

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA. ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA. MECÁNICA DE SÓLIDOS. PROFESOR JORGE DAVID CRUZ MORENO

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE HOLZER-VAN DEN DUNGEN EN EL CÁLCULO DE DEFLEXIONES ESTÁTICAS DE VIGAS ELÁSTICAS DE EJE RECTO.

Jorge David Cruz M.

Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica. Departamento de Diseño. e-mail: jorge.cruz@ucv.ve

RESUMEN

El presente trabajo muestra la utilización del método de Holzer - Van den Dungen en su forma matricial en el estudio de las deflexiones estáticas de vigas de eje recto. Uno de los objetivos es ver que debemos sustituir métodos que se han enseñando por muchos años en pregrado, por otros que usen los recursos que hoy disponemos, en este caso, un método matricial unido con herramientas computacionales actuales. Se presentan aquí, el desarrollo del método, las matrices de transferencia para diferentes tipos de cargas, su utilización en la solución de vigas isostáticas e hiperestáticas, y la construcción de los diagramas de deflexión, de fuerza cortante y de momento flector.

Palabras Claves: Método de Holzer - Van den Dungen. Matriz de transferencia, Deflexión, Condiciones de Contorno, Diagrama de Cuerpo Libre.

ABSTRACT

This paper shows the use of the Holzer- Van den Dungen method in matrix mode to calculate the static lateral deflection of beams. The main aim is to change the traditional methods that have been used in undergraduate courses over the years, for a new one that uses computational aids together with Lineal Algebra. This paper presents the development of this method, together with the transfer matrices for usual loads, and the solutions of statically determinate and indeterminate beams. It also includes the deflexion, shear force and bending moment diagrams.

Keywords: Holzer- Van den Dungen Method, Transfer Matrices, Deflexion, Body Free Diagram, Statically and Indeterminate Beam.

INTRODUCCIÓN.

A pesar del avance de la tecnología en herramientas de computación, se observa que en la Mecánica de Sólidos los autores de los textos que usualmente se recomiendan, Gere & Timoshenko (1984), Bickford (1995), Hibbeler (1998), Lardner & Archer (1996), Ortiz (1990) y Mott (1996), mantienen métodos tradicionales en los diferentes temas que se estudian a nivel de pregrado. Un caso específico de esto es el estudio de las deflexiones en las vigas, en el cual aún explican los teoremas de Möhr o de las áreas del diagrama de momento flector. Este método, aunque ingenioso, hoy es solo útil como un ejercicio didáctico en sus diferentes formas de aplicación. Es más, la popularidad que tuvo posiblemente se debió a que se podían resolver los casos de vigas de sección variable al obviar el tedioso trabajo de la aplicación del método de la Doble Integración en este tipo de vigas y de los artificios necesarios si se resuelven por superposición.

Debido al desarrollo tanto de hardware como de software, el uso del cálculo electrónico se ha ido extendiendo de una manera vertiginosa, y a este avance tienen que unirse las metodologías que se enseñan, bien sea adaptándolas a las herramientas que ahora disponemos o sustituyéndolas por otros métodos que puedan usar estos recursos.

El desarrollo del conocimiento ha obligado, no solo al aumento del mismo, sino también a estudiar con mayor profundidad conceptos que existían y que son fundamentales para la aplicación de los nuevos. Ejemplo de ello, es el aumento de los contenidos de Álgebra Lineal que se les enseñan ahora a los estudiantes, y en particular a los de ingeniería.

Basado en esto, consideramos que debemos aprovechar estos conocimientos que nuestros estudiantes tienen del Álgebra Lineal y mostrarles el método Holzer - Van Den Dungen en su forma matricial para el estudio de vigas, posiblemente no explorado mucho por la dificultad de la solución de sistemas grandes de

ecuaciones en el momento en que inicialmente fue desarrollado. De este método, para el análisis de deflexiones estáticas, encontramos una muy breve descripción en Dimarogonas (1996).

EL MÉTODO DE HOLZER-VAN DEN DUNGEN EN EL CÁLCULO DE DEFLEXIONES ESTÁTICAS DE VIGAS: MATRICES DE TRANSFERENCIA.

De acuerdo a Dimarogonas (1996), éste método conocido en su forma matricial como *el método de la matriz de transferencia* fue introducido entre 1907 y 1921 por Holzer, Güembel y Tolle para el cálculo de las frecuencias naturales torsionales de ejes y en 1928 Van den Dungen lo amplió para vibraciones laterales de barras. Posteriormente Thomson lo desarrolló en su forma matricial. Este método toma en cuenta el hecho que en una gran cantidad de problemas de ingeniería, en especial aquellos modelados por líneas, el comportamiento de cada punto está influenciado solamente por el comportamiento de los puntos vecinos. Ejemplos típicos son las vibraciones torsionales, longitudinales y transversales de vigas y ejes. En estos casos las matrices de masa **M**, de amortiguación **C** y de rigidez **K** que describen el sistema no están completamente llenas, sino que tienen una estrecha banda en el entorno de la diagonal. Este procedimiento permite el cálculo de las respuestas estáticas y dinámicas sin necesidad de obtener las ecuaciones que rigen el problema. Más aún, el método sustituye el sistema por un ensamblaje de elementos estándares cuyas geometrías y propiedades son lo suficientemente simples para tenerlas tabuladas. A continuación presentamos su aplicación en el estudio de las deflexiones estáticas de vigas.

LIMITACIONES

Las limitaciones son las habituales en el caso del cálculo de vigas:

1. Las secciones transversales son planas y permanecen planas después de la deformación.
2. El material es lineal y elástico, y se considera que mantiene estas propiedades para las cargas aplicadas.
3. El eje vertical de la sección transversal de la viga es un eje principal de inercia y las cargas aplicadas están contenidas en el plano vertical que contiene a dicho eje..
4. Las deformaciones son pequeñas.
5. Se desprecian las deformaciones por corte.
6. Los elementos son inicialmente rectos y libres de esfuerzos y de imperfecciones.

DEFLEXIONES ESTÁTICAS DE VIGAS

Supongamos una viga simplemente apoyada formada por $n-1$ elementos diferentes pero cada uno de rigidez constante. Véase la figura N° 1. Así la viga tiene $n-1$ elementos de sección transversal constante y n nodos, puntos o planos que definen el comienzo y el final de cada elemento.

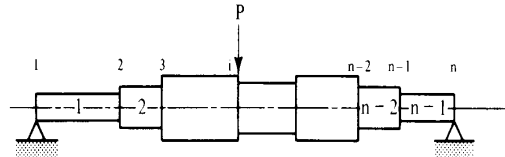


Figura N° 1. Viga simplemente apoyada de rigidez variable.

Para describir completamente la situación de cada nodo, necesitamos conocer cuatro cantidades: la deflexión y , la pendiente θ , el momento M , y la fuerza cortante V . La figura N° 2 muestra el elemento i de la viga entre los nodos i y $i+1$, con la convención de signos habitual. Estas cuatro cantidades pueden ordenarse en forma del vector $z_i = [y \ \theta \ M \ V]$ que describe el estado del sistema en el nodo i y se denomina *vector de estado*.

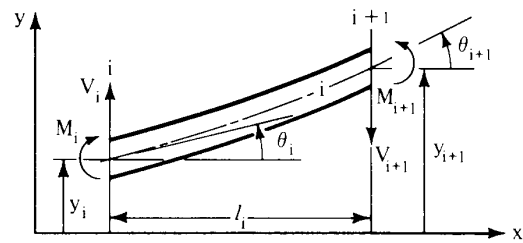


Figura N°2. Elemento prismático de viga conectado a dos nodos.

Supongamos que en el nodo 1 el vector de estado es:

$$z_1 = [y_1 \ \theta_1 \ M_1 \ V_1] \quad (1)$$

de valores desconocidos. Si no hay fuerzas que actúen entre los nodos 1 y 2, por la teoría simple de vigas, la deflexión, la pendiente, el momento flector y la fuerza cortante en el nodo 2 serán:

$$y_2 = y_1 + l\theta_1 + \frac{l_1^2}{2EI_1}M_1 + \frac{l_1^3}{6EI_1}V_1$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{l_1}{EI_1}M_1 + \frac{l_1^2}{2EI_1}V_1 \quad (2)$$

$$M_2 = M_1 + l_1V_1$$

$$V_2 = V_1$$

Las dos últimas ecuaciones expresan el equilibrio de fuerzas y momentos, y las dos primeras, la deflexión y la rotación de la curva elástica debido a estos momentos y fuerzas. (Pueden obtenerse mediante el método de la doble integración).

Este conjunto de ecuaciones puede escribirse en forma matricial así:

$$z_2 = L_1 z_1 \quad (3)$$

donde:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \quad z_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad z_2 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_2 \quad (4)$$

donde el subíndice 1 indica las propiedades l , E , I del elemento 1. La columna 5 y la fila 5 se han agregado por conveniencia computacional.

La ecuación indica que el vector de estado del nodo 2 es el vector de estado del nodo 1 multiplicado por la matriz cuadrada L_1 de 5×5 , la cual depende solo de las propiedades del elemento, que son generalmente conocidas. Esta matriz L_1 se denomina **matriz de transferencia**. Por cada elemento de la viga existe una matriz de transferencia.

Repitiendo el proceso para los elementos 2, 3, ..., utilizando la relación previa, obtenemos:

$$z_2 = L_1 z_1 \quad (5)$$

$$z_3 = L_2 z_2 = L_2 L_1 z_1 \quad (6)$$

$$z_4 = L_3 z_3 = L_3 L_2 L_1 z_1 \quad (7)$$

Hasta ahora, el vector de estado es el mismo a la izquierda y a la derecha del nodo. Sin embargo, esto cambia, si el nodo tiene una carga concentrada F . La figura N° 3 muestra esta situación para el caso de un elemento de viga pequeño alrededor de un nodo.

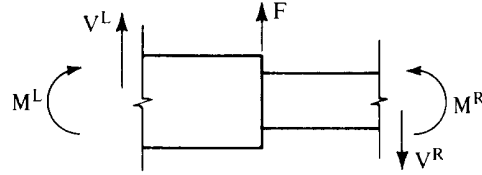


Figura N° 3. Carga concentrada en un nodo.

En este caso, la deflexión, la pendiente y el momento flector permanecen invariables antes y después del nodo. Pero para el equilibrio de fuerzas verticales se cumple

$$V^R = V^L + F \quad (8)$$

donde los superíndices L y R designan la situación a la izquierda y a la derecha del nodo.

Podemos por lo tanto escribir:

$$y^R = y^L$$

$$\theta^R = \theta^L$$

$$M^R = M^L$$

$$V^R = V^L + F \quad (9)$$

En forma matricial:

$$z_i^R = P_i z_i^L \quad (10)$$

donde

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (11)$$

Denominándose P_i **matriz de carga puntual**. Por lo tanto, la transferencia de la izquierda a la derecha a través de un nodo cargado se consigue multiplicando por la matriz de carga puntual.

En este caso la ecuación se transforma en

$$\mathbf{z}_n^R = \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_i \mathbf{P}_i \mathbf{L}_{i-1} \dots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_1^R \quad (12)$$

donde se ha introducido el superíndice R, para indicar que en el análisis de cualquier viga, siempre se considera el vector de estado del lado derecho de cualquier sección transversal. (Ahora se observa la necesidad de agregar la quinta columna a la matriz de transferencia del elemento sin carga y la quinta fila para hacer mantener las matrices de transferencia cuadradas).

Este producto puede tomar en cuenta cualquier cantidad de cargas puntuales, mediante la inclusión en la multiplicación de todas las matrices puntuales. Digamos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_n \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_i \mathbf{P}_i \mathbf{L}_{i-1} \dots \mathbf{P}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_1 \quad (13)$$

sea una matriz cuadrada de 5×5 obtenida por la multiplicación de la cadena de matrices de 5×5

Por lo tanto la ecuación toma la forma

$$\mathbf{z}_n^R = \mathbf{A} \mathbf{z}_1^R \quad (14)$$

Las primeras cuatro ecuaciones del sistema anterior toman la forma:

$$\begin{aligned} y_n &= a_{11}y_1 + a_{12}\theta_1 + a_{13}M_1 + a_{14}V_1 + b_{14}F \\ \theta_n &= a_{21}y_1 + a_{22}\theta_1 + a_{23}M_1 + a_{24}V_1 + b_{24}F \\ M_n &= a_{31}y_1 + a_{32}\theta_1 + a_{33}M_1 + a_{34}V_1 + b_{34}F \\ V_n &= a_{41}y_1 + a_{42}\theta_1 + a_{43}M_1 + a_{44}V_1 + b_{44}F \end{aligned} \quad (15)$$

que corresponden a cuatro ecuaciones con ocho variables de estado, que son las condiciones de los extremos $y_n, y_1, \theta_n, \theta_1, M_1, M_n, V_1$ y V_n . Sin embargo, en la práctica siempre cuatro de estas condiciones se conocen. En el caso de una viga simplemente apoyada sabemos que las deflexiones verticales en los extremos y los momentos en dichos extremos son nulos. Por lo tanto el sistema de ecuaciones anterior permite conocer las otras cuatro variables.

Esto significa que podemos calcular deflexiones estáticas de vigas con solo multiplicar cadenas de matrices de 5×5 y resolver el sistema de ecuaciones.

Para el caso de un elemento de viga solicitado con carga uniforme, como el mostrado en la figura N° 4, las ecuaciones de equilibrio y de deformación son:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + l\theta_1 + \frac{l^2}{2EI_1}M_1 + \frac{l^3}{6EI_1}V_1 + \frac{pl_1^4}{24EI} \\ \theta_2 &= \theta_1 + \frac{l_1}{EI_1}M_1 + \frac{l_1^2}{2EI_1}V_1 + \frac{pl_1^3}{6EI} \\ M_2 &= M_1 + l_1V_1 + \frac{pl_1^2}{2} \\ V_2 &= V_1 + pl_1 \end{aligned} \quad (16)$$

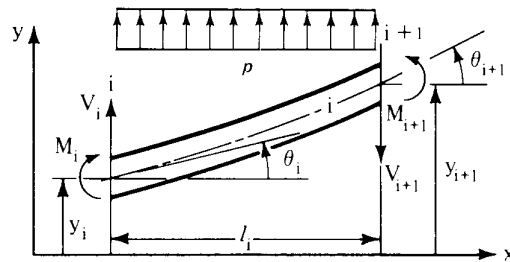


Figura N°4. Elemento prismático de viga con carga distribuida uniforme.

Siendo su forma matricial:

$$\mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & \frac{pl^4}{24EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{pl^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{pl^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & pl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

Las primeras dos ecuaciones obtenidas por doble integración de la ecuación diferencial de la curva elástica del elemento de viga con carga uniforme, y la tercera y la cuarta ecuaciones representan el equilibrio de dicho elemento de viga.

Para un elemento de viga con carga triangular creciente, como el mostrado en la figura N° 5, las ecuaciones de equilibrio y de deformación son:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + l_1\theta_1 + \frac{l_1^2}{2EI_1}M_1 + \frac{l_1^3}{6EI_1}V_1 + \frac{pl_1^4}{120EI} \\
 \theta_2 &= \theta_1 + \frac{l_1}{EI_1}M_1 + \frac{l_1^2}{2EI_1}V_1 + \frac{pl_1^3}{24EI} \\
 M_2 &= M_1 + l_1V_1 + \frac{pl_1^2}{6} \\
 V_2 &= V_1 + \frac{pl_1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

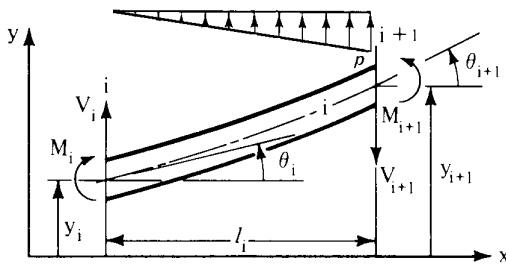


Figura N° 5. Elemento prismático de viga con carga triangular creciente.

Y expresadas en forma matricial:

$$\mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & \frac{pl^4}{120EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & \frac{pl^3}{24EI} \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{pl^2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{pl}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_2
 \tag{19}$$

En el caso de un momento flector externo, la matriz de transferencia es:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1
 \tag{20}$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_2$$

CÁLCULO DE DEFLEXIONES DE VIGAS MEDIANTE EL MÉTODO DE HOLZER.

Para la aplicación del método de Holzer debemos distinguir dos tipos de vigas, uno en el que exclusivamente en los extremos se encuentra la vinculación, y los otros que pertenecen al tipo de vigas continuas.

Para el primer caso la forma de resolución es la misma sea el sistema isostático o hiperestático. Esto se debe a que el sistema de ecuaciones a resolver es de la forma:

$$\mathbf{z}_n^R = \mathbf{A}\mathbf{z}_1^R
 \tag{21}$$

con:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_n \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j \mathbf{P}_j \mathbf{L}_{j-1} \dots \mathbf{P}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_1
 \tag{22}$$

sistema en el que las condiciones de los extremos están contenidos en los dos vectores. El sistema está formado solo por las cuatro primeras ecuaciones, que involucran las ocho condiciones de los extremos. Como se dijo antes, cualquiera que sea la vinculación, siempre se conocen cuatro de estas condiciones, por lo que siempre será posible resolver el sistema de ecuaciones para determinar las cuatro condiciones desconocidas (incógnitas). Por ejemplo, si la viga es apoyada simple, se sabe que $M_1 = M_2 = y_1 = y_2 = 0$, si la viga es empotrada-apoyada $y_1 = \theta_1 = M_2 = y_2 = 0$, y si es doblemente empotrada $y_1 = \theta_1 = \theta_2 = y_2 = 0$. En cada caso siempre se determinarán las cuatro restantes condiciones.

En donde existan apoyos en secciones intermedias, como la viga continua de la figura N° 6, sean problemas

isostáticos o hiperestáticos, se requiere que estas condiciones de contorno que imponen los apoyos, sean incorporadas entre las variables del sistema de ecuaciones a resolver.

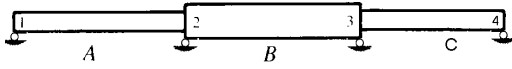


Figura N° 6. Viga Continua.

En forma general, podemos decir que los apoyos intermedios en los problemas convencionales siempre son rodillos. Por ello la incorporación de esta condición al método de Holzer es mediante una matriz de carga puntual, con el valor de la fuerza como una de las variables a ser determinada. A la vez, el rodillo introduce la condición de desplazamiento vertical nulo en dicha sección. El procedimiento es elaborar un diagrama de cuerpo libre (DCL) de la fracción de viga comprendida desde el extremo izquierdo y justo hasta después del rodillo, como el de la figura N° 7. Para esta fracción se establece el sistema de ecuaciones de la forma habitual

$$\mathbf{z}_n^R = \mathbf{A}\mathbf{z}_1^R \quad (23)$$

con

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_n \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j \mathbf{P}_j \mathbf{L}_{j-1} \dots \mathbf{P}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_1 \quad (24)$$

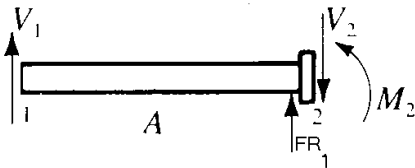


Figura N° 7. DCL desde el extremo izquierdo y la sección a la derecha del primer apoyo intermedio.

donde en este caso las matrices $\mathbf{P}_i \mathbf{L}_i$ representan todas las matrices de carga puntual, las matrices geométricas y/o las matrices de cargas distribuidas de los elementos que existan desde el inicio de la viga hasta la carga concentrada correspondiente a la reacción del rodillo representada por la matriz puntual \mathbf{P}_n . En este conjunto de cuatro ecuaciones existen nueve variables que corresponden a y , θ , M y V en ambos extremos del DCL elaborado y a la reacción FR . De estas variables conocemos el desplazamiento y del extremo derecho por ser el valor nulo impuesto por el rodillo, y siempre son incógnitas las otras variables de este extremo por la continuidad del sistema. Respecto a las variables del extremo izquierdo siempre se conocen dos, independiente de cuales sean sus condiciones de

frontera. En definitiva de este DCL tenemos cuatro ecuaciones y seis incógnitas.

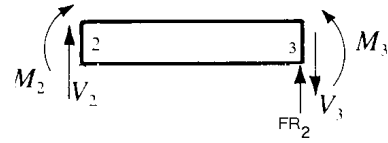


Figura N° 8. DCL entre la sección a la derecha de un apoyo intermedio y la sección a la derecha del siguiente apoyo.

Si encontramos otro apoyo a la derecha del anterior, que aún no está en el extremo final de la viga, tenemos la posibilidad de elaborar un nuevo DCL desde la sección a la derecha del primer apoyo intermedio y la sección a la derecha del segundo apoyo intermedio. (Ver figura N° 8). Construyendo el conjunto de ecuaciones que rige en este DCL tenemos nuevamente nueve variables representadas otra vez por y , θ , M y V de sus extremos y la nueva reacción. Para este caso conocemos los dos desplazamientos verticales nulos de los extremos y desconocemos el resto de las variables además de la nueva reacción. En otras palabras tenemos un conjunto de cuatro ecuaciones y siete incógnitas. Pero si unimos los dos conjuntos de ecuaciones de los dos DCL tenemos ocho ecuaciones y diez incógnitas, ya que de esta unión las variables y , θ , M y V del extremo derecho del primer DCL son por continuidad las mismas del extremo izquierdo del segundo DCL, con y nulo en ambos extremos. Si este proceso se repite por la presencia de otras reacciones, elaboraríamos los DCL de cada uno de los tramos y al ir uniendo los diferentes sistemas de ecuaciones de cada uno siempre tendríamos dos incógnitas más que el número de ecuaciones. Esto continuaría así hasta que elaboremos el DCL representado por el tramo comprendido entre el último apoyo intermedio y el extremo derecho de la viga. (Ver figura N° 9).

De este último diagrama tendríamos ocho variables y cuatro ecuaciones. De las ocho variables, cuatro ya están introducidas en el problema por el DCL anterior

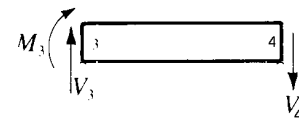


Figura N° 9. DCL desde la sección a la derecha del último apoyo intermedio y el extremo derecho de la viga.

y de las restantes cuatro siempre son dos conocidas, por lo que al adicionar este sistema de ecuaciones solo se

están introduciendo dos nuevas incógnitas y cuatro ecuaciones, obteniéndose un sistema de ecuaciones determinado.

Una forma alterna de resolución de este problema es que por cada apoyo intermedio de la viga se determinen el conjunto de ecuaciones que corresponda a cada DCL entre el extremo inicial de la viga y la sección a la derecha de cada apoyo y por último el que corresponde a toda la viga. De esta forma el sistema de ecuaciones también es determinado y las condiciones de contorno que imponen los rodillos intermedios y los extremos de la viga, permiten conocer los valores las otras variables que son θ , M , V , en las secciones sobre los apoyos intermedios, las reacciones de estos rodillos intermedios y los valores de las condiciones de contorno desconocidas en ambos extremos de la viga.

CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS DE CURVA ELÁSTICA, PENDIENTE DE CURVA ELÁSTICA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.

Resuelto el sistema de ecuaciones de un caso específico, podemos utilizar nuevamente el Método de Holzer para calcular los valores de y θ M V en cualquier sección transversal. En donde sea preciso conocer alguna o todas las variables anteriores, se puede construir el DCL comprendido desde el inicio de la viga hasta la sección de interés, obteniéndose un sistema de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{z}_n^R = \mathbf{A}\mathbf{z}_1^R \quad (25)$$

con

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_n \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_j \mathbf{P}_j \mathbf{L}_{j-1} \dots \mathbf{P}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_1 \quad (26)$$

con la diferencia que ahora se conoce en totalidad \mathbf{z}_1^R . Por lo tanto al realizar las operaciones de la ecuación (26), se tienen los valores de \mathbf{z}_n^R . Como esto puede hacerse para tantas secciones transversales como se requiera, los valores así obtenidos se utilizan para la construcción de los diagramas de Momento Flector, Fuerza Cortante, Curva Elástica y Pendiente de Curva Elástica.

EJEMPLOS

VIGA CON VINCULACIÓN SOLO EN LOS EXTREMOS.

Consideremos la viga doblemente empotrada de la figura N° 10. En este caso tenemos como matrices de transferencias las que corresponden a una elemento sin carga y a un elemento con carga uniforme:

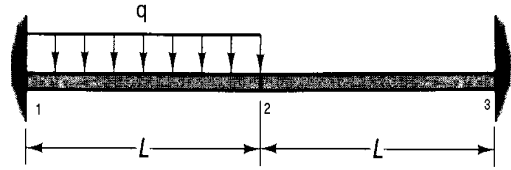


Figura N° 10. Viga doblemente empotrada.

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1$$

$$\mathbf{q}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & -\frac{ql^4}{24EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & -\frac{ql^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \quad (27)$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_3$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\mathbf{z}_3^R = \mathbf{A}\mathbf{z}_1^R \quad (28)$$

con

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_2 * \mathbf{q}\mathbf{u}_1 \quad (29)$$

$$\mathbf{L}_2 * \mathbf{qu} = \begin{bmatrix} 1 & 2L & \frac{2L^2}{EI} & \frac{4L^3}{3EI} & \frac{5qL^4}{8EI} \\ 0 & 1 & \frac{2L}{EI} & \frac{2L^2}{EI} & \frac{7L^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 1 & 2L & \frac{3L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & qL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{qu}_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & -\frac{ql^4}{24EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & -\frac{ql^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \quad (33)$$

y

En este caso conocemos $y_1 = \theta_1 = \theta_3 = y_3 = 0$.

El sistema que tiene por resultado

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{11ql^2}{48} \\ M_2 &= -\frac{5ql^2}{48} \\ V_1 &= \frac{13ql}{16} \\ V_2 &= -\frac{3ql}{16} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathbf{qu}_2 = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{4EI} & \frac{l^3}{12EI} & -\frac{ql^4}{48EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{2EI} & \frac{l^2}{4EI} & -\frac{ql^3}{12EI} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \quad (34)$$

y

El segundo ejemplo a tratar es el de una viga de rigidez variable como la de la figura N° 11.

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_3 \quad (35)$$

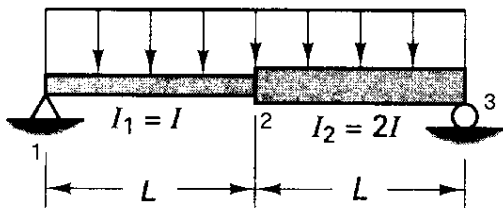


Figura N° 11. Viga simplemente apoyada con cambio de rigidez.

En este caso el sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{qu}_2 * \mathbf{qu}_1 * \mathbf{z}_1 \quad (32)$$

con

Con las condiciones de contorno $y_1 = M_1 = y_3 = M_3 = 0$.

Y la solución es:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{9qL^3}{32EI} \\ \theta_3 &= \frac{15qL^3}{32EI} \end{aligned} \quad (36)$$

$$V_1 = qL$$

$$V_3 = -ql$$

Si a esta viga le cambiamos las condiciones de apoyo, por ejemplo, empotramos el extremo derecho, lo único que cambian son las condiciones de frontera que deben incorporarse en la solución del sistema de ecuaciones.

Para esta nueva situación, las condiciones de contorno son:

$$y_1 = M_1 = \theta_3 = y_3 = 0 \quad (37)$$

Y el resultado de es:

$$\theta_1 = -\frac{3qL^3}{32EI} \quad V_1 = \frac{5qL}{8EI} \quad (38)$$

$$V_3 = -\frac{11qL}{8} \quad M_3 = -\frac{3ql^2}{4}$$

Un ejemplo ilustrativo de un apoyo intermedio lo representa la viga de la figura N° 12.

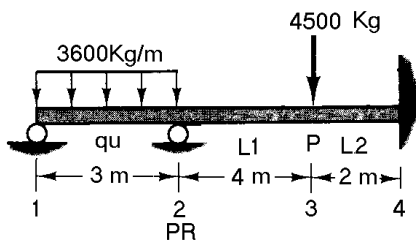


Figura N° 12. Viga continua.

En la figura N° 12 se indican los elementos a considerar que son qu, L₁ y L₂, que representan al cargado y a los dos sin carga. También aparecen, P, que es representado por una matriz de carga puntual conocida y PR otra matriz de carga puntual pero de valor desconocido. Para los cálculos se usó E = 2000000 kg/cm² y I = 10000 cm⁴.

Si modelamos el problema mediante los dos diagramas de cuerpo libre de las figuras N° 13 y 14, el conjunto de expresiones que lo rigen, es:

$$\mathbf{z}_2^R = \mathbf{PR} * \mathbf{qu} * \mathbf{z}_1 \quad (39)$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{L}_2 * \mathbf{P} * \mathbf{L}_1 * \mathbf{z}_2^R \quad (40)$$

con

$$\mathbf{z}_1^R = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad \mathbf{z}_2^R = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_2 \quad \mathbf{z}_4^R = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}_4 \quad (41)$$

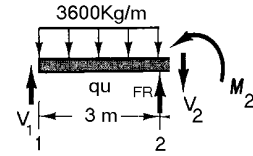


Figura N° 13. DCL desde el extremo izquierdo y la sección a la derecha del primer apoyo intermedio de la viga de la figura N° 12.

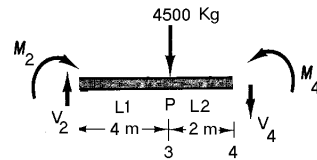


Figura N° 14. DCL desde la sección a la derecha del primer apoyo intermedio y el extremo derecho de la viga de la figura N° 12.

Y tenemos por resultados:

$$\theta_1 = -0.0013 \text{ rad.}$$

$$\theta_2 = 0.000615 \text{ rad.}$$

$$V_1 = 4460 \text{ kg}$$

$$V_2 = 1371,7 \text{ kg}$$

$$V_4 = -3128,3 \text{ kg} \quad (42)$$

$$M_2 = -2820 \text{ kg-m}$$

$$M_4 = -3590 \text{ kg-m}$$

$$FR = 7711,7 \text{ kg}$$

La otra forma de plantear el problema es modelándolo con los dos diagramas de cuerpo libre de las figuras N° 13 y 15.

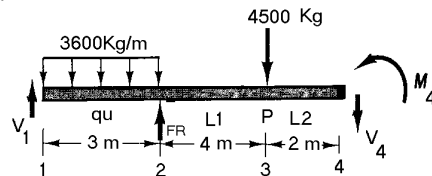


Figura N° 15. DCL de la viga de la figura N° 12.

Esto conduce al sistema de ecuaciones representado por

$$\mathbf{z}_2^R = \mathbf{PR} * \mathbf{qu} * \mathbf{z}_1 \quad (43)$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{L}_2 * \mathbf{P} * \mathbf{L}_1 * \mathbf{PR} * \mathbf{qu} * \mathbf{z}_1 \quad (44)$$

que, naturalmente, tiene la misma solución anterior.

A continuación presentamos los diagramas de fuerza cortante, momento flector y deflexión, obtenidos por el cálculo de las variables de estado de sucesivas secciones a la derecha una vez conocidas todas las variables de estado del extremo izquierdo de la viga.

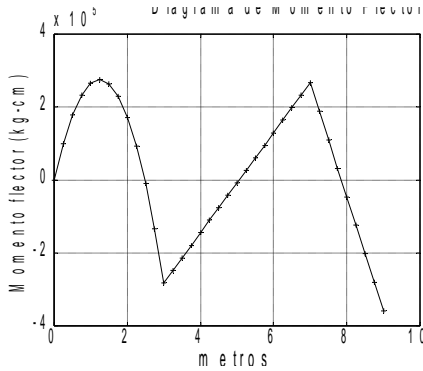


Figura N° 16. Diagrama de momento flector de la viga de la figura N° 12.

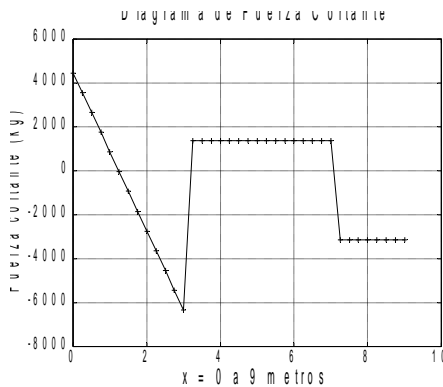


Figura N° 17. Diagrama de fuerza cortante de la viga de la figura N° 12.

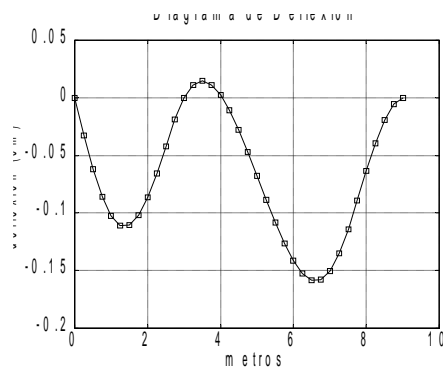


Figura N° 18. Diagrama de deflexión lateral de la viga de la figura N° 12.

CONCLUSIONES

Queda demostrado que con las herramientas computacionales que disponemos en este momento, podemos usar la matriz de transferencia de Holzer-Van den Dungen en el análisis de la deflexión de vigas elásticas de eje recto. Como se desprende de los ejemplos, lo que requiere es el entendimiento claro de la construcción de diagramas de cuerpo libre y de las condiciones de contorno.

Queda evidenciada la posibilidad de sustituir el método de las áreas de diagrama de momento flector para el cálculo de deflexiones de vigas por este método de Holzer-Van den Dungen en conjunción con herramientas computacionales.

En el caso de vigas con tramos con variación continua de su inercia, éstas se pueden analizar de manera aproximada, subdividiendo estos tramos en elementos de inercia constante tomando por valor el promedio de la inercia de los extremos de cada elemento.

AGRADECIMIENTO

El autor desea expresar su agradecimiento al Prof. Eugenio Sansone por las sugerencias indicadas durante la elaboración de este trabajo y al Prof. Robert Hutchinson por la revisión del abstract.

REFERENCIAS

- BICKFORD, W. 1995. *Mecánica de Sólidos. Conceptos y Aplicaciones*. Primera Edición. IRWIN. Madrid, p 850.
- DIMAROGONAS, A. 1996. *Vibration for Engineers*. Second Edition. Prentice-Hall. New Jersey. 825 p.
- GERE, J. & TIMOSHENKO, S. 1984. *Mechanics of Materials*. Segunda Edición PWS Engineering. Boston, p. 768.
- HIBBELER, R.C. 1998 *Mecánica de Materiales*. Tercera Edición. Prentice Hall. México, p. 856.
- LARDNER, T.J., & ARCHER, R.R. 1996. *Mecánica de Sólidos*. McGrawHill. México, p. 802.
- MOTT, ROBERT. 1996. *Resistencia de Materiales Aplicada*. Tercera Edición. Prentice Hall. México, p. 640.
- ORTIZ BERROCAL, LUIS. 1990 *Resistencia de Materiales*. Primera Edición. McGrawHill. Madrid, p. 684.