

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA VÍA FÉRREA MEDIANTE EL DESARROLLO DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Brs. García M., Mayuri I.
Miramontes V., Vanessa
Para optar al Título
de Ingeniero Mecánico

Caracas, 2010

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA VÍA FÉRREA MEDIANTE EL DESARROLLO DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Enrique Limongi

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por los Brs. García M., Mayuri I.
Miramontes V., Vanessa
Para optar al Título
de Ingeniero Mecánico

Caracas, 2010



Caracas, 13 de mayo de 2010^z

ACTA

Los abajo firmantes, Miembros del Jurado Examinador designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller:

VANESSA MIRAMONTES y MAYURI GARCÍA

Titulado:

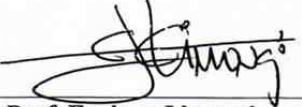
**“ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA
VÍA FÉRREA MEDIANTE EL DESARROLLO DE UN
CÓDIGO COMPUTACIONAL DE SIMULACIÓN
NUMÉRICA”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el Plan de Estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico


Prof. Hugo Armando Guerrero
Jurado




Prof. Jorge Barillas
Jurado


Prof. Enrique Limongi
Tutor



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE DISEÑO

Caracas, 13 de mayo de 2.010

Prof. GERARDO RAMÍREZ
Jefe de la División de Control de Estudios
Facultad de Ingeniería

Presente.-

Quienes suscriben, Miembros del Jurado Examinador designado por el Consejo de la Escuela de Ingeniería Mecánica, nos dirigimos a usted con la finalidad de informarle que hemos decidido otorgarle a las Bachilleres:

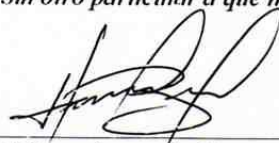
MAYURI GARCÍA, C.I.V.- 17.926.202 y VANESSA MIRAMONTES, C.I.V.-17.962.459.

“MENCIÓN HONORÍFICA”

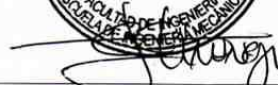
Por la excelencia demostrada en la realización del Trabajo Especial de Grado, intitulado:

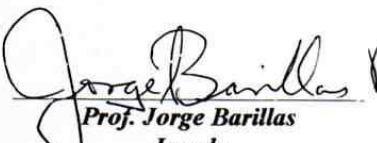
“ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA VÍA FÉRREA MEDIANTE EL DESARROLLO DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL DE SIMULACIÓN NUMÉRICA”

Sin otro particular a que hacer referencia, quedamos de usted,


Prof. Hugo Armando Guerrero
Jurado




Prof. Enrique Limongi
Tutor


Prof. Jorge Barillas
Jurado

Agradecimientos

A nuestro tutor del trabajo especial de grado, Prof. Enrique Limongi, por compartir su interés y valiosos conocimientos, por la formación que nos proporcione, su orientación siempre impecable y apoyo técnico.

Al Prof. Guerrero y Prof. Casanova por la ayuda y el trato personal y amable brindado.

A nuestras familias por todo el apoyo brindado y dedicación que nos han dado en todo momento.

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA VÍA FÉRREA MEDIANTE EL DESARROLLO DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

**Tutor Académico: Prof. Enrique Limongi. Tesis. Caracas, U.CV. Facultad de
Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica. 2010.**

Desplazamiento vertical del riel, elemento finito, momento flector, carga móvil, aceleraciones y velocidades.

El estudio de la dinámica ferroviaria se fundamenta en la definición de un modelo matemático que describa lo más aproximadamente posible el fenómeno físico que ocurre debido a la marcha del tren. Las cargas móviles que se presentan repetitivamente generan aceleraciones y velocidades que pueden afectar el funcionamiento adecuado del sistema ferroviario. El presente desarrollo detalla la creación de un modelo simplificado de la superestructura de la vía, mediante el empleo del método del elemento finito. Dicho modelo matemático se compone de elementos que simulan los principales componentes de apoyo del vehículo y sobre los que recaen todas las solicitaciones. De acuerdo a lo anterior los rieles se modelan como vigas, discretizadas en elementos finitos y limitadas por nodos. Estas se encuentran apoyadas sobre elementos rígidos que representan los durmientes, siendo el apoyo entre riel y durmientes un elemento viscoso y con rigidez que representa la capa de asiento. Finalmente, los durmientes se encuentran soportados por elementos sin masa, el balasto, con amortiguación viscosa y rigidez. La ecuación de movimiento que define la estructura, se resolvió empleando un método numérico de integración directa.

Los resultados se proponen en tablas y gráficos donde se indican, para una configuración determinada, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en los nodos del riel, tanto verticales y rotacionales, además los desplazamientos, velocidades y aceleraciones verticales de los durmientes y por último las fuerzas de corte y momentos flectores generados en la sección transversal de los nodos de riel.

Estos resultados permiten apreciar la incidencia que tienen variables como la velocidad de circulación del tren, la geometría de la vía evaluada, así como su calidad, en la respuesta dinámica del sistema.

Índice

Contenido	Pág.
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Índice	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Tablas	xx
Introducción	1
Capítulo 1 – Planteamiento del problema	
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Justificación	6
1.3. Objetivos	8
1.3.1. Objetivo General	8
1.3.2. Objetivo Específico	9
Capítulo 2 – Marco Teórico	
2.1. Reseña Histórica	11
2.2. La vía férrea	15
2.2.1. Solicitaciones de la vía	16
2.2.1.1. Fuerzas Verticales	16
2.2.1.2. Fuerzas Laterales	21
2.2.1.3. Fuerzas Longitudinales	22
2.2.2. Contacto rueda riel	22
2.2.3. Los rieles	27
2.2.4. Los durmientes	32
2.2.5. El balasto	38
2.2.5.1. Coeficiente de balasto	42
2.2.6. Teorías del comportamiento de la vía férrea	44
2.2.6.1. Método de Winkler	45

2.2.6.2. Método de Zimmermann	47
2.2.6.3. Método de Zimmermann-Timoshenko	48
2.2.6.4. Método de Timoshenko-Saller-Hanker	49
2.2.6.5. Método de Talbot	51
2.2.6.6. Teoría del Coeficiente de Rigidez de Apoyo	52
2.1. Método del elemento finito	53
2.1.1. Métodos numéricos	55
2.1.1.1. Método de Wilson	56
2.1.1.2. Método de Newmark	58
2.1.1.3. Paso de tiempo	60
2.2. Antecedentes	62
Capítulo 3 – Marco Metodológico	
3.1. Simulación del Comportamiento de la Vía Férrea	70
3.2. Método de análisis del elemento finito para una vía férrea con soportes discretos sujeta a fuerzas móviles concentradas	72
3.3. Configuraciones en el modelo del elemento finito para una vía férrea con soportes discretos sujeto a fuerzas móviles concentradas	77
3.4. Elementos fundamentales del modelo dinámico de la vía férrea	80
3.4.1. Matriz de masa para un elemento de la vía férrea	81
3.4.2. Matriz de amortiguación para un elemento de la vía férrea	82
3.4.3. Matriz de rigidez para un elemento de la vía férrea	84
3.4.4. Metodología para el cálculo de las fuerzas externas para un elemento de la vía férrea	86
3.5. Formulación del cálculo del momento y fuerza cortante en el riel	88
3.6. Métodos de cálculos dinámicos para una vía férrea a través de la integración directa basada en elementos finitos.	89
3.6.1. Descripción del Método de Wilson θ	90
3.6.2. Descripción del Método de Newmark	91
3.7. Descripción del código computacional para la simulación numérica del comportamiento dinámico de la vía férrea	92

3.8. Presentación y Discusión de Resultados	
3.8.1. Exposición de los casos propuestos para las corridas del código	99
3.8.2. Estudio de un riel de dos durmientes por elemento, una vía en mal estado y 24 metros de lardo	100
3.8.3. Estudio de un riel de un durmiente por elemento, una vía en mal estado y 24 metros de lardo	107
3.8.4. Efecto de la fuerza móvil en el comportamiento de la vía férrea	114
Capítulo 4- Análisis de resultados y Conclusiones	
4.1. Análisis de resultados	125
4.2. Conclusiones	132
4.3. Recomendaciones	134
Referencias Bibliográficas	136
Apéndices	141
Apéndice 1 - Validación del programa de la Carga Móvil.	
Apéndice 2 - Validación del ensamble de las matrices de masa, rigidez y amortiguación.	
Apéndice 3 - Análisis dimensional de las teóricas de Zimmermann, Zimmermann-Timoshenko, Timoshenko-Saller-Hanker y Talbot.	
Apéndice 4 - Análisis dimensional de las ecuaciones matriciales utilizadas en el Método del Elemento Finito para el cálculo de los desplazamientos, momentos flectores y fuerzas de corte.	
Apéndice 5 - Código computacional del Método de Zimmermann.	
Apéndice 6 - Código computacional del Método de Zimmermann-Timoshenko.	
Apéndice 7 - Código computacional del Método de Timoshenko-Saller-Hanker.	
Apéndice 8 - Código computacional de simulación numérica de la vía férrea.	

Apéndice 9 - Entrevista con el Prof. Euro Casanova de la Universidad Simón Bolívar.

Apéndice 10 - Corridas realizadas para la configuración de dos durmientes por elemento.

Apéndice 11 - Corridas realizadas para la configuración de un durmiente por elemento.

Anexos

256

Anexo 1 - Perfil del riel UIC 60

Anexo 2 - Características del riel UIC 60

Lista de Figuras

		Pág.
Capítulo 2		
Figura 2.1 -	Cargas estáticas y dinámicas.	18
Figura 2.2 -	Oscilación dinámica de la carga por rueda.	20
Figura 2.3 -	Resultados para el coeficiente dinámico para diferentes criterios.	21
Figura 2.4 -	Radios de curvatura de la rueda y el riel.	25
Figura 2.5 -	Riel de patín plano.	28
Figura 2.6 -	Sección típica de una vía con balasto.	39
Figura 2.7 -	Hipótesis de Winkler.	45
Figura 2.8 -	Modelo de apoyos puntuales equidistantes elásticos.	46
Figura 2.9 -	Método de Zimmermann.	47
Figura 2.10 -	Modelo Zimmermann – Timoshenko.	48
Figura 2.11 -	Transformación del apoyo sobre larguero al apoyo sobre durmientes según Saller y Hanker.	50
Figura 2.12 -	Coeficiente de rigidez de apoyo del durmiente.	52
Figura 2.13 -	Representación esquemática del significado del coeficiente de rigidez de apoyo del durmiente en el modelo de viga sobre apoyos discretos elásticos.	53
Figura 2.14 -	Esquema de análisis del Elemento Finito.	54
Figura 2.15 -	Variación lineal asumida para el método de Wilson θ .	56
Figura 2.16 -	Radio espectral $\rho(A)$ como función de θ .	57
Figura 2.17 -	Newmark para constantes de aceleración promedio.	59
Figura 2.18 -	Contenido en frecuencias al paso de un tren AVE a 250 Km/h a 3, 8.6 y 11.8 metros del eje de vía.	61
Capítulo 3		
Figura 3.1 -	Modelo del elemento finito de un elemento de riel.	74

Figura 3.2 -	Modelo del vagón que transita sobre el riel.	75
Figura 3.3 -	Modelo matemático de la vía con un número de fuerzas concentradas móviles.	76
Figura 3.4 -	Modelo del elemento de viga para el primer caso de estudio.	78
Figura 3.5 -	Modelo del elemento de viga para el segundo caso de estudio.	79
Figura 3.6 -	Definición de escalones de carga para el método de elementos finitos.	87
Figura 3.7 -	Esquema de módulos para el código computacional.	93
Figura 3.8 -	Representación de los nodos en común del riel.	94
Figura 3.9 -	Representación de los nodos en común del riel en la matriz de masa del riel y ubicación de la matriz de masa de los durmientes.	95
Figura 3.10 -	Matriz global de amortiguación y rigidez. (a) Matriz de amortiguación compuesta por sus sub matrices. (b) Matriz de rigidez compuesta por sus sub matrices.	96
Figura 3.11 -	Momentos flectores y fuerzas de corte con $L= 24$ m y dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Fuerzas de corte en los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Fuerzas de corte en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Momentos flectores en los nodos del riel todos los pasos de tiempo. (d) Momentos flectores en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.	102
Figura 3.12 -	Respuesta de los durmientes con $L= 24$ m y dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento de los durmientes todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad de los durmientes todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad de los	103

	durmiertes para 4 intervalos de tiempo. (e) Aceleración de los durmiertes todos los pasos de tiempo. (f) Aceleración de los durmiertes para 4 intervalos de tiempo.	
Figura 3.13 -	Respuesta de desplazamiento de los nodos del riel con $L=24$ y dos durmiertes por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.	104
Figura 3.14 -	Respuesta de velocidad de los nodos del riel con $L=24$ y dos durmiertes por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Velocidad vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.	106
Figura 3.15 -	Respuesta de aceleración de los nodos del riel con $L=24$ y dos durmiertes por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Aceleración vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Aceleración rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.	107
Figura 3.16 -	Respuesta para una vía con $L=24$ m y un durmierte por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Fuerzas de corte en los nodos del riel para todos los pasos de	109

tiempo. (b) Fuerzas de corte en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Momentos flectores en los nodos del riel todos los pasos de tiempo. (d) Momentos flectores en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

Figura 3.17- Respuesta de los durmientes con $L = 24$ m y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento de los durmientes todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad de los durmientes todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (e) Aceleración de los durmientes todos los pasos de tiempo. (f) Aceleración de los durmientes para 4 intervalos de tiempo.

111

Figura 3.18 - Respuesta de desplazamiento de los nodos del riel con $L = 24$ y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

112

Figura 3.19 - Respuesta de velocidad de los nodos del riel con $L = 24$ y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Velocidad vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

113

Figura 3.20 -	Respuesta de aceleración de los nodos del riel con $L = 24$ m y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Aceleración vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Aceleración rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.	114
Figura 3.21 -	Desplazamiento de las fuerzas en función del tiempo.	117
Figura 3.22 -	Desplazamiento vertical del riel para un riel de $L = 24$ y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando la posición de la fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	118
Figura 3.23 -	Fuerza de corte para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	119
Figura 3.24 -	Momento flector para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	120
Figura 3.25 -	Desplazamiento de los durmientes para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	120
Figura 3.26 -	Velocidad vertical para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	121
Figura 3.27 -	Aceleración vertical para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	121

Figura 3.28 -	Desplazamiento vertical del riel para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	122
Figura 3.29 -	Fuerzas de corte para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	122
Figura 3.30 -	Momentos flectores para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	123
Figura 3.31 -	Desplazamiento de los durmientes para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	123
Figura 3.32 -	Velocidad vertical del riel para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	124
Figura 3.33 -	Aceleración vertical del riel para un riel de $L = 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo.	124

Apéndices

Figura 1a.1 -	Posición de la carga móvil en el instante inicial.
Figura 1a.2 -	Desplazamiento de las fuerzas en función del tiempo.
Figura 4a.1 -	Modelo del elemento utilizado en la validación del método.
Figura 5a.1 -	Estudio del hundimiento del Método de Zimmermann considerando el Coeficiente de Balasto constante.
Figura 5a.2 -	Método de Zimmermann para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante.

- Figura 5a.3 - Método de Zimmermann para el estudio del momento flector considerando el coeficiente de balasto constante.
- Figura 5a.4 - Método de Zimmermann para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante.
- Figura 6a.1 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del hundimiento considerando el Coeficiente de Balasto constante.
- Figura 6a.2 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante.
- Figura 6a.3 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del momento flector considerando el coeficiente de balasto constante.
- Figura 6a.4 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante.
- Figura 7a.1 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del hundimiento considerando el Coeficiente de Balasto constante.
- Figura 7a.2 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante.
- Figura 7a.3 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del momento flector considerando el coeficiente de balasto constante.
- Figura 7a.4 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante.
- Figura 9a.1 - Condiciones de Empotramiento en ambos extremos del riel.
- Figura 9a.2 - Condiciones de apoyo simple en ambos extremos del riel.

- Figura 9a.3 - Condiciones de apoyo con un resorte vertical y un resorte de torsión.
- Figura 9a.4 - Posición de los durmientes en el elemento de estudio.
- Figura 9a.5 - Distribución del elemento según lo explicado por el Prof. Casanova.
- Figura 10a.1 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 12$, de dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.2 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 12$, de dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.3 - Fuerza de corte y Momento flector para un riel $L= 12$, con dos durmientes por elemento, a una $V= 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.4 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 12$, de dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.5 - Desplazamiento de los durmientes y del riel para una longitud de $L= 12$, dos durmientes, a una velocidad $V= 30$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.6 - Fuerza de corte y momento flector con $L= 24$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.7 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 24$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.8 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 36$, con dos durmientes por elemento, a una $V= 80$ km/h y vía en mal estado.

- Figura 10a.9 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 36$, dos durmientes por elemento, a una $V = 80$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.10 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 36$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.11 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 36$, dos durmientes por elemento, a una $V = 120$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 10a.12 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 12$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.13 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 12$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.14 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 12$, dos durmientes por elemento, a una $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.15 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 12$, dos durmientes por elemento, a una $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.16 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.17 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.18. Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.

- Figura 10a.19 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.20 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 36$, dos durmientes por elemento, a una $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.21 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 36$, dos durmientes por elemento, a una $V = 80$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.22 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 36$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 10a.23 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 36$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h, vía en muy buen estado.
- Figura 11a.1 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 12$ y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 11a.2 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con una longitud $L = 12$ y velocidad $v = 80$ km/h y vía en mal estado.
- Figura 11a.3 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 12$ y un durmiente por elemento, con $V = 120$ km/h.
- Figura 11a.4 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 12$ y un durmiente por elemento, con $V = 120$ km/h, para una vía en mal estado.
- Figura 11a.5 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L = 36$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h.
- Figura 11a.6 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 36$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h.

Figura 11a.7 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h.

Figura 11a.8 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h.

Lista de Tablas

	Pág.
Capítulo 2	
Tabla 2.1 - Valores de m y n para diferente ángulos.	25
Tabla 2.2 - Propiedades de los rieles UIC.	29
Tabla 2.3 - Composición química del acero para rieles, según UNE 25.122.	31
Tabla 2.4 - Forma y material de los durmientes.	34
Tabla 2.5 - Valores del coeficiente de balasto	43
Capítulo 3	
Tabla 3.1 - Nomenclatura y parámetros del modelo de la vía.	80
Tabla 3.2 - Resultados con L=24 m y dos durmientes por elemento, con v=80 km/h y vía en mal estado.	101
Tabla 3.3 - Resultados con L=24 m y un durmiente por elemento, con v=80 km/h y vía en mal estado.	108
Tabla 3.4 - Posición de las fuerzas en cada instante de tiempo para ambos casos de fuerzas.	116
Apéndice	
Tabla 1a.1 - Ubicación de las fuerzas y distancias en función del paso del tiempo.	
Tabla 1a.2 - Validación del programa de Carga Móvil.	
Tabla 2a.1 - Matriz de masa llenada con la ayuda del programa computacional MATLAB.	
Tabla 2a.2 - Matriz de masa llenada por las autoras.	
Tabla 2a.3 - Matriz de rigidez llenada mediante el código computacional desarrollado en MATLAB.	
Tabla 2a.4 - Llenado de la matriz de rigidez por las autoras.	
Tabla 2a.5 - Llenado de la matriz de amortiguación con el programa computacional desarrollado en MATLAB.	

Tabla 2a.6 -	Matriz de amortiguación llenada por las autoras.
Tabla 10a.1 -	Riel de longitud de 12 metros, con dos durmientes por elemento, una velocidad de 80 km/h y vía en mal estado.
Tabla 10a.2 -	Resultados con L=12 m y dos durmientes por elemento, con v=120 km/h y vía en mal estado.
Tabla 10a.3 -	Resultados con L=36 m, dos durmientes por elemento, a v=80 km/h y vía en mal estado.
Tabla 10a.4 -	Resultados con L=24 m, dos durmientes por elemento, a una v=120 km/h y vía en mal estado.
Tabla 10a.5 -	Resultados con L=36 m y dos durmientes por elemento, con v=120 km/h y vía en mal estado.
Tabla 10a.6 -	Resultados con L=12 m y dos durmientes por elemento, con v=80 km/h, una vía en muy buen estado.
Tabla 10a.7 -	Resultados con L=12 m y dos durmientes por elemento, con v=120 km/h, vía en muy buen estado.
Tabla 10a.8 -	Resultados con L=24 m y dos durmientes por elemento, con v=80 km/h, vía en muy buen estado.
Tabla 10a.9 -	Resultados con L=24 m y dos durmientes por elemento, con v=120 km/h y una vía en muy buen estado.
Tabla 10a.10 -	Resultados de un riel de longitud L=36 m, dos durmientes por elemento, a una velocidad de v=80 km/h, vía en muy buen estado.
Tabla 10a.11 -	Resultados con L=36 m y dos durmientes por elemento, con v=120 km/h, vía en muy buen estado.
Tabla 11a.1 -	Resultados con riel de longitud L=12 m, un durmiente, una velocidad de v=80 km/h y una vía en mal estado.
Tabla 11a.2 -	Resultados para un riel de longitud L=12 m, un durmiente, una velocidad v=120 km/h y vía en mal estado.
Tabla 11a.3 -	Resultados para un riel de longitud L=36 m, un durmientes por elemento, velocidad de v=80 km/h y una vía en mal

estado.

Tabla 11a.4 - Resultados con $L=36$ m, un durmiente por elemento, velocidad de $v=120$ km/h y una vía en mal estado.

Introducción

El ferrocarril en los últimos años ha retomado un lugar relevante en el mercado del transporte a nivel mundial, debido principalmente al desarrollo de las líneas de alta velocidad, lo cual lo ha convertido en ícono de innovación y vanguardismo en países desarrollados. En Venezuela, sin embargo las nuevas tecnologías ferroviarias no han comenzado a implementarse, debido a la gran cantidad de tiempo que dejó de invertirse en este sector. A pesar de esto, en los últimos años se han mostrado iniciativas que indican un auge en la investigación y el interés de crear nuevas líneas a nivel nacional, lo cual impone la necesidad inminente de promover el desarrollo en esta área.

El estudio de la dinámica ferroviaria constituye una herramienta de suma importancia para entender el comportamiento de la vía férrea frente al paso del tren. Aún más en la actualidad, debido a que las nuevas tecnologías llevan el sistema a puntos críticos de velocidad, lo cual produce excitaciones dinámicas que de no estimarse podrían ser perjudiciales para la superestructura de la vía.

La investigación que se propone, plantea la necesidad de encontrar un modelo matemático de la vía férrea, que permita una mejor comprensión del fenómeno físico estudiado, así como la posibilidad de incluir limitaciones que no influyan significativamente en la aproximación de la respuesta generada. Por otro lado se presenta la búsqueda de un método numérico cuyas características proporcionen a la simulación confiabilidad en los cálculos y un manejo computacional sencillo.

El desarrollo se fundamenta en las bases teóricas y en los estudios de investigadores como antecedentes del problema. El comportamiento dinámico de un vehículo ferroviario está significativamente afectado por las fuerzas de interacción que se producen entre la rueda y el riel, las cuales dependen de la adhesión, el deslizamiento y el desgaste característico. Dichas fuerzas se transmiten hacia los apoyos del riel, los durmientes; sin embargo por ser estos de tipo discreto, no proporcionan el soporte necesario para evitar que la mayor parte de la carga pase a la

plataforma, deformándola significativamente. Para evitar esto, se emplea una capa de material, que se conoce con el nombre de balasto, entre los durmientes y la plataforma, la cual además de permitir que las fuerzas se transmitan sobre una mayor superficie que la que le permitían los durmientes solos, cumple con otras funciones, como por ejemplo servir de desagüe a la vía, como aislante eléctrico, entre otras.

El modelo matemático de la vía está constituido por los elementos fundamentales que la componen: los rieles, los durmientes y el balasto. Además de incluir las fuerzas generadas en el contacto rueda-riel que son de naturaleza móvil, debido a la marcha del vehículo ferroviario. Son estas solicitaciones principalmente las responsables de la aparición de velocidades y aceleraciones en los elementos de la superestructura.

Desde ese punto de vista, el presente estudio tratará de evaluar la incidencia de algunas variables como la velocidad de circulación, las características geométricas de la vía y la calidad de la misma en la respuesta dinámica del sistema ferroviario. Lo anterior genera la propuesta de una metodología que incluya el modelado matemático de la vía y el empleo de métodos numéricos para obtener su solución lo más aproximadamente posible.

El estudio de la dinámica ferroviaria es imprescindible, para entender el comportamiento del tren, en Venezuela deben incentivarse nuevas investigaciones pues solo de esta manera, entendiendo lo básico, se pueden generar ideas innovadoras y adaptables a los ferrocarriles actuales en el país.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La forma de enfocar el estudio del comportamiento del ferrocarril puede variar significativamente dependiendo del problema específico a evaluar, las características del fenómeno físico, las simplificaciones que se consideren para limitar el modelo matemático, de forma que éste se aproxime lo más posible a la realidad y los resultados que deseen obtenerse. A continuación, se presenta de forma detallada el planteamiento del problema, la justificación de la investigación y los objetivos. En el planteamiento del problema se busca establecer una primera aproximación al estudio dinámico, proponiendo el enfoque de estudio del problema físico y esbozando el planteamiento matemático. La justificación se presenta como un resumen de los motivos que promovieron el presente desarrollo. Por último, los objetivos delimitan la investigación y proponen la estructura a desarrollar con el fin de obtener los resultados deseados.

1.1. Planteamiento del Problema

El ferrocarril ha constituido desde su invención un medio de transporte eficaz y seguro, durante sus casi dos siglos de existencia, el transporte ferroviario ha pasado por épocas de acelerada expansión, así como por períodos de declive. Sin embargo, las rutas suburbanas han prevalecido demostrando la innegable competitividad que ofrece este medio de transporte en determinados poblados. A pesar de esto, en la actualidad el ferrocarril representa un muy bajo porcentaje en el mercado de transporte a nivel mundial, viéndose esta cuota acrecentada en los últimos años con el auge y desarrollo de las líneas de alta velocidad, sobre todo en el continente europeo, según lo planteado por López (2006).

No obstante en Venezuela, el vertiginoso avance de la era de la alta velocidad no ha surtido efecto aún, debido principalmente a dos factores importantes. En primer lugar, las políticas de Estado que se iniciaron durante la época dorada del ferrocarril, se desestimaron posteriormente, en aras de apoyar otros desarrollos y medios de transporte; de esta manera la construcción de las vías proyectadas se detuvo, creando un vacío de conocimiento durante un largo período de tiempo. El segundo factor preponderante, pudo ser derivado del anterior. Debido al poco interés que se ha prestado en materia de investigación ferroviaria, las nuevas tecnologías permanecen aún fuera del alcance de la nación, haciendo necesaria una alta inversión para el impulso de nuevos proyectos.

Mediante un nuevo enfoque de unificación territorial, la puesta en marcha en la última década, de nuevos proyectos ferroviarios en el país, ha impulsado el interés académico en esta área, promoviendo investigaciones que permitan a nuestro país remediar el desfase y posicionarse en el futuro como símbolo de innovación y calidad. El éxito en la introducción de nuevas tecnologías ferroviarias, implica una mejora potencial de los puntos críticos del sistema, acrecentando así factores como seguridad, velocidad, puntualidad, comodidad, estabilidad, entre otros. La forma de optimizar estos factores se genera mediante el estudio de los elementos que conforman el conjunto vehículo-vía. La interacción entre los componentes de la vía férrea, generada por la marcha del tren sobre los rieles, determina el comportamiento de todo el conjunto. Cuando a estas consideraciones se le añade el hecho de que las cargas sobre la superestructura son móviles, es decir varían en tiempo y posición, el problema se convierte en un problema dinámico, porque la acción repetitiva de las solicitaciones y la velocidad del tren determinan las aceleraciones que se pueden presentar en el sistema. El fenómeno dinámico no es un problema reciente, el estudio de los factores que afectan la respuesta dinámica de la estructura ferroviaria se remontan al siglo pasado, sin embargo, las nuevas tecnologías en materia de informática han dado un vuelco al enfoque de las investigaciones, permitiendo resolver ecuaciones complejas, con planteamientos relativamente sencillos que facilitan la comprensión del problema físico estudiado. La investigación de la

dinámica ferroviaria desde un punto de vista estructural, implica el modelado matemático del sistema por medio de la unión e interacción física de un conjunto de elementos básicos a través de los cuales se manifiestan los diversos efectos que el tren genera sobre la vía férrea.

Las fuerzas generadas en el plano de contacto de la rueda con el riel, son de vital importancia pues ellas permiten definir a grandes rasgos el comportamiento del tren y las dimensiones de la vía, necesarias para soportarlas. Si bien la zona de contacto rueda-riel ha sido estudiada desde hace mucho tiempo, las teorías que explican la interacción entre estos dos elementos básicos constituyen un punto de partida ineludible en la creación de un modelo general, pues a través de ellas es posible definir las características que deben poseer la rueda y el riel para complementarse y generar el movimiento del ferrocarril.

Las traviesas también denominadas durmientes, son los elementos de apoyo del riel en la vía férrea, estas deben poseer ciertas características particulares para permitir el paso del tren, mediante un soporte que promueva la transmisión y repartición de la carga del riel al balasto, la estabilidad del sistema y la amortiguación. Los durmientes desde el punto de vista dinámico, se estudian, clásicamente, calculando y analizando su rigidez vertical, este factor genera un efecto inmediato en el comportamiento del conjunto de elementos de la vía férrea, debido a que la constante de rigidez general se determina tomando en cuenta la rigidez particular de cada componente. Otra variable importante es el amortiguamiento que los durmientes proporcionan al sistema férreo. La capa de balasto como soporte fundamental de la estructura férrea, constituye un punto relevante si se tiene en cuenta que las fuerzas transmitidas a las fundaciones donde reposa la vía férrea pasan directamente a través de este elemento, generando deformaciones y determinando la importancia que tiene para el correcto funcionamiento del conjunto. Así pues el balasto debe proporcionar a la vía férrea elasticidad, amortiguamiento, disminución de la presión y dureza. Por lo anterior es sumamente importante determinar cuál es su comportamiento frente a las cargas que soporta provenientes de paso del tren, y además, cuáles son las características que permite cumplir con las funciones antes

mencionadas y cómo es su interacción dinámica con los demás componentes de la vía férrea.

De esta forma, el presente desarrollo se planteó de acuerdo a la hipótesis bajo la cual cada componente del sistema ferroviario puede ser modelado usando el método de los elementos finitos y acoplado luego a los demás componentes para crear un modelo matemático. La ecuación del movimiento dinámico de este modelo fue resuelta, por medio del empleo de métodos numéricos de integración directa, para obtener la respuesta del sistema bajo excitaciones dinámicas, con lo cual conocieron y analizaron las magnitudes de los momentos flectores y fuerzas de corte presentes a lo largo del riel.

A la luz del problema planteado, la creación del código computacional que simule el comportamiento dinámico de la superestructura ferroviaria frente al paso del tren, se hace necesario, permitiendo simplificar los cálculos y acortar significativamente los tiempos de respuesta.

1.2. Justificación

A través de la historia de la humanidad han surgido elementos que marcan un hito y representan un paso adelante en el desarrollo de las sociedades, creando estándares, derribando fronteras y uniendo culturas. El ferrocarril, desde la invención de la locomotora, hasta los trenes más modernos y de alta velocidad, es un gran ejemplo. Al respecto Gómez (2004, p. 150) explica “Entre 1850 y 1900, el triunfo del ferrocarril condicionó toda una época, dejó una impronta clara de símbolo de progreso y de esperanza y marcó nuevas formas de vida. También multiplicaría la velocidad de los monopolios, movilizando inmensos capitales y poderosos organismos privados.”

Más adelante Gómez (2004, p. 150) comenta, “Más que cualquier otro factor, el ferrocarril alteró el carácter y la intensidad de la vida industrial, durante un largo período de nuestra historia contemporánea”. Así pues, lo que somos en la actualidad como sociedad, los grandes avances tecnológicos de nuestra época y el inmenso flujo

de información con el que contamos día a día, se lo debemos en buena parte al desarrollo del ferrocarril y de tecnologías similares, que han hecho historia y siguen vigentes después de muchos años.

Hoy en día, el ferrocarril constituye uno de los medios de transporte más utilizados a nivel mundial, debido principalmente al desarrollo de tecnologías de alta velocidad. Al respecto López (2006, p. 19) explica que “en la actualidad la red ferroviaria mundial se extiende, de acuerdo con las últimas estadísticas publicadas por la Unión Internacional de Ferrocarriles (UIC), a través de más de 900.000 Km.”

Desde un punto de vista más técnico, el diseño del ferrocarril ha sufrido variaciones que le han permitido posicionarse como un medio de transporte moderno y útil. El comportamiento del vehículo ferroviario y de la vía se ha estudiado desde los inicios del ferrocarril, las teorías que se crearon en el siglo XIX, son útiles en la época actual y sus variaciones son simples reestructuraciones de modelos matemáticos antiguos. De esta forma, reconocidos autores como Winkler, Timoshenko, Zimmermann, Talbot, entre otros construyeron las bases que permiten diseñar vías y dimensionar todos los elementos que forman parte de la estructura ferroviaria, como son los rieles, el balasto, los durmientes y definir de esta forma su comportamiento ante las solicitaciones del sistema.

El contacto rueda-riel, se ha estudiado igualmente, durante siglos. Los avances tecnológicos del siglo pasado, permitieron resolver los problemas matemáticos eficaz y rápidamente, con lo que el desarrollo de nuevos modelos aumentó dramáticamente. Sin embargo, la base de todos esos desarrollos están en las teorías de Hertz, la de Jonhson & Vermeulen, la teoría de Kalker, lineal y simplificada, entre otras.

El desarrollo de nuevas tecnologías, ideas innovadoras y aportes, en el campo ferroviario es de suma importancia, pues permite mejorar y diversificar los múltiples beneficios que se obtienen del transporte ferrocarril y además ampliar y expandirlos en miras de construir sociedades móviles y fluctuantes.

En Venezuela, los avances en el ámbito ferroviario no se han concretado de manera satisfactoria. Durante mucho tiempo se excluyó este tópico de los proyectos a realizar en el país, lo que provocó en general un vacío de información, que impide en

la actualidad llevar a cabo proyectos propios en la industria ferroviaria. Sin embargo, desde hace algunos años hemos visto que este sector se ha incrementado, acelerándose de forma significativa la producción de ideas que mejoran la calidad de vida de las personas y además de la posición como país en vías de desarrollo.

Los nuevos proyectos ferroviarios son un punto de partida desde el cual debemos enfocar los objetivos futuros. Es en este sentido, donde las instituciones académicas deben ponerse a la disposición del país, generando nuevos desarrollos y promoviendo sus aptitudes en miras de obtener futuros beneficios simultáneos.

El presente trabajo de investigación buscó el desarrollo de un código computacional, que permita analizar la dinámica de la vía férrea y por medio del cual se logre modelar este sistema de una manera sencilla y práctica, aplicable a futuros proyectos académicos. La finalidad práctica recae en la idea de fusionar todos los desarrollos y estudios realizados en el área, en un código computacional cuyo objetivo principal sea la generación de nuevas tecnologías propias y autóctonas de la Universidad Central de Venezuela y a posteriori del país.

En fin, la investigación en el campo ferroviario constituye un desafío e impulsa a trabajar a fondo con la finalidad de poner a prueba las capacidades y conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, con la finalidad de obtener un resultado satisfactorio de utilidad a generaciones futuras.

1.3. Objetivos

1.3.1. *Objetivo General*

Obtener la respuesta dinámica de la vía férrea, compuesta por rieles, durmientes y balasto, mediante el planteamiento de un modelo matemático basado en el método de los elementos finitos y el desarrollo de un código computacional de simulación numérica, con el fin de analizar su comportamiento frente a las solicitaciones impuestas por el paso del tren.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Definir las bases teóricas sobre las que se fundamenta el estudio dinámico de los componentes de la vía férrea: rieles, durmientes y balasto, estableciendo las funciones que desempeñan para el sistema ferroviario y describiendo sus características principales.
- Establecer el fundamento teórico del método del elemento finito y su aplicación en problemas dinámicos, mediante la descripción de los métodos numéricos que permitan resolver la ecuación de movimiento de la vía férrea.
- Desarrollar un modelo matemático de la vía férrea, por medio del método de los elementos finitos, que permita simular su comportamiento frente al paso del tren.
- Determinar el conjunto de cargas móviles puntuales a las que se someterá el modelo matemático, describiendo y analizando su efecto sobre la superestructura ferroviaria.
- Calcular los desplazamientos, velocidad y aceleración del riel y los durmientes, así como los momentos flectores y las fuerzas de corte del riel en cada instante de tiempo.
- Desarrollar un código computacional que simule el comportamiento dinámico de la vía férrea de acuerdo a un modelo matemático de la misma, mediante el empleo de métodos numéricos.
- Analizar los efectos dinámicos que generan sobre los componentes de la vía férrea los diferentes estados de carga y las condiciones a las que puede estar sometido el sistema ferroviario, con respecto a las bases teóricas y a los resultados de la simulación computacional.

El alcance de la investigación y sus características fueron definidos de forma que sean las bases que limiten y guíen la investigación, de esta forma el desarrollo que se expone a continuación representa la ampliación y profundización de las ideas presentadas en el planteamiento del problema, respondiendo a la necesidad expuesta

como justificación del trabajo y persiguiendo las metas concretadas en los objetivos mencionados.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El capítulo presenta las bases teóricas que fundamentan la investigación de la dinámica ferroviaria, su estudio y análisis representan el punto de partida que definirá los conceptos, teorías matemáticas y estudios previos que justifican el desarrollo de la metodología a seguir para la obtención de los resultados deseados. La estructura del Marco Teórico pretende introducir al lector en las definiciones básicas que conducen al desarrollo de la investigación, así como acercarlo al conocimiento de estudios previos en esta materia y su importancia para la industria ferroviaria.

2.1. Reseña Histórica

La Revolución Industrial fue sin duda un acontecimiento histórico de gran importancia para la humanidad, pues en su seno se construyó el camino por el cual hemos llegado a la era moderna. La historia del ferrocarril comienza en este importante período, significando importantes avances en materia de comunicación e intercambio comercial y cultural. No obstante, su ingreso a los países más desarrollados de la época, se lleva a cabo en diferentes momentos de los años posteriores. Así, hasta el siglo XIX, en Alemania e Inglaterra fueron utilizados para extraer el material de los socavones, llegándose a formar trenes de pequeñas vagonetas, tirados por caballerías.

En cuanto al desarrollo de la vía férrea inicialmente los tablones, hoy en día denominados rieles, fueron protegidos por planchas de hierro, para aumentar su duración y en 1739 se emplearon barras planas de fundición, provistas de un reborde para guiar las ruedas. Sin embargo la aparición del riel actual tuvo lugar en 1779, en ese año comenzaron a utilizar ruedas con pestañas y se dio a los rieles la forma de barras lisas.

Paralelamente, a finales del siglo XVIII Watt perfeccionó la máquina de vapor con fines industriales y pocos años después, en 1825, la aplicación de estos dos conceptos dio paso a la primera línea de ferrocarriles abierta al público, construida por Stephenson, entre Stockton y Darlington (Inglaterra) con una longitud de 10 millas.

En nuestro país los primeros intentos ferroviarios se dieron entre los años 1830 y 1845, se desarrollaron de acuerdo a dos regiones: la minera y la comercial. Así, se originaron los modelos ferroviarios iniciales: el modelo minero del Ferrocarril Bolívar de Tucacas a las Minas de Aroa y el modelo comercial del Ferrocarril de la Guaira-Caracas.

La primera línea ferroviaria se construyó en 1977, para la explotación de minas de cobre; con el enclave minero se crearon condiciones que hicieron posible la construcción del ferrocarril por cuanto era necesario mejorar la comunicación entre regiones, facilitar el transporte y agilizar la economía. Al referirse al ferrocarril, Urquijo (2006 p.57) expresa que “a partir de la gesta de la Independencia, los sucesivos gobiernos de Venezuela, en forma permanente, sintieron la necesidad urgente de construir ferrocarriles en diversos lugares del país, como parte de su preocupación general por el desarrollo de vías de comunicación”.

El ferrocarril representó la clave para el progreso económico, social y cultural en Venezuela, aspecto que fue posible por cuanto permitió la comunicación y el intercambio. En ese sentido, luego de 86 largos años de construcción se lograron varios ferrocarriles, entre los que se cuentan el Tucacas-Barquisimeto, Tucacas-Aroa, El Hacha-Palma Sola, Palma Sola-San Felipe, La Guaria-Caracas, La Ceiba- Sabana de Mendoza, Sabana de Mendoza-Montatán, Gran Ferrocarril del Táchira, Coro-La Vela, Puerto Cabello-El Palito-Valencia, entre otros. El ferrocarril en el país fue propuesto por el ingeniero inglés Robert Stephenson, hijo de George Stephenson, el inventor del ferrocarril, dando paso a los futuros proyectos en esta materia.

La historia del ferrocarril en Venezuela es rica en acontecimientos, entre ellos los que se vinculan al mundo del trabajo. De ese pasado, hoy es posible encontrar partes del viejo ferrocarril en el Museo de Transporte, el Parque Recreacional El Encanto y en la estación El Consejo. Sin embargo, no sólo en la historia es representativo, en el

siglo XXI se concretan tramos ferroviarios cuyas iniciativas se dieron en el siglo pasado y que buscan en el presente fomentar la comunicación y desde luego el comercio.

El Ministerio del Poder Popular para las Obras Públicas y Vivienda a través del Instituto de Ferrocarriles del Estado (IFE), diseñó un plan ferroviario nacional. Éste contempla 13 mil kilómetros de vías férreas para ser desarrollados en los próximos 25 años. Y su puesta en marcha implica la demanda de profesionales con calificación especializada. Tal circunstancia ha traído para Venezuela un proceso de migración selectiva, así como la necesidad de formar personal venezolano en áreas de telecomunicación, circulación, seguridad en la circulación, mantenimiento del material rodante, vías férreas y electrificación.

El desarrollo del plan ferroviario nacional en los actuales momentos de acuerdo al Instituto de Ferrocarriles del Estado consta de dos etapas, divididas en: los tramos operativos y los tramos en construcción. Los tramos operativos son dos, el tramo Caracas-Tuy Medio “Ezequiel Zamora” que posee una longitud de 41,4 kilómetros y está enfocado al desarrollo del Eje Norte – Costero del país, mediante un sistema de transporte intermodal, moderno, rápido y económico capaz de movilizar más 12 millones de pasajeros al año y el tramos Puerto Cabello-Barquisimeto-Yaritagua-Acarigua “Simón Bolívar” que posee una longitud de 173,74 kilómetros y está enfocado al desarrollo del Eje Norte – Costero, mediante un sistema de transporte capaz de movilizar más de 400 mil pasajeros al año y transportar más de 2 millones de toneladas de carga anual. Actualmente se están rehabilitando en su primera etapa alrededor de 33,97 kilómetros de la vía férrea que comunica Barquisimeto con Yaritagua. Este tramo sólo está operativo para el transporte de carga. Los trabajos de recuperación que se ejecutan harán posible la movilización de pasajeros luego de 13 años de inoperatividad.

Los tramos en construcción son cinco, actualmente comprendidos entre el Tramo Puerto Cabello-La Encrucijada “Ezequiel Zamora” que posee una longitud de 108,8 kilómetros y está enfocado al desarrollo del Eje Norte – Costero del país con capacidad para movilizar más de 14 millones de pasajeros al año y transportar más de

11 millones de toneladas de carga anuales; constara de ocho estaciones y se tiene prevista su puesta en funcionamiento en el año 2012.

El tramo Tinaco – Anaco posee una longitud de 469 kilómetros, enfocado en el desarrollo del Eje Norte – Llanero con la capacidad de movilizar más de cinco millones de personas al año y de transportar más de nueve millones de toneladas de carga anual, este tramo constara de 10 estaciones y se tiene previsto su puesta en funcionamiento para el año 2012.

El tramo San Juan de Los Marros – Dos Caminos – Calabozo – San Fernando de Apure posee una longitud de 252, 5 kilómetros y está enfocado al desarrollo del Eje Norte – Llanero y el Eje Orinoco – Apure, mediante un sistema de transporte con una capacidad de movilizar más de dos millones de pasajeros al año y de transportar más de dos millones de toneladas de carga anual, constara de siete estaciones y su culminación está programada para el año 2012.

El tramo Acarigua – Turén posee una longitud de 44,33 kilómetros y está enfocado en el desarrollo del Eje Norte – Llanero del país, con la capacidad de movilizar más de 70 millones de pasajeros anuales y transportar más de 140 mil toneladas de carga al año, se espera su puesta en funcionamiento para el segundo semestre del año 2012.

Finalmente el tramo Chaguaramas – Las Mercedes – Cabruta posee una longitud de 201 kilómetros y está enfocado al desarrollo del Eje Norte – Llanero y del Eje Orinoco – Apure, mediante un sistema de transporte con la capacidad de movilizar 2 millones de pasajeros al año y transportar más de 18 millones de toneladas de carga anual, constará de 6 estaciones, se espera para el 2012 el inicio de operaciones de este tren.

Es importante acotar que la construcción ferroviaria es un proceso que ha venido desenvolviéndose en el país, involucra un proceso necesario de formación, por consiguiente será importante una política desde el Estado sostenida en esta materia para el progreso del plan nacional ferroviario.

2.2. La Vía Férrea

La vía representa para el sistema ferroviario la estructura de soporte y guiado del tren, su importancia radica en que sus elementos constitutivos son permanentes y por lo tanto deben atender a ciertos criterios de forma, materiales y propiedades físicas, que les permitan mantener sus características así como sus funciones durante el mayor tiempo posible. Aunque los componentes de la vía férrea son los mismos en cualquier parte del mundo, muchos autores difieren en su clasificación. Sin embargo, existen dos categorías fundamentales, de acuerdo a las funciones generales que desempeñan, denominadas: infraestructura y superestructura.

La infraestructura, según Álvarez M., D. y Luque R., Pablo (2006, p. 17) “está constituida por la plataforma, cuyo principal problema de diseño consiste en la consecución de un trazado adecuado del terreno, económico y cómodo”. Lo anterior significa que la plataforma es la estructura de apoyo fundamental del sistema ferroviario, lo cual implica que debe ser segura para soportar en última instancia todos los esfuerzos producidos por la marcha del tren.

Por otro lado, “la superestructura es la vía propiamente dicha, asentada sobre la plataforma y normalmente constituida por dos filas de *rieles* fijados sobre *durmientes*, que a su vez reposan en un lecho de materiales que forman el *balasto*.” Álvarez M., D y Luque R., P. (2006, p. 17). Dada su importancia para el sistema ferroviario, el comportamiento de la superestructura y la interacción de los elementos principales que la componen con el vehículo y la plataforma, ha sido objeto de estudio durante mucho tiempo.

A pesar de que los tres componentes fundamentales de la superestructura, son los que se mencionaron con anterioridad, los rieles, los durmientes y la capa de balasto; existen otros elementos secundarios, como las juntas de fijación, capas de asiento y aparatos de vía que intervienen en la dinámica ferroviaria y en el comportamiento de la vía. Su estudio es importante, porque sus propiedades individuales, modifican las características generales de la vía, afectando los fenómenos mecánicos que se producen durante el paso del tren. De esta forma, la superestructura debe apreciarse

como un conjunto, constituido tanto por los elementos principales como por los secundarios.

2.2.1. Solicitaciones de la vía

Las fuerzas aplicadas a la pista son de tres tipos: verticales, laterales en la dirección paralela a los durmientes y longitudinales, paralelas a los rieles; estas fuerzas se ven afectadas por la velocidad de la marcha del tren. Una consideración importante en el diseño de la vía es la de reconocer que el paso del tren implica muchas repeticiones de fuerza, no sólo una carga. Por lo tanto, las fuerzas admisibles deben ser considerablemente menores que las fuerzas de colapso en una prueba de carga única, con el fin de realizar el recorrido satisfactoriamente durante un período de tiempo determinado.

2.2.1.1. Fuerzas Verticales

La principal fuerza vertical es la acción repetitiva de las ruedas del tren. La fuerza vertical nominal de la rueda, también llamada fuerza estática, es igual al peso bruto del vehículo de ferrocarril dividido por el número de ruedas. Según Selig (2004), “esta fuerza oscila entre 12.000 libras (53 kN) para vehículos de pasajeros de tren ligero y 39.000 libras (174 kN) para vehículos de transporte pesado.” Sin embargo, debido a los efectos inerciales del tren en movimiento, viajando sobre una geometría variable como consecuencia de los defectos del riel, la carga vertical puede ser mucho menor que el valor nominal o mucho mayor. Esto es confirmado por Selig (2004), cuando dice que “la inercia del tren en movimiento, hace que la fuerza vertical de la rueda varíe por encima y por debajo del valor de la carga nominal de la rueda.”

Las mayores fuerzas registradas en la dirección vertical son aquellas producidas por el impacto de la rueda sobre el riel, el cual es acompañado por vibraciones. La carga dinámica de impacto vertical tiene dos componentes, una fuerza mayor de corta duración y una fuerza de magnitud más pequeña que la anterior pero de larga

duración. La primera es más perjudicial para los rieles y durmientes, mientras que la segunda hace más daño a la geometría del balasto.

De forma semejante a lo que ocurre en el cálculo de la mayoría de estructuras de ingeniería, el cálculo de los esfuerzos verticales sobre las vías del ferrocarril se determina tradicionalmente a partir de un análisis estático. En ese análisis, las cargas aplicadas correspondían inicialmente al peso propio del vehículo considerado. Fonseca (2003, p. 43), explica que “la constatación experimental del aumento de las cargas transmitidas a la vía, con el aumento de la velocidad, rápidamente llevó a la investigación ferroviaria a proponer el empleo de un coeficiente de ampliación dinámico (C_d).”

La expresión matemática del coeficiente de ampliación dinámica es:

$$C_d = \frac{Q_d}{Q_e} \quad [2.1]$$

Donde Q_d , representa la carga dinámica y Q_e la carga estática del vehículo.

Los principales factores que afectan la magnitud de las fuerzas dinámicas verticales, según Selig (2004) son entre otros:

- Carga nominal por rueda
- Velocidad del tren
- Diámetro de la rueda

Para entender este efecto de ampliación dinámica podemos citar un estudio comparativo realizado en una línea de prueba de Colorado y una vía principal entre Nueva York y Washington. En la figura 2.1, se presentan los resultados de este experimento, a la izquierda se muestran los resultados para la línea de Colorado y a la derecha la línea entre Nueva York y Washington.

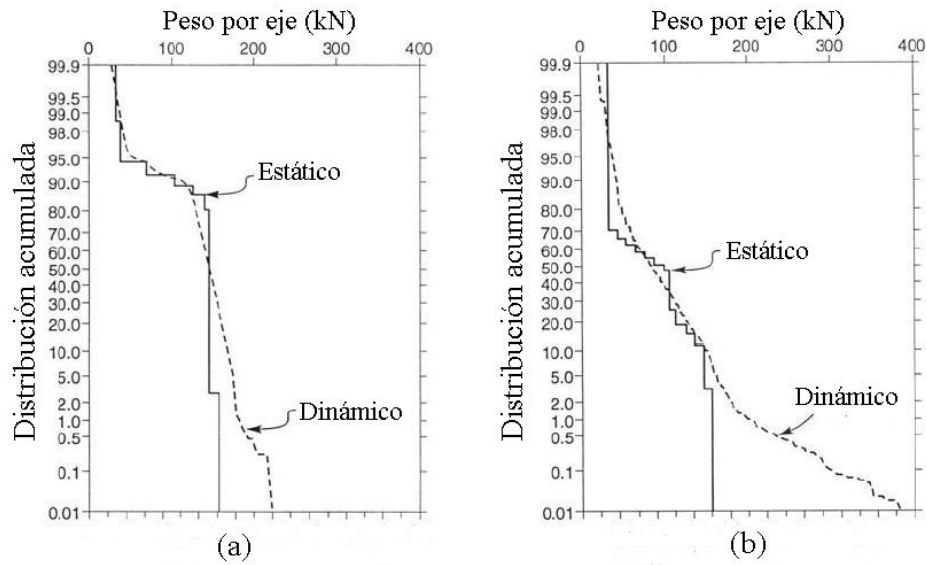


Figura 2.1 - Cargas estáticas y dinámicas. (a) Colorado. (b) Nueva York. Fuente: Lim (2004)

Como se puede apreciar, en ambos casos como a partir de pesos por eje alrededor de 200 kN las cargas dinámicas se hacen cada vez mayores, incrementándose respecto a las estáticas.

Las primeras investigaciones, respecto a la ampliación dinámica, propusieron expresiones empíricas para cuantificar la magnitud del coeficiente dinámico. Entre las más destacadas están:

- Fórmula de Winkler y Pihera (1915):

$$C_d = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{35.000}} \quad [2.2]$$

Fonseca (2003, p. 44) comenta que “el empleo de esta ecuación se adapta a la mayoría de los resultados empíricos obtenidos, sin embargo se determinó luego que sus resultados no eran precisos para velocidades superiores a 100 km/h.”

- Fórmula de Driessen (1936):

$$C_d = \frac{V^2}{30.000} \text{ para } V \leq 120 \text{ km/h} \quad [2.3]$$

$$C_d = \frac{V^2}{45.000} \text{ para } V > 120 \text{ km/h}$$

– Fórmula de Schramm (1955):

$$C_d = 1 + \frac{4,5 \cdot V^2}{100.000} - \frac{1,5 \cdot V^3}{10.000.000} \quad [2.4]$$

Como se puede apreciar todas estas fórmulas empíricas, relacionan las sobrecargas dinámicas con la velocidad de marcha del tren. No obstante, se demuestra que para una vía y vehículo de geometría perfecta, el coeficiente dinámico es prácticamente nulo.

Posteriormente, en 1966 Birmann propuso una nueva ecuación para el cálculo de C_d :

$$C_d = 1 + 0,04 \cdot \left(\frac{V}{100}\right)^3 + a \cdot b \cdot \left(0,1 + 0,01 \cdot \left(\frac{V}{100}\right)^3\right) \quad [2.5]$$

Donde:

a, es un factor de dispersión relacionado con la calidad geométrica de la vía

$$\begin{aligned} a &= 1,3 \text{ para } V \leq 140 \text{ km/h} \\ a &= 1,2 \text{ para } V > 140 \text{ km/h} \end{aligned} \quad [2.6]$$

b, es un factor de dispersión relacionado con la calidad del perfil de las ruedas

$$\begin{aligned} b &= 2,0 \text{ para } V \leq 140 \text{ km/h} \\ b &= 1,5 \text{ para } V > 140 \text{ km/h} \end{aligned} \quad [2.7]$$

Los resultados evidenciaron una dispersión de las cargas dinámicas en torno a un valor medio. En 1969, Eisenmann comprobó que esas dispersiones se ajustan a una distribución normal, conforme a lo que se aprecia en la figura 2.2

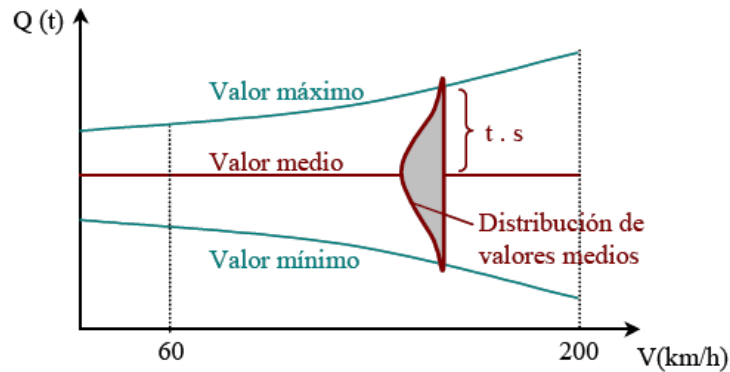


Figura 2.2 - Oscilación dinámica de la carga por rueda. Fuente: Eisenmann (1970)

Partiendo de este supuesto Eisenmann propuso en 1970, el empleo de una nueva fórmula empírica:

$$C_d = 1 + t \cdot s \cdot \varphi \quad [2.8]$$

Donde:

t , es un factor de seguridad estadística, cuyos valores dependen del intervalo de confianza

$$\begin{aligned} t &= 1 \text{ Para } 68,3\% \text{ de los valores} \\ t &= 2 \text{ Para } 95,5\% \text{ de los valores} \\ t &= 3 \text{ Para } 99,7\% \text{ de los valores} \end{aligned} \quad [2.9]$$

s , factor dependiente del estado de la infraestructura

$$\begin{aligned} s &= 0,1 \text{ Para infraestructura en muy buen estado} \\ s &= 0,2 \text{ Para infraestructura en buen estado} \\ s &= 0,3 \text{ Para infraestructura en mal estado} \end{aligned} \quad [2.10]$$

φ , es el factor dependiente de la velocidad de circulación

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \text{ para } V \leq 60 \text{ km/h} \\ \varphi &= 1 + \frac{V - 60}{140} \text{ para } V > 60 \text{ km/h} \end{aligned} \quad [2.11]$$

La fórmula de Eisenmann fue importante porque, de acuerdo a Fonseca (2003, p. 46) “permitió por primera vez considerar el estado de la calidad de la vía y el

intervalo de confianza. Su empleo está ampliamente demostrado para trenes cuyas velocidades no excedan los 200 km/h.”

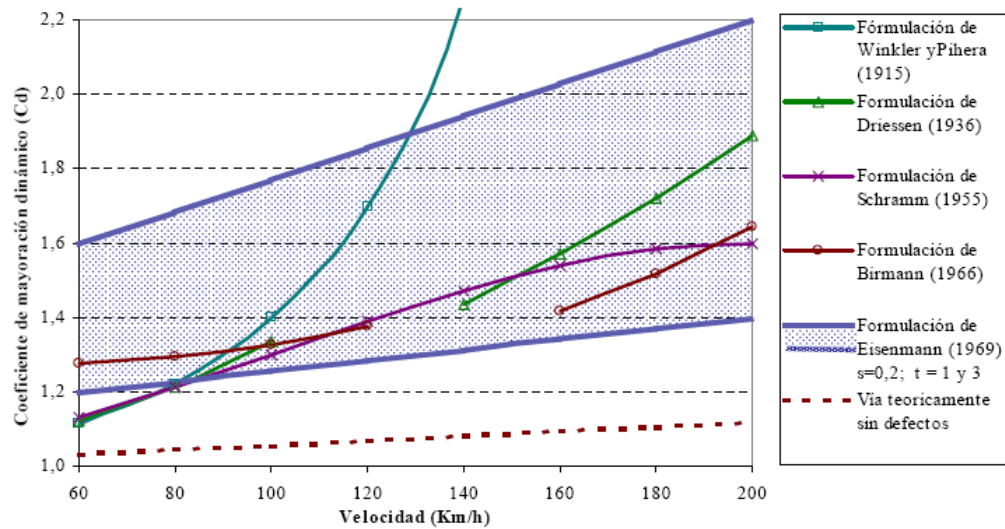


Figura 2.3 - Resultados para el coeficiente dinámico para diferentes criterios
Fuente: Fonseca (2003)

Como se aprecia en la Figura 2.3, los coeficiente de ampliación dinámica calculados por Fonseca, demuestran que con el empleo de la fórmula de Eisenmann, con $s=2$ y un rango de t , desde 1 hasta 3, se logra un umbral dentro del cual son más precisas las consideraciones dinámicas en función de la velocidad.

2.2.1.2. Fuerzas Laterales

Las principales fuerzas laterales aplicadas al riel son las provocadas por la fricción; por un lado entre la superficie de la rueda y la parte superior del riel y por otro lado, por la pestaña de la rueda actuando contra la cara interior de la cabeza de riel, particularmente en las curvas.

Las ruedas de un vehículo ferroviario son cónicas, esto obedece a que el diámetro tiene que disminuir desde el interior hacia el exterior, con el fin de centrarlas en pista recta y compensar en parte la mayor distancia que las ruedas exteriores tienen que

recorrer en una curva. Lo anterior se conoce con el nombre de pseudo-deslizamiento o movimiento de cimbreo, provocado por el deslizamiento aparente que ocurre en la zona de contacto de la rueda con el riel. Su aparición genera fuerzas laterales o tangenciales.

2.2.1.3. Fuerzas Longitudinales

Las fuerzas longitudinales provocadas por el paso del vehículo ferroviario se deben principalmente a los siguientes factores:

- Aceleración
- Tracción
- Frenado
- Cambios de temperatura, provocados por desvíos, cruces, etc.

2.2.2. Contacto Rueda-Riel

Entender la forma en la que la superestructura ferroviaria enfrenta las solicitaciones del sistema, es de suma importancia. Sin embargo, las condiciones que determinan este comportamiento frente al paso del tren, se generan en el contacto de la rueda con el riel, por ello no es de extrañar que esta sea la característica técnica más importante del ferrocarril.

La rueda y el riel, fueron desarrollados en la primera mitad del siglo XIX y siguen siendo hoy la base del medio de transporte terrestre más rentable y seguro del mundo, según lo explicado por Reverón (1965). Así pues, existen muchas teorías que explican la interacción entre ellos, debido a que la comprensión de los fenómenos que ocurren en el contacto rueda-riel, es fundamental para entender la magnitud, forma y características generales de las fuerzas que se transmitirán a la superestructura. De esta forma, el diseño de los elementos de soporte permite asegurar la distribución uniforme y segura de las cargas, lo que se traduce en proporcionar al riel, los durmientes y el balasto, “las características de flexibilidad (elasticidad para

contraponer los efectos de la rigidez del contacto rueda-riel), resistencia (permite soportar los esfuerzos longitudinales, verticales y transversales sin que se produzca el colapso plástico) y continuidad, que les permitan cumplir eficazmente sus funciones”. Álvarez M., D. y Luque R., P (2006, p. 17).

Para explicar las teorías que aproximan la zona de contacto entre la rueda y el riel, se parte de un hecho que López (2006) explica con claridad “durante el movimiento de un vehículo sobre una vía no tiene lugar sólo un movimiento puro de rotación, sino que este va acompañado también de un deslizamiento lateral de la rueda sobre el carril.”(p. 240). Este fenómeno se conoce como pseudo-deslizamiento y tiene su origen en las características geométricas de las ruedas del tren. Más adelante López (2006, p. 240) comenta que, “para pequeños deslizamientos se podía admitir la relación lineal $\tau = K \cdot \mu$. Es decir, proporcionalidad entre las fuerzas tangenciales en el contacto rueda carril y el pseudo-deslizamiento.”

Partiendo de lo anterior, la zona de contacto entre la rueda y el riel, se puede dividir en dos zonas según Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 29):

- Zona de adherencia entre ambos materiales o adherencia global macroscópica.
- Zona de deslizamiento entre materiales a nivel microscópico. La rueda y el carril cambian su estado tensional y sus deformaciones durante el contacto.

Cuando los materiales de dos sólidos en rodadura tienen características elásticas idénticas el problema normal es independiente del problema tangencial. En el caso de un vehículo ferroviario rodando sobre una vía, los materiales de las ruedas y del carril tienen propiedades elásticas análogas, por lo que se puede separar el problema normal del tangencial. De tal manera que, la fuerza normal y la forma de la zona de contacto se obtienen resolviendo el problema normal, y las fuerzas que se producen en el contacto se obtienen resolviendo el problema tangencial.

Han aparecido una gran cantidad de teorías que evalúan de forma diferente la extensión de las zonas de adherencia y deslizamiento dentro del área de contacto. En los casos en los que se estudian dos sólidos con características elásticas análogas suele usarse la teoría simplificada de Kalker. En este modelo, el problema normal se

resuelve mediante la teoría de Hertz, y el problema tangencial usando las ecuaciones desarrolladas por Kalker.

Álvarez R., J. (2006, p. 259), aborda el problema normal con lo siguiente, “Hertz, guiado por las observaciones experimentales, consideró que la superficie de contacto entre dos superficies era elíptica de semiejes a y b”. Cuyos valores son:

$$a = m \cdot \left[\frac{3 \cdot \pi \cdot N}{4} \cdot \frac{K_1 + K_2}{K_3} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$b = n \cdot \left[\frac{3 \cdot \pi \cdot N}{4} \cdot \frac{K_1 + K_2}{K_3} \right]^{\frac{1}{3}}$$
[2.12]

Donde:

$$K_1 = \frac{1 - \nu_W^2}{\pi \cdot E_W} \quad K_2 = \frac{1 - \nu_R^2}{\pi \cdot E_R}$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_W} + \frac{1}{R'_W} + \frac{1}{R_R} + \frac{1}{R'_R} \right)$$
[2.13]

Donde:

N	Fuerza normal total aplicada en la zona de contacto.
R _w	Radio de curvatura principal de la rueda
R' _w	Radio de curvatura transversal principal del perfil de la rueda en el punto de contacto.
R _R	Radio de curvatura principal del carril en el punto de contacto
R' _R	Radio de curvatura transversal principal del perfil del carril en el punto de contacto.
ν _w , ν _R	Coeficientes de Poisson de la rueda y del carril, respectivamente
E _w , E _R	Módulos de Elasticidad de Young de la rueda y del carril, respectivamente
m y n	coeficientes que dependen del ángulo θ

Los valores de m y n se obtienen de la Tabla 2.1, tal que:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{K_4}{K_3} \right) \quad [2.14]$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{R_W} + \frac{1}{R'_W} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_R} + \frac{1}{R'_R} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{R_W} - \frac{1}{R'_W} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_R} - \frac{1}{R'_R} \right) \cdot \cos \vartheta \right] \quad [2.15]$$

Donde, θ es el ángulo que forman los planos normales que contienen a las curvaturas $1/R_W$ y $1/R_R$.

Tabla 2.1 - Valores de m y n para diferente ángulos.

$\theta(^{\circ})$	m	N	$\theta(^{\circ})$	m	N	$\theta(^{\circ})$	m	N
0.5	61,4	0,1018	10	6,604	0,3112	60	1,486	0,717
1	36,89	0,1314	20	3,813	1,4123	65	1,378	0,759
1.5	27,48	0,1522	30	3,731	0,493	70	1,284	0,802
2	23,26	0,1691	35	3,397	0,530	75	1,202	0,846
3	16,5	0,1964	40	3,136	0,567	80	1,128	0,893
4	13,31	0,2188	45	1,926	0,604	85	1,061	0,944
6	9,79	0,2552	50	1,754	0,641	90	1,000	1,000
8	7,86	0,285	55	1,611	0,678			

Fuente: Wickens (2003)

En la Figura 2.4, se puede apreciar la disposición geométrica de los radios de curvatura necesarios para el cálculo de los semiejes de la elipse de contacto.

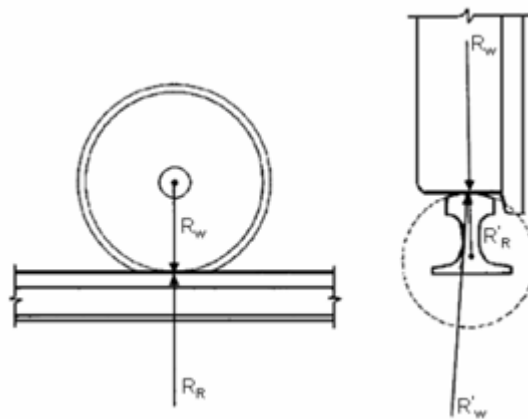


Figura 2.4 - Radios de curvatura de la rueda y el riel. Fuente: Álvarez R., J.(2006)

Los valores de los semiejes, a y b , de la superficie de contacto dependen de la carga normal (N) que actúa sobre ella. Para calcular el valor de esta carga es necesario conocer la distribución de presiones que se tiene en la zona de contacto, de tal manera que luego integrando esta distribución a lo largo de toda esta superficie se obtiene el valor de la carga normal (N).

Hertz consideró que la distribución de presiones en una región elíptica venía dada por la siguiente expresión:

$$p(x, y) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad [2.16]$$

Esta distribución de presiones es compatible con los desplazamientos normales que se producen en la superficie de contacto entre los dos cuerpos. Conociendo la distribución de presión semi-elipsoidal y el volumen de un elipsoide, se puede obtener la carga total normal que está actuando, en función de la presión máxima (p_0):

$$N = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot p_0}{3} \quad [2.17]$$

Para desarrollar la teoría simplificada, Kalker consideró que la rueda y el carril eran dos cuerpos rígidos. Modeló la superficie de contacto entre ellos como un conjunto de muelles situados en puntos discretos de las superficies, y supuso que la superficie de desplazamiento era un único punto que dependía sólo de la tracción en su superficie.

Las fuerzas debidas a los pseudo-deslizamientos que son obtenidas con esta teoría son:

$$F_x = -\frac{8 \cdot a^2 \cdot b}{3 \cdot L} \cdot \xi_x \quad [2.18]$$

$$F_y = -\frac{8 \cdot a^2 \cdot b}{3 \cdot L} \cdot \xi_y - \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4 \cdot L} \cdot \psi \quad [2.19]$$

Las teorías que aproximan el contacto rueda-riel, permiten en definitiva diseñar y desarrollar una superestructura capaz de soportar las sollicitaciones a las que se expone el sistema ferroviario frente al paso del tren. Para cumplir su misión los

elementos de la superestructura, deben poseer características y formas determinadas, además de una interacción adecuada y óptima entre ellos.

2.2.3. Los Rieles

Los rieles son los elementos claves en la estructura de la vía debido a que actúan como calzada y dispositivo de guiado del tren; además recae sobre ellos la responsabilidad de recibir y transmitir las cargas provenientes de la marcha del vehículo ferroviario. Por esta razón, los rieles deben estar preparados para oponer la máxima resistencia y al mismo tiempo una flexibilidad tal que les permita una deformación elástica razonable.

En su libro Oliveros (1977, p. 70), resume las funciones de los rieles en los siguientes cometidos:

- Resistir directamente las tensiones que recibe del material rodante y transmitirlas, a su vez, a los otros elementos que componen la estructura de la vía.
- Realizar el guiado de las ruedas en su movimiento.
- Servir de conductor de la corriente eléctrica precisa para la señalización y la tracción en las líneas electrificadas.

Para soportar los efectos de las cargas verticales, longitudinales y laterales, la forma de los rieles se determina de manera que sus perfiles resistan los esfuerzos de flexión generados. Así, la forma actual deriva de las características geométricas de la rueda y además de numerosos estudios realizados. Al respecto, el Dr. Reverón (1982, p. 20), comenta “la sección recta de los rieles primitivos fue en forma de U, de lo que posteriormente resultó una sección formada por dos masas, ubicadas en los extremos verticales y unidas por un cuerpo más delgado, capaz este de soportar los esfuerzos de corte.” Actualmente, se diferencian estas tres partes, cuya representación se encuentra en la Figura 2.5, con los nombres: cabeza, es la masa superior cuya superficie está en contacto directo con las ruedas del tren; alma, es el cuerpo vertical que une los extremos; y patín, es la parte inferior que representa el soporte final del riel y su

unión con los durmientes y el resto de la superestructura. Cada una de ellas tiene dimensiones, estandarizadas por los fabricantes en los llamados perfiles de rieles, que se definen tomando en cuenta diversos factores como la geometría de la vía, el equipo rodante empleado, la fatiga permisible, las solicitaciones, las condiciones de los demás elementos de la vía, entre otros.

El riel debe constituir una viga de resistencia suficiente y de peso óptimo, en relación con su rigidez vertical y horizontal. En este sentido, la Unión Internacional de Ferrocarriles (UIC) en abril de 1971, expuso una serie de consideraciones con respecto al perfil del riel, que pueden resumirse en lo siguiente: “la cabeza debe tener una anchura y altura suficientes, desde el punto de vista de las cargas soportadas. Se debe evitar que el contacto se efectúe de forma puntual y la superficie de rodadura debe garantizar una buena repartición de los esfuerzos”. Todo lo anterior repercute en la armonía existente entre los elementos fundamentales del contacto, la rueda y el riel, debido a que la superficie de la cabeza actúa como plano de contacto recibiendo de manera directa las cargas provenientes del paso del tren. Por su parte “el alma del riel debe asegurar la transmisión óptima de las solicitaciones exteriores, debidas a la circulación, desde la cabeza hasta el patín”, en estas condiciones se basa la elección del ancho del alma que debe soportar también a las cargas transversales generadas. Finalmente “el patín debe tener una anchura suficiente, con el fin de aumentar la rigidez del emparrillado de la vía, y a fin de asegurar una repartición correcta de la carga, sin giro del riel”. Es preciso encontrar una buena relación entre la altura total del riel y el ancho del patín, para asegurar la transmisión equilibrada de fuerzas a los durmientes y de estos al balasto.



Figura 2.5 - Riel de patín plano. Fuente: Oliveros (1977)

El riel de patín plano es el más utilizado en la actualidad, siendo “los diferentes perfiles de la UIC, los que se han impuesto en la mayor parte de los ferrocarriles europeos y del mundo”, según Álvarez M, D. y Luque R., P. (2006, p. 67). Las propiedades individuales de algunos perfiles de la Unión Internacional de Ferrocarriles (UIC), se muestran a continuación en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 - Propiedades de los rieles UIC.

	Sección mm ²	Peso Kg/m	Momento de inercia eje horizontal cm ²	Momento de inercia eje vertical
UIC-54	6934	54,43	2346	417,5
UIC-60	7686	60,34	3055	512,9
UIC-71	9079	71,27	4151,66	735,06

Fuente: Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006)

Como se puede apreciar en la Tabla 2.2, cada uno de los perfiles está determinado por un peso que representa el tipo y la potencialidad del riel, en el todo el mundo este peso viene dado en Kg/m y según Oliveros (1977), “está estrechamente ligado, sobre todo, a la carga por eje, la velocidad de circulación y la densidad de tráfico” p. 88.

En la actualidad se ha generalizado el empleo de rieles pesado porque permiten una mayor duración de la vía y reducen los gastos de mantenimiento. Oliveros (1977, p. 89) explica que, “esto se debe al hecho de que un carril pesado distribuye las acciones verticales y horizontales de los vehículos sobre la vía entre un número mayor de traviesas, retardando la degradación de estas y reduciendo, simultáneamente, la presión dinámica sobre el balasto.”

Para cumplir con eficacia sus funciones, es preciso que los rieles presenten una serie de características determinadas por parámetros técnicos y económicos. Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 66) las resume de la siguiente forma, “los rieles deben presentar una resistencia mecánica elevada y una capacidad elevada de absorción de energía (alta tensión de rotura y alta tenacidad)”. Lo anterior nos lleva a considerar el

material para su elaboración. Según Oliveros (1977, p. 71), “los primeros carriles metálicos modernos estaban contruidos en hierro fundido, material que, debido a su fragilidad, pronto se mostró inadecuado para resistir la acción de las ruedas sobre él. Posteriormente, con la llegada del acero se produjo un cambio radical.” El empleo del acero en la fabricación de los rieles permitió que la duración de los mismos aumentara de tres meses, en el caso de los rieles de hierro, a un período entre 10 y 50 años en los rieles de acero, cuya vida útil, según Togno (1975) “depende del tráfico y la velocidad, del peso por metro del tren, del durmiente, su calidad y mantenimiento respecto al balasto, la clase y nivelación de este y sobre todo la supresión de impactos directos en las juntas y la reducción de vibraciones”. Aún tomando en cuenta las condiciones expuestas por Togno, el uso del acero constituyó una enorme mejora y una gran disminución en los costos de mantenimiento del sistema férreo.

En los aceros empleados para la fabricación de rieles podemos encontrar elementos químicos estándares como el hierro, el carbono y el silicio, además de un segundo grupo conformado por el azufre, el fósforo, el arsénico, el manganeso, entre otros minerales e impurezas. Cada uno le proporciona características esenciales a los rieles, pero los elementos del segundo grupo son vitales, desde 1930, en la manufactura de rieles resistentes al desgaste. La influencia de los elementos químicos citados, sobre las características físicas de los aceros de rieles, fue resumida por Oliveros (1977, p. 71), de la siguiente manera:

- El carbono aumenta la dureza y resistencia al desgaste, aunque su exceso puede ser causa de fragilidad.
- El silicio mejora la calidad del acero, eliminando gases y facilitando su laminación. Además, aumenta la dureza y la resistencia al desgaste.
- El manganeso aumenta la dureza, la resistencia al desgaste y la tenacidad, sin embargo dificulta la soldabilidad.
- El arsénico aumenta la dureza y la resistencia al desgaste, pero disminuye la resistencia al desgaste en exceso.

Cada uno de los elementos proporciona características de acuerdo a una proporción adecuada, esto puede ser apreciado en la Tabla 2.3. Además de esto

Oliveros (1977, p. 71) acota que, “en general, las composiciones de los aceros en todo el mundo son bastante similares.”

Tabla 2.3 - Composición química del acero para rieles, según UNE 25.122.

Componentes	Acero normal		Acero resistente al desgaste	
	Colada	Producto	Colada	Producto
Carbono %	0,40 a 0,60	0,37 a 0,63	0,50 a 0,70	0,47 a 0,73
Manganeso %	0,90 a 1,20	0,86 a 1,24	1,30 a 1,70	1,26 a 1,74
Silicio %	Menor de 0,30	Menor de 0,30	Menor de 0,50	Menor de 0,30
Fósforo %	Menor de 0,05	Menor de 0,06	Menor de 0,05	Menor de 0,06
Azufre %	Menor de 0,05	Menor de 0,06	Menor de 0,05	Menor de 0,06

Fuente: Oliveros (1977)

La composición química se estudia en función de obtener un acero que posea ciertas características físicas deseadas, la más importante de estas es sin duda es la resistencia a la tracción, debido a que representa en cierto modo a las demás. Las propiedades físicas de los rieles de acero se pueden resumir según Oliveros (1977, p. 76) en: “resistencia a la tracción, la cual con el empleo de rieles de desgaste se ha estandarizado en 100 Kg/mm^2 ; peso específico, cuyo valor medio suele tomarse igual a $7,83 \text{ Tn/m}^3$; módulo de elasticidad, que se puede tomar como $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$; dureza, con valores de 210 a 250 ud Brinell para los aceros normales”, entre otras.

Se puede observar que los rieles representan una parte muy importante en las vías férreas, unido a los otros que la conforman buscan obtener una vía óptima en función del tipo de material rodante que por ella circule.

2.2.4. Los Durmientes

Los durmientes son elementos macizos que se sitúan en dirección transversal al eje longitudinal de la vía férrea, sobre los cuales se colocan los rieles, y constituyen, a través del sistema de sujeción, la conexión de los rieles con la capa de balasto, formando con este el armazón o emparrillado de soporte.

La importancia de los durmientes, al igual que con los demás elementos de la superestructura, radica en que las características de diseño empleadas en su fabricación, deben permitir que estos lleven a cabo sus funciones de manera eficaz durante el mayor tiempo posible. Lo anterior se evidencia por el hecho de que los durmientes son componentes fijos de cuya duración dependen los costos de mantenimiento, así como los costos iniciales de inversión. Estas características de diseño deben ser tales que les permitan a los durmientes recibir directamente las cargas provenientes del paso del tren y atenuarlas para transmitir las al balasto, el cual a su vez transfiere las tensiones a la plataforma, donde deben ser compatibles con la capacidad resistente y deformacional de la misma.

Los orígenes del ferrocarril, según comenta Oliveros (1977, p. 183), “se empleaban bloques de piedra como soporte, pero pronto se llegó al convencimiento de que debería aportarse una solución tal, que no sólo sirviera de soporte a los rieles, sino que fuera capaz de mantener la separación entre ellos a lo largo de toda la línea”. Se comprendió la necesidad de diseñar estructuras de apoyo, que fueran capaces de satisfacer varias necesidades de la vía férrea, simultáneamente. Oliveros (1977, p. 184), describe las funciones principales que deben desempeñar los durmientes, de la siguiente forma:

- Servir de soporte a los rieles, fijando y asegurando su posición en lo referente a la cota, separación e inclinación.
- Recibir las cargas verticales y horizontales transmitidas por los rieles y repartirlas sobre el balasto a través de su superficie de apoyo.
- Conseguir y mantener la estabilidad de la vía en el plano horizontal y en el vertical.

Por su lado, Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 48) complementa las funciones de los durmientes con lo siguiente:

- Aislar eléctricamente a los rieles, en cuanto a señalización y corriente de retorno.
- Amortiguar las acciones dinámicas sobre la infraestructura.

Para cumplir todas estas exigencias, en el diseño de los durmientes se distinguen varios factores influyentes, entre los cuales se pueden mencionar las características geométricas, el peso, la elasticidad, el material, entre otras. Con respecto a la geometría, Oliveros (1977, p. 184) comenta que la longitud y el ancho de los durmientes influyen de forma fundamental en la estabilidad de la vía en el plano vertical, mientras que el ancho y el canto constituyen factores representativos por su contribución a la estabilidad lateral.

Por su influencia en el comportamiento mecánico de la vía férrea, la forma de los durmientes ha adoptado diferentes configuraciones a lo largo del tiempo, Oliveros (1977, p. 187), los clasifica de la siguiente manera:

- Semi-durmientes o dados sueltos que se sitúan debajo de los rieles sin ningún tipo de unión transversal entre ellos.
- Durmientes de dos bloques, constituidos por dos dados situados bajo los rieles y unidos entre sí por una riostra de acero.
- Durmientes monobloc, formados por una única pieza constante, en toda su longitud.

Esta clasificación permite todas las posibilidades de empleo en cuanto a materiales diferentes, sin embargo se ha generalizado que algunas sólo pueden estar constituidas por algún material específico. En la Tabla 2.4, se puede apreciar la forma del durmiente respecto al material a emplear para su fabricación.

Tabla 2.4 - Forma y material de los durmientes.

Material	Forma		
	Semi-durmiente	Dos bloques	Monobloc
Madera	X	-	X
Acero	-	X	X
Hormigón	X	X	X
Plástico	X	X	X

Fuente: Oliveros (1977)

Así, notamos que la forma de los durmientes debe estar determinada por un compromiso entre las necesidades de índole mecánica y las que imponen las tecnologías de materiales y los procesos de fabricación involucrados en su manufactura.

El material, constituye la principal característica de clasificación de los durmientes, pues en la mayoría de los casos el material determina el peso, así como las características geométricas y las propiedades físicas del elemento final. Oliveros (1977, p. 187), expone que desde su creación, los durmientes han sido fabricados con diversos materiales entre los que se encuentran:

- Madera
- Acero
- Fundición
- Hormigón armado
- Hormigón tensado
- Materiales sintéticos

Los durmientes de madera tuvieron desde el principio del ferrocarril una gran aceptación debida, principalmente, a sus características iniciales, entre las que se cuentan: “una elevada elasticidad, la posibilidad de utilización con rieles de cualquier ancho de patín, la facilidad relativa de su conservación y reparación, un elevado aislamiento eléctrico.” Oliveros (1977, p. 185). Sin embargo debido a la naturaleza del material, estas características iniciales varían de forma considerable a lo largo de

la vida útil, modificando la elasticidad, resistencia a la compresión, dimensiones y rigidez a la flexión, de los durmientes fabricados con madera; esto conduce a irregularidades en la vía férrea y al deterioro de los elementos de sujeción.

Al igual que ocurrió en los albores del ferrocarril con los rieles de hierro, los durmientes hechos de madera presentaban además el inconveniente de una vida útil muy corta, alrededor de cinco años, la cual se podía extender de tres a cinco veces con la aplicación de procesos de tratamiento. Por esta razón, a pesar de que los tratamientos de madera constituyeron, durante un buen lapso de tiempo una manera exitosa de prolongar la vida de los durmientes de madera, se hizo inminente la búsqueda de nuevos materiales, impulsada paralelamente por la rápida disminución de los recursos madereros en algunos y el consecuente aumento en sus costos.

Dentro del grupo de los durmientes metálicos, se incluyen los elaborados con fundición, que poseen alta resistencia a la corrosión y los de acero, que tienden a ser más económicos. Generalmente tienen forma de U invertida y se fabrican para configuraciones monobloc ó dos bloques con riostra. Por la parte inferior su forma acanalada les permite fijarse eficazmente al balasto, contribuyendo a impedir el desplazamiento lateral de la vía. En cuanto a la sujeción entre durmientes metálicos y rieles, suele hacerse “por medio de grapas atornilladas, admitiendo la posibilidad de utilizar dispositivos elásticos.” Álvarez M., D. y Luque R., D. (2006, p. 53).

Sus principales ventajas se resumen en que son de fabricación sencilla, poseen una larga vida útil, son livianos y de fácil colocación. No obstante, debido a que son ligeros, el empleo de los durmientes metálicos está limitado en alta velocidad o en vías con tráfico pesado, otros inconvenientes que presentan son, problemas de oxidación en algunos ambientes, elevado nivel de ruido y poco aislamiento eléctrico, lo que representa un alto costo inicial, pues se requiere el uso de otros métodos para conseguir el aislamiento. A pesar de esto, Álvarez M., D. y Luque R. P. (2006, p. 54) afirma que “aunque la inversión inicial es mayor que si se utilizan durmientes de madera, su comportamiento con el tiempo es mucho mejor que el de éstas.”

Por su parte, los durmientes de hormigón datan de principios del siglo pasado; sin embargo, los problemas de fisuración y ruptura originados por fenómenos de fatiga

hicieron que no fueran una alternativa eficiente hasta después de la Segunda Guerra Mundial, cuando aparecieron los durmientes de hormigón pretensado, los cuales según Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006), “resolvía el problema de fatiga, haciendo que la zona central trabajase siempre a compresión y reduciendo el canto, el peso y el acero utilizado en la unión, con respecto a sus antecesores” p. 54.

La aparición de los durmientes de bi-bloques modernos y los de hormigón pretensado inicialmente y postensado luego, provocó su uso generalizado en la construcción de nuevas líneas y en la renovación de las antiguas, desplazando el uso de la madera en la fabricación de estos importantes elementos de la vía férrea. Entre las principales razones del éxito de los durmientes de hormigón se pueden citar una duración elevada, por lo menos dos o tres veces más que las de madera, estando su vida útil alrededor de los 50 años; además poseen características mecánicas permanentes a lo largo del tiempo y homogéneas, aportan una elevada estabilidad al conjunto de la vía, como consecuencia de su peso, gastos de conservación bajos, buena adaptabilidad, incombustibilidad, fabricación en serie y colocación mecanizada.

Sus inconvenientes pueden resumirse en una inversión elevada en comparación con durmientes de otros materiales, aislamiento eléctrico complejo y aumento de la rigidez de la vía, aunque en el caso de este último, suele solucionarse con el uso de elastómeros, con el fin de aumentar la elasticidad.

Finalmente, desde hace algunos años, se ha iniciado la investigación de las posibilidades que podrían ofrecer los plásticos y materiales sintéticos, como materia prima para la fabricación de los durmientes, aunque los ensayos hechos se han limitado a usos muy reducidos y áreas muy específicas.

La vía de ferrocarril debe poseer características permanentes a lo largo del tiempo, una de ellas, que influye significativamente en el comportamiento mecánico de la superestructura, es la separación entre durmientes. Al respecto Reverón (1965, p. 103) explica que “se puede establecer a priori, que mientras más corta sea la distancia entre los durmientes, será más estable la vía, pero tal distancia está limitada por la condición de permitir un buen acuñado del balasto.” Numerosos estudios realizados

sobre el comportamiento de la vía concluyen que, efectivamente, la distancia entre durmientes es un factor clave en su funcionamiento óptimo, pues su adecuada elección, permite aproximar el apoyo de los rieles a un apoyo elástico continuo, simplificando de esta forma los cálculos realizados.

En Venezuela “se requiere una separación de 60 centímetros (24 pulgadas) entre los ejes de los durmientes; en EE.UU. de América, tal distancia está comprendida entre 19-1/2 pulgadas (50 centímetros) y 22-1/4 pulgadas (56,5 centímetros).” Reverón (1965, p. 103).

Otro elemento importante para la vía férrea son los elementos de unión entre los rieles y los durmientes, comúnmente denominados sujeciones. Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 60), las define como “elementos que fijan el riel al durmiente asegurando una posición estable”. No obstante, su función dentro del complejo funcionamiento de la vía no es tan sencilla, con el aumento de las velocidades, la exigencia de mantenimiento del ancho de la vía ha obligado al desarrollo de nuevas y mejores sujeciones, que sean capaces de enfrentarse al incremento constante de las sollicitaciones provocadas por la marcha del tren, tanto en dirección transversal como longitudinal. Estas condiciones dieron origen a las sujeciones elásticas, donde el elemento de apriete se deforma elásticamente, permitiendo que se mantenga el contacto en todo momento. Su uso se ha extendido con el uso de durmientes de hormigón, debido a que estos requieren de un elemento elástico entre el durmiente y el riel, denominado placa de asiento, cuya misión es evitar impactos y disminuir la rigidez del hormigón. Por otra parte, como se requiere que los rieles actúen como conductores, las sujeciones deben ser elementos aislantes, sobre todo cuando se emplean durmientes de hormigón, los cuales son conductores. Lo anterior ha inducido el empleo de nuevos materiales, como la poliamida.

Las funciones principales de las sujeciones se pueden dividir, según Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 61) en dos grandes grupos, mecánicas y eléctricas. “Las funciones mecánicas y eléctricas de las sujeciones son:

- Mantener el ancho de vía.
- Evitar el vuelco del riel.

- Mantener el apriete vertical sin pérdida de contacto.
- Impedir el desplazamiento longitudinal del riel.
- Conseguir una elasticidad adecuada en el apoyo riel-durmiente.
- Aislamiento eléctrico en ambos hilos del riel.

La clasificación de las sujeciones viene dada por la forma de anclaje al durmiente.

Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 62), comenta los siguientes tipos:

- Sujeciones directas: en estas el elemento de anclaje proporciona el esfuerzo de apriete.
- Sujeciones indirectas: el carril se apoya en una placa de asiento metálica en la que está fijo el elemento que proporciona el esfuerzo de apriete.

Además de esto las sujeciones pueden ser rígidas o elásticas, esto depende de si el elemento de apriete sobre el patín del riel es elástico o no respecto a los desplazamientos verticales.

Las placas de asiento, también denominadas placas de apoyo, cumplen otra función que deriva de su posición dentro de la configuración de la vía férrea. Al respecto Togno (1975, p. 514) establece que “el riel colocado sobre el durmiente, en teoría descansa con una superficie de contacto que depende del ancho del patín y de las dimensiones del durmiente, pero en realidad apenas 2/3 de esa área, tiene un asiento adecuado para repartir las presiones con relativa uniformidad.”

Así pues, se introduce el uso de placas de apoyo elásticas, que aumentan el área de contacto, proporcionando un mejor asiento y menores presiones unitarias, además de absorber las vibraciones del riel y proporcionar un mayor anclaje.

2.2.5. El Balasto

La capa de balasto es el elemento constructivo de las banquetas de gran parte de las líneas férreas; se interpone entre el conjunto riel-durmiente y la plataforma, formando una capa de apoyo de material granuloso y grueso, constituido por piedra o roca machacada y cribada, normalmente grava limpia de granulometría.

Como elemento estructural de la vía, el balasto se empleó desde los primeros tiempos del ferrocarril al comprobarse que las cargas del tráfico transmitidas a los durmientes, provocaban un hundimiento significativo directamente en la plataforma. Con el uso del balasto se comprobó la mejor repartición de las cargas, al ser mayor la superficie de transmisión a la explanación.

Al ser una parte fundamental de la vía férrea y dado su rol de último elemento de soporte de la misma, el balasto debe desempeñar ciertas funciones, resumidas por Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 41) de la siguiente forma:

- Soportar y distribuir las cargas que imponen los durmientes.
- Afianzar la vía impidiendo el movimiento lateral y longitudinal.
- Permitir el drenaje inmediato de la vía.
- Impedir que crezca la vegetación.
- Facilitar el mantenimiento, en cuanto a ajustes a la superficie y alineación.

Podemos observar en la Figura 2.6, la disposición de los elementos en una vía con balasto, en ella se muestran los distintos materiales que se emplean con el fin de cumplir todas las funciones descritas.

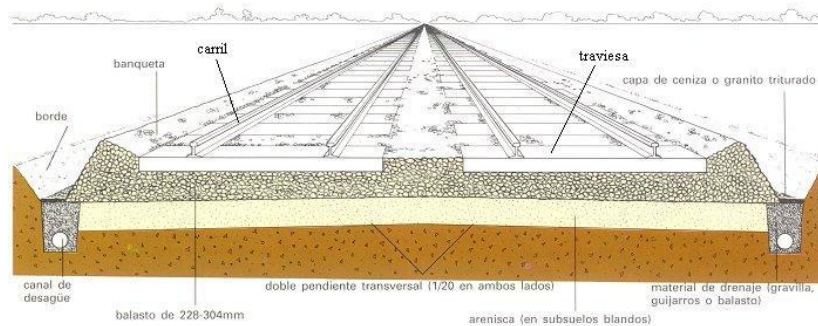


Figura 2.6 - Sección típica de una vía con balasto. Fuente: Vidal (2009)

Aunque el balasto desempeña todas las funciones mencionadas anteriormente, las más importantes de estas son: su actuación como elemento para el confinamiento de los durmientes, oponiéndose a sus desplazamientos longitudinales y transversales, originados por el frenado o la tracción del material rodante, por el cabeceo, por las fuerzas centrífugas o por sobreelevación excesiva en las curvas y, en las vías soldadas y su papel distribuidor y atenuador de las cargas provenientes de los durmientes.

A pesar de lo descrito, la utilización de la capa de balasto como parte de la superestructura no es generalizada y atiende fundamentalmente a las características particulares de la plataforma, las peculiaridades del suelo y las propiedades de la explanación donde se pretenden construir las fundaciones. De esta forma, Martínez (2008, p. 41) expone algunas ventajas de la vía sobre balasto:

- Flexibilidad de tendido, reparación y mantenimiento.
- Costes de ciclo de vida y duración conocidos.
- Capacidad de amortiguación de ruidos y vibraciones.
- Reutilización del balasto.

El mismo autor también propone las desventajas inherentes a una vía con balasto:

- Disponibilidad de infraestructura reducida por el tiempo de mantenimiento.
- Costes de mantenimiento más altos.
- Problemas de desgaste del balasto.
- Altura de construcción y pesos muertos más altos.

En general, las líneas modernas utilizan capa de balasto para garantizar un buen asiento para la vía, en condiciones estáticas, pero sobre todo en condiciones de marcha donde las acciones dinámicas están presentes. El uso del balasto es mucho más común en líneas de alta velocidad, donde se persigue mediante el uso de una capa más gruesa de balasto y durmientes más pesados, una reducción de la presión del durmiente sobre el balasto.

Además, si se tiene en cuenta el punto de vista dinámico, según Martínez (2008, p. 42) “el balasto está sometido, por un lado a impulsos de baja frecuencia que pueden llegar hasta 25 Hz, generados fundamentalmente por los bogies; por otro lado a vibraciones de alta frecuencia provocadas por ruido estructural, entre 50 y 120 Hz.” Por esta razón el balasto ha tomado gran importancia y su uso se ha extendido en el mundo.

Al igual que los demás componentes de la superestructura el balasto posee características físicas, geométricas y de materiales, para llevar a cabo sus funciones. Las dimensiones del material que forma el balasto, pueden variar desde 2 hasta 7.5 centímetros, aunque generalmente se exige que no pase de 4 ó 5 centímetros. Togno

(1975, p. 407) explica que “esta limitación se debe a las dificultades que presenta el material grande, para la precisión con que se deben nivelar las vías. Las partículas menores de 2 centímetros también deben ser excluidas, por constituir un drenaje poco eficiente.”

Las propiedades mecánicas de la capa de balasto son el resultado de una combinación de las propiedades físicas de las partículas individuales y el grado de incrustaciones en el lugar de asentamiento de las partículas. Las incrustaciones son pequeños trozos de material que se infiltran en el espacio entre los elementos que constituyen el balasto.

Debido a que el material del balasto debe cumplir características muy concretas, existen algunas pruebas o ensayos cuya finalidad es determinar las propiedades de resistencia mecánica, forma, absorción del agua, gravedad específica, textura superficial, tamaño de las partículas, entre otras.

Mediante criterios basados en la experiencia, Selig (1994) comenta que “la opción idónea de características de partículas depende de la magnitud de la carga del eje y número de repeticiones, junto con el costo de inversión y mantenimiento. Un balasto de menor calidad puede ser más rentable que uno de mayor calidad en las líneas de bajo tráfico.”

A pesar de este conocimiento experimental, el desarrollo de estudios sobre el balasto no ha seguido el mismo camino que los otros componentes de la vía. Así lo explican Estradé y López (1993) diciendo que “dada la complejidad de su funcionamiento bajo las acciones a las que se encuentra sometido, sólo se ha podido obtener resultados experimentales importantes sobre su naturaleza y granulometría.”

Los elementos granulares tienen un comportamiento que puede resultar muy variable según las condiciones en que se encuentren, y los esfuerzos que se realicen sobre ellos. El medio granular no puede ser considerado como un sólido, ni como líquido, ni mucho menos como un gas, pero puede adoptar comportamientos propios de cada uno de estos tres estados de la materia.

Por el hecho de estar compuesto por partículas granulares, inicialmente el balasto se estudió desde el punto de vista de la mecánica de medios discretos. Con este punto

de partida, se formularon muchos modelos, entre los que se encontraron, el modelo estático, el modelo elástico con deslizamiento entre partículas, algunos modelos estadísticos, tensoriales y analógicos, hasta que finalmente éste desarrollo llevó a la creación de los modelos numéricos, mediante los cuales se discretiza el balasto de tal forma que a través del empleo de algoritmos de definición de su movimiento o interacción mecánica, se pueden realizar diferentes ensayos de simulación numérica. De los modelos numéricos planteados hasta el momento para suelos granulares, pueden destacarse dos en particular: el método de Rodríguez Ortiz (Rodríguez Ortiz, 1974) y el método de los elementos discretos, también conocido como D.E.M. de Cundall (Cundall, 1986). Desde entonces los modelos numéricos han proporcionado numerosos conocimientos sobre el comportamiento del balasto como medio granular.

Con la aplicación de métodos numéricos se ha abierto una alternativa que permite la simulación y visualización a escala real, cosa que no podía realizarse anteriormente por otros métodos.

2.2.5.1. Coeficiente de Balasto

Para caracterizar la vía férrea su uso, en los estudios iniciales del comportamiento de la vía una hipótesis establecida por Winkler, mediante la cual se asumía que el balasto actúa elásticamente bajo las presiones de las cargas rodantes. Winkler estableció una proporcionalidad entre las presiones producto del paso del tren por la vía, y el hundimiento de la misma. De esta forma, bajo la influencia de las cargas, los durmientes equidistantes colocados sobre un lecho elástico se deforman y se hunden en el balasto. Esta suposición lo llevó a proponer un valor que posteriormente sería conocido como coeficiente de balasto y que se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$P = C \cdot y \quad [2.20]$$

Donde, P es la presión actuante, la cual genera un hundimiento y. C es el coeficiente de balasto, el cual depende de la naturaleza y composición del balasto y se expresa en carga por unidad cúbica. Numerosos autores han establecido valores del

coeficiente de balasto, Reverón (1965, p. 115) describe algunos resultados de experimentos alemanes como: “ $C=3\text{kg/cm}^3$ para grava, sobre fundación mediocre. $C=\text{kg/cm}^3$ para grava triturada sobre fundación mediocre. $C=8\text{kg/cm}^3$ para grava triturada soportada por una fundación compacta.”

Actualmente los valores usados para el coeficiente de balasto son los que se muestran en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5 - Valores del coeficiente de balasto

Tipo de Trayecto	Tipo de Estructura	Coeficiente de balasto [N/mm ³]
Línea antigua y mejorada	Mala capacidad resistente	0,05
	Buena calidad	0,15
Nueva construcción	Plataforma natural	0,30 a 0,40
	Puentes y Túneles	0,40 a 0,50

Fuente: Eisenmann y Rump (1997)

El parámetro coeficiente de balasto, presupone una distribución de presiones homogénea bajo el área del durmiente, cuya magnitud es proporcional al asiento medio. En efecto, como comenta Fonseca (2003, p. 31) “si se admite que las cargas se transmiten al sistema balasto-plataforma por un elemento rígido, el asiento del mismo puede considerarse uniforme pero no la distribución de tensiones en su sección transversal, debido a la presencia de tenciones de corte en las paredes laterales del elemento que transmite las cargas al medio supuesto continuo.” Más adelante, el mismo autor expone que “si se admite que el elemento que transmite las cargas es flexible, la distribución de tensiones será uniforme pero la deformación ya no lo será.”

Por lo anterior, la problemática a la hora de cuantificar el coeficiente de balasto, resulta de la dificultad de determinar el área afectada por las presiones transmitidas por los durmientes. Además los durmientes no actúan como una placa rígida, sino que tienden a trabajar en flexión, lo cual viene a representar otro inconveniente. Así el

coeficiente obtenido mediante un ensayo sobre un solo durmiente, no es el mismo que si se aplican cargas sobre varios durmientes muy próximos unos de otros, como efectivamente ocurre en la realidad, debió a la continuidad propicia para el riel.

De todo lo expuesto, Fonseca (2003, p. 33) concluye que “el empleo del coeficiente de balasto como parámetro para caracterizar la resistencia vertical del sistema de los durmientes es muy cuestionable: en realidad no se puede cuantificar experimentalmente de forma directa.”

2.2.6. Teorías del Comportamiento de la Vía Férrea

El comportamiento de la vía férrea durante la marcha del vehículo ha sido estudiado por numerosos investigadores a través del tiempo. Debido a esto existen varias teorías, denominadas comúnmente teorías de dimensionamiento del riel, que se clasifican en dos grupos de acuerdo a la metodología que emplean para abordar el problema. En el primer grupo encontramos autores como Winkler (1867), Zimmermann (1888) y Timoshenko (1915), cuyas formulaciones basadas en un modelo de viga sobre fundación elástica para vías sobre largueros, fueron posteriormente adaptadas a vías sobre traviesas, y constituyen hasta hoy, la metodología convencional de cálculo de los esfuerzos producidos por flexión del conjunto riel – durmiente sobre el sistema balasto- plataforma. En esta metodología de análisis, la resistencia vertical de la vía viene definida a través de un parámetro global de resistencia vertical, bien sea el coeficiente de balasto o el módulo de vía, según se adopte la teoría de Winkler o la de Talbot.

La otra metodología de análisis de los esfuerzos sobre la vía, más acorde con las características de una estructura de vía sobre durmientes, consiste en considerar el riel como una viga continua, sobre apoyos discretos elásticos. También en este caso, la resistencia vertical del apoyo del carril se evalúa considerando un parámetro global: el coeficiente de rigidez de apoyo.

En ambas metodologías de análisis, las características resistentes de la vía en el sentido vertical se reducen en cada caso a un solo parámetro, lo cual simplifica el

cálculo de esfuerzos sobre la vía. No obstante, la validez de estos métodos depende de una correcta estimación de la magnitud de estos parámetros globales, los cuales en realidad deben representar la compleja interacción entre los diferentes elementos que constituyen el soporte de la vía.

2.2.6.1. Método de Winkler

Los primeros estudios de relieve sobre el comportamiento mecánico de una vía férrea se atribuyen a Winkler quien en 1867 presenta como hipótesis principal que el riel, considerado como una viga uniforme, está soportado por apoyos rígidos, prescindiendo por completo de la naturaleza del balasto y la plataforma. Como se determinó más adelante, la hipótesis de apoyos rígidos sólo puede ser considerada como un caso límite, no siendo admisible en vías corrientes, por lo cual en la actualidad representa un modelo muy elemental cuya aproximación a la realidad muy general, pues admite muchas simplificaciones.

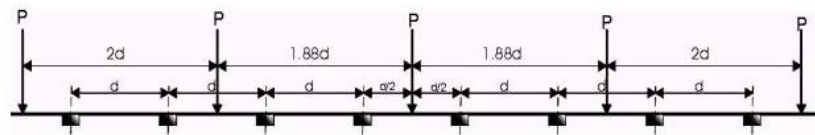


Figura 2.7 - Hipótesis de Winkler. Fuente: Álvarez M., D. Y Luque, R. P. (2006)

Para el modelo de Winkler, en el caso de una sucesión de cargas de valor P , la configuración más desfavorable es aquella en la que los tramos cargados alternan con los descargados, la Figura 2.7 de la hipótesis de Winkler permite apreciar esta representación, donde se observa que las cargas no se encuentran en la mitad de los tramos cargados, por lo que no son equidistantes. Para la distribución de cargas descrita, el máximo momento flector está representado por la siguiente expresión:

$$M = 0,188 P \cdot d \quad [2.21]$$

Ahora bien, si se colocan las cargas exactamente en el eje medio de los tramos, lo que hará más aceptable la suposición de que los apoyos están al mismo nivel, el momento máximo esta dado en la siguiente ecuación:

$$M = 0,1875 P \cdot d \quad [2.22]$$

En realidad la hipótesis de apoyos rígidos es poco realista, por lo que en la actualidad, “su aplicación práctica queda reducida al caso de los tramos metálicos, generalmente puentes metálicos.” Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 95).

Posteriormente, Winkler introduce en 1863 una nueva hipótesis, en la cual considera que existe una proporcionalidad entre las presiones producto del paso del tren por la vía, y el hundimiento de la misma. De esta forma, bajo la influencia de las cargas, los durmientes equidistantes colocados sobre un lecho elástico, se deforman y se hunden en el balasto. Los durmientes más cercanos a los ejes perpendiculares de las solicitaciones, se encuentran sometidos a mayores cargas y por lo tanto son los que sufren los mayores esfuerzos, que recaen sobre ellos inmediatamente.

El modelo de Winkler para apoyos puntuales equidistantes plantea que la deflexión que sufre la viga es equivalente a la que se observa en la Figura 2.8.

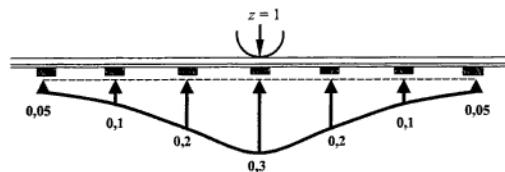


Figura 2.8 - Modelo de apoyos puntuales equidistantes elásticos.

Fuente: Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006)

Admitiendo la hipótesis de proporcionalidad y conociendo el coeficiente de balasto, pueden determinarse los momentos de flexión del riel y las reacciones de los durmientes para cargas determinadas.

2.2.6.2. Método de Zimmermann

El método de Zimmermann se denomina también de apoyo elástico continuo según Álvarez M., D. y Luque R., P. (2006, p. 113) y se basa en la hipótesis introducida en 1863 por E. Winkler, sobre la proporcionalidad entre presiones y hundimientos, por lo que la vía se deforma de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P = C \cdot y \quad [2.23]$$

Donde, P es la presión actuante en kgf/cm^2 , la cual genera un hundimiento y en cm. C es el coeficiente de balasto en kgf/cm^3 , el cual depende de la naturaleza y composición del balasto.

El método de Zimmermann, considera el riel como una viga sobre apoyos discretos elásticos, representando a los durmientes. Sin embargo para efectos de cálculo, el riel es admitido como apoyado sobre una zapata corrida de ancho b , como se muestra en la Figura 2.9.

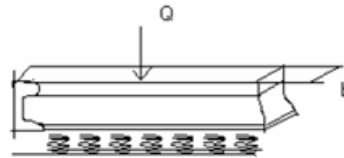


Figura 2.9 - Método de Zimmermann -Fuente: Da Silva (2006)

Si se asume que sobre la vía actúa una carga puntual Q , estática, que representa las acciones de tráfico de forma simplificada, este método permite considerar la influencia de la deformación de la vía en cualquier esquema de cargas, utilizando el principio de superposición, representando así las condiciones reales del tráfico de forma satisfactoria.

Se define además la elástica de la vía, conforme a la siguiente ecuación:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bC}} \quad [2.24]$$

Donde, E es el módulo de elasticidad del riel en kgf/cm², I es el momento de inercia del riel considerado en cm⁴ y b es la anchura del apoyo longitudinal continuo en cm.

La ecuación diferencial que representan el método de Zimmermann, según Álvarez M., D. y Luque R. P. (2006, p. 114), se presenta a continuación:

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} + b \cdot C \cdot z = 0 \quad [2.25]$$

Las soluciones son, para el hundimiento:

$$Z(x) = \frac{Q}{2bC} \frac{1}{L} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.26]$$

Para el momento:

$$M(x) = \frac{Q}{4} L e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.27]$$

2.2.6.3. Método de Zimmermann-Timoshenko

El método supone la utilización de una viga ficticia, que va a representar un apoyo continuo para el riel, con el fin de comparar esta situación con la configuración real de los durmientes. Lo importante del método es que plantea que el área de apoyo que los durmientes le proporcionan al riel, debe ser igual al área de apoyo que le proporcionaría el apoyo de una zapata continua (viga ficticia), como se representa en la Figura 2.10.

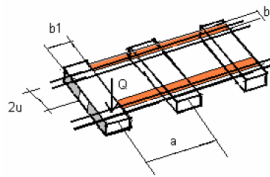


Figura 2.10 - Modelo Zimmermann – Timoshenko. Fuente: Da Silva (2006)

Según la Figura 2.10, el área de apoyo de un durmiente para uno de los rieles es en cada sección de soporte, el ancho del durmiente multiplicado por la mitad de su largo.

Por su parte el apoyo que proporcionaría una viga continua, representada en anaranjado es el ancho ficticio de la viga, que debe ser mayor que el ancho del patín del riel, multiplicado por la distancia entre durmientes. Lo anterior se sintetiza en la siguiente ecuación:

$$S = 2 \cdot u \cdot b_1 = b \cdot a \quad [2.28]$$

La expresión de igualdad de apoyos, pasó a conocerse posteriormente como hipótesis de Timoshenko, que establece según Álvarez M., D y Luque R., P. (2006, p. 114) que, “la vía sobre durmientes puede asimilarse a una vía sobre largueros, si el soporte de traviesa es igual al del larguero entre dos traviesas consecutivas.”

La nueva expresión para la elástica de la vía, en función de los parámetros incluidos por Timoshenko es:

$$L = \sqrt[4]{\frac{8EI_d}{SC}} \quad [2.29]$$

De esta forma, planteando la ecuación diferencial, con las mismas consideraciones que se tomaron para determinar la del método de Zimmermann, las soluciones que definen el método de viga ficticia, para el hundimiento y el momento, respectivamente son:

$$Z(x) = \frac{Qd}{SC} \frac{1}{L} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.30]$$

$$M(x) = \frac{Q}{4} L e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.31]$$

2.2.6.4. Método de Timoshenko-Saller-Hanker

La teoría de viga sobre fundación elástica expuesta anteriormente para el coeficiente de balasto corresponde al caso de un apoyo continuo del riel. La aplicación del método de Winkler a la vía sobre durmientes fue propuesta primero por

Flamache en 1904 y posteriormente por Timoshenko en 1915. Esta aplicación se basa en la suposición de que el soporte que ofrece un durmiente al riel es equivalente al que ofrecería el área de larguero entre dos durmientes consecutivos.

Cabe señalar que esta relación parte de la admisión de una cierta proximidad entre los soportes elásticos, por lo que desde un punto de vista conceptual, no sería válida para apoyos muy distantes.

Más tarde Saller y Hanker, plantearon la adopción de un área útil de apoyo conforme se observa en la Figura 2.11. Esta consideración es más representativa de lo que ocurre en la realidad, debido a la reducida influencia de la zona central de la vía en la resistencia vertical de la misma.

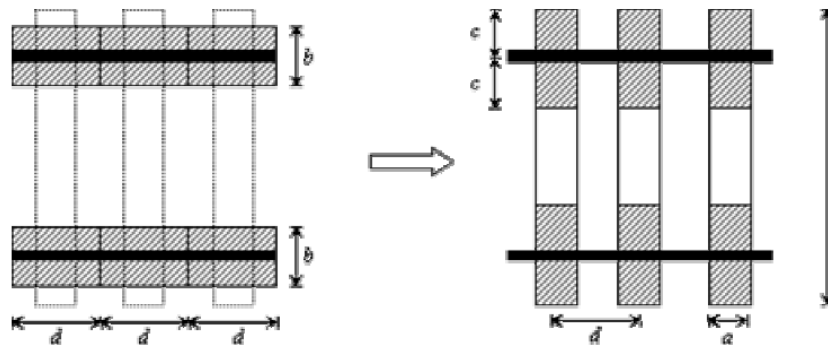


Figura 2.11 - Transformación del apoyo sobre larguero al apoyo sobre durmientes según Saller y Hanker. Fuente: Fonseca (2003)

La superficie de apoyo del durmiente, en tal caso será igual a la siguiente ecuación:

$$A = b \cdot d \quad [2.32]$$

Dejando el ancho de b de esa expresión para sustituir en las expresiones de Zimmermann, teniendo de esta manera las siguientes expresiones para el hundimiento y el momento, respectivamente:

$$Z(x) = \frac{Qd}{2AC} \sqrt[4]{\frac{AC}{4EId}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \sen\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.33]$$

$$M(x) = \frac{Q}{4} \sqrt[4]{\frac{4EI d}{AC}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.34]$$

2.2.6.5. Método de Talbot

El método de Talbot según Da Silva (2006, p. 44), “es un método análogo al método de Zimmermann, más no admite la hipótesis de Winkler, sino que supone la existencia de un coeficiente U, denominado módulo de vía, cuyo significado físico corresponde a una carga que, actuando de forma uniforme a lo largo del riel, produce un hundimiento unitario.”

Se define entonces la siguiente expresión:

$$q = U \cdot z \quad [2.35]$$

La elástica de la vía queda definida como:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{U}} \quad [2.36]$$

Cabe destacar que por definición, el módulo de vía representa la resistencia vertical de la vía por unidad de longitud del riel, por lo que la distancia entre durmientes y su área de apoyo no intervienen explícitamente en el cálculo de los esfuerzos sobre el riel.

Resolviendo de forma análoga al método de Zimmermann, tenemos que las ecuaciones representativas del método de Talbot son:

$$Z(x) = Q \sqrt[4]{\frac{1}{64EI U^3}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.37]$$

$$M(x) = Q \sqrt[4]{\frac{EI}{64U}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [2.38]$$

2.2.6.6. Teoría del Coeficiente de Rigidez de Apoyo

Otro parámetro utilizado para caracterizar la elasticidad de la vía es el coeficiente de rigidez de apoyo, que define la relación entre la carga transmitida a un durmiente y el respectivo asiento producido, de acuerdo a la Figura 2.12.

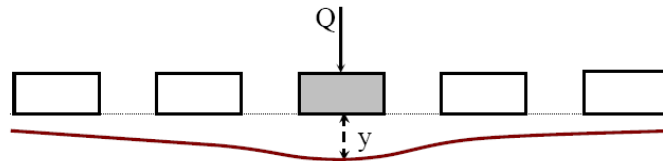


Figura 2.12 - Coeficiente de rigidez de apoyo del durmiente.
Fuente: Fonseca (2003)

El concepto de coeficiente de rigidez surge en el ámbito de las teorías de análisis de la vía como viga sobre apoyos discretos elásticos, en las cuales se considera el riel apoyado sobre dados de constante lineal, que representan el efecto de la resistencia vertical aportada por cada durmiente a la vía.

En el año 1955 Hutter comprobó la equivalencia de resultados a que conducía esta metodología con relación a la de viga sobre fundación elástica, definiendo el coeficiente de reacción como un muelle cuya rigidez representa de forma indirecta la rigidez vertical del conjunto de los componentes de la vía en sentido vertical, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_p} + \frac{1}{K_{pa}} + \frac{1}{K_{durm.}} \quad [2.39]$$

Donde:

- K_b rigidez vertical del balasto
- K_p rigidez vertical de la plataforma
- K_{pa} rigidez vertical de la placa de asiento
- K_{durm} rigidez vertical del durmiente

Según Fonseca (2003, p. 25), “autores como Luber (1962), Birmann (1968), Alias (1971) y Melentiev (1973), entre otros, se han encargado de cuantificar

experimentalmente la magnitud de la rigidez de los diferentes componentes mencionados.”

Sin embargo, dada la elevada rigidez de los durmientes de hormigón y su poco aporte en la magnitud de la rigidez de la vía, así como las dificultades de determinar de forma separada la rigidez del balasto y la plataforma, la ecuación [1.39] se suele simplificar a la siguiente forma:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_{bp}} + \frac{1}{K_{pa}} \quad [2.40]$$

Donde:

K_{bp} rigidez vertical del sistema balasto-plataforma

K_{pa} rigidez vertical de la placa de asiento

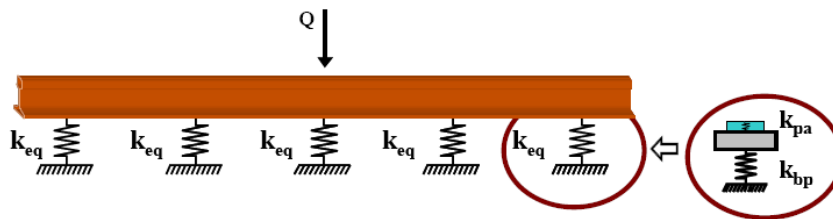


Figura 2.13. Representación esquemática del significado del coeficiente de rigidez de apoyo del durmiente en el modelo de viga sobre apoyos discretos elásticos.

Fuente: Fonseca (2003)

2.3. Método del Elemento finito

Los procedimientos del elemento finito son una parte importante y frecuentemente indispensable en el análisis y diseño de ingeniería. Los programas de computadora del elemento finito son usados en prácticamente todas las ramas de ingeniería para el análisis de estructuras, sólidos y fluidos.

El desarrollo de los métodos del elemento finito para la solución de problemas prácticos de ingeniería comenzó con la llegada de las computadoras. Que es, la esencia de la solución del método en los problemas de ingeniería, en donde se busca principalmente precisión en los resultados, rapidez, facilidad de programación y generalidad en la aplicación, según Bathe (1996).

El método del elemento finito fue desarrollado inicialmente en física básica para el análisis de problemas de mecanismos estructurales. De cualquier manera la técnica ha sido reconocida de forma que pueda ser aplicada igualmente de bien para la solución de varias clases de problemas. Como el caso en que se busca resolver problemas físicos en el análisis de ingeniería y diseño. La Figura 2.14 esquematiza el procedimiento para el análisis de elemento finito.

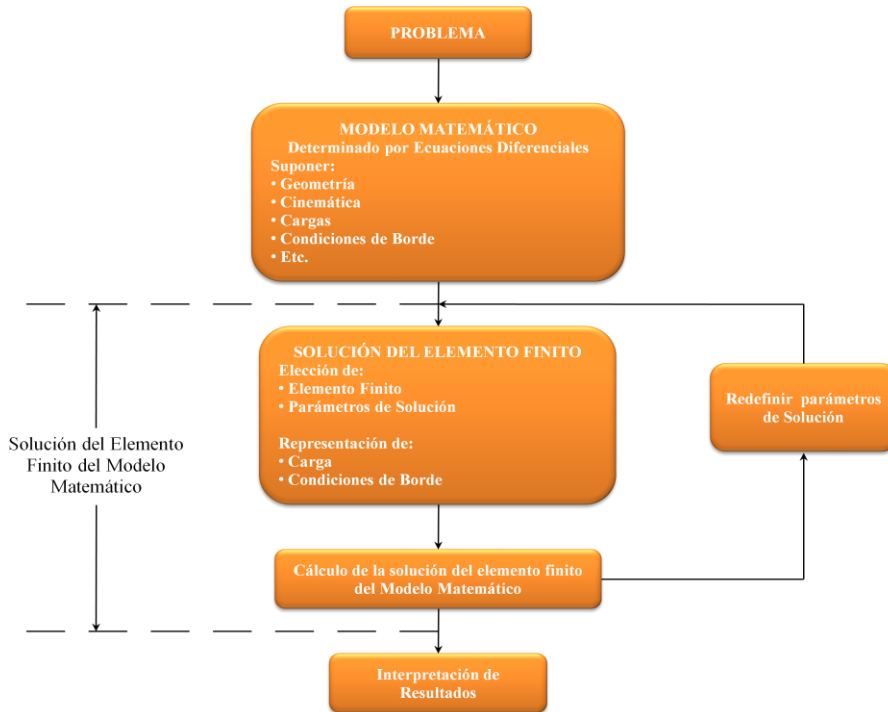


Figura 2.14 - Esquema de análisis del Elemento Finito. Fuente: Bathe 1996

Los problemas físicos típicamente envuelven componentes estructurales sujetos a ciertas cargas. La idealización del problema a un modelo matemático requiere de ciertas suposiciones que permiten obtener la ecuación diferencial que rige el modelo matemático. Así la técnica de solución del elemento del elemento finito es un procedimiento numérico, que es necesario para evaluar la solución exacta.

2.3.1. Métodos Numéricos

Cuando se tienen situaciones físicas cuyos modelos matemáticos resultan complejos de resolver mediante procedimientos analíticos, ya sea por la dificultad del sistema en sí o por la cantidad de cálculos que se requieren, surgen procedimientos alternativos que, mediante operaciones aritméticas, proporcionan un resultado tan aproximado como se desee, estos son los llamados métodos numéricos.

El problema fundamental de una estructura con varios grados de libertad es determinar su respuesta dinámica bajo la excitación de fuerzas efectivas, para lo cual existen diversos métodos, los cuales pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Método de análisis modal (superposición modal)

Este método puede usarse para evaluar la respuesta dinámica de cualquier estructura lineal en la que los desplazamientos sean expresados en términos de un conjunto de N coordenadas discretas, y donde el amortiguamiento sea expresado por la razón de amortiguamiento modal. Sin embargo, según Trejo (2007, p. 39) “no se aconseja aplicarlo a estructuras compuestas con subsistemas de múltiples niveles de amortiguamiento ya que sus ecuaciones de movimiento no pueden ser desacopladas por transformación a coordenadas modales del sistema sin amortiguamiento que es la base del método.”

- Métodos de integración directa

Los métodos de integración directa según Bathe (1996, p. 782) “son aquellos que integran la ecuación de movimiento usando un procedimiento numérico paso a paso, el término directo indica que su prioridad es la integración numérica, no la transformación de las ecuaciones.”

En esencia un método de integración directa está basado en dos ideas fundamentales: primero, en lugar de satisfacer la ecuación de movimiento para el tiempo t , se busca satisfacerla para intervalos discretos de tiempo Δt . Segundo, se contempla la variación de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, dentro del intervalo de tiempo asumido. Además asumimos que los desplazamientos, velocidades y aceleraciones se conocen para el tiempo 0.

Los métodos de integración directa son clasificados por Chopra (2001), de la siguiente manera:

- Métodos basados en la interpolación de la función de excitación.
- Métodos basados en expresiones de diferencias finitas.
- Métodos basados en la variación supuesta de la aceleración.

A su vez, de acuerdo a la estabilidad todos ellos se clasifican en dos grupos:

- Métodos condicionalmente estables. Son aquellos procedimientos que llevan a soluciones limitadas si el paso de tiempo es más corto que algún límite.
- Métodos incondicionalmente estables. Son los procedimientos que no tienden a limitar la solución, independientemente de la longitud del paso de tiempo considerado.

A continuación se plantean las bases teóricas de algunos métodos de integración directa, que determinan la solución de la ecuación de movimiento de una estructura.

2.3.1.1. Método de Wilson θ

El método de Wilson θ , es un método basado en la variación supuesta de la aceleración, de hecho según Bathe (2006, p. 785), “es en esencia una extensión del método lineal de aceleración, en el cual se asume una variación lineal desde el tiempo t hasta $t + \Delta t$ ”. En la Figura 2.15 se muestra que la aceleración en el método de Wilson θ , se asume lineal entre el tiempo t hasta $t + \theta\Delta t$, donde $\theta \geq 1$. Cuando $\theta = 1$, el método se reduce al de variación lineal de aceleración.

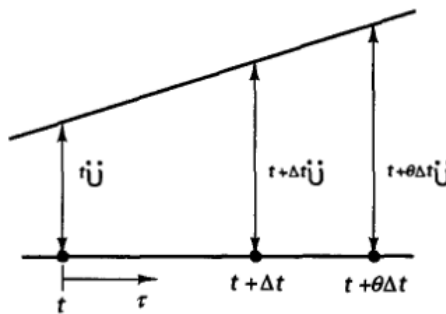


Figura 2.15 - Variación lineal asumida para el método de Wilson θ
Fuente: Bathe (2006)

Con el fin de evaluar un valor óptimo para θ , se debe calcular la variación del radio espectral del operador aproximación como una función de θ , la gráfica que representa esta función se muestra en la Figura 2.16. Se considera que la estabilidad incondicional se obtiene cuando $\theta \geq 1,37$, por lo cual se utiliza en general $\theta = 1,4$

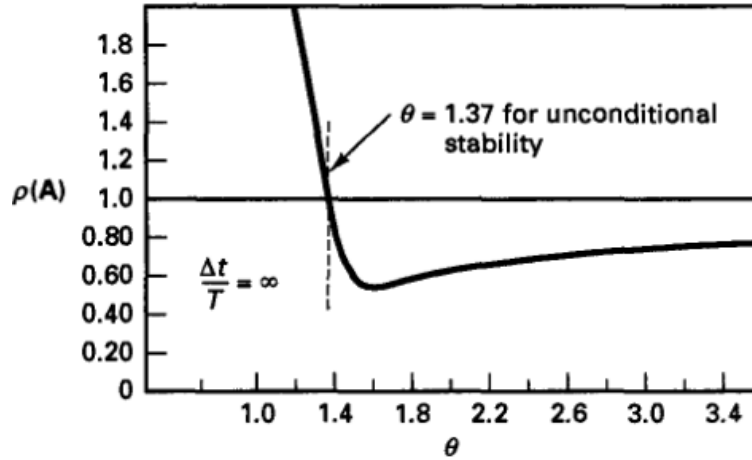


Figura 2.16 - Radio espectral $\rho(A)$ como función de θ
Fuente: Bathe (2006)

Se exponen a continuación las ecuaciones que determinan el método de Wilson, desarrollado con mayor profundidad por Bathe (2006).

Para el intervalo de tiempo (t) hasta un intervalo de tiempo mas el delta de tiempo $(t + \theta\Delta t)$, se asumen las siguientes expresiones para la aceleración en un intervalo de tiempo $(t + \tau)$:

$$\ddot{U}^{t+\tau} = \ddot{U}^t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \quad [2.41]$$

Integrando la expresión [2.41] se obtiene la expresión para la velocidad y el desplazamiento en el intervalo de tiempo $t + \tau$:

$$\dot{U}^{t+\tau} = \dot{U}^t + \ddot{U}^t\tau - \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \quad [2.42]$$

$$U^{t+\tau} = U^t + \dot{U}^t\tau + \frac{1}{2}\ddot{U}^t\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t}\tau^3(\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}^t) \quad [2.43]$$

Al utilizar las ecuaciones anteriores obtenemos en el tiempo $t + \theta\Delta t$, las siguientes expresiones para la velocidad y el desplazamiento:

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \dot{U}^t + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} + \ddot{U}^t) \quad [2.44]$$

$$U^{t+\theta\Delta t} = U^t + \theta\Delta t\dot{U}^t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{U}^t) \quad [2.45]$$

Desde estas ecuaciones se puede encontrar la velocidad $\dot{U}^{t+\theta\Delta t}$ y la aceleración $\ddot{U}^{t+\theta\Delta t}$ en un intervalo de tiempo $t + \theta\Delta t$, en términos del desplazamiento $U^{t+\theta\Delta t}$ para el mismo intervalo de tiempo:

$$\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(U^{t+\theta\Delta t} - U^t) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{U}^t - 2\ddot{U}^t \quad [2.46]$$

$$\dot{U}^{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}(U^{t+\theta\Delta t} - U^t) - 2\dot{U}^t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{U}^t \quad [2.47]$$

Para obtener la solución para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el tiempo $t + \theta\Delta t$, se considera la ecuación de movimiento en este tiempo, es decir:

$$M\ddot{U}^{t+\theta\Delta t} + C\dot{U}^{t+\theta\Delta t} + KU^{t+\theta\Delta t} = \bar{R}^{t+\theta\Delta t} \quad [2.48]$$

Donde el vector de fuerzas esta relacionado con la variación de la fuerzas en el transcurrir del tiempo, tal como se observa en la expresión:

$$\bar{R}^{t+\theta\Delta t} = R^t + \theta(R^{t+\theta\Delta t} - R^t) \quad [2.49]$$

El Método de Wilson θ representa una solución para resolver las ecuaciones diferenciales de los modelos matemáticos, a través de un método de integración directa.

2.3.1.2. Método de Newmark

El método de integración de Newmark puede ser comprendido como una extensión del método de aceleración lineal, según indica Bathe (1996 p. 785).

Buscando las suposiciones usadas de velocidad $\dot{U}^{t+\Delta t}$ y desplazamiento $U^{t+\Delta t}$ para un intervalo de tiempo $t + \Delta t$, tal como muestra en las expresiones:

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + [(1 - \delta)\ddot{U}^t + \delta\ddot{U}^{t+\Delta t}]\Delta t \quad [2.50]$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{U}^t + \alpha\ddot{U}^{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \quad [2.51]$$

Donde α y δ son parámetros que pueden ser determinados para obtener una integración exacta y estable. Cuando $\delta = 1/2$ y $\alpha = 1/6$, la relaciones [2.50] y [2.51] corresponden a un método de aceleración lineal (cual es obtenido usando $\theta = 1$ en el Método de Wilson θ). Newmark originalmente propone una combinación incondicionalmente estable de la constante del método de aceleración promedio (también llamado regla trapezoidal) en cual caso $\delta = 1/2$ y $\alpha = 1/4$, como se aprecia en la Figura 2.17 para las constantes de aceleración promedio del Método de Newmark.

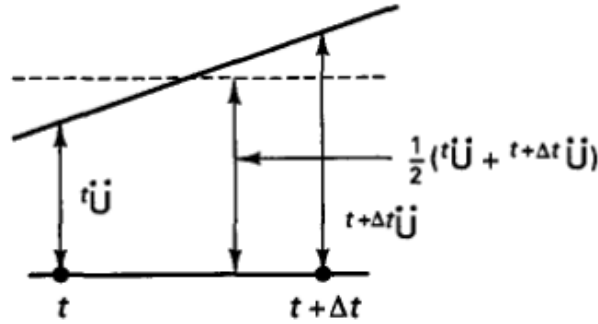


Figura 2.17 - Newmark para constantes de aceleración promedio
Fuente: Bathe (2006)

Adicional a las ecuaciones [2.50] y [2.51], para la solución de desplazamiento, velocidad y aceleración para el tiempo $t + \Delta t$, la ecuación de equilibrio para el tiempo $t + \Delta t$ es considerada de la siguiente manera:

$$M\ddot{U}^{t+\Delta t} + C\dot{U}^{t+\Delta t} + KU^{t+\Delta t} = R^{t+\Delta t} \quad [2.51]$$

Resolviendo la ecuación [2.51] para la aceleración $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ en términos de desplazamiento $U^{t+\Delta t}$ y sustituyendo para términos de la aceleración $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ en la ecuación [2.51] obtenemos las ecuaciones para la aceleración $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ y la velocidad $\dot{U}^{t+\Delta t}$, en términos de un desplazamiento desconocido $U^{t+\Delta t}$. De esas dos relaciones para aceleración y velocidad en un intervalo de tiempo $t + \Delta t$ las cuales son

sustituidas en la ecuación [2.51] para resolver el desplazamiento $U^{t+\Delta t}$ en el mismo intervalo de tiempo de estudio.

El Método de Newmark al igual que el Método de Wilson θ permite resolver las ecuaciones diferenciales de modelos matemáticos que involucren la parte dinámica en su desarrollo, obteniendo la respuesta en función de los valores de aceleración, velocidad y desplazamiento, siempre que los intervalos de tiempo seleccionados sean los adecuados.

2.3.1.3. Paso de Tiempo

La elección del paso de tiempo a usar (Δt) es sumamente importante, si se quieren obtener resultados óptimos y lo más aproximados posible a la realidad del sistema dinámico. Como se explicó en las bases teóricas, los métodos de integración directa pueden ser inestables cuando el paso de tiempo no cumple ciertas características. En el caso de los métodos escogidos para el cálculo, Wilson y Newmark, tenemos que ambos son incondicionalmente estables, cuando sus parámetros intrínsecos son elegidos con precisión. Sin embargo, una primera aproximación a la elección de este parámetro según Bathe (1996, p. 820) es, “si el período más pequeño es T_n , Δt tendría que estar cerca de $\frac{T_n}{10}$, preferiblemente por debajo de este valor.” Si $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ es muy pequeño, podemos asumir entonces que Δt lo será aún más, así que la respuesta se hará excesivamente larga y dificultosa de analizar debido a que se han considerado frecuencias muy altas. Efectivamente, más adelante Bathe (1996), explica que “en muchos casos es innecesario analizar todas las respuestas dinámicas, debido a que sólo algunos modos de vibración tendrán participación directa en la respuesta final, de tal manera que hay poca justificación para incluir en la respuesta los modos más altos.”

En el caso particular del análisis ferroviario, especialmente dadas las complejas características del modelo matemático, la obtención de los modos de vibración y las frecuencias naturales no es un trabajo sencillo. Sin embargo, tomando como

referencia el tren de ensayos ICE citado por Vidal (2009) podemos establecer los siguientes valores de pico en vía, para una velocidad de 320 Km/h:

- 20 Hz, debido a la configuración de los ejes.
- 50 Hz, debido a ondulaciones de carril de onda larga y espaciado de traviesas, considerando traviesas sin apoyo (danza de traviesas).
- 100 Hz, debido a las mismas cargas del segundo apartado.
- 130 Hz, (punta) coincide con el espacio entre traviesas de 60 cm.
- 220 Hz, debido a ondulaciones de carril de onda corta.

Las vibraciones por encima de 50 Hz (alta frecuencia) interfieren en el comportamiento vibratorio del asiento del balasto bajo las cargas del tráfico, y en las líneas de alta velocidad son de esperar puntas en la gama de frecuencias de 50 a 150 Hz, esto se puede apreciar en la Figura 2.18, proveniente de un ensayo realizado en 2006, a un tren AVE-Alstom desplazándose a 250 km/h.

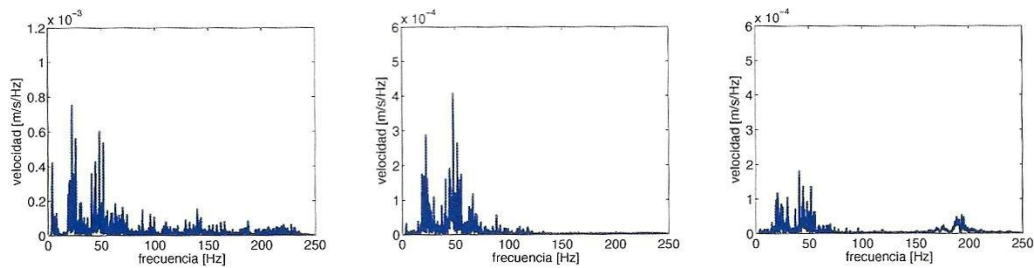


Figura 2.18 - Contenido en frecuencias al paso de un tren AVE a 250 Km/h a 3, 8.6 y 11.8 metros del eje de vía. Fuente: Galvín (2007).

Como se aprecia en la información de estos ensayos, en el caso de trenes que van a velocidades significativamente inferiores a los de alta velocidad, las frecuencias alcanzadas no son tan elevadas, estando en un rango de entre 25 y 50 Hz. Por esta razón los últimos modos de vibración pueden ser despreciados y en estos casos, según Bathe (2006), “El período a utilizar para el cálculo del paso de tiempo es el más pequeño dentro de un número determinado de modos de vibración a considerar.”

2.4. Antecedentes

Los estudios relacionados del sistema ferroviario han sido estudiados por numerosos autores, con el fin de mejorarlo y entender la multiplicidad de fenómenos que se presentan cuando el tren pasa sobre los rieles. Una de estas áreas de estudio se concentra principalmente en la búsqueda de la respuesta dinámica, no sólo de los elementos de la vía férrea sino también del vehículo ferroviario, incluyendo así la forma en que interaccionan estos dos grandes sistemas. Con la aparición de la informática el empleo de métodos numéricos para realizar estos estudios se ha generalizado, su éxito radica en la simplicidad con la que permite abordar problemas reales complejos y además en el potencial uso de los ordenadores, permitiendo de esta manera obtener resultados precisos y en un corto tiempo.

Los trabajos que se presentan a continuación de forma cronológica fueron consultados y estudiados a lo largo de la investigación de las bases teóricas en las que se fundamenta el estudio dinámico de ferrocarriles.

La interacción dinámica vehículo-vía es estudiada por Y. Q. Sun y M. Dhanasekar en el año 2000 publicando un artículo titulado “A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system”. Con la concepción de trenes de alta velocidad, el estudio de la interacción dinámica entre el vehículo ferroviario y la estructura de la vía se ha convertido en un factor crítico de estudio. Los autores proponen en este sentido el desarrollo de un modelo dinámico para examinar la interacción vertical del tren y la vía. El vagón se modela en este caso con diez grados de libertad, tomando en cuenta cuatro ejes de ruedas que representan dos bogies. La vía se modela como un sistema de cuatro partes, unido al vagón mediante un contacto de Hertz no lineal.

Los autores comparan los resultados obtenidos de su modelo dinámico, con los datos de la bibliografía de importantes autores que han estudiado este fenómeno, validando de esta forma el modelo presentado y definiéndolo como altamente funcional para examinar y predecir la respuesta dinámica del vehículo y los componentes de la vía férrea. De los ejemplos numéricos presentados en el artículo se

puede inferir la exactitud matemática del modelo presentado en comparación con otros modelos, lo cual lo hace preciso y confiable para el estudio dinámico de ferrocarriles. Se hace la acotación finalmente de que el modelo solo puede ser usado cuando todos los datos que definen las características del sistema son conocidos. Finalmente, los ejemplos matemáticos permitieron concluir que la suspensión secundaria no afecta las fuerzas de impacto de ninguna manera.

En el año 2001, Jaime Domínguez Barbero realizó un estudio titulado “Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia”. En esta tesis se abordan dos aspectos relacionados con la dinámica de los puentes de ferrocarril: los métodos de cálculo aplicables al estudio de estas estructuras y la aparición de la resonancia en líneas de alta velocidad. Se parte de un estudio detallado del ámbito normativo internacional y de los modelos de cálculo disponibles para valorar los efectos producidos por las cargas móviles. Se propone, además, un método de cálculo simplificado, denominado método de la impronta dinámica proporcional (IDP). Además de estudiar el fenómeno de la resonancia en un número representativo de viaductos y marcos pertenecientes a las líneas de alta velocidad españolas, se estima el margen de seguridad existente en el uso del coeficiente de impacto para velocidades inferiores a 300 km/h.

Las conclusiones más importantes del trabajo pueden resumirse con los siguientes enunciados, por la naturaleza del comportamiento dinámico de los puentes de ferrocarril son recomendables las técnicas del análisis modal para el desarrollo de métodos de cálculo específicos, tanto en el ámbito de puentes isostáticos como hiperestáticos. Y por otra parte, los métodos de cálculo basados en modelos de cargas puntuales son recomendables para la realización de cálculos preliminares. En una segunda aproximación, necesaria para la definición del proyecto, puede ser aconsejable la utilización de métodos que consideren interacción simplificada entre los vehículos y la estructura.

Siguiendo en esta línea de investigación se encuentra el trabajo de Paulo Fonseca Teixeira en el año 2003, cuyo título es “Contribución a la reducción de los costes de mantenimiento de las vías de alta velocidad mediante la optimización de su rigidez

vertical”. La tesis analiza la problemática de vías sobre balasto en el ámbito del diseño de nuevos trazados para tramos de alta velocidad, donde están presentes la rigidez vertical en el deterioro de la calidad geométrica de la vía, así como en las resistencias al avance de los vehículos. Su objetivo principal es encontrar un valor de rigidez que optimice las características de la vía y disminuya los costes económicos asociados al sistema ferroviario. El autor desarrolla una metodología que permite evaluar el impacto económico y a su vez establecer un rango de valores de rigidez vertical óptima en función de la magnitud de los principales parámetros los cuales son el material circulante, las condiciones de explotación, el coste energético, entre otros.

Los resultados presentados indican que, para una vía de alta velocidad con un importante volumen de tráfico y bajo la perspectiva dual señalada, el valor de rigidez vertical óptimo se sitúa entre 70 kN/mm y 80 kN/mm. Se indica que para una vía típica de alta velocidad, la rigidez de la superestructura ferroviaria debe situarse entorno a 60 kN/mm. A su vez, el autor analiza la incidencia de las dispersiones de rigidez vertical de la vía a lo largo de un trazado, estableciendo un criterio de máxima variación de ese parámetro entre traviesas consecutivas, que permita prevenir un deterioro acelerado de la vía en zonas puntuales y garantizar la validez del modelo desarrollado.

En el año 2004, K. Koro, K. Abe, M. Ishida y T. Suzuki, publicaron un artículo titulado “Timoshenko beam finite element for vehicle-track vibration analysis and its application to jointed railway track”. En este desarrollo se consideran las vibraciones verticales producidas por el paso de la carga móvil sobre el riel, el autor parte de la premisa de que las grandes fuerzas del contacto rueda-riel son provocadas por imperfecciones en el vehículo y los componentes de la vía y son la causa del daño progresivo de estos componentes. Este artículo presenta un elemento de viga Timoshenko que puede representar la discontinuidad asociada a las cargas móviles. La simulación es aplicada para predecir la respuesta de impacto en el riel causada por el paso del tren y para determinar los efectos del tren a alta velocidad en las uniones ferroviarias. Así pues los principales resultados obtenidos con esta metodología son que las fuerzas de impacto provocadas cuando la rueda pasa por una unión del riel

son relativamente más grandes en comparación con las fuerzas dinámicas observadas en una rueda marchando sobre un riel que se supone continuo. Por lo tanto se observa que los efectos de las uniones en la respuesta dinámica son significativos y deben tenerse en cuenta en estudios especializados y críticos de la vía férrea.

En 2006, P. Lou y Q-Y. Zeng, presentan su artículo “Vertical vehicle-track coupling element”, el cual se basa en un estudio dinámico del comportamiento vertical del sistema vehículo-vía, basados en un análisis por el método de acoples de elementos, considerando el vehículo y la vía como un solo sistema dinámico. De esta forma modelaron el vehículo en marcha como un cuerpo rígido sobre dos bogies cada uno de dos ejes, con diez grados de libertad y dos suspensiones, con amortiguación viscosa. Además el riel fue modelado como una viga y la capa de asiento elástica con amortiguación viscosa y rigidez lineal, al igual que el balasto. Por último los durmientes se modelaron como cuerpos rígidos colocados sobre el balasto. Obtuvieron de esta forma la ecuación dinámica de movimiento en forma matricial, la cual resolvieron empleando un método de integración directa como Wilson ó Newmark para obtener la respuesta dinámica. En los ejemplos numéricos se destaca el estudio de la ampliación de los desplazamientos conforme aumenta la velocidad, el efecto de la rigidez y la amortiguación viscosa del balasto en la respuesta dinámica.

Las principales conclusiones que obtuvieron los autores son que si un durmiente pierde parcialmente el soporte que le proporciona el balasto, las aceleraciones verticales del vehículo, del riel y del durmiente sin soporte, así como las fuerzas de contacto se ven afectadas. Además en este caso el efecto de la velocidad del vehículo es significativo para los desplazamientos verticales, los cuales aumenta en función del aumento de velocidades del tren.

Otro artículo relacionado es el presentado por P. Lou, X-G. Zhong, J-F. Tang y Q-Y. Zeng, en el 2006 titulado “Finite-element analysis of discretely supported rail subjected to multiple moving concentrated forces”. La idea del trabajo gira en torno al empleo del método del elemento finito como técnica para crear un modelo de la vía férrea, tomando en cuenta los rieles, la capa de asiento, los durmientes y el balasto, sometido a múltiples fuerzas concentradas.

Para el desarrollo de la investigación, los autores presentan el modelo matemático, simulando el riel como un elemento tipo viga Bernoulli-Euler, discretizado en elementos cuyos límites son nodos. Este riel está soportado por elementos discretos, los durmientes, modelados como cuerpos rígidos, entre los cuales existen elementos de amortiguación viscosa y rigidez lineal, que representan las capas de asiento. Finalmente sobre una plataforma infinitamente rígida, se ubican los elementos sin masa que modelan el balasto con amortiguación y rigidez. Este modelo de varios grados de libertad, permitió a los autores obtener la ecuación dinámica de movimiento, la cual fue resuelta por ellos para su empleo en los ejemplos numéricos, mediante el método de integración directa denominado Wilson θ .

Los resultados que obtuvieron se basan en dos casos, el primer caso numérico que se presenta, tiene por objeto el estudio del efecto de la longitud del elemento de riel en la respuesta dinámica, su conclusión respecto a este planteamiento es que la longitud del elemento de riel debe ser adoptada como dos veces la longitud entre durmientes, de esta manera además de que se evitan resultados con limitada precisión, se reduce el tiempo de la corrida computacional. El segundo caso presentado está orientado a evaluar el efecto de los coeficientes de rigidez y amortiguación y de la velocidad de las fuerzas móviles en la respuesta dinámica. En este caso sus conclusiones son que por un lado el efecto de la velocidad en la máxima respuesta dinámica no es significativo, y por otro lado que el efecto de los coeficientes de rigidez y amortiguación de la capa de asiento entre el riel y el durmiente si son significativos en dicha respuesta.

La investigación se completó con el cálculo de los momentos flectores y las fuerzas de corte en la sección transversal de los nodos, así como en la sección transversal de cualquier punto ubicado sobre el riel. Esto se logró empleando un modelo que los autores P. Lou y otros, detallan con precisión, sin embargo emplean paralelamente para su validación las ecuaciones desarrolladas por Timoshenko. Sus conclusiones respecto a la fuerza de corte y a los momentos flectores fue que el modelo presentado en la investigación proporciona respuestas más pequeñas en comparación con el modelo clásico, eso se deba a que en el caso presentado por los

autores, sólo son consideradas las fuerzas inducidas por la matriz de rigidez y los desplazamientos y rotaciones del nodo correspondiente, los demás factores son despreciados.

Por su parte Antonio Carnerero Ruiz en 2007, realizó una investigación titulada “Comportamiento dinámico de tableros de puentes de ferrocarril de alta velocidad formados con elementos transversales a la dirección de la vía”. La tesis establece las bases analíticas y los métodos de cálculo dinámico, para tableros con elementos transversales, incidiendo en los aspectos particulares de la actuación de la carga sobre la superficie, la cual puede transmitirse tanto sentido transversal como longitudinal. Así mismo, se evalúan las variables principales que definen este tipo de tableros y su incidencia en la relación con las norma establecidas que consideran tanto el servicio, las deformaciones y las aceleraciones, así como el último límite de resistencia y la fatiga, para establecer finalmente, los criterios de diseño que permiten conducir a proyectar tableros con elementos transversales con un comportamiento dinámico adecuado.

Este estudio se realiza básicamente por la construcción de nuevas líneas de alta velocidad está propiciando la aparición de nuevas condicionantes en el diseño de los puentes, que unidas a las existentes, está buscando al empleo de nuevos diseños a existentes en puentes viga. Además, las características propias de los tableros formados con elementos transversales, cuyas características son rigideces moderadas y escasa masa, las cuales se encuentran sometidos a la acción directa de los trenes, les hacen ser susceptibles de sufrir importantes desplazamientos y aceleraciones.

Considerando la parte correspondiente a los métodos numéricos se encuentra la investigación realizada por Francisco de Jesús Trejo Molina en 2007, él cual realizó una tesis acerca de los métodos numéricos, titulada “Análisis comparativos en métodos numéricos de integración directa para evaluar la respuesta dinámica en estructuras”. El objetivo principal que persigue esta tesis es el de analizar comparativamente los métodos numéricos de mayor utilidad propios de la dinámica estructural, con el fin de selecciona aquél que sea adecuado en la obtención de la respuesta dinámica de estructuras de varios grados de libertad.

A pesar de que el desarrollo se plantea desde el punto de vista de estructuras civiles, el autor hace un excelente recorrido por los diferentes métodos numéricos de obtención de respuestas dinámicas, obteniendo los resultados mediante datos generados por el programa Fortran 90/95, en forma de gráficas de cada uno de los métodos estudiados.

El autor concluye que el método de aceleración promedio presenta mayor estabilidad en su comportamiento al utilizarlo en sistemas lineales, sin importar el tamaño del paso de tiempo considerado, proporcionando resultados más precisos en comparación con los otros métodos. En cuanto a los demás, el autor refleja que para sistemas lineales el método de Wilson proporciona buenos resultados, no obstante presenta disipación numérica e inestabilidad si se manejan pasos de tiempo muy grandes.

Una vez realizado el recuento de algunos trabajos relacionados con la investigación estudiada y definidas las bases teóricas que fundamentan el estudio dinámico de la vía férrea a través de la definición de las funciones para el sistema ferroviario y describiendo sus características, así mismo como la aplicación de los métodos del elemento finito en el desarrollo del modelo matemático, de forma que el desarrollo que se expone a continuación representa una metodología de cálculo con la finalidad de simular el comportamiento de la vía férrea ante el paso de un tren.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

El estudio dinámico de la superestructura ferroviaria ha representado un reto para los investigadores desde los orígenes del ferrocarril, debido a la complejidad del estudio y de la resolución de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la vía férrea. En la actualidad se recurre, en la mayoría de los casos al empleo de procesos automatizados; en los que, mediante diversas técnicas numéricas se obtienen los resultados esperados.

El factor principal que entraña la complejidad de los análisis dinámicos, es la gran cantidad de parámetros que intervienen en su estudio, cuya naturaleza puede ser física, como la masa, la rigidez y la amortiguación del sistema, ó intrínseca del método numérico a emplear, entre los que se encuentran incremento temporal usado en el cálculo y constantes de estabilidad.

La metodología que se empleó, contempla en primer lugar el planteamiento del modelo matemático representativo de la vía férrea, donde se detallará la configuración de los elementos, desde el punto de vista geométrico, las consideraciones iniciales a tener en cuenta dentro de la solución y la discretización de la vía ferroviaria. A partir de este modelo, se presentó la ecuación diferencial del comportamiento dinámico de la superestructura ferroviaria, describiendo y analizando sus términos, tanto desde el punto de vista físico como matemático.

Posteriormente se presentaron los parámetros de cálculo, tomando en cuenta las recomendaciones particulares sobre los mismos y se expusieron los valores que toman según la bibliografía consultada. Lo anterior con el fin de emplearlos para la obtención de los resultados.

Además, se evalúan las ventajas e inconvenientes que presentan el método de Wilson θ y el método de Newmark, para la resolución de la ecuación diferencial. Esta idea con el fin de compararlos y escoger aquel método que aporta más ventajas a la

resolución del modelo matemático, considerando los múltiples factores de los que depende esta elección, entre los que se pueden mencionar principalmente la precisión de los resultados, la rapidez del método, su facilidad de programación, la generalidad en su aplicación y la relación del planteamiento matemático con el sentido físico del problema dinámico.

Por otra parte se presenta la descripción detallada del código computacional específicamente desarrollado a lo largo del trabajo y empleado en la obtención de la mayor parte de los resultados del mismo, para lo cual se muestran los planteamientos numéricos en los que se basan sus algoritmos de cálculo principales y se expone la validación de sus resultados, desarrollada como parte de los apéndices del trabajo de investigación.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos mediante la realización de una serie de corridas del programa, las cuales se estructuraron en un grupo de casos que permiten la modificación de las variables según el problema de estudio.

3.1. Simulación del Comportamiento de la Vía Férrea

Los modelos matemáticos actuales plantean la posibilidad de afrontar el estudio de una vía ferroviaria, apoyada sobre soportes discretos representados por durmientes, a través de la utilización del método del elemento finito ó alguna herramienta numérica similar. Sin embargo, los estudios realizados con anterioridad y que representan las bases históricas de estos cálculos, fueron abordados en principio por renombrados investigadores como lo son: Winkler, Zimmermann, Timoshenko, Saller, Hanker y Talbot, entre otros. Sus teorías, que fueron planteadas y analizadas en el Capítulo 2 del presente desarrollo, son la base de la mecánica ferroviaria y representan un punto de partida para comprender con profundidad el comportamiento de la superestructura. Así pues, además de exponer como bases teóricas sus desarrollos, uno se los objetivos plantea la necesidad de evaluar con un código computacional algunos de estos modelos con el fin de interpretar sus resultados y la influencia de algunos parámetros de vía comúnmente aceptados.

El comportamiento de la vía férrea será estudiado partiendo de las teorías descritas en el Capítulo 2, del presente desarrollo. Para cada una de ellas se creó un código computacional en MATLAB, para simular la respuesta de la superestructura y observar su desplazamiento vertical y los momentos flectores. En el apéndice 3, se expone el desarrollo de un análisis dimensional de las teorías a programar, con el fin de clarificar las unidades encontradas para los valores de los parámetros en las ecuaciones.

Los dos casos analizados en las teorías de Zimmermann, Zimmermann-Timoshenko y Timoshenko-Saller-Hanker, permiten comparar el efecto de variar el coeficiente de balasto y la carga aplicada, respectivamente. Para el primer caso, se presenta una vía férrea con un valor constante del coeficiente de balasto (C), sometida a distintos valores carga estática. El segundo caso simula una situación donde la fuerza de contacto permanece constante, variando los coeficientes de balasto para compararlos posteriormente.

Los resultados obtenidos mediante la corrida de estos casos, así como una breve descripción del comportamiento de la vía para cada uno de los modelos, con su rutina se encuentran en los apéndices. Así, la teoría de Zimmermann se ubica en el apéndice 5, denominado Código del Método de Zimmermann. En el apéndice 6, se encuentra la teoría desarrollada en conjunto por Zimmermann y Timoshenko. Finalmente, siguiendo con los autores estudiados, el apéndice 7, propone el método de Timoshenko, Saller y Hanker.

La profundización en el comportamiento de la vía férrea mediante el estudio de teorías que lo explica, permite abordar con propiedad los métodos numéricos para el estudio de la vía férrea, en este caso particular el método de los elementos finitos, cuya versatilidad permite la creación de modelos mucho más aproximados.

3.2. Método de análisis del elemento finito para una vía férrea con soportes discretos sujeta a fuerzas móviles concentradas.

El estudio de la dinámica de la vía férrea, ha sido un tópico de estudio clásico por varias décadas, debido a que es bien conocido que la curva de esfuerzos de un riel es una de las consideraciones más importantes en el diseño de la misma. Por lo anterior, es el objeto de estudio del presente trabajo obtener la respuesta dinámica de una vía ferroviaria.

Para representar el comportamiento físico de una estructura bajo condiciones de carga dinámica en forma cuantitativa, es necesario valerse de modelos matemáticos, los cuales no son más que idealizaciones conceptuales de sistemas reales. De acuerdo a lo anterior, se debe tener presente durante el estudio, que estas aproximaciones proveen un conocimiento exacto y preciso del comportamiento del modelo, pero sólo representan una limitada y aproximada información del comportamiento del sistema real.

Cualquier estructura que se desee simular, vendrá representada por su ecuación de movimiento, la cual se obtiene considerando los grados de libertad supuestos, las condiciones de carga y sus dispositivos de amortiguación, rigidez y masa. En el caso de la superestructura ferroviaria, los diferentes elementos que la componen y sus características determinarán las condiciones para obtener la ecuación de movimiento. Así pues, el modelo de elementos finitos representa al riel como una viga, dispuesta sobre durmientes que se modelan como apoyos discretos y además sometida a fuerzas móviles concentradas.

Para ello, se presentan a continuación las consideraciones iniciales que fundamentan el modelo matemático a emplear en el cálculo, mediante suposiciones que simplifican de forma apropiada el problema dinámico real y su estudio considero:

- El estudio solo de vibraciones en el plano vertical.
- Las líneas de acción de todas las cargas pasan por los centroides de las secciones transversales. Esto implica que sólo se hace el planteamiento del estudio de un riel, asumiendo que su comportamiento se repite en el otro.

- El elemento de vía se modela como una viga uniforme, sin amortiguación de tipo Bernoulli-Euler.
- La sección transversal de la viga se supone simétrica respecto al eje vertical.
- Los esfuerzos cortantes son despreciables, en consecuencia las secciones transversales no se deforman cuando la viga se defleca.
- La fuerza cortante y el momento flector no están relacionados con la fuerza axial, por lo cual ésta se puede despreciar.
- Los rieles se fijan a los durmientes mediante elementos de fijación que contemplan el uso de una placa de asiento que posee elasticidad lineal y amortiguación viscosa.
- Los durmientes se representan mediante cuerpos rígidos, descansando sobre elementos discretos sin masas que modelan el balasto, cuyas características lo hacen poseedor de elasticidad lineal y amortiguación viscosa.
- Un elemento se encuentra limitado por dos círculos negros en los extremos, denominados nodos.
- Cada nodo de los elemento de vía posee dos grados de libertad, que representan un desplazamiento vertical (y) y una rotación (θ) del nodo.
- Cada durmiente posee un grado de libertad (y_s), que representa el desplazamiento vertical del durmiente.
- Las fuerzas provenientes del paso del vehículo se asumen puntuales y su distribución depende en cada instante de tiempo del movimiento del tren y su velocidad.
- La infraestructura, conformada por la plataforma de fundación de la vía, se supone infinitamente rígida para los efectos del cálculo.

Para la formulación de la ecuación de movimiento por el método del elemento finito, se debe realizar una discretización del riel, de manera que cada elemento de riel de longitud finita, esté limitado por dos nodos. Esto quiere decir que, según Chandrupatla (1999, p. 242) “la viga se divide en elementos, limitados por nodos en los extremos cuyos desplazamientos verticales son $y_{r(x,t)}$ ”.

De acuerdo a lo expuesto en las consideraciones iniciales, el modelo matemático que representa la superestructura de la vía férrea, se muestra en la Figura 3.1. En ella se ilustra lo relacionado con los desplazamientos verticales y las rotaciones de los nodos de la viga, así como el desplazamiento vertical correspondiente a los durmientes.

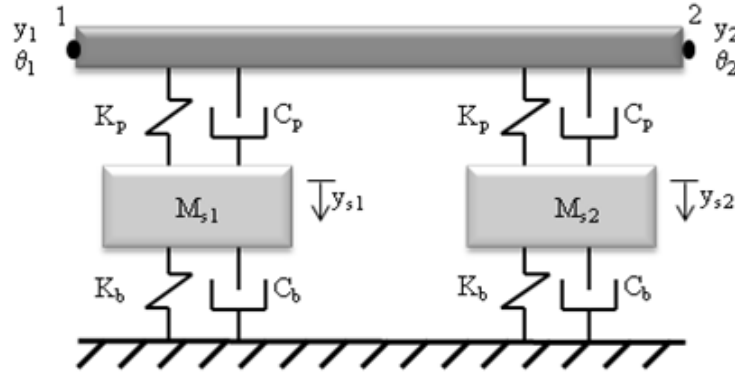


Figura 3.1 - Modelo del elemento finito de un elemento de riel

Siguiendo con la deducción de la ecuación de movimiento, el desplazamiento vertical del elemento de riel $y_{r(x,t)}$ puede ser expresado en términos de una matriz función de forma N y un desplazamiento nodal del elemento de riel q_r^e , de la siguiente forma:

$$y_r(x,t) = Nq_r^e \quad [3.1]$$

Las funciones de forma N deben satisfacer las siguientes condiciones: su primera derivada debe ser finita dentro de un elemento, y además, los desplazamientos deben ser continuos a través de la frontera del elemento.

Como están implicados valores nodales y pendientes nodales y por tratarse del estudio de un elemento de viga, la función de forma utilizada se define por un polinomio cúbico de Hermite, que según Chandrupatla (1999, p. 242), “satisfacen valores nodales y requisitos de continuidad de pendiente”.

Finalmente la matriz de forma que se emplea en el desarrollo, es un polinomio de cúbico de Hermite, planteado por Lou (2006) como:

$$N = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad [3.2]$$

Donde:

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad [3.3]$$

$$N_2 = x \left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad [3.4]$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad [3.5]$$

$$N_4 = x \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad [3.6]$$

Donde, L denota la longitud del elemento de riel y x la coordenada longitudinal de cualquier punto, medida desde el nodo izquierdo del elemento.

Como se mencionó en las consideraciones previas al desarrollo, el elemento de la vía se encuentra sometido a fuerzas móviles concentradas, cuyo número total es n . Sin embargo, se debe tener en cuenta que debido a que estas fuerzas son móviles y dependen del tiempo, la distribución del número total de fuerzas sobre el riel discretizado, es variable a medida que el tren pasa a través del tramo de vía en estudio. Este número de fuerzas concentradas provienen del contacto rueda-riel, que a su vez depende de las consideraciones tomadas acerca del vehículo ferroviario. En la Figura 3.2, se presenta el vagón que pasa sobre la vía y provoca la respuesta dinámica; las medidas planteadas para las distancias entre ruedas y bogies, son las reportadas por García (2009) provenientes de una visita realizada al Instituto de Ferrocarriles del Estado (IFE) y son las que se emplean posteriormente en los cálculos.

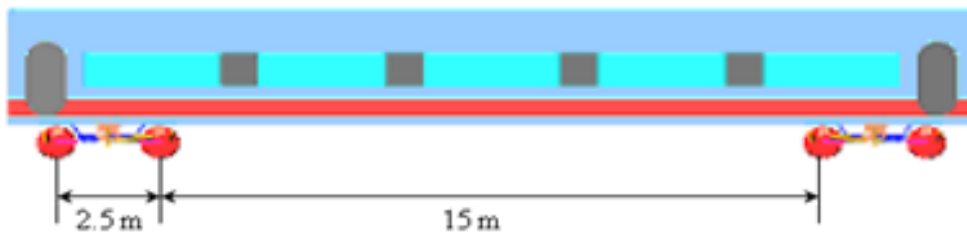


Figura 3.2 - Modelo del vagón que transita sobre el riel. Fuente: Álvarez, M. (2006)

A partir de las funciones de forma definidas por el polinomio cúbico de Hermite y descritas anteriormente, se emplea el principio de desplazamientos virtuales, el principio de Hamilton y el método de la energía para obtener la ecuación de movimiento en forma matricial del elemento del riel, sujeto a las condiciones antes mencionadas:

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & 0 \\ 0 & m_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r^e \\ \ddot{q}_s^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rs} \\ C_{sr} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^e \\ \dot{q}_s^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr}^* + K_{rr}^{**} & K_{rs} \\ K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r^e \\ q_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r^e \\ f_s^e \end{bmatrix} \quad [3.7]$$

El modelo matemático del riel con un número de fuerzas concentradas, se representa en la Figura 3.3. En este caso se simplificaron los elementos de apoyo del riel, capas de asiento, durmientes y balasto, debido a que su configuración está representada en la figura anterior.

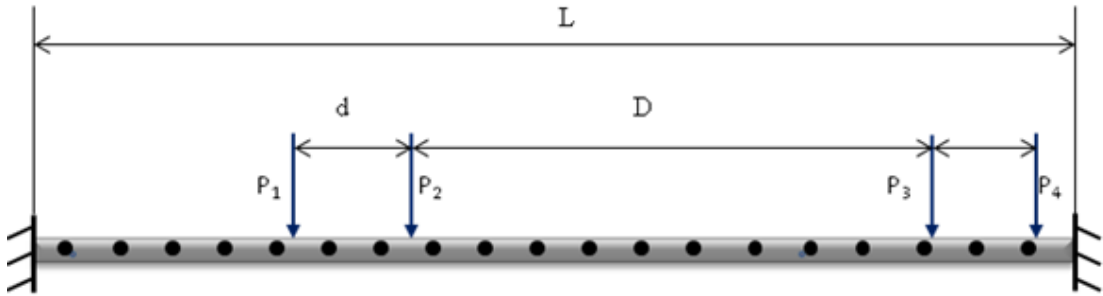


Figura 3.3 - Modelo matemático de la vía con un número de fuerzas concentradas móviles

La ecuación de movimiento de la vía bajo este número de fuerzas concentradas en movimiento para un tiempo t puede escribirse como:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \quad [3.8]$$

Donde M , C y K denotan las matrices de masa, amortiguación y rigidez global respectivamente para la vía; $\ddot{q}$, $\dot{q}$ y q son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente de la vía; y f es el vector global de fuerzas. Las matrices de masa, amortiguación y rigidez y el vector de fuerza para un elemento de vía fueron dados en la ecuación [3.7], las matrices globales M , C , K y el vector global

de fuerzas f se obtienen ensamblando todas las correspondientes matrices de elementos y vectores de fuerzas, respectivamente.

En el caso de los durmientes, su número también es variable en función de la longitud del elemento a considerar, así el número de durmientes se representa por n_s . El vector de los desplazamientos de los durmientes es una incógnita en la ecuación de movimiento y viene representado de la siguiente forma:

$$q_s^e = [y_{s1} \ y_{s2} \ \dots \ y_{sn}]^T \quad [3.9]$$

Para entender el significado físico de la ecuación de movimiento global, podemos expresarla en función de las fuerzas que representan cada uno de los términos que la componen de la siguiente manera:

$$F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = f_{ext}(x, t) \quad [3.10]$$

El primer término: $F_i(t)$, representa las fuerzas inerciales del sistema, que dependen de la distribución de masas a lo largo de la viga y de los durmientes. Además es dependiente del tiempo debido a que, aunque la matriz global de masa es constante, las aceleraciones no lo son.

El segundo término: $F_a(t)$, representa las fuerzas de amortiguamiento debidas a los elementos elásticos, cuya condición principal es que son proporcionales a la velocidad, debido a que los amortiguamientos empleados son viscosos.

El tercer término: $F_e(t)$, representa las fuerzas elásticas de la estructura que se opone al movimiento, este término depende de la rigidez de los elementos del sistema.

Finalmente: $f_{ext}(x, t)$, representa las fuerzas exteriores originadas por el paso del tren a lo largo del riel, ellas dependen tanto del tiempo como de la posición, debido a su carácter de cargas móviles concentradas.

3.3. Configuraciones en el modelo del elemento finito para una vía férrea con soportes discretos sujeto a fuerzas móviles concentradas.

El modelo a analizar mediante el método del elemento finito es el descrito anteriormente en donde se tiene una viga que representa el riel de la vía férrea, discretizada en una cantidad de elementos determinados que dependerán de la longitud de la viga y de las características que se le asignen a cada elemento. Sin embargo, debido a la complejidad de programación y análisis de todos los casos posibles, sólo se tomarán en cuenta dos casos para la discretización del tramo de riel en estudio.

CASO 1. El elemento de viga a considerar entre dos nodos consecutivos es como el que se muestra en la Figura 3.4, el cual presenta una longitud de $l = 1,2 \text{ m}$, con dos durmientes por elemento para su configuración.

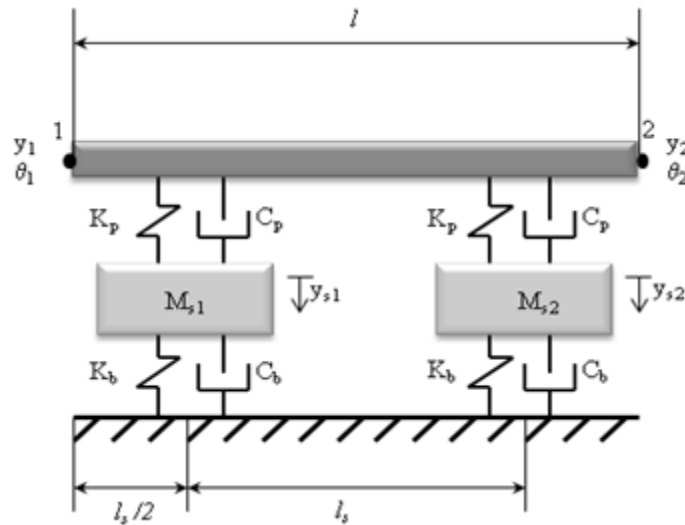


Figura 3.4 – Modelo del elemento de viga para el primer caso de estudio

La Figura 3.4 representa la longitud total del elemento, así como la distancia de separación entre los durmientes que para el caso de estudio es de $l_s = 0,6 \text{ m}$ (Zhai 2006), siendo evaluada estas propiedades en las respectivas ecuaciones con la consideración de que el cero se encuentra siempre en el nodo izquierdo del elemento.

CASO 2. La segunda configuración a estudiar es un elemento de viga con una longitud de $l = 0,6 \text{ m}$, el cual presenta un solo durmiente por elemento para su configuración como se puede observar en la Figura 3.5.

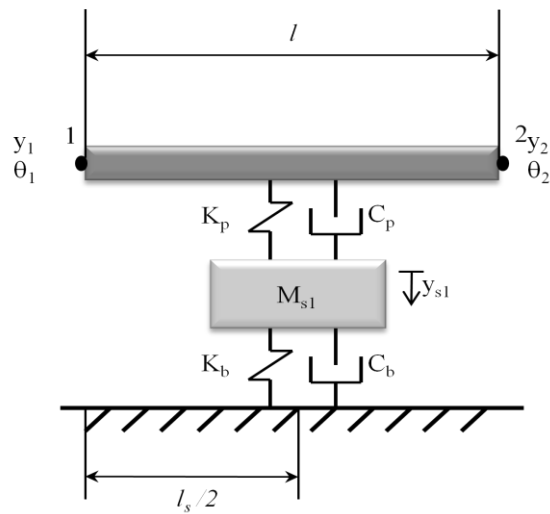


Figura 3.5 – Modelo del elemento de viga para el segundo caso de estudio

En este caso, la distancia desde el nodo izquierdo hasta el durmiente, es la mitad de la distancia de separación entre los durmientes, cuya magnitud es igual que en el caso anterior.

Para el cálculo de las matrices de la ecuación de movimiento, en ambos casos planteados, es necesario conocer los valores de los parámetros de masa, rigidez y amortiguación de los elementos del sistema férreo. A continuación se presenta la Tabla 3.1, donde se resumen los principales valores de los parámetros involucrados en el modelo matemático, según la bibliografía consultada.

Tabla 3.1 - Nomenclatura y parámetros del modelo de la vía

Nomenclatura	Parámetros	Valor
E	Modulo de Young del riel	$2,06 \times 10^{11}$ Pa
I	Momento de Inercia del riel	$3,217 \times 10^{-5}$ m ⁴
$\bar{m}$	Masa del riel por unidad de longitud	60,64 kg/m
K_p	Coeficiente de rigidez de la almohadilla	$7,8 \times 10^7$ N/m
C_p	Coeficiente de amortiguación de la almohadilla	$5,6 \times 10^4$ N.s/m
l_s	Distancias entre durmientes	0,6 m
m_s	Mitad de la masa de un durmiente	125,5 kg
K_b	Coeficiente de rigidez del balasto	$1,5 \times 10^6$ N/m
C_b	Coeficiente de amortiguación del balasto	$5,88 \times 10^4$ N.s/m

Fuente: (Zhai 2006)

3.4. Elementos Fundamentales del Modelo Dinámico de la Vía Férrea

En el caso particular del sistema dinámico de la vía férrea, todos los elementos de riel se presentan bajo las mismas condiciones de longitud, masa, amortiguación, rigidez, número de durmientes, etc. Por esta razón, las sub matrices del elemento de riel, así como las sub matrices de los durmientes, serán exactamente iguales para todos los elementos a tener en cuenta.

Se presentan a continuación los cálculos para la obtención de las matrices de masa, amortiguación y rigidez de un elemento, considerando los dos casos de configuración del elemento de riel, expuestos con anterioridad.

3.4.1. Matriz de masa para un elemento de la vía férrea

Cada término, contemplado en la ecuación de movimiento de un elemento [3.7] contiene sub matrices cuyo cálculo depende, según Lou (2006, p. 30) de las siguientes ecuaciones:

m_{rr} Sub matriz denominada matriz de masa del elemento de riel

$$m_{rr} = \int_0^L \bar{m} N^T N dx \quad [3.11]$$

m_{ss} Sub matriz denominada matriz de masa de los durmientes

$$m_{ss} = \text{diag} [m_s \ m_s \ \dots \ m_s]_{n_s \times n_s} \quad [3.12]$$

Las características principales de la matriz de masa del elemento son que es simétrica y además constante durante el cálculo, es decir, su valor no varía con el tiempo. Por otra parte la sub matriz de masa del riel es de dimensiones invariable 4x4, a diferencia de la sub matriz de masa de los durmientes que varía con la cantidad de durmientes que existan en el elemento.

Determinación de las matrices de masa, mediante las ecuaciones programadas en un módulo del código computacional.

CASO 1

$$m_{rr} = \begin{bmatrix} 27,0281 & 4,5740 & 9,5590 & -2,7028 \\ 4,5740 & 0,9980 & 2,7028 & -0,7485 \\ 9,3559 & 2,7028 & 27,0281 & -4,5740 \\ -2,7028 & -0,7485 & -4,5740 & 0,9980 \end{bmatrix} kg$$

La matriz de masa de los durmientes es:

$$m_{ss} = \begin{bmatrix} 125,5 & 0 \\ 0 & 125,5 \end{bmatrix} kg$$

Al unir las para obtener la matriz de masas del elemento tenemos:

$$M_e = \begin{bmatrix} 27,0281 & 4,5740 & 9,3559 & -2,7028 & 0 & 0 \\ 4,5740 & 0,9980 & 2,7028 & -0,7485 & 0 & 0 \\ 9,3559 & 2,7028 & 27,0281 & -4,5740 & 0 & 0 \\ -2,7028 & -0,7485 & -4,5740 & 0,9980 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125,5 \end{bmatrix} kg$$

CASO 2

$$m_{rr} = \begin{bmatrix} 13,5141 & 1,1435 & 4,6779 & -0,6757 \\ 1,1435 & 0,1248 & 0,6757 & -0,0936 \\ 4,6779 & 0,6757 & 13,5141 & -1,1435 \\ -0,6757 & -0,0936 & -1,1435 & 0,1248 \end{bmatrix} kg$$

De la misma manera la matriz de masa del durmiente es:

$$m_{ss} = [125,5] kg$$

Finalmente al ensamblarlas tenemos:

$$M_e = \begin{bmatrix} 13,5141 & 1,1435 & 4,6779 & -0,6757 & 0 \\ 1,1435 & 0,1248 & 0,6757 & -0,0936 & 0 \\ 4,6779 & 0,6757 & 13,5141 & -1,1435 & 0 \\ -0,6757 & -0,0936 & -1,1435 & 0,1248 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125,5 \end{bmatrix} kg$$

3.4.2. Matriz de amortiguamiento para un elemento de la vía férrea

De la misma forma que con el cálculo de la masa, en el término de amortiguación, la ecuación de movimiento de un elemento [3.7] contiene sub matrices cuyo cálculo depende, según Lou (2006, p. 30) de las siguientes ecuaciones:

c_{rr} Sub matriz denominada matriz de amortiguación del elemento de riel

$$C_{rr} = C_p \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x'_i}^T N_{x=x'_i} \quad [3.13]$$

c_{rs} Sub matriz denominada matriz de amortiguación del riel sobre los durmientes

$$C_{rs} = -C_p \begin{bmatrix} N_{x=x'_1}^T & N_{x=x'_2}^T & \dots & N_{x=x'_s}^T \end{bmatrix}_{4 \times n_s} \quad [3.14]$$

c_{sr} Sub matriz denominada matriz de amortiguación de los durmientes sobre el riel

$$C_{sr} = C_{rs}^T \quad [3.15]$$

c_{ss} Sub matriz denominada matriz de amortiguación de los durmientes

$$C_{ss} = \text{diag} [C_p + C_b \quad C_p + C_b \quad \dots \quad C_p + C_b]_{n_s \times n_s} \quad [3.16]$$

Las ecuaciones fueron programadas en el segundo bloque de instrucciones del código computacional, sus resultados son los siguientes:

CASO 1

$$C_{rr} = \begin{bmatrix} 3,6816 & 0,7559 & 1,3184 & -0,3691 \\ 0,7559 & 0,1582 & 0,3691 & -0,0949 \\ 1,3184 & 0,3691 & 3,6816 & -0,7559 \\ -0,3691 & -0,0949 & -0,7559 & 0,1582 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

La matriz de amortiguación del riel sobre los durmientes es:

$$C_{rs} = \begin{bmatrix} -4,2188 & -0,7813 \\ -0,8438 & -0,2812 \\ -0,7813 & -4,2188 \\ 0,2812 & 0,8438 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

La matriz de amortiguación de los durmientes sobre el riel es:

$$C_{sr} = \begin{bmatrix} -4,2188 & -0,8438 & -0,7813 & 0,2812 \\ -0,7813 & -0,2812 & -4,2188 & 0,8438 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

La matriz de amortiguación de los durmientes es:

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} 108800 & 0 \\ 0 & 108800 \end{bmatrix} \text{ N.s/m}$$

Al unir las para obtener la matriz de amortiguación del elemento tenemos:

$$= \begin{bmatrix} 3,6816 & 0,7559 & 1,3184 & -0,3691 & -4,2188 & -0,7813 \\ 0,7559 & 0,1582 & 0,3691 & -0,0949 & -0,8438 & -0,2812 \\ 1,3184 & 0,3691 & 3,6816 & -0,7559 & -0,7813 & -4,2188 \\ -0,3691 & -0,0949 & -0,7559 & 0,1582 & 0,2812 & 0,8438 \\ -4,2188 & -0,8438 & -0,7813 & 0,2812 & 0,0108 & 0 \\ -0,7813 & -0,2812 & -4,2188 & 0,8438 & 0 & 0,0108 \end{bmatrix} \times 10^4 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$$

CASO 2

$$C_{rr} = \begin{bmatrix} 1,2500 & 0,1875 & 1,2500 & -0,1875 \\ 0,1875 & 0,0281 & 0,1875 & -0,0281 \\ 1,2500 & 0,1875 & 1,2500 & -0,1875 \\ -0,1875 & -0,0281 & -0,1875 & 0,0281 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ N.s/m}$$

La matriz de amortiguación del riel sobre los durmientes es:

$$C_{rs} = \begin{bmatrix} -25000 \\ -3700 \\ -25000 \\ -3700 \end{bmatrix} N.s/m$$

La matriz de amortiguación de los durmientes sobre el riel es:

$$C_{sr} = [-25000 \quad -3700 \quad -25000 \quad -3700] N.s/m$$

La matriz de amortiguación de los durmientes es:

$$C_{ss} = [108800] N.s/m$$

Al unir las para obtener la matriz de amortiguación del elemento tenemos:

$$C_e = \begin{bmatrix} 12500 & 1875 & 12500 & -1875 & -25000 \\ 1875 & 2810 & 1875 & -2810 & -3700 \\ 12500 & 1875 & 12500 & -1875 & -25000 \\ -1875 & -2810 & -1875 & 2810 & -3700 \\ -25000 & -3700 & -25000 & -3700 & 108800 \end{bmatrix} \frac{N.s}{m}$$

3.4.3. Matriz de rigidez para un elemento de la vía férrea

El término de rigidez, de la ecuación de movimiento de un elemento [3.7] contiene sub matrices cuyo cálculo depende, según Lou (2006, p. 30) de las siguientes ecuaciones:

k_{rr} Sub matriz denominada matriz de rigidez del elemento de riel, está conformada por la suma dos elementos

$$K_{rr}^* = \int_0^L E I N''^T N'' dx \quad [3.17]$$

$$K_{rr}^{**} = K_p \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x'_i}^T N_{x=x'_i} \quad [3.18]$$

k_{rs} Sub matriz denominada matriz de rigidez del riel sobre los durmientes

$$K_{rs} = -K_p \begin{bmatrix} N_{x=x'_1}^T & N_{x=x'_2}^T & \dots & N_{x=x'_s}^T \end{bmatrix}_{4 \times n_s} \quad [3.19]$$

k_{sr} Sub matriz denominada matriz de rigidez de los durmientes sobre el riel

$$K_{sr} = K_{rs}^T \quad [3.20]$$

k_{ss} Sub matriz denominada matriz de rigidez de los durmientes

$$K_{ss} = \text{diag} [K_p + K_b \quad K_p + K_b \quad \dots \quad K_p + K_b]_{n_s \times n_s} \quad [3.21]$$

CASO 1

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} 1,0114 & 0,3801 & -0,2314 & 0,2046 \\ 0,3801 & 0,2345 & -0,2046 & 0,0901 \\ -0,2314 & -0,2046 & 1,0114 & -0,3801 \\ 0,2046 & 0,0901 & -0,3801 & 0,2345 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez del riel sobre los durmientes es:

$$K_{rs} = \begin{bmatrix} -0,65812 & -0,12188 \\ -0,13162 & -0,04387 \\ -0,12188 & -0,65812 \\ 0,04387 & 0,13162 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez de los durmientes sobre el riel es:

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} -0,65812 & -0,13162 & -0,12188 & 0,04387 \\ -0,12188 & -0,04387 & -0,65812 & 0,13162 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez de los durmientes es:

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 2,28 & 0 \\ 0 & 2,28 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

Al unir las para obtener la matriz de rigidez del elemento tenemos:

$$K_e = \begin{bmatrix} 1,0114 & 0,3801 & -0,2314 & 0,2046 & -0,6581 & -0,12188 \\ 0,3801 & 0,2345 & -0,2046 & 0,0901 & -0,1316 & -0,0438 \\ -0,2314 & -0,2046 & 1,0114 & -0,3801 & -0,1218 & -0,6581 \\ 0,2046 & 0,0901 & -0,3801 & 0,2345 & 0,0438 & 0,1316 \\ -0,6581 & -0,1316 & -0,1218 & 0,0438 & 2,2800 & 0 \\ -0,1218 & -0,0438 & -0,6581 & 0,1316 & 0 & 2,2800 \end{bmatrix} \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

CASO 2

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} 3,6913 & 1,0781 & -3,3013 & 1,0196 \\ 1,0781 & 0,4239 & -1,0196 & 0,2054 \\ -3,3013 & -1,0196 & 3,6913 & -1,0781 \\ 1,0196 & 0,2054 & -1,0781 & 0,4239 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez del riel sobre los durmientes es:

$$K_{rs} = \begin{bmatrix} -0,3900 \\ -0,0585 \\ -0,3900 \\ -0,0585 \end{bmatrix} \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez de los durmientes sobre el riel es:

$$K_{sr} = [-0,3900 \quad -0,0585 \quad -0,3900 \quad -0,0585] \times 10^8 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez de los durmientes es:

$$K_{ss} = [2,28] \times 10^8 \text{ N/m}$$

Al unir las para obtener la matriz de rigidez del elemento tenemos:

$$K_e = \begin{bmatrix} 3,6913 & 1,0781 & -3,3013 & 1,0196 & -0,3900 \\ 1,0781 & 0,4239 & -1,0196 & 0,2054 & -0,0585 \\ -3,3013 & -1,0196 & 3,6913 & -1,0781 & -0,3900 \\ 1,0196 & 0,2054 & -1,0781 & 0,4239 & -0,0585 \\ -0,3900 & -0,0585 & -0,3900 & -0,0585 & 2,2800 \end{bmatrix} \times 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

3.4.4. Metodología para el cálculo de las fuerzas externas para un elemento de la vía férrea

Existen diferentes metodologías de cálculo dinámico, de acuerdo a la forma en que se tratan los efectos de interacción vehículo estructura, una de estas metodologías es conocida como modelo de cargas puntuales.

El modelo de cargas puntuales considera nulos los efectos de interacción vehículo-estructura, es decir, asumen que el fenómeno de intercambio de energía entre la vía y las suspensiones primaria y secundaria no se lleva a cabo, considerando de esta forma que el vehículo es una estructura infinitamente rígida.

De acuerdo a lo anterior el tren se puede modelar como una serie de cargas puntuales que recorren el riel, con magnitud constante y colocadas a distancias fijas unas de otras. El procedimiento más directo y sencillo para modelar el tránsito de una carga puntual a lo largo de una estructura, se denomina metodología de escalones de carga. Para definir correctamente estos escalones se deben seguir los siguientes pasos:

1. Localizar los nodos que se encuentran a lo largo de la trayectoria que recorre la carga.
2. Definir un tiempo de referencia t_0 , origen del movimiento y determinar los sucesivos tiempos de llegada t_i de la carga a cada uno de los nodos.
3. En función de la velocidad de la carga v , de los tiempos de llegada a los nodos y de la distancia entre nodos, definir los escalones de carga correspondientes a cada nodo.

En el fondo se trata de asociar a cada nodo, para un instante dado en la sollicitación, las cargas puntuales que se le aplican, bien sea porque actúan sobre él, bien porque se encuentren entre dos nodos y se le aplique una parte proporcional a cada uno de ellos (escalón). Lo anterior puede apreciarse en la Figura 3.6.

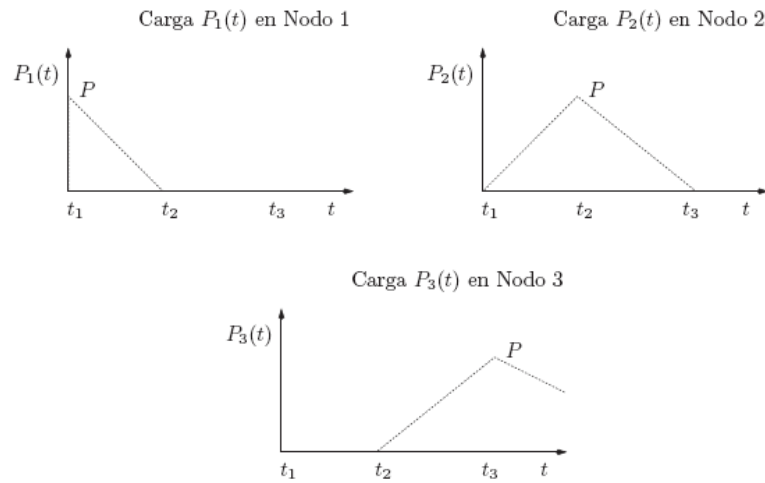


Figura 3.6 - Definición de escalones de carga para el método de elementos finitos. Fuente: Domínguez (2001)

De acuerdo a esta metodología y por medio de la ecuación expresada por Lou (2006, p. 30), el vector de fuerzas presentes en el riel, para un instante de tiempo es:

$$f_r^e = \sum_{j=1}^n N_{x=x_j}^T P_j \quad [3.22]$$

Además, si se consideran fuerzas externas en los durmientes, deberían contemplarse en el siguiente vector, sin embargo, para este estudio en particular dichas fuerzas se asumirán nulas, por lo cual:

$$f_s^e = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{n_s}^T \quad [3.23]$$

3.5. Formulación del cálculo del momento y fuerza cortante en el riel

Después de resolver la ecuación de movimiento que describe el modelo matemático de la vía férrea, es posible calcular las fuerzas de corte y los momentos flectores del riel mediante el procedimiento que se detalla a continuación, este planteamiento fue expuesto por Lou y otros (2006), como un desarrollo basado en el método del elemento finito que se aproxima a los métodos existentes, sobre todo al desarrollo realizado por Timoshenko, con el cual validaron su modelo.

Las fuerzas de corte Q_1 y Q_2 y los momentos flectores M_1 y M_2 en la sección transversal de los dos nodos que componen un elemento de riel en el tiempo t , como el que se muestra en la Figura 3.1, pueden ser expresados como:

$$v^e = v_{\dot{q}}^e + v_q^e + v_p^e + v_{pad}^e \quad [3.24]$$

Donde v^e denota el vector de fuerza cortante y de momento flector para los dos nodos de un elemento, el cual viene expresado como:

$$v^e = [Q_1 \ M_1 \ Q_2 \ M_2]^T \quad [3.25]$$

Los demás términos presentes en la ecuación [3.24] representan lo siguiente: $v_{\dot{q}}^e$ denota el vector de fuerzas de corte y de momento flector en los dos nodos inducidos por los elementos correspondientes a la matriz de masa y producto de la aceleración de rotación y de traslación para el elemento correspondiente a los nodos. Su expresión matemática, viene dada por:

$$v_{\dot{q}}^e = m_{rr} \ddot{q}_r^e \quad [3.26]$$

El término v_q^e denota el vector de fuerza de corte y momento flector de los dos nodos inducidos por los elementos correspondientes a la matriz de rigidez y los

desplazamientos y rotaciones de los nodos correspondientes al elemento y viene dada por la siguiente expresión:

$$v_q^e = k_{rr}^* q_r^e \quad [3.27]$$

El término v_p^e denota el vector de fuerzas iniciales de rigidez inducidas por la aplicación de n fuerzas concentradas actuando sobre el elemento del riel

$$v_p^e = - \sum_{j=1}^n N_{x=x_j}^T P_j \quad [3.28]$$

La expresión v_{pad}^e denota el vector de fuerzas iniciales inducidas por las fuerzas de rigidez y amortiguación de la almohadilla actuando en el elemento del riel. Su ecuación es:

$$v_{pad}^e = \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x_i}^T f_i \quad [3.29]$$

Donde f_i es igual a:

$$f_i = k_p (N_{x=x_i} q_r^e - y_{s_i}) + C_p (N_{x=x_i} \dot{q}_r^e - \dot{y}_{s_i}) \quad [3.30]$$

Finalmente, después de calcular cada término de la ecuación para el tiempo t , el programa resuelve el sistema de ecuaciones matriciales y se consigue de esta forma, el vector de fuerzas de corte y momentos flectores en los nodos del elemento estudiado, denotado inicialmente por la ecuación [3.25].

3.6. Métodos de cálculos dinámicos para una vía férrea a través de la integración directa basada en elementos finitos.

Para resolver el problema planteado a través de la ecuación de movimiento para una vía férrea con n grados de libertad, dependientes del número de nodos y del número de durmientes, existen diversos métodos, los cuales fueron descritos y analizados en el Capítulo II, de la presente investigación. Para cada uno de los métodos estudiados se describirá a continuación el algoritmo a seguir para su posterior programación, teniendo en cuenta que se escogerá, de acuerdo a sus características, alguno de ellos.

3.6.1. Descripción del Método de Wilson θ

El algoritmo completo usado en la integración de Wilson θ se presenta mediante el siguiente procedimiento, explicado por Bathe (1996):

A. Cálculos Iniciales

1. Formar la matriz de rigidez K , la matriz de masa M y la matriz de amortiguación C .
2. Inicializar con U^0 , $\dot{U}^0$ y $\ddot{U}^0$.
3. Seleccionar el paso del tiempo Δt y calcular las constantes de integración.
 $\theta = 1,4$ (Usualmente)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} & a_1 &= \frac{3}{\theta\Delta t} & a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= \frac{\theta\Delta t}{2} & a_4 &= \frac{a_0}{\theta} & a_5 &= -\frac{a_2}{\theta} \\ a_6 &= 1 - \frac{3}{\theta} & a_7 &= \frac{\Delta t}{2} & a_8 &= \frac{(\Delta t)^2}{6} \end{aligned} \quad [3.31]$$

4. Formar la matriz de rigidez efectiva

$$\hat{K}: \hat{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad [3.32]$$

5. Triangularizar

$$\hat{K}: \hat{K} = LDL^T \quad [3.33]$$

B. Para cada paso de tiempo

1. Calcular las cargas efectivas para el tiempo $t + \theta\Delta t$

$$\begin{aligned} \hat{R}^{t+\theta\Delta t} &= R^t + \theta(R^{t+\Delta t} - R^t) + \\ &M(a_0 U^t + a_2 \dot{U}^t + 2\ddot{U}^t) + C(a_1 U^t + 2\dot{U}^t + a_3 \ddot{U}^t) \end{aligned} \quad [3.34]$$

2. Resolver el desplazamiento para el tiempo $t + \theta\Delta t$

$$\hat{K} U^{t+\theta\Delta t} = \hat{R}^{t+\theta\Delta t} \quad [3.35]$$

3. Calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración para el tiempo $t + \Delta t$

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = a_4(U^{t+\theta\Delta t} - U^t) + a_5\dot{U}^t + a_6\ddot{U}^t \quad [3.36]$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + a_7(\ddot{U}^{t+\Delta t} + \ddot{U}^t) \quad [3.37]$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t\dot{U}^t + a_8(\ddot{U}^{t+\Delta t} + 2\ddot{U}^t) \quad [3.38]$$

3.6.2. Descripción del Método de Newmark

El algoritmo completo usado en la integración del método de Newmark se presenta mediante el siguiente procedimiento, explicado por Bathe (1996):

A. Cálculos Iniciales

1. Formar la matriz de rigidez K, la matriz de masa M y la matriz de amortiguación C.
2. Inicializar con U^0 , $\dot{U}^0$ y $\ddot{U}^0$.
3. Seleccionar el paso del tiempo Δt y los parámetros α y δ y calcular las constantes de integración.

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0,5 & \alpha &\geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \\ a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; & a_2 &= \frac{1}{\alpha\Delta t}; \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1; & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1; & a_5 &= \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \\ a_6 &= \Delta t(1 - \delta); & a_7 &= \delta\Delta t \end{aligned} \quad [3.39]$$

4. Formar la matriz de rigidez efectiva

$$\hat{K}: \hat{K} = K + a_0M + a_1C \quad [3.40]$$

5. Triangularizar

$$\hat{K}: \hat{K} = LDL^T \quad [3.41]$$

B. Para un paso de tiempo

1. Calcular las cargas efectivas para un $t + \Delta t$

$$\begin{aligned}\hat{R}^{t+\Delta t} &= R^{t+\Delta t} + M(a_0 U^t + a_2 \dot{U}^t + a_3 \ddot{U}^t) \\ &+ C(a_1 U^t + a_4 \dot{U}^t + a_5 \ddot{U}^t)\end{aligned}\quad [3.42]$$

2. Resolver los desplazamientos para un tiempo $t + \Delta t$

$$LDL^T U^{t+\Delta t} = \hat{R}^{t+\Delta t} \quad [3.43]$$

3. Calcular la aceleración y la velocidad para un tiempo $t + \Delta t$

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = a_0(U^{t+\Delta t} - U^t) - a_2 \dot{U}^t - a_3 \ddot{U}^t \quad [3.44]$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + a_6 \dot{U}^t + a_7 \ddot{U}^{t+\Delta t} \quad [3.45]$$

Asumimos que toda la ecuación de equilibrio es resuelta usando el mismo tiempo de integración, de modo que la elección del método que se usará depende de la solución efectiva del problema presentado. El uso de una combinación de operaciones para la integración de la respuesta dinámica hace preguntarse qué método seleccionar y cuál se adapta más a las particularidades del sistema. Existe un gran número de posibilidades, pero en general la selección depende de la estabilidad y del cálculo de las características, incluyendo la efectividad total de los resultados en el tiempo de integración. De ahí que utilice el método de Newmark con sus constantes de integración establecidas en $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,25$. La elección del método de integración de Newmark obedece principalmente a que su estabilidad es superior a la del método de Wilson, según los resultados expuestos por Trejo (2007), otra razón es la simplicidad de programación que representa.

a. Descripción del código computacional para la simulación numérica del comportamiento dinámico de la vía férrea

Uno de los objetivos propuestos en el desarrollo de la investigación, plantea la creación de un código computacional que permita evaluar la respuesta dinámica de un tramo de riel sobre el que se desplazan un conjunto de cargas móviles puntuales. Debido a que el método de integración escogido para resolver numéricamente la

ecuación de movimiento fue el método de Newmark, la estructura del programa está basada en el algoritmo, descrito en la sección 3.6.2.

Código computacional para el cálculo de la respuesta
dinámica de la vía férrea

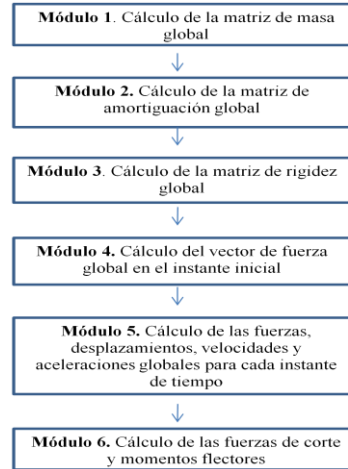


Figura 3.7 – Esquema de módulos para el código computacional

De esta forma, con la idea esquematizar las subrutinas que contiene el código general, se recurrió a la creación de varios módulos de instrucciones con objetivos particulares, cada uno de los cuales representa un escalón para la obtención de la respuesta numérica; de forma tal que la interacción entre los módulos permita establecer un orden cronológico de ejecución de los comandos, teniendo en cuenta que el programa en conjunto tiene como meta final el cálculo de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, verticales y rotacionales para los nodos del riel, así como los desplazamientos, velocidades y aceleraciones verticales de los durmientes. La Figura 3.7 muestra el esquema de la estructura.

Según el algoritmo del método de Newmark, se debe iniciar calculando las matrices globales de masa, rigidez y amortiguación. Sin embargo, una de las características del código es que para iniciar las corridas, este requiere que el usuario le proporcione los valores de los parámetros establecidos como variables, para crear las diferentes configuraciones para las corridas. De esta manera, se deben establecer inicialmente la longitud del riel, el número de durmientes por elemento a evaluar, lo que determina inmediatamente la longitud del elemento, la velocidad de circulación

del vehículo, la cantidad de fuerzas presentes inicialmente sobre el riel, los factores de confiabilidad, velocidad y calidad de la vía de la ecuación de Eisenmann, lo cual permite el cálculo de la carga dinámica, la posición de la primera fuerza, las condiciones de borde empleadas y finalmente el número de pasos de tiempo a considerar.

El conocimiento de estas variables permite la entrada al primer módulo, cuyo principal objetivo es la obtención de la matriz de masa global de la vía. Para esto, los cálculos se basan en la matriz de masa de un elemento y de los durmientes de un elemento, ambas calculadas previamente en este capítulo, mediante el empleo de las ecuaciones descritas por Lou y otros (2006). Las principales características de la matriz de masa de un elemento son que es cuadrada, constante para todos los elementos y además es simétrica; en el caso de la matriz de masa de los durmientes, esta es simétrica, diagonal y constante para todos los elementos. La subrutina que calcula la matriz de masa global, se denominó llenado de masa, pues en realidad se encarga de ensamblar los valores de la matriz de masa del elemento y de los durmientes del elemento, repitiéndolos hasta incluir todos los elementos considerados.

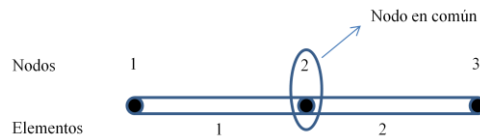


Figura 3.8 - Representación de los nodos en común del riel

A pesar de esta aparente simplicidad debe tenerse en cuenta que para elementos adyacentes, los nodos intermedios se repiten, como se observa en la Figura 3.8, por lo cual el código se diseñó de tal manera que para estos nodos comunes los valores compartidos por ambos elementos debido al nodo en común se sumen, permitiendo disminuir las dimensiones de la matriz final y de esta forma simplificar los cálculos. La Figura 3.9, representa la forma en la que se realiza el llenado de la matriz de masa global, en ella puede apreciarse que los nodos adyacentes se suman en los cuadros

azules, además el cuadro inferior derecho representa la matriz de masa de los durmientes.

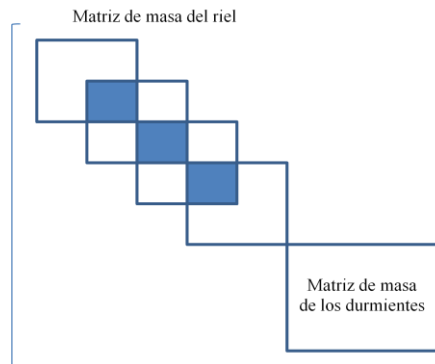


Figura 3.9 - Representación de los nodos en común del riel en la matriz de masa del riel y ubicación de la matriz de masa de los durmientes.

La verificación del correcto funcionamiento de este primer módulo se realizó con el fin de validar y respaldar su utilización dentro del código final, la metodología empleada fue tomar un tramo de riel de 6 metros, con dos durmientes por elementos y calcular manualmente la matriz de masa, para comparar este resultados con el cálculo de la rutina, obteniendo exactamente los mismos resultados y dimensiones de la matriz global de masa. En el apéndice 2 se presentan las tablas que confirman estos resultados.

El segundo módulo de instrucciones tiene como finalidad la obtención de la matriz de amortiguación global, con base en las sub matrices de amortiguación, descritas en la sección 3.4.2. Esta parte del código calcula cada una de las sub matrices por separado y posteriormente las ensambla, de acuerdo a la cantidad de elementos, por lo cual la rutina se denominó llenado de amortiguación. El procedimiento para considerar los nodos en común es el mismo que fue considerado en el llenado de la matriz de masa, para elementos adyacentes. En la Figura 3.10 (a) se representan los componentes ensamblados de la matriz de amortiguación global y en la parte (b) los componentes ensamblados de la matriz de rigidez global.

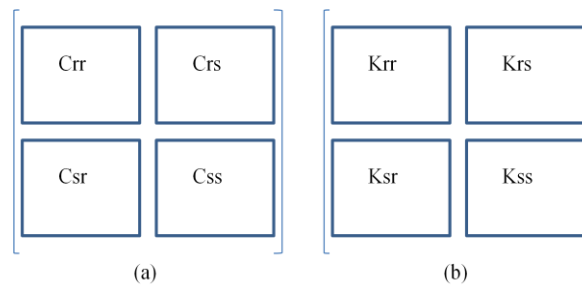


Figura 3.10 - Matriz global de amortiguación y rigidez. (a) Matriz de amortiguación compuesta por sus sub matrices. (b) Matriz de rigidez compuesta por sus sub matrices.

La rutina de llenado de amortiguación requiere algunos parámetros que dependen de las características de la vía férrea, como por ejemplo los coeficientes de amortiguación de la capa de asiento y del balasto, estos valores se presentaron en una tabla proveniente del trabajo de Zhai (2006). Debido a que estos parámetros no son variables, no se piden al usuario sino que se encuentran preestablecidos dentro del código.

El módulo tres tiene como objeto el cálculo de la matriz de rigidez global. El procedimiento es exactamente igual al empleado para la matriz de amortiguación y se basa en las sub matrices calculadas en la sección 3.4.3. Las consideraciones para elementos adyacentes son las mismas que se hicieron para la matriz de masa y amortiguación. La representación de la matriz global de rigidez, compuesta por sus sub matrices. También en este caso se emplean parámetros de rigidez del riel y los durmientes que no son variables, por lo cual están predeterminados por el código de acuerdo a lo expuesto por Zhai (2006).

La secuencia establecida por el algoritmo del método de Newmark, propone que luego de establecer las matrices globales, se deben establecer las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento, que en el código siempre serán tomadas como nulas. Posteriormente se deben calcular las condiciones iniciales de carga, a partir de las cuales se inicia el movimiento del tren. Estas condiciones iniciales de fuerzas están atadas a la posición de la primera fuerza que se le pidió al usuario ingresar al principio, así como al número de fuerzas que se deseen considerar inicialmente sobre el riel. Una mención importante en este punto es que el código permite elegir que

estén en el instante inicial una, dos, tres o cuatro fuerzas sobre la vía, sin embargo esta limitación restringe la evaluación de los instantes de tiempo anteriores al paso del tren, para los cuales no existen fuerzas sobre el riel. La menor configuración de fuerzas sobre el riel permitida por el código, es para una rueda colocada justo en el borde izquierdo del tramo. El módulo cuatro se encarga de esta forma de obtener el vector inicial de carga de acuerdo a lo establecido por el usuario.

El cálculo de ambas matrices, amortiguación y rigidez, se encuentra verificado en el apéndice 2, mediante un desarrollo similar al empleado para la validación de la matriz de masa.

El cuarto módulo de instrucciones se encarga del cálculo y almacenamiento de las fuerzas, desplazamientos, velocidades y aceleraciones para cada instante de tiempo estudiado. Para ello inicia, siguiendo la secuencia del método de Newmark con el cálculo de las constantes de integración, luego se calculan parámetros básicos como el tiempo total de estudio, el cual depende de la velocidad de marcha y la posición inicial de las ruedas. Se calcula, para cada fuerza, la longitud que le falta recorrer para posicionarse sobre el riel y la que le falta recorrer para salir del tramo, de forma que estos parámetros sean la base de la variación de las fuerzas sobre la vía. Luego se calculan las condiciones iniciales de aceleración de acuerdo a las ecuaciones del método de Newmark y se procede a entrar en el cálculo de las fuerzas móviles para cada instante de tiempo con lo que se calculan finalmente los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del riel y los durmientes. Ahora bien, cada vez que el ciclo se inicia para un nuevo intervalo de tiempo es de esperarse que los valores anteriores se sustituyan por los nuevos, de tal forma que es necesario almacenar los resultados para cada instante de tiempo dentro de una matriz global, que permita conservar los resultados luego de terminada la corrida con el fin de analizarlos y para graficar su comportamiento.

La validación de la sub rutina que calcula las fuerzas móviles concentradas sobre el riel para cada intervalo de tiempo se encuentra desarrollada en el apéndice 1, para un riel de 24 metros y dos durmientes por elemento.

Lo que sigue es el módulo cinco, para el cálculo de las fuerzas de corte y momentos flectores para cada uno de esos intervalos de tiempo, en este caso la rutina toma los valores obtenidos y los emplea para el cálculo. Sin embargo, el código debe realizar primero ciertas adaptaciones de estos resultados, por ejemplo para obtener el desplazamiento del riel únicamente, este debe extraerse del vector de desplazamiento total, debido a que este vector contiene los datos de los durmientes. Además, los vectores que se suman según las ecuaciones expuestas en la sección 3.5 son de magnitudes diferentes, como consecuencia de la unión de los elementos adyacentes en la creación de las matrices de masa, amortiguación y rigidez, este efecto se revierte en el código para obtener así los momentos y fuerzas de corte en vectores amplificados. Finalmente el código concluye con las instrucciones para la realización de los gráficos, mediante los cuales se observa el comportamiento dinámico de la vía férrea.

La presentación completa y detallada del código desarrollado se encuentra en el apéndice 8. De acuerdo a lo descrito anteriormente el desarrollo del código computacional, basado en el método de Newmark, permite la solución de la ecuación dinámica de movimiento y la visualización del comportamiento de un tramo de riel para intervalos sucesivos de tiempo; de esta forma cumple con las expectativas planteadas y constituye la herramienta principal para la realización de las corridas que permitan obtener los resultados.

3.8. Presentación y Discusión de Resultados

Mediante el empleo del código descrito en la sección anterior se obtuvieron los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, del riel y de los durmientes, así como las fuerzas de corte y los momentos flectores en los nodos del riel, provocados por las cargas móviles correspondientes a las ruedas de un tren desplazándose a velocidad constante sobre la vía férrea.

Las variables que se tomaron en cuenta fueron: la velocidad de circulación, el número de durmientes por elemento, la longitud del tramo en estudio, la fuerza por

rueda aplicada sobre el riel y el factor de las condiciones de la vía para cargas dinámicas. La realización de las diferentes corridas obedece al estudio del efecto que generan estas variables sobre la convergencia, la estabilidad y las magnitudes de las respuestas obtenidas, cuyos gráficos permitan observar el comportamiento dinámico de la vía considerada.

La evaluación del efecto producido por el cambio de los valores numéricos de las variables mencionadas, requiere la delimitación de los casos y el establecimiento de las configuraciones que se tomarán en cuenta en la realización de las corridas.

3.8.1. Exposición de los casos propuestos para las corridas del código

Las corridas realizadas empleando el código desarrollado en Matlab se estructuraron de acuerdo a los resultados que se esperan obtener. De esta manera se presentan varias configuraciones que se evaluaron durante la ejecución del programa, tomando en cuenta las variables del sistema descritas.

Se plantean así los casos generales donde se mantienen constantes dos factores, el número de durmientes por elemento y las condiciones de la vía a evaluar. Para el primer caso general se usan dos durmientes por elemento con una vía en malas condiciones como factores constantes y se varían las longitudes del cantón, las cuales se calculan a su vez para cada una de las velocidades planteadas. Para el parámetro de la longitud se plantean tres valores, seleccionados en función de las longitudes comerciales, para 12, 24 y 36 metros de largo. Para cada uno de estos casos se varían las velocidades de circulación con dos valores, 80 y 120 km/h.

El segundo caso general mantienen las condiciones de la vía como malas pero se cambia la cantidad de durmientes por elemento, siendo en este caso uno por elemento. Igual que en el caso anterior esta configuración se evalúa para las tres longitudes mencionadas con un tren moviéndose a 80 y 120 km/h respectivamente.

El tercer y último caso general, presenta el desarrollo de las corridas para una vía en buenas condiciones, considerando sólo el caso de dos durmientes por elemento.

También para estas corridas se varían las longitudes del tramo, nuevamente para 12, 24 y 36 metros, así como las velocidades mencionadas.

Los resultados obtenidos para un riel de 24 metros, variando las velocidades de circulación se presentan en la sección 3.8.2, donde se muestran las tablas de los valores máximos y las gráficas generadas por el programa para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones verticales y rotacionales de los nodos del riel, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los durmientes y por último las fuerzas de corte y momentos flectores en los nodos del riel. Sin embargo, por razones de extensión del trabajo, los demás resultados, es decir los obtenidos para 12 y 36 metros se encuentran presentados en los apéndices. De esta forma en el apéndice 10, se presenta el caso de dos durmientes para ambas longitudes y en el apéndice 11 para un durmiente por elemento y de nuevo ambas longitudes de riel.

Otro de los objetivos es evaluar el efecto de las cargas dinámicas, mediante el análisis de las cargas móviles en algunos instantes de tiempo sobre la vía férrea. Las configuraciones establecidas para esta exploración se resumen en dos casos, ambos son para un riel de 24 metros, con dos durmientes por elemento, una vía en mal estado y un tren viajando a 80 km/h. Se varía la fuerza por rueda generada por el vehículo; en el primer caso para un vagón de pasajeros con 78400 N por rueda, valor empleado por Zhai (2006), el segundo para un vagón de carga con 174000 N por rueda, valor usado por Selig (2004).

3.8.2. Estudio de un riel de dos durmientes por elemento, una vía en mal estado y 24 metros de largo

A continuación se presentan las tablas de resultados correspondientes a un riel de 24 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría, entre las que se cuentan los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los nodos del riel y de los durmientes, así como las fuerzas de corte y momentos flectores en los nodos del riel. El valor planteado para la velocidad es 80

km/h, sin embargo se hicieron las corridas también para 120 km/h, sus resultados se exponen en el apéndice 10.

La Tabla 3.2 presenta los resultados para una velocidad de 80 km/h, como se observa para cada número de pasos de tiempo se reportan los valores máximos calculados. Sin embargo hay que acotar que estos valores máximos fueron escogidos dentro de la zona de estabilidad, hacia la mitad del riel, esto es debido a que producto de las condiciones de empotramiento y por la entrada repentina de la primera rueda en el riel, en el extremo izquierdo del mismo se producen alteraciones elevadas en los primeros intervalos y que se atenúan a medida que transcurre el tiempo.

Tabla 3.2 - Resultados con $L=24$ m y dos durmientes por elemento, con $v=80$ km/h y vía en mal estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores máximos	120	200	600	800	1000
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,00	7,00	7,00	7,20	8,40
Desplazamiento rotacional del riel [10^{-4}] rad	5,00	5,00	5,00	6,40	7,60
Velocidad vertical del riel [10^{-4}] m/s	5,00	5,00	5,00	4,20	7,40
Velocidad rotacional del riel [10^{-4}] rad/s	0,40	0,40	0,40	1,50	4,30
Aceleración vertical del riel m/s^2	9,00	9,00	9,00	10,20	13,40
Aceleración rotacional del riel rad/s^2	26,00	26,00	26,00	30,00	32,00
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,38	-0,38	-0,38	-1,76	-2,30
Velocidad de los durmientes [10^{-4}] m/s ²	-0,38	-0,38	-0,38	-1,76	-2,30
Aceleración de los durmientes [10^{-4}] m/s ²	-0,38	-0,38	-0,38	-1,76	-2,30
Momento Flector [10^5] N. m	2,10	2,10	2,10	2,50	2,80
Fuerza de Corte [10^4] N	6,00	6,00	6,00	6,90	6,20

La Figura 3.11 que se presenta a continuación, contiene los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 24 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en mal estado. La parte (a) muestra el comportamiento de las fuerzas de corte en los nodos de la vía para todos los intervalos de tiempo (Δt) que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt que permiten observar el comportamiento de algunos tiempos y compararlos, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en los nodos de los elementos y finalmente la parte (d) muestra los momentos flectores para cuatro intervalos de tiempo.

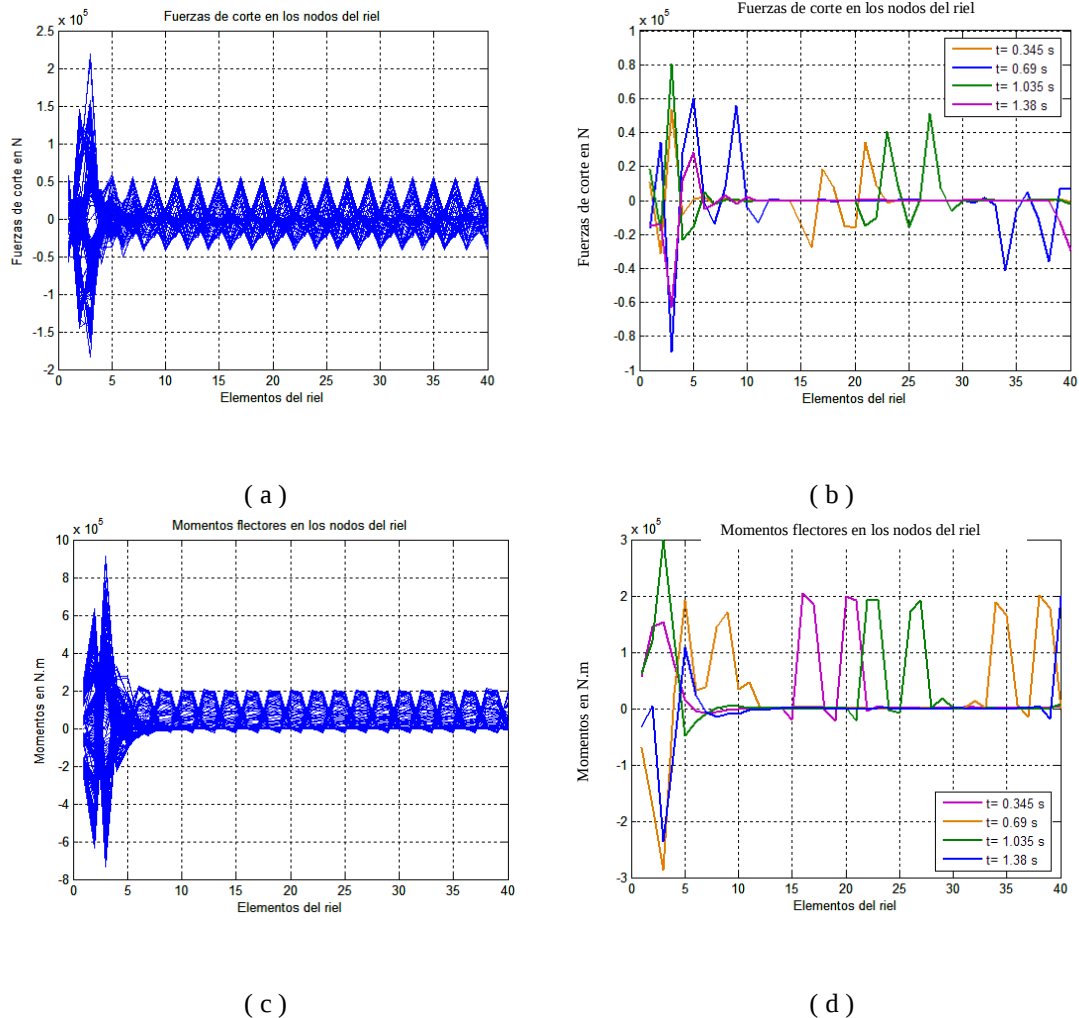
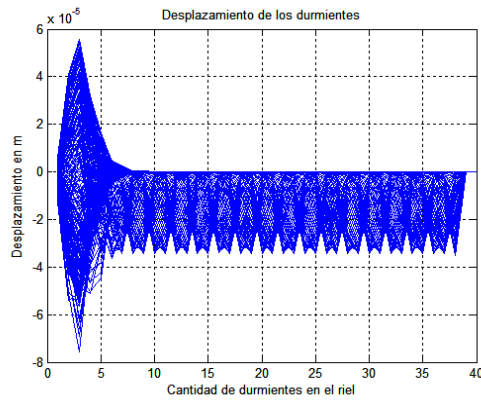
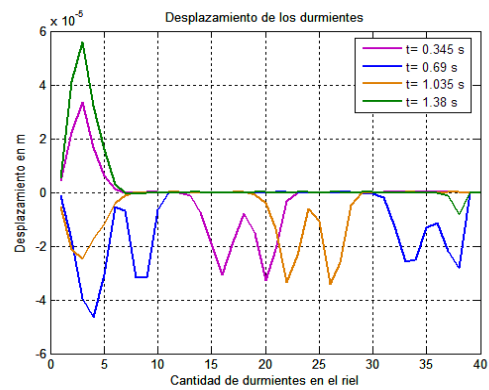


Figura 3.11. Momentos flectores y fuerzas de corte con $L = 24$ m y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Fuerzas de corte en los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Fuerzas de corte en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Momentos flectores en los nodos del riel todos los pasos de tiempo. (d) Momentos flectores en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

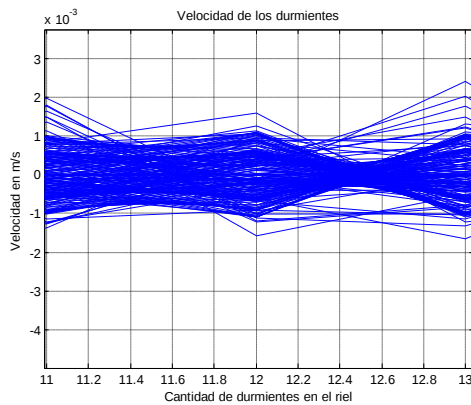
La Figura 3.12 presenta las gráficas del comportamiento de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los durmientes para una vía férrea en malas condiciones de longitud 24 m, dos durmientes y a una velocidad de 80 km/h. Se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, en la parte (b) estos desplazamientos para cuatro intervalos de tiempo; la parte (c) representa las velocidades de los durmientes y la parte (d) las velocidades para cuatro Δt . Luego la Figura 3.11 en la parte (e) muestra las aceleraciones de los durmientes en todo el tiempo de estudio, y luego para cuatro tiempos representativos, en la parte (f).



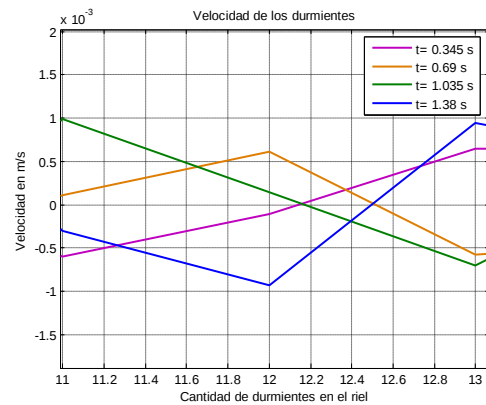
(a)



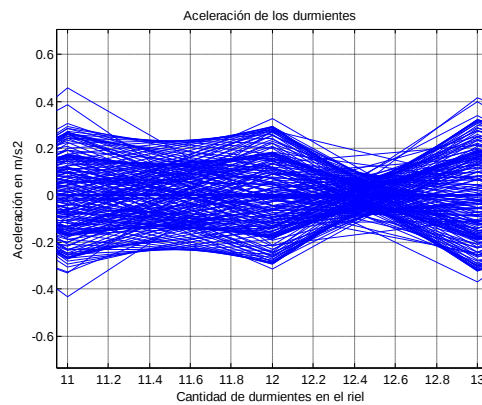
(b)



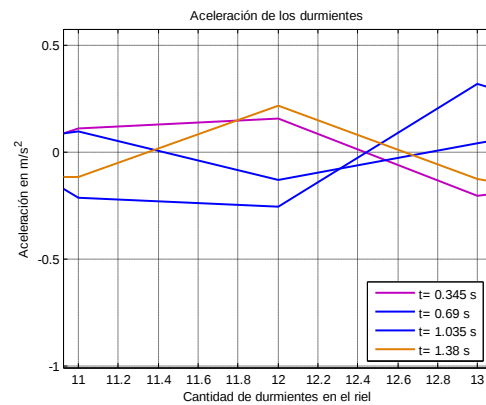
(c)



(d)



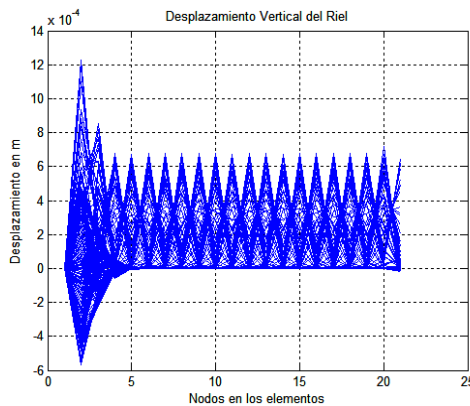
(e)



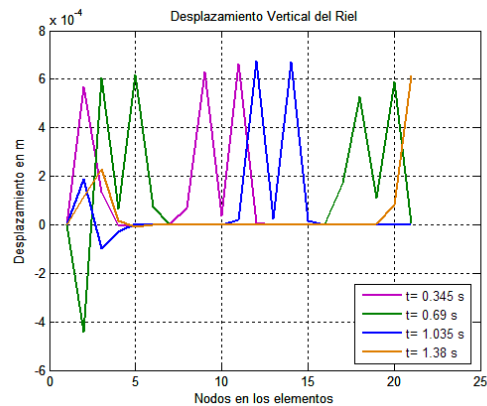
(f)

Figura 3.12. Respuesta de los durmientes con $L = 24$ m y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento de los durmientes todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad de los durmientes todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (e) Aceleración de los durmientes todos los pasos de tiempo. (f) Aceleración de los durmientes para 4 intervalos de tiempo.

La siguiente Figura 3.13 se generó para observar el comportamiento del desplazamiento del riel en el tiempo de estudio, tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, con las mismas condiciones de longitud del riel de 24 metros, dos durmientes por elemento y a una velocidad de 80 km/h. Así pues, la parte (a) muestra el desplazamiento vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta los desplazamientos rotacionales para todo el intervalo y la parte (d) los mismo evaluados en cuatro intervalos.



(a)



(b)

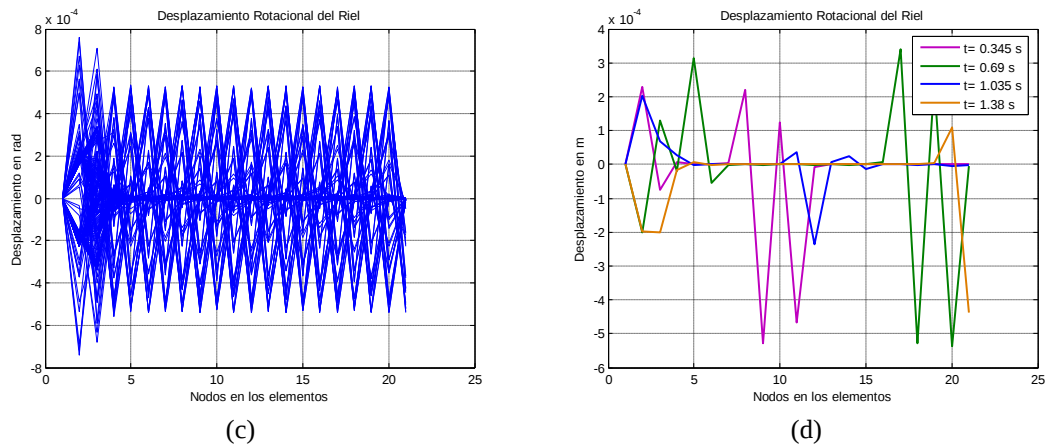
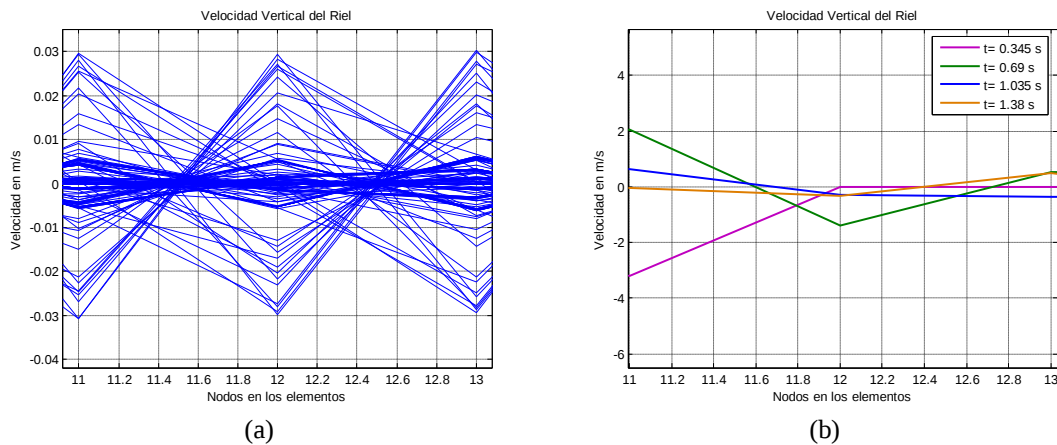


Figura 3.13. Respuesta de desplazamiento de los nodos del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

La Figura 3.14 se generó para observar el comportamiento de la velocidad del riel en el tiempo de estudio, tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, con las mismas condiciones de longitud del riel de 24 metros, dos durmientes por elemento y a una velocidad de 80 km/h. Se observa en la parte (a) la velocidad vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta la velocidad rotacional para todo el intervalo y la parte (d) las mismo evaluados en cuatro intervalos. Cabe acotar en este caso que los órdenes de magnitudes de las velocidades son muy pequeños y por esta razón los gráficos se amplificaron en una zona representativa, hacia la mitad del riel.



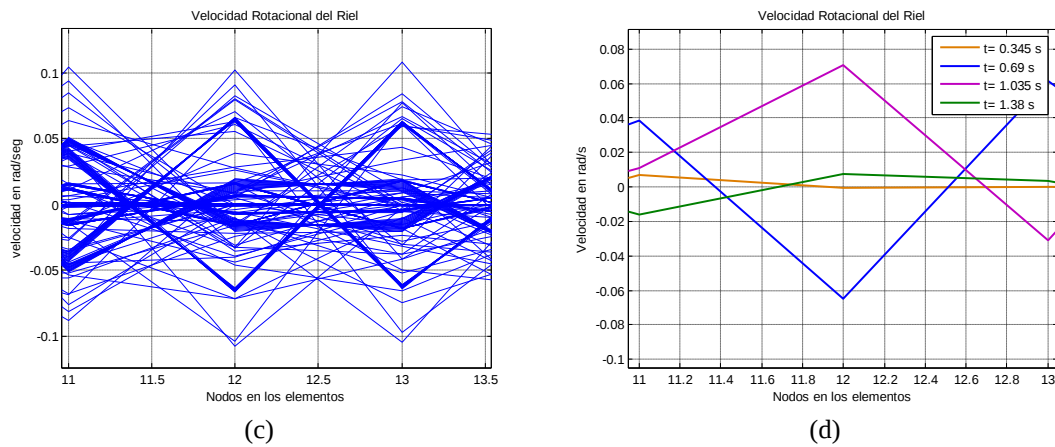
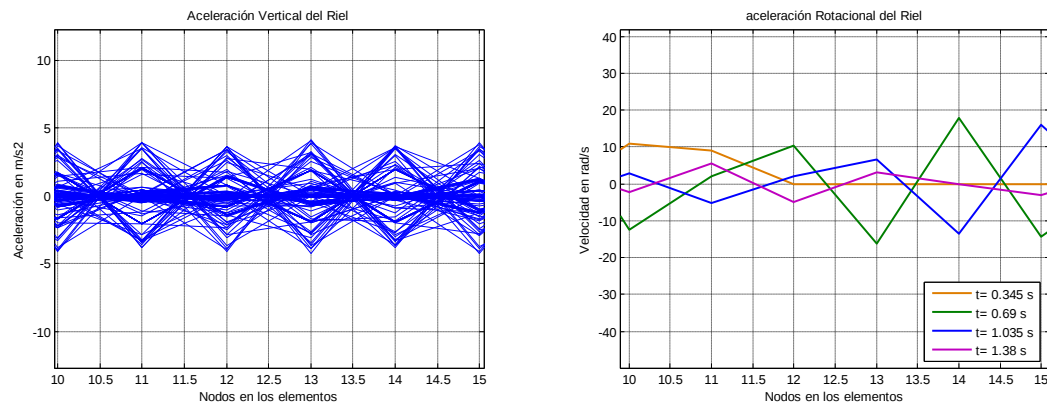


Figura 3.14. Respuesta de velocidad de los nodos del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Velocidad vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

Las aceleraciones encontradas para el riel se presentan en la Figura 3.15 tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, también en este caso debido a que los órdenes de magnitudes de las aceleraciones son muy pequeños, los gráficos se amplificaron en una zona representativa, hacia la mitad del riel.

Se observa en la parte (a) la aceleración vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta la aceleración rotacional para todo el intervalo y la parte (d) las mismo evaluados en cuatro intervalos. Cabe acotar en este caso que los órdenes de magnitudes de las velocidades son muy pequeños y por esta razón los gráficos se amplificaron en una zona representativa, hacia la mitad del riel.



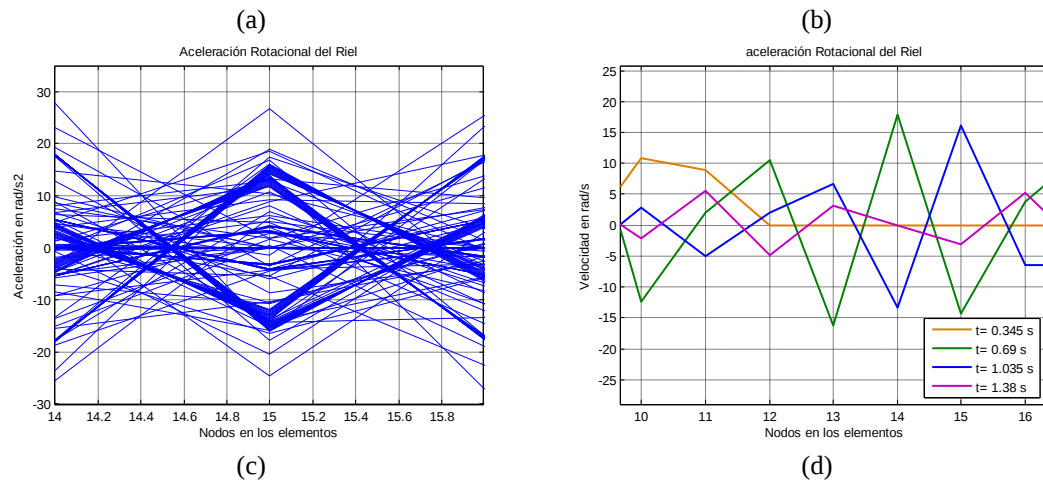


Figura 3.15. Respuesta de aceleración de los nodos del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Aceleración vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Aceleración rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Aceleración rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

3.8.3. Estudio de un riel de un durmiente por elemento, una vía en mal estado y 24 metros de largo

Esta parte del estudio de la vía, se realiza bajo las mismas condiciones que en la caso de dos durmientes, su objetivo es permitir la comparación entre ambos casos, mediante el análisis detallado de sus comportamientos respectivos.

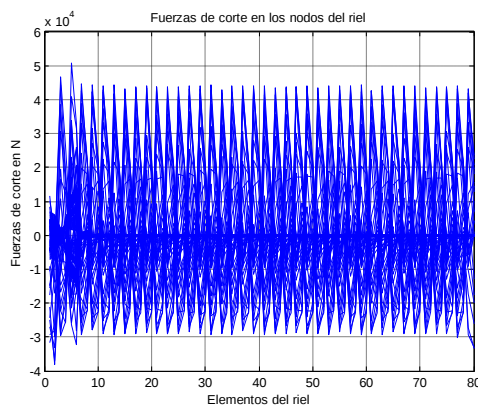
La siguiente Tabla 3.3, presenta los valores máximos de los resultados para una velocidad de 80 km/h, como se observa para cada número de pasos de tiempo se reportan los valores máximos calculados. Al igual que en el caso del estudio de dos durmientes por elemento, los valores máximos fueron escogidos dentro de la zona de estabilidad, hacia la mitad del riel, esto es debido a que producto de las condiciones de empotramiento y por la entrada repentina de la primera rueda en el riel, en el extremo izquierdo del mismo se producen alteraciones elevadas en los primeros intervalos y que se atenúan a medida que transcurre el tiempo.

Tabla 3.3 - Resultados con L=24 m y un durmiente por elemento, con v=80 km/h y vía en mal estado

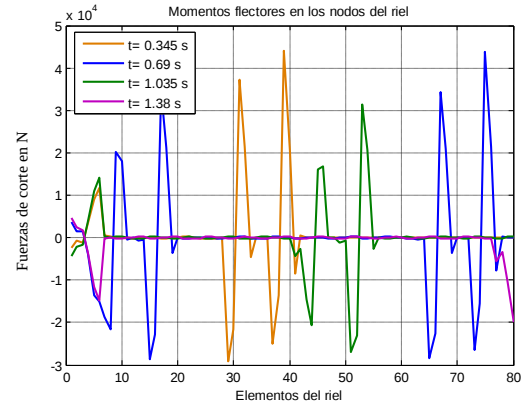
Paso de tiempo [Nt]					
Valores máximos	120	200	600	800	1000
Desplazamiento vertical del riel $[10^{-4}] m$	2,80	2,80	2,80	4,20	3,40
Desplazamiento rotacional del riel $[10^{-4}] rad$	2,00	2,00	2,00	6,40	7,60
Velocidad vertical del riel m/s	0,10	0,10	0,10	4,20	7,40
Velocidad rotacional del riel rad/s	0,24	0,24	0,24	1,50	4,30
Aceleración vertical del riel m/s^2	36,00	36,00	36,00	10,20	13,40
Aceleración rotacional del riel rad/s^2	100,00	100,00	100,00	30,00	32,00
Desplazamiento de los durmientes $[10^{-4}] m$	-0,80	-0,80	-0,80	-4,00	-5,00
Velocidad de los durmientes $[10^{-3}] m/s^2$	2,00	2,00	2,00	-1,60	-2,50
Aceleración de los durmientes m/s^2	-0,60	-0,60	-0,60	-1,76	-2,30
Momento Flector $[10^5] N.m$	2,20	2,20	2,20	2,80	2,80
Fuerza de Corte $[10^4] N$	5,20	5,20	5,20	5,80	6,20

La Figura 3.16 que se presenta a continuación, contiene los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 24 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en mal estado. La parte

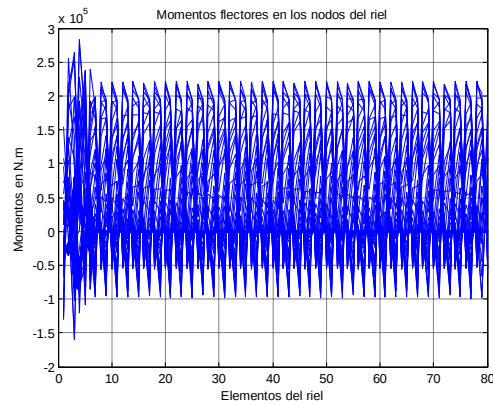
(a) muestra el comportamiento de las fuerzas de corte en los nodos de la vía para todos los intervalos de tiempo (Δt) que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt que permiten observar el comportamiento de algunos tiempos y compararlos, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en los nodos de los elementos y finalmente la parte (d) muestra los momentos flectores para cuatro intervalos de tiempo.



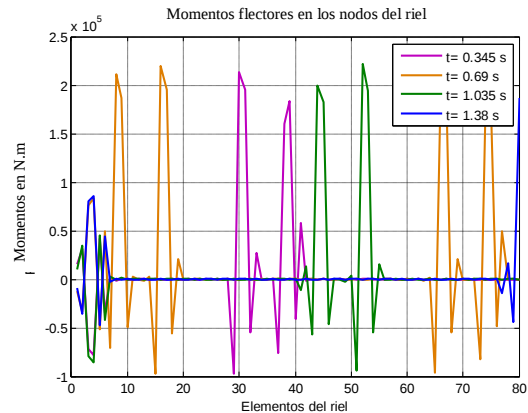
(a)



(b)



(c)

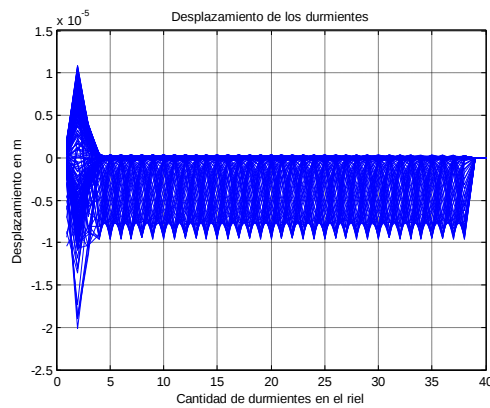


(d)

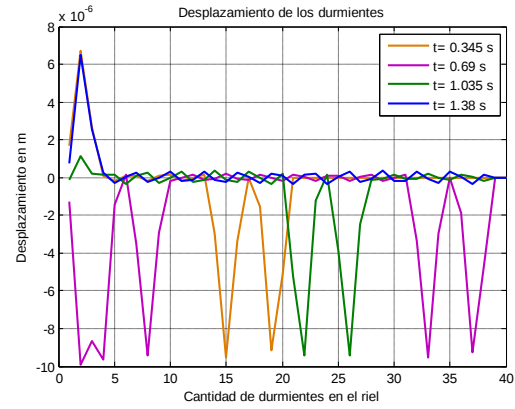
Figura 3.16. Respuesta para una vía con $L=24$ m y un durmiente por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Fuerzas de corte en los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Fuerzas de corte en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Momentos flectores en los nodos del riel todos los pasos de tiempo. (d) Momentos flectores en los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

En la Figura 3.17 se presentan las gráficas del comportamiento de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los durmientes para una vía férrea en malas condiciones de longitud 24 m, un durmiente por elemento y a una velocidad de

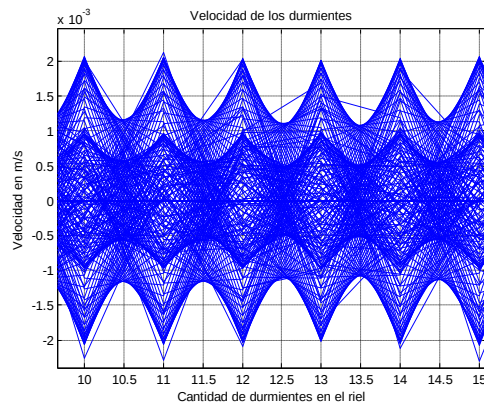
80 km/h. Se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, en la parte (b) estos desplazamientos para cuatro intervalos de tiempo; la parte (c) representa las velocidades de los durmientes y la parte (d) las velocidades para cuatro Δt . Luego la Figura 3.16 en la parte (e) muestra las aceleraciones de los durmientes en todo el tiempo de estudio, y luego para cuatro tiempos representativos, en la parte (f).



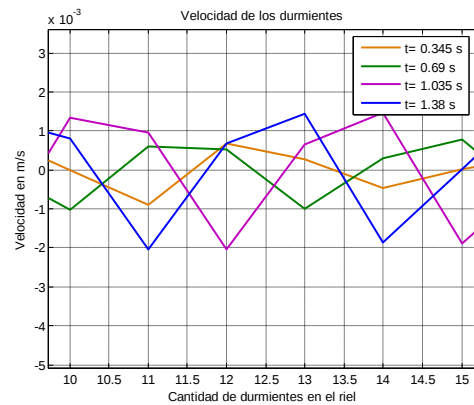
(a)



(b)



(c)



(d)

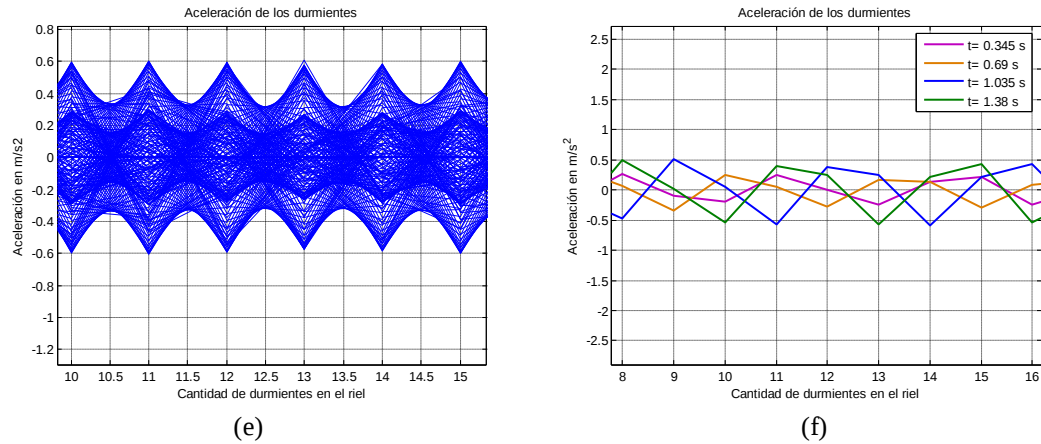
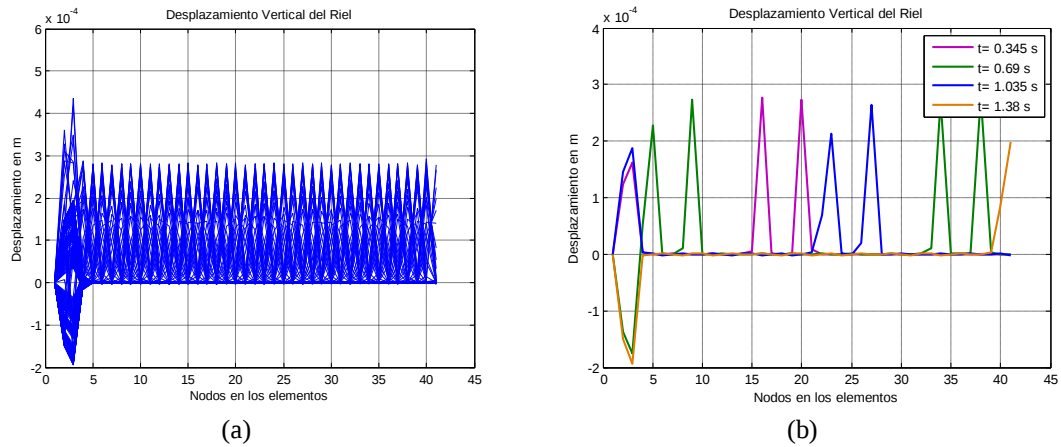
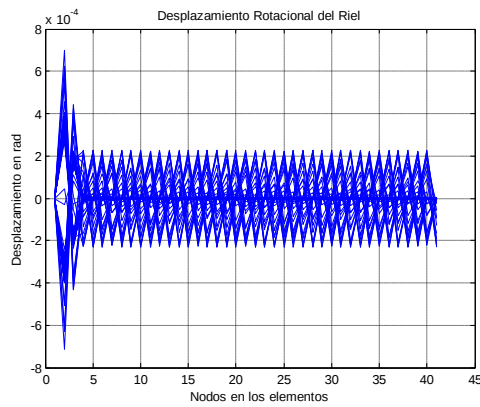


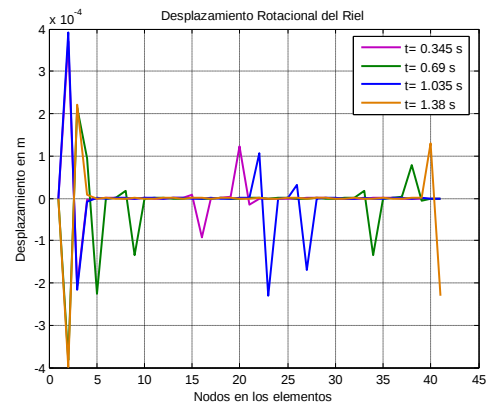
Figura 3.17. Respuesta de los durmientes con $L=24$ m y un durmiente por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento de los durmientes todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad de los durmientes todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad de los durmientes para 4 intervalos de tiempo. (e) Aceleración de los durmientes todos los pasos de tiempo. (f) Aceleración de los durmientes para 4 intervalos de tiempo.

La siguiente Figura 3.18 permite observar el comportamiento del desplazamiento del riel en el tiempo de estudio, tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, con las mismas condiciones de longitud del riel de 24 metros, un durmiente por elemento y a una velocidad de 80 km/h. Así pues, la parte (a) muestra el desplazamiento vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta los desplazamientos rotacionales para todo el intervalo y la parte (d) los mismo evaluados en cuatro intervalos.





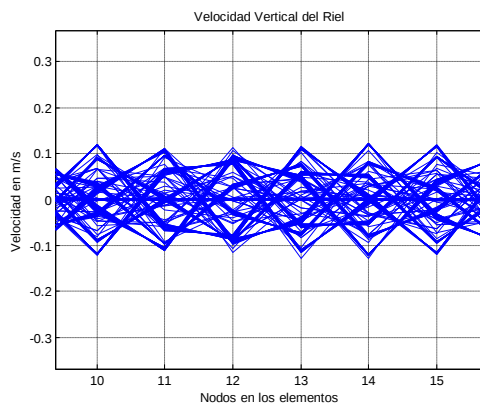
(c)



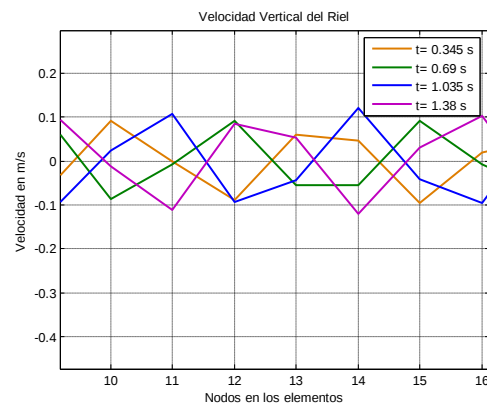
(d)

Figura 3.18. Respuesta de desplazamiento de los nodos del riel con $L=24$ y un durmiente por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Desplazamiento vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Desplazamiento rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

El comportamiento de la velocidad del riel durante el tiempo de estudio, tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, se expone en la Figura 3.19, con las mismas condiciones de longitud del riel de 24 metros, un durmiente por elemento y a una velocidad de 80 km/h. Se observa en la parte (a) la velocidad vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta la velocidad rotacional para todo el intervalo y la parte (d) las mismo evaluados en cuatro intervalos. La misma acotación sobre la reducción de la escala, se hace en este caso, teniendo en cuenta que las magnitudes son muy pequeñas para observar el comportamiento real en el gráfico ampliado.



(a)



(b)

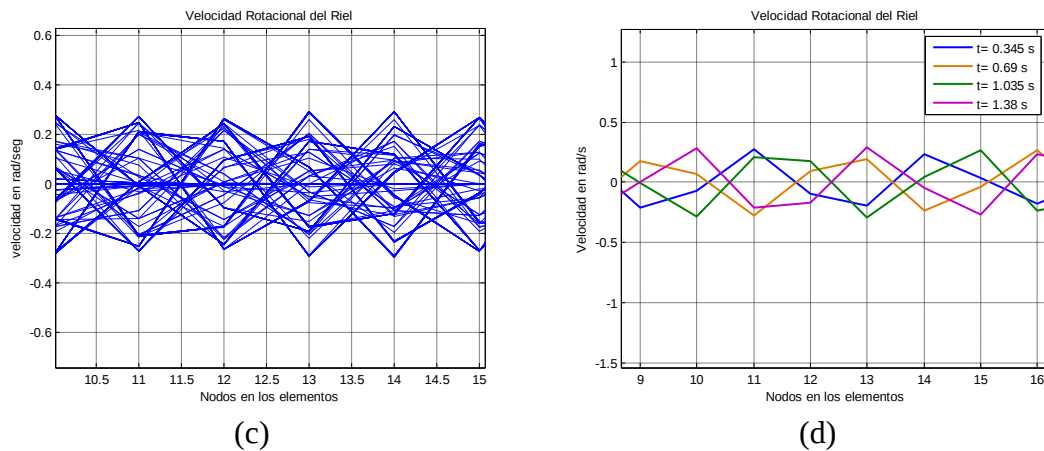


Figura 3.19. Respuesta de velocidad de los nodos del riel con $L=24$ y un durmiente por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado. (a) Velocidad vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Velocidad vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Velocidad rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Velocidad rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

Las aceleraciones encontradas para el riel en el caso de un durmiente por elemento, se presentan en la Figura 3.20, tanto en la dirección rotacional como en la dirección vertical, como se ha venido mencionando, en este caso debido a que los órdenes de magnitudes de las aceleraciones son muy pequeños, los gráficos se amplificaron en una zona representativa, hacia la mitad del riel.

Se observa en la parte (a) la aceleración vertical del riel para todo el intervalo de estudio y para cuatro tiempos representativos en la parte (b). La parte (c) presenta la aceleración rotacional para todo el intervalo y la parte (d) las mismo evaluados en cuatro intervalos. Cabe acotar en este caso que los órdenes de magnitudes de las aceleraciones son muy pequeños y por esta razón los gráficos se amplificaron en una zona representativa, hacia la mitad del riel.

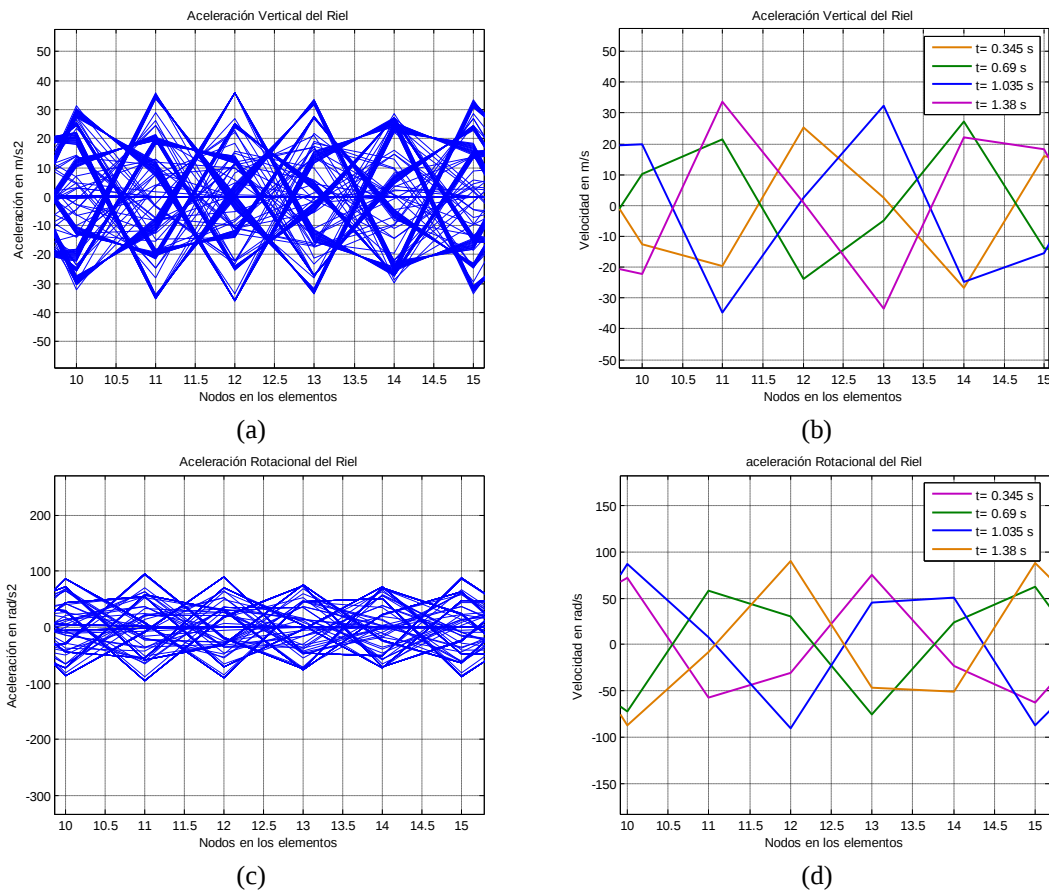


Figura 3.20. Respuesta de aceleración de los nodos del riel con $L = 24$ m y un durmiente por elemento, con $V = 80$ km/h y vía en mal estado. (a) Aceleración vertical de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (b) Aceleración vertical de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo. (c) Aceleración rotacional de los nodos del riel para todos los pasos de tiempo. (d) Aceleración rotacional de los nodos del riel para 4 intervalos de tiempo.

3.8.4. Efecto de la fuerza móvil en el comportamiento de la vía férrea

Para determinar la influencia de la magnitud y la posición de las cargas sobre el riel, se diseñó una corrida que permitiera observar en cada instante de tiempo la posición de las fuerzas generadas por el vehículo y el valor de los desplazamientos, momentos flectores y fuerzas de corte en estos puntos en función de dos magnitudes de fuerzas, para una carga de 78400 N por rueda, correspondiente a un tren de pasajeros cargado y 174000 N para un vehículo de carga. En ambos casos se empleó la misma configuración con longitud del cantón de 24 metros, dos durmientes por elemento y una velocidad de desplazamiento de 80 km/h, variando la fuerza aplicada.

La fuerza moviéndose sobre el riel, está determinada por las dimensiones del vagón, es decir estas no pueden moverse libremente, pues están sometidas a seguir el movimiento que impone la primera rueda del primer bogie. La Figura 3.21, ilustra este fenómeno, para un intervalo de tiempo t_0 , se puede observar el vagón completamente fuera del tramo de estudio, justo un instante antes de entrar sobre el riel. Se debe aclarar, que esto no quiere decir que este vagón un instante antes del inicio del movimiento no esté sobre el riel, sino que se encuentra fuera del cantón establecido para el análisis.

Cuando se inicia el movimiento en el tiempo t_1 , se observa que las dos primeras ruedas se encuentran dentro del riel, sin embargo el tiempo transcurrido no es tan largo como para que se produzca la entrada del segundo bogie. En este caso particular el intervalo de tiempo estudiado es grande y esto produce que las primeras fuerzas en el ejemplo mostrado en la Figura 3.21, parezcan entrar juntas, lo cual no ocurriría si se evalúan intervalos de tiempo pequeños. Más adelante para el instante tiempo t_4 , se observa que las cuatro ruedas se encuentran dentro del tramo en estudio y posteriormente en el tiempo t_6 , se muestran sólo las dos últimas fuerzas, lo que significa que el primer bogie se encuentra en ese caso fuera del riel.

Para ejemplificar mejor el movimiento de las fuerzas, se muestran a continuación los valores de la distancia de cada fuerza con respecto al extremo izquierdo del riel, denotados como X_i , evaluadas cada 25 intervalos de tiempo, en una corrida con números de pasos de tiempo $Nt = 200$, que fue la misma que generó la figura analizada previamente.

Tabla 3.4 - Posición de las fuerzas en cada instante de tiempo para ambos casos de fuerzas

Tiempo	Distancia a la que se encuentra cada fuerza				Elemento en le que se encuentra cada fuerza			
0,245 s	X ₁ =5,8 m		X ₂ =3,3 m		E ₁ =4		E ₂ =2	
0,4905 s	X ₁ =11,3 m		X ₂ =8,8 m		E ₁ =9		E ₂ =7	
0,735 s	X ₁ =16,7 m		X ₂ =14,2 m		E ₁ =13		E ₂ =11	
0,98 s	X ₁ =21,9	X ₂ =19,4	X ₃ =4,4	X ₄ =1,9	E ₁ =18	E ₂ =16	E ₃ =3	E ₄ =1
1,225 s	X ₃ =10,3 m		X ₄ =7,8 m		E ₃ =8		E ₄ =6	
1,47 s	X ₃ =15,6 m		X ₄ =13,1 m		E ₃ =13		E ₄ =10	
1,715 s	X ₃ =21,0 m		X ₄ =18,5 m		E ₃ =17		E ₄ =15	
1,95 s	X ₄ =23,7 m				E ₄ =20			

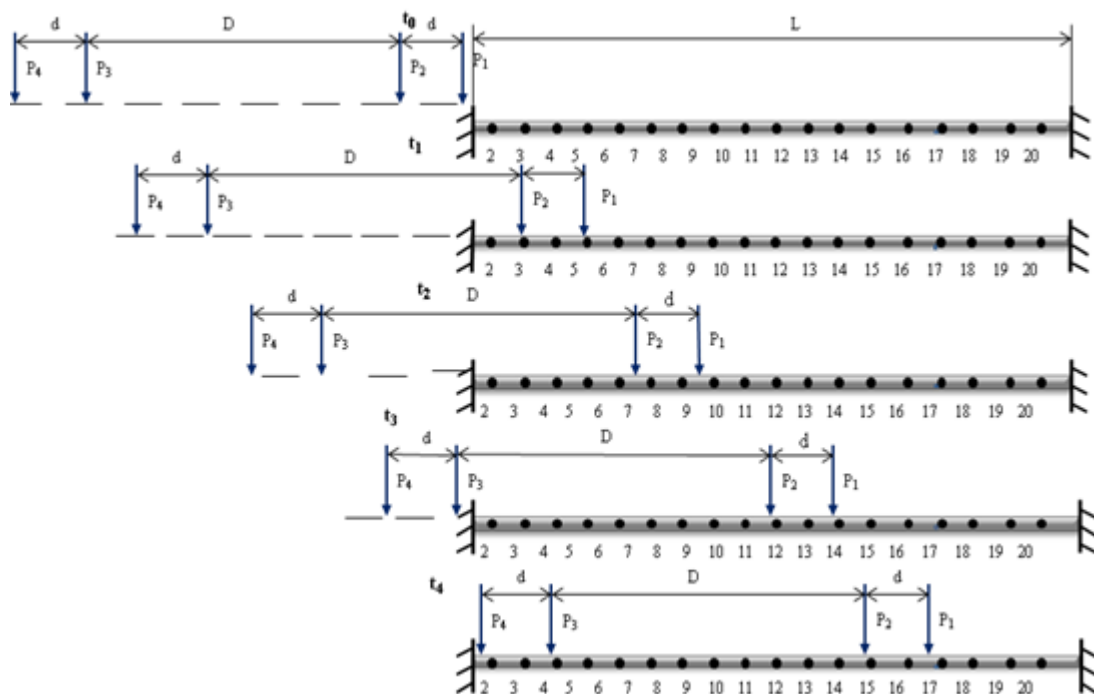


Figura 3.21 - Desplazamiento de las fuerzas en función del tiempo

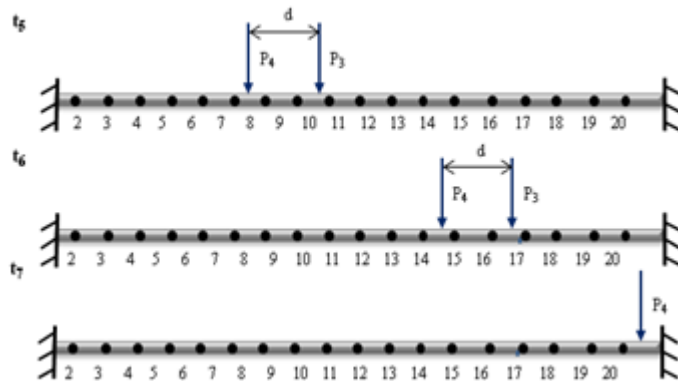


Figura 3.21 – (Continuación) Desplazamiento de las fuerzas en función del tiempo

Los gráficos obtenidos se presentan a continuación, estos representan la respuesta evaluada en dos casos que se pueden definir como: CASO I, para una fuerza de 78400 N, un riel de 24 metros, dos durmientes por elemento y 80 km/h. CASO II, para una fuerza de 174000 N, considerando la misma configuración.

CASO I

Es este apartado se presentan los gráficos generados para un número de pasos de tiempo de 200, dividido en ocho intervalos, a cada 25 intervalos de tiempo cada uno, para el primer caso de una fuerza de 78400 N.

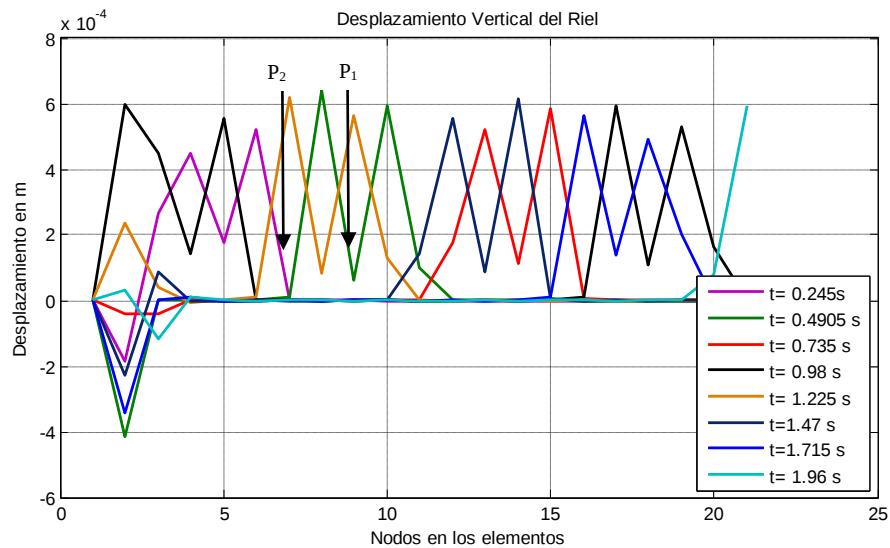


Figura 3.22 - Desplazamiento vertical del riel para un riel de $L=24$ y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando la posición de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

Los desplazamientos registrados en riel obedecen a la acción de las cargas provenientes de las ruedas del vagón que se desplaza sobre él, por lo tanto debe esperarse que lo mismo ocurra para las velocidades, aceleraciones, fuerzas de corte y momentos flectores. En el caso particular del desplazamiento, se puede comprobar con los valores de la Tabla 3.5 que para cada instante de tiempo, la respuesta y el área más afectada por la acción de las fuerzas, depende de la posición de las mismas sobre el riel. Para esto se toma un tiempo cualquiera, por ejemplo $t=0,4905$ s y se busca en la tabla para este intervalo, cómo son las cargas actuando y además qué posición ocupan sobre el riel. Según la Tabla 3.4, para ese instante de tiempo se ubican sobre el riel dos fuerzas correspondientes a las primeras ruedas del vagón, ubicadas a 11,3 metros en el elemento 9 y a 8,8 metros en el elemento 7, respectivamente. Con estos datos se examina la Figura 3.22, y se busca el tiempo correspondiente al ejemplo, cuya representación es de color verde. Como se observa existen para este tiempo unos picos, que representan la ubicación de las fuerzas y al compararlos con los datos de la tabla, resulta que esta ubicación coincide con los valores registrados en ella. Además, las flechas sobre la figura representan las dos ruedas, lo cual explica que en el punto de aplicación exista una depresión que genera perturbación en los elementos adyacentes, los cuales ascienden como consecuencia de la aplicación de la fuerza. Se observa también que esta perturbación afecta aproximadamente a los dos elementos adyacentes anteriores y posteriores, pero para elementos más alejados al punto de aplicación el efecto se atenúa por completo.

A continuación se presentan el resto de los gráficos obtenidos con esta corrida, si se desea conocer las posiciones de las fuerzas para cada instante de tiempo, basta comparar los valores de la Tabla 3.4 con la ubicación de irregularidades en el gráfico.

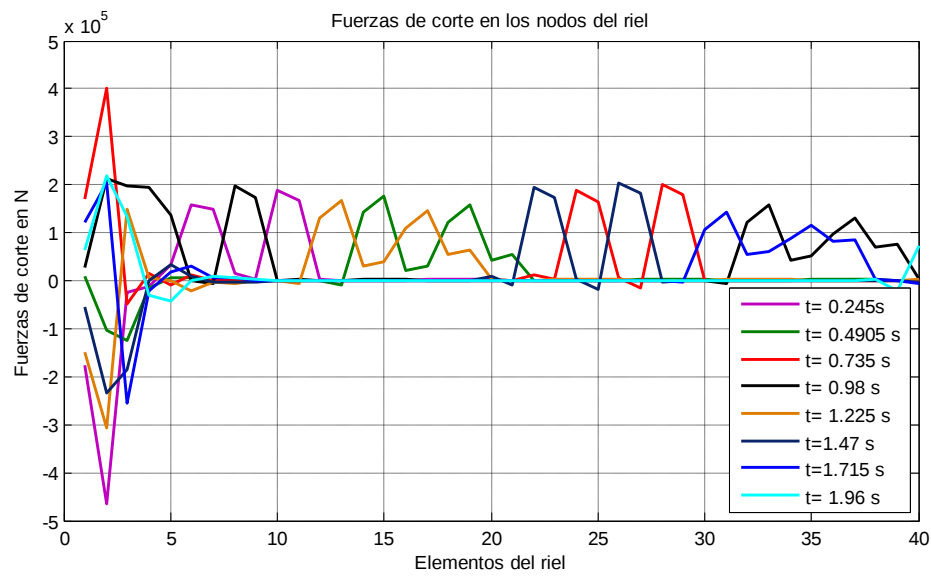


Figura 3.23 - Fuerza de corte para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

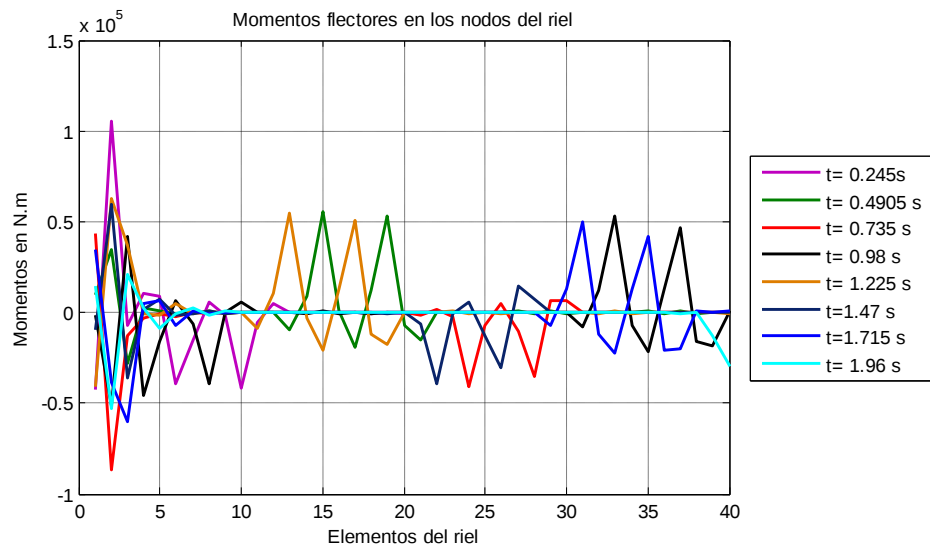


Figura 3.24 - Momento flector para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

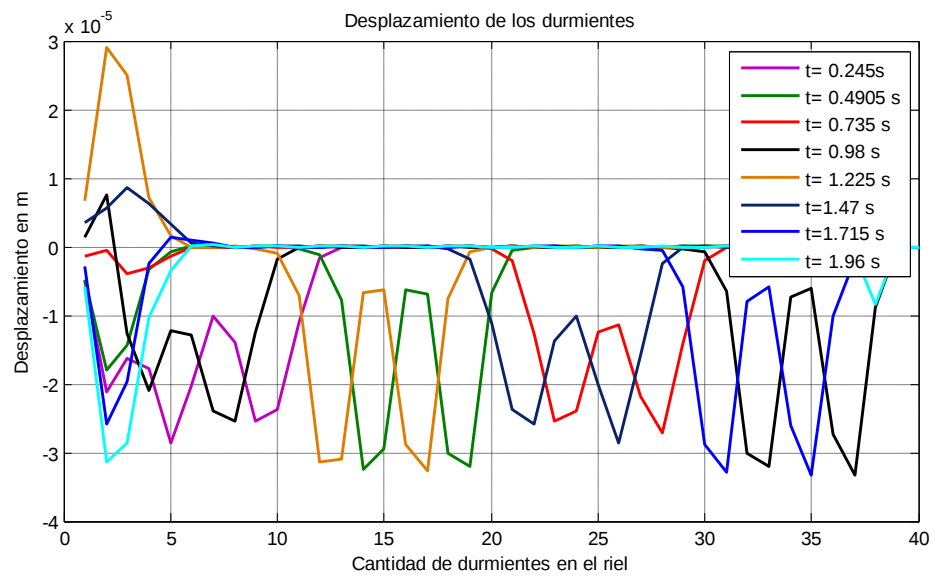


Figura 3.25 - Desplazamiento de los durmientes para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

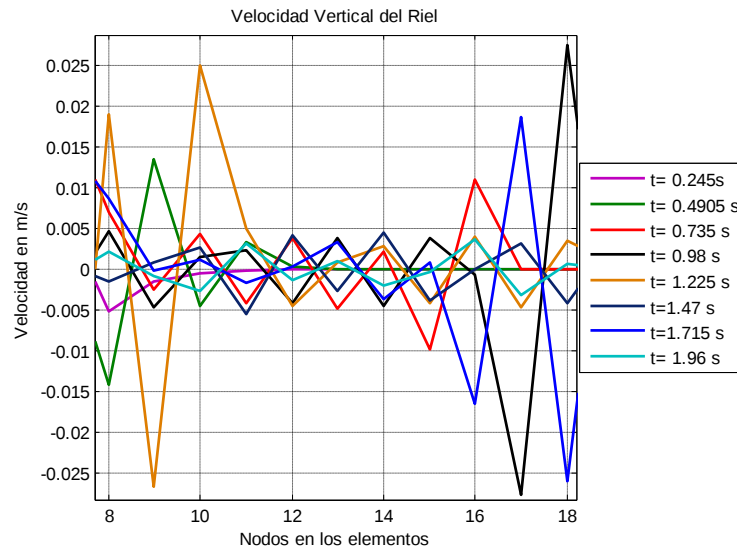


Figura 3.26 - Velocidad vertical para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

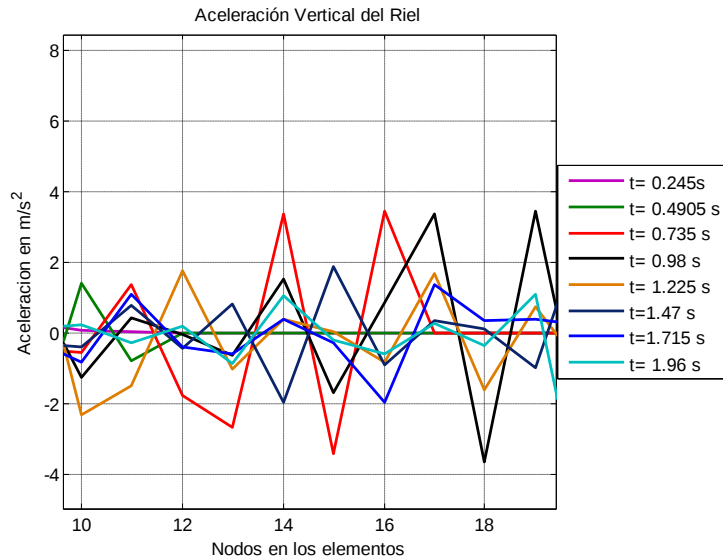


Figura 3.27 - Aceleración vertical para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

Las figuras presentadas permitieron analizar el comportamiento de la vía férrea en función de la velocidad y aceleración del riel, así mismo como el desplazamiento vertical que experimentan los durmientes cuando se ven sometidos a una determinada carga puntual móvil. Permitiendo de esa manera el planteamiento de un segundo caso en donde se aumenta el momento de la carga a la cual se encuentra sometido el riel, pero manteniendo las condiciones planteadas inicialmente.

CASO II

Para esta corrida la única variación es la de la magnitud de la fuerza por rueda a evaluar, que se toma como 174000 N. Este cambio se presenta con el fin de comparar el cambio de la respuesta según el cambio de la fuerza aplicada por el vehículo ferroviario. Las posiciones de las fuerzas siguen siendo las mismas, y en este caso pueden observarse los efectos en los mismos lugares, para el tiempo de 0,4905 segundos. Se ubican las fuerzas, representadas por flechas en el ejemplo para comprobar que la ubicación es la misma.

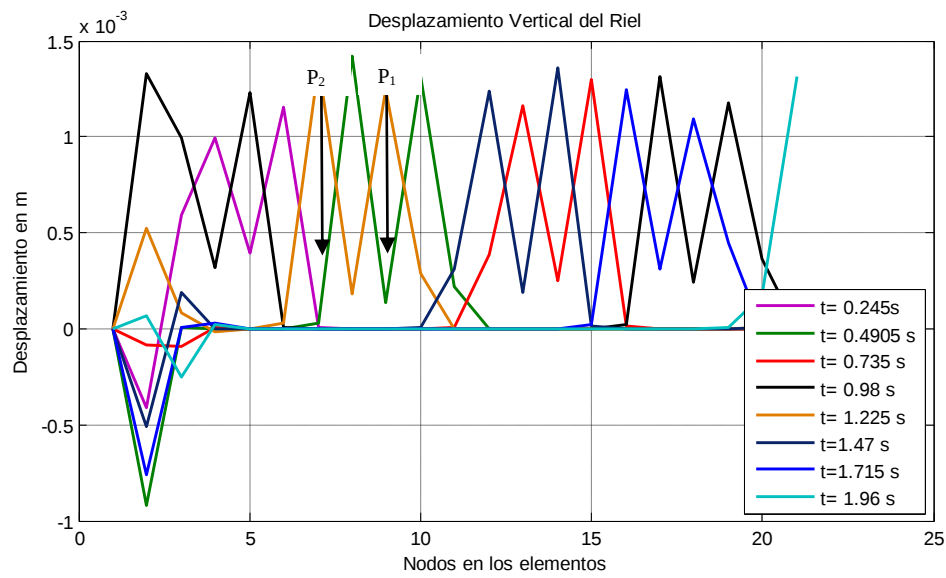


Figura 3.28 - Desplazamiento vertical del riel para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

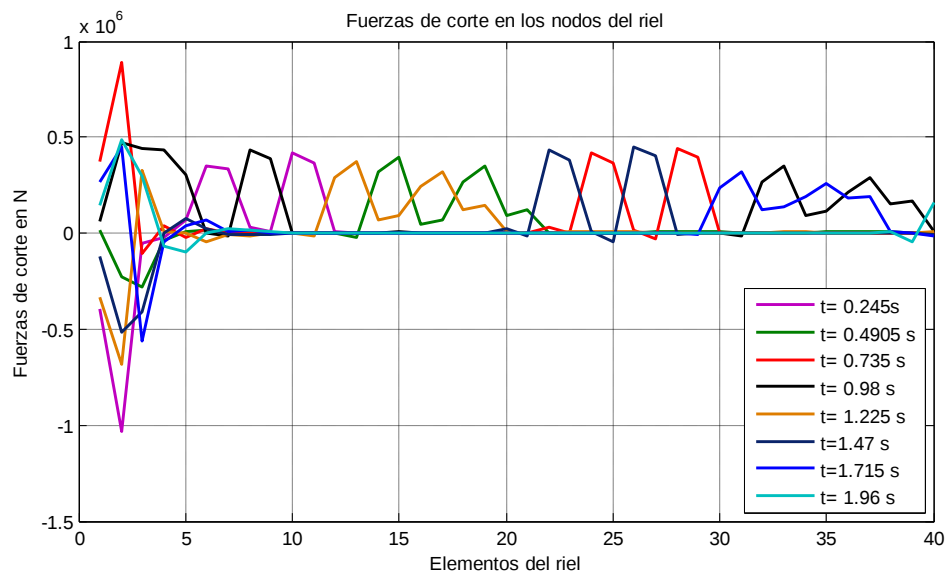


Figura 3.29 – Fuerzas de corte para un riel de $L=24$ m y dos durmientes, a $V=80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

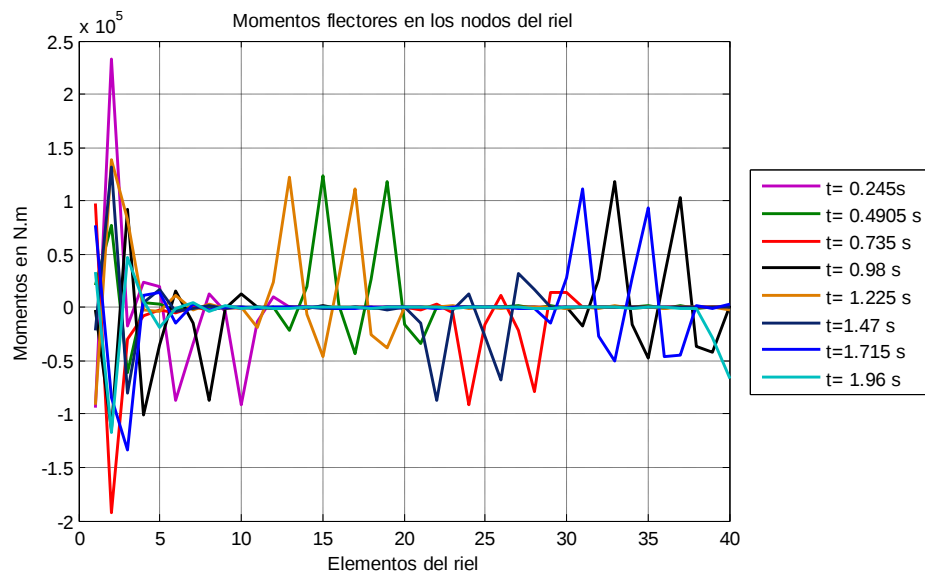


Figura 3.30 – Momentos flectores para un riel de $L = 24\text{ m}$ y dos durmientes, a $V = 80\text{ km/h}$, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

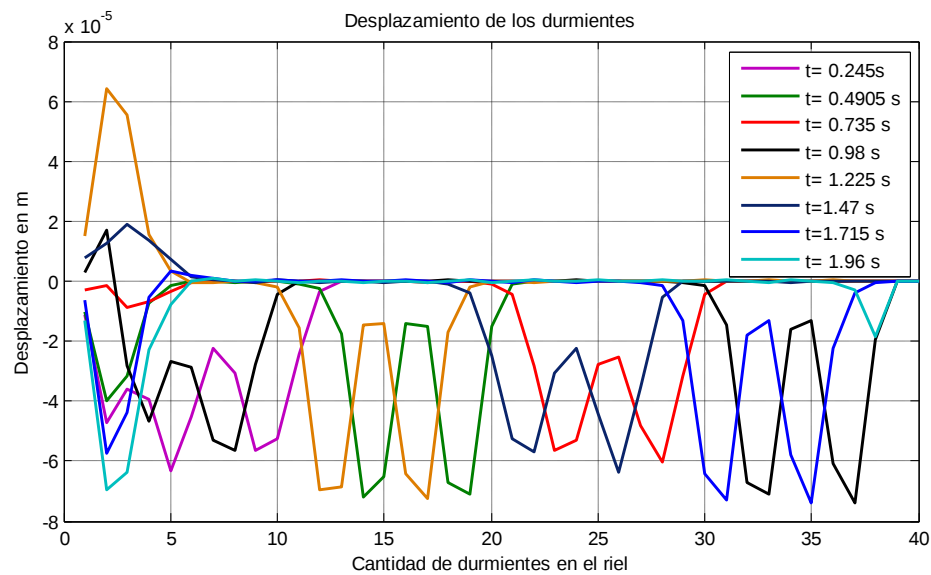


Figura 3.31 - Desplazamiento de los durmientes para un riel de $L = 24\text{ m}$ y dos durmientes, a $V = 80\text{ km/h}$, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

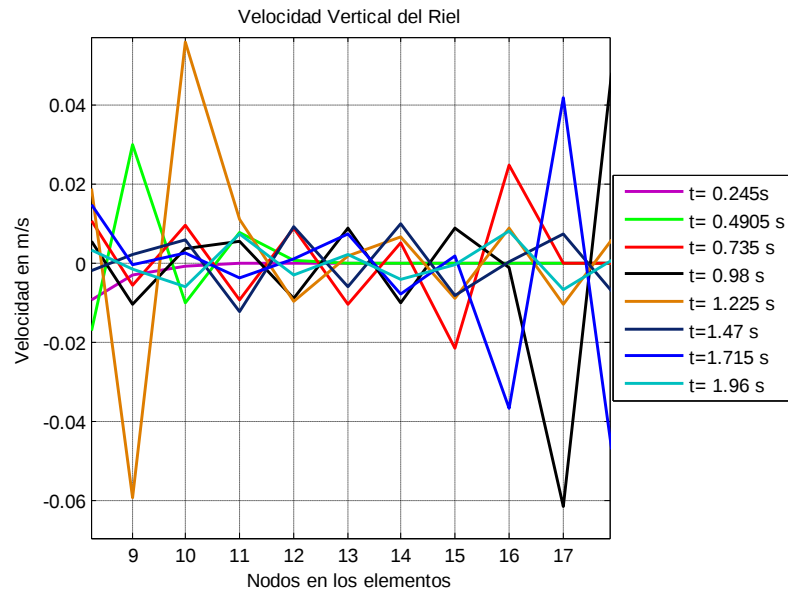


Figura 3.32 - Velocidad vertical del riel para un riel de $L= 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

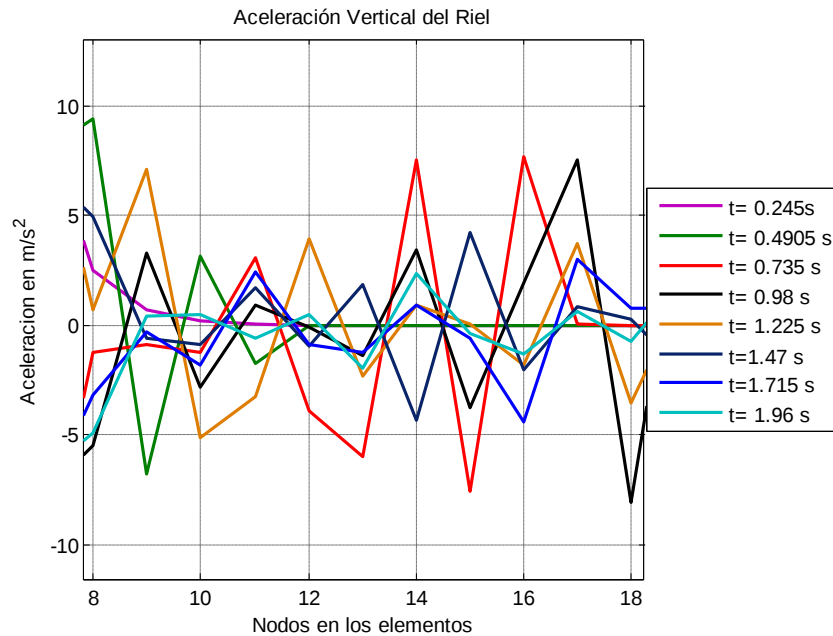


Figura 3.33 - Aceleración vertical del riel para un riel de $L= 24$ m y dos durmientes, a $V = 80$ km/h, representando las posiciones de las fuerzas en diferentes intervalos de tiempo

Las figuras mostradas anteriormente permitieron observar el comportamiento de la vía férrea cuando esta se encuentra sometida a diferentes estados de carga, permitiendo obtener los resultados de la investigación los cuales serán analizados en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Análisis de Resultados y Conclusiones

El capítulo 4 ilustra el análisis realizado a los resultados obtenidos en la investigación en función de los diferentes casos que fueron planteados, así mismo como las conclusiones a las que se llegó a partir de estos.

4.1. Análisis de Resultados

El código computacional desarrollado permitió obtener la solución numérica de la ecuación de movimiento del modelo matemático de una vía férrea, planteado mediante el método del elemento finito. Esta solución arrojó los resultados expuestos en el Capítulo anterior de acuerdo a las diferentes corridas que se realizaron, variando los parámetros críticos descritos, como el número de durmientes por elemento, la velocidad de circulación, la longitud del tramo de estudio, entre otros. En esta sección, se analizan estos resultados numéricos, teniendo como fundamento las bases teóricas expuestas en el Capítulo 2 de la investigación.

La veracidad de los valores numéricos expuestos en las tablas de resultados depende directamente de la convergencia y estabilidad del método empleado para su obtención. Como se expuso en la metodología desarrollada para el cálculo de la respuesta de la vía ante un tren de cargas móviles puntuales, la ecuación de movimiento planteada de acuerdo al modelo matemático de elementos finitos elaborado, se resolvió utilizando el método numérico de Newmark, también conocido como método de aceleración promedio. Con base en lo expuesto por Bathe (1996), el método de Newmark es incondicionalmente estable, lo cual quiere decir que para los valores de las constantes de estabilidad recomendados, es posible obtener una solución aproximada en cualquier intervalo de tiempo (Δt) considerado. No obstante, el mismo autor propone que la elección de un intervalo de tiempo adecuado amplifica la precisión de los resultados, debido a que aumenta la convergencia del método. Lo

anterior significa que debe existir un intervalo de pasos del tiempo, dentro del cual la respuesta sea estable y genere una alta confiabilidad en los valores obtenidos.

Mediante las diferentes corridas realizadas con el código numérico desarrollado en Matlab, una de las observaciones más importantes fue precisamente la confirmación de la existencia de este rango de valores donde la respuesta se hace exacta. Este hecho se puede observar en las Tablas 3.2, para una configuración de un riel de 24 metros y 2 durmientes por elemento, desplazándose a 80 km/h; en este caso para un número de pasos de tiempo (N_t) igual a 800 en comparación con uno igual a 600, los valores máximos de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones tanto del riel como de los durmientes, los momentos flectores y las fuerzas de corte varían significativamente evidenciando cierta divergencia en el cálculo y por ende una disminución de la confiabilidad de estos resultados. Sin embargo, al disminuir los valores de N_t a 400, 200 y 100, respectivamente, se confirmó una recurrencia de valores; es decir, para estos tres casos, lo expuesto en la Tabla 3.2, permitió considerar un rango de pasos de tiempo Δt , cuyo valor mínimo es para $N_t = 400$, con el que $\Delta t = 0,003$ y $\Delta t = 0,01$ para el máximo con $N_t = 100$, donde, dentro del cual la convergencia es clara y constante para cualquier valor de Δt . El cálculo de este valor se realizó también para rieles de 12 y 36 metros, cuyos resultados se encuentran expuestos en los apéndices 10 y 11, obteniendo el mismo rango de confiabilidad, el cual coincide además con el valor empleado por Lou y otros (2006), en su investigación que fue $\Delta t = 0,005$.

Para valores de números de pasos de tiempo fuera del intervalo de confianza, el método diverge llegando a ser completamente inestable para valores muy grandes de N_t , que hacen muy pequeño el valor de Δt , de acuerdo a la relación $\Delta t = T/N_t$. Estas consideraciones de inestabilidad, se exponen en el apéndice 9, donde se describe la entrevista realizada al profesor Euro Casanova, en ella el entrevistado acota una recomendación de elevada importancia, pues según su experiencia los métodos numéricos de integración directa, como el caso del método de Newmark, tienden a crear inestabilidades apreciables cuando el valor de Δt empleado es muy pequeño,

incluso en los casos donde el método se supone incondicionalmente estable mediante el empleo de los coeficientes de estabilidad correspondientes.

En la Tabla 2 ubicada en el apéndice 10, se puede apreciar una situación similar a la descrita para 80 km/h, debido a que existe un rango donde la respuesta es convergente. A pesar de esto, por el hecho de que en este caso la velocidad de circulación constante evaluada es 120 km/h, el tiempo que tarda el vagón del tren en recorrer un riel de igual longitud (24 m) es menor. Al efectuar las corridas correspondientes a N_t igual a 800 y 600 pasos del tiempo, respectivamente, se verifica nuevamente que los valores se dispersan unos de otros, lo cual ocurre hasta llegar al valor máximo del intervalo de confianza que en este caso es menor al anterior, estableciéndose en 300 pasos del tiempo, por el efecto de la disminución del tiempo. El valor mínimo, también es menor que para 80 km/h, posicionándose en 50 pasos de tiempo. A pesar del cambio en el intervalo de pasos de tiempo, cuando se calcula el intervalo de Δt correspondiente, resulta ser el mismo que se indicó para 80 km/h, es decir un mínimo en 0,003 segundos y un máximo en 0,01 segundos. Al igual que en el caso anterior para valores muy pequeños de Δt , el método se hace inestable.

El comportamiento que se esboza con los valores numéricos de la Tabla 3.2, puede apreciarse con mayor detalle en las figuras de la 3.11 a la 3.15. Una característica común a todas ellas es que existe una distorsión en los primeros intervalos de tiempo del recorrido, esta discontinuidad se atenúa a medida que pasa el tiempo y las fuerzas van avanzando, de tal forma que el comportamiento se muestra estable antes del elemento 5, durante los primeros segundos de iniciado el movimiento. Este efecto se puede explicar debido a la rigidez que imponen las condiciones de borde del riel, considerando un empotramiento y a la repentina y abrupta aparición de la primera fuerza sobre el riel. La primera (3.11) presenta los momentos y las fuerzas de corte para un riel de 24 metros. En la parte (a) se observan las fuerzas de corte calculadas en los nodos de los elementos, En la parte (b) de la figura se representan cuatro intervalos de tiempo individuales, en ellos se puede apreciar el comportamiento del riel en un Δt determinado, en los dos primeros tiempos para $t=0,345$ s y $t=0,69$ respectivamente, se observan alteraciones provocadas sólo por la primera fuerza, sin

embargo para $t=1,035$, el gráfico indica claramente las fuerzas de corte provocadas por la primera fuerza hacia la mitad del riel y la presencia de la segunda fuerza en el inicio del cantón. Debemos recordar que para un riel de 12 m, nunca se observa la presencia de las cuatro fuerzas juntas, debido a que la distancia entre bogies considerada es 17,5 m, la cual excede la longitud del riel en ese caso. En la parte (c) de la Figura 3.11, se aprecian los momentos flectores en los nodos de los elementos, el comportamiento en este caso es bastante similar y tiene las mismas causas expuesta en el caso de la fuerza de corte, sin embargo cuando se estabilizan, los momentos parecen aumentar, mantenerse en un valor máximo, para luego disminuir y volver a repetirse. Esta repetición proviene del desplazamiento de las dos primeras fuerza, o de las dos últimas fuerzas sobre el riel. La parte (d) es similar a lo descrito para cuatro intervalos de tiempo en las fuerzas de corte, la única diferencia notable es que los momentos flectores tienen efecto sobre una mayor cantidad de elementos adyacentes.

El segundo grupo de gráficos presentados en la Figura 3.13, contienen el comportamiento dinámico de los durmientes. En la parte (a) se aprecian los desplazamientos verticales de los durmientes, cuyo comportamiento sigue las mismas reglas de tiempo de estabilización que en el caso de las fuerzas de corte y los momentos flectores, provocadas por el empotramiento. En la parte (b) es posible observar el desarrollo para cuatro tiempos diferentes; así, para el primer tiempo se presenta un movimiento de desplazamiento ascendente de los durmientes en las posiciones adyacentes, tanto anteriores como posteriores a la ubicación de la primera fuerza, lo cual se puede explicar con las teorías de Zimmermann y Timoshenko, pues en el punto donde se encuentra la fuerza, se genera una compresión que provoca el movimiento ascendente de los durmientes adyacentes a ella. La parte (c) expone las velocidades de los durmientes para todo el tiempo de estudio y la parte (d) para cuatro valores de tiempo. Para este caso las velocidades son muy pequeñas, por lo que en las partes (e) y (f), referentes a las aceleraciones se encuentran magnitudes pequeñas, aunque mayores que las velocidades. Sin embargo el comportamiento general de ambos parámetros es muy similar, debido a que las aceleraciones y velocidades están relacionadas físicamente, así el aumento de una provoca la variación de la otra.

El desplazamiento del riel puede analizarse observando la Figura 3.13. La parte (a) presenta el desplazamiento vertical del riel, al igual que en los casos anteriores al principio del cantón se observan las alteraciones del empotramiento y del inicio de movimiento, para luego apreciarse la estabilización. La parte (b) desarrolla cuatro tiempos diferentes y en ella se observa que los desplazamientos de los elementos donde se encuentran ubicadas las fuerzas, afectan a los elementos adyacentes, de igual manera que ocurre con los durmientes. En las partes (c) y (d) se muestran los desplazamientos rotacionales de los nodos del riel, al compararlos con los desplazamientos verticales se observa que cuando estos producen picos cóncavos, en los rotacionales son convexos, esto físicamente es que cuando la fuerza genera deflexiones en un elemento este rota haciendo que las pendientes generadas por la inclinación sean de signo contrario a los desplazamientos verticales.

En el caso de un vehículo con velocidad de circulación de 120 km/h, cuyos resultados son expuestos en el apéndice 10, el comportamiento es bastante similar, generando incluso valores exactamente iguales para la misma configuración. Aparentemente esto indica que la velocidad no produce un efecto demasiado significativo en la respuesta dinámica. Sin embargo, para comparar más casos, se hicieron corridas para velocidades de 30 km/h y 200 km/h que es el límite de la fórmula de Eisenmann, registrándose muy poca variación en la respuesta obtenida, si se comparan entre ellos y con los valores de 80 y 120 km/h. Esto quiere decir que al contrario de lo esperado, la velocidad de circulación no genera un efecto acuciante en los valores de las fuerzas de corte, momentos flectores, desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

El mismo procedimiento realizado para un riel de 24 metros, se desarrolló para uno de 12 y 36 metros, respectivamente, para ambos casos se evaluaron dos velocidades, 80 y 120 km/h. los resultados se exponen en los apéndice 10 y 11. Se observó que las velocidades, aceleraciones, desplazamientos, fuerzas de corte y momentos flectores son iguales, pero además son iguales a los obtenidos para un riel de 24 metros, lo cual sugiere que la longitud del cantón estudiado no es significativa en la respuesta.

El segundo caso considerado en los resultados fue el planteado para un riel con las mismas condiciones, es decir de 24 metros, para una vía de mala calidad, desplazándose a 80 km/h y considerando en esta ocasión un solo durmiente por elemento. En el caso de un durmiente por elemento, la longitud del elemento disminuye a 0,60 metros, es decir el número total de elementos se duplica con respecto a la configuración de dos durmientes por elemento, para la cual la longitud del elemento es mayor, contando con 1,2 metros.

Los resultados obtenidos se registraron en el Capítulo anterior, en la Tabla 3.3 y las figuras 3.16 a la 3.20, el efecto irrelevante de la velocidad se repite en cada caso, manteniéndose los valores entre un rango constante, independientemente del valor de la velocidad estudiado, coincidiendo con lo expuesto para dos durmientes por elemento. Lo mismo ocurre con la variación de la longitud del cantón, la cual no afecta significativamente los resultados. Sin embargo, cuando se comparan las respuestas para la misma longitud, velocidad y estado de la vía con uno y dos durmientes, la variación de los valores obtenidos es apreciable. Lo anterior sucede para todas la configuraciones, para ejemplificar se tomaron los valores de la Tabla 3.2, correspondiente a dos durmientes por elemento, para compararlos con los de la Tabla 3.3 para un durmiente por elemento. Como se observa, el desplazamiento del riel varía de $7 \times 10^{-4} \text{ m}$ a $2,8 \times 10^{-4} \text{ m}$, para dos durmientes y un durmiente, respectivamente. Lo mismo ocurre en el resto de los parámetros, el desplazamiento de los durmientes va de $-3,8 \times 10^{-4} \text{ m}$ a $-1,5 \times 10^{-4} \text{ m}$, las fuerzas de corte de $6 \times 10^4 \text{ N}$ a $5,2 \times 10^4 \text{ N}$ y los momentos flectores varían entre $2,1 \times 10^5 \text{ N.m}$ y $2,2 \times 10^5 \text{ N.m}$. Puede apreciarse que, en general, los resultados para dos durmientes son significativamente mayores que los obtenidos para un durmiente, excepción hecha de los momentos de corte cuyo rango de valores permaneció constante para ambos casos. La mayor variación se observa en los desplazamientos tanto del riel como de los durmientes. La explicación a este fenómeno se encuentra en los fundamentos de la mecánica de sólidos, cuando una viga sometida a carga concentrada, de menor longitud (elementos de 0,60 m), se compara con una de mayor longitud (elementos de

1,2 m) lo que se genera es que la más pequeña se deflecta menos, que es lo que ocurre en los resultados.

El mismo procedimiento fue empleado para evaluar una vía en muy buen estado, según la ecuación de Eisenmann, variando las velocidades y las longitudes para el caso de dos durmientes por elemento. Los resultados de estas corridas se presentan en el apéndice 10; en general el comportamiento es similar, estableciéndose también en este caso un intervalo de confianza de Δt , para el cual las respuestas son exactas y convergentes. Sin embargo, al comparar estos resultados con los obtenidos para una misma configuración, pero con una vía en mal estado, se aprecian variaciones que incentivan la idea de que las condiciones de la vía afectan la respuesta dinámica obtenida. Por ejemplo, si se comparan lo expuesto en el apéndice 10 para una vía en muy buen estado, con la Tabla 3.2 para una vía en mal estado, se observan variaciones en todos los valores, así el desplazamiento del riel pasa de $7 \times 10^{-4} \text{ m}$ a $5 \times 10^{-4} \text{ m}$, para vía en mal estado y en muy buen estado, respectivamente. Lo mismo ocurre en el resto de los parámetros, el desplazamiento de los durmientes va de $-5 \times 10^{-4} \text{ m}$ a $-3,8 \times 10^{-4} \text{ m}$, las fuerzas de corte de $6 \times 10^4 \text{ N}$ a $1,5 \times 10^4 \text{ N}$ y los momentos flectores varían entre $2,1 \times 10^5 \text{ N.m}$ y $1,5 \times 10^5 \text{ N.m}$.

La tendencia de todos los valores es a disminuir a medida que el estado de la vía mejora; esto tiene sentido desde el punto de vista físico, pues concuerda con lo establecido por Eisenmann, según lo cual el estado de la vía es un punto crítico en la magnitud de las fuerzas dinámicas generadas. Así pues, mientras mayores sean estas fuerzas, como ocurre cuando la estructura de la vía se ha deteriorado, mayores serán los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas de corte y momentos flectores registrados en el cálculo de la respuesta. De esta forma se confirma el planteamiento de Eisenmann, pues los valores obtenidos coinciden con las expectativas iniciales respecto al comportamiento de la vía, de acuerdo a su teoría empírica.

Otro de los tópicos fue el estudio de la influencia de la magnitud y posición de las fuerzas puntuales en cada intervalo de tiempo, los resultados de esta corrida se

presentaron en el Capítulo anterior, las figuras 3.22 a la 3.27, contienen la respuesta generada cada 25 pasos de tiempo, considerando una fuerza aplicada de 78400 N.

La posición de las fuerzas con el paso de tiempo se visualiza en la Figura 3.21, estos datos se compararon con los gráficos correspondientes al desplazamiento del riel y de los durmientes, fuerzas de corte y momentos flectores, y se pudo apreciar que en los puntos donde se encuentran ubicadas las fuerzas del vehículo, se generan las mayores magnitudes de cada uno de los parámetros medidos. En los puntos adyacentes se presenta cierta influencia, la cual decrece hasta que los elementos muy retirados del punto de aplicación no se ven afectados. De la misma manera se observa que para las fuerzas correspondientes a los bogies cuya distancia es de 2,5 metros la acción de una de ellas interfiere en la de la otra; en otras palabras, en la longitud intermedia se generan efectos provocados por ambas cargas. Esto no ocurre en el caso de los dos bogies, cuya distancia es 17,5 metros, pues la acción de un bogie no es suficientemente larga como para afectar al otro. Estos mismos efectos se observaron en el caso de una fuerza mayor que la anterior, para 174000 N, sin embargo al comparar los resultados obtenidos en los dos casos la respuesta varía significativamente, de acuerdo a las magnitudes. Es decir para la fuerza mayor los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas de corte y momentos son mayores que para la fuerza de 174000 N, lo cual era de esperarse debido a que se sabe que todos estos parámetros son directamente proporcionales a las fuerzas externas aplicadas al sistema.

4.5. Conclusiones

La búsqueda de la respuesta dinámica de la superestructura ferroviaria estuvo determinada por las bases teóricas, que representaron el fundamento necesario para el desarrollo de la investigación. De esta manera, se encontró que los componentes de la vía férrea, poseen propiedades físicas que determinan su comportamiento ante las sollicitaciones que impone la marcha del vehículo sobre el riel; sin embargo, las

propiedades intrínsecas al sistema son en general constantes y sólo varían debido al uso y al paso del tiempo.

El empleo del método del elemento finito permitió la creación de un modelo matemático en el cual se toman en cuenta las propiedades de los elementos de la vía férrea estudiados, es decir, rieles, capas de asiento, durmientes y balasto. Además, la obtención de la ecuación de movimiento dinámico y su resolución por medio del método de Newmark, generaron la posibilidad de visualizar el comportamiento de la vía cuando se somete a cargas móviles y simultáneamente evaluar el efecto de estas cargas en las magnitudes de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del riel y de los durmientes.

De acuerdo a lo expuesto en el análisis de resultados, se comprobó que la velocidad de circulación del vehículo ferroviario no incide de forma significativa y apreciable en la respuesta del sistema, es decir para diferentes valores de la velocidad los resultados se mantienen en un rango de valores estrecho y sin fluctuaciones.

El análisis de los valores generados en los casos de uno y dos durmientes por elemento, permite afirmar que la configuración óptima de discretización de un riel es de un durmiente por elemento. Lo anterior puede resumirse diciendo que a menor longitud del elemento y por lo tanto mayor cantidad de elementos considerados, la respuesta dinámica disminuye en magnitudes y el comportamiento general de la vía se hace más estable.

Las condiciones de calidad de la vía influyen de manera significativa en el aumento de la respuesta dinámica del sistema ferroviario. Lo anterior se evidencia en el análisis de los resultados, donde encontramos que para valores que determinan una vía en malas condiciones en la ecuación de Eisenmann, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones son mayores que en el caso de una vía en muy buen estado.

En el estudio de la convergencia del método de Newmark, se encontró que existe un rango de números de pasos del tiempo para cada configuración dentro del cual la respuesta converge y es incondicionalmente estable, el mínimo valor del intervalo de tiempo para este rango de confiabilidad es 0,003 y el máximo es 0,01. Además, a

pesar de que el rango en el número de pasos de tiempo varía de acuerdo a la configuración de la vía férrea analizada, los valores máximos y mínimos del intervalo de tiempo para el rango de convergencia siempre son los expuestos con anterioridad, independientemente de la configuración de la vía.

Para valores de números de pasos de tiempo muy grandes (mayores que 1000), que generan valores de intervalos de tiempo muy pequeños (menores que 0,001), lo que genera que el método de Newmark se haga completamente inestable, generando altas divergencias en los resultados obtenidos y valores elevados a potencias astronómicas.

Mientras mayor sea la fuerza dinámica aplicada sobre la vía, mayor es la respuesta del sistema, es decir, el aumento de la magnitud de la fuerza es directamente proporcional al aumento en los valores máximos reportados en los resultados. Por otra parte, en los puntos donde se encuentran las fuerzas en cada intervalo de tiempo se generan grandes desplazamientos, velocidades y aceleraciones, así como en los elementos adyacentes a aquel sometido directamente a una carga.

La evaluación de la respuesta dinámica permite calcular las sollicitaciones reales a las que se expone el sistema ferroviario, su importancia radica en que los efectos generados por este tipo de respuesta son perjudiciales y afectan significativamente la vida útil de la vía férrea, así como las condiciones de calidad de los componentes individuales, creando un círculo vicioso que debe estimarse en el diseño, sobre todo si se trata de líneas de alta velocidad. El análisis dinámico es importante pues permite predecir y corregir con antelación las fallas en el sistema.

4.3. Recomendaciones

El trabajo de investigación permite la consideración de trabajos futuros los cuales pudieran considerar entre sus aspectos a tratar o como mejora de este trabajo la inclusión en el modelo matemático, de la interacción vehículo-estructura; con el fin de dar una respuesta más aproximada del fenómeno físico ocurrido durante la marcha del tren.

La ampliación del módulo del código computacional para el cálculo de los momentos flectores y las fuerzas de corte, con el fin de obtener el valor de estos parámetros en cualquier punto sobre el riel, no sólo en los nodos, así mismo como la implementación de medidas geométricas que permitan considerar el momento inicial cuando todas las fuerzas se encuentren fuera del riel, de modo que estas entren al tramo paulatinamente.

Analizar del efecto que produce sobre la respuesta dinámica, la variación de los parámetros característicos de los elementos de la vía, como por ejemplo, los coeficientes de rigidez y amortiguación del balasto, la masa de los durmiente, entre otros.

Finalmente la discretización del riel que contemple una mayor cantidad de elementos, con la finalidad de obtener una mejor aproximación de los resultados al utilizar el método del elemento finito.

Referencias Bibliográficas

Álvarez M., Daniel y Luque R. Pablo (2006). *Ingeniería e Infraestructura de los Transportes Ferrocarriles* [Libro en línea] editorial Universidad de Oviedo. Disponible: <http://books.google.co.ve/books> [Consulta: 2009. septiembre 14].

Álvarez R., Julio (2006). *Parametrización del gálibo de material ferroviario*. Tesis doctoral. Universidad Carlos III de Madrid, Madrid.

Balachandram, E. (2006). *Vibraciones*. México D.F. Thomson.

Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.

Carnerero R., Antonio (2007). *Comportamiento dinámico de tableros de puentes de ferrocarriles de alta velocidad formados con elementos transversales a la dirección de la vía*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Chandrupatla, T. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. México D.F. Prentice Hall.

Chopra, Anil (2001). *Dynamics of structures: theory and applications of earthquake engineering*, 2da ed. México, Prentice Hall.

Clough, R. W. y Penzien, J. (1993). *Dynamics of structures*. 2da ed. New York. McGraw-Hill.

Cundall, P. A. (1986). *Distinc element models of rock and soil structure analytical and computational methods in engineering rock mechanics*. Editorial E. T. Brown. Disponible: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1993/1993_febrero_3318_06.pdf [Consulta: 2009, agosto 18].

Da Silva S., Paula (2006). *Desgastes em trilhos ferroviários – Um estudo teórico*. Trabajo de grado de maestría. Universidad estatal de Campinas, Sao Paulo.

Delgado S., Yamile y Manama, Liyira (2007). *Ferrocarril Venezolano: mirando el pasado y presente*. Compedium. [Revista en línea] 19. Disponible: http://www.ucla.edu.ve/dac/.../revista19/resumen_Delgado_Manama.pdf [Consulta: 2010, abril 14].

Domínguez B., Jaime (2001). *Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia*. Tesis Doctoral. Inédito. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Dong, Renguang (1994). *Vertical dynamics of railway vehicle-track system*. Tesis doctoral. Universidad de Concordia, Montreal.

Eisenmann, J. (1970). *Influencia del tamaño de la traviesa, separación entre traviesas y espesor de balasto sobre la sollicitación del subsuelo*. Eisenbahntechnische Rundschau (8).

Eisenmann, J. (1997). *Superestructura de balasto para altas velocidades*. Madrid. Fundación de los Ferrocarriles Españoles.

Estrade, J. M. y otros (1993). *Antes y después de la aplicación de métodos numéricos en la investigación del balasto*. Revista de obras públicas. [Revista en línea] 3318. Disponible: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1993/1993_febrero_3318_06.pdf [Consulta: 2009, agosto 18].

Fonseca T., Paulo (2003). *Contribución a la reducción de los costes de mantenimiento de vías de alta velocidad mediante la optimización de su rigidez vertical* [Resumen en línea] Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña. Disponible: http://www.tdr.cesca.es/ESIS_UPC/AVAILABLE/TDX.../mft01de03.pdf [Consulta: 2010, enero 12].

Galvín, P. (2007). *Análisis Numérico y Experimental de las Vibraciones Ocasionadas por el Paso de Trenes de Alta Velocidad en el Suelo y en Estructuras Cercanas a la Vía*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, Sevilla.

Gómez, J. (2004). *Historia Universal*. [Libro en línea] Editorial Pearson Educación. Disponible: <http://books.google.co.ve/books> [Consulta: 2009, octubre 11].

Koro, K. y otros (2004). *Timoshenko beam finite element for vehicle-track vibration analysis and its application to jointed railway track*. Journal Rail and Rapid Transit.

Lim, W. (2004). *Mechanics of Railway Ballast Behaviour*. Tesis Doctoral, Universidad de Nottingham. Disponible: <http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/8478/1/00.pdf> [Consulta: 2010, abril 18].

Lopez P. A. (2001). *La rigidez vertical de la vía y el deterioro de las líneas de alta velocidad*. Revista de obras públicas [Revista en línea] (3415) Disponible: http://ropdigital.ciccp.es/public/detalle_articulo.php?registro [Consulta: 2009, junio 28].

López, A. (2006). *Infraestructura Ferroviaria* [Libro en línea] Ediciones UPC. Disponible: <http://books.google.co.ve/books?id=DjfwKgrqT0oC&pg=PA443&dq=lopez+pita> [Consulta: 2010, marzo 25].

López, A. y Estrade, J. M. (1993). *Planteamiento de una nueva metodología para el estudio del mecanismo de deterioro de la capa de balasto bajo la acción de las cargas del tráfico ferroviario*. Revista de obras públicas [Revista en línea] 4. Disponible: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1991/1991_septiembre_330_01.pdf [Consulta: 2010, marzo 25].

Lou, P. y otros (2006). *Finite-element analysis of discretely supported rail subjected to multiple moving concentrated forces*. Journal Rail and Rapid Transit (220): 305-315.

Lou, P. y Zeng (2006). *Formulation of equations of motion of finite element form for vehicle-track-bridge interaction system with two types of vehicle models*. Journal Numer. Methodos Eng. (62).

Martínez LL., Ramiro (2008). *Investigación sobre el comportamiento de los distintos tipos de balasto ante la aplicación de los criterios de las diferentes normativas*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

Oliveros, F. (1977). *Tratado de Ferrocarriles I- Vía*. Madrid: Editorial Rueda.

Reverón, A. (1965). *Vías de comunicación Ferrocarriles apuntes para una cátedra de Ingeniería Civil – Estación de Barquisimeto*. Venezuela.

Reverón, A. (1982). *Tratado de transporte ferroviario y su economía*. Venezuela: Ferrocarril.

Rodríguez, J. M. (1974). *Estudio del comportamiento de medio granulares heterogéneos mediante modelos discontinuos analógicos y matemáticos*. [Resumen en línea] Tesis doctoral. Escuela técnica superior de Ingenieros de Caminos, Canales

y Puertos de Madrid. Disponibles: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1993/1993_febrero_3318_06.pdf [Consulta: 2009, agosto 18].

Selig, Ernest (1994). *Track Geotechnology and Substructure Management*. Londres. Thomas Telford.

Selig, Ernest (2004). *Handbook of Transportation Engineering* [Libro en línea] editorial McGraw-Hill. Disponible: [http:// books.google.co.ve/books?isbn](http://books.google.co.ve/books?isbn) [Consulta: 2009, junio 29].

Sun, Y. Q. y Dhanasekar, M. (2000). *A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system*. International journal of Solids and Structures [Revista en línea] 39. Disponible: <http://www.elsevier.com/locate/ijsolstr> [Consulta: 2009, agosto 18].

Timoshenko, S. y otros (1974). *Vibration problems in engineering*. 4ta ed. New York. John Wiley & Sons.

Togno, F. (1975). *Ferrocarriles*. México: Representaciones y servicios de Ingeniería S.A.

Trejo M., Francisco (2007). *Análisis comparativo de métodos numéricos en integración directa para evaluar la respuesta dinámica de estructuras*. Trabajo de grado de maestría. Universidad Veracruzana, Veracruz.

Urquijo, José (2006). *Los primeros ferrocarriles de Venezuela: proyectos, tanteos, sueños e ilusiones*. Revista sobre Relaciones Industriales y Laborales. (42), 9-58.

Vidal M., Alexandre (2009). *Vibraciones en las vías de ferrocarril*. Tesis doctoral Universidad Politécnica de Cataluña Disponible: <http://upcommons.upc.edu/pfcbitstream/2099.1/8478/1/00.pdf> [Consulta: 2010, abril 18].

Wang, J. F. y otros (2001). *Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers*. International journal of Solids and Structures [Revista en línea] 40. Disponible: <http://www.elsevier.com/locate/ijsolstr> [Consulta: 2009, agosto 18].

Wickens, A. H. (2003). *Fundamentals of rail vehicle dynamics*. Loughborough, Swets & Zeitlinger.

Zhai, W. (2006). *Vehicle-track coupling dynamics (in Chinese)*, 2da ed. Beijing: China Railway Publishing House.

APÉNDICE

APÉNDICE 1

Validación del programa de la Carga Móvil.

El programa que simula las cargas puntuales provenientes de las ruedas del tren, moviéndose sobre el riel de izquierda a derecha, fue realizado en MATLAB, como parte integral del código computacional para obtener el comportamiento de una vía férrea modelada según lo descrito en el Capítulo III de la investigación. El programa fue denominado fuerza móvil y validado teóricamente, para la siguiente configuración:

- Longitud del riel: 24 m
- Número de durmientes: 2
- Velocidad de avance del ferrocarril: 80 km/h
- Número de pasos de tiempo: 10
- Número de fuerzas presentes inicialmente en el riel: 2
- Distancia entre ejes: 2,5 m
- Distancia centros de bogies: 17,5 m
- Longitud del vagón: 20 m
- Elemento donde se encuentra la primera fuerza: 5
- Distancia del nodo izquierdo a la primera fuerza: 0,4 m

La figura 1.1 ilustra las posiciones de la carga móvil para las dos primeras fuerzas en el instante inicial indicado anteriormente.

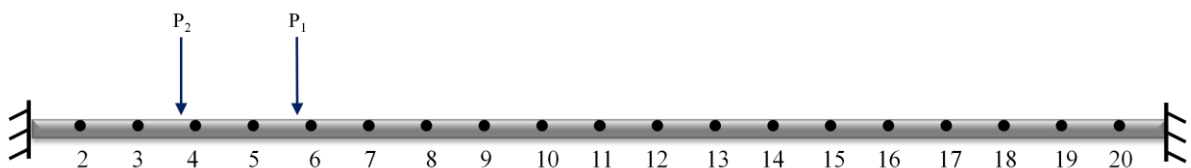


Figura 1.1 - Posición de la carga móvil en el instante inicial.

El número de paso de tiempo permitió calcular el Δt , de forma tal que las cuatro fuerzas, que representan las cargas de cada rueda de un vagón, fueran avanzando a lo largo del riel, desde su inicio hasta finalizar el recorrido tal como se ilustra en la figura 1.2.

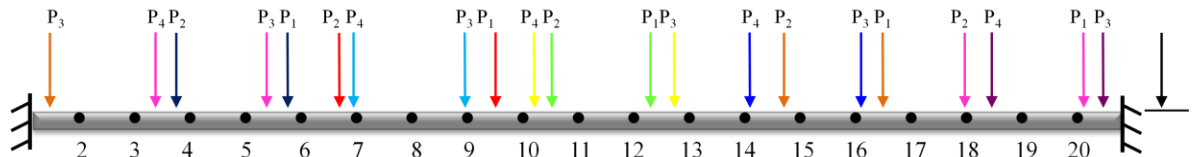


Figura 1.2 - Desplazamiento de las fuerzas en función del tiempo

El movimiento de las fuerzas en el transcurrir del tiempo para el caso planteado de 10 intervalos de tiempo, permite que para cada Δt la fuerza tenga unas dimensiones de desplazamiento diferentes, así como distancias desde el nodo izquierdo diferentes; estas propiedades así como su evaluación en las funciones de forma para su cálculo de acuerdo a la ecuación del vector de fuerza en el riel, son mostradas en la Tabla 1a.1.

Tabla 1a.1 - Ubicación de las fuerzas y distancias en función del paso del tiempo

Paso del tiempo	Fuerza	Elemento de ubicación	Distancia al origen del riel [m]	Distancia al nodo izquierdo [m]	Evaluación en las funciones de forma [N]
Δt 	P ₁	5	5,2	0,4	58074,074
					13937,777
					20325,925
					-6968,889
	P ₂	3	2,7	0,3	66150
					13230
					12250
					-4410
$2\Delta t$ 	P ₁	9	9,6	0	78400
					1,39E-10
					5,15E-25
					-2,06E-25
	P ₂	6	7,1	1,1	1542,592
					598,889

Tabla 1a.1 – (Continuación) Ubicación de las fuerzas y distancias en función del paso del tiempo

Paso del tiempo	Fuerza	Elemento de ubicación	Distancia al origen del riel [m]	Distancia al nodo izquierdo [m]	Evaluación en las funciones de forma [N]
					76857,407
					-6587,778
$3\Delta t$ 	P ₁	12	14	0,8	20325,925
					6968,889
					58074,074
					-13937,778
	P ₂	10	11,5	0,7	29490,747
					9527,778
					48909,259
					-13338,889
$4\Delta t$ 	P ₁	16	18,4	0,4	58074,074
					13937,778
					20325,925
					-6968,889
	P ₂	14	15,9	0,3	66150
					13230
					12250
					-4410
	P ₃	1	0,9	0,9	12250
					4410
					66150
					-13230
$5\Delta t$ 	P ₁	20	22,8	0	78400
					2,79E-10
					2,06E-24
					-8,25E-25
	P ₂	17	20,3	1,1	1542,592
					598,889
					76857,407
					-6587,778
	P ₃	5	5,3	0,5	48909,259
					13338,889
					29490,740
					-9527,778
	P ₄	3	2,8	0,4	58074,074
					13937,778
					20325,929
					-6968,889

Tabla 1a.1 – (Continuación) Ubicación de las fuerzas y distancias en función del paso del tiempo

Paso del tiempo	Fuerza	Elemento de ubicación	Distancia al origen del riel [m]	Distancia al nodo izquierdo [m]	Evaluación en las funciones de forma [N]
$6\Delta t$ 	P ₃	9	9,7	0,1	76857,407
					6587,778
					1542,592
					-598,889
	P ₄	7	7,2	0	78400
					2,79E-10
					2,06E-24
					-8,25E-25
$7\Delta t$ 	P ₃	12	14,1	0,9	12250
					4410
					66150
					-13230
	P ₄	10	11,6	0,8	20325,925
					6968,889
					58074,074
					-13937,778
$8\Delta t$ 	P ₃	16	18,5	0,5	48909,259
					13338,889
					29490,740
					-9527,778
	P ₄	14	16	0,4	58074,074
					13937,778
					20325,925
					-6968,889
$9\Delta t$ 	P ₃	20	22,9	0,1	76857,407
					6587,778
					1542,592
					-598,889
	P ₄	18	20,4	0	78400
					0
					0
					0

Tabla 1a.1 – (Continuación) Ubicación de las fuerzas y distancias en función del paso del tiempo

Paso del tiempo	Fuerza	Elemento de ubicación	Distancia al origen del riel [m]	Distancia al nodo izquierdo [m]	Evaluación en las funciones de forma [N]
$10\Delta t$ 	0	0	0	0	0
					0
					0
					0
	0	0	0	0	0
					0
					0
					0

Se observa que para el instante de tiempo $10\Delta t$ la fuerza correspondiente a la cuarta rueda del vagón ya ha salido en su totalidad del riel y este no se encuentra sometido a ningún tipo de excitación.

Los valores de esta tabla pueden ser comparados por los obtenidos en el programa representados en la matriz de fuerza que se muestra a continuación.

Los valores obtenidos mediante la implementación del programa y de forma manual son iguales, las diferencias que puedan existir es en la cantidad de decimales que se obtengan en los resultados.

APÉNDICE 2

Validación del ensamble de las matrices de masa, rigidez y amortiguación.

En el presente desarrollo se obtienen las matrices globales de masa, rigidez y amortiguación, mediante su ensamblaje manual. El objetivo es comparar estos resultados con los obtenidos con el código elaborado en Matlab, para validar su veracidad y el correcto funcionamiento del mismo.

Matriz de Masa

La matriz ensamblada por las autoras, para un riel de 6 metros con 2 durmientes por elemento, así como la realizada mediante una corrida del código denominado llenado de masa, creado en MATLAB, manteniendo los datos mencionados anteriormente, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 2a.1 y 2a.2.

Matriz de Rigidez

El caso de la matriz rigidez ensamblada para las condiciones de un riel de 6 metros con 2 durmientes por elemento, así como la realizada mediante una corrida del código denominado llenado de rigidez, creado en MATLAB, manteniendo los datos mencionados anteriormente, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 2a.3 y 2a.4.

Matriz de Amortiguación

La matriz de amortiguación ensamblada tanto a través del programa realizado en MATLAB, denominado llenado de amortiguación, así como el realizado por las autoras, para un riel de 6 metros de largo con 2 durmientes por elemento, obtuvo los resultados que se muestran en la Tabla 2a.5 y 2a.6

Como se puede observar al comparar las matrices, estas tienen las mismas dimensiones, así como igualdad en los valores obtenidos, por ambos procedimientos. Lo anterior verifica el correcto funcionamiento de los programas de ensamble.

APÉNDICE 3

Análisis dimensional de las teorías de Zimmermann, Zimmermann-Timoshenko, Timoshenko-Saller-Hanker y Talbot.

El apéndice muestra el análisis dimensional realizado a las teorías de dimensionamiento de la vía férrea. Las unidades de las variables son las siguientes:

$$C = N/m^3$$

$$E = \frac{N}{m^2}$$

$$I = m^4$$

$$b = m$$

$$Q = N$$

$$d = m$$

$$U = \frac{N}{m^2}$$

- Método de Zimmermann

1. Elástica de la vía

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bC}}$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4}{m \cdot \frac{N}{m^3}}} = \sqrt[4]{m^4} = m$$

2. Ecuación del Hundimiento

$$Z(x) = \frac{Q}{2bC} \frac{1}{L} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$Z(x) = \frac{N}{m \cdot \left(\frac{N}{m^3}\right)} \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right] = m$$

3. Ecuación del Momento

$$M(x) = \frac{Q}{4} L e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot m \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right] = N \cdot m$$

- Método de Zimmermann-Timoshenko

1. Superficie de Apoyo

$$S = 2bd$$

$$S = m \cdot m = m^2$$

2. Elástica de la viga

$$L = \sqrt[4]{\frac{8EId}{SC}}$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4 \cdot m}{m^2 \cdot \frac{N}{m^3}}} = \sqrt[4]{m^4} = m$$

3. Ecuación de Hundimiento

$$Z(x) = \frac{Qd}{SC} \frac{1}{L} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$Z(x) = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot \left(\frac{N}{m^3}\right)} \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right] = m$$

4. Ecuación del Momento

$$M(x) = \frac{Q}{4} L e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot m \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right] = N \cdot m$$

- Método de Timoshenko-Saller-Hanker

1. Superficie de apoyo del durmiente

$$F_1 = bd$$

$$F_1 = m \cdot m = m^2$$

2. Ecuación de Hundimiento

$$Z(x) = \frac{Qd}{2F_1C} \sqrt[4]{\frac{F_1C}{4EId}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$Z(x) = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot \left(\frac{N}{m^3}\right)} \cdot \sqrt[4]{\frac{m^2 \cdot \frac{N}{m^3}}{\frac{N}{m^2} \cdot m^4 \cdot m}} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right]$$

$$Z(x) = m^2 \sqrt[4]{\frac{1}{m^4}} = m^2 \cdot \frac{1}{m} = m$$

3. Ecuación del Momento

$$M(x) = \frac{Q}{4} \sqrt[4]{\frac{4EId}{F_1C}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot \sqrt[4]{\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4 \cdot m}{m^2 \cdot \frac{N}{m^3}}} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot \sqrt[4]{m^4} = N \cdot m$$

- Método de Talbot

1. Elástica de la vía

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{U}}$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4}{\frac{N}{m^2}}} = \sqrt[4]{m^4} = m$$

2. Ecuación de Hundimiento

$$Z(x) = Q \sqrt[4]{\frac{1}{64EIU^3}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$Z(x) = N \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{N}{m^2} \cdot m^4 \cdot \left(\frac{N}{m^2}\right)^3}} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right]$$

$$Z(x) = N \cdot \sqrt[4]{\frac{m^4}{N^4}} = N \cdot \frac{m}{N} = m$$

3. Ecuación del Momento

$$M(x) = Q \sqrt[4]{\frac{EI}{64U}} e^{-\frac{x}{L}} \left[\cos\left(\frac{x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot \sqrt[4]{\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4}{\frac{N}{m^2}}} \cdot e^{-\frac{m}{m}} \left[\cos\left(\frac{m}{m}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m}{m}\right) \right]$$

$$M(x) = N \cdot \sqrt[4]{m^4} = N \cdot m$$

APÉNDICE 4

Análisis dimensional de las ecuaciones matriciales utilizadas en el Método del Elemento Finito para el cálculo de los desplazamientos, momentos flectores y fuerzas de corte.

Se planteo el análisis para un elemento de riel con cuatro grados de libertad correspondientes a los desplazamientos y rotaciones de los nodos del riel, más dos grados de libertad correspondientes a los desplazamientos de los durmientes, tal como se observa en la Figura 4a.1.

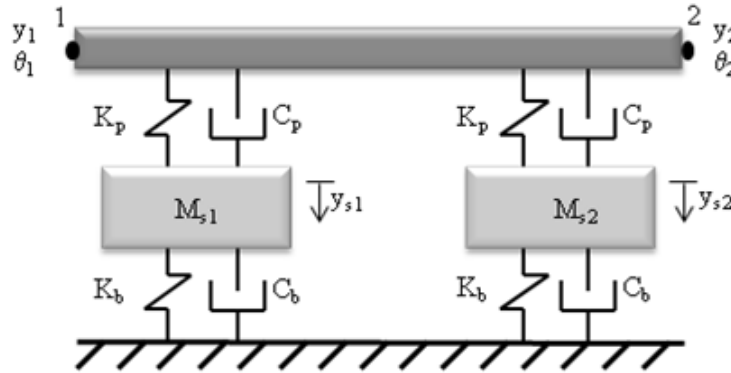


Figura 4.1- Modelo del elemento utilizado en la validación del método.

La ecuación del movimiento esta dada por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} m_{rr} & 0 \\ 0 & m_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r^e \\ \ddot{q}_s^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rs} \\ C_{sr} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^e \\ \dot{q}_s^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr}^* + K_{rr}^{**} & K_{rs} \\ K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r^e \\ q_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r^e \\ f_s^e \end{bmatrix}$$

Dimensiones de las sub-matrices para un elemento de riel.

q_r^e Vector de desplazamiento del riel

$$q_r^e = [y_1 \ \theta_1 \ y_2 \ \theta_2]^T$$

Sus dimensiones son de 4x1

$$q_r^e = \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

q_s^e Vector de desplazamiento de los durmientes

$$q_s^e = [y_{s1} \ y_{s2} \ \dots \ y_{sn}]^T$$

Sus dimensiones son de 2x1 para este caso en particular

$$q_s^e = \begin{bmatrix} y_{s1} \\ y_{s2} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

La matriz de masa esta compuesta por dos sub matrices, m_{rr} que representa la sub matriz denominada matriz de masa del elemento de riel

$$m_{rr} = \int_0^L \bar{m} N^T N \, dx$$

Sus dimensiones son de 4x4

$$m_{rr} = \int_0^L \bar{m} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]_{1 \times 4} dx = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

m_{ss} Sub matriz denominada matriz de masa delos durmientes

$$m_{ss} = \text{diag} [m_s \ m_s \ \dots \ m_s]_{n_s \times n_s}$$

Para el caso particular planteado queda de 2x2

$$m_{ss} = \begin{bmatrix} m_{s1} & 0 \\ 0 & m_{s2} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

La matriz de amortiguación esta compuesta por cuatro sub matrices que son las siguientes:

c_{rr} Sub matriz denominada matriz de amortiguación del elemento de riel

$$C_{rr} = C_p \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x'_i}^T N_{x=x'_i}$$

Queda una matriz con las siguientes dimensiones de 4x4, evaluada en cada una de los durmientes que se tienen en la configuración

$$C_{rr} = C_p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]_{1 \times 4} + C_p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]_{1 \times 4}$$

$$C_{rr} = \begin{bmatrix} & & & \\ & C_{rr} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

c_{rs} Sub matriz denominada matriz de amortiguación del riel sobre los durmientes

$$C_{rs} = -C_p \begin{bmatrix} N_{x=x'_1}^T & N_{x=x'_2}^T & \dots & N_{x=x'_s}^T \end{bmatrix}_{4 \times n_s}$$

c_{sr} Sub matriz denominada matriz de amortiguación de los durmientes sobre el riel

$$C_{sr} = C_{rs}^T$$

La matriz de amortiguación del riel sobre los durmientes y su transpuesta depende directamente del número de durmientes que se obtengan por lo tanto, las dimensiones de ellas quedan de la siguiente manera

$$C_{rs} = -C_p \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ N_3 & N_3 \\ N_4 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & C_{rs} \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Su transpuesta quedaría como:

$$C_{sr} = \begin{bmatrix} & C_{rs} \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

c_{ss} Sub matriz denominada matriz de amortiguación de los durmientes

$$C_{ss} = \text{diag} [C_p + C_b \ C_p + C_b \ \dots \ C_p + C_b]_{n_s \times n_s}$$

La matriz de amortiguación de los durmientes depende del número de ellos y para el caso planteado es 2x2

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} C_p + C_b & 0 \\ 0 & C_p + C_b \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

La matriz de rigidez depende de cinco sub matrices a las cuales se les realiza un análisis dimensional a continuación:

k_{rr} Sub matriz denominada matriz de rigidez del elemento de riel, está conformada por la suma dos elementos

$$K_{rr}^* = \int_0^L EI N'^T N'' dx$$

$$K_{rr}^{**} = K_p \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x'_i}^T N_{x=x'_i}$$

Estas dos matrices que se suman posteriormente tienen igual dimensiones y ambas son de 4x4 para el caso planteado

$$K_{rr}^* = \int_0^L EI \begin{bmatrix} N''_1 \\ N''_2 \\ N''_3 \\ N''_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [N''_1 \quad N''_2 \quad N''_3 \quad N''_4]_{1 \times 4} dx$$

$$= \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rr}^* & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$K_{rr}^{**} = K_p \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 1} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{1 \times 4} + K_p \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 1} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rr}^{**} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Finalmente tenemos la sumatoria de estas dos matrices que da

$$K_{rr} = K_{rr}^* + K_{rr}^{**} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rr}^* & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rr}^{**} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$K_{rr} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rr} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

k_{rs} Sub matriz denominada matriz de rigidez del riel sobre los durmientes

$$K_{rs} = -K_p \begin{bmatrix} N_{x=x'_1}^T & N_{x=x'_2}^T & \dots & N_{x=x'_s}^T \end{bmatrix}_{4 \times n_s}$$

k_{sr} Sub matriz denominada matriz de rigidez de los durmientes sobre el riel

$$K_{sr} = K_{rs}^T$$

La matriz de rigidez del riel sobre los durmientes y su transpuesta depende directamente del número de durmientes que se obtengan por lo tanto, las dimensiones de ellas quedan de la siguiente manera

$$K_{rs} = -K_p \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ N_3 & N_3 \\ N_4 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K_{rs} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Su transpuesta quedaría como:

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} & K_{rs} & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

k_{ss} Sub matriz denominada matriz de rigidez de los durmientes

$$K_{ss} = \text{diag} [K_p + K_b \quad K_p + K_b \quad \dots \quad K_p + K_b]_{n_s \times n_s}$$

La matriz de rigidez de los durmientes depende del número de ellos y para el caso planteado es 2x2

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} K_p + K_b & 0 \\ 0 & K_p + K_b \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

El vector de fuerzas presentes en el riel, para un instante de tiempo es:

$$f_r^e = \sum_{j=1}^n N_{x=x_j}^T P_j$$

Las dimensiones son las siguientes asumiendo que el elemento tiene una fuerza presente

$$f_r^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} P$$

El vector de fuerzas de los durmientes

$$f_s^e = \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{n_s}^T$$

Finalmente queda

$$f_s^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Llevando todas las expresiones a la matriz general nos queda

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{rr} & 0 \\ 0 & m_{ss} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r^e \\ \ddot{q}_s^e \end{bmatrix}_{6 \times 6} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rs} \\ C_{sr} & C_{ss} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^e \\ \dot{q}_s^e \end{bmatrix}_{6 \times 6} + \begin{bmatrix} K_{rr}^* + K_{rr}^{**} & K_{rs} \\ K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} q_r^e \\ q_s^e \end{bmatrix}_{6 \times 6} \\ & = \begin{bmatrix} f_r^e \\ f_s^e \end{bmatrix}_{6 \times 6} \end{aligned}$$

Formulación del cálculo del momento y fuerza cortante en el riel

Después de resolver la ecuación de movimiento que describe el modelo matemático de la vía férrea, se obtendrán la fuerza de corte y el momento flector del riel a través de la siguiente expresión:

$$v^e = v_{\dot{q}}^e + v_q^e + v_P^e + v_{pad}^e$$

Donde v^e denota el vector de fuerza cortante y de momento flector para dos nodos, el cual viene expresado como:

$$v^e = [Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2]^T$$

Los demás términos presentes en la ecuación son los siguientes: v_q^e denota el vector de fuerzas de corte y de momento flector en los dos nodos inducidos por los correspondientes a los elementos de la matriz de masa y la aceleración de rotación y de traslación para el elemento correspondiente a los nodos. Su expresión matemática es la siguiente y sus dimensiones son :

$$v_q^e = [m_{rr} \ddot{q}_r^e]_{4 \times 1}$$

El término v_q^e denota el vector de fuerza de corte y momento flector de los dos nodos inducidos por los correspondientes elementos de matriz de rigidez y los desplazamientos y rotaciones de los nodos correspondientes al elemento, expresión es:

$$v_q^e = [k_{rr}^* q_r^e]_{4 \times 1}$$

El término v_p^e denota el vector de fuerzas iniciales de rigidez inducidas por la aplicación de n fuerzas concentradas actuando sobre el elemento del riel

$$v_p^e = - \sum_{j=1}^n N_{x=x_j}^T P_j$$

Las dimensiones de esta expresión son:

$$v_p^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} P$$

La expresión v_{pad}^e denota el vector de fuerzas iniciales inducidas por las fuerzas de rigidez y amortiguación de la almohadilla actuando en el elemento del riel. Su ecuación es:

$$v_{pad}^e = \sum_{i=1}^{n_s} N_{x=x_i}^T f_i$$

Donde f_i es igual a:

$$f_i = k_p(N_{x=x_i} q_r^e - y_{s_i}) + C_p(N_{x=x_i} \dot{q}_r^e - \dot{y}_{s_i})$$

Las dimensiones para estas expresiones son:

$$f_i = k_p \left([N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]_{1 \times 4} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_{4 \times 1} - [y_{s_1}]_{1 \times 1} \right) \\ + C_p \left([N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]_{1 \times 4} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}_{4 \times 1} - [\dot{y}_{s_1}]_{1 \times 1} \right) = [f_i]_{1 \times 1}$$

$$v_{pad}^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [f_i]_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} v_{pad}^e \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Finalmente, después de calcular cada término de la ecuación obtenemos las dimensiones de la ecuación inicial para el cálculo del momento flector y de las fuerzas de corte.

$$v^e = \begin{bmatrix} v_{\ddot{q}}^e \end{bmatrix}_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} v_{\dot{q}}^e \end{bmatrix}_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} v_P^e \end{bmatrix}_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} v_{pad}^e \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} v^e \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

APÉNDICE 5

Código computacional del Método de Zimmermann

El método de Zimmermann fue desarrollado en MATLAB, para calcular el hundimiento y el momento flector que experimenta la vía férrea involucrando los valores del modulo de elasticidad, el momento de inercia, el ancho del patín del riel, coeficiente de balasto y carga puntual aplicada. A continuación se observan los códigos computacionales realizados.

- Código computacional para el cálculo del hundimiento del Método de Zimmermann.

```
% Método de Zimmermann - Hundimiento
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC 60 (N/m^2)
Ref. Zhai 2002 (paper elemento finito)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC 60 (m^4) Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
b = 0.15; % ancho del patín del riel UIC 60 (m) Ref. Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
C = 15E7; % Coeficiente de balasto (N/m^3) Ref. Eisenmman 1997
Q = 174000; % Carga puntual aplicada (N) Ref. Selig 2004
L=((4*E*I)/(b*C))^(1/4) %elástica de la vía (m). Teoría de
Zimmermann
x1 = 0:0.1:5; % Rango d valores y paso en el eje X para el H1
x2 = -5:0.1:0; % Rango d valores y paso en el eje X para el H2
% Hundimiento Lado derecho (m)
H1 = -(Q/(2*b*C*L))*exp(-x1/L).*(cos(x1/L)+sin(x1/L));
% Hundimiento Lado izquierdo (m)
H2 = -(Q/(2*b*C*L))*exp(x2/L).*(cos(-x2/L)+sin(-x2/L));
plot(x1,H1,'g',x2,H2,'g');
hold on
grid on
```

El comportamiento del hundimiento de la vía férrea es representado en las figuras que se muestran a continuación, donde la Figura 5a.1 representa el comportamiento para diferentes valores de la carga aplicada, mientras que la Figura 5a.2 indica el hundimiento que experimenta la vía férrea cuando los coeficientes de balasto varían y la fuerza permanece constante.

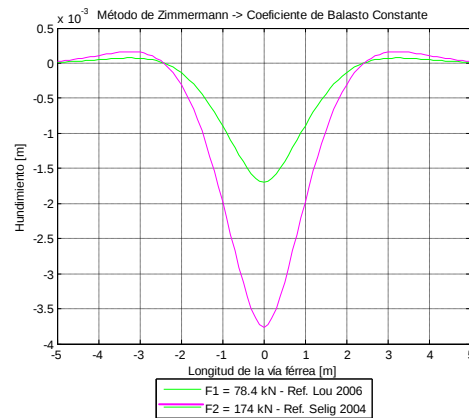


Figura 5a.1 - Estudio del hundimiento del Método de Zimmermann considerando el Coeficiente de Balasto constante

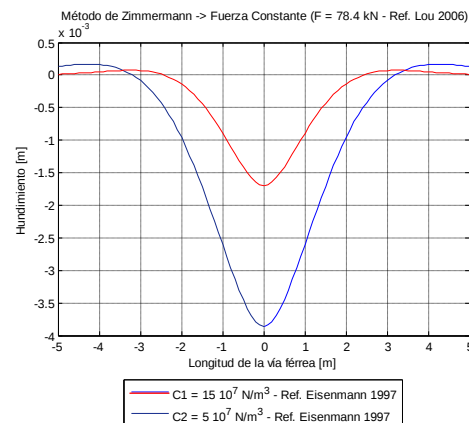


Figura 5a.2 - Método de Zimmermann para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante

La Figura 5a.1 del estudio realizado al método de Zimmermann permite observar el comportamiento de la vía en función de la deflexión que esta sufrirá, cuando los coeficientes de balasto permanecen constantes y existe una variación de la fuerza, se puede observar que mientras mayor es la fuerza el hundimiento que sufre la vía es mayor, es decir que a mayor fuerza mayor hundimiento de la vía. En el caso de mantener la fuerza constante y variar los coeficientes de balasto se tiene que a mayor valor del coeficiente de balasto menor es la deflexión que sufre la vía férrea, tal como se puede observar en la Figura 5a.2.

Una vez calculado el hundimiento de la vía férrea se presenta el código computacional para el cálculo del momento flector, seguida de las gráficas para este desarrollo.

- Código computacional para el cálculo del momento flector en el Método de Zimmermann.

```
% Método de Zimmermann - Momento
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC b0 (N/m^2)
Ref. Zhai 2002 (paper elemento finito)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC b0 (m^4) Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
b = 0.15; % Ancho del patín del riel UIC b0 (m) Ref. Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
C = 15E7; % Coeficiente de balasto (N/m^3) Ref. Eisenmman 1997
Q = 174000; % Carga puntual aplicada (N)
L=((4*E*I)/(b*C))^(1/4) % Elástica de la vía (m). Teoría de
Zimmermann
x1 = 0:0.1:5; % Rango d valores y paso en el eje X para el M1
x2 = -5:0.1:0; % Rango d valores y paso en el eje X para el M2
% Hundimiento Lado derecho (m)
M1=-(Q*L/4)*exp(-x1/L).*(cos(x1/L)-sin(x1/L));
% Hundimiento Lado izquierdo (m)
M2=-(Q*L/4)*exp(x2/L).*(cos(-x2/L)-sin(-x2/L));
plot(x1,M1,'b',x2,M2,'b');
hold on
grid on
```

A continuación se muestran las figuras para el caso del momento flector, con las condiciones planteadas inicialmente en función de la variación de las magnitudes de las fuerzas puntuales aplicadas y de los coeficientes de balasto.

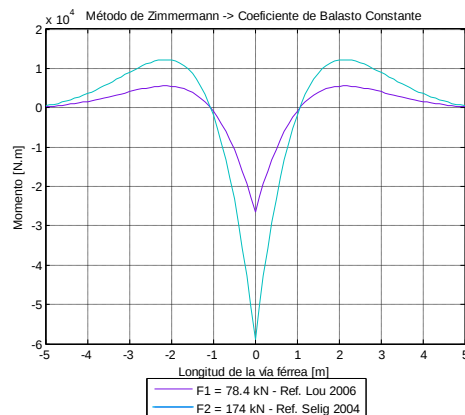


Figura 5a.3 - Estudio del momento flector para el método de Zimmermann considerando el coeficiente de balasto constante

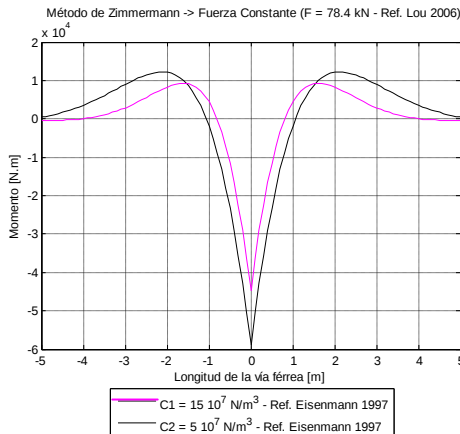


Figura 5a.4 - Método de Zimmermann para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante

Las Figuras 5a.3 y 5a.4 muestra los momentos flectores presentes en la vía cuando esta se ve sometida a las solicitaciones, las cuales en el caso para el coeficiente de balasto permanezca constante el momento flector será mayor si la fuerza aplicada es mayor, mientras que para la condiciones en que la fuerza aplicada no varia el momento flector será menor para el valor del coeficiente de balasto más elevado.

Los resultados presentados del método de Zimmermann, dan a conocer como es el comportamiento de la vía férrea para las primeras teorías que fueron plantea en lo relacionado con el dimensionamiento de la vía.

APÉNDICE 6

Código computacional del Método de Zimmermann-Timoshenko

El método de Zimmermann-Timoshenko fue desarrollado en MATLAB, para calcular el hundimiento y el momento flector de la vía férrea, en función de las propiedades del perfil utilizado como riel, la carga aplicada y el coeficiente de balasto. A continuación se presenta el código computacional para el cálculo del hundimiento.

- Código computacional para el cálculo del hundimiento del Método de Zimmermann-Timoshenko.

```
% Método Zimmermann-Timoshenko
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC 60 (N/m^2)
Ref. Zhai 2002 (paper elemento finito)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC 60 (m^4) Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
B = 0.20; % Ancho de la viga ficticia (m) mayor que el ancho
del patín del riel (B>0.15m)
C = 1.5E7; % Coeficiente de balasto (N/m^3) Ref. Eisenmman 1997
Q = 78400; % Carga puntual aplicada (N) Ref. Lou 2006
d = 0.60; % Distancia entre durmientes (m) Ref. Zhai 2002
S = 2*B*d; % Superficie de apoyo de los durmientes (m^2)
L=((B*E*I*d)/(S*C))^(1/4); % Elástica de la vía (m)
x1 = 0:0.1:5; % Rango d valores y paso en el eje X para el H1
x2 = -5:0.1:0; % Rango d valores y paso en el eje X para el H2
% Hundimiento Lado derecho (m)
H1 = -((Q*d)/(S*C*L)*(exp(-x1/L)).*(cos(x1/L)+sin(x1/L)));
% Hundimiento Lado izquierdo (m)
H2 = -((Q*d)/(S*C*L)*(exp(x2/L)).*(cos(-x2/L)+sin(-x2/L)));
plot(x1,H1,'b',x2,H2,'b');
hold on
grid on
```

La Figura 6a.1 representa el hundimiento de la vía férrea sometida a cargas puntuales aplicadas de diferentes magnitudes, por su parte la Figura 6a.2 representa el comportamiento cuando la carga aplicada se considera constante y existe una variación del coeficiente de balasto.

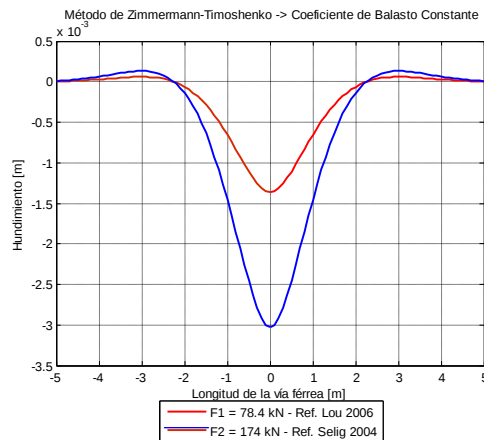


Figura 6a.1 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del hundimiento considerando el Coeficiente de Balasto constante

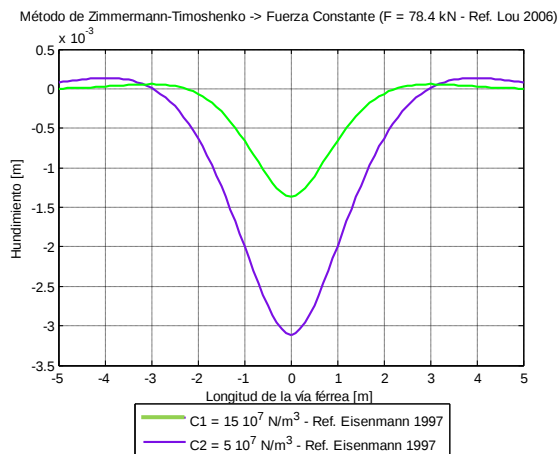


Figura 6a.2 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante

La Figura 6a.1 muestra el comportamiento de la vía en función del hundimiento cuando el coeficiente de balasto permanece constante y existe una variación de la fuerza aplicada, observando que mientras mayor es la fuerza la deflexión que experimenta la vía es mayor. Por su parte la Figura 6a.2 representa el caso donde la fuerza permanece constante y varían los coeficientes de balasto, observando que mientras mayor es el valor del coeficiente de balasto menor en la deflexión que sufre la vía férrea.

El estudio del hundimiento utilizando el método de Zimmermann-Timoshenko, da paso al cálculo del momento flector mediante este método, involucrando las variables

presentes en la deflexión de la vía, el código para observar el comportamiento de la vía es presentado a continuación.

- Código computacional para el cálculo del momento flector en el Método de Zimmermann-Timoshenko.

```
% Método Zimmermann-Timoshenko
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC 60 (N/m^2)
Ref. Zhai 2002 (paper elemento finito)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC 60 (m^4) Ref.
Oliveros 1977 (tratado de ferrocarriles)
B = 0.20; % Ancho de la viga ficticia (m) mayor que el ancho
del patín del riel (B>0.15m)
C = 1.5E7; % Coeficiente de balasto (N/m^3) Ref. Eisenmman 1997
Q = 78400; % Carga puntual aplicada (N)
d = 0.60; % Distancia entre durmientes (m)% Ref. Zhai 2002
S = 2*B*d; % Superficie de apoyo de los durmientes (m^2)
L=((B*E*I*d)/(S*C))^(1/4); % Elástica de la vía (m)
x1 = 0:0.1:5; % Rango d valores y paso en el eje X para el M1
x2 = -5:0.1:0; % Rango d valores y paso en el eje X para el M2
% Momento Lado derecho (m)
M1=-((Q/4)*L*(exp(-x1/L)).*(cos(x1/L)+sin(x1/L)));
% Momento Lado izquierdo (m)
M2=-((Q/4)*L*(exp(x2/L)).*(cos(-x2/L)+sin(-x2/L)));
plot(x1,M1,'m',x2,M2,'m');
hold on
grid on
```

Las figuras mostradas a continuación corresponden para el cálculo del momento flector, considerando condiciones indicadas inicialmente.

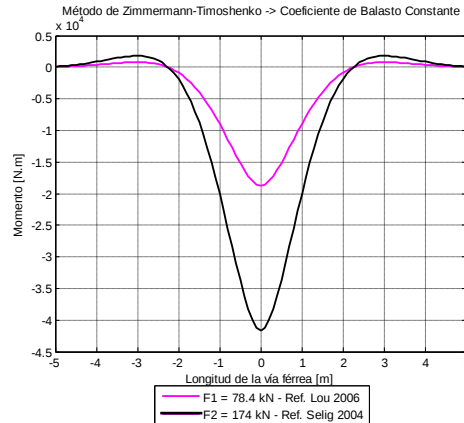


Figura 6a.3 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del momento flector considerando el coeficiente de balasto constante

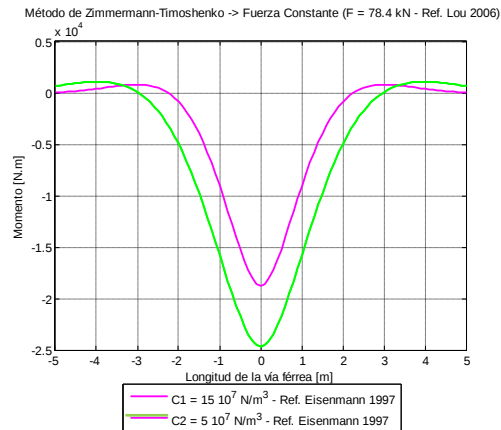


Figura 6a.4 - Método de Zimmermann-Timoshenko para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante

Las Figuras 6a.3 y 6a.4 muestran los momentos flectores presentes en la vía cuando esta se ve sometida a las condiciones planteadas inicialmente para las propiedades del riel, los coeficientes de balasto y la carga aplicada. En el caso del coeficiente de balasto constante el momento flector será mayor mientras la fuerza aplicada lo sea, mientras en la condición de fuerza aplicada constante el momento flector será menor para el valor del coeficiente de balasto más elevado.

Los resultados en el cálculo de la deflexión y del momento flector, indicaron que mientras mayor es la fuerza aplicada manteniendo el coeficiente de balasto constante, la deflexión y el momento flector son mayores, igual ocurre para el caso en que la fuerza permanece constante y se varia los coeficientes de balasto, mientras mayor es este último menor será la deflexión y el momento flector que experimenta la vía férrea. El método de Zimmermann-Timoshenko representa los cálculos iniciales para el dimensionamiento de las vías férreas.

APÉNDICE 7

Código computacional del Método de Timoshenko-Saller-Hanker

El método de Timoshenko-Saller-Hanker fue desarrollado utilizando el programa MATLAB, a través de la consideración de los valores del modulo de elasticidad, el momento de inercia del riel, el ancho del patín del riel, el coeficiente de balasto, la carga puntual aplicada, la distancia entre durmientes y la longitud de la vía. A continuación se presenta el código computacional para el cálculo del hundimiento y del momento flector para uno de los casos de estudio.

- Código computacional para el cálculo del hundimiento del Método de Timoshenko-Saller-Hanker

```
% Método de Timoshenko-Saller-Hanker
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC b0 [N/m^2]
Ref. Zhai 2002 (paper FEM)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC b0 [m^4] Ref.
Oliveros 1977 (Tratado de Ferrocarriles
b = 0.15; % Ancho del patín del riel IUC b0 [m] Ref. Oliveros
1977 (Tratado de Ferrocarriles)
C = 5E7; % Coeficiente de balasto [N/m^3] Ref. Eisenmann 1977
(paper rigidez vertical de la vía)
Q = 78400; % Carga puntual aplicada [N] Ref. Luo 2006 (paper
FEM)
d = 0.6; % Distancia entre durmientes [m] Ref. Zhai 2002
(paper FEM)
L = 24; % Longitud de la vía [m] Ref. Zhai 2002 (paper FEM)
F1 = b*d; % Área que soporta el peso de rueda [m^2]- Teoría de
Timoshenko
x1 = 0:0.01:150; % Rango de valores en X para H1
x2 = -150:0.01:0; % Rango de valores en X para H2
% Hundimiento lado derecho [m]
H1 = -((Q*d)/(2*F1*C))*(((F1*C)/(4*E*I*d))^(1/4))*(exp(-
x1/L).*(cos(x1/L)+sin(x1/L)));
% Hundimiento lado izquierdo [m]
H2 = -
((Q*d)/(2*F1*C))*(((F1*C)/(4*E*I*d))^(1/4))*(exp(x2/L)).*(cos(
-x2/L)+sin(-x2/L));
plot(x1,H1,'g',x2,H2,'g');
hold on
grid on
```

Las figuras que se muestran a continuación ilustran el comportamiento de la vía férrea según la teoría de Timoshenko-Saller-Hanker

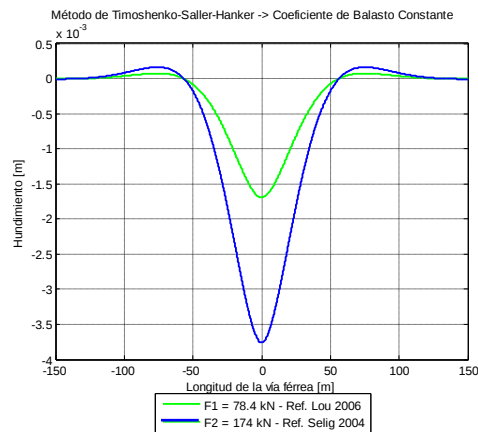


Figura 7a.1 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del hundimiento considerando el Coeficiente de Balasto constante

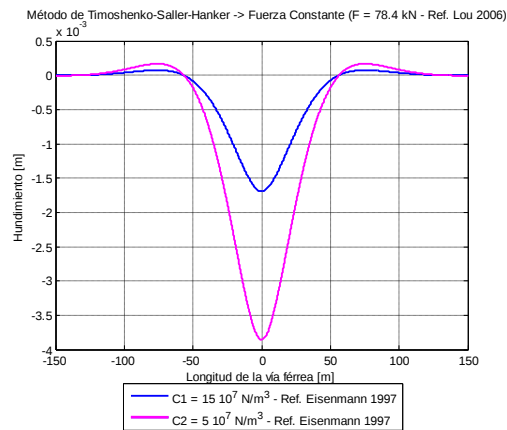


Figura 7a.2 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del hundimiento considerando la fuerza aplicada constante

La Figura 7a.1 muestra el comportamiento de la vía en función de la deflexión que esta sufrirá, cuando los coeficientes de balasto permanecen constantes y existe una variación de la fuerza, se puede observar que mientras mayor es la fuerza el hundimiento que sufre la vía es mayor, es decir que a mayor fuerza mayor deflexión de la vía. El caso en el cual se mantiene la fuerza constante y varían los coeficientes de balasto tenemos que mientras mayor es este valor menor en la deflexión que experimenta la vía férrea, como se puede observar en la Figura 7a.2.

Una vez analizado el hundimiento de la vía férrea se estudia el momento flector a través del código computacional que se muestra a continuación.

- Código computacional para el cálculo del momento flector en el Método de Timoshenko-Saller-Hanker

```
% Método de Timoshenko-Saller-Hanker
E = 2.06E11; % Modulo de elasticidad del riel UIC b0 [N/m^2]
Ref. Zhai 2002 (paper FEM)
I = 3.055E-5; % Momento de inercia del riel UIC b0 [m^4] Ref.
Oliveros 1977 (Tratado de Ferrocarriles
b = 0.15; % Ancho del patín del riel IUC b0 [m] Ref. Oliveros
1977 (Tratado de Ferrocarriles)
C = 15E7; % Coeficiente de balasto [N/m^3] Ref. Eisenmann 1997
(paper rigidez vertical de la vía)
Q = 78400; % Carga puntual aplicada [N] Ref. Luo 2006 (paper
FEM)
d = 0.6; % Distancia entre durmientes [m] Ref. Zhai 2002
(paper FEM)
L = 24; % Longitud de la vía [m] Ref. Zhai 2002 (paper FEM)
F1 = b*d; % área que soporta el peso de rueda [m^2]- Teoría de
Timoshenko
x1 = 0:0.01:150; % Rango de valores en X para H1
x2 = -150:0.01:0; % Rango de valores en X para H2
% Momento lado derecho [N.m]
M1=-(Q/4)*(((4*E*I*d)/(F1*C))^(1/4))*(exp(-
x1/L).*(cos(x1/L)+sin(x1/L)));
% Momento lado izquierdo [N.m]
M2=-(Q/4)*(((4*E*I*d)/(F1*C))^(1/4))*(exp(x2/L)).*(cos(-
x2/L)+sin(-x2/L));
plot(x1,M1,'g',x2,M2,'g');
hold on
grid on
```

Las figuras que se indican a continuación son para los casos de momento flector, considerando condiciones planteadas para el cálculo de hundimiento.

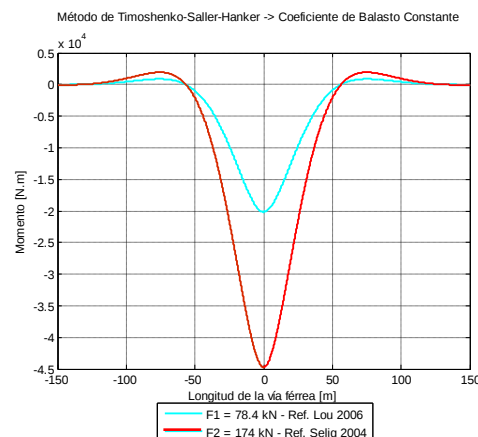


Figura 7a.3 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del momento flector considerando el coeficiente de balasto constante

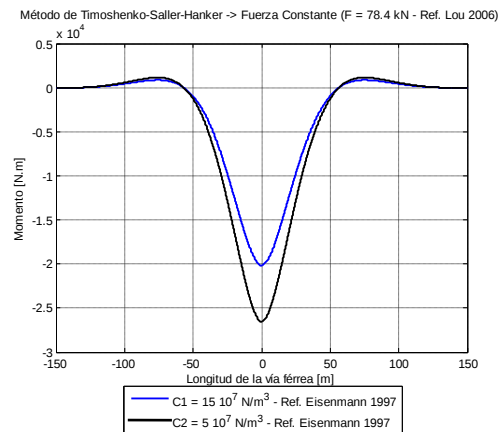


Figura 7a.4 - Método de Timoshenko-Saller-Hanker para el estudio del momento flector considerando la fuerza aplicada constante

La Figura 7a.3 muestran los momentos flectores presentes en la vía cuando se ve sometida a las condiciones indicadas, las cuales para el caso del coeficiente de balasto constante el momento flector será mayor mientras la fuerza aplicada lo sea, mientras la Figura 7a.4 representa las condiciones en que la fuerza aplicada no varia y el momento flector será menor para el valor del coeficiente de balasto más elevado.

APÉNDICE 8

Código computacional de simulación numérica de la vía férrea.

Se presenta el código computacional explicado de forma detalla en el marco metodológico

```

tic
L=input('Longitud del riel (múltiplo de 12) L:')
Nde=input('Número de durmientes por elemento a
evaluar (Solo 1 ó 2) Nde:')
if Nde==1
    l=0.6
end
if Nde==2
    l=1.2
end
N=L/l;
Nn=(2*N)+2;
Ndt=Nde*N;
n=Nn+Ndt;
v=input('Velocidad a la que mueve el tren en
Km/h v:')
vel=v*(1000/3600);
Fuerzas = input('Cantidad de fuerzas
inicialmente en el riel. Marque: 1. Para una
fuerza, 2. Para 2 Fuerzas, 3. Para 3 fuerzas
(Solo si L>12 metros), 4. Para 4 fuerzas (Solo
si L>12 metros) Fuerzas:')
NtN11 = @(x) ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
NtN12 = @(x) (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
NtN13 = @(x) ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
NtN14 = @(x) ((x.^2).*(2*x+1).*((x-
1).^3))/(1.^5);
NtN22 = @(x) ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
NtN23 = @(x) ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
NtN24 = @(x) ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
NtN33 = @(x) ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
NtN34 = @(x) (-x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
NtN44 = @(x) ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
N11= quad(NtN11, 0, 1);
N12= quad(NtN12, 0, 1);
N13= quad(NtN13, 0, 1);
N14= quad(NtN14, 0, 1);
N22= quad(NtN22, 0, 1);
N23= quad(NtN23, 0, 1);
N24= quad(NtN24, 0, 1);
N33= quad(NtN33, 0, 1);
N34= quad(NtN34, 0, 1);
N44= quad(NtN44, 0, 1);
m = 60.64;
Mrr = m*[N11 N12 N13 N14; N12 N22 N23 N24; N13
N23 N33 N34; N14 N24 N34 N44]; M=zeros(n);
Nr=n-Ndt;
for i=1:4
    M(i,1:4)=Mrr(i,1:4);
end
for i=3:2:Nr-1
    j=1;
    M(i,i)=Mrr(j,j)*2;
    M(i+1,i+1)=Mrr(j+1,j+1)*2;
    if i==3
        M(i,i+1)=M(i,i+1)+Mrr(j,j+1);
        M(i+1,i)=M(i+1,i)+Mrr(j+1,j);
    else
        M(i,i+1)=M(i-2,i-1);
        M(i+1,i)=M(i-1,i-2);
    end
end
for i=3:2:Nr-2
    j=1;

```

```

        M(i,i+2)=Mrr(j,j+2);
        M(i+2,i)=M(i,i+2);
    end
    for i=3:2:Nr-3
        j=1;
        M(i,i+3)=Mrr(j,j+3);
        M(i+3,i)=M(i,i+3);
    end
    for i=4:2:Nr-1
        j=2;
        M(i,i+1)=Mrr(j,j+1);
        M(i+1,i)=M(i,i+1);
    end
    for i=4:2:Nr-2
        j=2;
        M(i,i+2)=Mrr(j,j+2);
        M(i+2,i)=M(i,i+2);
    end
    ms=125.5;
    Mss=zeros(Nde
    for i=1:Nde
        Mss(i,i)=ms;
    end
    for i=Nr+1:n
        M(i,i)=Mss(1,1);
    end
    Dd=0.60;
    Cp=50000;
    if Nde==1
        x = 1/2
        NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
        NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
        NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
        NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
        NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
        NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
        NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);

```

```

        NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
        NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
        NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
        Crr1 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
        Crr=Cp*Crr1;
    else
        x = Dd/2;
        NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
        NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
        NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
        NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
        NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
        NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
        NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
        NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
        NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
        NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
        Crr1 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
        x=(Dd/2)+Dd;
        NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
        NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
        NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
        NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
        NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
        NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
        NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
        NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
        NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
        NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);

```

```

        Crr2 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
        Crr=Cp*(Crr1+Crr2);
    end
    C=zeros(n);
    for i=1:4
        C(i,1:4)=Crr(i,1:4);
    end
    for i=3:2:Nr-1
        j=1;
        C(i,i)=Crr(j,j)*2;
        C(i+1,i+1)=Crr(j+1,j+1)*2;
        if i==3
            C(i,i+1)=C(i,i+1)+Crr(j,j+1);
            C(i+1,i)=C(i+1,i)+Crr(j+1,j);
        else
            C(i,i+1)=C(i-2,i-1);
            C(i+1,i)=C(i-1,i-2);
        end
    end
    for i=3:2:Nr-2
        j=1;
        C(i,i+2)=Crr(j,j+2);
        C(i+2,i)=C(i,i+2);
    end
    for i=3:2:Nr-3
        j=1;
        C(i,i+3)=Crr(j,j+3);
        C(i+3,i)=C(i,i+3);
    end
    for i=4:2:Nr-1
        j=2;
        C(i,i+1)=Crr(j,j+1);
        C(i+1,i)=C(i,i+1);
    end
    for i=4:2:Nr-2
        j=2;
        C(i,i+2)=Crr(j,j+2);

```

```

        C(i+2,i)=C(i,i+2);
    end
    Cp = 50000;
    Cb = 58800;
    Cpb= Cp+Cb;
    Css=zeros(Nde);
    for i=1:Nde
        Css(i,i)=Cpb;
    end
    for i=Nr+1:n
        C(i,i)=Css(1,1);
    end
    if Nde==1
        x = 1/2
        Nt11 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt21 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt31 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt41 = x.*((x/1)^2-(x/1));
        Crs = -Cp*[Nt11; Nt21; Nt31; Nt41];
        Csr = Crs';
    else
        x = Dd/2;
        Nt11 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt21 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt31 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt41 = x.*((x/1)^2-(x/1));
        x=(Dd/2)+Dd;
        Nt12 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt22 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt32 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt42 = x.*((x/1)^2-(x/1));
        Crs = -Cp*[Nt11 Nt12; Nt21 Nt22; Nt31 Nt32;
Nt41 Nt42];
        Csr = Crs';
    end
    if Nde==1
        for i=1:4
            C(i,Nr+1)=Crs(i,1);
        end
    end

```

```

for i=1:4
    C(Nr+1,i)=Csr(1,i);
end
i=3;
sum=0;
for j=Nr+2:n
    i=i+sum;
    C(i:i+3,j)=Crs(1:4,1);
    sum=2;
end
i=3;
sum=0;
for j=Nr+2:n
    i=i+sum;
    C(j,i:i+3)=Csr(1,1:4);
    sum=2;
end
else
for i=1:4
    C(i,Nr+1:Nr+2)=Crs(i,1:2);
end
for i=1:4
    C(Nr+1:Nr+2,i)=Csr(1:2,i);
end
i=3;
sum=0;
for j=Nr+3:2:n-1
    i=i+sum;
    C(i:i+3,j)=Crs(1:4,1);
    C(i:i+3,j+1)=Crs(1:4,2);
    sum=2;
end
i=3;
sum=0;
for j=Nr+3:2:n-1
    i=i+sum;
    C(j,i:i+3)=Csr(1,1:4);
    C(j+1,i:i+3)=Csr(2,1:4);
    sum=2;
end

```

```

end
E = 2.06E11;
I = 3.055E-5;
Kp = 7.8E7;
dN11 = @(x) 144*(x-0.5*1).^2/(1.^6);
dN12 = @(x) ((24*(1.^2))-
(84*x*1)+(72*(x.^2)))/(1.^5);
dN13 = @(x) -144*(x-0.5*1).^2/(1.^6);
dN14 = @(x) ((12*(1.^2))-
(60*x*1)+(72*(x.^2)))/(1.^5);
dN22 = @(x) ((16*(1.^2))-
(48*x*1)+(36*(x.^2)))/(1.^4);
dN23 = @(x) ((-24*(1.^2))+(84*x*1)-
(72*(x.^2)))/(1.^5);
dN24 = @(x) ((8*(1.^2))-
(36*x*1)+(36*(x.^2)))/(1.^4);
dN33 = @(x) 144*(x-0.5*1).^2/(1.^6);
dN34 = @(x) ((-12*(1.^2))+(60*x*1)-
(72*(x.^2)))/(1.^5);
dN44 = @(x) ((4*(1.^2))-
(24*x*1)+(36*(x.^2)))/(1.^4);
N11= quad(dN11, 0, 1);
N12= quad(dN12, 0, 1);
N13= quad(dN13, 0, 1);
N14= quad(dN14, 0, 1);
N22= quad(dN22, 0, 1);
N23= quad(dN23, 0, 1);
N24= quad(dN24, 0, 1);
N33= quad(dN33, 0, 1);
N34= quad(dN34, 0, 1);
N44= quad(dN44, 0, 1);
K1rr = (E*I)*[N11 N12 N13 N14; N12 N22 N23 N24;
N13 N23 N33 N34; N14 N24 N34 N44];
if Nde==1
    x = 1/2
    NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
    NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
end

```

```

    NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
    NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
    NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
    NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
    NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
    NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
    NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
    NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
    Krr1 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
    K2rr=Kp*Krr1;
else
    x = Dd/2;
    NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
    NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
    NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
    NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
    NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);
    NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
    NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
    NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
    NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
    NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
    Krr1 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
    x=(Dd/2)+Dd;
    NtN1 = ((2*x+1).^2).*((x-1).^4)/(1.^6);
    NtN2 = (x.*(2*x+1).*((x-1).^4))/(1.^5);
    NtN3 = ((-x.^2).*(2*x-3*1).*(2*x+1).*((x-
1).^2))/(1.^6);
    NtN4 = ((x.^2).*(2*x+1).*((x-1).^3))/(1.^5);
    NtN5 = ((x.^2).*((x-1).^4))/(1.^4);

```

```

    NtN6 = ((-x.^3).*(2*x-3*1).*((x-
1).^2))/(1.^5);
    NtN7 = ((x.^3).*((x-1).^3))/(1.^4);
    NtN8 = ((x.^4).*((2*x-3*1).^2))/(1.^6);
    NtN9 = -(x.^4).*(x-1).*(2*x-3*1)/(1.^5);
    NtN10 = ((x.^4).*((x-1).^2))/(1.^4);
    Krr2 = [NtN1 NtN2 NtN3 NtN4; NtN2 NtN5 NtN6
NtN7; NtN3 NtN6 NtN8 NtN9; NtN4 NtN7 NtN9
NtN10];
    K2rr=Kp*(Krr1+Krr2);
end
Krr = K1rr + K2rr;
K=zeros(n);
for i=1:4
    K(i,1:4)=Krr(i,1:4);
end
for i=3:2:Nr-1
    j=1;
    K(i,i)=Krr(j,j)*2;
    K(i+1,i+1)=Krr(j+1,j+1)*2;
    if i==3
        K(i,i+1)=K(i,i+1)+Krr(j,j+1);
        K(i+1,i)=K(i+1,i)+Krr(j+1,j);
    else
        K(i,i+1)=K(i-2,i-1);
        K(i+1,i)=K(i-1,i-2);
    end
end
for i=3:2:Nr-2
    j=1;
    K(i,i+2)=Krr(j,j+2);
    K(i+2,i)=K(i,i+2);
end
for i=3:2:Nr-3
    j=1;
    K(i,i+3)=Krr(j,j+3);
    K(i+3,i)=K(i,i+3);
end
for i=4:2:Nr-1

```

```

        j=2;
        K(i,i+1)=Krr(j,j+1);
        K(i+1,i)=K(i,i+1);
    end
    for i=4:2:Nr-2
        j=2;
        K(i,i+2)=Krr(j,j+2);
        K(i+2,i)=K(i,i+2);
    end
    Kp = 7.8E7;
    Kb = 1.5E8;
    Kpb= Kp+Kb;
    Kss=zeros(Nde)
    for i=1:Nde
        Kss(i,i)=Kpb;
    end
    for i=Nr+1:n
        K(i,i)=Kss(1,1);
    end
    if Nde==1
        x = 1/2
        Nt11 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt21 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt31 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt41 = x.*((x/1)^2-(x/1));
        Krs = -Kp*[Nt11; Nt21; Nt31; Nt41];
        Ksr = Krs';
    else
        x = Dd/2;
        Nt11 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt21 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt31 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt41 = x.*((x/1)^2-(x/1));
        x=(Dd/2)+Dd;
        Nt12 = 1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        Nt22 = x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        Nt32 = 3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        Nt42 = x.*((x/1)^2-(x/1));

```

```

        Krs = -Kp*[Nt11 Nt12; Nt21 Nt22; Nt31 Nt32;
        Nt41 Nt42];
        Ksr = Krs';
    end
    if Nde==1
        for i=1:4
            K(i,Nr+1)=Krs(i,1);
        end
        for i=1:4
            K(Nr+1,i)=Ksr(1,i);
        end
        i=3;
        sum=0;
        for j=Nr+2:n
            i=i+sum;
            K(i:i+3,j)=Krs(1:4,1);
            sum=2;
        end
        i=3;
        sum=0;
        for j=Nr+2:n
            i=i+sum;
            K(j,i:i+3)=Ksr(1,1:4);
            sum=2;
        end
    else
        for i=1:4
            K(i,Nr+1:Nr+2)=Krs(i,1:2);
        end
        for i=1:4
            K(Nr+1:Nr+2,i)=Ksr(1:2,i);
        end
        i=3;
        sum=0;
        for j=Nr+3:2:n-1
            i=i+sum;
            K(i:i+3,j)=Krs(1:4,1);
            K(i:i+3,j+1)=Krs(1:4,2);
            sum=2;
        end
    end

```

```

end
i=3;
sum=0;
for j=Nr+3:2:n-1
    i=i+sum;
    K(j,i:i+3)=Ksr(1,1:4);
    K(j+1,i:i+3)=Ksr(2,1:4);
    sum=2;
end
end
RtDt=zeros(n,1);
t=input('Factor de seguridad estadística: 1.
Para 68.3% 2. Para 95.5% 3. Para 99.7%. t:');
s=input('Factor del estado de la estructura:
0.1. Muy buen estado 0.2. Buen estado 0.3. Mal
estado. s:');
vc=input('Factor de velocidad: 1. Velocidad
menor o igual que 60 km/h 2. Velocidad mayor que
60 km/h. vc:');
if vc==1
    vc=1;
end
if vc==2
    vc=1+((vel-60)/140);
end
Cd=1+(t*s*vc);
P=78400;
Pl=P*Cd;
Ro = zeros(n,1);
if Fuerzas==1
    Efl=input('Elemento donde se encuentra la
primera fuerza Efl:');
    Xfl=input('Distancia del nodo izquierdo a la
fuerza (Menor que la longitud del elemento)
Xfl:');
    % Xpl=((Efl-1)*1)+Xfl;
    Fr1l = 1-(3*(Xfl/1)^2)+(2*(Xfl/1)^3);
    Fr2l = Xfl*(1-(2*(Xfl/1)))+(Xfl/1).^2;
    Fr3l = 3*(Xfl/1).^2-2*(Xfl/1).^3;
    Fr4l = Xfl.*((Xfl/1)^2-(Xfl/1));

```

```

    frl = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
    Ro(Efl+Efl-1,1)=frl(1,1);
    Ro(Efl+Efl,1)=frl(2,1);
    Ro(Efl+Efl+1,1)=frl(3,1);
    Ro(Efl+Efl+2,1)=frl(4,1);
end
if Fuerzas==2
    Efl=input('Elemento donde se encuentra la
primera fuerza Efl:');
    Xfl=input('Distancia del nodo izquierdo a la
fuerza (Menor que la longitud del elemento)
Xfl:');
    Xpl=((Efl-1)*1)+Xfl;
    Fr1l = 1-(3*(Xfl/1)^2)+(2*(Xfl/1)^3);
    Fr2l = Xfl*(1-(2*(Xfl/1)))+(Xfl/1).^2;
    Fr3l = 3*(Xfl/1).^2-2*(Xfl/1).^3;
    Fr4l = Xfl.*((Xfl/1)^2-(Xfl/1));
    frl = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
    Ro(Efl+Efl-1,1)=frl(1,1);
    Ro(Efl+Efl,1)=frl(2,1);
    Ro(Efl+Efl+1,1)=frl(3,1);
    Ro(Efl+Efl+2,1)=frl(4,1);
    Xp2=Xp1-2.5;
    Retrocede=(Xp2/1)+1;
    Ef2=fix(Retrocede);
    Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
    Fr1l = 1-(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
    Fr2l = Xf2*(1-(2*(Xf2/1)))+(Xf2/1).^2;
    Fr3l = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
    Fr4l = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
    fr2 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
    i=Efl-Ef2;
    if i==1
        Ro(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        Ro(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
        Ro(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+frl(1,1);
        Ro(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+frl(2,1);
    else
        Ro(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);

```

```

        Ro(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
        Ro(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
        Ro(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
    end
end
if Fuerzas==3
    Ef1=input('Elemento donde se encuentra la
primera fuerza Ef1:')
    Xf1=input('Distancia del nodo izquierdo a la
fuerza (Menor que la longitud del elemento)
Xf1:')
    Xp1=((Ef1-1)*1)+Xf1;
    Fr11 = 1-(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
    Fr21 = Xf1*(1-(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-2*(Xf1/1).^3;
    Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
    fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    Ro(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
    Ro(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
    Ro(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
    Ro(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
    Xp2=Xp1-2.5;
    Retrocede=(Xp2/1)+1;
    Ef2=fix(Retrocede);
    Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
    Fr11 = 1-(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
    Fr21 = Xf2*(1-(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
    Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
    fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    i=Ef1-Ef2;
    if i==1
        Ro(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        Ro(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
        Ro(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
        Ro(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
    else
        Ro(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        Ro(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);

```

```

        Ro(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
        Ro(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
    end
    Xp3=Xp1-17.5;
    Retrocede=(Xp3/1)+1;
    Ef3=fix(Retrocede);
    Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
    Fr11 = 1-(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
    Fr21 = Xf3*(1-(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-2*(Xf3/1).^3;
    Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-(Xf3/1));
    fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    Ro(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
    Ro(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
    Ro(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
    Ro(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
end
if Fuerzas==4
    Ef1=input('Elemento donde se encuentra la
primera fuerza Ef1:')
    Xf1=input('Distancia del nodo izquierdo a la
fuerza (Menor que la longitud del elemento)
Xf1:')
    Xp1=((Ef1-1)*1)+Xf1;
    Fr11 = 1-(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
    Fr21 = Xf1*(1-(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-2*(Xf1/1).^3;
    Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
    fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    Ro(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
    Ro(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
    Ro(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
    Ro(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
    Xp2=Xp1-2.5;
    Retrocede=(Xp2/1)+1;
    Ef2=fix(Retrocede);
    Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
    Fr11 = 1-(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
    Fr21 = Xf2*(1-(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));

```

```

Fr3l = 3*(Xf2/l).^2-2*(Xf2/l).^3;
Fr4l = Xf2.*((Xf2/l).^2-(Xf2/l));
fr2 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
i=Ef1-Ef2;
if i==l
    Ro(Ef2+Ef2-l,l)=fr2(l,l);
    Ro(Ef2+Ef2,l)=fr2(2,l);
    Ro(Ef2+Ef2+l,l)=fr2(3,l)+fr1(l,l);
    Ro(Ef2+Ef2+2,l)=fr2(4,l)+fr1(2,l);
else
    Ro(Ef2+Ef2-l,l)=fr2(l,l);
    Ro(Ef2+Ef2,l)=fr2(2,l);
    Ro(Ef2+Ef2+l,l)=fr2(3,l);
    Ro(Ef2+Ef2+2,l)=fr2(4,l);
end
Xp3=Xp1-l7.5;
Retrocede=(Xp3/l)+l;
Ef3=fix(Retrocede);
Xf3=Xp3-((Ef3-l)*l);
Fr1l = 1-(3*(Xf3/l).^2)+(2*(Xf3/l).^3);
Fr2l = Xf3*(1-(2*(Xf3/l))+((Xf3/l).^2));
Fr3l = 3*(Xf3/l).^2-2*(Xf3/l).^3;
Fr4l = Xf3.*((Xf3/l).^2-(Xf3/l));
fr3 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
Ro(Ef3+Ef3-l,l)=fr3(l,l);
Ro(Ef3+Ef3,l)=fr3(2,l);
Ro(Ef3+Ef3+l,l)=fr3(3,l);
Ro(Ef3+Ef3+2,l)=fr3(4,l);
Xp4=Xp1-20;
Retrocede=(Xp4/l)+l;
Ef4=fix(Retrocede);
Xf4=Xp4-((Ef4-l)*l);
Fr1l = 1-(3*(Xf4/l).^2)+(2*(Xf4/l).^3);
Fr2l = Xf4*(1-(2*(Xf4/l))+((Xf4/l).^2));
Fr3l = 3*(Xf4/l).^2-2*(Xf4/l).^3;
Fr4l = Xf4.*((Xf4/l).^2-(Xf4/l));
fr4 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
i=Ef3-Ef4;
if i==l

```

```

    Ro(Ef4+Ef4-l,l)=fr4(l,l);
    Ro(Ef4+Ef4,l)=fr4(2,l);
    Ro(Ef4+Ef4+l,l)=fr4(3,l)+fr3(l,l);
    Ro(Ef4+Ef4+2,l)=fr4(4,l)+fr3(2,l);
else
    Ro(Ef4+Ef4-l,l)=fr4(l,l);
    Ro(Ef4+Ef4,l)=fr4(2,l);
    Ro(Ef4+Ef4+l,l)=fr4(3,l);
    Ro(Ef4+Ef4+2,l)=fr4(4,l);
end
end
CB=input('Condiciones de borde. Escoger 1 para
empotramiento. Escoger 2 para apoyo simple.
CB:')
Nt=input('Número de pasos de tiempo Nt:')
R=zeros(n,l);
R(1:n,l)=Ro(1:n,l);
Xp1=((Ef1-l)*l)+Xf1;
T=(L+20-Xp1)/vel
Dt=T/Nt
Ldt=vel*Dt;
X2=(2.5-Xp1);
X3=(17.5-Xp1);
X4=(20-Xp1);
Xs1=(L-Xp1);
Xs2=(L-Xp1+2.5);
Xs3=(L-Xp1+17.5);
Xs4=(L-Xp1+20);
Uoo = zeros(n,l);
Uo1 = zeros(n,l);
Uo2 = (M^l)*(Ro-(C*Uo1)-(K*Uoo));
g = 0.5;
a = 0.25;
a0 = 1/(a*((Dt)^2));
a1 = g/(a*Dt);
a2 = 1/(a*Dt);
a3 = (1/(2*a))-l;
a4 = (g/a)-l;
a5 = (Dt/2)*((g/a)-2);

```

```

a6 = Dt*(1-g);
a7 = g*Dt;
Ke = K+(a0*M)+(a1*C);
Kld1 = Ke;
for j=1:n
    if j==1
        v=Kld1(j,1:j-1)';
    else
        v=(Kld1(j,1:j-1).*diag(Kld1(1:j-1,1:j-1)))';
    end
    Kld1(j,j)=Kld1(j,j)-Kld1(j,1:j-1)*v;
    Kld1(j+1:n,j)=(Kld1(j+1:n,j)-
Kld1(j+1:n,1:j-1)*v)/Kld1(j,j);
end
for i=1:n
    Kld1(i,i+1:n)=Kld1(i+1:n,i);
end
Uto = Uoo;
Utl = Uol;
Ut2 = Uo2;
Rt = Ro;
D=zeros(n,Nt);
V=zeros(n,Nt);
A=zeros(n,Nt);
MF=zeros(4*N,Nt);
if Fuerzas==1
for j= 2:Nt+1
    k=Dt*(j-1);
    Xp1=Xp1+Ldt;
    RtDt=zeros(n,1);
    X2=(2.5-Xp1);
    X3=(17.5-Xp1);
    X4=(20-Xp1);
    Xs1=(L-Xp1);
    Xs2=(L-Xp1+2.5);
    Xs3=(L-Xp1+17.5);
    Xs4=(L-Xp1+20);
    if X2>0

```

```

        if Xs1>0
            Avanza=(Xp1/1)+1;
            Efl=fix(Avanza);
            Xfl=Xp1-((Efl-1)*1);
            Fr11 = 1-
(3*(Xfl/1)^2)+(2*(Xfl/1)^3);
            Fr21 = Xfl*(1-
(2*(Xfl/1))+((Xfl/1).^2));
            Fr31 = 3*(Xfl/1).^2-2*(Xfl/1).^3;
            Fr41 = Xfl.*((Xfl/1)^2-(Xfl/1));
            fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
%Mariz de fuerzas para un elemento (N)
            RtDt(Efl+Efl-1,1)=fr1(1,1);
            RtDt(Efl+Efl,1)=fr1(2,1);
            RtDt(Efl+Efl+1,1)=fr1(3,1);
            RtDt(Efl+Efl+2,1)=fr1(4,1);
            end
        end
        if X2<=0
            if X3>0
                if Xs1>0
                    Avanza=(Xp1/1)+1;
                    Efl=fix(Avanza);
                    Xfl=Xp1-((Efl-1)*1);
                    Fr11 = 1-
(3*(Xfl/1)^2)+(2*(Xfl/1)^3);
                    Fr21 = Xfl*(1-
(2*(Xfl/1))+((Xfl/1).^2));
                    Fr31 = 3*(Xfl/1).^2-
2*(Xfl/1).^3;
                    Fr41 = Xfl.*((Xfl/1)^2-(Xfl/1));
                    fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
                    RtDt(Efl+Efl-1,1)=fr1(1,1);
                    RtDt(Efl+Efl,1)=fr1(2,1);
                    RtDt(Efl+Efl+1,1)=fr1(3,1);
                    RtDt(Efl+Efl+2,1)=fr1(4,1);
                    end
                if Xs2>0

```

```

        Xp2=Xp1-2.5;
        Retrocede=(Xp2/1)+1;
        Ef2=fix(Retrocede);
        Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
        Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
        Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-
2*(Xf2/1).^3;
        Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
        fr2 = Pl*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
        i=Ef1-Ef2;
        if i==1
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
        else
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
        end
    end
end
if X3<=0
    if X4>0
        if Xs1>0
            Avanza=(Xp1/1)+1;
            Ef1=fix(Avanza);
            Xf1=Xp1-((Ef1-1)*1);
            Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);

```

```

        Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-
2*(Xf1/1).^3;
        Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
        fr1 = Pl*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
        RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
        RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
    end
    if Xs2>0
        Xp2=Xp1-2.5;
        Retrocede=(Xp2/1)+1;
        Ef2=fix(Retrocede);
        Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
        Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
        Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-
2*(Xf2/1).^3;
        Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
        fr2 = Pl*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
        i=Ef1-Ef2;
        if i==1
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
        else
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
        end
    end
end

```

```

end
end
if Xs3>0
Xp3=Xp1-17.5;
Retrocede=(Xp3/1)+1;
Ef3=fix(Retrocede);
Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-
2*(Xf3/1).^3;
Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-
(Xf3/1));
fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41
RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
end
end
if X4<=0
if Xs1>0
Avanza=(Xp1/1)+1;
Ef1=fix(Avanza);
Xf1=Xp1-((Ef1-1)*1);
Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-2*(Xf1/1).^3;
Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41
RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);

```

```

RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
end
if Xs2>0
Xp2=Xp1-2.5;
Retrocede=(Xp2/1)+1;
Ef2=fix(Retrocede);
Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
i=Ef1-Ef2;
if i==1
RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
else
RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
end
end
if Xs3>0
Xp3=Xp1-17.5;
Retrocede=(Xp3/1)+1;
Ef3=fix(Retrocede);
Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-2*(Xf3/1).^3;

```

```

Fr4l = Xf3.*((Xf3/1)^2-(Xf3/1));
fr3 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
RtDt(Ef3+Ef3-1,l)=fr3(1,l);
RtDt(Ef3+Ef3,l)=fr3(2,l);
RtDt(Ef3+Ef3+1,l)=fr3(3,l);
RtDt(Ef3+Ef3+2,l)=fr3(4,l);
end
if Xs4>0
Xp4=Xp1-20;
Retrocede=(Xp4/1)+1;
Ef4=fix(Retrocede);
Xf4=Xp4-(Ef4-1)*1;
Fr1l = 1-
(3*(Xf4/1)^2)+(2*(Xf4/1)^3);
Fr2l = Xf4*(1-
(2*(Xf4/1)))+(Xf4/1.^2);
Fr3l = 3*(Xf4/1).^2-2*(Xf4/1).^3;
Fr4l = Xf4.*((Xf4/1)^2-(Xf4/1));
fr4 = Pl*[Fr1l; Fr2l; Fr3l; Fr4l];
i=Ef3-Ef4;
if i==1
RtDt(Ef4+Ef4-1,l)=fr4(1,l);
RtDt(Ef4+Ef4,l)=fr4(2,l);

RtDt(Ef4+Ef4+1,l)=fr4(3,l)+fr3(1,l);

RtDt(Ef4+Ef4+2,l)=fr4(4,l)+fr3(2,l);
else
RtDt(Ef4+Ef4-1,l)=fr4(1,l);
RtDt(Ef4+Ef4,l)=fr4(2,l);
RtDt(Ef4+Ef4+1,l)=fr4(3,l);
RtDt(Ef4+Ef4+2,l)=fr4(4,l);

end
end
end
R(1:n,j)=RtDt(1:n,l);
RetDt =
Rt+(M*((a0*Uto)+(a2*Ut1)+(a3*Ut2)))+(C*((a1*Uto)
)+(a4*Ut1)+(a5*Ut2));

```

```

UtDt0 = (K1d1^(-1))*RetDt;
UtDt2 = (a0*(UtDt0-Uto))-(a2*Ut1)-
(a3*Ut2);
UtDt1 = Ut1+(a6*Ut2)+(a7*UtDt0);
if (CB==1
UtDt2(1:2,l)=0;
UtDt2(n-1:n,l)=0;
UtDt1(1:2,l)=0;
UtDt1(n-1:n,l)=0;
UtDt0(1:2,l)=0;
UtDt0(n-1:n,l)=0;
end
if (CB==2
UtDt2(1,l)=0;
UtDt2(n-1,l)=0;
UtDt1(1,l)=0;
UtDt1(n-1,l)=0;
UtDt0(1,l)=0;
UtDt0(n-1,l)=0;
end
for i=1:n
D(i,j-1)=UtDt0(i,l);
V(i,j-1)=UtDt1(i,l);
A(i,j-1)=UtDt2(i,l);
end
qr2=zeros(4*N,l);
qr2(1:2,l)=UtDt2(1:2,l);
qr2(3:4,l)=UtDt2(3:4,l);
qr2(4*N-1:4*N,l)=UtDt2(Nr-1:Nr,l);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
a=a+sum;
b=b+sum;
c=c+sum;
d=d-sum;

```

```

        qr2(i:i+1,1)=UtDt2(i-a:i-b,1);
        qr2(i+2:i+3,1)=UtDt2(i-c:i+d,1);
        sum=2;
    end
    qr2e=zeros(4,1);
    Vq2=zeros(4*N,1);
    w=1;
    sum=0;
    for h=1:N
        w=w+sum;
        qr2e(1:4,1)=qr2(w:w+3,1);
        Vq2e=Mrr*qr2e;
        Vq2(w:w+3,1)=Vq2e(1:4,1);
        sum=4;
    end
    qr0=zeros(4*N,1);
    qr0(1:2,1)=UtDt0(1:2,1);
    qr0(3:4,1)=UtDt0(3:4,1);
    qr0(4*N-1:4*N,1)=UtDt0(Nr-1:Nr,1);
    a=2;
    b=1;
    c=0;
    d=1;
    sum=0;
    for i=5:4:4*N-2
        a=a+sum;
        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;
        qr0(i:i+1,1)=UtDt0(i-a:i-b,1);
        qr0(i+2:i+3,1)=UtDt0(i-c:i+d,1);
        sum=2;
    end
    qr0e=zeros(4,1);
    Vq0=zeros(4*N,1);
    w=1;
    sum=0;
    for h=1:N
        w=w+sum;

```

```

        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        Vq0e=Klrr*qr0e;
        Vq0(w:w+3,1)=Vq0e(1:4,1);
        sum=4;
    end
    Rr=zeros(4*N,1);
    Rr(1:2,1)=RtDt(1:2,1);
    Rr(3:4,1)=RtDt(3:4,1);
    Rr(4*N-1:4*N,1)=RtDt(Nr-1:Nr,1);
    a=2;
    b=1;
    c=0;
    d=1;
    sum=0;
    for i=5:4:4*N-2
        a=a+sum;
        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;
        Rr(i:i+1,1)=RtDt(i-a:i-b,1);
        Rr(i+2:i+3,1)=RtDt(i-c:i+d,1);
        sum=2;
    end
    Vp=zeros(4*N,1);
    Vp=Rr;
    qrl=zeros(4*N,1);
    qrl(1:2,1)=UtDt1(1:2,1);
    qrl(3:4,1)=UtDt1(3:4,1);
    qrl(4*N-1:4*N,1)=UtDt1(Nr-1:Nr,1);
    a=2;
    b=1;
    c=0;
    d=1;
    sum=0;
    for i=5:4:4*N-2
        a=a+sum;
        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;

```

```

        qrl(i:i+1,1)=UtDt1(i-a:i-b,1);
        qrl(i+2:i+3,1)=UtDt1(i-c:i-d,1);
        sum=2;
    end
    qs0=zeros(Ndt,1);
    qsl=zeros(Ndt,1);
    for i=Nr+1:n
        qs0(1:Ndt,1)=UtDt0(Nr+1:n,1);
    end
    for i=Nr+1:n
        qsl(1:Ndt,1)=UtDt1(Nr+1:n,1);
    end
    w=1;
    i=1;
    sum=0;
    suml=0;
    Vpad=zeros(4*N,1);
    if Nde==1
        for h=1:N
            i=i+suml;
            x=Dd/2;
            N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
            N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
            N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
            N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
            Npad=[N1 N2 N3 N4];
            Ntras=Npad';
            w=w+sum;
            qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
            qrel=zeros(4,1);
            qrle(1:4,1)=qrl(w:w+3,1);
            Ys0=qs0(i,1);
            f1=(Npad*qr0e-Ys0)*Kp;
            Ys1=qsl(i,1);
            f2=(Npad*qrel-Ys1)*Cp;
            f=f1+f2;
            Vepad=Ntras*f;
            Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
            sum=4;
        end
    end

```

```

        suml=1;
    end
end
if Nde==2
    for h=1:N
        i=i+suml;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad1=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras1=Npad1';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qrle=zeros(4,1);
        qrle(1:4,1)=qrl(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad1*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qsl(i,1);
        f2=(Npad1*qrle-Ys1)*Cp;
        fi=f1+f2;
        x=(Dd/2)+Dd;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad2=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras2=Npad2';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qrle=zeros(4,1);
        qrle(1:4,1)=qrl(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad2*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qsl(i,1);
        f2=(Npad2*qrle-Ys1)*Cp;
        fii=f1+f2;
        Vepad=(Ntras1*fi)+(Ntras2*fii);
    end
end

```



```

    if X4>0
        if Xs1>0
            Avanza=(Xp1/1)+1;
            Ef1=fix(Avanza);
            Xf1=Xp1-((Ef1-1)*1);
            Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
            Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
            Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-
2*(Xf1/1).^3;
            Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
            fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41
            RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
            RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
            RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
            RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
            end
            if Xs2>0
                Xp2=Xp1-2.5;
                Retrocede=(Xp2/1)+1;
                Ef2=fix(Retrocede);
                Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
                Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
                Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
                Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-
2*(Xf2/1).^3;
                Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
                fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
                i=Ef1-Ef2;
                if i==1
                    RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
                    RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);

```

```

            RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
            else
                RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
                RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
                RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
                RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
            end
            end
            if Xs3>0
                Xp3=Xp1-17.5;
                Retrocede=(Xp3/1)+1;
                Ef3=fix(Retrocede);
                Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
                Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
                Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
                Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-
2*(Xf3/1).^3;
                Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-
(Xf3/1));
                fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];
                RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
                RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
                RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
                RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
            end
            end
            if X4<=0
                if Xs1>0
                    Avanza=(Xp1/1)+1;
                    Ef1=fix(Avanza);
                    Xf1=Xp1-((Ef1-1)*1);
                    Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);

```

```

        Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-2*(Xf1/1).^3;
        Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
        fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
        RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
        RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
    end
    if Xs2>0
        Xp2=Xp1-2.5;
        Retrocede=(Xp2/1)+1;
        Ef2=fix(Retrocede);
        Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
        Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
        Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
        Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
        fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
        i=Ef1-Ef2;
        if i==1
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);

RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);

RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
        else
            RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
            RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
            RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
        end
    end
    if Xs3>0
        Xp3=Xp1-17.5;

```

```

        Retrocede=(Xp3/1)+1;
        Ef3=fix(Retrocede);
        Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
        Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
        Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-2*(Xf3/1).^3;
        Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-(Xf3/1));
        fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
        RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
        RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
        RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
        RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
    end
    if Xs4>0
        Xp4=Xp1-20;
        Retrocede=(Xp4/1)+1;
        Ef4=fix(Retrocede);
        Xf4=Xp4-((Ef4-1)*1);
        Fr11 = 1-
(3*(Xf4/1)^2)+(2*(Xf4/1)^3);
        Fr21 = Xf4*(1-
(2*(Xf4/1))+((Xf4/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf4/1).^2-2*(Xf4/1).^3;
        Fr41 = Xf4.*((Xf4/1)^2-(Xf4/1));
        fr4 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
        i=Ef3-Ef4;
        if i==1
            RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
            RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);

RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1)+fr3(1,1);

RtDt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1)+fr3(2,1);
        else
            RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
            RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);
            RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1);

```

```

        Rtdt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1);
    end
    end
    end
    R(1:n,j)=Rtdt(1:n,1);
    RetDt =
(Rt*cos(i))+(M*((a0*Uto)+(a2*Ut1)+(a3*Ut2)))+(C*
((a1*Uto)+(a4*Ut1)+(a5*Ut2
    Utdt0 = (K1d1*-1)*RetDt;
    Utdt2 = (a0*(Utdt0-Uto))-(a2*Ut1)-
(a3*Ut2);
    Udt1 = Ut1+(a6*Ut2)+(a7*Utdt0);
if CB==1
    Udt2(1:2,1)=0;
    Udt2(n-1:n,1)=0;
    Udt1(1:2,1)=0;
    Udt1(n-1:n,1)=0;
    Udt0(1:2,1)=0;
    Udt0(n-1:n,1)=0;
end
if CB==2
    Udt2(1,1)=0;
    Udt2(n-1,1)=0;
    Udt1(1,1)=0;
    Udt1(n-1,1)=0;
    Udt0(1,1)=0;
    Udt0(n-1,1)=0;
end
for i=1:n
    D(i,j-1)=Utdt0(i,1);
    V(i,j-1)=Udt1(i,1);
    A(i,j-1)=Udt2(i,1);
end
qr2=zeros(4*N,1);
qr2(1:2,1)=Udt2(1:2,1);
qr2(3:4,1)=Udt2(3:4,1);
qr2(4*N-1:4*N,1)=Udt2(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;

```

```

c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr2(i:i+1,1)=Udt2(i-a:i-b,1);
    qr2(i+2:i+3,1)=Udt2(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qr2e=zeros(4,1);
Vq2=zeros(4*N,1);
w=1;
sum=0;
for h=1:N
    w=w+sum;
    qr2e(1:4,1)=qr2(w:w+3,1);
    Vq2e=Mrr*qr2e;
    Vq2(w:w+3,1)=Vq2e(1:4,1);
    sum=4;
end
qr0=zeros(4*N,1);
qr0(1:2,1)=Udt0(1:2,1);
qr0(3:4,1)=Udt0(3:4,1);
qr0(4*N-1:4*N,1)=Udt0(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr0(i:i+1,1)=Udt0(i-a:i-b,1);
    qr0(i+2:i+3,1)=Udt0(i-c:i+d,1);

```

```

        sum=2;
    end
    qrDe=zeros(4,1);
    VqD=zeros(4*N,1);
    w=1;
    sum=0;
    for h=1:N
        w=w+sum;
        qrDe(1:4,1)=qrD(w:w+3,1);
        VqDe=Klrr*qrDe;
        VqD(w:w+3,1)=VqDe(1:4,1);
        sum=4;
    end
    Rr=zeros(4*N,1);
    Rr(1:2,1)=RtDt(1:2,1);
    Rr(3:4,1)=RtDt(3:4,1);
    Rr(4*N-1:4*N,1)=RtDt(Nr-1:Nr,1);
    a=2;
    b=1;
    c=0;
    d=1;
    sum=0;
    for i=5:4:4*N-2
        a=a+sum;
        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;
        Rr(i:i+1,1)=RtDt(i-a:i-b,1);
        Rr(i+2:i+3,1)=RtDt(i-c:i+d,1);
        sum=2;
    end
    Vp=zeros(4*N,1);
    Vp=Rr;
    qrl=zeros(4*N,1);
    qrl(1:2,1)=Utdtl(1:2,1);
    qrl(3:4,1)=Utdtl(3:4,1);
    qrl(4*N-1:4*N,1)=Utdtl(Nr-1:Nr,1);
    a=2;
    b=1;

```

```

    c=0;
    d=1;
    sum=0;
    for i=5:4:4*N-2
        a=a+sum;
        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;
        qrl(i:i+1,1)=Utdtl(i-a:i-b,1);
        qrl(i+2:i+3,1)=Utdtl(i-c:i+d,1);
        sum=2;
    end
    qsD=zeros(Ndt,1);
    qsl=zeros(Ndt,1);
    for i=Nr+1:n
        qsD(1:Ndt,1)=UtdtD(Nr+1:n,1);
    end
    for i=Nr+1:n
        qsl(1:Ndt,1)=Utdtl(Nr+1:n,1);
    end
    w=1;
    i=1;
    sum=0;
    sum1=0;
    Vpad=zeros(4*N,1);
    if Nde==1
        for h=1:N
            i=i+sum1;
            x=Dd/2;
            N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
            N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
            N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
            N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
            Npad=[N1 N2 N3 N4];
            Ntras=Npad';
            w=w+sum;
            qrDe(1:4,1)=qrD(w:w+3,1);
            qrel=zeros(4,1);
            qrl(1:4,1)=qrl(w:w+3,1);

```

```

        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad*qr1e-Ys1)*Cp;
        f=f1+f2;
        Vepad=Ntras*f;
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=4;
        sum1=1;
    end
end
if Nde==2
    for h=1:N
        i=i+sum1;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad1=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras1=Npad1';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad1*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad1*qr1e-Ys1)*Cp;
        fi=f1+f2;
        x=(Dd/2)+Dd;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad2=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras2=Npad2';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);

```

```

        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad2*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad2*qr1e-Ys1)*Cp;
        fii=f1+f2;
        Vepad=(Ntras1*fi)+(Ntras2*fii);
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=2;
        sum1=1;
    end
end
Vm=Vq2+Vq0+Vp+Vpad;
MF(1:4*N,j-1)=Vm(1:4*N,1);
    Ut2 = UtDt2;
    Ut1 = UtDt1;
    Uto = UtDt0;
    Rt=RtDt;
end
end
if Fuerzas==3
    for j= 2:Nt+1
        k=Dt*(j-1)
        Xp1=Xp1+Ldt;
        RtDt=zeros(n,1);
        X2=(2.5-Xp1);
        X3=(17.5-Xp1);
        X4=(20-Xp1);
        Xs1=(L-Xp1);
        Xs2=(L-Xp1+2.5);
        Xs3=(L-Xp1+17.5);
        Xs4=(L-Xp1+20);
        if X3<=0
            if X4>0
                if Xs1>0
                    Avanza=(Xp1/1)+1;
                    Efl=fix(Avanza);
                    Xfl=Xp1-((Efl-1)*1);

```

```

        Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
        Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
        Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-
2*(Xf1/1).^3;
        Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];

        RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
        RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
        RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
        end
        if Xs2>0
            Xp2=Xp1-2.5;
            Retrocede=(Xp2/1)+1;
            Ef2=fix(Retrocede);
            Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
            Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
            Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
            Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-
2*(Xf2/1).^3;
            Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];

            i=Ef1-Ef2;
            if i==1
                RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
                RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);

RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
            else
                RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
                RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);

```

```

        RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
        RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
        end
        end
        if Xs3>0
            Xp3=Xp1-17.5;
            Retrocede=(Xp3/1)+1;
            Ef3=fix(Retrocede);
            Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
            Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
            Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
            Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-
2*(Xf3/1).^3;
            Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-
(Xf3/1));
fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31;
Fr41];

            RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
            RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
            RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
            RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
        end
        end
        if X4<=0
            if Xs1>0
                Avanza=(Xp1/1)+1;
                Ef1=fix(Avanza);
                Xf1=Xp1-((Ef1-1)*1);
                Fr11 = 1-
(3*(Xf1/1)^2)+(2*(Xf1/1)^3);
                Fr21 = Xf1*(1-
(2*(Xf1/1))+((Xf1/1).^2));
                Fr31 = 3*(Xf1/1).^2-2*(Xf1/1).^3;
                Fr41 = Xf1.*((Xf1/1)^2-(Xf1/1));
                fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
                %Mariz de fuerzas para un elemento (N)

```

```

RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
end
if Xs2>0
    Xp2=Xp1-2.5;
    Retrocede=(Xp2/1)+1;
    Ef2=fix(Retrocede);
    Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
    Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
    Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
    Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
    fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    i=Ef1-Ef2;
    if i==1
        RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
    else
        RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
        RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
        RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
    end
end
if Xs3>0
    Xp3=Xp1-17.5;
    Retrocede=(Xp3/1)+1;
    Ef3=fix(Retrocede);
    Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);
    Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);

```

```

    Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-2*(Xf3/1).^3;
    Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-(Xf3/1));
    fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
    RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
    RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
    RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
end
if Xs4>0
    Xp4=Xp1-20;
    Retrocede=(Xp4/1)+1;
    Ef4=fix(Retrocede);
    Xf4=Xp4-((Ef4-1)*1);
    Fr11 = 1-
(3*(Xf4/1)^2)+(2*(Xf4/1)^3);
    Fr21 = Xf4*(1-
(2*(Xf4/1))+((Xf4/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf4/1).^2-2*(Xf4/1).^3;
    Fr41 = Xf4.*((Xf4/1)^2-(Xf4/1));
    fr4 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    i=Ef3-Ef4;
    if i==1
        RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
        RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);
RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1)+fr3(1,1);
RtDt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1)+fr3(2,1);
    else
        RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
        RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);
        RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1);
        RtDt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1);
    end
end
end
R(1:n,j)=RtDt(1:n,1);

```

```

        RetDt =
(Rt*cos(i))+(M*((a0*Uto)+(a2*Utl)+(a3*Ut2)))+(C*
((a1*Uto)+(a4*Utl)+(a5*Ut2
        UtDt0 = (K1d1^(-1))*RetDt;
        UtDt2 = (a0*(UtDt0-Uto))-(a2*Utl)-
(a3*Ut2);
        UtDt1 = Utl+(a6*Ut2)+(a7*UtDt0);
if (B==1
    UtDt2(1:2,1)=0;
    UtDt2(n-1:n,1)=0;
    UtDt1(1:2,1)=0;
    UtDt1(n-1:n,1)=0;
    UtDt0(1:2,1)=0;
    UtDt0(n-1:n,1)=0;
end
if (B==2
    UtDt2(1,1)=0;
    UtDt2(n-1,1)=0;
    UtDt1(1,1)=0;
    UtDt1(n-1,1)=0;
    UtDt0(1,1)=0;
    UtDt0(n-1,1)=0;
end
for i=1:n
    D(i,j-1)=UtDt0(i,1);
    V(i,j-1)=UtDt1(i,1);
    A(i,j-1)=UtDt2(i,1);
end
qr2=zeros(4*N,1);
qr2(1:2,1)=UtDt2(1:2,1);
qr2(3:4,1)=UtDt2(3:4,1);
qr2(4*N-1:4*N,1)=UtDt2(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;

```

```

        b=b+sum;
        c=c+sum;
        d=d-sum;
        qr2(i:i+1,1)=UtDt2(i-a:i-b,1);
        qr2(i+2:i+3,1)=UtDt2(i-c:i+d,1);
        sum=2;
end
qr2e=zeros(4,1);
Vq2=zeros(4*N,1);
w=1;
sum=0;
for h=1:N
    w=w+sum;
    qr2e(1:4,1)=qr2(w:w+3,1);
    Vq2e=Mrr*qr2e;
    Vq2(w:w+3,1)=Vq2e(1:4,1);
    sum=4;
end
qr0=zeros(4*N,1);
qr0(1:2,1)=UtDt0(1:2,1);
qr0(3:4,1)=UtDt0(3:4,1);
qr0(4*N-1:4*N,1)=UtDt0(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr0(i:i+1,1)=UtDt0(i-a:i-b,1);
    qr0(i+2:i+3,1)=UtDt0(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qr0e=zeros(4,1);
Vq0=zeros(4*N,1);
w=1;

```

```

sum=0;
for h=1:N
    w=w+sum;
    qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
    Vq0e=Klrr*qr0e;
    Vq0(w:w+3,1)=Vq0e(1:4,1);
    sum=4;
end
Rr=zeros(4*N,1);
Rr(1:2,1)=RtDt(1:2,1);
Rr(3:4,1)=RtDt(3:4,1);
Rr(4*N-1:4*N,1)=RtDt(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    Rr(i:i+1,1)=RtDt(i-a:i-b,1);
    Rr(i+2:i+3,1)=RtDt(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
Vp=zeros(4*N,1);
Vp=Rr;
qrl=zeros(4*N,1);
qrl(1:2,1)=UtDt(1:2,1);
qrl(3:4,1)=UtDt(3:4,1);
qrl(4*N-1:4*N,1)=UtDt(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;

```

```

    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qrl(i:i+1,1)=UtDt(i-a:i-b,1);
    qrl(i+2:i+3,1)=UtDt(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qs0=zeros(Ndt,1);
qsl=zeros(Ndt,1);
for i=Nr+1:n
    qs0(1:Ndt,1)=UtDt(Nr+1:n,1);
end
for i=Nr+1:n
    qsl(1:Ndt,1)=UtDt(Nr+1:n,1);
end
w=1;
i=1;
sum=0;
suml=0;
Vpad=zeros(4*N,1);
if Nde==1
    for h=1:N
        i=i+suml;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras=Npad';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qrel=zeros(4,1);
        qrl(1:4,1)=qrl(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qsl(i,1);
        f2=(Npad*qrel-Ys1)*Cp;
        f=f1+f2;
    end
end

```

```

        Vepad=Ntras*f;
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=4;
        sum1=1;
    end
end
if Nde==2
    for h=1:N
        i=i+sum1;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad1=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras1=Npad1';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad1*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad1*qr1e-Ys1)*Cp;
        fi=f1+f2;
        x=(Dd/2)+Dd;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad2=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras2=Npad2';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad2*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);

```

```

        f2=(Npad2*qr1e-Ys1)*Cp;
        fii=f1+f2;
        Vepad=(Ntras1*fi)+(Ntras2*fii);
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=2;
        sum1=1;
    end
end
Vm=Vq2+Vq0+Vp+Vpad;
MF(1:4*N,j-1)=Vm(1:4*N,1);
    Ut2 = UtDt2;
    Ut1 = UtDt1;
    Uto = UtDt0;
    Rt=RtDt;
end
end
if Fuerzas==4
    for j= 2:Nt+1
        k=Dt*(j-1)
        Xp1=Xp1+Ldt;
        RtDt=zeros(n,1);
        X2=(2.5-Xp1);
        X3=(17.5-Xp1);
        X4=(20-Xp1);
        Xs1=(L-Xp1);
        Xs2=(L-Xp1+2.5);
        Xs3=(L-Xp1+17.5);
        Xs4=(L-Xp1+20);
        if X4<=0
            if Xs1>0
                Avanza=(Xp1/1)+1;
                Efl=fix(Avanza);
                Xfl=Xp1-((Efl-1)*1);
                Fr11 = 1-
                    (3*(Xfl/1)^2)+(2*(Xfl/1)^3);
                Fr21 = Xfl*(1-
                    (2*(Xfl/1))+((Xfl/1).^2));
                Fr31 = 3*(Xfl/1).^2-2*(Xfl/1).^3;
                Fr41 = Xfl.*((Xfl/1)^2-(Xfl/1));

```

```

fr1 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
RtDt(Ef1+Ef1-1,1)=fr1(1,1);
RtDt(Ef1+Ef1,1)=fr1(2,1);
RtDt(Ef1+Ef1+1,1)=fr1(3,1);
RtDt(Ef1+Ef1+2,1)=fr1(4,1);
end
if Xs2>0
    Xp2=Xp1-2.5;
    Retrocede=(Xp2/1)+1;
    Ef2=fix(Retrocede);
    Xf2=Xp2-((Ef2-1)*1);
    Fr11 = 1-
(3*(Xf2/1)^2)+(2*(Xf2/1)^3);
    Fr21 = Xf2*(1-
(2*(Xf2/1))+((Xf2/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf2/1).^2-2*(Xf2/1).^3;
    Fr41 = Xf2.*((Xf2/1)^2-(Xf2/1));
    fr2 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    i=Ef1-Ef2;
    if i==1
        RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1)+fr1(1,1);
RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1)+fr1(2,1);
    else
        RtDt(Ef2+Ef2-1,1)=fr2(1,1);
        RtDt(Ef2+Ef2,1)=fr2(2,1);
        RtDt(Ef2+Ef2+1,1)=fr2(3,1);
        RtDt(Ef2+Ef2+2,1)=fr2(4,1);
    end
end
if Xs3>0
    Xp3=Xp1-17.5;
    Retrocede=(Xp3/1)+1;
    Ef3=fix(Retrocede);
    Xf3=Xp3-((Ef3-1)*1);

```

```

    Fr11 = 1-
(3*(Xf3/1)^2)+(2*(Xf3/1)^3);
    Fr21 = Xf3*(1-
(2*(Xf3/1))+((Xf3/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf3/1).^2-2*(Xf3/1).^3;
    Fr41 = Xf3.*((Xf3/1)^2-(Xf3/1));
    fr3 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    RtDt(Ef3+Ef3-1,1)=fr3(1,1);
    RtDt(Ef3+Ef3,1)=fr3(2,1);
    RtDt(Ef3+Ef3+1,1)=fr3(3,1);
    RtDt(Ef3+Ef3+2,1)=fr3(4,1);
end
if Xs4>0
    Xp4=Xp1-20;
    Retrocede=(Xp4/1)+1;
    Ef4=fix(Retrocede);
    Xf4=Xp4-((Ef4-1)*1);
    Fr11 = 1-
(3*(Xf4/1)^2)+(2*(Xf4/1)^3);
    Fr21 = Xf4*(1-
(2*(Xf4/1))+((Xf4/1).^2));
    Fr31 = 3*(Xf4/1).^2-2*(Xf4/1).^3;
    Fr41 = Xf4.*((Xf4/1)^2-(Xf4/1));
    fr4 = P1*[Fr11; Fr21; Fr31; Fr41];
    i=Ef3-Ef4;
    if i==1
        RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
        RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);
RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1)+fr3(1,1);
RtDt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1)+fr3(2,1);
    else
        RtDt(Ef4+Ef4-1,1)=fr4(1,1);
        RtDt(Ef4+Ef4,1)=fr4(2,1);
        RtDt(Ef4+Ef4+1,1)=fr4(3,1);
        RtDt(Ef4+Ef4+2,1)=fr4(4,1);
    end
end
end

```

```

        end
        R(1:n,j)=RtDt(1:n,1);
        RetDt =
Rt+(M*((a0*Uto)+(a2*Ut1)+(a3*Ut2)))+(C*((a1*Uto)
)+(a4*Ut1)+(a5*Ut2
        UtDt0 = (K1d1^1)*RetDt;
        UtDt2 = (a0*(UtDt0-Uto))-(a2*Ut1)-
(a3*Ut2);
        UtDt1 = Ut1+(a6*Ut2)+(a7*UtDt0);
if CB==1
    UtDt2(1:2,1)=0;
    UtDt2(n-1:n,1)=0;
    UtDt1(1:2,1)=0;
    UtDt1(n-1:n,1)=0;
    UtDt0(1:2,1)=0;
    UtDt0(n-1:n,1)=0;
end
if CB==2
    UtDt2(1,1)=0;
    UtDt2(n-1,1)=0;
    UtDt1(1,1)=0;
    UtDt1(n-1,1)=0;
    UtDt0(1,1)=0;
    UtDt0(n-1,1)=0;
end
for i=1:n
    D(i,j-1)=UtDt0(i,1);
    V(i,j-1)=UtDt1(i,1);
    A(i,j-1)=UtDt2(i,1);
end
qr2=zeros(4*N,1);
qr2(1:2,1)=UtDt2(1:2,1);
qr2(3:4,1)=UtDt2(3:4,1);
qr2(4*N-1:4*N,1)=UtDt2(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;

```

```

for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr2(i:i+1,1)=UtDt2(i-a:i-b,1);
    qr2(i+2:i+3,1)=UtDt2(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qr2e=zeros(4,1);
Vq2=zeros(4*N,1);
w=1;
sum=0;
for h=1:N
    w=w+sum;
    qr2e(1:4,1)=qr2(w:w+3,1);
    Vq2e=Mrr*qr2e;
    Vq2(w:w+3,1)=Vq2e(1:4,1);
    sum=4;
end
qr0=zeros(4*N,1);
qr0(1:2,1)=UtDt0(1:2,1);
qr0(3:4,1)=UtDt0(3:4,1);
qr0(4*N-1:4*N,1)=UtDt0(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr0(i:i+1,1)=UtDt0(i-a:i-b,1);
    qr0(i+2:i+3,1)=UtDt0(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qr0e=zeros(4,1);

```

```

Vq0=zeros(4*N,1);
w=1;
sum=0;
for h=1:N
    w=w+sum;
    qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
    Vq0e=K1rrr*qr0e;
    Vq0(w:w+3,1)=Vq0e(1:4,1);
    sum=4;
end
Rr=zeros(4*N,1);
Rr(1:2,1)=RtDt(1:2,1);
Rr(3:4,1)=RtDt(3:4,1);
Rr(4*N-1:4*N,1)=RtDt(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;
for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    Rr(i:i+1,1)=RtDt(i-a:i-b,1);
    Rr(i+2:i+3,1)=RtDt(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
Vp=zeros(4*N,1);
Vp=Rr;
qr1=zeros(4*N,1);
qr1(1:2,1)=UtDt1(1:2,1);
qr1(3:4,1)=UtDt1(3:4,1);
qr1(4*N-1:4*N,1)=UtDt1(Nr-1:Nr,1);
a=2;
b=1;
c=0;
d=1;
sum=0;

```

```

for i=5:4:4*N-2
    a=a+sum;
    b=b+sum;
    c=c+sum;
    d=d-sum;
    qr1(i:i+1,1)=UtDt1(i-a:i-b,1);
    qr1(i+2:i+3,1)=UtDt1(i-c:i+d,1);
    sum=2;
end
qs0=zeros(Ndt,1);
qsl=zeros(Ndt,1);
for i=Nr+1:n
    qs0(1:Ndt,1)=UtDt0(Nr+1:n,1);
end
for i=Nr+1:n
    qsl(1:Ndt,1)=UtDt1(Nr+1:n,1);
end
w=1;
i=1;
sum=0;
sum1=0;
Vpad=zeros(4*N,1);
if Nde==1
    for h=1:N
        i=i+sum1;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+((x/1).^2));
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras=Npad';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qrel=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        fl=(Npad*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qsl(i,1);
    end
end

```

```

        f2=(Npad*qr1-Ys1)*Cp;
        f=f1+f2;
        Vepad=Ntras*f;
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=4;
        sum1=1;
    end
end
if Nde==2
    for h=1:N
        i=i+sum1;
        x=Dd/2;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+(x/1).^2);
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad1=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras1=Npad1';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);
        f1=(Npad1*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad1*qr1e-Ys1)*Cp;
        fi=f1+f2;
        x=(Dd/2)+Dd;
        N1=1-(3*(x/1)^2)+(2*(x/1)^3);
        N2=x*(1-(2*(x/1))+(x/1).^2);
        N3=3*(x/1).^2-2*(x/1).^3;
        N4=x.*((x/1)^2-(x/1));
        Npad2=[N1 N2 N3 N4];
        Ntras2=Npad2';
        w=w+sum;
        qr0e(1:4,1)=qr0(w:w+3,1);
        qr1e=zeros(4,1);
        qr1e(1:4,1)=qr1(w:w+3,1);
        Ys0=qs0(i,1);

```

```

        f1=(Npad2*qr0e-Ys0)*Kp;
        Ys1=qs1(i,1);
        f2=(Npad2*qr1e-Ys1)*Cp;
        fii=f1+f2;
        Vepad=(Ntras1*fi)+(Ntras2*fii);
        Vpad(w:w+3,1)=Vepad(1:4,1);
        sum=2;
        sum1=1;
    end
end
Vm=Vq2+Vq0+Vp+Vpad;
MF(1:4*N,j-1)=Vm(1:4*N,1);
    Utl = UtDt1;
    Uto = UtDt0;
    Rt=RtDt;
end
end
figure
for j=1:Nt
    plot(D(1:2:Nn-1,j))
    grid on
    hold on
end
title('Desplazamiento Vertical del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('Desplazamiento en m')
figure
for j=1:Nt
    plot(D(2:2:Nn,j))
    grid on
    hold on
end
title('Desplazamiento Rotacional del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('Desplazamiento en rad')
for j=1:Nt
    plot(V(1:2:Nn-1,j))
    grid on
    hold on
end

```

```

end
title('Velocidad Vertical del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('Velocidad en m/s')
figure
for j=1:Nt
    plot(V(2:2:Nn,j))
    grid on
    hold on
end
title('Velocidad Rotacional del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('velocidad en rad/seg')
figure
for j=1:Nt
    plot(A(1:2:Nn-1,j))
    grid on
    hold on
end
title('Aceleración Vertical del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('Aceleración en m/s2')
figure
for j=1:Nt
    plot(A(2:2:Nn,j))
    grid on
    hold on
end
title('Aceleración Rotacional del Riel')
xlabel('Nodos en los elementos')
ylabel('Aceleración en rad/s2')
figure
for j=1:Nt
    plot(D(Nn+1:n,j))
    grid on
    hold on
end
title('Desplazamiento de los durmientes')
xlabel('Cantidad de durmientes en el riel')

```

```

ylabel('Desplazamiento en m')
for j=1:Nt
    plot(V(Nn+1:n,j))
    grid on
    hold on
end
title('Velocidad de los durmientes')
xlabel('Cantidad de durmientes en el riel')
ylabel('Velocidad en m/s')
figure
for j=1:Nt
    plot(A(Nn+1:n,j))
    grid on
    hold on
end
title('Aceleración de los durmientes')
xlabel('Cantidad de durmientes en el riel')
ylabel('Aceleración en m/s2')
figure
for j=1:Nt
    plot(MF(1:2:4*N-1,j))
    grid on
    hold on
end
title('Momentos flectores en los nodos del riel')
xlabel('Elementos del riel')
ylabel('Momentos en N.m')
figure
for j=1:Nt
    plot(MF(2:2:4*N,j))
    grid on
    hold on
end
title('Fuerzas de corte en los nodos del riel')
xlabel('Elementos del riel')
ylabel('Fuerzas de corte en N')
toc

```

APÉNDICE 9

Entrevista al Profesor Euro Casanova de la Universidad Simón Bolívar

En la entrevista realizada el día viernes 05/03/2010 al Prof. Euro Casanova, Director del Departamento de Mecánica en la Universidad Simón Bolívar se trataron los siguientes puntos

Métodos de integración para la resolución de la ecuación de movimiento

La idea principal que discutida fue sobre la escogencia del mejor método entre los cuales tenemos: Wilson θ , Newmark, Houbolt y Diferencias Centradas. La recomendación del Prof. Casanova fue que utilizar por lo menos dos o tres de ellos y que comparar los resultados. Además sugirió probar con el método de Runge Kutta-Felberg, que tiene un módulo en MATLAB denominado ODE 45 y su principal ventaja consiste en que calcula automáticamente el Δt , y por otro lado lo ajusta automáticamente, de forma que se pueda obtener la mejor aproximación posible. El método de Runge Kutta-Felberg se basa en la transformación de una ecuación lineal de segundo orden en una de primer orden, por medio de un cambio de variable.

Condiciones de borde

Se discutió sobre las diferentes configuraciones de las condiciones de borde que se utilizarían para representar el tramo del riel a estudiar, tomando en cuenta que las reacciones que se generan en la unión de ambos extremos del tramo con el resto del riel, generan un efecto sobre el estudio del movimiento general.

- a) Empotramiento en ambos extremos del tramo de riel:

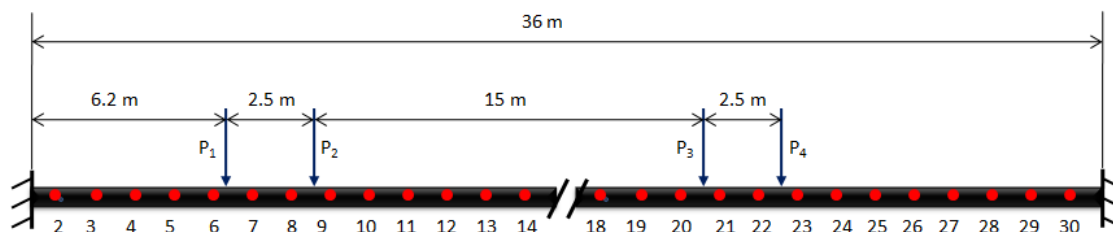


Figura 9.1 – Condiciones de Empotramiento en ambos extremos del riel

b) Apoyo simple en ambos extremos:

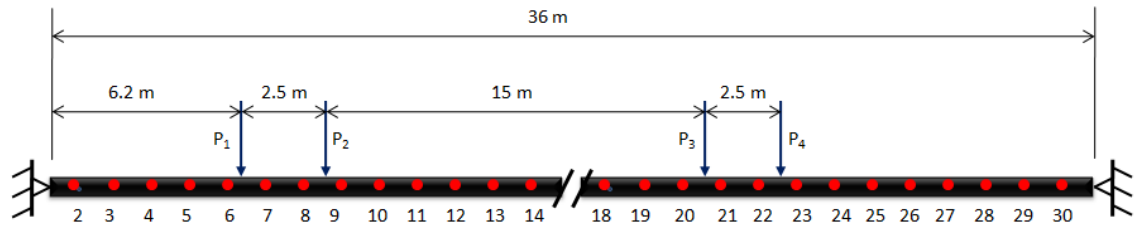


Figura 9.2 – Condiciones de apoyo simple en ambos extremos del riel

c) Apoyo con un resorte vertical y un resorte de torsión:

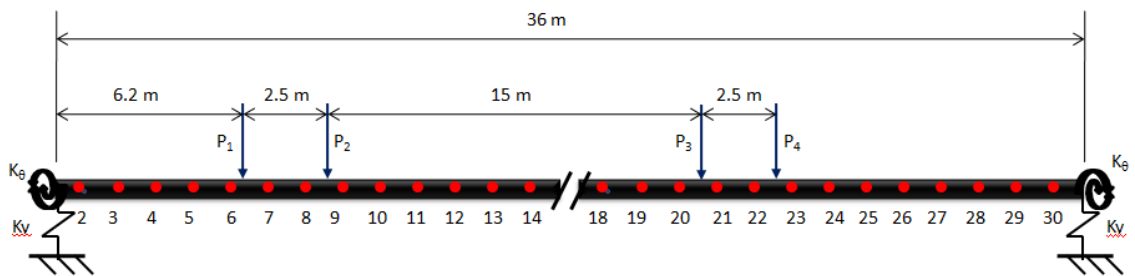


Figura 9.3 – Condiciones de apoyo con un resorte vertical y un resorte de torsión

El Prof. Casanova explicó los motivos por los que a su parecer la mejor configuración, o la que se aproxima más a la realidad es la del resorte vertical y el de torsión los cuales simulan el desplazamiento vertical y la rotación de la unión, respectivamente. Sin embargo advirtió que podía ser complicado encontrar las constantes, y además incluir esto complicaría el sistema a estudiar. Finalmente expuso que sería mejor hacer dos o tres de estas opciones y compararlas.

Posición de los durmientes

La posición de los durmientes en la representación de un elemento de riel, es la siguiente:

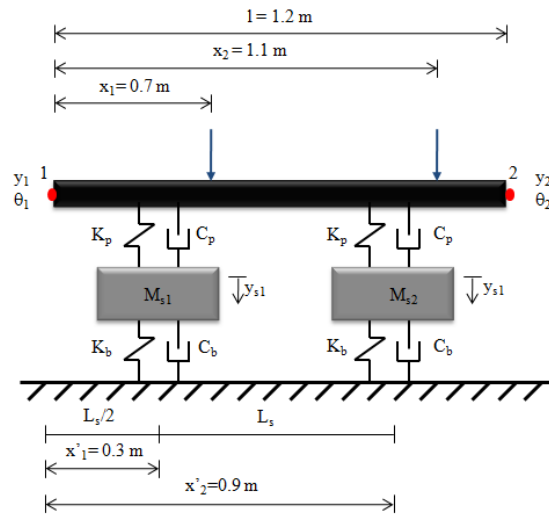


Figura 9.4 – Posición de los durmientes en el elemento de estudio

Sin embargo el Prof. Casanova sugirió que para simplificar, en lugar de tener los durmientes dentro del elemento los ubicáramos en los nodos (extremos), de la siguiente manera:

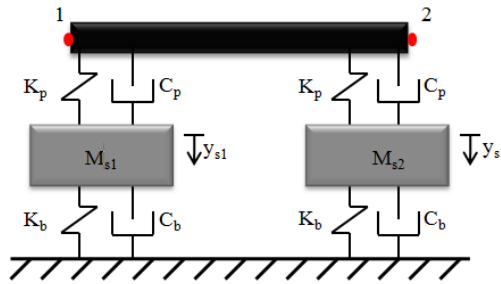


Figura 9.5 – Distribución del elemento según lo explicado por el Prof. Casanova

Escogencia del tiempo total de integración y del número de pasos

Para lo primero, la pregunta que se realizó fue sobre qué criterios se deben tomar en cuenta para escoger el tiempo de integración. La respuesta del profesor fue que no era sencillo, debido a la presencia de los diferentes modos de vibración, porque si no lo hacemos con cuidado podríamos estar descartando algunas frecuencias propias que participan en el movimiento. Debido a esto su sugerencia fue la de calcular los modos de vibración y escoger el período de la menor frecuencia, para la integración.

Por otro lado el número de pasos se calcula en base a este período, pero nos acotó que este no debe ser grande porque la aproximación no es buena, ni tampoco muy pequeño debido a que puede suceder que el método que empleemos diverge.

APÉNDICE 10

Corridas realizadas para la configuración de dos durmientes por elemento

Los resultados obtenidos de las corridas realizadas para una configuración de dos durmientes por elemento, fue estudiado de acuerdo al estado de la vía en el caso de ser una vía en muy mal estado o en muy buenas condiciones. Los rieles analizados fueron de 12, 24 y 36 metros, para dos casos. El caso I representado por una velocidad de 80 km/h, mientras que el caso II para una velocidad de 120 km/h.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para una vía en mal.

Una vía en mal estado

Inicialmente se realizara el estudio para un riel de 12 metros para cada uno de los casos, calculando las fuerzas de corte, los momentos flectores, el desplazamiento de los durmientes y el desplazamiento del riel.

Estudio de un riel de 12 metros

Las tablas de resultados correspondientes a un riel de 12 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación, son lo que se presentan a continuación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría.

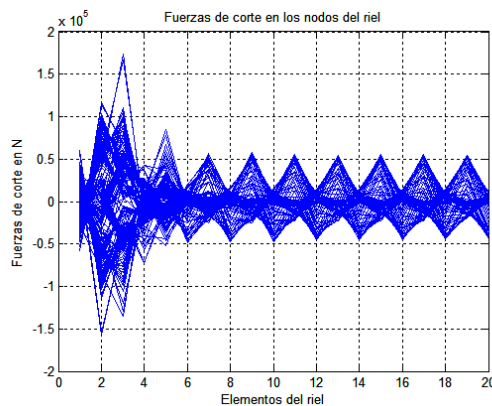
CASO I

El primer caso de estudio es una vía de 12 metros de longitud, circulando a una velocidad de 80 km/h, donde se calcularon los desplazamientos del riel, los durmientes, momento flector y fuerza de corte. Los valores máximos obtenidos son registrados en la Tabla 10a.1.

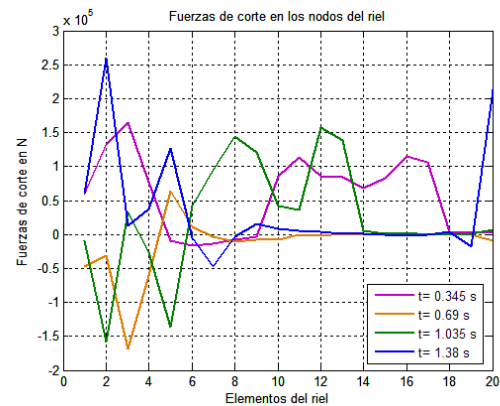
Tabla 10a.1 - Riel de longitud de 12 metros, con dos durmientes por elemento, una velocidad de 80 km/h y vía en mal estado

	Paso de tiempo [Nt]				
Valores Máximos	100	200	400	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,0	7,0	7,0	7,6	8,9
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,5	-0,5	-0,5	-1,4	-2,8
Momento Flector [10^5] N.m	2,1	2,1	2,1	1,8	2,8
Fuerza de Corte [10^4] N	6,0	6,0	6,0	4,2	6,9

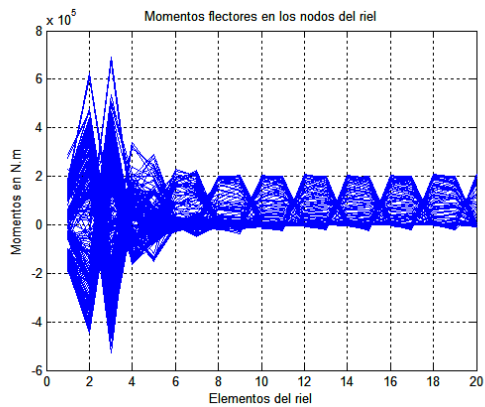
La Figura 10a.1 presenta los resultados gráficos correspondientes a la fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 12 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 80 km/h y una vía en mal estado, en la parte (a) se puede observar los valores en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar mejor el comportamiento, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y finalmente la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt , relacionados con el momento flector.



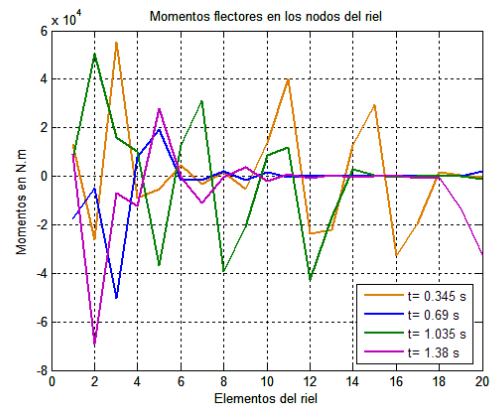
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.1 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 12$, de dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado

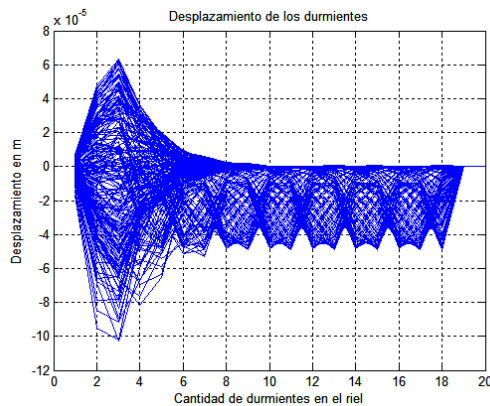
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

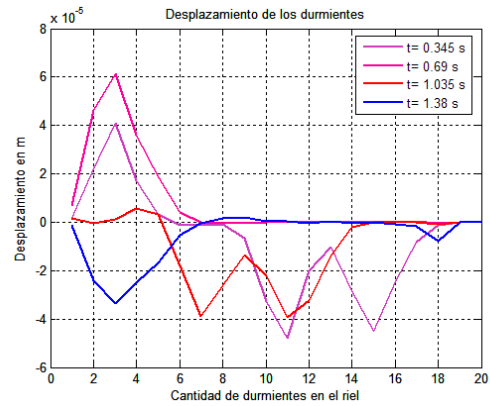
(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

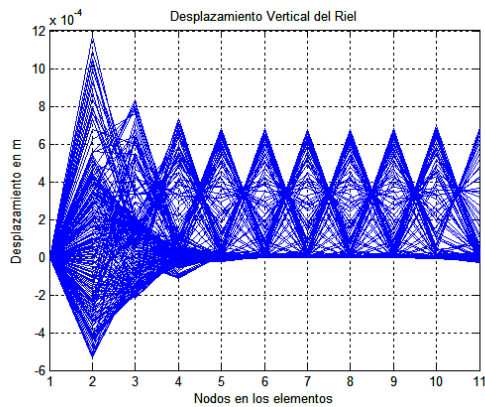
La figura correspondiente a los desplazamientos de los durmientes y del riel es la 10.2, donde se observan cuatro gráficas para una vía férrea en malas condiciones, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y la parte (d) representa la grafica de desplazamiento del riel para un intervalo de cuatro Δt .



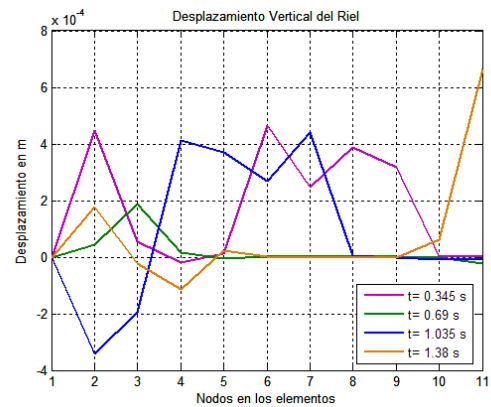
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.2 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=12$, de dos durmientes por elemento, con $V=80$ km/h y vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes
(c) Desplazamiento vertical del riel

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

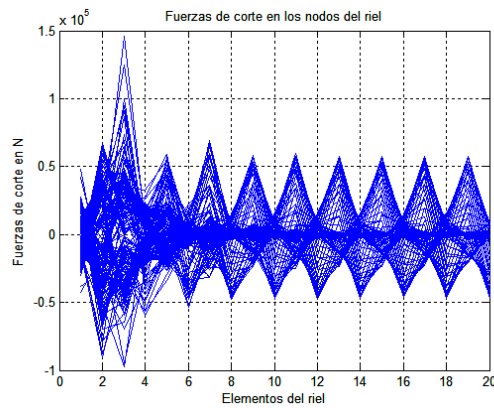
CASO II

El segundo caso de estudio en el caso de una vía férrea de longitud de 12 metros es cuando la velocidad del tren es de 120 km/h, obteniéndose los resultados de la Tabla 10a.2 para los valores máximos.

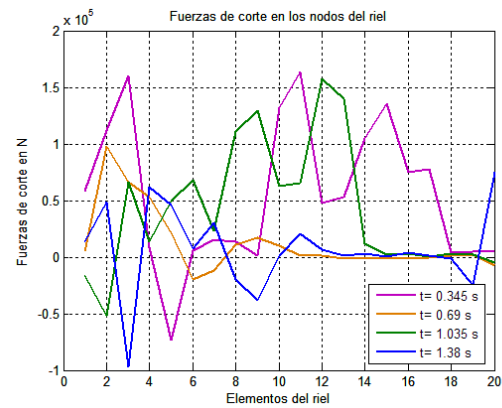
Tabla 10a.2 - Resultados con $L=12$ m y dos durmientes por elemento, con $v=120$ km/h y vía en mal estado

Valores Máximos	Paso de tiempo [Nt]				
	50	200	300	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,00	7,00	7,00	11,00	0,52
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,80	-0,80	-0,80	-4,00	-0,28
Momento Flector [10^5] N.m	2,10	2,10	2,10	3,20	6,90
Fuerza de Corte [10^4] N	6,00	6,00	6,00	8,00	15,00

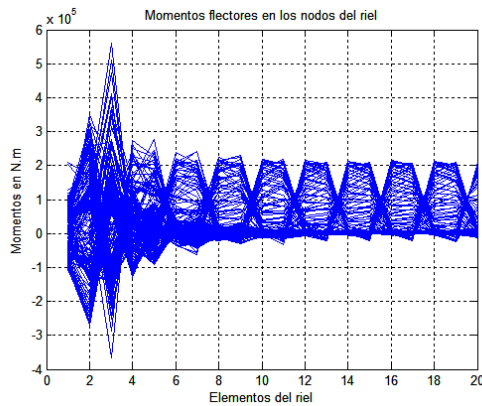
La Figura 10a.3 observada a continuación presenta los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea, donde podemos apreciar en la parte (a) los valores de la fuerza de corte en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, mientras en la parte (b) muestra una gráfica para cuatro Δt con finalidad de poder observar mejor el comportamiento, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivos Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt correspondientes al momento flector.



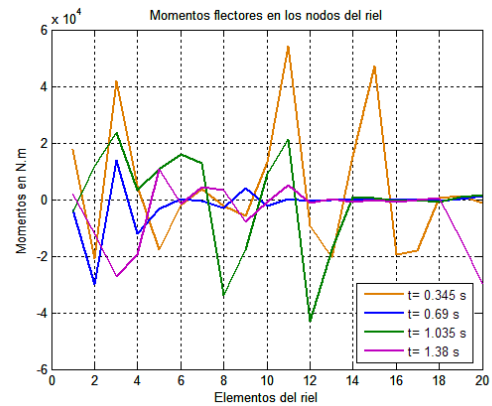
(a)



(b)



(c)



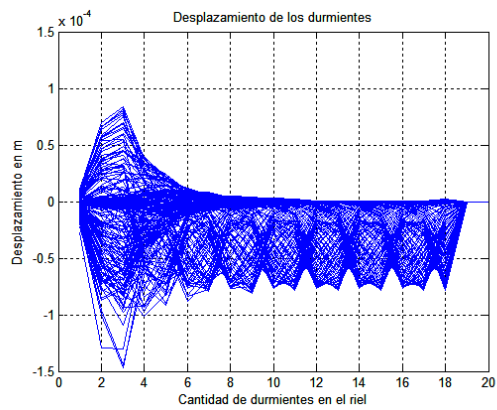
(d)

Figura 10a.3 - Fuerza de corte y Momento flector para un riel $L= 12$, con dos durmientes por elemento, a una $V= 120$ km/h y vía en mal estado

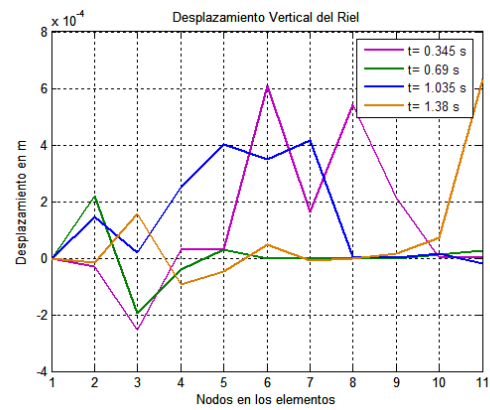
- (a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

- (b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

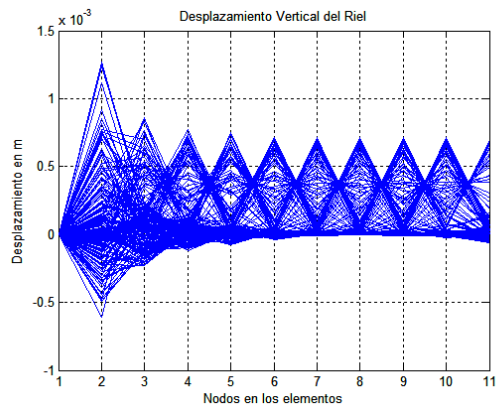
Los valores de los desplazamientos de los durmientes y del riel pueden ser observados de la Figura 10a.4 cuando el riel circula sobre una vía férrea en malas condiciones de longitud 12 m, dos durmientes y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento vertical del riel, y finalmente la parte (d) que representa la gráfica para cuatro Δt .



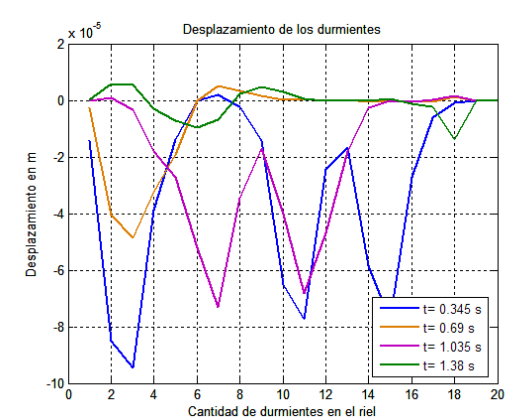
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.4 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=12$, de dos durmientes por elemento, con $V=120$ km/h y vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes
(c) Desplazamiento vertical del riel

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

CASO III

Se plantea un caso particular de estudio para una vía de 12 metros a una velocidad de 30 km/h, con la finalidad de poder apreciar los efectos de la velocidad en los desplazamientos del riel y los durmientes, la fuerza de corte y los momentos flectores, los resultados son los que se observan en la Figura 10a.5, en donde la parte (a) representa la fuerza de corte, la parte (b) los momentos flectores, la parte (c) el desplazamiento de los durmientes y la parte (d) el desplazamiento vertical del riel.

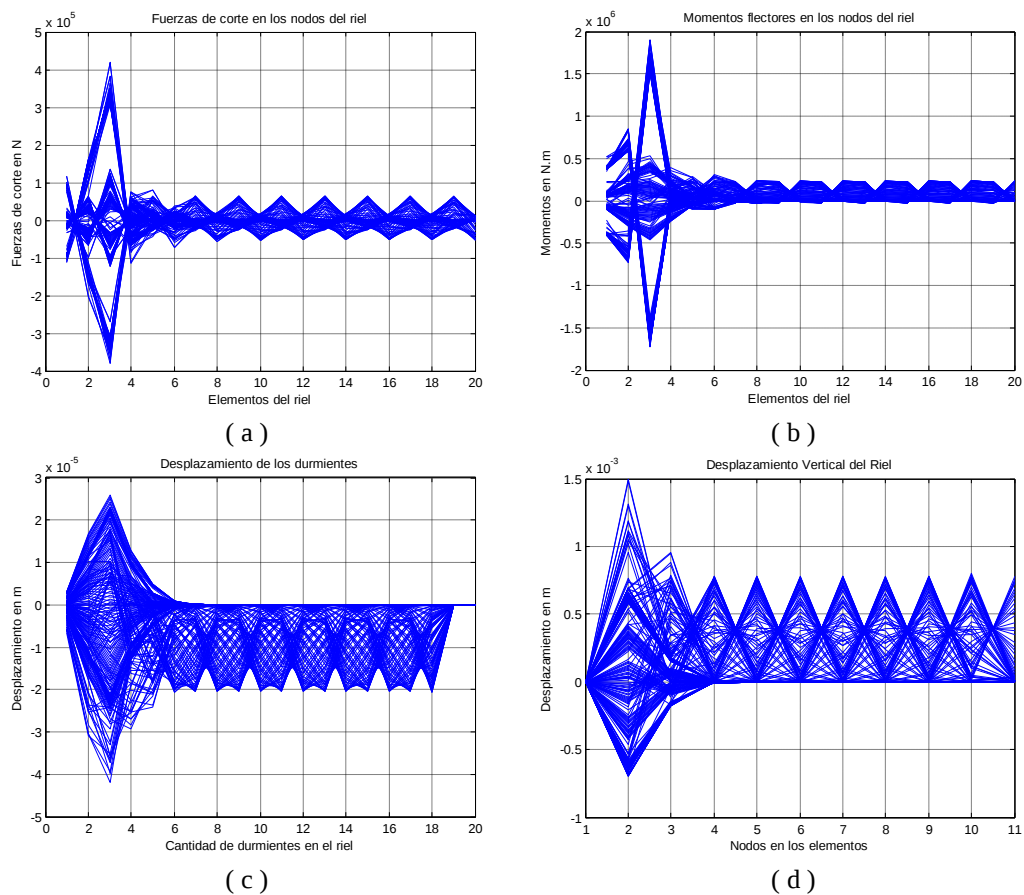


Figura 10a.5 - Desplazamiento de los durmientes y del riel para una longitud de $L= 12$, dos durmientes, a una velocidad $V= 30$ km/h y vía en mal estado

(a) Fuerza de corte del riel

(b) Momento flector del riel

(c) Desplazamiento de los durmientes

(d) Desplazamiento vertical del riel

El estudio de la vía férrea para una longitud de 12 metros fue una primicia para seguir realizando cálculos con longitudes mayores como los que se realizaron a continuación.

Estudio de una vía de 24 metros

Las tablas de resultados correspondientes a un riel de 24 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación es 120 km/h, son presentados a continuación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría.

CASO I

En el caso I se plantea un riel de 24 metros de largo, sometido a 120 km/h, en una vía en mal estado. Los resultados son los presentados en la Tabla 10a.3.

Tabla 10a.3 - Resultados con $L=24$ m, dos durmientes por elemento, a una $v=120$ km/h y vía en mal estado

	Paso de tiempo [Nt]				
Valores Máximos	50	200	300	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,0	7,0	7,0	10,0	9,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-5,8	-5,8	-5,8	-3,4	-0,2
Momento Flector [10^5] N.m	2,1	2,1	2,1	2,7	2,6
Fuerza de Corte [10^4] N	6,0	6,0	6,0	6,4	7,0

La Figura 10a.6 observada a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 24 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 120 m/h y una vía en mal estado, en donde la parte (a) muestra los valores de la fuerza de corte en los nodos de la vía para

todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .

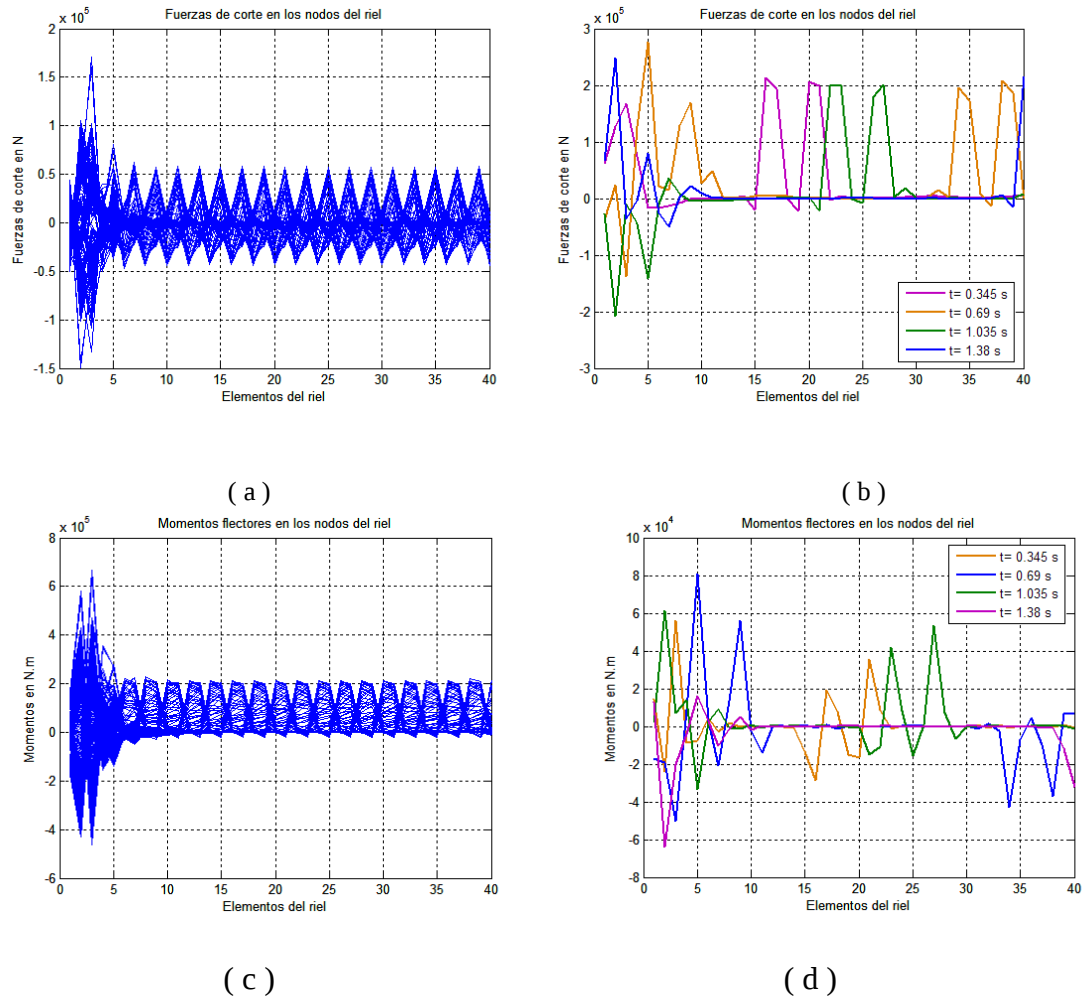


Figura 10a.6 - Fuerza de corte y momento flector con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h y vía en mal estado

- | | |
|---|--|
| (a) Fuerza de corte en los nodos del riel | (b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$ |
| (c) Momento flector en los nodos del riel | (d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$ |

La Figura 10a.7 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en malas

condiciones, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b) para observar mejor su comportamiento, mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y en la parte (d) se gráfica cuatro Δt correspondiente al desplazamiento del riel.

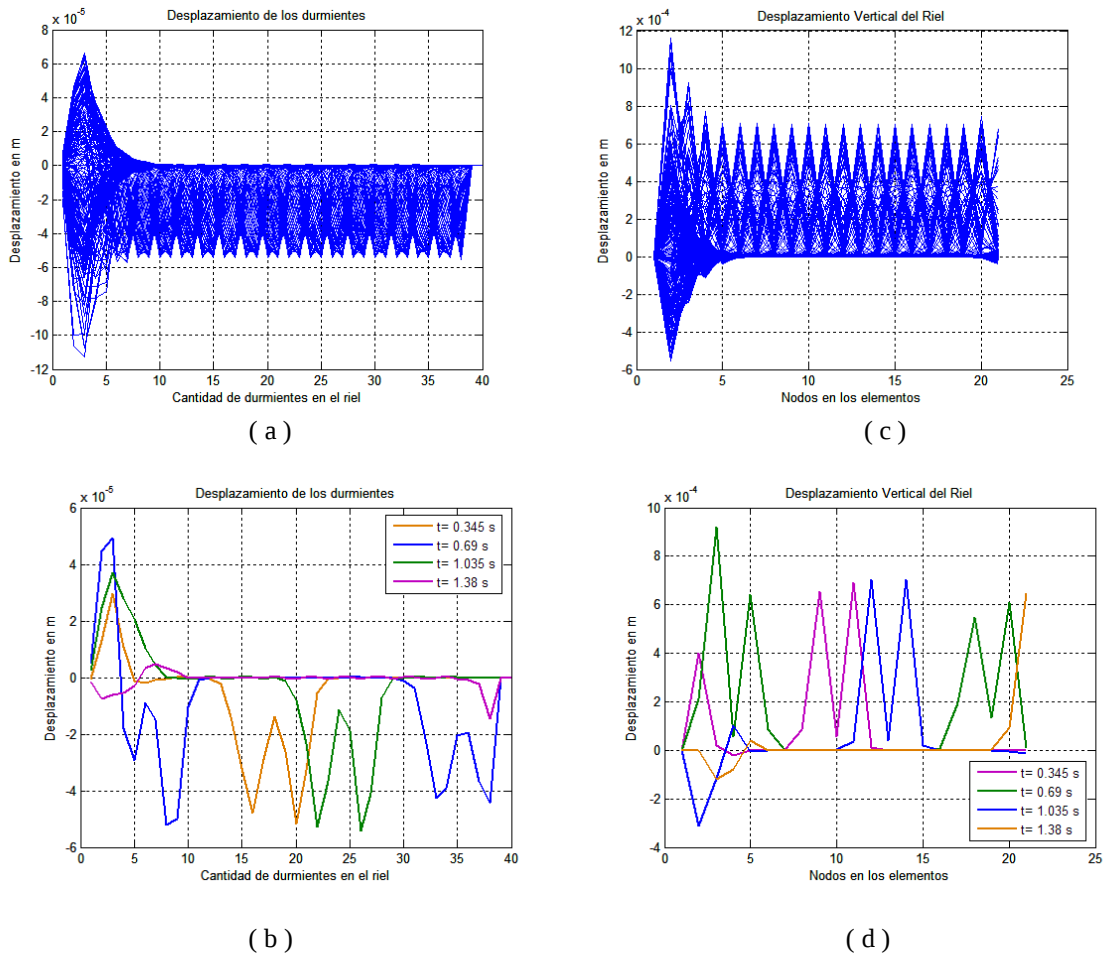


Figura 10a.7 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 24$ y dos durmientes por elemento, con $V = 120$ km/h y vía en mal estado

- (a) Desplazamiento de los durmientes
- (b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
- (c) Desplazamiento vertical del riel
- (d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Las gráficas correspondientes a la velocidad de 80 km/h se encuentran ubicadas en la presentación de resultados. De igual manera a como se realizó el estudio para un riel de 24 metros se realizara para uno de mayor longitud.

Estudio de un riel de 36 metros

El riel de 36 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación, es estudiado en este apartado y presentado sus resultados a continuación. Los valores registrados en son los puntos máximos para cada categoría.

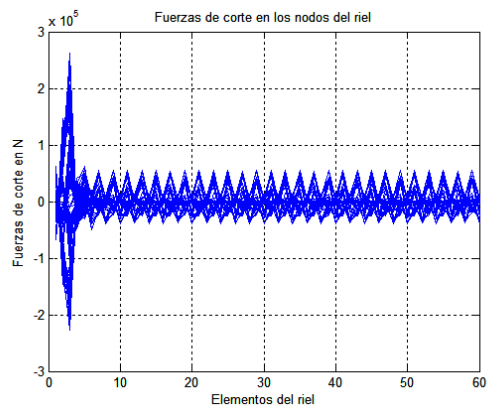
CASO I

El caso I fue planteado para el estudio de un riel de 36 metros de longitud a una velocidad de 80 km/h, los resultados obtenidos para los valores máximos son los que se observar en la Tabla 10a.4

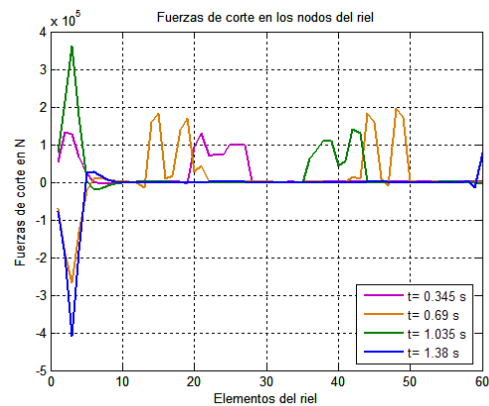
Tabla 10a.4 - Resultados con $L=36$ m, dos durmientes por elemento, a $v=80$ km/h y vía en mal estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	200	300	800	1000	1200
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,00	7,00	7,00	8,00	13,00
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,26	-0,26	-0,26	-1,80	-5,40
Momento Flector [10^5] N. m	2,10	2,10	2,10	2,80	3,30
Fuerza de Corte [10^4] N	6,00	6,00	6,00	6,80	8,20

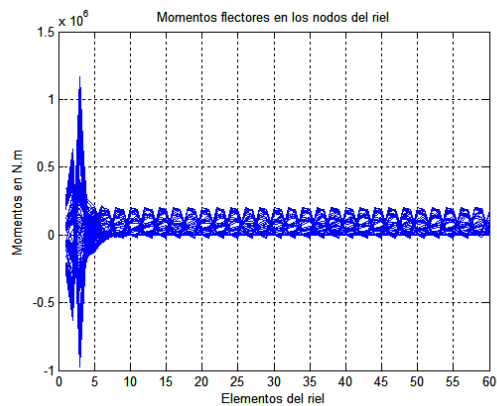
La correspondiente a las fuerzas de corte y los momentos flectores son los observados en la Figura 10a.8 cuando la longitud de la vía férrea es de 36 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en mal estado, en donde la parte (a) muestra los valores en los nodos de la vía para las fuerzas de corte en todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



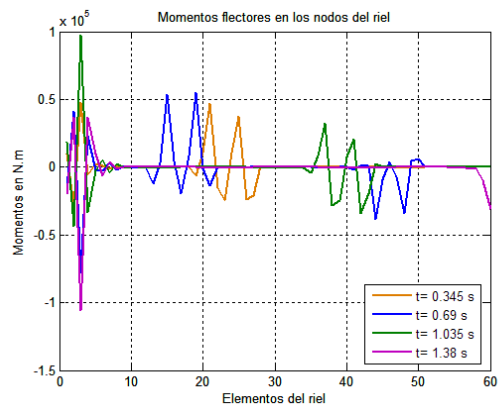
(a)



(b)



(c)



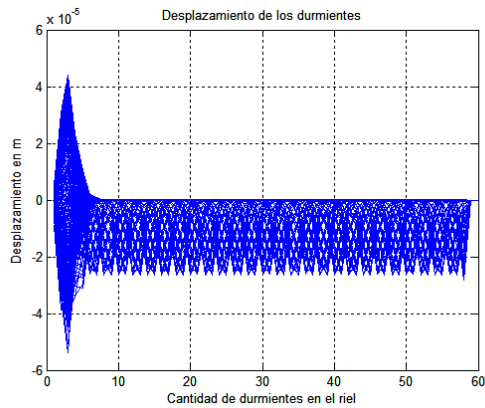
(d)

Figura 10a.8 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=36$, con dos durmientes por elemento, a una $V=80$ km/h y vía en mal estado

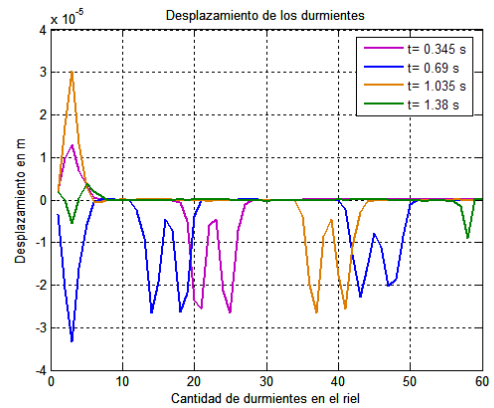
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

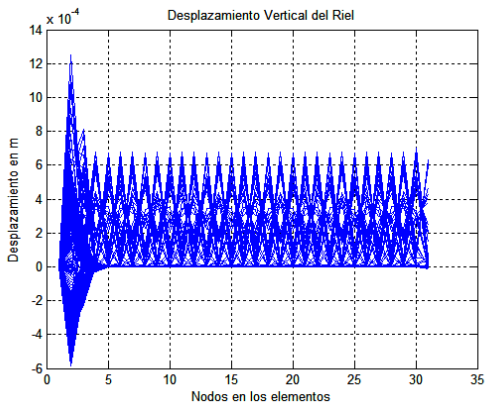
En la Figura 10a.9 se observan cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en malas condiciones de longitud 36 m, dos durmientes y a una velocidad de 80 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



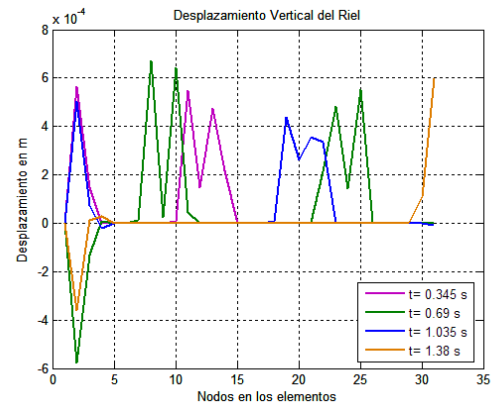
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.9 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 36$, dos durmientes por elemento, a una $V= 80$ km/h y vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

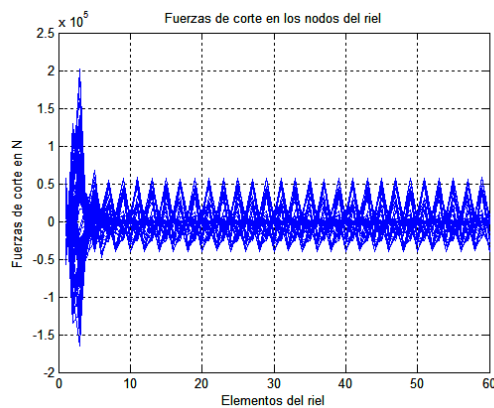
CASO II

El segundo caso es el planteado para una vía de 36 metros pero circulando a una velocidad de 120 km/h, y los resultados son mostrados en la Tabla 10a.5.

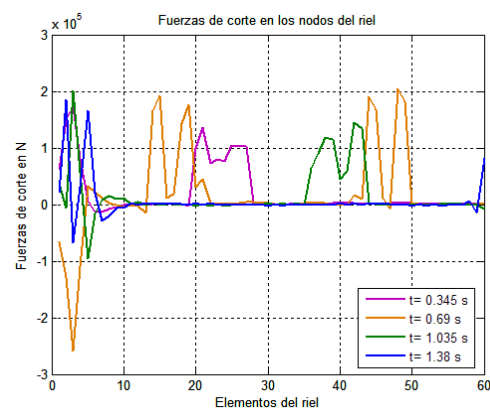
Tabla 10a.5 - Resultados con $L=36$ m y dos durmientes por elemento, con $v=120$ km/h y vía en mal estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	100	200	500	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	7,0	7,0	7,0	8,2	8,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-4,1	-4,1	-4,1	-15,0	-2,1
Momento Flector [10^5] N.m	2,1	2,1	2,1	3,0	28,0
Fuerza de Corte [10^4] N	6,0	6,0	6,0	8,0	7,0

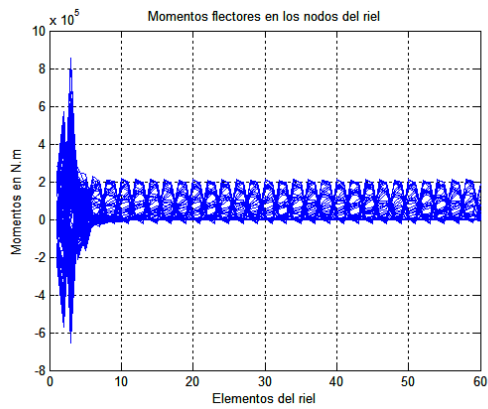
El comportamiento fuerzas de corte y los momentos flectores en los nodos del riel para el caso I planteado puede ser observado en la Figura 10a.10, la cual ilustra en la parte (a) la variación de la fuerza de corte en los nodos del riel para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar su comportamiento, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



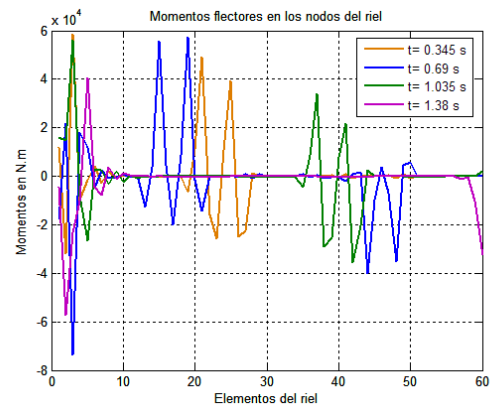
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10.10 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h y vía en mal estado

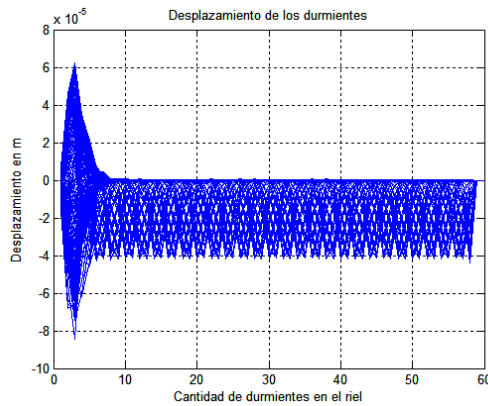
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

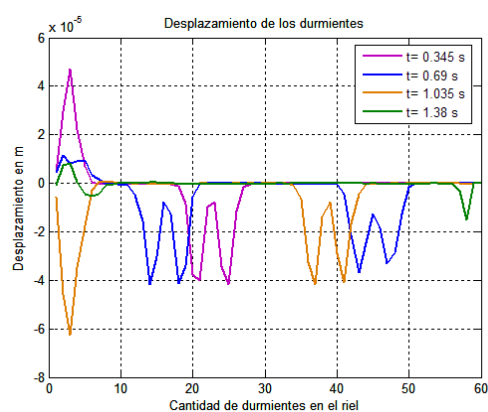
(d) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

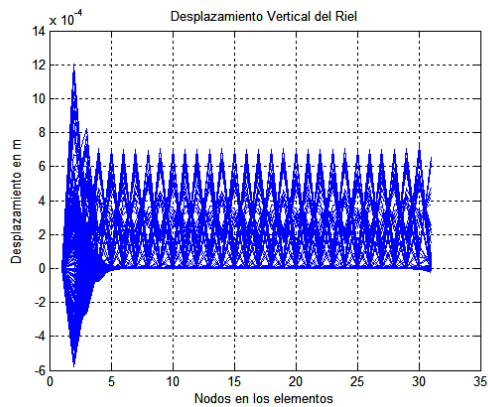
Por su parte la Figura 10a.11 esta relacionada con los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea para las condiciones planteadas en el caso I de estudio observando en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



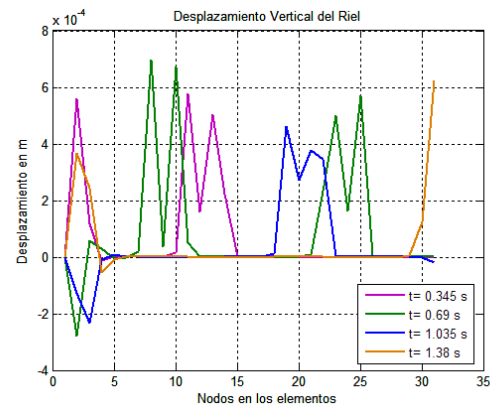
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.11 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=36$, dos durmientes por elemento, a una $V=120$ km/h y vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Una vez estudiado estos casos en particular para una vía que se encuentra en mal estado, se desea conocer el comportamiento de la vía cuando su condición es de muy buen estado.

Vía en buen estado

La vía férrea en buen estado fue analizada para diferentes longitudes del riel, planteando dos Caso para cada una de los largos. El primer caso es cuando circula un tren a velocidades de 80 km/h, mientras el segundo caso es para una velocidad de 120 km/h.

Estudio de un riel de 12 metros

Las tablas de resultados presentadas a continuación corresponden a un riel de 12 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación, pero considerando una vía en buen estado.

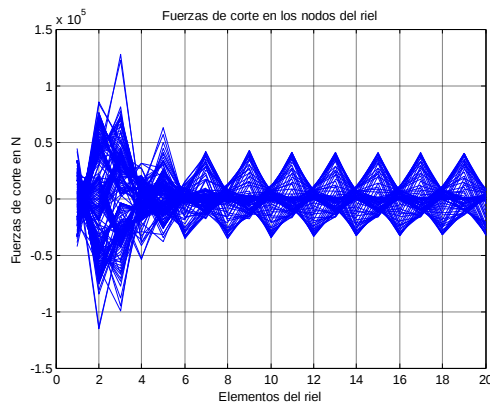
CASO I

Este primer caso planteado estudio el comportamiento de una vía de 12 metros circulando a una velocidad de 80 km/h, reflejando los resultados que se registran en la Tabla 10a.6

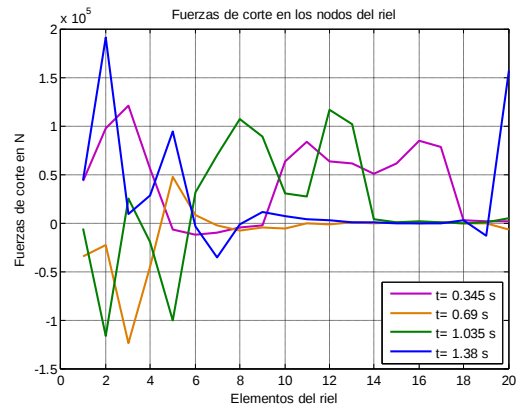
Tabla 10a.6 - Resultados con $L=12$ m y dos durmientes por elemento, con $v=80$ km/h, una vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	100	200	400	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,00	5,00	5,00	6,00	6,50
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,38	-0,38	-0,38	-1,30	-2,10
Momento Flector [10^5] N.m	1,50	1,50	1,50	2,00	2,00
Fuerza de Corte [10^4] N	4,00	4,00	4,00	5,20	5,80

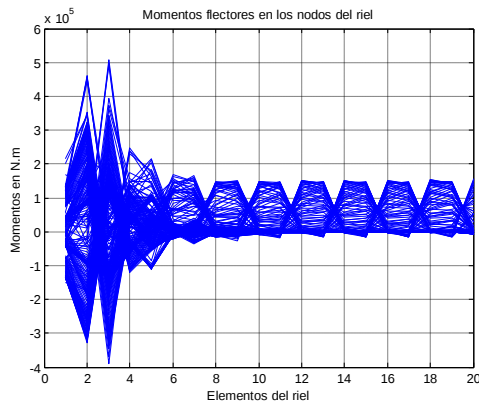
La Figura 10a.12 presentada a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 12 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en muy buen estado, en donde la parte (a) muestra los valores en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



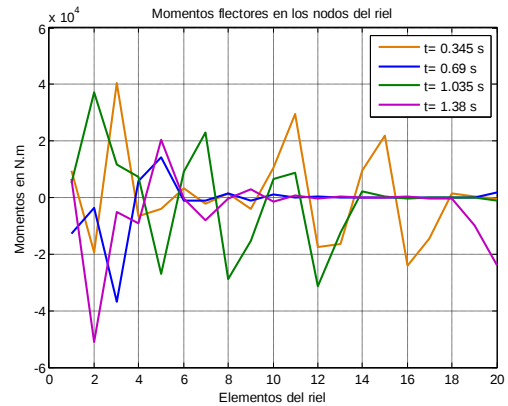
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.12 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=12$ y dos durmientes por elemento, con $V=80$ km/h, vía en muy buen estado

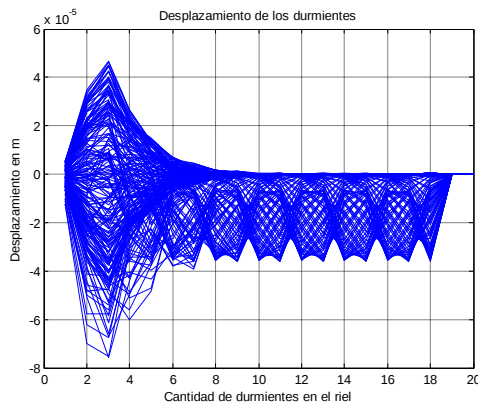
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

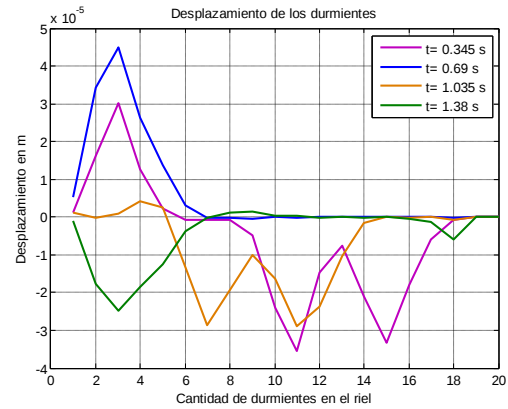
(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

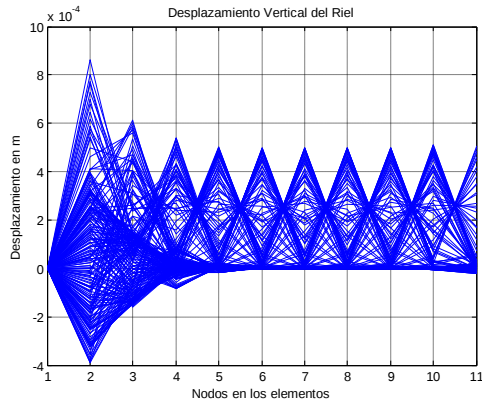
La Figura 10a.13 corresponde con el comportamiento de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 12 m, dos durmientes y a una velocidad de 80 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y finalmente la parte (d) representa la gráfica para cuatro Δt intervalos de estudio.



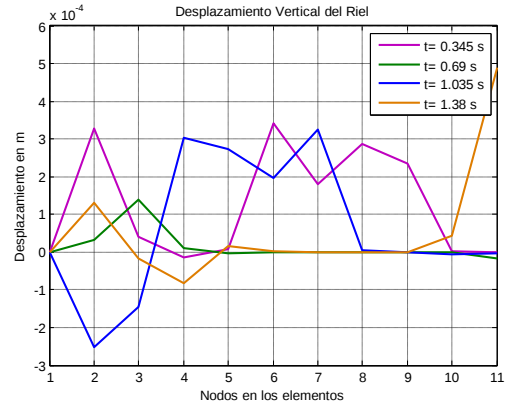
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.13 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 12$ y dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

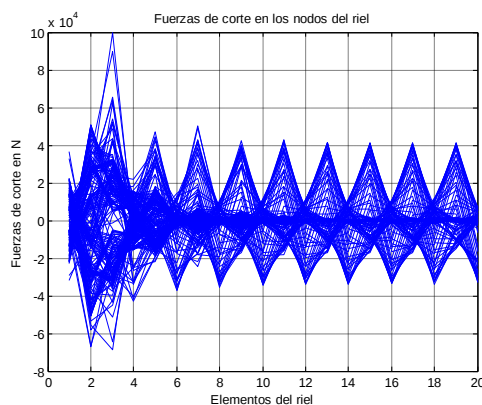
CASO II

El segundo caso de estudio similar al primero representa una vía con 12 m de longitud, pero en este caso sometida a un tren que viaja a 120 km/h.

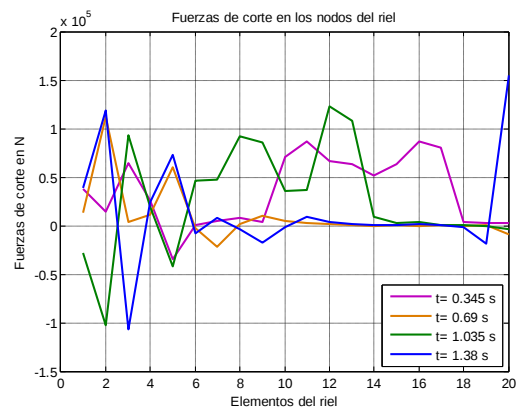
Tabla 10a.7 - Resultados con $L=12$ m y dos durmientes por elemento, con $v=120$ km/h, vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	50	200	300	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,0	5,0	5,0	7,5	36,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-5,8	-5,8	-5,8	-2,8	-18,0
Momento Flector [10^5] N.m	1,6	1,6	1,6	2,1	4,8
Fuerza de Corte [10^4] N	4,4	4,4	4,4	5,6	1,2

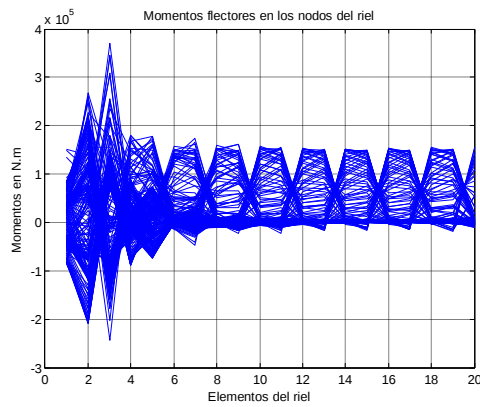
La Figura 10a.14 observada a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 12 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 120 m/h y una vía en muy buen estado, en donde la parte (a) muestra los valores de la fuerza de corte en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



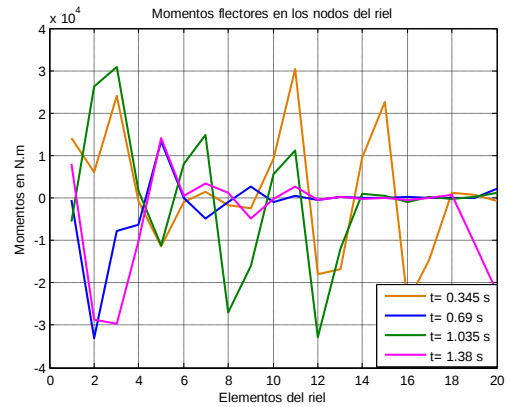
(a)



(b)



(c)



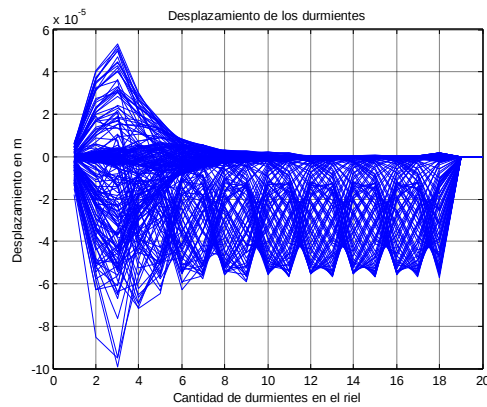
(d)

Figura 10a.14 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=12$, dos durmientes por elemento, a una $V=120$ km/h, vía en muy buen estado

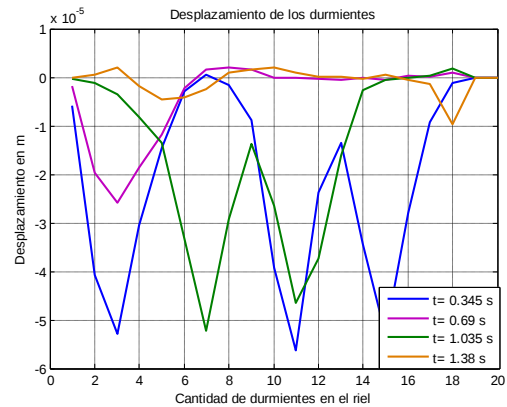
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

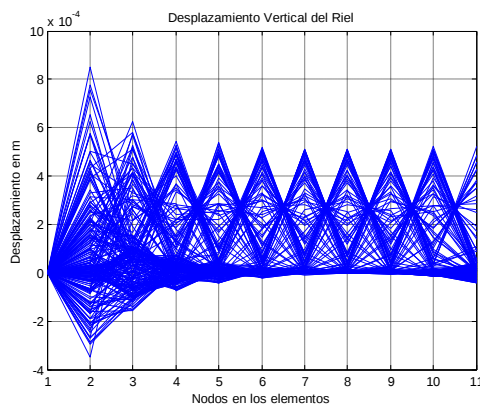
La Figura 10a.15 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 12 m, dos durmientes y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



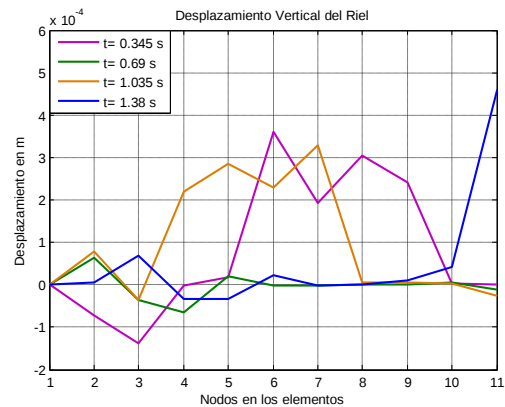
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.15 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=12$, dos durmientes por elemento, a una $V=120$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Los resultados presentados para un riel de 12 metros serán reproducidos para rieles de mayor longitud, como sería un riel de 24 metros de largo.

Estudio de un riel de 24 metros

A continuación se presentan las tablas de resultados correspondientes a un riel de 24 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría.

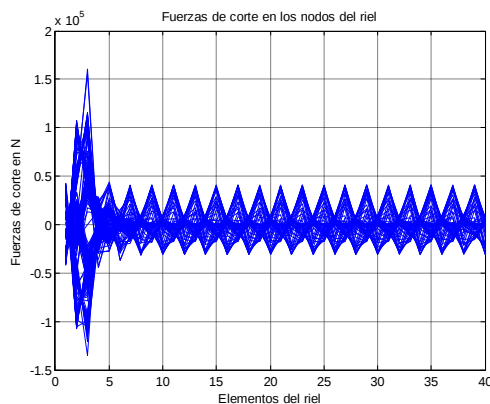
CASO I

El caso I planteo el estudio de una vía de 24 metros de largo a una velocidad de 80 km/h, para una vía en buen estado. Los resultados de los valores máximos son los presentados en la Tabla 10a.8.

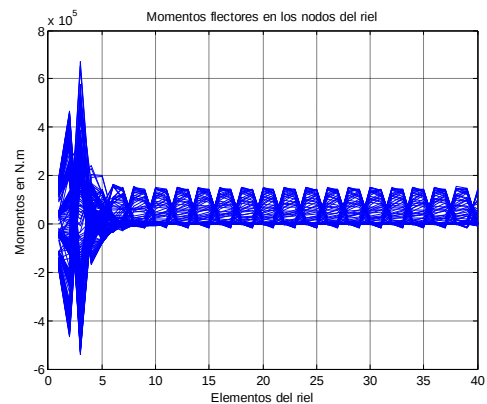
Tabla 10a.8 - Resultados con $L=24$ m y dos durmientes por elemento, con $v=80$ km/h, vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	120	300	600	800	1000
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,0	5,0	5,0	5,6	6,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-22,0	-22,0	-22,0	-1,3	-1,8
Momento Flector [10^5] Nm	1,5	1,5	1,5	1,8	1,8
Fuerza de Corte [10^4] N	4,0	4,0	4,0	4,4	6,0

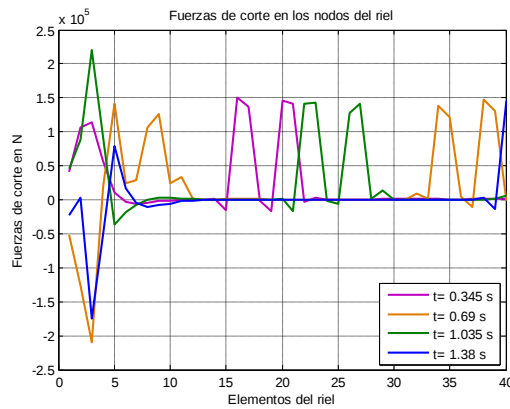
La Figura 10a.16 observada a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea, en donde la parte (a) muestra los valores en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



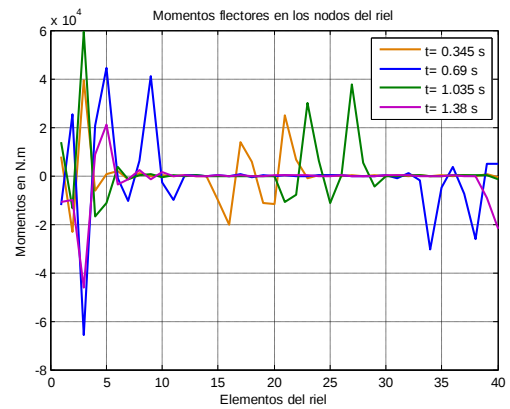
(a)



(c)



(b)



(d)

Figura 10a.16 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=24$ y dos durmientes por elemento, con $V=80$ km/h, vía en muy buen estado

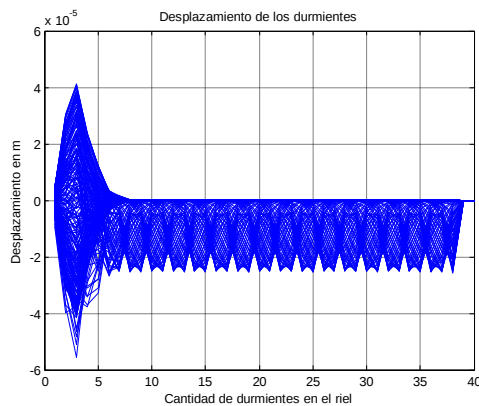
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

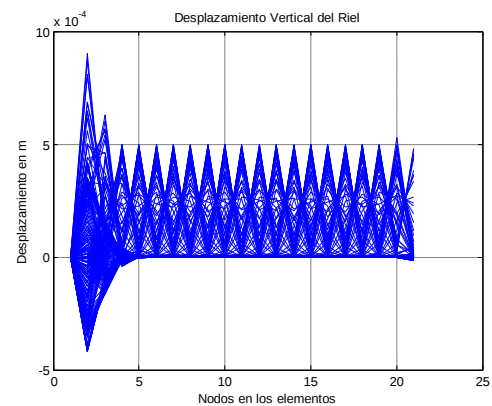
(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

La Figura 10a.17 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 24 m, dos durmientes y a una velocidad de 80 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d)



(a)



(c)

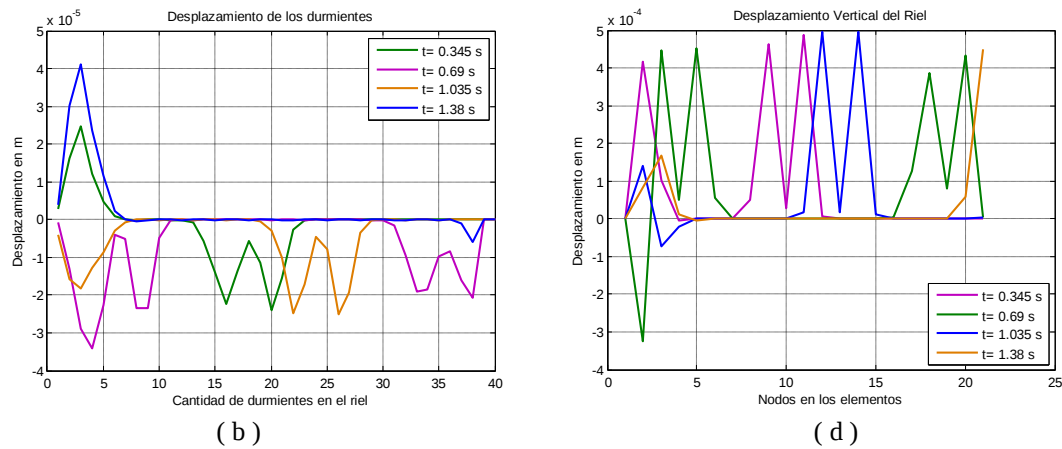


Figura 10a.17 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=24$ y dos durmientes por elemento, con $V=80$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

CASO II

El segundo caso es planteado para un riel con una velocidad de circulación de 120 km/h, cuyos valores máximos son presentados en la Tabla 10a.9.

Tabla 10a.9 - Resultados con $L=24$ m y dos durmientes por elemento, con $v=120$ km/h y una vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	80	200	400	800	1000
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,0	5,0	5,0	12,0	7,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,4	-0,4	-0,4	-5,6	-0,25
Momento Flector [10^5] N.m	1,5	1,5	1,5	2,6	2,0
Fuerza de Corte [10^4] N	4,6	4,6	4,6	6,4	5,8

La Figura 10a.18 observada a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 42 metros de longitud, con dos durmientes, una velocidad de circulación de 120 m/h y una vía en muy buen estado, en donde la parte (a) muestra los valores en los nodos de la vía para todos los Δt que

comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .

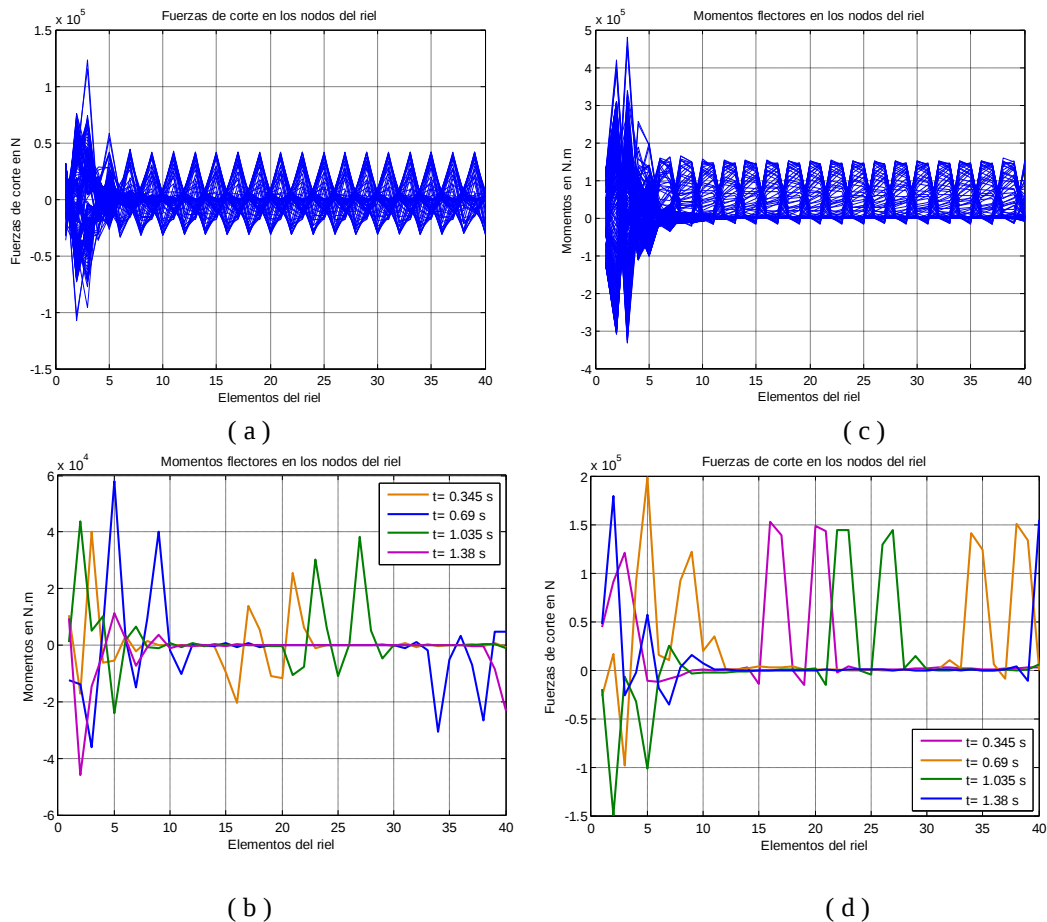


Figura 10a.18 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=24$ y dos durmientes por elemento, con $V=120$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

La Figura 10a.19 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 24 m, dos durmientes y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo

de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d)

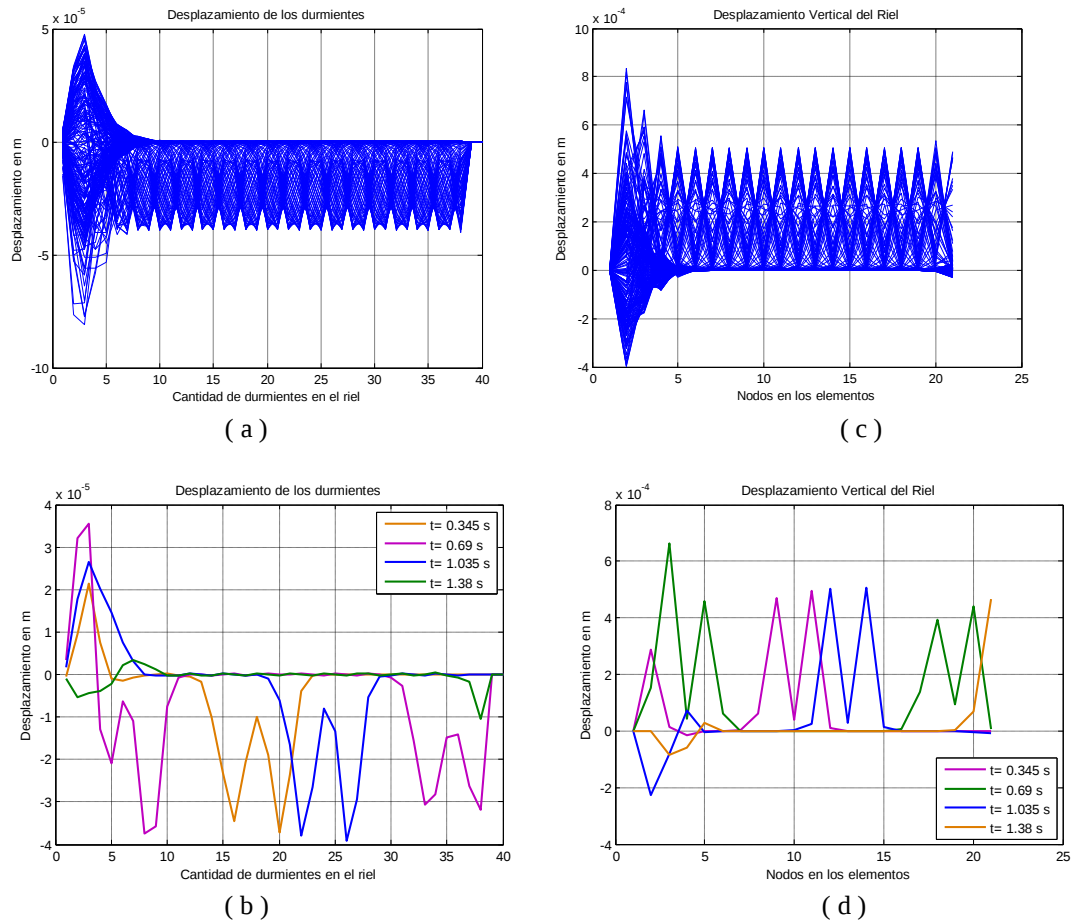


Figura 10.19 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 24$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Estudio de un riel de 36 metros

A continuación se presentan las tablas de resultados correspondientes a un riel de 36 metros de largo, con dos durmientes por elemento, variando el número de pasos de

tiempo y la velocidad de circulación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría.

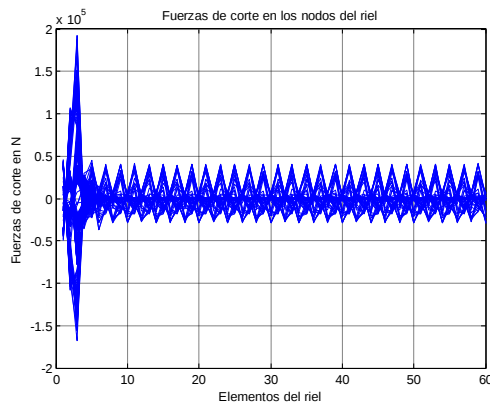
CASO I

El primer caso planteado consiste en un riel de 36 metros que viaja a una velocidad de 80 km/h, cuyos resultados son la Tabla 10a.10.

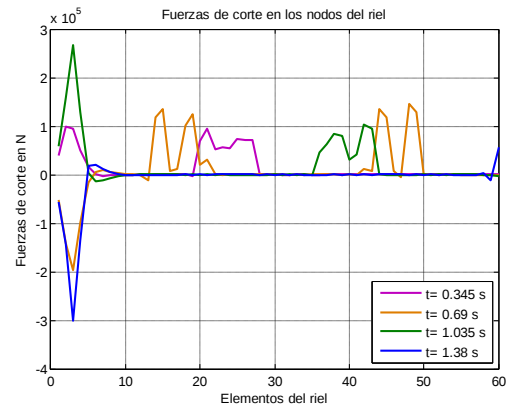
Tabla 10a.10 - Resultados de un riel de longitud $L=36$ m, dos durmientes por elemento, a una velocidad de $v=80$ km/h, vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	200	300	800	1000	1200
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,00	5,00	5,0	5,50	5,80
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,18	-0,18	-0,18	-1,20	-1,50
Momento Flector [10^5] N.m	1,60	1,60	1,60	1,80	1,80
Fuerza de Corte [10^4] N	4,00	4,00	4,00	4,4	4,4

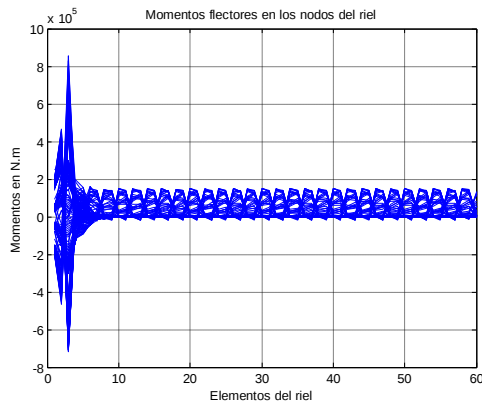
La figura correspondiente la fuerza de corte y momento flector para una vía férrea es la 10a.20, en donde la parte (a) muestra los valores en los nodos de la vía para la fuerza de corte en todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



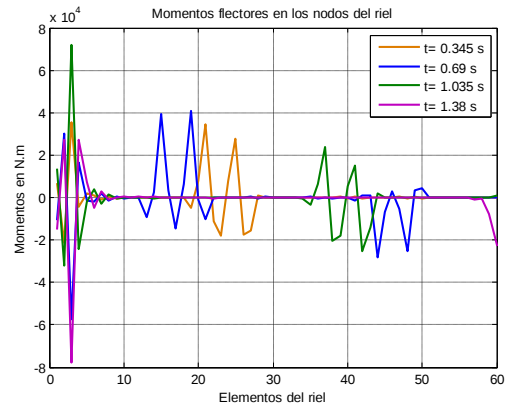
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.20 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=36$, dos durmientes por elemento, a una $V=80$ km/h, vía en muy buen estado

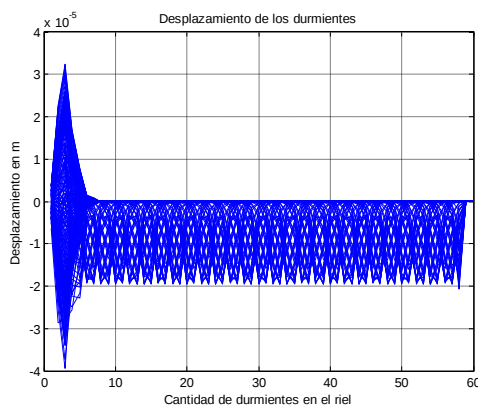
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

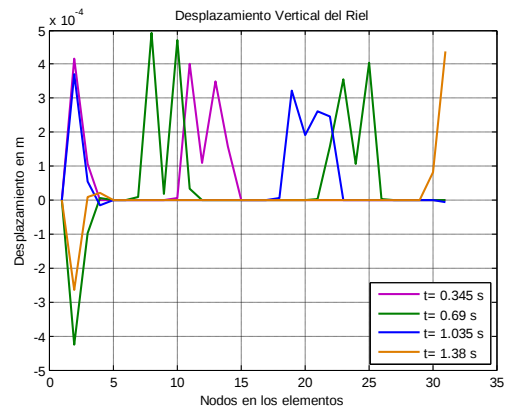
(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

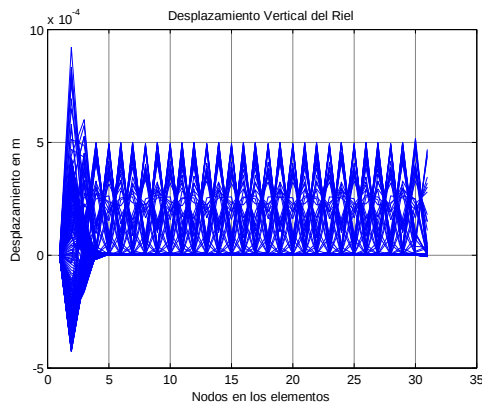
La Figura 10a.21 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 36 m, dos durmientes y a una velocidad de 80 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



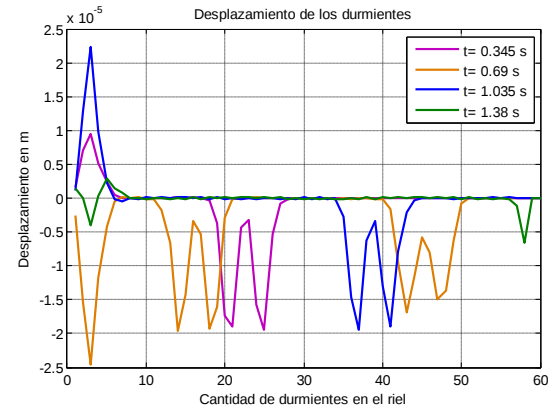
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.21 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L=36$, dos durmientes por elemento, a una $V=80$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

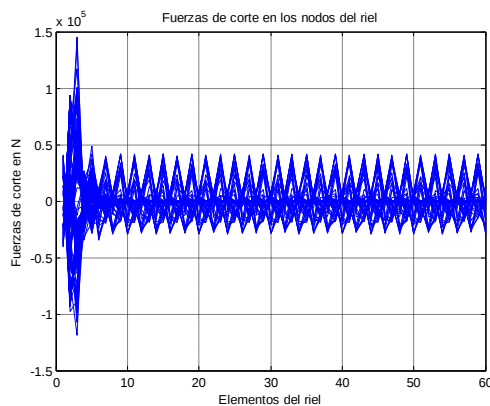
CASO II

El caso II plantea la misma longitud de la vía férrea con la cual se ha venido trabajando, pero para una velocidad de 120 km/h. La Tabla 10a.11 muestra los valores máximos de los resultados obtenidos

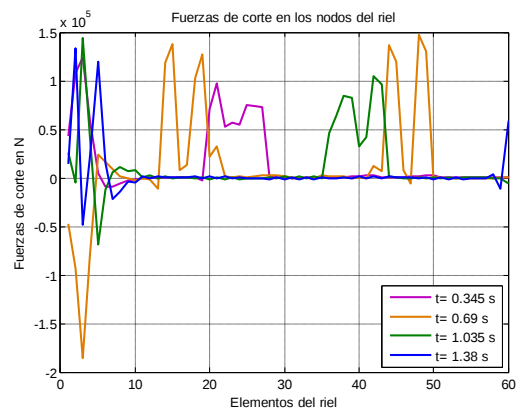
Tabla 10a.11 - Resultados con $L=36$ m y dos durmientes por elemento, con $v=120$ km/h, vía en muy buen estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	100	200	500	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	5,0	5,0	5,0	5,2	8,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-3,0	-3,0	-3,0	-10,0	-2,2
Momento Flector [10^5] N.m	1,6	1,6	1,6	1,5	2,4
Fuerza de Corte [10^4] N	4,0	4,0	4,0	4,4	6,0

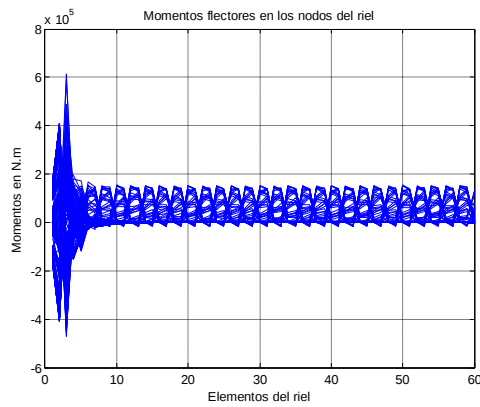
La Figura 10a.22 representa los resultados obtenidos para el caso de estudio dos observando que para la parte (a) se muestra la fuerza de corte para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar mejor el comportamiento, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y finalmente se muestra la gráfica para cuatro Δt en la parte (d).



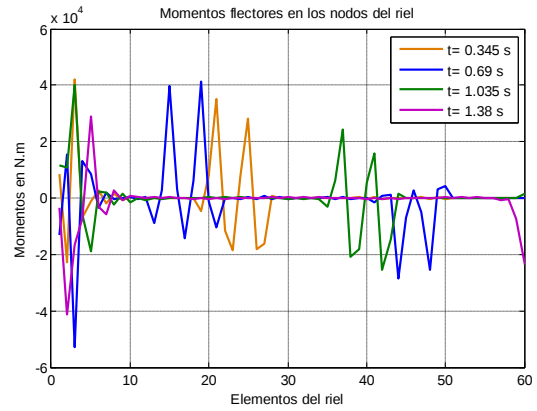
(a)



(b)



(c)



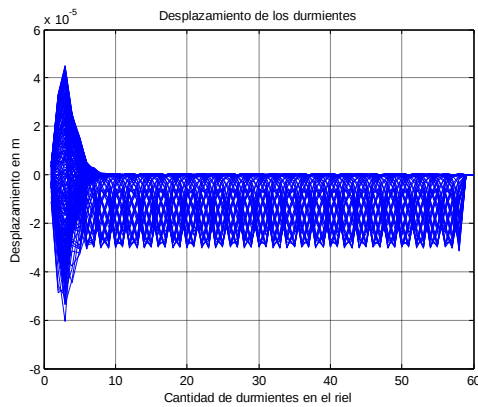
(d)

Figura 10a.22 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=36$ y dos durmientes por elemento, con $V=120$ km/h, vía en muy buen estado

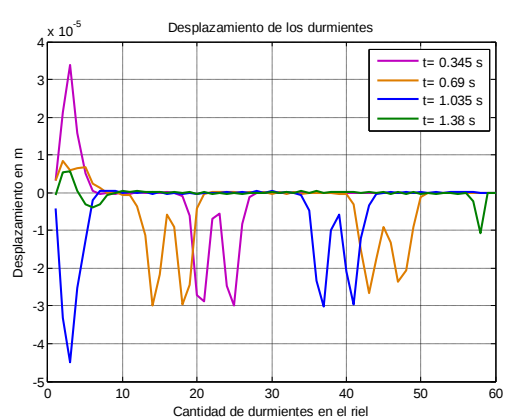
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

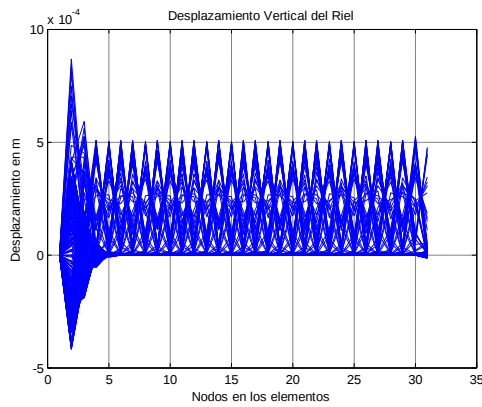
La Figura 10a.23 presenta cuatro gráficas que representan los comportamientos de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en muy buenas condiciones de longitud 36 m, dos durmientes y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



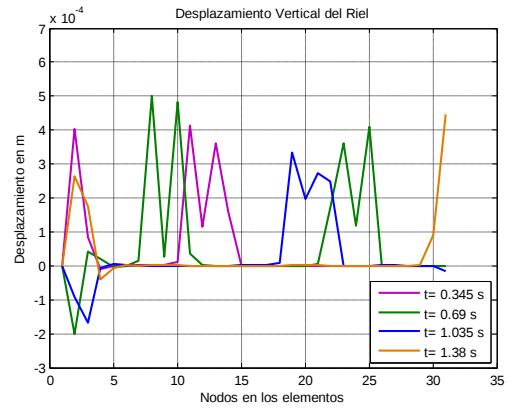
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10a.23 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h, vía en muy buen estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Las figuras presentadas en el apéndice sirven para complementar los resultados presentados en el capítulo 3, con la finalidad de comprender los alcances que puede tener el programa computacional realizado, para el análisis del comportamiento de la vía férrea.

APÉNDICE 11

Corridas realizadas para la configuración de un durmiente por elemento

Los resultados obtenidos son para un durmiente por elemento, en una vía en malas condiciones. Se analizaron dos longitudes para dos casos, el primer caso es para una velocidad de 80 km/h, mientras que el segundo caso es una velocidad de 120 km/h.

Una vía en mal estado

Primero se analizara una vía que se encuentra en mal estado por la cual circula un tren a diferentes velocidades, como se muestra a continuación.

Estudio de un riel de 12 metros

Los resultados para un riel de longitud de 12 metros de largo, con un durmiente por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación, son los que se presenta a continuación, estos valores son los puntos máximos para cada categoría.

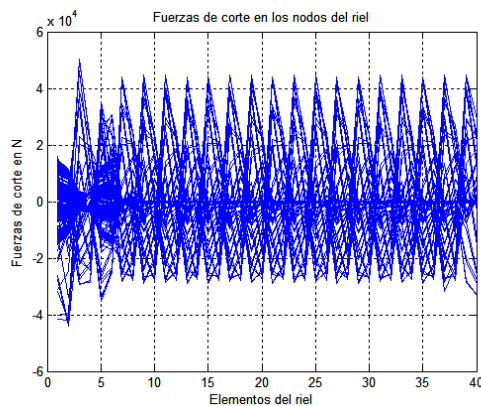
CASO I

El caso I planteo el estudio de la vía férrea por la cual circula un tren a una velocidad de 80 km/h, donde los valores correspondientes se encuentran en la Tabla 11a.1 que se muestra a continuación:

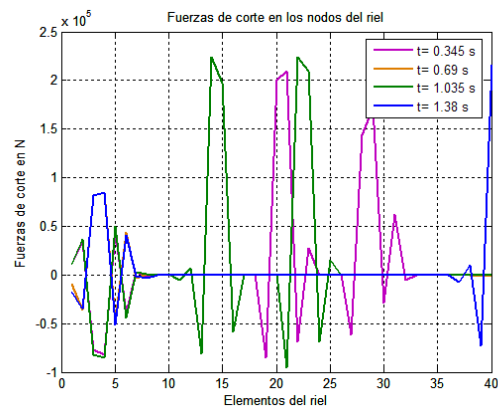
Tabla 11a.1 - Resultados con riel de longitud $L=12$ m, un durmiente, una velocidad de $v=80$ km/h y una vía en mal estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	100	200	400	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	3,20	3,20	3,20	4,20	4,20
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,13	-0,13	-0,13	-4,00	-5,50
Momento Flector [10^5] N.m	2,30	2,30	2,30	3,00	3,20
Fuerza de Corte [10^4] N	4,20	4,20	4,20	5,00	4,80

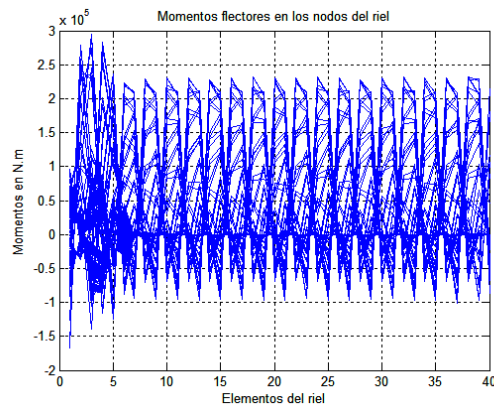
La Figura 11a.1 que se observa a continuación representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 12 metros de longitud, con un durmiente, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en mal estado, en donde la parte (a) muestra la fuerza de corte en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar mejor el comportamiento de la fuerza de corte, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



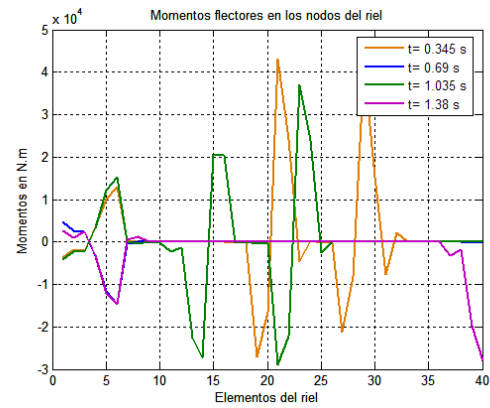
(a)



(b)



(c)



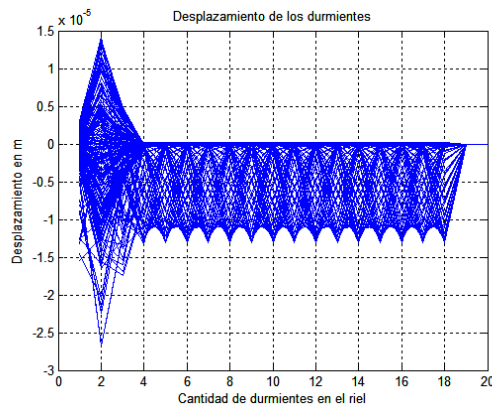
(d)

Figura 11a.1 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 12$ y un durmiente por elemento, con $V= 80$ km/h y vía en mal estado

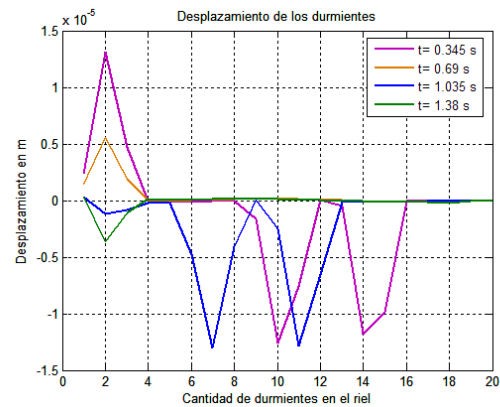
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

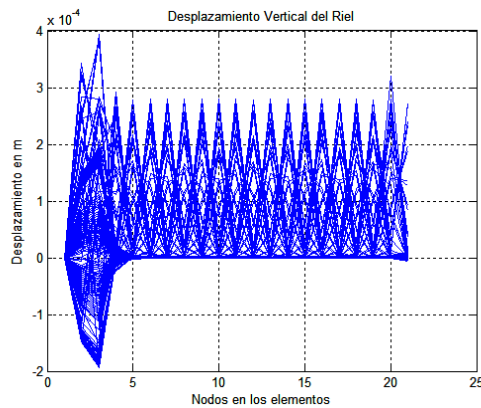
La figura que representa el desplazamiento de los durmientes y del riel presenta cuatro gráficas para una vía férrea en malas condiciones de longitud 12 m, un durmiente y a una velocidad de 80 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



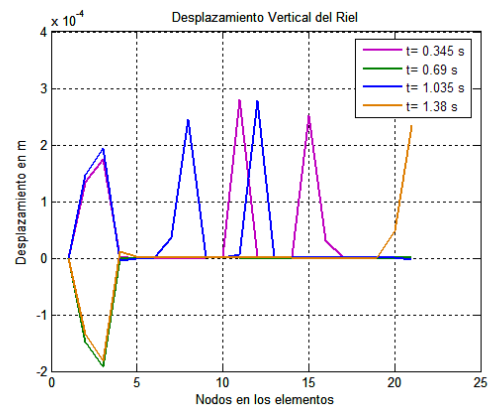
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 11a.2 – Desplazamiento de los durmientes y del riel con una longitud $L=12$ y velocidad $v=80$ km/h y vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$

(c) Desplazamiento vertical del riel

(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

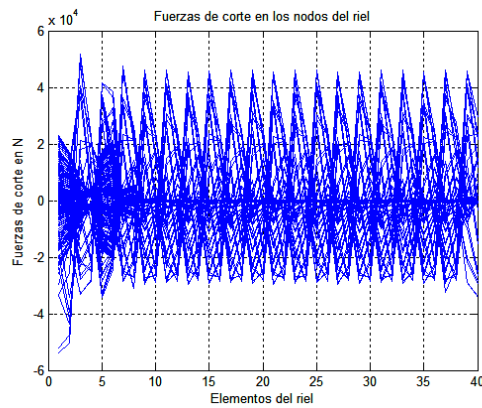
CASO II

El segundo caso planteado es para una vía férrea por la cual circula un tren con una velocidad de 120 km/h, obteniendo los valores de la Tabla 11a.2.

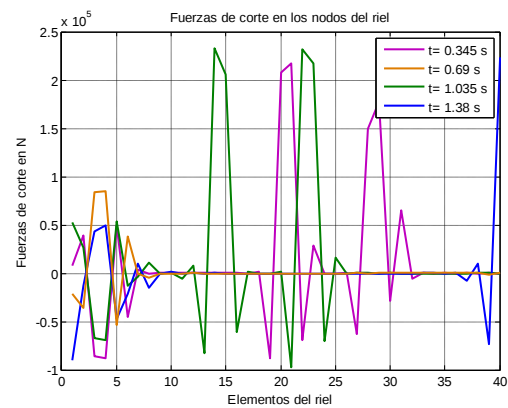
Tabla 11a.2 - Resultados para un riel de longitud $L=12$ m, un durmiente, una velocidad $v=120$ km/h y vía en mal estado

Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	50	200	300	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	3,2	3,2	3,2	6,0	4,0
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-2,0	-2,0	-2,0	-10,0	-0,9
Momento Flector [10^5] N.m	2,4	2,4	2,4	3,0	3,0
Fuerza de Corte [10^4] N	4,4	4,4	4,4	4,0	5,2

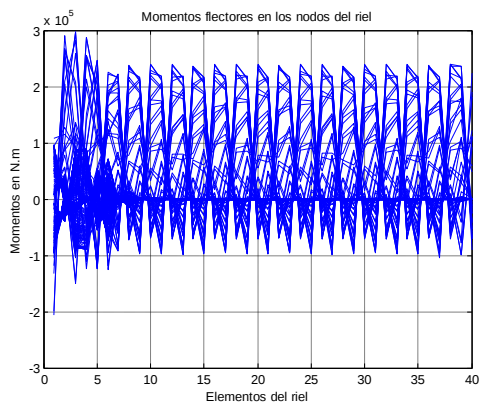
Las fuerzas de corte y los momento flector para el caso II que esta siendo objeto de estudio se puede observar en la Figura 11a.3 para una vía férrea de 12 metros de longitud, con un durmiente, una velocidad de circulación de 120 km/h y una vía en mal estado, en donde la parte (a) muestra los valores de las fuerzas de corte en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar mejor el comportamiento de las fuerzas de corte sobre la vía férrea, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



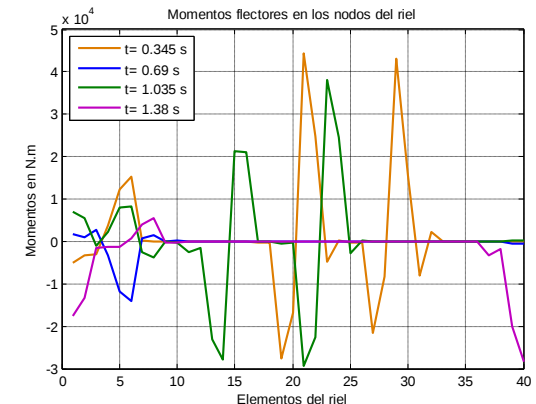
(a)



(b)



(c)



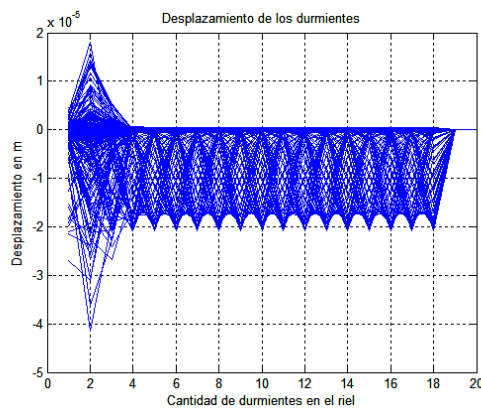
(d)

Figura 11a.3 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 12$ y un durmiente por elemento, con $V= 120$ km/h

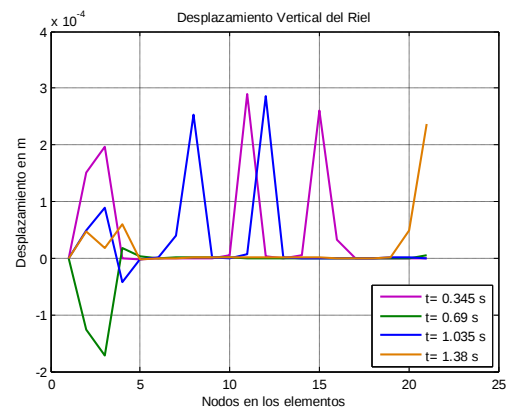
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel
(c) Momento flector en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$
(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

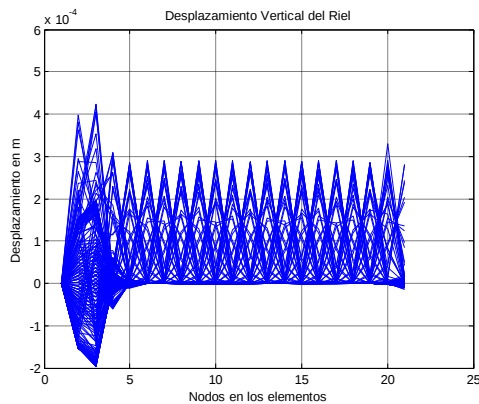
La Figura 11a.4 son las gráficas correspondientes a los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en malas condiciones de longitud 12 m, un durmiente y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, la parte (b) representada cuatro Δt de estudio, la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



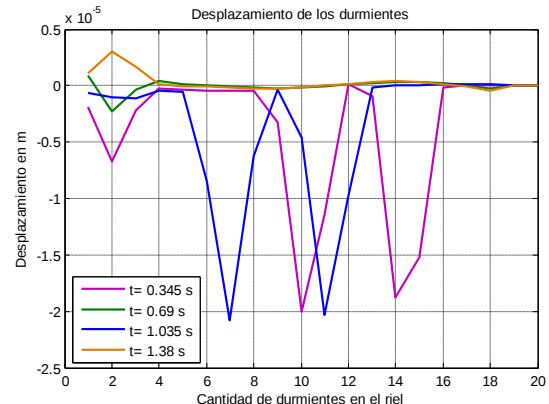
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 11a.4 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L = 12$ y un durmiente por elemento, con $V = 120$ km/h, para una vía en mal estado

(a) Desplazamiento de los durmientes
(c) Desplazamiento vertical del riel

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

Estudio para una vía de 36 metros

Las tablas de resultados presentadas a continuación corresponden a un riel de 36 metros de largo, con un durmiente por elemento, variando el número de pasos de tiempo y la velocidad de circulación. Los valores registrados son los puntos máximos para cada categoría.

CASO I

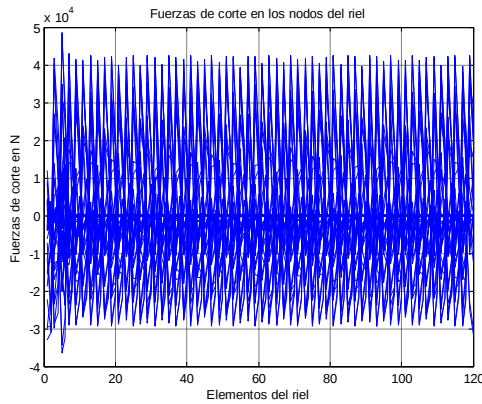
El primer caso de estudio es para la velocidad de circulación de 80 km/h, el cual genera la Tabla 11a.3 en la cual se registran los valores de desplazamiento del riel, desplazamiento de los durmientes, momento flector y fuerza de corte.

Tabla 11a.3 - Resultados para un riel de longitud $L=36$ m, un durmientes por elemento, velocidad de $v=80$ km/h y una vía en mal estado

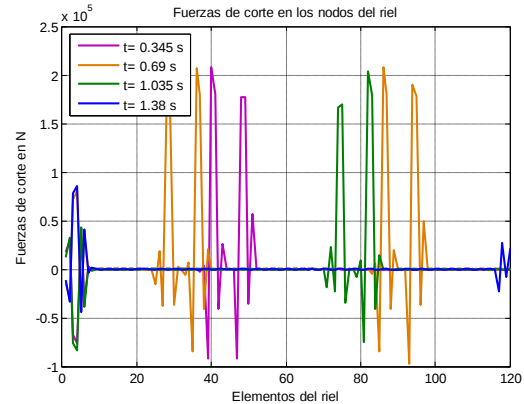
Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	200	300	800	1000	1200
Desplazamiento vertical del riel [10^{-4}] m	2,60	2,60	2,60	3,20	3,00
Desplazamiento de los durmientes [10^{-4}] m	-0,08	-0,08	-0,08	-3,8	-4,6
Momento Flector [10^5] N.m	2,00	2,00	2,00	2,50	2,30
Fuerza de Corte [10^4] N	4,20	4,20	4,20	5,00	4,40

La Figura 11a.5 representa los gráficos de fuerza de corte y momento flector para una vía férrea de 36 metros de longitud, con un durmiente, una velocidad de circulación de 80 m/h y una vía en mal estado, en donde los valores de las fuerzas de corte son los observados en la parte (a), para cuatro intervalos de tiempo se pueden observar en la parte (b) para observar mejor el comportamiento, la parte (c) ilustra el

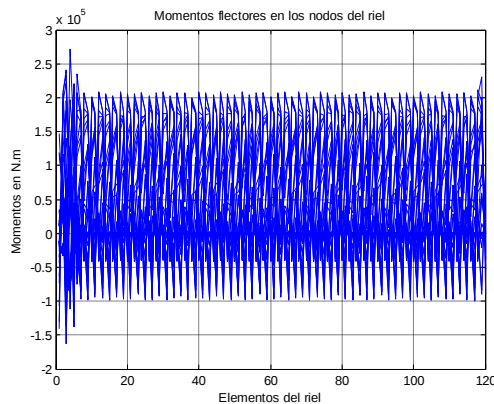
comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivos Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt correspondientes con el momento flector.



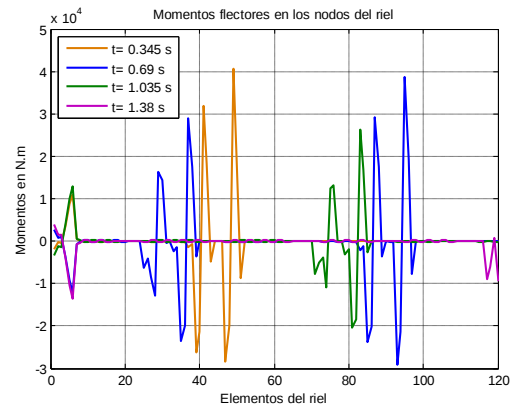
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 11a.5 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h

(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

La figura representativa de los desplazamiento de los durmientes y del riel es la 11a.6 donde se observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se

puede observar en la parte (d), para una vía férrea en malas condiciones de longitud 36 m, un durmiente y a una velocidad de 80 km/h.

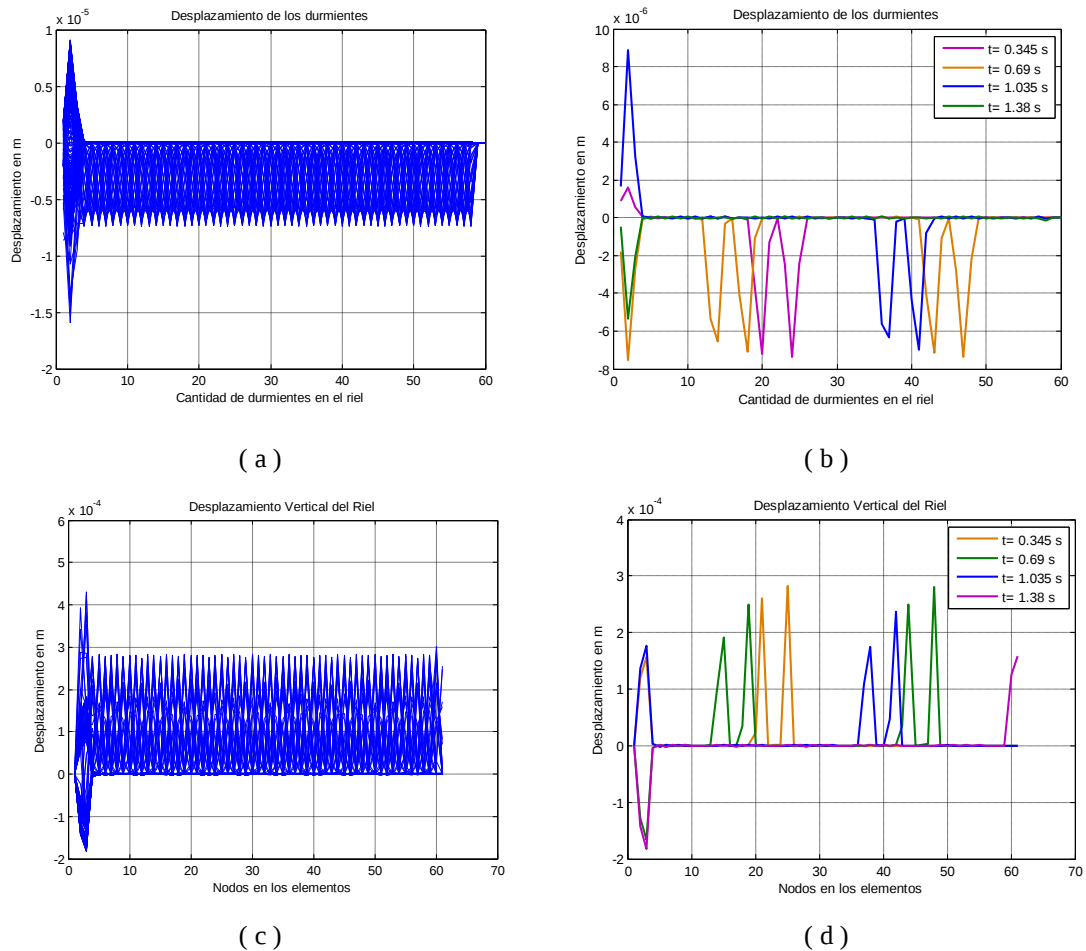


Figura 11a.6 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 80$ km/h

(a) Desplazamiento de los durmientes
(c) Desplazamiento vertical del riel

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

CASO II

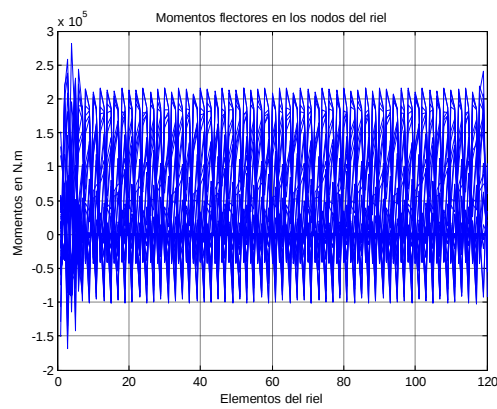
El caso II planteado es para una vía férrea por la cual circula un vehículo ferroviario a una velocidad de 120 km/h, los valores máximos obtenidos son los que se pueden observar en la Tabla 11a.4.

Tabla 11a.4 - Resultados con L=36 m, un durmiente por elemento, velocidad de v=120 km/h y una vía en mal estado

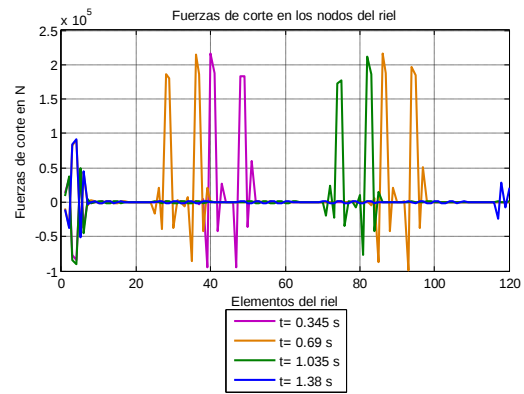
Paso de tiempo [Nt]					
Valores Máximos	100	200	500	600	800
Desplazamiento vertical del riel [10 ⁻⁴] m	3,0	3,0	3,0	2,7	2,8
Desplazamiento de los durmientes [10 ⁻⁴] m	-1,2	-1,2	-1,2	-3,5	-3,4
Momento Flector [10 ⁵] N.m	2,8	2,8	2,8	2,4	2,4
Fuerza de Corte [10 ⁴] N	5,0	5,0	5,0	4,2	4,2

¶

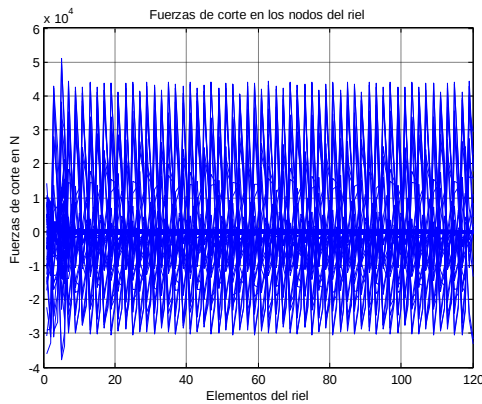
Las figuras que se muestran a continuación son para las fuerzas de corte y los momentos flectores para una vía férrea de 36 metros de longitud, con un durmiente, una velocidad de circulación de 120 m/h y una vía en mal estado, en donde la parte (a) muestra los valores de la fuerza de corte en los nodos de la vía para todos los Δt que comprenden al tiempo de estudio, la parte (b) representa cuatro Δt para poder observar el comportamiento mejor, la parte (c) ilustra el comportamiento del momento flector para el tiempo de estudio en sus respectivas Δt y la parte (d) muestra la gráfica para cuatro Δt .



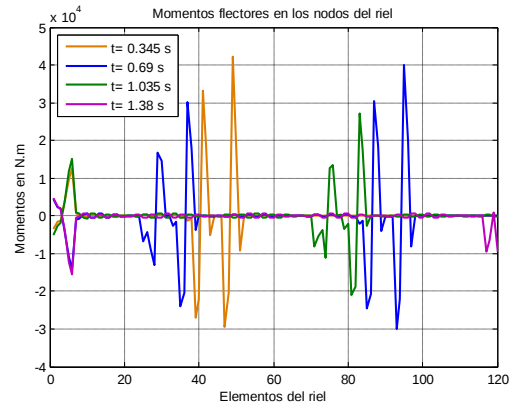
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 11a.7 - Fuerza de corte y Momento flector con un riel $L=36$ y dos durmientes por elemento, con $V=120$ km/h

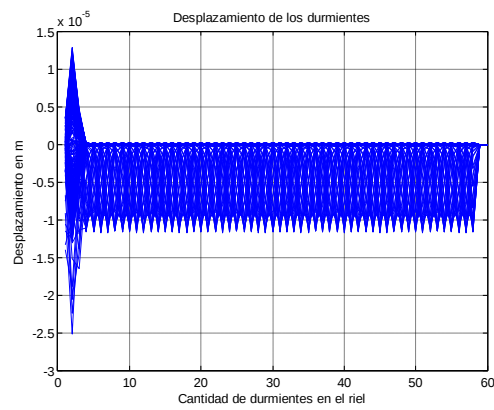
(a) Fuerza de corte en los nodos del riel

(b) Fuerza de corte en los nodos del riel para $4\Delta t$

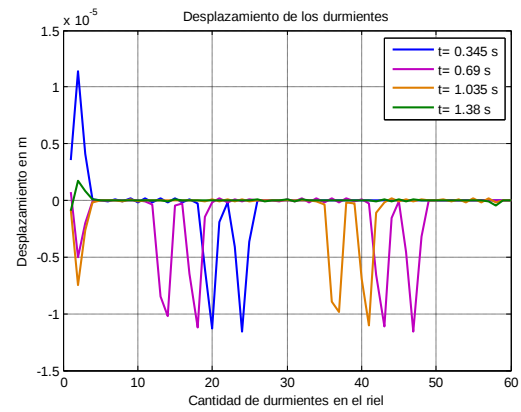
(c) Momento flector en los nodos del riel

(d) Momento flector en los nodos del riel para $4\Delta t$

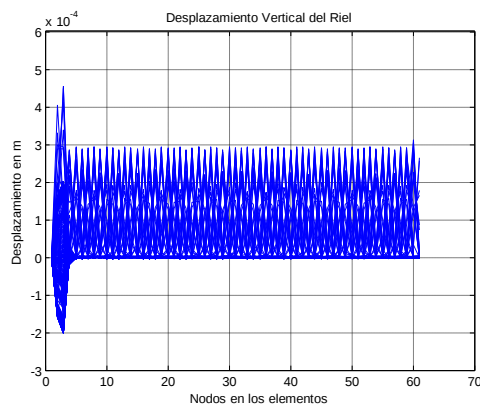
La Figura 11a.8 representa el comportamiento de los desplazamientos de los durmientes y del riel para una vía férrea en malas condiciones de longitud 36 m, un durmiente y a una velocidad de 120 km/h, se puede observar en la parte (a) el desplazamiento de los durmientes para el intervalo de tiempo de estudio, siendo representada en cuatro Δt en la parte (b), mientras que la parte (c) representa el desplazamiento del riel, y para cuatro Δt se puede observar en la parte (d).



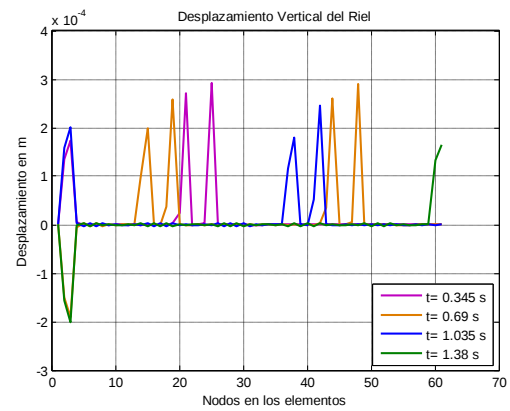
(a)



(b)



(c)



(d)

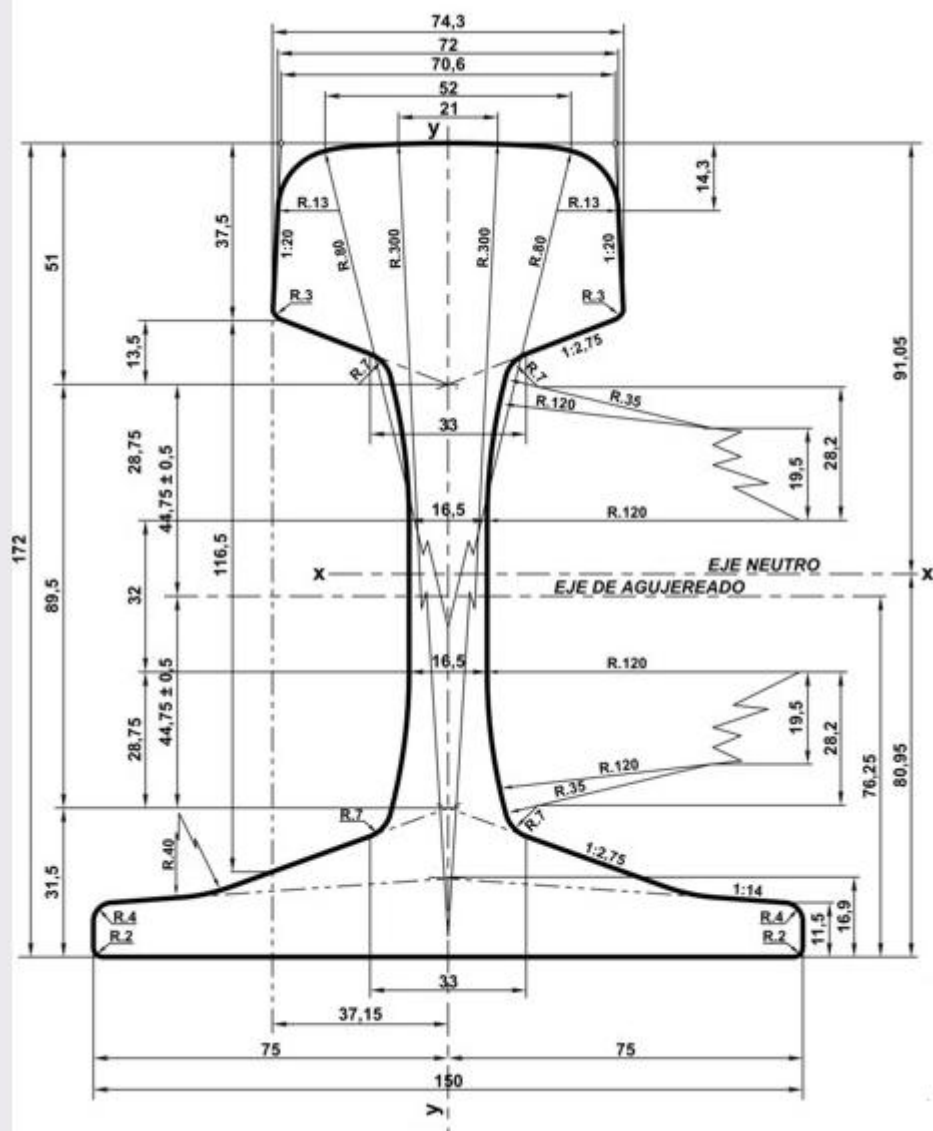
Figura 11a.8 - Desplazamiento de los durmientes y del riel con $L= 36$ y dos durmientes por elemento, con $V= 120$ km/h

(a) Desplazamiento de los durmientes
(c) Desplazamiento vertical del riel

(b) Desplazamiento de los durmientes para $4\Delta t$
(d) Desplazamiento vertical del riel para $4\Delta t$

ANEXOS

[Perfil del riel UIC 60]



[ANEXO 2]

[Características del riel UIC 60]

Características del Riel

Peso / Metro Lineal.....	$G = 60,34 \text{ kg/m}$
Sección.....	$F = 76,86 \text{ cm}^2$
Momento de Inercia (eje x-x).....	$J_x = 3055 \text{ cm}^4$
Momento de Inercia (eje y-y).....	$J_y = 512,9 \text{ cm}^4$
Modulo Resistente (Sup. Patin).....	$W_{SP} = 377,4 \text{ cm}^3$
Modulo Resistente (Sup. Hongo).....	$W_{SH} = 335,5 \text{ cm}^3$
Modulo Resistente (eje y-y).....	$W_y = 68,4 \text{ cm}^3$
Esbeltez.....	1,15
Equilibrio Térmico.....	$a/b = 1,68$
Sección Cabeza.....	$30,81 \text{ cm}^2$
Sección Patín.....	$28,56 \text{ cm}^2$