercia, la masa y el centro de gravedad son parámetros necesarios para la resolución del sistema de ecuaciones lineales que se desarrollaron previamente. Entre otros parámetros requeridos, se encuentra la fuerza en el pistón producto de la presión del fluido de trabajo, para ello se debe construir el ciclo termodinámico. A continuación se calculará el desplazamiento del pistón en cada

carrera, para subsecuentemente a través de los volúmenes y condiciones dadas, establecer el ciclo bajo el cual opera el motor.

Para la definición de los estados del diagrama termodinámico, y en específico, para la determinación del volumen de cada una de las carreras del ciclo, es vital a través de la ecuación de desplazamiento del pistón desarrollada en la sección de análisis cinemático, hallar la longitud de las cuatro carreras, la admisión, compresión, expansión y descarga.

2.8. DETERMINACIÓN DE LA CARRERA DEL PISTÓN

Dada la ecuación obtenida para el desplazamiento del pistón, en la sección del análisis cinemático:

$$\overline{BA} = (L \cdot \cos \beta + E_1 \cdot \cos \alpha + E_2 \cdot \cos \gamma) \hat{j} \rightarrow (Ec.28.1)$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{E_1 \cdot \sen \alpha + E_2 \cdot \sen \gamma}{L}\right) \rightarrow (Ec.28.2)$$

En donde:

AB = desplazamiento del pistón con respecto al eje de giro del cigüeñal principal.

L = longitud de la biela.

E_1 = excéntrica del cigüeñal principal.

E_2 = excéntrica del cigüeñal secundario.

α = ángulo que forma la excéntrica del cigüeñal principal con respecto a la vertical.

β = ángulo que forma la biela con respecto a la vertical.

γ = ángulo que forma la excéntrica del cigüeñal secundario con respecto a la vertical.

Se determina la posición del pistón mediante la sustitución de las longitudes y los ángulos de los eslabones que componen el sistema en la ecuación anterior. Dichos puntos de interés corresponden a los inicios y finales de cada carrera del pistón. Debido a que los eslabones son cuerpos rígidos sus longitudes permanecerán constantes e iguales a:

- L = 153,1 mm.
- E_1 = 27,125 mm.
- E_2 = 7 mm.

2.8.1. DETERMINACIÓN DE LA CARRERA DE ADMISIÓN

Del diagrama cinemático se tiene para el inicio de la carrera:

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{27,125 \cdot \sin(0^\circ) + 7 \cdot \sin(225^\circ)}{153,1}\right) = -1,85^\circ \rightarrow (Ec.2.8.1.1)$$

$$\gamma = 225^\circ$$

$$\overline{BA} = (153,1 \cdot \cos(-1,85^\circ) + 27,125 \cdot \cos(0^\circ) + 7 \cdot \cos(225^\circ)) \hat{j} = 175,19(mm) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.8.1.2)$$

Para el final de la carrera tenemos:

$$\alpha = 180^\circ$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{27,125 \cdot \sin(180^\circ) + 7 \cdot \sin(315^\circ)}{153,1}\right) = -1,85^\circ \rightarrow (Ec.2.8.1.3)$$

$$\gamma = 315^\circ$$

$$\overline{BA} = (153,1 \cdot \cos(-1,85^\circ) + 27,125 \cdot \cos(180^\circ) + 7 \cdot \cos(315^\circ)) \hat{j} = 130,84(mm) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.8.1.4)$$

2.8.2. DETERMINACIÓN DE LA CARRERA DE COMPRESIÓN

Como el final de la admisión coincide con el inicio de la carrera de compresión sus valores de posición del pistón son los mismos. Del diagrama cinemático se tiene para el final de la carrera:

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\gamma = 45^\circ$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{27,125 \cdot \sen(0^\circ) + 7 \cdot \sen(45^\circ)}{153,1}\right) = 1,85^\circ \rightarrow (Ec.2.8.2.1)$$

$$\overline{BA} = (153,1 \cdot \cos(1,85^\circ) + 27,125 \cdot \cos(0^\circ) + 7 \cdot \cos(45^\circ)) \hat{j} = 185,09(mm) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.8.2.2)$$

2.8.3. DETERMINACIÓN DE LA CARRERA DE EXPANSIÓN

Análogamente el final de la carrera de compresión coincide con el inicio de la carrera de expansión, por lo cual, sus valores de posición son los mismos. Del diagrama cinemático se tiene para el final de la carrera:

$$\alpha = 180^\circ$$

$$\gamma = 135^\circ$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{27,125 \cdot \sen(180^\circ) + 7 \cdot \sen(135^\circ)}{153,1}\right) = 1,85^\circ \rightarrow (Ec.2.8.3.1)$$

$$\overline{BA} = (153,1 \cdot \cos(1,85^\circ) + 27,125 \cdot \cos(180^\circ) + 7 \cdot \cos(135^\circ)) \hat{j} = 120,9(mm) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.8.3.2)$$

2.8.4. DETERMINACIÓN DE LA CARRERA DE DESCARGA

Igualmente el final de la carrera de expansión corresponde con el comienzo de la carrera de descarga, por ende, sus valores de posición son idénticos. Del diagrama cinemático obtenemos para el final de la carrera:

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\gamma = 225^\circ$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{27,125 \cdot \sen(0^\circ) + 7 \cdot \sen(225^\circ)}{153,1}\right) = -1,85^\circ \rightarrow (Ec.2.8.4.1)$$

$$\overline{BA} = (153,1 \cdot \cos(-1,85^\circ) + 27,125 \cdot \cos(0^\circ) + 7 \cdot \cos(225^\circ))\hat{j} = 175,19(mm)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.8.4.2)$$

Finalmente queda demostrado que el recorrido que realiza el pistón, es variable para cada carrera puesto que alcanza distintas cotas con respecto al origen del sistema, luego de la culminación de cada proceso. Este recorrido está directamente ligado con la cantidad de fluido que desplaza el pistón y por ende, con la relación de compresión y expansión que se produce en el motor. Estas relaciones no son mas que proporciones volumétricas, que se establecerán en la siguiente sección.

Conociendo el diámetro del cilindro, y una vez determinado el desplazamiento de cada una de las carreras del motor de cuatro tiempos se procede a determinar los volúmenes correspondientes.

2.9. DETERMINACIÓN DE LOS VOLÚMENES DE LAS CARRERAS

El volumen contenido dentro de la cámara es de 53000 ml, y es el volumen mínimo.

Para la determinación de la longitud de cada una de las cuatro carreras, restaremos los valores del módulo del vector BA del inicio y final de ellas, tomando el valor absoluto.

2.9.1. DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE LA CARRERA DE EXPANSIÓN.

La carrera de expansión se inicia en el punto más alto del cilindro una vez finalizada la carrera de compresión y culmina en el punto más bajo. La carrera de potencia es la más larga, aprovechando así la energía liberada por los gases luego de la combustión en la cámara. El volumen será:

$$V_{EXP} = \pi \cdot (r_{cil})^2 \cdot L_{EXP} \rightarrow (Ec.2.9.11)$$

Donde:

V_{EXP} = volumen de expansión

r_{cil} = radio del cilindro

L_{EXP} = longitud de la carrera de expansión

El diámetro del cilindro es 99 mm, por lo que el radio es: 49.5 mm

La longitud de expansión:

$$L_{EXP} = \overline{BA}_{INICIO.EXPANSION} - \overline{BA}_{FINAL.EXPANSION} = 185.09 - 120.9 = 64.24mm \rightarrow (Ec.2.9.12)$$

Con esto:

$$V_{EXP} = \pi \cdot (49.5)^2 \cdot 64.24 = 494499.43 \text{mm}^3 \rightarrow (Ec.2.9.1.3)$$

2.9.2. DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE LA CARRERA DE DESCARGA.

La carrera de descarga se inicia en el punto más bajo del cilindro y finaliza en un punto un poco mas bajo que el punto inicial de la expansión.

El volumen será:

$$V_{DES} = \pi \cdot (r_{cil})^2 \cdot L_{DES} \rightarrow (Ec.2.9.2.1)$$

Donde:

V_{DES} = volumen de descarga

r_{cil} = radio del cilindro

L_{DES} = longitud de la carrera de descarga

El diámetro del cilindro es 99 mm, por lo que el radio es: 49.5 mm

La longitud de descarga:

$$L_{DES} = \overline{BA}_{INICIO.DESCARGA} - \overline{BA}_{FINAL.DESCARGA} = |120.9 - 175.19| = 54.34 \text{mm} \rightarrow (Ec.2.9.2.2)$$

Con esto:

$$V_{DES} = \pi \cdot (49.5)^2 \cdot 54.34 = 418292.33 \text{mm}^3 \rightarrow (Ec.2.9.2.3)$$

2.9.3. DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE LA CARRERA DE ADMISIÓN.

La carrera de admisión comienza en el punto final de la descarga y finaliza en un punto un poco más arriba que el final de la expansión o comienzo de la carrera de descarga.

$$V_{ADM} = \pi \cdot (r_{cil})^2 \cdot L_{ADM} \rightarrow (Ec.2.9.3.1)$$

El volumen será:

Donde:

V_{ADM} = volumen de admisión

r_{cil} = radio del cilindro

L_{ADM} = longitud de la carrera de admisión

El diámetro del cilindro es 99 mm, por lo que el radio es: 49.5 mm

La longitud de admisión:

$$L_{ADM} = \overline{BA}_{INICIO.ADMISION} - \overline{BA}_{FINAL.ADMISION} = 175.19 - 130.84 = 44.355mm \rightarrow (Ec.2.9.3.2)$$

Con esto:

$$V_{ADM} = \pi \cdot (49.5)^2 \cdot 44.355 = 341430.92mm^3 \rightarrow (Ec.2.9.3.3)$$

2.9.4. DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE LA CARRERA DE COMPRESIÓN.

La carrera de compresión inicia en el punto final de la admisión de la mezcla aire-combustible, y culmina en el punto más alto del cilindro que corresponde al punto inicial de la carrera de potencia.

El volumen será:

$$V_{COM} = \pi \cdot (r_{cil})^2 \cdot L_{COM} \rightarrow (Ec.2.9.4.1)$$

Donde:

V_{COM} = volumen de compresión

r_{cil} = radio del cilindro

L_{COM} = longitud de la carrera de compresión

El diámetro del cilindro es 99 mm, por lo que el radio es: 49.5 mm

La longitud de compresión:

$$L_{COM} = \overline{BA}_{INICIO.COMPRESION} - \overline{BA}_{FINAL.COMPRESION} = |130.84 - 185.09| = 54.25mm \rightarrow (Ec.2.9.4.2)$$

Con esto:

$$V_{COM} = \pi \cdot (49.5)^2 \cdot 54.25 = 417599.541mm^3 \rightarrow (Ec.2.9.4.3)$$

Luego de determinados los volúmenes de todas las carreras procedemos a hallar los volúmenes de cada punto del diagrama termodinámico (ciclo Atkinson modificado).

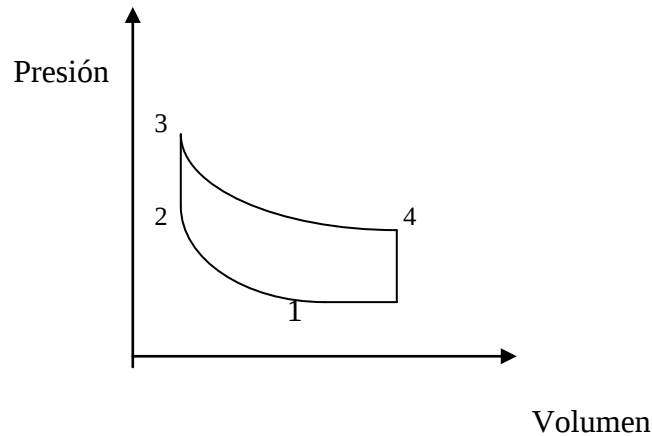


FIGURA 48. Diagrama presión volumen del ciclo Atkinson modificado

Punto 1.

Este punto corresponde al inicio de la carrera de compresión:

$$V_1 = V_{COM} + V_{CAMARA} = 417599.541 + 53000 = 40599.541mm^3 \rightarrow (Ec.2.9.1)$$

Donde:

V_1 = volumen del punto 1

V_{CAMARA} = volumen de la cámara

Punto 2 y 3.

Ambos puntos poseen el mismo volumen, y corresponden a la combustión que se asume instantánea en el punto muerto superior, obteniendo:

$$V_2 = V_3 = 53000mm^3 \rightarrow (Ec.29.2)$$

Donde:

V_2 y V_3 = volumen del punto 2 y volumen del punto 3

Punto 4.

Este punto corresponde al final de la carrera de expansión:

$$V_4 = V_{CAMARA} + V_{EXP} = 53000 + 494499.43 = 547499.43mm^3 \rightarrow (Ec.29.3)$$

Donde:

V_4 = volumen del punto 4

Luego de conocer los respectivos volúmenes de cada inicio y final de las cuatro carreras que realiza el pistón, requeriremos para continuar el estudio del ciclo aire-combustible, con el cual se establecerán las fuerzas que actúan sobre el pistón, a través de las presiones presentes en la cámara y el cilindro.

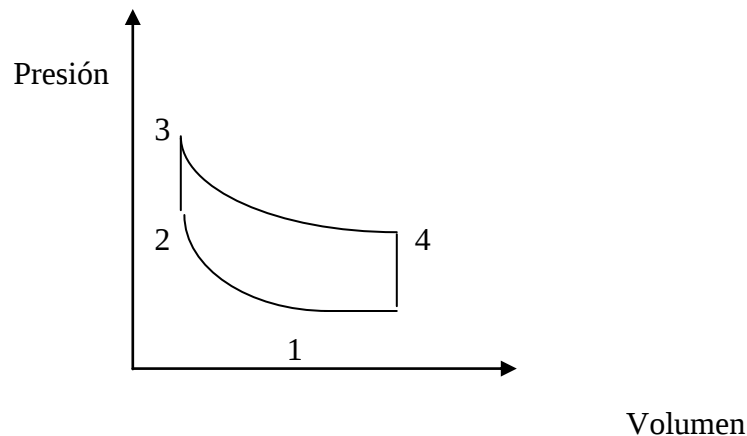
En el análisis de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo, se encuentra presente la fuerza que actúa sobre el pistón, la cual viene dada por la presión en la cámara y el cilindro durante las cuatro carreras del ciclo termodinámico.

2.10. CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA TERMODINÁMICO DEL CICLO AIRE-COMBUSTIBLE

El ciclo termodinámico de aire-combustible, a pesar de ser un ciclo ideal, nos proporciona una noción de los niveles de presión que se generan dentro del cilindro y la cámara de combustión. Realizar el análisis de las fuerzas que actúan sobre el sistema, empleando los valores de presión que se obtienen mediante la construcción del diagrama, nos asegura encontrarnos en todo momento sobre los niveles reales de esfuerzos, sin embargo, produce una óptima aproximación.

FIGURA 49

Diagrama del ciclo Atkinson Modificado



La figura 49, es un esquema representativo del ciclo termodinámico.

El proceso de 1 a 2 es un proceso de compresión a entropía constante. La combustión ocurre de 2 a 3 a volumen constante. Finalmente de 3 a 4 el fluido se expande isentrópicamente.

El ciclo de aire-combustible, toma en consideración los siguientes aspectos:

1. La composición real de los gases del cilindro.
2. La variación en el calor específico de los gases con la temperatura.
3. El hecho que el combustible y el aire no se combinan completamente a altas temperaturas.
4. La variación en el número de moléculas presentes en el cilindro como un cambio en la presión y temperatura.

Para la construcción del diagrama de aire-combustible se asume:

1. La admisión se produce a presión atmosférica y la mezcla de aire-combustible alcanza una temperatura de 60° C al momento de iniciarse la compresión.
2. El fluido es una mezcla homogénea de gases.
3. La compresión es un proceso adiabático y libre de fricción.
4. No ocurre cambio químico, ni de fase en la mezcla durante el proceso de compresión.
5. El proceso de combustión es a volumen constante y no existe ningún elemento en exceso, es decir, la mezcla es teóricamente correcta. La combustión ocurre instantáneamente en el punto muerto superior.
6. No existe transferencia de calor entre las paredes del cilindro y el fluido.
7. La compresión es un proceso adiabático y libre de fricción.
8. Por último, la proporción de gases residuales es de 10 %.

Una vez establecidos los alcances y las restricciones del ciclo, a continuación se desarrolla cada una de las etapas de éste, con la manejo de los diagramas de compresión para mezclas correctas, de relación de mezcla combustible-aire y de los productos de la combustión, contruidos por el Prof. R. L. Daugherty, según los datos

de Hershey, Eberhardt y Hotel, SAE Journal, octubre, 1936, Pág. 409. Los valores se presentan en sistema inglés y sistema internacional.

2.10.1. COMPRESIÓN DE LA MEZCLA.

Dadas las condiciones iniciales de presión y temperatura, se calcula el volumen que ocuparía 1 Kg de aire seco, mediante la ecuación de los gases ideales para 100% de aire y 10% residuos.

TABLA 18

Propiedades del fluido en el estado 1.

Estado 1	Sistema Internacional	Sistema Inglés
Presión	101325 Pa	14,7 psi
Temperatura	333,15 K	600 R
Rel. de compresión	8,8	8,8

En el diagrama de compresión para mezclas correctas se ubica la condición 1 y siguiendo una trayectoria paralela a la curva de entropía constante, a un volumen 8,8 veces menor al V_1 (relación de compresión) se ubica la condición 2. De la ecuación de gases ideales se calcula la presión en el punto 2, quedando totalmente definida este estado.

TABLA 19

Propiedades del fluido en el estado 2.

Estado 2	Sistema Internacional	Sistema Inglés
Presión	1902857,2 Pa	276 psi
Temperatura	711 K	1280 R

2.10.2. COMBUSTIÓN DE LA MEZCLA.

La combustión se realiza a volumen constante, este proceso es instantáneo y posteriormente se produce la expansión. El nivel de energía luego de la combustión se calcula mediante la ecuación:

$$U_t = U_s + U_c \rightarrow (\text{Ec.2.10.2})$$

Donde:

U_s se obtiene del diagrama de la mezcla combustible-aire

U_c de la ecuación:

Conocidas dos propiedades (volumen y energía total), las propiedades de presión y temperatura se encuentran en el diagrama de los productos de la combustión.

TABLA 20
Propiedades del fluido en el estado 3.

Estado 3	Sistema Internacional	Sistema Inglés
Presión	7997918,46 Pa	1160 psi
Temperatura	2583,3 K	4650 R

2.10.3. EXPANSIÓN DE LOS PRODUCTOS.

Los gases producto de la combustión son entonces expandidos isentrópicamente desde la condición 3 hasta la condición 4, donde alcanzan un volumen 10,33 veces mayor al volumen de la condición 3.

A través del diagrama de los productos de la combustión se establece la condición 4, al desplazarse por la línea de entropía constante hasta el valor del volumen indicado.

TABLA 21
Propiedades del fluido en el estado 4.

Estado 4	Sistema Internacional	Sistema Inglés
Presión	482633,01 Pa	70 psi
Temperatura	1683,33 K	3030 R

Las cartas termodinámicas construidas a partir de los datos de la SAE y sobre las cuales se representaron los procesos de expansión y compresión que ocurren en el cilindro de encuentran anexadas al final del tomo.

Definidos los cuatro estados del diagrama y sabiendo el comportamiento de los procesos que ocurren entre ellos, queda completamente definido el ciclo termodinámico. Ya estando construido éste, queda establecida la presión que actúa sobre el pistón en cualquier momento de su trayectoria, para a continuación determinar la aceleraciones de los puntos de la trayectoria del pistón que serán seleccionados.

En secciones anteriores se realizó un análisis de la cinemática del mecanismo, en dicho análisis se derivaron ecuaciones que describen el desplazamiento, para así obtener la velocidad y la aceleración de cada uno de los elementos que componen el sistema. A continuación se procederá a evaluar las ecuaciones de aceleración bajo condiciones específicas de funcionamiento del equipo.

2.11. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES

Según una serie de pruebas preliminares realizadas por el Ing. Luis Marino González en el banco de pruebas ubicado en el Instituto de Ingeniería, el torque máximo generado por el motor LUGO se obtiene para valores cercanos a las 2100 r.p.m. Basados en estos reportes se eligió un rango de velocidades para la evaluación de las aceleraciones comprendido desde 1600 a 2600 r.p.m. asumiéndose valores de velocidad angular constante para cada punto de estudio, espaciados éstos a intervalos de 100 r.p.m..

Una vez fijados los valores de velocidad angular, se establecieron los ángulos de los eslabones que producen los distintos estados del ciclo termodinámico en el motor. Estos estados corresponden a los inicios, puntos intermedios y finales de cada carrera, tomándose un mayor número de puntos intermedios para las carreras de compresión y expansión por ser éstas las que presentan un mayor nivel en los esfuerzos del sistema, gracias a la presión que origina el fluido dentro del cilindro.

Los puntos establecidos para el análisis son:

1. Inicio de la carrera de expansión y final de la compresión: $\alpha = 0$, $\gamma = 45$.
2. Primer octavo de la carrera de expansión: $\alpha = 22,5$, $\gamma = 56,25$.
3. Primer cuarto de la carrera de expansión: $\alpha = 45$, $\gamma = 67,5$.
4. Mitad de la carrera de expansión: $\alpha = 90$, $\gamma = 90$. En este punto, el brazo que realiza el torque es máximo.
5. Final de la carrera de expansión e inicio de la descarga: $\alpha = 180$, $\gamma = 135$.

6. Mitad de la carrera de descarga: $\alpha = 270, \gamma = 180$.
7. Final de la carrera de descarga e inicio de la admisión: $\alpha = 0, \gamma = 225$.
8. Mitad de la carrera de admisión: $\alpha = 90, \gamma = 270$.
9. Final de la carrera de admisión e inicio de la compresión: $\alpha = 180, \gamma = 315$.
10. Mitad de la carrera de compresión: $\alpha = 270, \gamma = 0$.
11. Tres cuartos de la carrera de compresión: $\alpha = 315, \gamma = 22,5$.
12. Siete octavos de la carrera de compresión: $\alpha = 337,5, \gamma = 33,75$.

2.11.1. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES DEL PISTÓN

El pistón posee un movimiento vertical, restringido por el eje del cilindro. Como una simplificación se asume que el centro de masa del pistón coincide con el punto A, por ende las ecuaciones que describen la trayectoria, velocidad y aceleración del punto A, se aplican de la misma forma para el pistón.

Dados los valores de revolución del eje de salida de potencia, los ángulos α y γ y los valores de las longitudes de las excéntricas 1 y 2 y la biela, se puede calcular la aceleración del pistón mediante la ecuación:

$$\overline{A_A} = -(L\ddot{\beta}\sin\beta + L\dot{\beta}^2\cos\beta + E_1\ddot{\alpha}\sin\alpha + E_1\dot{\alpha}^2\cos\alpha + E_2\ddot{\gamma}\sin\gamma + E_2\dot{\gamma}^2\cos\gamma)\hat{j} \rightarrow (Ec.2.11.1.1)$$

donde

$$\dot{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.1.2)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\alpha} \cdot E_1 \cdot \cos\alpha + \dot{\gamma} \cdot E_2 \cdot \cos\gamma}{L \cdot \cos\beta} \rightarrow (Ec.2.11.1.3)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\alpha}}{2} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.1.4)$$

$$\ddot{\alpha} = 0 \rightarrow (Ec.2.11.1.5)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\ddot{\alpha} \cdot E_1 \cdot \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot E_1 \cdot \sin\alpha + \ddot{\gamma} \cdot E_2 \cdot \cos\gamma - \dot{\gamma}^2 \cdot E_2 \cdot \sin\gamma + L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin\beta}{L \cdot \cos\beta} \rightarrow (Ec.2.11.1.6)$$

$$\ddot{\gamma} = 0 \rightarrow (Ec.2.11.1.7)$$

Simplificando se obtiene:

$$\overline{A_A} = -(L \cdot \ddot{\beta} \cdot \sin \beta + L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos \beta + E_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + E_2 \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \cos \gamma) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.11.1.8)$$

donde

$$\dot{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.1.9)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\alpha} \cdot E_1 \cdot \cos \alpha + \dot{\gamma} \cdot E_2 \cdot \cos \gamma}{L \cdot \cos \beta} \rightarrow (Ec.2.11.1.10)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\alpha}}{2} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.1.11)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{-\dot{\alpha}^2 \cdot E_1 \cdot \sin \alpha - \dot{\gamma}^2 \cdot E_2 \cdot \cos \gamma + L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \sin \beta}{L \cdot \cos \beta} \rightarrow (Ec.2.11.1.12)$$

2.11.2. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES DEL CIGÜEÑAL PRINCIPAL

El centro de masa del cigüeñal principal se ubica sobre el eje de rotación de este. Puesto que dicho centro no experimenta un movimiento de traslación, queda sujeto a tierra en este punto, para solo rotar sobre su eje. En adición, puesto que las velocidades angulares se han supuesto constantes, este cuerpo no experimentará aceleración alguna.

2.11.3. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES CIGÜEÑAL SECUNDARIO

Como se expuso en secciones previas, los orificios que se encuentran en el cigüeñal secundario, tienen como objetivo el balanceo dinámico de este elemento, por ende, su centro de masa se encuentra sobre el eje del cilindro hueco que lo acopla al cigüeñal principal. En consecuencia, la trayectoria descrita por los puntos pertenecientes al cigüeñal secundario es una composición del movimiento de traslación circular de su centro de masa y de la rotación sobre su propio eje que le

imprimen la biela y el piñón. Entonces, la ecuación de la aceleración desarrollada para el punto C de la cadena cinemática, corresponde también a la aceleración que experimenta el centro de masa del cigüeñal secundario.

Dados los valores de velocidad angular constante, los ángulos y las longitudes de los eslabones, se determinan las aceleraciones del cigüeñal secundario para cada uno de los punto de estudio.

$$\overline{A_c} = \dot{\alpha}^2 \cdot \overline{CB} + \ddot{\alpha} \times \overline{BC} \rightarrow (Ec.2.11.3.1)$$

donde

$$\dot{\alpha} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.3.2)$$

$$\ddot{\alpha} = 0 \rightarrow (Ec.2.11.3.3)$$

$$\overline{BC} = E_1 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \hat{i} + E_1 \cdot \cos \alpha \cdot \hat{j} \rightarrow (Ec.2.11.3.4)$$

Simplificando

$$A_c = -(\dot{\alpha}^2 \cdot E_1 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \hat{i} + \dot{\alpha}^2 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha \cdot \hat{j}) \rightarrow (Ec.2.11.3.5)$$

donde

$$\dot{\alpha} = ctte \rightarrow (Ec.2.11.3.6)$$

2.11.4. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES DE LA BIELA

El punto de unión entre el cigüeñal secundario y la biela coincide con el punto D, es por esto que las aceleraciones en este punto para ambos objetos es la misma. Análogamente, la cabeza de la biela se acopla al pistón en el punto A, es por esto, que se puede entonces relacionar las aceleraciones de ambos puntos para conocer la aceleración del centro de masa del elemento. De las ecuaciones desarrolladas en la sección de análisis de aceleración se tiene que la aceleración para el centro de gravedad de la biela está dado por:

$$\overline{A_{CM.BIELA}} = -(E_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \text{sen } \alpha + Cb \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \text{sen } \gamma) \hat{i} + (E_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha + Cb \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \cos \gamma) \hat{j} \rightarrow (Ec.2.11.4.1)$$

Donde:

$A_{CM\ BIELA}$ = aceleración del centro de masa de la biela

C_b = distancia del punto C al centro de masa de la biela

Teniendo las ecuaciones en función de los ángulos α β y γ , encontraremos la aceleración para cada punto de interés, para con esto y lo anteriormente definido, resolver el sistema de ecuaciones de fuerzas anteriormente planteadas.

A continuación se simplificarán las ecuaciones de fuerzas que ya fueron planteadas para cada componente del sistema, sustituyendo los valores de las constantes, los valores de los ángulos α , β y γ para cada punto seleccionado para el análisis, y de las variables que dependan a su vez de los ángulos, o lo que es lo mismo, los valores de las variables en cada situación de evaluación de las fuerzas.

2.12. DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS.

Para cada uno de los componentes del mecanismo se presentarán las correspondientes ecuaciones de fuerzas y momentos, para la resolución a posterior del sistema de ecuaciones total.

2.12.1. ECUACIONES DE FUERZAS PARA EL PISTÓN.

El pistón sólo presenta movimiento a lo largo del cilindro, su eje de movimiento es el eje de las ordenadas “y”, por lo que su aceleración es nula en el eje de las abscisas, y no presenta ecuación de momento. Las ecuaciones para el pistón:

$$-F_{GX} - F_{AX} = m_p \cdot A_{px} \rightarrow (Ec.2.12.1.1)$$

$$F_{AY} - F_{GY} - P_p = m_p \cdot A_{py} \rightarrow (Ec.2.12.1.2)$$

Donde: la masa del pistón $m_p = 685 \text{ gr} = 0.685 \text{ Kg}$, la aceleración del pistón en el eje x, $A_{px} = 0$, y la aceleración del pistón en el eje y (A_{py}) depende del posicionamiento del mecanismo, es decir de los ángulos α , β y γ .

Entonces nos queda:

$$-F_{GX} - F_{AX} = 0 \rightarrow (Ec.2.12.1.3)$$

$$F_{AY} - F_{GY} - P_p = 0.685 \cdot A_{py} \rightarrow (Ec.2.12.1.4)$$

2.12.2. ECUACIONES DE FUERZAS PARA LA BIELA.

El pie de la biela permanece unido al cigüeñal secundario y su cabeza al pistón, para la biela se presenta movimiento tanto en el eje de las abscisas como en el eje de ordenadas, y se realizó sumatoria de momento en el punto A, el cual corresponde al punto de unión de la biela con el pistón. Las ecuaciones para la biela son:

$$F_{AX} + F_{DX} = m_b \cdot A_{bx} \rightarrow (Ec.2.12.2.1)$$

$$F_{DY} - F_{AY} - P_b = m_b \cdot A_{by} \rightarrow (Ec.2.12.2.2)$$

$$\sum M_A = -P_b \cdot \left(\frac{L}{2} \cdot \sin \beta \right) + F_{DY} \cdot (L \cdot \sin \beta) + F_{DX} \cdot (L \cdot \cos \beta) = I_b \cdot \ddot{\beta} \rightarrow (Ec.2.12.2.3)$$

Donde:

$$m_b = 627 \text{ gr} = 0.627 \text{ Kg}$$

β = ángulo que forma la biela o el segmento AD con el eje vertical.

A_{bx}, A_{by} dependen del punto de evaluación de las fuerzas, y son las aceleraciones de la biela en el eje de las abscisas y ordenadas respectivamente.

β doble punto = aceleración angular de la biela y depende del punto de evaluación.

L = longitud del punto A al punto D de la biela = 153.1 mm = 0.1531 m

I_b = es el momento de inercia de la biela respecto al punto A.

Nos queda:

$$F_{AX} + F_{DX} = 0.627 \cdot A_{bx} \rightarrow (Ec.2.12.2.4)$$

$$F_{DY} - F_{AY} - P_b = 0.627 \cdot A_{by} \rightarrow (Ec.2.12.2.5)$$

$$\sum M_A = -P_b \cdot \left(\frac{0.1531}{2} \cdot \sin \beta \right) + F_{DY} \cdot (0.1531 \cdot \sin \beta) + F_{DX} \cdot (0.1531 \cdot \cos \beta) = I_b \cdot \ddot{\beta} \rightarrow (Ec.2.12.2.6)$$

2.12.3. ECUACIONES DE FUERZAS PARA EL CIGÜEÑAL PRINCIPAL.

A través del cigüeñal principal se realiza la salida de la potencia generada por el proceso de combustión dentro de la cámara, éste presenta las ecuaciones de fuerzas en el eje de las abscisas y ordenadas, además de la sumatoria de momentos en el punto B, que coincide con el eje de rotación del cigüeñal principal. Las ecuaciones son:

$$F_{BX} - F_{CX} = m_{E1} \cdot A_{E1X} \rightarrow (Ec.2.12.3.1)$$

$$F_{BY} - F_{CY} - P_{E1} = m_{E1} \cdot A_{E1Y} \rightarrow (Ec.2.12.3.2)$$

$$\sum M_B = -P_{E1} \cdot \left(\frac{E_1}{2} \cdot \cos(90 - \alpha) \right) - F_{CY} \cdot (E_1 \cdot \cos(90 - \alpha)) + F_{CX} \cdot (E_1 \cdot \sin(90 - \alpha)) = I_{E1} \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow (Ec.2.12.3.3)$$

Donde:

m_{E1} = es la masa del cigüeñal principal = 11495.7 gr = 11.4957 Kg.

A_{E1x} y A_{E1y} = son las aceleraciones del cigüeñal principal en los ejes x e y, dependen del punto de estudio.

E_1 = distancia del centro del piñón o del eje de salida de la potencia al centro de la corona del cigüeñal secundario (excentricidad principal) = 27.125 mm = 0.027125 m.

α = es el ángulo que forma el segmento BC con la vertical.

α doble punto = aceleración angular del cigüeñal principal.

I_{E1} = es el momento de inercia del cigüeñal principal respecto al punto B.

Quedando:

$$F_{BX} - F_{CX} = 114957 \cdot A_{E1X} \rightarrow (Ec.2.12.3.4)$$

$$F_{BY} - F_{CY} - P_{E1} = 114957 \cdot A_{E1Y} \rightarrow (Ec.2.12.3.5)$$

$$\sum M_B = -P_{E1} \cdot \left(\frac{0.02712}{2} \cdot \cos(90 - \alpha) \right) - F_{CY} \cdot (0.02712 \cdot \cos(90 - \alpha)) + F_{CX} \cdot (0.027125 \cdot \sin(90 - \alpha)) = I_{E1} \cdot \ddot{\alpha} \rightarrow (Ec.2.12.3.6)$$

2.12.4. ECUACIONES DE FUERZAS PARA EL CIGÜEÑAL SECUNDARIO.

Para el cigüeñal secundario se realizó sumatoria de momento en el punto C que es el centro de la corona que presenta el cigüeñal secundario. Además del momento también tenemos las ecuaciones en los ejes x e y:

$$F_{CX} - F_{DX} - F_{OX} = m_{E2} \cdot A_{E2X} \rightarrow (Ec.2.12.4.1)$$

$$F_{CY} - P_{E2} - F_{DY} + F_{OY} = m_{E2} \cdot A_{E2Y} \rightarrow (Ec.2.12.4.2)$$

$$\sum M_C = F_{OX}(2 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha) + F_{OY}(2 \cdot E_1 \cdot \sin \alpha) - F_{DY}(E_2 \cdot \sin \gamma) + F_{DX}(E_2 \cdot \cos \gamma) = I_{E2} \cdot \ddot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.12.4.3)$$

Donde:

m_{E2} = masa del cigüeñal secundario = 1118.6 gr = 1.1186 Kg

A_{E2x} , A_{E2y} = aceleraciones del cigüeñal secundario, dependen del punto a estudiar.

E_2 = distancia del centro de la corona al centro de la unión con la biela (excentricidad secundaria) = 7 mm = 0.007 m.

P = segmento OB = segmento BC = E_1 .

γ = ángulo que forma el segmento CD con la vertical.

$\ddot{\gamma}$ = aceleración angular del cigüeñal secundario.

I_{E2} = momento de inercia del cigüeñal secundario respecto al punto D.

Con esto:

$$\sum M_C = F_{OX}(2 \cdot 0.027125 \cdot \cos \alpha) + F_{OY}(2 \cdot 0.027125 \cdot \sin \alpha) - F_{DY}(0.007 \cdot \sin \gamma) + F_{DX}(0.007 \cdot \cos \gamma) = I_{E2} \cdot \ddot{\gamma} \rightarrow (Ec.2.12.4.6)$$

$$F_{CX} - F_{DX} - F_{OX} = 1.1186 \cdot A_{E2X} \rightarrow (Ec.2.12.4.4)$$

$$F_{CY} - P_{E2} - F_{DY} + F_{OY} = 1.1186 \cdot A_{E2Y} \rightarrow (Ec.2.12.4.5)$$

Las ecuaciones planteadas anteriormente, constituyen el sistema de ecuaciones que calcula las fuerzas para cada valor de revoluciones por minuto del eje de salida de la potencia y para cada posición del pistón seleccionada. Los sistemas se resolverán mediante el programa Excel, para buscar el punto crítico donde la fuerza en los dientes de los engranes sea máxima, y con esta proceder a evaluar los esfuerzos.

El sistema de ecuaciones posee como incógnitas las fuerzas aplicadas sobre cada uno de los elementos, la resolución de este sistema persigue como fin establecer cual es la condición crítica a la cual opera el motor.

Si analizamos los resultados de las fuerzas calculadas para ciertos valores de revolución del eje de salida de potencia y ciertas condiciones de presión en el cilindro, que se encuentran contenidos en las tablas, podremos observar que el punto del ciclo que genera un mayor nivel de fuerzas sobre los engranajes, se produce al inicio de la carrera de expansión, en el instante en que culmina la combustión. Independientemente de las condiciones de carga a las que esté sometido el motor, durante un ciclo de potencia, el momento de mayor esfuerzo se presentará al iniciar la carrera de expansión.

De la misma forma podemos observar que a medida que las velocidades angulares aumentan las fuerzas sobre los engranajes disminuye, o lo que es lo mismo, a menores revoluciones, mayor torque produce el motor. La transformación de la energía del combustible se traduce entonces en un compromiso entre el torque y la velocidad que adquiere el motor. Como consecuencia de esto, no existe una condición de funcionamiento donde se de un punto crítico que produzca esfuerzos tales que se consideren máximos, puesto que estos pueden siempre ser ligeramente aumentados. Sin embargo, debido a la aplicación del motor y a que la variación entre las fuerzas producidas a bajas revoluciones no es considerable, se establecerá una velocidad de 1000 r.p.m. como punto de referencia para calcular la carga máxima que recibirán los engranajes.

2.13. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS

Ahora estando resueltos todos los sistemas de ecuaciones de las fuerzas, para cada condición de revoluciones por minuto del eje de salida de la potencia y para cada posición del pistón seleccionada, haremos uso de la mayor de las fuerzas obtenida sobre los dientes, para finalmente calcular los esfuerzos sobre los dientes de los engranes, para compararlos con los valores admisibles, y así poder establecer la factibilidad de uso del equipo en estudio.

2.13.1. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS MEDIANTE EL PROGRAMA PROENGINEER.

En los resultados de los cálculos de las fuerzas se pudo observar, que las cargas que actúan sobre los engranajes, son directamente dependientes de las revoluciones a las cuales trabaje el motor, más aún, se pudo observar que a medida que la velocidad de rotación del cigüeñal principal aumenta, el torque producido por el motor disminuye, y por ende la fuerza sobre los engranajes también. Se fijó entonces un valor de revoluciones mínimas correspondientes a 1000 r.p.m. y se asumió que la carga producida a este régimen es la carga crítica que actúa sobre los elementos, debido a que la variación entre dicha carga y las producidas por valores de revoluciones por minuto que se encuentran por debajo de este valor, no es significativa.

Posteriormente y a través de la aplicación de las ecuaciones de las fuerzas, se estimó que los engranajes han de soportar una carga máxima de 5933,156 N. La fuerza estará dirigida sobre la línea de transmisión de la potencia, correspondiente a un ángulo de 20 grados para ruedas dentadas de talla recta, y se proyectará sobre la dirección radial y tangencial con un valor de 2029,258 N y 5575,342 N respectivamente.

Debido a la semejanza en el tipo de carga y las características geométricas del diente, este se puede modelar como una viga empotrada que se encuentra sometida a carga transversal. La componente tangencial producirá una fuerza cortante en las fibras horizontales del diente de igual magnitud y sentido contrario, un par flector cuya magnitud será directamente proporcional a la altura del diente, además de esfuerzos cortantes en las fibras verticales en todo el elemento. La componente radial producirá esfuerzos de compresión sobre las fibras del diente. Una vez calculadas las condiciones de carga bajo las cuales se realizará el análisis de los esfuerzos estáticos en el sistema de engranajes, se procede a realizar dicho análisis a través del uso de programa Proengineer (versión 20), proporcionado por el Instituto de Ingeniería. Los resultados obtenidos de esfuerzos se encuentran en N/mm^2 .

2.13.1.1. Análisis 1

El primero de los análisis de los esfuerzos se le realizó a un cuarto del piñón, este se consideró macizo. Al aplicar la carga de 5933,156 N a una inclinación de 20 grados (de izquierda a derecha) sobre un diente del engranaje se obtuvieron los resultados que se muestran en las figuras 50 y 51.

En la figura se representan las zonas sometidas a un mismo nivel de esfuerzo con un mismo color. El color azul marino corresponde a las zonas del engranaje en las cuales los niveles de los esfuerzos son despreciables cuando se comparan con los esfuerzos producidos en el diente. El color rojo representa el nivel de esfuerzo mayor que se presenta en la pieza, correspondiente a un valor de 785 N/mm^2 .

Una contracción en la sección transversal de un elemento o la presencia de ángulos agudos en una geometría, son factores concentradores de esfuerzos debido a que en estos lugares los valores de los esfuerzos aumentan considerablemente y es aquí donde se origina comúnmente la falla. Como se puede observar la base del diente es la zona más propensa a presentar falla, producto de la geometría del mismo.

FIGURA 50

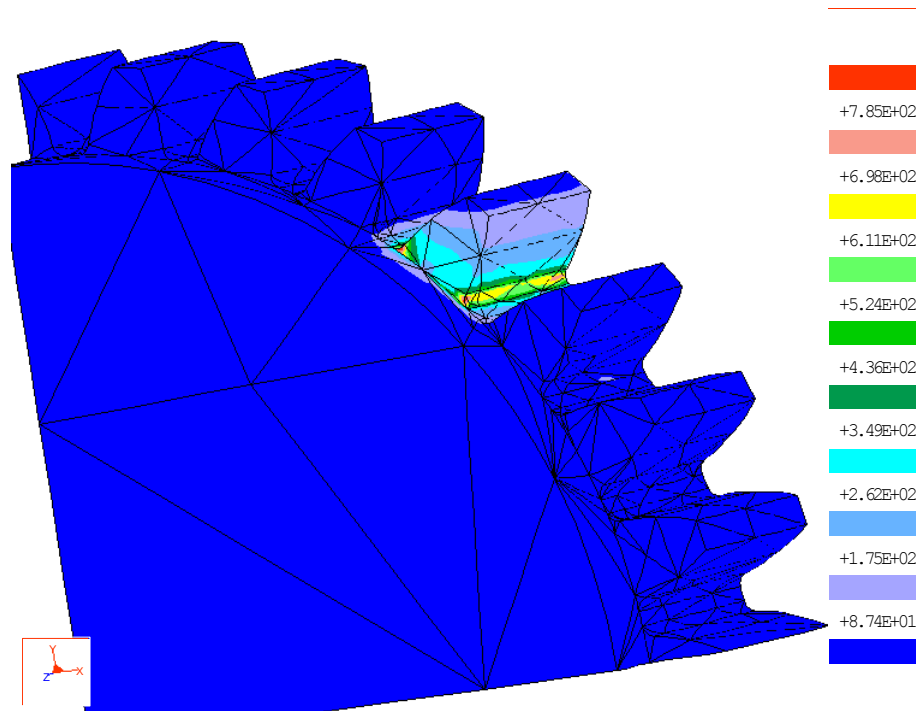
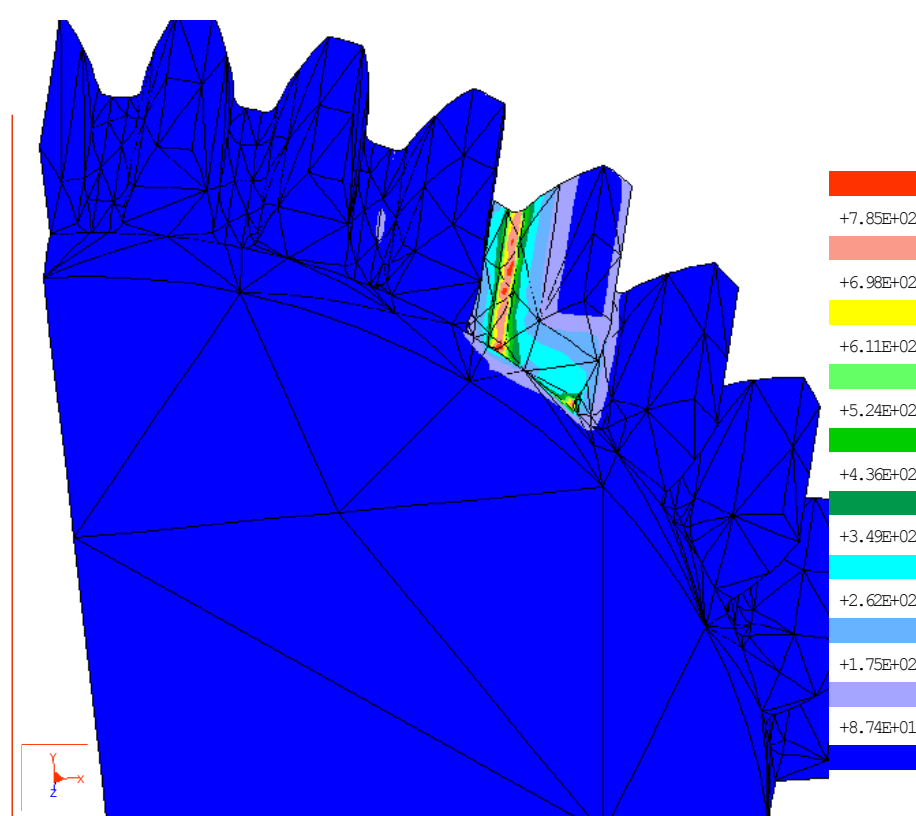


FIGURA 51



2.13.1.2. Análisis 2

El análisis anterior nos muestra que las zonas que están sometidas a mayores esfuerzos pertenecen a la base del diente sobre el cual se aplica la carga. El programa Proengineer realiza una mejor aproximación de los esfuerzos al disminuir el volumen estudiado. Se puede entonces limitar dicho volumen al diente que se encuentra en contacto para el instante dado y a los dos dientes que son adyacentes a este.

Se realizó este segundo análisis tomando tres dientes y la geometría real del piñón, el cual posee un hueco, de esta forma se persigue obtener resultados más exactos. Para disminuir la concentración de esfuerzos en la base del diente se suavizó el ángulo recto al hacer un pequeño redondeado ($r = 0,5 \text{ mm}$) sobre los extremos de la sección transversal del diente. De la misma forma se aplicó sobre un diente una carga de derecha a izquierda con un valor de 5933,156 N, una inclinación de 20 grados. En las figuras 52 y 53 se pueden observar los niveles de los esfuerzos alcanzados, representados por las zonas de distintos colores, cuando se realiza un análisis para carga estática sobre el sistema.

FIGURA 52

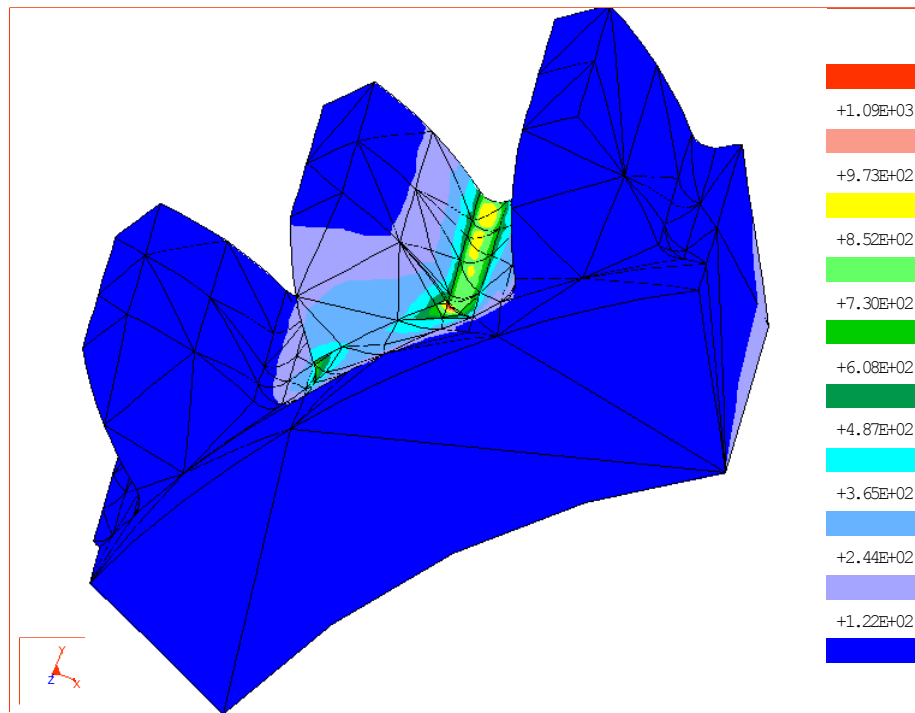
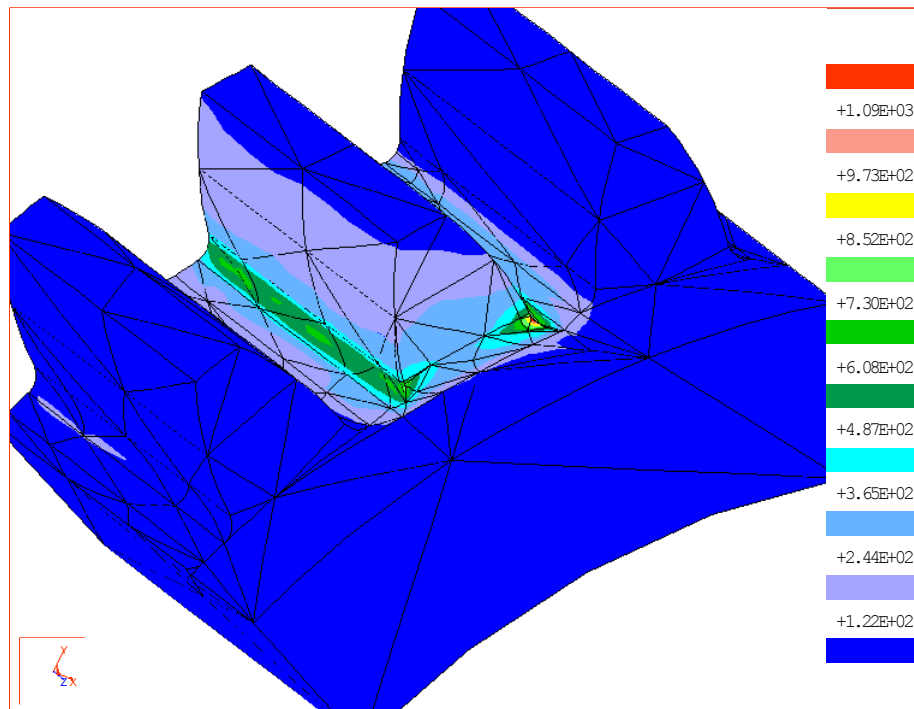


FIGURA 53



Es importante señalar que el Proengineer, como todo programa de cálculo, produce valores aproximados de los esfuerzos y por lo tanto este debe utilizarse como una herramienta o un apoyo que facilite el trabajo de investigación, y no como un ente de carácter infalible. Los verdaderos resultados son producto de la aplicación de los conocimientos adquiridos y del estudio y análisis de los fenómenos que se presentan en los engranajes debido a la aplicación de las fuerzas. Es por esto que a continuación se desarrollará el cálculo de los esfuerzos mediante la aplicación de la ecuación de Lewis, para de esta forma validar los resultados obtenidos previamente.

2.13.2. DETERMINACIÓN DEL ESFUERZO SEGÚN LEWIS.

Para validar los esfuerzos obtenidos mediante el Programa Proengineer para carga tangencial estática, tenemos el esfuerzo según Lewis:

$$\sigma = \frac{W_t \cdot P}{F \cdot Y} \rightarrow (Ec.2.13.2.1)$$

$$W_t = F_o \cdot \cos(20^\circ) \rightarrow (Ec.2.13.2.2)$$

$$W_t = (5933.156 N) \cdot \cos(20^\circ) \rightarrow (Ec.2.13.2.3)$$

$$W_t = (5575.34 N) = (1253.39 Lbf) \rightarrow (Ec.2.13.2.4)$$

σ = esfuerzo según Lewis

W_t es la fuerza tangencial que actúa sobre el diente, F_o es la fuerza total sobre el diente.

P es el paso diametral = 14.51 dientes/pulgada

F es el ancho de cara = 0.51 pulgadas

Y es el factor de forma de Lewis, tomaremos el factor correspondiente al número de dientes del piñón ya que este será menor y nos arrojará un esfuerzo mayor.

Según la tabla 71³, para 31 dientes del piñón $Y = 0.362$

TABLA 71
Valores del factor de forma de Lewis

NÚMERO DE DIENTES	Y	NÚMERO DE DIENTES	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	Cremallera	0.485

Donde el esfuerzo será:

$$\sigma = \frac{(1253.39 \text{ Lbf}) \cdot (14.51 \text{ dientes} / \text{pulg})}{(0.51 \text{ pulg}) \cdot (0.362)} \rightarrow (\text{Ec.2.13.2.5})$$

$$\sigma = 98508.7688 (\text{Psi}) \rightarrow (\text{Ec.2.13.1.6})$$

El esfuerzo según Lewis anteriormente obtenido, se puede observar que se encuentra muy próximo a los esfuerzos máximos calculados mediante los análisis

³ Referencia 19

realizados con el programa Proengineer para carga estática. Ahora debemos incluir el fenómeno de fatiga, que corresponde a la situación real que experimenta el sistema de engranajes durante su funcionamiento.

2.13.3. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS SEGÚN LA AGMA.

En primer lugar, haciendo uso de la formulación presentada en la sección de la teoría de esfuerzos, se determinará el esfuerzo por flexión al cual se encuentran sometidos los dientes:

$$\sigma_t = \frac{W_t \cdot P_d}{F \cdot J} \cdot \frac{K_a \cdot K_s \cdot K_m \cdot K_B}{K_v} \rightarrow (Ec.2.13.3.1)$$

Donde:

W_t es la componente horizontal de la fuerza total que actúa sobre el diente , obtenida anteriormente para el esfuerzo de Lewis = 1253.39 Lbf

P_d es el paso diametral igual al número de dientes del piñón entre el diámetro de paso del piñón en pulgadas:

$$P_d = \frac{N_p}{D_p} = \frac{31 \text{dientes}}{2.1358 \text{pu lg}} = 14.51 \frac{\text{dientes}}{\text{pu lg ada}} \rightarrow (Ec.2.13.3.2)$$

F es el espesor de la cara del diente = 13mm = 0.51 pulgadas

J es el factor de geometría, conociendo que $N_p = 31$ y $N_G = 62$ (Número de dientes de la corona), con la figura 5, obtenemos: $J_{\text{PIÑÓN}} = 0.385$; $J_{\text{CORONA}} = 0.42$.

K_a es el factor de aplicación, para motores de cilindros múltiples la fuente de poder presenta choque moderado y la máquina que es impulsada que sería el carro posee un choque moderado igualmente, haciendo uso de la tabla 1, se tiene $K_a = 2$.

K_s es el factor de tamaño, como el paso diametral es igual a 14.51 dientes/pulgada, utilizando la tabla 2 obtenemos un $K_s = 1$.

K_m es el factor de distribución de carga, sabiendo que el espesor de cara $F = 13\text{mm}$ y que la relación $F/D = \text{espesor de cara} / \text{diámetro de paso del piñón} = 13/54.25 = 0.2396 \approx 0.24$, y apoyándonos en la figura 6 para unidades de engrane cerrado de precisión, $K_m = 1.05$.

K_B es el factor de espesor de la corona, tenemos que la relación entre la distancia del centro de la corona a la base del diente y la altura del diente es igual a $1.2 = 4.85/3.8$, en la figura 7 podemos ver que para esta condición, $K_B = 1$.

K_v es el factor de dinámica, disponiendo de engranes muy precisos, y con una velocidad de línea de paso:

$$v_t = \frac{\pi \cdot D_p \cdot n_p}{12} = \frac{\pi \cdot 2.1358 \text{ pulgadas} \cdot 0 \text{ rpm}}{12} = 0 \frac{\text{pies}}{\text{minuto}} \rightarrow (Ec.213.3.3)$$

Donde:

v_t es la velocidad de línea de paso

D_p es el diámetro de paso del piñón

n_p son las revoluciones por minuto del piñón

De lo anterior y la figura 8, obtenemos: $K_v = 1$.

Finalmente el esfuerzo por flexión será:

$$\sigma_{tp} = \frac{(1253.39 \text{ Lbf}) \cdot 14.51}{(0.51 \text{ pulgadas}) \cdot (0.385)} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot 1}{1} \rightarrow (Ec.213.3.4)$$

$$\sigma_{tp} = 194510.04 (\text{Psi}) \rightarrow (Ec.213.3.5)$$

$$\sigma_{tg} = \frac{(1253.39 \text{ Lbf}) \cdot 14.51}{(0.51 \text{ pulgadas}) \cdot (0.42)} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot 1}{1} \rightarrow (Ec.213.3.6)$$

$$\sigma_{tg} = 178300.87 (\text{Psi}) \rightarrow (Ec.213.3.7)$$

Donde σ_{tp} y σ_{tg} son los esfuerzos por flexión del piñón y el engrane o corona respectivamente. La tensión en los dientes del piñón siempre será más alta que la

tensión en los dientes del engrane porque el valor de J se incrementa conforme aumenta el número de dientes.

Ahora se hallará el esfuerzo que se produce en la cara de los dientes por el contacto entre ellos:

$$\sigma_c = C_p \cdot \sqrt{\frac{C_a \cdot C_s \cdot C_m \cdot W_t}{C_v \cdot F \cdot D_p \cdot I}} \rightarrow (Ec.213.38)$$

Donde:

W_t es la componente horizontal de la fuerza total

$$C_a = K_a$$

$$C_s = K_s$$

$$C_m = K_m$$

$$C_v = K_v$$

C_p es el coeficiente elástico, teniendo que el piñón y la corona son de acero, y con la tabla 3, tenemos que $C_p = 2300 \text{ libras/pulgadas}^2 = 191 \text{ Mpa}$.

I es el factor de geometría, apoyándonos en la figura 9 y sabiendo que $N_p = 31$, y la relación de engrane $N_G / N_p = 62/31 = 2$, se obtiene que:

Para la corona: $I = 0.118$

Y para el piñón: $I = 0.102$.

Finalmente el esfuerzo por contacto será:

$$\sigma_{cp} = 2300 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot (1253.39 \text{ Lbf})}{1 \cdot (0.51 \text{ pulg}) \cdot (2.1358 \text{ pulg}) \cdot 0.102}} \rightarrow (Ec.2.13.3.9)$$

$$\sigma_{cp} = 354009.67 (\text{Psi}) \rightarrow (Ec.2.13.3.10)$$

$$\sigma_{cg} = 2300 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot (1253.39 \text{ Lbf})}{1 \cdot (0.51 \text{ pulg}) \cdot (2.1358 \text{ pulg}) \cdot 0.118}} \rightarrow (Ec.2.13.3.11)$$

$$\sigma_{cg} = 329135.11 (\text{Psi}) \rightarrow (Ec.2.13.3.12)$$

Donde σ_{cp} y σ_{cg} son los esfuerzos por contacto del piñón y el engrane o corona respectivamente.

Con los esfuerzos por flexión y contacto obtenidos anteriormente, se procede ahora a buscar un material (acero) que soporte dichos esfuerzos. Al buscar en distintas tablas de libros cuyos autores son Mott, Shigley y Philip de propiedades mecánicas de aceros tratados térmicamente y no tratados, nos damos cuenta que los esfuerzos calculados son extremadamente grandes para la resistencia que presentan los materiales antes nombrados. Lo último se puede atribuir a que estamos obteniendo fuerzas en los dientes de los engranajes a partir de la utilización de presiones de un ciclo termodinámico ideal cuyas presiones se encuentran considerablemente por encima de las reales.

Por lo antes mencionado, nos damos cuenta de lo poco rentable que sería buscar un material que soporte esos esfuerzos tan grandes, por lo que procederemos a buscar las presiones máximas que soportaría el acero 4142 del cual están contruídos los engranajes, donde:

Para el acero 4142: (según especificaciones aceros BOHLER Tabla. 72)⁴

$$S_y = 99561 \text{ (psi)}$$

$$S_{ut} = 135118 \text{ (psi)}$$

Donde:

S_y = límite de fluencia

S_{ut} = resistencia última a la tracción

TABLA 72 Especificaciones del catálogo FERRUM
Propiedades del acero 4142

ACERO "BOHLER * VCL 140" COLOR DE IDENTIFICACION: VERDE - ROJO				
Aleación:				
C%	Si%	Mn%	Cr%	Mo%
0.41	0.30	0.70	1.1	0.20
Denominación según:				
DIN:	41 CrMo 4 W N ^º = 1.7223	AISI = 4140	BOHLER = V 320	
	42 CrMo 4 W N ^º = 1.7225	AISI = 4140 H.	BOHLER = V 320	
Acero especial para bonificación con aleación al cromo-molibdeno. Muy resistente a la torsión; buena resistencia al desgaste y al impacto. Se suministra en estado bonificado lo que permite, en la mayoría de los casos, su aplicación sin necesidad de tratamiento termico adicional. Utilizable en temperaturas de hasta 450 C, sin perder su bonificación. Equivalente a AISI 4142 y ASTM A-193 Grado B7; indicado cuando se exige alta resistencia a la tracción y alta tenacidad.				
Aplicaciones:				
Amplia aplicación en la construcción de vehículos, engranajes y motores. Partes de maquinarias y repuestos, tales como arboles de transmisión, brazos de ejes, ejes de bomba, ejes cardan, cigueñales, pernos y tuercas, bielas, arboles, pines, plunger, embolos, etc., como las aplicaciones del VCN 150, pero donde las exigencias son menos estrictas. Para moldes para la inyección de plástico.				
CARACTERISTICAS MECANICAS				
Estado de entrega:	Bonificado a 95 - 115 Kg./mm ² y liberado de tensiones.			
Resistencia a la tracción:	95-115 Kg./mm ² . (135.118 - 163.564 psi).			
Límite de fluencia:	70 - 90 Kg./mm ² . (99.561 - 128.007 psi).			
Alargamiento:	min. 10%			
Contracción:	min. 40%			
Resiliencia:	(DVM) min. 5 Kgm/cm ² .			
Mecanizado:	Se puede mecanizar con buriles de acero rápido.			

⁴ Referencia 6

Despejando de la ecuación de esfuerzo por flexión la carga tangencial nos queda:

$$W_t = \frac{\sigma_t \cdot F \cdot J \cdot K_v}{P_d \cdot K_a \cdot K_s \cdot K_m \cdot K_B} \rightarrow (Ec.2.13.3.13)$$

Donde el esfuerzo por flexión lo haremos igual al esfuerzo admisible, con la restricción de que las fuerzas que actúen sobre los dientes deben estar por debajo de la que obtengamos, entonces tenemos:

$$\sigma_t = \sigma_{adm} = \frac{S_y}{FS} \rightarrow (Ec.2.13.3.14)$$

$$\sigma_t = \frac{99561(psi)}{1.5} = 66374(psi) \rightarrow (Ec.2.13.3.15)$$

Donde:

S_y = límite de fluencia

FS = factor de seguridad

σ_t = esfuerzo por flexión

σ_{adm} = esfuerzo admisible

La fuerza tangencial será:

$$W_t = \frac{66374(psi) \cdot (0.51 pu lg) \cdot 0.385 \cdot 1}{(14.51 diente / pu lg \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot 1)} \rightarrow (Ec.2.13.3.16)$$

$$W_{t2} = 427.7(Lbf) = 1902.51(N) \rightarrow (Ec.13.3.17)$$

La fuerza total que actúa sobre los dientes:

$$F_o = \frac{W_t}{\cos(20^\circ)} = \frac{1902.51(N)}{\cos(20^\circ)} = 2024.6(N) \rightarrow (Ec.2.13.3.18)$$

Ahora sabiendo que para una presión máxima luego de la combustión de 1160 psi la fuerza que actúa sobre los dientes es igual a 5933.17 N, por semejanza para una fuerza en los dientes igual a 2024.6 N, obtenemos una presión al final de la combustión igual a 395.83 psi. Según lo antes planteado, para que los engranajes no fallen la presión no debe alcanzar nunca el valor citado anteriormente.

De la tabla 73⁵, podemos extraer que la presión máxima luego de la combustión para un motor Otto de encendido por chispa con una relación de compresión entre 7 y 10, es de aproximadamente 52 Kgf/cm² = 740 psi. Podemos utilizar este valor como válido para nuestro motor ya que posee una relación de compresión de 8.8 y los procesos de compresión y combustión son similares.

Para una presión de 740 psi la fuerza total sobre los engranajes según nuestro programa de excel tabla 70 del Capítulo II, será de 3768.81 N, de donde la fuerza tangencial:

$$W_t = 3768.81 \cdot \cos(20^\circ) = 3541.52(N) = 796.16(Lbf) \rightarrow (Ec.213.3.19)$$

Los esfuerzos por flexión y contacto serán:

$$\sigma_{tp} = \frac{(796.16Lbf) \cdot 14.51(diente / pulg) \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot 1}{1}}{(0.51pulg) \cdot (0.385)} \rightarrow (Ec.213.3.20)$$

$$\sigma_{tp} = 123553.81(Psi) \rightarrow (Ec.213.3.21)$$

$$\sigma_{cg} = 2300Lbf / pulg^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 1.05 \cdot 796.16Lbf}{1 \cdot 0.51pulg \cdot 2.1358pulg \cdot 0.102}} \rightarrow (Ec.213.3.22)$$

$$\sigma_{tg} = 282144.9(Psi) \rightarrow (Ec.213.3.23)$$

⁵ Referencia 7

TABLA 73
Valores de Presiones y relaciones de compresión Otto y Diesel

Presiones: kg/cm ²	Motores para aviación		Motores para autotracción			Motores fijos y marinos	
	Otto	Diesel	Otto	Otto (a gas)	Diesel	Otto (a gas)	Diesel
Final de aspiración $p_1 = 1$.							
Final de compresión p_2 ...	8-12	30-60	8,5-13	12-14	35-45	10-18	30-40
Máxima de combustión p_3 .	30-60	55-100	38-52	40-50	55-70	20-40	60-70
Final de expansión p_4	4,5-5,5	3,5	4-5	4-5	3	3-4	2,5-3,5
Relación de compresión ...	5,5-7,5	12-20	7-10	7-10	12-22	6-10	12-14

Para estos valores de esfuerzos, según la tabla 74⁶ se seleccionó un acero 4140 normalizado a 870 °C, recocido a 845 °C, templado en aceite y revenido a 205 °C, con las siguientes propiedades:

$$S_y = 252000 \text{ (psi)}$$

$$S_{ut} = 285000 \text{ (psi)}$$

Donde el esfuerzo admisible es:

$$\sigma_{adm} = \frac{S_y}{FS} \rightarrow (Ec.2.13.3.24)$$

$$\sigma_t = \frac{252000(\text{psi})}{1.5} = 168000(\text{psi}) \rightarrow (Ec.2.13.3.25)$$

⁶ Referencia 15

TABLA 74
Propiedades para el acero 4140 tratado térmicamente

AISI 4140, 4140H: Typical Room-Temperature Tensile Properties of Annealed, Normalized, and Hardened Bar (Ref 8) Test specimens were oil-hardened and tempered, 25-mm (1-in.) rounds										
Condition or treatment	Tempering temperature		Tensile strength		Yield strength		Elongation(a), %	Reduction in area, %	Hardness, HB	Izod impact energy
	°C	°F	MPa	ksi	MPa	ksi				J ft·lb
Annealed.....	...	...	655	95	485	70	26.0	52	185-200	
Heat treated, oil-quenched, and tempered.....	205	400	1795	260	1515	220	8.0	32	520	14 10
	315	600	1585	230	1345	195	11.0	40	455	9 7
	425	800	1380	200	1170	170	15.0	48	385	22 16
	540	1000	1140	165	965	140	18.0	56	320	61 45
	650	1200	931	135	793	115	22.0	63	255	110 80
Normalized at 870 °C (1600 °F); reheated to 845 °C (1550 °F); quenched in oil; tempered.....	205	400	1965	285	1735	252	11.0	42	578	15 11
	260	500	1860	270	1655	240	11.0	44	534	11 8
	315	600	1725	250	1572	228	11.5	46	495	9 7
	370	700	1595	231	1460	212	12.5	48	461	15 11
	425	800	1450	210	1345	195	15.0	50	429	28 21
	480	900	1295	188	1205	175	16.0	52	388	46 34
	540	1000	1150	167	1050	152	17.5	55	341	65 48
	595	1100	1020	148	910	132	19.0	58	311	94 69
	650	1200	896	130	786	114	21.0	61	277	115 83
	705	1300	807	117	689	100	23.0	65	235	135 100

a) In 50 mm (2 in.)

De la última ecuación podemos observar que el esfuerzo admisible es mayor que el esfuerzo obtenido por flexión sobre los dientes igual a 123553.81 psi, con lo cual se garantiza que no fallen. Con la selección de este último material se da por finalizado el análisis de los esfuerzos, para ahora realizar la interpretación de los resultados obtenidos.

CONCLUSIONES

1. El nivel de los valores de los esfuerzos varía directamente con las presiones que se manejen dentro del cilindro. El mayor valor de la presión para un ciclo, independientemente de la carga, se produce de forma invariable luego de la combustión, al comienzo de la carrera de expansión.
2. Las características geométricas del motor producen que los mayores esfuerzos sean soportados por un mismo diente, siendo este el que posea mayor propensión a la falla.
3. El análisis estático de las fuerzas que actúan sobre los dientes del sistema de engranajes, se realizó mediante el programa Proengineer y con la ecuación de Lewis, encontrando que los valores de los esfuerzos arrojados por el programa son mayores que los obtenidos a través de la ecuación de Lewis.
4. Del estudio de los esfuerzos sobre los engranajes a través de las ecuaciones de la AGMA que consideran el fenómeno de fatiga, para un valor de presión sobre el pistón después de la combustión correspondiente al ciclo ideal, se consiguieron valores de esfuerzos elevados, donde por razones técnicas y sobretodo económicas, no se seleccionó ningún material que soportara la sollicitación antes planteada.
5. La presión máxima que soportaría el acero 4142 del cual están contruidos los engranajes, es menor a la que presenta un motor Otto de condiciones similares al motor LUGO, aunque debido al sobrediseño no se puede descartar del todo la posibilidad de que este material aguante las cargas a las cuales se vea sometido.
6. Según la presión máxima correspondiente a las condiciones de un motor Otto las cuales son semejantes a las del motor LUGO, se seleccionó un acero que soporta los esfuerzos y nos garantiza el óptimo funcionamiento del mecanismo.
7. Se debe resaltar la variabilidad que se puede presentar en el análisis debido a los factores de diseño, que se ven directamente afectados por el punto de vista y apreciación de cada individuo.

RECOMENDACIONES

1. Se debe estudiar la posibilidad de aumentar el ancho de cara de los dientes, lo cual proporciona un sistema de engranajes más resistente, en donde se requiera un material menos costoso, con menos tratamientos. Este hecho se ve limitado principalmente por el espacio, ya que un motor de combustión interna debe ser lo más compacto posible.
2. Para obtener un análisis más preciso, se podrían realizar pruebas que arrojen el diagrama indicado del motor, que no es más que la presión en el cilindro en función del ángulo de giro del cigüeñal, en donde se tendrían los valores de presión reales.
3. El análisis realizado fue para condiciones ideales, en donde no existen pérdidas por fricción, ni transferencia de calor, para una mezcla aire-combustible químicamente correcta, etc, éste se podría aproximar más a la realidad, con el fin de obtener valores más cercanos a los que se presentan. Además, las presiones máximas alcanzadas dentro del cilindro, son proporcionales a como varíe la relación de compresión, la cual se ve afectada a su vez por las posibles fugas.
4. El análisis fue realizado considerando un mecanismo monocilíndrico. El motor LUGO en la realidad presenta dos cilindros, donde cada uno de ellos afectaría el comportamiento del otro y el sistema de ecuaciones de fuerzas se vería afectado.
5. Para el análisis se asumió que las superficies en contacto están perfectamente pulidas y lubricadas, por esto las fuerzas de roce son despreciables. Si se tomaran en cuenta las pérdidas por fricción se obtendrían resultados más cercanos a la realidad.
6. Se pueden obtener resultados más exactos, si se establece que la carga se distribuye entre dos dientes adyacentes, como ocurre entre un piñón y una rueda durante su engrane.
7. Se asumió un perfecto balanceo dinámico, cuando realmente existe la tendencia a la presencia de vibraciones.

BIBLIOGRAFÍA

1. Beer, F., 1982, “Mecánica de materiales”, Editorial Mc Graw-Hill, Colombia.
2. Beer, F., 1987, “Mecánica vectorial para ingenieros”, Editorial Mc Graw-Hill, México.
3. Campabadal, J., 1969, “Engranajes”, Ediciones Ariel, España.
4. Casillas, A., 1975, “Máquinas, Cálculos de taller”, Editorial Hispanoamericana, España.
5. Chandrupatla, T., 1999, “Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería”, Editorial Prentice Hall, México.
6. Ferrum, “Catálogo de aceros industriales especiales BOHLER”, Estuchería Alfa C.A, Caracas.
7. Giacosa, D., 1970, “Motores endotérmicos”, Editorial Científico-Médica, Barcelona.
8. Guillet, 1972, “Cinemática de las máquinas”, Editorial Cecs, México.
9. Jehlicka, J., 1969, “Mecanismos engranes y acoplamientos”, Ediciones Urmo, España.
10. Leithold, L., 1987, “El cálculo con geometría analítica”, Editorial Harla, México.
11. Lichty, L., 1951, “Internal combustion engines”, Editorial Mc Graw-Hill, Tokyo.
12. Mott, R., 1992, “Diseño de elementos de máquinas”, Editorial Prentice Hall, México.
13. Norton, R., 1995, “Diseño de maquinaria”, Editorial Mc Graw-Hill, México.
14. Obert, E., 1997, “Motores de combustión interna”, Editorial Continental, México.
15. Philip, D., 1982, “Engineering properties of steel”, By American Society for Metals, USA.
16. Robb, L., 2000, “Diccionario para ingenieros”, Editorial Cecs, México.
17. Rogowski, A., 1953, “Elements of internal combustion engines”, Editorial Mc Graw-Hill, Nueva York.
18. Shigley, J., 1975, “Análisis cinemático de mecanismos”, Editorial Mc Graw-Hill, México.

19. Shigley, J., 1990, “Diseño en ingeniería mecánica”, Editorial Mc Graw-Hill, México.
20. Spotts, M., 1998, “Elementos de máquinas”, Editorial Prentice Hall, México.
21. Taylor, F., 1971, “The internal combustion engine”, The M.I.T Press, Cambridge.
22. Zienkiewicz, O., 1995, “El método de los elementos finitos”, Editorial Mc Graw-Hill, España.

Aceleración del punto A para 1600 RPM

Punto	E1(mm)	E2 (mm)	L (mm)	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	AA (m/s2)
1	27,125	7,00	153,10	0,00	1,85	45,00	167,55	32,41	83,78	0,00	-193,04	0,00	-956,02
2	27,125	7,00	153,10	22,50	6,07	56,25	167,55	29,72	83,78	0,00	-2088,47	0,00	-831,47
3	27,125	7,00	153,10	45,00	9,64	67,50	167,55	22,78	83,78	0,00	-3780,00	0,00	-538,63
4	27,125	7,00	153,10	90,00	12,88	90,00	167,55	0,00	83,78	0,00	-5431,37	0,00	185,35
5	27,125	7,00	153,10	180,00	1,85	135,00	167,55	-32,41	83,78	0,00	-193,04	0,00	636,45
6	27,125	7,00	153,10	270,00	-10,21	180,00	167,55	-3,89	83,78	0,00	5051,06	0,00	183,86
7	27,125	7,00	153,10	0,00	-1,85	225,00	167,55	26,99	83,78	0,00	203,46	0,00	-837,23
8	27,125	7,00	153,10	90,00	7,55	270,00	167,55	0,00	83,78	0,00	-4693,67	0,00	94,46
9	27,125	7,00	153,10	180,00	-1,85	315,00	167,55	-26,99	83,78	0,00	203,46	0,00	616,29
10	27,125	7,00	153,10	270,00	-10,21	0,00	167,55	3,89	83,78	0,00	5051,06	0,00	85,60
11	27,125	7,00	153,10	315,00	-6,19	22,50	167,55	24,67	83,78	0,00	3348,12	0,00	-621,26
12	27,125	7,00	153,10	337,50	-2,43	33,75	167,55	30,64	83,78	0,00	1686,84	0,00	-877,01

Aceleración del punto C para 1600 RPM

Punto	E1(mm)	α	α	α	Acx (m/s2)	Acy (m/s2)
1	27,125	0,00	167,55	0,00	0,00	-761,49
2	27,125	22,50	167,55	0,00	-291,41	-703,53
3	27,125	45,00	167,55	0,00	-538,46	-538,46
4	27,125	90,00	167,55	0,00	-761,49	0,00
5	27,125	180,00	167,55	0,00	0,00	761,49
6	27,125	270,00	167,55	0,00	761,49	0,00
7	27,125	0,00	167,55	0,00	0,00	-761,49
8	27,125	90,00	167,55	0,00	-761,49	0,00
9	27,125	180,00	167,55	0,00	0,00	761,49
10	27,125	270,00	167,55	0,00	761,49	0,00
11	27,125	315,00	167,55	0,00	538,46	-538,46
12	27,125	337,50	167,55	0,00	291,41	-703,53

Aceleración del Centro de Masa de la biela para 1600 RPM

Punto	E1(mm)	E2 (mm)	L (mm)	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	AA (m/s2)	A centro x	Acentro y
1	27,125	7,00	153,10	0,00	1,85	45,00	167,55	32,41	83,78	0,00	-193,04	0,00	-956,02	-13,38	-868,15
2	27,125	7,00	153,10	22,50	6,07	56,25	167,55	29,72	83,78	0,00	-2088,47	0,00	-831,47	-166,97	-776,12
3	27,125	7,00	153,10	45,00	9,64	67,50	167,55	22,78	83,78	0,00	-3780,00	0,00	-538,63	-306,42	-548,87
4	27,125	7,00	153,10	90,00	12,88	90,00	167,55	0,00	83,78	0,00	-5431,37	0,00	185,35	-445,76	83,42
5	27,125	7,00	153,10	180,00	1,85	135,00	167,55	-32,41	83,78	0,00	-193,04	0,00	636,45	-13,38	724,31
6	27,125	7,00	153,10	270,00	-10,21	180,00	167,55	-3,89	83,78	0,00	5051,06	0,00	183,86	418,30	109,77
7	27,125	7,00	153,10	0,00	-1,85	225,00	167,55	26,99	83,78	0,00	203,46	0,00	-837,23	15,14	-776,48
8	27,125	7,00	153,10	90,00	7,55	270,00	167,55	0,00	83,78	0,00	-4693,67	0,00	94,46	-391,73	42,52
9	27,125	7,00	153,10	180,00	-1,85	315,00	167,55	-26,99	83,78	0,00	203,46	0,00	616,29	15,14	677,03
10	27,125	7,00	153,10	270,00	-10,21	0,00	167,55	3,89	83,78	0,00	5051,06	0,00	85,60	418,30	11,51
11	27,125	7,00	153,10	315,00	-6,19	22,50	167,55	24,67	83,78	0,00	3348,12	0,00	-621,26	274,71	-600,69
12	27,125	7,00	153,10	337,50	-2,43	33,75	167,55	30,64	83,78	0,00	1686,84	0,00	-877,01	138,54	-804,08

2100

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1646,89	-23,06	-1495,53	0	-1311,79	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60444,073	-5443,038	60144,745	-5443,038	60031,973	-14,459	59512,527	5428,579	1975,841	5776,973
2	0	-1432,33	-287,64	-1336,99	-502	-1211,94	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19193,574	-2892,069	17035,622	-2892,069	16922,850	-180,350	18361,432	2150,182	-93,879	2152,230
3	0	-1290,43	-372,14	-1228,8	-655,9	-1136,05	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13718,038	-4985,285	9932,945	-4985,285	9820,172	-233,332	12953,732	4018,264	-1873,747	4433,663
4	0	319,29	-767,9	143,71	-1311,79	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1021,539	-1918,957	1323,648	-1918,957	1210,875	-481,473	1117,796	-29,884	82,106	87,376
5	0	1096,38	-23,06	1247,75	0	1311,79	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4472,898	464,269	6678,260	464,269	6565,487	-14,459	5261,388	-478,728	-174,243	509,451
6	0	316,72	720,58	189,09	1311,79	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1003,856	1919,172	1252,312	1919,172	1139,539	451,804	1128,566	0,000	0,000	0,000
7	0	-1442,25	26,08	-1337,6	0	-1311,79	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-201,038	-76,458	-2343,405	-76,458	-2456,178	16,352	-1033,563	92,810	33,780	98,766
8	0	162,72	-674,82	73,24	-1311,79	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	898,366	-1915,246	1006,142	-1915,246	893,369	-423,112	950,439	24,765	-68,042	72,409
9	0	1061,65	26,08	1166,3	0	1311,79	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1514,133	-190,571	3917,982	-190,571	3805,209	16,352	2251,554	206,923	75,314	220,203
10	0	147,46	720,58	19,83	1311,79	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1891,006	1919,172	2033,336	1919,172	1920,563	451,804	1909,590	0,000	0,000	0,000
11	0	-609,34	630,58	-675,25	1136,05	-655,9	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3039,111	1850,256	1617,140	1850,256	1504,367	395,374	2621,880	-184,097	-394,797	435,610
12	0	-1510,79	238,65	-1385,15	502	-1211,94	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6667,513	-33,540	5255,646	-33,540	5142,873	149,634	5805,175	744,711	682,402	1010,082

2000

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1493,78	-20,91	-1356,49	0	-1189,84	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60548,954	-5459,336	60479,640	-5459,336	60366,867	-13,111	59704,585	5446,225	1982,264	5795,752
2	0	-1299,17	-260,89	-1212,69	-455,33	-1099,26	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19284,788	-2845,080	17329,857	-2845,080	17217,084	-163,578	18530,582	2172,170	-94,839	2174,239
3	0	-1170,46	-337,54	-1114,56	-594,92	-1030,43	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13800,218	-4950,818	10179,047	-4950,818	10066,274	-211,638	13107,540	4073,703	-1899,599	4494,834
4	0	289,6	-696,51	130,35	-1189,84	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1001,201	-1737,029	1297,004	-1737,029	1184,231	-436,712	1089,081	-30,638	84,177	89,579
5	0	994,45	-20,91	1131,74	0	1189,84	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4403,076	452,733	6403,975	452,733	6291,203	-13,111	5118,828	-465,844	-169,553	495,740
6	0	287,28	653,59	171,51	1189,84	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	983,690	1740,756	1221,123	1740,756	1108,350	409,801	1097,377	0,000	0,000	0,000
7	0	-1308,17	23,65	-1213,25	0	-1189,84	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-109,193	-62,627	-2042,768	-62,627	-2155,541	14,829	-863,750	77,455	28,191	82,426
8	0	147,59	-612,08	66,43	-1189,84	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	888,002	-1740,655	988,321	-1740,655	875,548	-383,774	935,805	25,926	-71,230	75,801
9	0	962,95	23,65	1057,86	0	1189,84	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1446,524	-179,583	3641,414	-179,583	3528,641	14,829	2115,953	194,412	70,760	206,889
10	0	133,75	653,59	17,99	1189,84	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1881,614	1740,756	2022,791	1740,756	1910,018	409,801	1899,045	0,000	0,000	0,000
11	0	-552,69	571,95	-612,47	1030,43	-594,92	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3077,917	1697,875	1758,102	1697,875	1645,329	358,613	2700,049	-186,623	-400,215	441,588
12	0	-1370,33	429,24	-1200,56	455,33	-1099,26	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6763,728	-7,697	5631,626	-7,697	5518,854	269,133	6017,128	786,162	720,385	1066,305

2200

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1807,48	-25,31	-1641,35	0	-1439,7	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60334,069	-5425,941	59793,496	-5425,941	59680,723	-15,869	59311,093	5410,072	1969,105	5757,278
2	0	-1571	-315,68	-1467,35	-550,95	-1330,11	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19098,585	-2941,426	16727,716	-2941,426	16614,943	-197,931	18184,707	2127,202	-92,876	2129,229
3	0	-1416,25	-408,42	-1348,61	-719,85	-1246,82	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13631,852	-5021,426	9674,842	-5021,426	9562,069	-256,079	12792,424	3960,122	-1846,635	4369,511
4	0	350,42	-842,77	157,72	-1439,7	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1042,863	-2109,772	1351,584	-2109,772	1238,811	-528,417	1147,904	-29,094	79,934	85,064
5	0	1203,28	-25,31	1369,4	0	1439,7	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4546,124	476,370	6965,923	476,370	6853,150	-15,869	5410,889	-492,239	-179,160	523,830
6	0	347,6	790,84	207,53	1439,7	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1025,009	2106,305	1285,027	2106,305	1172,254	495,857	1161,281	0,000	0,000	0,000
7	0	-1582,88	28,62	-1468,02	0	-1439,7	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-297,370	-90,970	-2658,728	-90,970	-2771,501	17,945	-1211,667	108,915	39,642	115,905
8	0	178,59	-740,62	80,38	-1439,7	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	909,237	-2098,366	1024,833	-2098,366	912,060	-464,369	965,786	23,549	-64,699	68,851
9	0	1165,16	28,62	1280,01	0	1439,7	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1585,038	-202,098	4208,038	-202,098	4095,265	17,945	2393,755	220,042	80,089	234,164
10	0	161,84	790,84	21,76	1439,7	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1900,856	2106,305	2044,396	2106,305	1931,623	495,857	1920,650	0,000	0,000	0,000
11	0	-668,75	692,06	-741,08	1246,82	-719,85	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2998,416	2010,062	1469,316	2010,062	1356,543	433,922	2539,909	-181,447	-389,115	429,341
12	0	-1658	261,92	-1520,2	550,95	-1330,11	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6566,674	57,182	4918,358	57,182	4805,586	164,224	5619,659	723,335	662,814	981,089

1900

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1348,14	-18,87	-1224,23	0	-1073,83	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60648,717	-5474,842	60798,208	-5474,842	60685,436	-11,831	59887,276	5463,011	1988,373	5813,615
2	0	-1172,5	-235,46	-1094,45	-410,94	-992,09	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19371,557	-2800,396	17609,730	-2800,396	17496,957	-147,633	18691,488	2193,085	-95,752	2195,174
3	0	-1056,34	-304,63	-1005,9	-536,91	-929,96	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13878,390	-4918,028	10413,145	-4918,028	10300,372	-191,003	13253,842	4126,437	-1924,189	4553,020
4	0	261,37	-628,6	117,64	-1073,83	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	981,864	-1563,963	1271,668	-1563,963	1158,895	-394,132	1061,775	-31,355	86,147	91,676
5	0	897,49	-18,87	1021,4	0	1073,83	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4336,658	441,757	6143,067	441,757	6030,294	-11,831	4983,227	-453,588	-165,093	482,698
6	0	259,27	589,86	154,8	1073,83	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	964,503	1571,028	1191,459	1571,028	1078,686	369,842	1067,713	0,000	0,000	0,000
7	0	-1180,62	21,35	-1094,96	0	-1073,83	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-21,822	-49,462	-1756,776	-49,462	-1869,549	13,386	-702,211	62,848	22,875	66,881
8	0	133,2	-552,4	59,95	-1073,83	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	878,145	-1574,570	971,368	-1574,570	858,596	-346,355	921,885	27,029	-74,262	79,028
9	0	869,06	21,35	954,72	0	1073,83	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1382,209	-169,125	3378,330	-169,125	3265,557	13,386	1986,969	182,512	66,429	194,225
10	0	120,71	589,86	16,23	1073,83	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1872,682	1571,028	2012,755	1571,028	1899,982	369,842	1889,009	0,000	0,000	0,000
11	0	-498,8	516,19	-552,75	929,96	-536,91	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3114,831	1552,932	1892,196	1552,932	1779,423	323,651	2774,408	-189,027	-405,370	447,276
12	0	-1236,73	195,36	-1133,87	410,94	-992,09	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6855,244	-202,329	5883,312	-202,329	5770,539	122,491	6150,458	784,498	718,860	1064,047

10	0	176,88	864,37	23,79	1573,56	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1911,158	2302,144	2055,971	2302,144	1943,199	541,960	1932,226	0,000	0,000	0,000
11	0	-730,93	756,41	-809,99	1362,74	-786,78	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2955,822	2177,304	1314,595	2177,304	1201,822	474,269	2454,109	-178,674	-383,168	422,779
12	0	-1812,27	286,27	-1661,55	602,17	-1453,78	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6460,999	152,134	4565,203	152,134	4452,430	179,491	5425,358	700,945	642,298	950,721

1800																					
Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAX (N)	FAY (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1209,96	-16,94	-1098,76	0	-963,77	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60743,370	-5489,556	61100,440	-5489,556	60987,668	-10,621	60060,599	5478,935	1994,169	5830,561
2	0	-1052,32	-211,32	-982,28	-368,82	-890,4	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19453,880	-2757,988	17875,268	-2757,988	17762,495	-132,498	18844,142	2212,928	-96,619	2215,037
3	0	-948,07	-273,41	-902,8	-481,88	-834,65	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13952,555	-4886,928	10635,237	-4886,928	10522,464	-171,428	13392,650	4176,469	-1947,520	4608,224
4	0	234,58	-564,17	105,58	-963,77	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	963,512	-1399,772	1247,624	-1399,772	1134,851	-353,735	1035,862	-32,035	88,016	93,665
5	0	805,5	-16,94	916,71	0	963,77	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4273,645	431,339	5895,532	431,339	5782,759	-10,621	4854,573	-441,960	-160,860	470,324
6	0	232,69	529,41	138,93	963,77	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	946,296	1410,013	1163,301	1410,013	1050,529	331,940	1039,556	0,000	0,000	0,000
7	0	-1059,61	19,16	-982,73	0	-963,77	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	61,070	-36,977	-1485,447	-36,977	-1598,220	12,013	-548,951	48,990	17,831	52,134
8	0	119,55	-495,79	53,8	-963,77	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	868,795	-1417,009	955,286	-1417,009	842,513	-310,860	908,678	28,076	-77,138	82,088
9	0	779,99	19,16	856,87	0	963,77	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1321,196	-159,209	3128,743	-159,209	3015,970	12,013	1864,604	171,222	62,320	182,210
10	0	108,34	529,41	14,57	963,77	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1864,209	1410,013	2003,241	1410,013	1890,468	331,940	1879,495	0,000	0,000	0,000
11	0	-447,68	463,28	-496,09	834,65	-481,88	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3149,848	1415,423	2019,406	1415,423	1906,633	290,477	2844,951	-191,307	-410,260	452,671
12	0	-1109,97	175,34	-1017,66	368,82	-890,4	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6942,074	-280,399	6173,619	-280,399	6060,846	109,938	6310,153	802,899	735,722	1089,006

2400

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-2151,05	-30,12	-1953,35	0	-1713,36	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60098,724	-5389,360	59041,998	-5389,360	58929,226	-18,885	58880,124	5370,475	1954,693	5715,140
2	0	-1870,8	-375,69	-1746,27	-655,68	-1582,94	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18893,222	-3046,784	16066,812	-3046,784	15954,040	-235,558	17804,461	2077,782	-90,718	2079,762
3	0	-1685,46	-486,06	-1604,97	-856,68	-1483,82	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13447,443	-5098,758	9122,599	-5098,758	9009,826	-304,760	12447,277	3835,716	-1788,624	4232,244
4	0	417,03	-1002,97	187,7	-1713,36	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1088,491	-2518,025	1411,361	-2518,025	1298,589	-628,862	1212,329	-27,402	75,286	80,118
5	0	1432,01	-30,12	1629,7	0	1713,36	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4702,805	502,265	7581,404	502,265	7468,631	-18,885	5730,777	-521,151	-189,683	554,597
6	0	413,68	941,17	246,98	1713,36	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1070,274	2506,678	1355,027	2506,678	1242,254	590,114	1231,281	0,000	0,000	0,000
7	0	-1883,76	34,06	-1747,08	0	-1713,36	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-503,473	-122,017	-3333,376	-122,017	-3446,149	21,356	-1592,741	143,373	52,183	152,574
8	0	212,54	-881,4	95,66	-1713,36	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	932,493	-2490,147	1064,822	-2490,147	952,049	-552,638	998,623	20,945	-57,546	61,240
9	0	1386,64	34,06	1523,32	0	1713,36	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1736,751	-226,759	4828,641	-226,759	4715,868	21,356	2698,024	248,115	90,306	264,039
10	0	192,6	941,17	25,9	1713,36	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1921,927	2506,678	2068,063	2506,678	1955,290	590,114	1944,317	0,000	0,000	0,000
11	0	-795,87	823,61	-881,95	1483,82	-856,68	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2911,338	2351,982	1153,013	2351,982	1040,240	516,403	2364,507	-175,778	-376,957	415,926
12	0	-1973,28	311,71	-1809,17	655,68	-1582,94	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6350,707	251,315	4196,457	251,315	4083,684	195,442	5222,508	677,571	620,880	919,018

1700

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-1079,26	-15,11	-980,06	0	-859,66	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60832,900	-5503,473	61386,335	-5503,473	61273,562	-9,474	60224,553	5493,999	1999,652	5846,591
2	0	-938,65	-188,5	-876,17	-328,93	-794,22	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19531,744	-2717,828	18126,430	-2717,828	18013,657	-118,190	18988,537	2231,697	-97,438	2233,824
3	0	-845,65	-243,87	-805,27	-429,83	-744,48	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	14022,713	-4857,514	10845,340	-4857,514	10732,567	-152,906	13523,959	4223,799	-1969,590	4660,447
4	0	209,24	-503,23	94,18	-859,66	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	946,155	-1244,462	1224,887	-1244,462	1112,114	-315,525	1011,356	-32,679	89,785	95,547
5	0	718,49	-15,11	817,68	0	859,66	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4214,043	421,488	5661,384	421,488	5548,611	-9,474	4732,880	-430,962	-156,857	458,620
6	0	207,56	472,22	123,92	859,66	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	929,082	1257,698	1136,676	1257,698	1023,903	296,082	1012,930	0,000	0,000	0,000
7	0	-945,15	17,09	-876,57	0	-859,66	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	139,475	-25,166	-1228,793	-25,166	-1341,566	10,715	-403,983	35,882	13,060	38,184
8	0	106,64	-442,23	47,99	-859,66	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	859,951	-1267,960	940,078	-1267,960	827,305	-277,278	896,192	29,067	-79,860	84,985
9	0	695,73	17,09	764,3	0	859,66	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1263,478	-149,826	2892,639	-149,826	2779,866	10,715	1748,845	160,542	58,432	170,845
10	0	96,63	472,22	12,99	859,66	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1856,187	1257,698	1994,229	1257,698	1881,456	296,082	1870,483	0,000	0,000	0,000
11	0	-399,32	413,24	-442,5	744,48	-429,83	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3182,975	1285,341	2139,731	1285,341	2026,958	259,101	2911,678	-193,464	-414,885	457,775
12	0	-990	156,4	-907,72	328,93	-794,22	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	7024,254	-354,308	6448,273	-354,308	6335,501	98,063	6461,264	820,312	751,678	1112,624

2500

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-2334,03	-32,68	-2119,52	0	-1859,12	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	59973,382	-5369,877	58641,746	-5369,877	58528,973	-20,490	58650,594	5349,386	1947,017	5692,698
2	0	-2029,95	-407,65	-1894,83	-711,45	-717,6	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18784,204	-3102,928	16833,764	-3102,928	16720,991	-255,597	17602,296	2051,504	-89,571	2053,458
3	0	-1828,84	-527,41	-1741,5	-929,56	-1610,04	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13349,227	-5139,951	8828,485	-5139,951	8715,713	-330,686	12263,458	3769,459	-1757,728	4159,138
4	0	452,5	-1088,29	203,67	-1859,12	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1112,788	-2735,469	1443,196	-2735,469	1330,423	-682,358	1246,640	-26,501	72,811	77,483
5	0	1553,83	-32,68	1768,35	0	1859,12	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4786,251	516,059	7909,227	516,059	7796,454	-20,490	5901,158	-536,550	-195,288	570,984
6	0	448,87	1021,23	267,99	1859,12	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1094,379	2719,923	1392,305	2719,923	1279,533	640,311	1268,560	0,000	0,000	0,000
7	0	-2044,01	36,96	-1895,7	0	-1859,12	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-613,244	-138,550	-3692,700	-138,550	-3805,473	23,174	-1795,697	161,724	58,863	172,103
8	0	230,62	-956,38	103,8	-1859,12	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	944,878	-2698,821	1086,120	-2698,821	973,347	-599,650	1016,111	19,559	-53,737	57,186
9	0	1504,6	36,96	1652,91	0	1859,12	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1817,554	-239,893	5159,185	-239,893	5046,413	23,174	2860,079	263,067	95,748	279,950
10	0	208,98	1021,23	28,11	1859,12	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1933,147	2719,923	2080,669	2719,923	1967,896	640,311	1956,923	0,000	0,000	0,000
11	0	-863,58	893,68	-956,98	1610,04	-929,56	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2864,957	2534,086	984,540	2534,086	871,767	560,337	2271,081	-172,758	-370,481	408,781
12	0	-2141,15	338,23	-1963,07	711,45	-717,6	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6235,716	354,696	4930,610	354,696	4817,837	212,070	5011,022	653,202	598,549	885,965

1600

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	FO (N)
1	0	-956,02	-13,38	-868,15	0	-761,49	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60917,319	-5516,591	61655,905	-5516,591	61543,132	-8,389	60379,140	5508,202	2004,822	5861,706
2	0	-831,47	-166,97	-776	-291,41	-703,53	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	19605,163	-2680,066	18363,328	-2680,066	18250,555	-104,690	19124,762	2249,405	-98,211	2251,547
3	0	-749,09	-216,03	-713,32	-380,75	-659,47	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	14088,856	-4829,777	11043,421	-4829,777	10930,649	-135,451	13647,755	4268,420	-1990,397	4709,680
4	0	185,35	-445,76	83,42	-761,49	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	929,790	-1098,008	1203,443	-1098,008	1090,670	-279,492	988,245	-33,286	91,452	97,321
5	0	636,45	-13,38	724,31	0	761,49	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4157,846	412,202	5440,605	412,202	5327,832	-8,389	4618,139	-420,592	-153,083	447,584
6	0	183,86	418,3	109,77	761,49	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	912,847	1114,077	1111,570	1114,077	998,797	262,274	987,824	0,000	0,000	0,000
7	0	-837,23	15,14	-776,48	0	-761,49	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	213,400	-14,030	-986,797	-14,030	-1099,570	9,493	-267,302	23,522	8,561	25,032
8	0	94,46	-391,73	42,52	-761,49	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	851,608	-1127,418	925,738	-1127,418	812,966	-245,615	884,419	30,001	-82,426	87,716
9	0	616,29	15,14	677,03	0	761,49	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1209,062	-140,980	2670,026	-140,980	2557,254	9,493	1639,710	150,473	54,768	160,130
10	0	85,6	418,3	11,51	761,49	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1848,632	1114,077	1985,745	1114,077	1872,972	262,274	1861,999	0,000	0,000	0,000
11	0	-353,72	366,05	-391,98	659,47	-380,75	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	3214,211	1162,694	2253,184	1162,694	2140,411	229,513	2974,590	-195,497	-419,246	462,586
12	0	-877,01	138	-804	291,41	-703,53	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	7101,652	-424,185	6707,150	-424,185	6594,377	86,526	6603,695	836,682	766,678	1134,826

10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563

1500

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	
1	0	-840,25	-11,76	-763,03	0	-669,28	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	60996,622	-5528,918	61909,120	-5528,918	61796,347	-7,374	60524,353	5521,544	2009,678	5875,904
2	0	-2195,59	-440,91	-2049,44	-769,51	-1857,76	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18670,740	-3161,378	15349,171	-3161,378	15236,399	-276,451	17391,892	2024,154	-88,376	2026,082
3	0	-1978,07	-570,44	-1883,61	-1005,41	-1741,42	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13247,005	-5182,816	8522,355	-5182,816	8409,582	-357,666	12072,132	3700,498	-1725,571	4083,048
4	0	489,43	-1177,09	220,29	-2010,82	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1138,085	-2961,775	1476,338	-2961,775	1363,565	-738,035	1282,357	-25,563	70,235	74,743
5	0	1680,62	-35,34	1912,64	0	2010,82	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4873,102	530,418	8250,406	530,418	8137,634	-22,158	6078,479	-552,576	-201,121	588,039
6	0	485,5	1104,56	289,86	2010,82	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1119,470	2941,862	1431,109	2941,862	1318,337	692,559	1307,364	0,000	0,000	0,000
7	0	-2210,8	39,97	-2050,39	0	-2010,82	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-727,495	-155,764	-4066,681	-155,764	-4179,454	25,061	-2006,939	180,826	65,815	192,431
8	0	249,43	-1034,42	112,27	-2010,82	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	957,763	-2916,000	1108,281	-2916,000	995,509	-648,581	1034,307	18,115	-49,771	52,965
9	0	1627,38	39,97	1787,8	0	2010,82	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1901,658	-253,568	5503,222	-253,568	5390,449	25,061	3028,760	278,629	101,413	296,511
10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563

1400

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	
1	0	-731,95	-10,25	-664,68	0	-583,02	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	61070,807	-5540,452	62146,004	-5540,452	62033,231	-6,427	60660,204	5534,025	2014,221	5889,187
2	0	-2195,59	-440,91	-2049,44	-769,51	-1857,76	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18670,740	-3161,378	15349,171	-3161,378	15236,399	-276,451	17391,892	2024,154	-88,376	2026,082
3	0	-1978,07	-570,44	-1883,61	-1005,41	-1741,42	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13247,005	-5182,816	8522,355	-5182,816	8409,582	-357,666	12072,132	3700,498	-1725,571	4083,048
4	0	489,43	-1177,09	220,29	-2010,82	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1138,085	-2961,775	1476,338	-2961,775	1363,565	-738,035	1282,357	-25,563	70,235	74,743
5	0	1680,62	-35,34	1912,64	0	2010,82	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4873,102	530,418	8250,406	530,418	8137,634	-22,158	6078,479	-552,576	-201,121	588,039
6	0	485,5	1104,56	289,86	2010,82	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1119,470	2941,862	1431,109	2941,862	1318,337	692,559	1307,364	0,000	0,000	0,000
7	0	-2210,8	39,97	-2050,39	0	-2010,82	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-727,495	-155,764	-4066,681	-155,764	-4179,454	25,061	-2006,939	180,826	65,815	192,431
8	0	249,43	-1034,42	112,27	-2010,82	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	957,763	-2916,000	1108,281	-2916,000	995,509	-648,581	1034,307	18,115	-49,771	52,965
9	0	1627,38	39,97	1787,8	0	2010,82	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1901,658	-253,568	5503,222	-253,568	5390,449	25,061	3028,760	278,629	101,413	296,511
10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563

1000

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	
1	0	-373,45	-5,23	-339,12	0	-297	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	61316,380	-5578,622	62930,683	-5578,622	62817,910	-3,279	61109,902	5575,343	2029,259	5933,156
2	0	-2195,59	-440,91	-2049,44	-769,51	-1857,76	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18670,740	-3161,378	15349,171	-3161,378	15236,399	-276,451	17391,892	2024,154	-88,376	2026,082
3	0	-1978,07	-570,44	-1883,61	-1005,41	-1741,42	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13247,005	-5182,816	8522,355	-5182,816	8409,582	-357,666	12072,132	3700,498	-1725,571	4083,048
4	0	489,43	-1177,09	220,29	-2010,82	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1138,085	-2961,775	1476,338	-2961,775	1363,565	-738,035	1282,357	-25,563	70,235	74,743
5	0	1680,62	-35,34	1912,64	0	2010,82	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4873,102	530,418	8250,406	530,418	8137,634	-22,158	6078,479	-552,576	-201,121	588,039
6	0	485,5	1104,56	289,86	2010,82	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1119,470	2941,862	1431,109	2941,862	1318,337	692,559	1307,364	0,000	0,000	0,000
7	0	-2210,8	39,97	-2050,39	0	-2010,82	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-727,495	-155,764	-4066,681	-155,764	-4179,454	25,061	-2006,939	180,826	65,815	192,431
8	0	249,43	-1034,42	112,27	-2010,82	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	957,763	-2916,000	1108,281	-2916,000	995,509	-648,581	1034,307	18,115	-49,771	52,965
9	0	1627,38	39,97	1787,8	0	2010,82	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1901,658	-253,568	5503,222	-253,568	5390,449	25,061	3028,760	278,629	101,413	296,511
10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563

500

Pto	Apx (m/s2)	Apy (m/s2)	Abx (m/s2)	Aby (m/s2)	AE2x (m/s2)	AE2y (m/s2)	α	γ	P.gas (Pa)	FGy (N)	FAx (N)	FAy (N)	FBx (N)	FBy (N)	FCx (N)	FCy (N)	FDx (N)	FDy (N)	FOx (N)	FOy (N)	
1	0	-93,36	-1,31	-84,78	0	-74,36	0,00	45,00	7997918,460	61565,473	0,000	61508,241	-5608,444	63542,809	-5608,444	63430,037	-0,821	61461,235	5607,623	2041,008	5967,507
2	0	-2195,59	-440,91	-2049,44	-769,51	-1857,76	22,50	56,25	2620007,770	20168,000	0,000	18670,740	-3161,378	15349,171	-3161,378	15236,399	-276,451	17391,892	2024,154	-88,376	2026,082
3	0	-1978,07	-570,44	-1883,61	-1005,41	-1741,42	45,00	67,50	1896058,260	14595,263	0,000	13247,005	-5182,816	8522,355	-5182,816	8409,582	-357,666	12072,132	3700,498	-1725,571	4083,048
4	0	489,43	-1177,09	220,29	-2010,82	0	90,00	90,00	103421,360	796,105	0,000	1138,085	-2961,775	1476,338	-2961,775	1363,565	-738,035	1282,357	-25,563	70,235	74,743
5	0	1680,62	-35,34	1912,64	0	2010,82	180,00	135,00	482633,010	3715,158	0,000	4873,102	530,418	8250,406	530,418	8137,634	-22,158	6078,479	-552,576	-201,121	588,039
6	0	485,5	1104,56	289,86	2010,82	0	270,00	180,00	101352,930	780,183	0,000	1119,470	2941,862	1431,109	2941,862	1318,337	692,559	1307,364	0,000	0,000	0,000
7	0	-2210,8	39,97	-2050,39	0	-2010,82	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-727,495	-155,764	-4066,681	-155,764	-4179,454	25,061	-2006,939	180,826	65,815	192,431
8	0	249,43	-1034,42	112,27	-2010,82	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	957,763	-2916,000	1108,281	-2916,000	995,509	-648,581	1034,307	18,115	-49,771	52,965
9	0	1627,38	39,97	1787,8	0	2010,82	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1901,658	-253,568	5503,222	-253,568	5390,449	25,061	3028,760	278,629	101,413	296,511
10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563

7	0	-2210,8	39,97	-2050,39	0	-2010,82	0,00	225,00	101352,930	780,183	0,000	-727,495	-155,764	-4066,681	-155,764	-4179,454	25,061	-2006,939	180,826	65,815	192,431
8	0	249,43	-1034,42	112,27	-2010,82	0	90,00	270,00	101352,930	780,183	0,000	957,763	-2916,000	1108,281	-2916,000	995,509	-648,581	1034,307	18,115	-49,771	52,965
9	0	1627,38	39,97	1787,8	0	2010,82	180,00	315,00	101352,930	780,183	0,000	1901,658	-253,568	5503,222	-253,568	5390,449	25,061	3028,760	278,629	101,413	296,511
10	0	226,03	1104,56	30,4	2010,82	0	270,00	0,00	231663,850	1783,276	0,000	1944,826	2941,862	2093,784	2941,862	1981,011	692,559	1970,038	0,000	0,000	0,000
11	0	-934,04	966,6	-1035,07	1741,42	-1005,41	315,00	22,50	448159,22	3449,789	0,000	2816,692	2723,626	809,206	2723,626	696,434	606,058	2173,854	-169,616	-363,742	401,345
12	0	-2315,86	365,82	-2123,26	769,51	-1857,76	337,50	33,75	999739,800	7695,684	0,000	6116,040	462,305	3411,870	462,305	3299,097	229,369	4790,907	627,838	575,307	851,563