

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ONDÍCULAS PARA ANALIZAR SEÑALES SÍSMICAS EN EL ESPACIO TIEMPO- FRECUENCIA.

Trabajo Especial de Grado
Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por la Licenciada Zaida Chirinos Fuentes
Para optar al Título de Magíster Scientiarum en Geofísica

Caracas, Julio 2006.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ONDÍCULAS PARA ANALIZAR SEÑALES SÍSMICAS EN EL ESPACIO TIEMPO- FRECUENCIA.

Tutor Académico: Infante, Juan José

Trabajo Especial de Grado
Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por la Licenciada Zaida Chirinos Fuentes
Para optar al Título de Magíster Scientiarum en Geofísica

Caracas, Julio 2006.

Tutor: Infante, Juan J.

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ONDÍCULAS PARA
ANALIZAR SEÑALES SÍSMICAS EN EL ESPACIO TIEMPO-
FRECUENCIA.**

Palabras claves: Análisis señales sísmicas, Teoría de Ondículas, espacio tiempo-frecuencia.

En este trabajo se presentará una revisión selectiva de la aplicación de la Teoría de Ondículas para analizar las señales sísmicas en el plano tiempo - frecuencia y sus problemas típicos. Se realizarán comparaciones entre la Teoría de Fourier y la Teoría de Ondículas para observar las propiedades de las señales sísmicas y establecer semejanzas y diferencias entre las dos teorías. También se estudiarán las propiedades más importantes de la Transformada de Ondículas, para comprender su atractiva aplicación a la geofísica y al análisis de señales sísmicas. Asimismo, se hará uso de algoritmos que permiten una mayor eficiencia computacional, ya que la base para un buen análisis de una señal en el plano tiempo - frecuencia depende de la rapidez del cálculo computacional y de la calidad de almacenamiento de la información obtenida.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Central de Venezuela, al Postgrado de Geofísica y al Departamento de Geofísica por permitir la realización de este trabajo.

Al Dr. Marcos Figueroa, por contribuir siempre de manera acertada al buen desarrollo de este proyecto, gracias por sus consejos, por su tiempo, por su interés.

Al Prof. Juan José Infante, por aceptar la tutoría de este proyecto, gracias por motivarme siempre a culminar con éxito esta meta.

Al Prof. Montoya El Dan, por su presencia oportuna, gracias por su confianza, por su tiempo, por sus conocimientos.

A la Prof. Nuris Hurtado, por sus valiosos aportes que contribuyeron a mejorar la calidad de este trabajo de investigación.

Al Dr. Wilfredo Urbina, gracias por sus aportes y correcciones al inicio de esta tesis.

A la Prof. Inírida Rodríguez, por sus amables orientaciones.

A todo el personal docente y administrativo, en especial a María, Yoreima, Yamirel y Ana María, gracias por el apoyo brindado en todo momento y por cooperar de manera desinteresada en el término de esta tesis.

Al personal de la Biblioteca de la Escuela de Geofísica, Geología y Minas, en especial a la Lic. Morella y a Eduardo.

A Luis, a mi hija, a mis padres, a mis hermanos, a mis sobrinos, a José Quiñones, a Rafael Dávila, a Richard Márquez, a mis familiares y a todos mis amigos: gracias por brindarme siempre la fuerza necesaria para seguir adelante, gracias por su paciencia, por su amor.

Gracias por estar siempre conmigo en todos los momentos difíciles y en todos mis buenos momentos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
OBJETIVOS.....	3
CAPÍTULO I TEORÍA DE FOURIER.....	4
1.1. DEFINICIÓN DE SEÑAL.....	4
1.2. SERIE DE FOURIER.....	6
1.3. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER.....	8
1.4. LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	9
1.5. LAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	11
1.6 TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA.....	13
1.7 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.....	13
1.8. LIMITACIONES DEL ANÁLISIS DE FOURIER.....	14
1.9. TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO.....	14
1.10. TRANSFORMADA DE GABOR.....	16
CAPÍTULO II TEORÍA DE ONDÍCULAS.....	20
2.1. TRANSFORMADA DE ONDÍCULA CONTINUA.....	20
2.2. VARIABLES DE ESCALA a Y TRASLACIÓN b	25
2.3. TRANSFORMADA DISCRETA DE ONDÍCULAS.....	27
2.4. ESPECTOGRAMA Y ESCALOGRAMA.....	29
2.5. SELECCIÓN DE LA ONDÍCULA.....	31

CAPÍTULO III IMPLEMENTACIÓN DE BASE DE FOURIER Y ONDÍCULA A UNA TRAZA SÍSMICA.....	33
---	-----------

CAPÍTULO IV FILTRADO DE UNA SEÑAL EN EL DOMINIO DE FOURIER Y EN EL DOMINIO DE ONDÍCULAS.....	40
---	-----------

4.1. FILTROS.....	40
-------------------	----

4.2. CONVOLUCIÓN.....	43
-----------------------	----

4.3. CORRELACIÓN CRUZADA Y AUTOCORRELACIÓN.....	44
---	----

4.4 CONVOLUCIÓN EN EL DOMINIO DISCRETO.....	45
---	----

4.5 DECONVOLUCIÓN.....	47
------------------------	----

4.6 MODELO UNIDIMENSIONAL DE CONVOLUCIÓN DE UNA TRAZA SÍSMICA.....	48
--	----

4.7 ANÁLISIS DE LA TRAZA SÍSMICA USANDO TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS.....	50
--	----

CAPÍTULO V METODOLOGÍA Y RESULTADOS OBTENIDOS.....	56
---	-----------

5.1 FILTRO WIENER EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	57
---	----

5.2 FILTRADO EN EL DOMINIO DE ONDÍCULAS CON EL MÉTODO DE UMBRALIZACIÓN.....	62
---	----

5.3 FILTRADO CON FILTRO WIENER EN EL DOMINIO DE ONDÍCULAS.....	91
--	----

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	95
---	-----------

APÉNDICE A PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE.....	97
---	-----------

APÉNDICE B REFERENCIAS DE INTERNET.....	99
--	-----------

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....102

INTRODUCCIÓN

Para analizar un fenómeno físico en particular, se hace uso de las señales que ellos producen. El dominio natural de una señal es el tiempo, o el espacio, si se trata de una imagen. Sin embargo, es muy común transformar la señal y llevarlas a otros dominios, por ejemplo al dominio de la frecuencia, en donde se visualizan otros atributos de la señal de manera más eficiente.

Por muchos años el análisis de señales sísmicas se ha hecho en base a una teoría desarrollada por Joseph Fourier. Este análisis es uno de los más usados por matemáticos e ingenieros, ya que permite aproximar una función como combinaciones lineales de las funciones senos y cosenos (que son mucho más convenientes de visualizar). Estas representaciones se conocen como la serie y transformada de Fourier y son usadas para construir una amplia clase de señales [Charles, 1998].

La Teoría de Fourier sólo es válida para señales estacionarias (señales en las que sus características intrínsecas no varían en el tiempo) obteniéndose una buena resolución en frecuencia, pero no se representan bien las propiedades localizadas de la función en el tiempo [Nicholas, 1996; Oppenheim, 1998].

Muchas señales de la vida real exhiben un comportamiento no estacionario, haciéndose necesario localizar temporalmente las componentes frecuenciales.

Una alternativa a esta situación es, restringir la señal y pasarla por una “ventana” previa al cálculo de la transformada de Fourier para poder obtener la localización en el tiempo de cada componente frecuencial.

Así tenemos que Gabor, en 1946, introduce una función ventana con localización en el tiempo $g(t-b)$ donde el parámetro b se usa para trasladar la ventana y cubrir todo el dominio del tiempo [Oppenheim, 1998]. Gabor usó una función gaussiana, ya que su transformada de Fourier es otra vez una gaussiana, y por

ello la transformada inversa es localizada simultáneamente. Esta técnica se conoce como Transformada de Gabor.

Cuando la función no es una gaussiana, la Transformada de Gabor se conoce como Transformada de Fourier de tiempo corto (STFT), la cual divide la señal en pequeños segmentos, luego se calcula la transformada de Fourier de cada segmento para obtenerse una representación en tiempo y frecuencia de la señal. De esta manera se puede conocer el valor de sus componentes de frecuencias y su ubicación en el tiempo. La limitación de este análisis surge al escoger el tamaño de la ventana, ya que al aumentar la resolución en frecuencia la perdemos en tiempo y viceversa.

La STFT mantiene constante tanto la dispersión temporal (i.e. desviación estándar) como la frecuencial. Esta propiedad resulta muy útil cuando se realiza un análisis armónico de frecuencias bajas. Pero constituye un problema al analizar señales que incluyen períodos alternos de bajas y altas frecuencias.

Una herramienta importante en el procesamiento moderno de señales es la Teoría de Ondículas, en donde se hace la representación de la señal en términos de unas funciones más apropiadas, produciendo un mejor compromiso entre la resolución temporal y frecuencial. La Transformada de Ondículas tiene buena resolución en frecuencia y pobre resolución de tiempo para las bajas frecuencias, sin embargo a altas frecuencias, ocurre lo contrario, exhibe buena resolución en el tiempo y pobre resolución en frecuencia. Por ello, esta transformada resulta muy útil para análisis de señales con componentes armónicos de alta frecuencia durante períodos muy cortos y armónicos de baja frecuencia durante períodos muy largos [Daubechies, 1992; Cormac, 1993; Temme, 1998].

Esta teoría ha sido aplicada en diferentes áreas como compresión de señales e imágenes, análisis satelital, detección de tonos, detección de cambios en señales, detección de ondas sísmicas, eliminación de ruido, análisis de datos sísmicos, entre otros.

En el marco del análisis temporal-frecuencial se presenta:

Un primer capítulo en donde se analiza la teoría que involucra la Técnica de Fourier, la Transformada de Tiempo Corto de Fourier y la Transformada de Gabor, que son las herramientas tradicionales usadas para el análisis de señales sísmicas.

Un segundo capítulo, en donde se describe en qué consiste la Transformada de Ondículas, cuáles son las propiedades que hace de ésta técnica una herramienta atractiva para el análisis de señales así como su relación con el análisis de Fourier.

Un tercer capítulo, en donde se realiza la implementación de base de Fourier y Ondícula a una traza sísmica.

En el capítulo cuatro se presenta la teoría relacionada con el filtrado de ruido de una señal en el dominio de Fourier y en el dominio de Ondículas.

En el capítulo cinco se presenta la metodología y por último en el capítulo seis se presentan las conclusiones.

OBJETIVO GENERAL

Utilizar la Teoría de Fourier y la Teoría de Ondículas como bases para representar una señal sísmica en el plano idealizado de tiempo - frecuencia, con el fin de obtener la mejor representación que permita estudiar de manera más eficiente las propiedades de la señal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar las propiedades de una señal sísmica con el uso de la Teoría de Fourier.
- Estudiar las propiedades de una señal sísmica con el uso de la Teoría de Ondículas.
- Ponderar las dos teorías para el análisis de señales sísmicas.
- Usar algoritmos que permitan una mayor eficiencia computacional en el análisis de una señal en tiempo - frecuencia.

CAPÍTULO I

TEORÍA DE FOURIER

Un proceso físico puede ser descrito en el dominio del tiempo mediante valores representados por una cantidad f como función del tiempo. También es posible describir el mismo proceso en el dominio de la frecuencia mediante una serie de amplitudes representadas por F como función de la frecuencia. La transformada de Fourier es una herramienta con la capacidad de representar este proceso físico tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. La esencia de la transformada de Fourier es descomponer la señal como combinaciones lineales de las funciones senos y cosenos.

Esta transformada contiene la misma información que la función original sólo difiere en su manera de presentar dicha información [Reza, 1999; Tapan, 1998, apéndice B].

La transformada de Fourier tiene un amplio rango de aplicaciones tanto en el campo científico, como el de la ingeniería, la matemática, procesamiento digital de señales y muchas ramas más. En particular en el área de geofísica es muy usada para la compresión de data sísmica, reducción de ruido, entre otros [Foufoula, 1994; Heils, 1989]

A continuación se presenta la teoría que involucra el análisis de Fourier, la Transformada de Tiempo Corto de Fourier (STFT) y la Transformada de Gabor, que son las herramientas tradicionales usadas para el análisis de señales sísmicas.

1.1. Definición de Señal

Para analizar un fenómeno físico en particular, se hace uso de las series temporales que producen y plasman su evolución.

La función $f(t)$ es una serie temporal definida solo para valores de t que se encuentren en un intervalo no nulo $[t_1, t_2]$ y sea igual a cero fuera de éste.

Lo anterior expuesto se expresa matemáticamente como

$$F(t) = \begin{cases} f(t) \forall t \in [t_1, t_2] \\ 0 \forall t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad (1.1)$$

En otras palabras, para que $F(t)$ represente una señal, ésta debe ser un pulso de duración finita en el tiempo y decaer rápidamente a cero.

Una señal puede ser expresada analógicamente o digitalmente, dependiendo si ésta posee un conjunto continuo o discreto de valores.

En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de una señal analógica, continua en el tiempo. En la figura 1.2 se muestra una señal discreta en el tiempo.

Muchas de las señales de la vida real exhiben un comportamiento no estacionario y alguna forma de aleatoriedad [Foufoula, 1997; Claerbout, 1976]. Una señal es *no estacionaria*, si sus características intrínsecas varían con el tiempo. Ejemplos: una señal de voz, las series de tiempo que representan las fluctuaciones en los precios de las acciones en los distintos mercados, la señal que recibe un sismógrafo, la señal que recibe un radiotelescopio, etc.

Si la señal es impredecible se dice que es *aleatoria*, el ruido térmico, que es el ruido que se presenta a partir del movimiento aleatorio de los electrones en un conductor, es un ejemplo de señales aleatorias.

También existen señales *caóticas*, que se observan en sistemas caóticos, definidos por un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales, cuyos parámetros son fijos. Estas señales son de naturaleza determinista, pero pueden exhibir formas de ondas tan complicadas que pueden confundirse con las señales aleatorias.

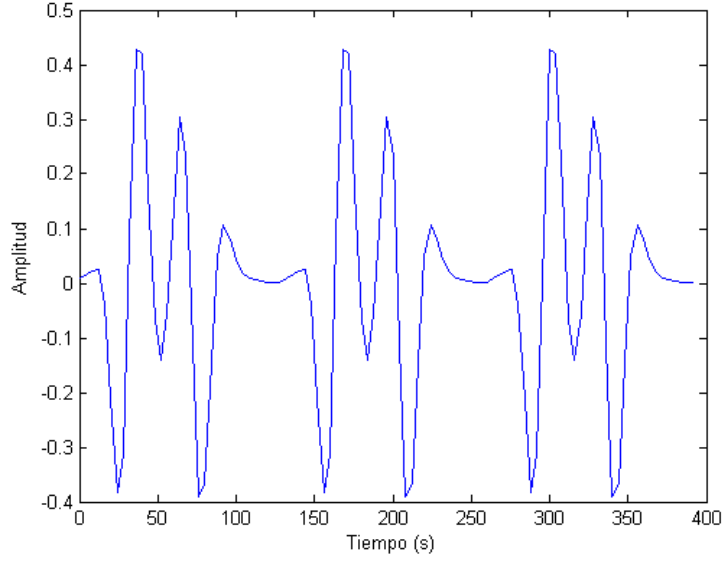


Figura 1.1. Señal continua en el tiempo

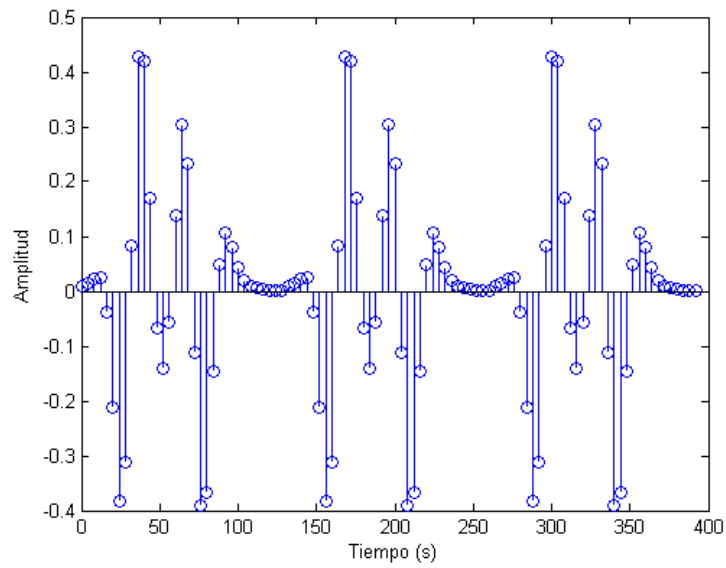


Figura 1.2. Señal discreta en el tiempo.

Por muchos años el análisis de señales se ha hecho en base a una teoría desarrollada por Joseph Fourier, que permite transformar la señal y llevarla a otros dominios, como por ejemplo, la frecuencia. Estudiaremos esto con más detalles en las siguientes secciones.

1.2. Serie de Fourier

Cuando las señales varían periódicamente en el tiempo pueden ser analizadas en sus componentes armónicos [Strang, 1996; Champeney, 1973; Morlet, 1982; Reza, 1999].

Una señal es periódica si para algún valor positivo de T

$$f(t) = f(t+T) \quad \forall t \quad (1.2)$$

El período fundamental de $f(t)$ es el valor mínimo positivo de T diferente de cero para el cual la ecuación (1.2) se satisface. El valor $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ se conoce como la frecuencia fundamental.

Si $f(t)$ puede ser expresada como una combinación lineal de exponenciales complejas, relacionadas armónicamente por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} \quad (1.3)$$

$f(t)$ tiene una representación en series de Fourier, en donde los C_n se conocen como coeficientes de la serie de Fourier o coeficientes espectrales de $f(t)$ y están dados por:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (1.4)$$

Estos coeficientes miden la porción de la señal que está en cada armónico de la componente fundamental.

Hay dos hechos que distinguen a la serie de Fourier [Charles, 1998]

- $f(t)$ es descompuesta en una suma infinita de componentes mutuamente ortogonales $g_n(t) := C_n e^{int}$, donde la ortogonalidad significa que:

$$\langle g_m, g_n \rangle^* = 0 \quad \text{para todo } m \neq n \quad (1.5)$$

con el producto interno, definido por:

$$\langle g_m, g_n \rangle^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(t) g_n(t) dt \quad (1.6)$$

La ecuación (1.5) es válida porque la función $w_n(t) = e^{int}$ con $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, es una base ortonormal del espacio $L^2[0, 2\pi]$ de las funciones de cuadrado integrable de periodo 2π , en el intervalo $[0, 2\pi]$ con

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

En el lenguaje del procesamiento de señales, las funciones de cuadrado integrable corresponden a funciones cuyo contenido energético es finito.

Cualquier función que pertenezca a este espacio tiene una representación de Fourier dada por la ecuación (1.3)

- En la representación con series de Fourier la base ortonormal es generada por dilatación de una sola función $w(t) = e^{it}$, es decir, $w_n(t) = w(nt)$ para todo entero n .

1.3. Convergencia de la Serie de Fourier

Fourier sostenía que “cualquier” señal periódica podía ser representada por una serie de Fourier, aunque sus argumentos matemáticos fuesen muy imprecisos.

Afortunadamente existe una clase de señales muy amplia que pueden ser representadas usando ésta aproximación, siempre que tengan energía finita sobre un solo período, es decir señales $f(t)$ para las cuales se cumple

$$\int_T |f(t)|^2 dt < \infty \tag{1.7}$$

Cuando se satisface esta condición, tenemos la garantía de que los coeficientes de la serie son finitos [Oppenheim, 1998].

La aproximación de una señal periódica, mediante una combinación lineal de un número finito de exponenciales complejas relacionadas armónicamente, viene dado por:

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt\omega_0} \tag{1.8}$$

Considere que $e_N(t)$ denota el error de aproximación, que está dado por

$$e_N(t) = f(t) - f_N(t) = f(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt\omega_0} \quad (1.9)$$

Para determinar qué tan buena es la aproximación, necesitamos especificar una medida cuantitativa del tamaño del error de aproximación.

El criterio que usaremos es la magnitud del cuadrado del error total sobre un período:

$$E_N = \int_T |e(t)|^2 dt \quad (1.10)$$

E_N representa la energía contenida en el error de aproximación sobre un período.

Los coeficientes a_k que minimizan la energía en el error están dados por:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jkt\omega_0} dt \quad (1.11)$$

que es idéntico a la expresión para calcular los coeficientes en la serie de Fourier.

Entonces, si una función tiene una representación en serie de Fourier, la mejor aproximación se obtiene truncando ésta al número de términos deseados.

Conforme N se incrementa, se suman nuevos términos y los anteriores permanecen sin cambio, por lo que el error de aproximación disminuye.

Sin embargo, en algunos casos, la integral para calcular los coeficientes en la serie de Fourier diverge, o puede suceder que la integral converja pero al sustituirla en la ecuación de síntesis, el resultado de la serie infinita puede no converger a la señal original [Champeney, 1973].

Dirichlet desarrolló un conjunto de condiciones que deben ser satisfechas para garantizar que $f(t)$ sea puntualmente igual a su representación en serie, excepto para valores aislados de t , para los cuales $f(t)$ sea discontinua. En éstos valores, la serie converge al promedio de los valores de la discontinuidad.

Las condiciones de Dirichlet son las siguientes:

1. Sobre cualquier período T , $f(t)$ debe ser absolutamente integrable, esto es

$$\int_T |f(t)| dt < \infty$$

2. La variación de $f(t)$ en cualquier intervalo finito de tiempo está acotado, es decir, la función debe tener un número finito de máximos y mínimos dentro de un intervalo finito.
3. $f(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades dentro de un intervalo finito y esas discontinuidades deben ser finitas.

La serie de Fourier permite obtener una representación de las señales periódicas continuas y discretas como combinaciones lineales de exponenciales complejas.

1.4. La Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier nos permite representar señales periódicas y no periódicas y de energía finita, como una suma integral sobre un rango continuo de frecuencias. Es utilizada para encontrar el contenido frecuencial de una señal en particular.

Sea $L^2(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones de cuadrado integrable, en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1.12)$$

Si una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ es considerada como una señal analógica con energía finita, entonces la Transformada de Fourier representa el espectro de la señal y se define como

$$(Ff)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{con } f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.13)$$

La Transformada inversa de Fourier viene dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.14)$$

La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ es una función variable en frecuencia y está representada en el espacio de Hilbert denotado por $L^2(\mathbb{R})$. Mientras que $f(t)$ es un vector variable en el tiempo representado en el espacio de Hilbert denotado por l^2 . Estos espacios contienen todas las funciones y vectores con energía finita: el cuadrado de la norma de $L^2(\mathbb{R})$ o de la norma l^2 representa la energía. La importancia de la Transformada de Fourier es que permite distinguir los diferentes contenidos frecuenciales y sus respectivas amplitudes.

En la figura 1.3 observamos el contenido frecuencial de la señal original mostrada en la figura 1.1.

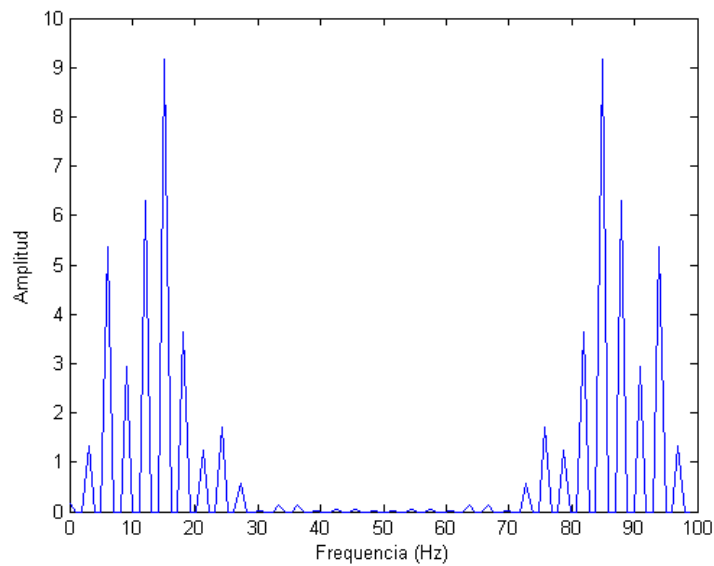


Figura 1.3 Contenido frecuencial de la señal mostrada en la figura 1.1

En general, las ecuaciones (1.13) y (1.14) están bien definidas para todas las funciones, aunque existen condiciones mínimas que deben tomarse en cuenta para asegurar que la inversión sea válida. Estas condiciones son las de Dirichlet, que fueron descritas en la sección anterior.

1.5. Propiedades de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier tiene varias propiedades [Oppenheim, 1998; Brigham, 1974], estudiemos las más importantes.

- **Escalamiento en el Tiempo**

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\omega/a) \quad (1.15)$$

Una expansión en la escala del tiempo, corresponde una compresión en la escala de frecuencia.

- **Escalamiento en Frecuencia**

$$\frac{1}{|b|} f(t/b) \Leftrightarrow F(b\omega) \quad (1.16)$$

Análogo al escalamiento en el tiempo, una expansión en la escala de frecuencia resulta en una contracción en la escala del tiempo.

- **Traslados en el Tiempo**

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{i\omega t_0} \quad (1.17)$$

Los traslados en el tiempo, resultan en un cambio en el ángulo de fase, no alteran la magnitud de la transformada.

- **Traslados en Frecuencia**

$$f(t)e^{-i\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (1.18)$$

Los traslados en frecuencia resultan en una multiplicación de la función en el tiempo por un coseno cuyas frecuencias están determinadas por el cambio en frecuencia f_0 . Este proceso se denomina modulación.

- **Teorema de Convolución.**

Es la relación que existe entre la integral de convolución y su transformada de Fourier.

La integral de convolución está dada por

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t - \tau)d\tau \quad (1.19)$$

donde * denota convolución.

Propiedades de la convolución.

1. La operación de convolución es conmutativa

$$f * g = g * f \quad \text{con } f \text{ y } g \in L^1(\mathbb{R})$$

2. La operación de convolución es asociativa

$$(f * g) * u = f * (g * u) \quad \text{con } f, g \text{ y } u \in L^1(\mathbb{R})$$

$$(f * g)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$$

El teorema de la convolución establece

$$f(t) * h(t) \Leftrightarrow F(\omega)H(\omega) \quad \text{en el tiempo}$$

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow F(\omega) * H(\omega) \quad \text{en la frecuencia}$$

- **Teorema de Parseval**

Establece que la energía de la señal es siempre la misma sin depender de si su cálculo es hecho en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

$$\text{Energía total} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1.20)$$

1.6 Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Considere qué sucede con la Transformada de Fourier, si sólo se conoce un conjunto discreto de valores de t . Sea $f(t)$ el conjunto $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ donde $t = rd$, d es el intervalo de muestreo, que viene dado por $d = T/N$, T es el período y r es un número entero comprendido entre $0, \dots, N-1$.

La integral de la Transformada de Fourier Continua, se expresa como

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega = \frac{2\pi k}{T} \quad (1.21)$$

Esta integral puede ser escrita como

$$X_k = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{-i\omega r d} d \quad (1.22)$$

Sustituyendo $T = Nd$ en la ecuación (1.22), se tiene

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{-i\left(\frac{2\pi k r}{N}\right)} \quad (1.23)$$

Esta relación se conoce como la Transformada de Fourier Discreta (TFD). La Transformada Discreta inversa, viene dada por [Hatton, 1986]

$$X_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\left(\frac{2\pi k r}{N}\right)} \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.24)$$

1.7 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Es un algoritmo elegante que permite calcular, la DFT de manera rápida y eficiente. Sin este algoritmo, el cálculo de la DFT sería muy difícil para series temporales extensas.

La idea básica es que, mientras la DFT requiere de N^2 operaciones para completar el cálculo, la FFT requiere sólo $N \log_2 N$.

1.8 Limitaciones del Análisis de Fourier

Por años, el análisis de Fourier ha permitido crear otro dominio de representación. Pero éste análisis no es útil cuando la señal carece de una regularidad estadística determinada o cuando tiene variaciones locales de la frecuencia, ya que el análisis no contempla variaciones de la frecuencia con el tiempo.

Por su definición, la Transformada de Fourier usa la señal entera y permite el análisis de las frecuencias como un todo, es decir, está definida para todos los valores de la variable t . En la Transformada de Fourier todo el espectro es descompuesto en dilataciones no enteras de la función $e^{i\omega}$. El problema de analizar señales que existan en una ventana de tiempo finito y sea nula fuera de ella, es que tales funciones no pueden ser simultáneamente localizadas. Es decir, no se puede obtener información precisa de cuándo o dónde los diferentes componentes de frecuencia se encuentran en

la señal. Por ello para representar una señal que exista para $0 \leq t \leq T$, la Transformada de Fourier no es adecuada.

La no localización presente en el análisis de Fourier es el hecho de no poder asociar cada componente temporal con una componente de frecuencia y viceversa. Esto evidencia la falta de resolución en el análisis de Fourier, es decir, la incapacidad de observar simultáneamente las señales en tiempo y frecuencia. Al analizar un detalle de la señal en el dominio temporal, éste se ve extendido (es decir, se pierde) al ser observado en el dominio de la frecuencia. Si la señal es alterada en alguna vecindad pequeña de algún instante de tiempo, el espectro entero es afectado, lo que resulta en una pobre resolución en tiempo.

Como ejemplo, tenemos la distribución delta $\delta(t - t_0)$ con soporte en un solo punto t_0 su transformada de Fourier es $e^{-i\omega_0 t}$ que cubre todo el dominio de frecuencia. Por ello, en muchas aplicaciones, tales como el caso de señales no estacionarias y procesamiento de señales en tiempo real, la transformada de Fourier es inadecuada.

1.9 Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT)

Como la transformada de Fourier no es útil para extraer información del espectro de \hat{f} de observaciones locales de la señal. Se propone pasar la señal por una “ventana” previa al cálculo de la transformada de Fourier para poder obtener la localización en el tiempo de cada componente frecuencial.

Este procedimiento consiste en dividir la señal en pequeñas porciones contiguas, de tal manera que se pueda asumir que para cada segmento la señal es estacionaria y así calcular la transformada de Fourier de cada porción. En la STFT la función $f(t)$ es multiplicada por una función ventana y la FT es calculada.

Luego la función ventana es trasladada en el tiempo y la FT del producto es calculada nuevamente. Este proceso es repetido hasta que se ha cubierto la totalidad de la señal. Así para un traslado fijo τ de la función ventana $g(t)$, ésta captura los

hechos de la señal $f(t)$ alrededor de τ . La ventana ayuda a localizar la data en el dominio del tiempo antes de obtener la información en el dominio de la frecuencia.

Lo expuesto anteriormente es lo que se conoce como Transformada de Fourier de Tiempo Corto

$$STFT(\omega, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - \beta)e^{-i\omega t} dt \quad (1.15)$$

El principal propósito de la ventana en el STFT es limitar lo extenso de las secuencias transformadas tal que sus características espectrales sean razonablemente estacionarias en la duración de la función ventana. La resolución en frecuencia va a depender de la duración de la función ventana.

Observe que en la ecuación (1.15) si $g(t) = 1$ para todo t , se obtiene la transformada de Fourier clásica. Esta ecuación puede interpretarse como la convolución de la señal $f(t)$ con un filtro que tiene una respuesta impulso de la forma $h(t) = g(-t)e^{i\omega t}$.

Es importante resaltar que una vez escogida la ventana temporal, el nivel de resolución estará fijado. Si la función ventana se estrecha, se pierde resolución en frecuencia, si se amplía se pierde resolución en el tiempo. Este hecho se explica por la limitación impuesta por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg (ver apéndice A), que relaciona la incertidumbre en tiempo Δt , con la incertidumbre en la frecuencia angular $\Delta\omega$ como $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$.

Para recuperar la señal original $f(t)$ de la STFT se hace uso de la siguiente relación [Tapan, 1998, apéndice B]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} STFT(\omega, \beta) \bar{g}(t - \beta) e^{i\omega t} d\omega d\beta}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t - \beta)|^2 d\beta} \quad (1.16)$$

Asumiendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t - \beta)|^2 d\beta$ es finita.

1.10 Transformada de Gabor

Gabor, desarrolla en 1946, una metodología en donde la función puede ser simultáneamente localizada en tiempo y frecuencia. Gabor usó la función gaussiana en la ecuación (1.15) ya que su transformada de Fourier es nuevamente una gaussiana y por ello la transformada inversa puede ser localizada simultáneamente.

La transformada de Gabor de una $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_\alpha(t-b) dt \quad \text{y} \quad g_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \quad \text{con } \alpha > 0 \quad (1.17)$$

Si definimos la función ventana como

$$G_{b,\omega}^\alpha(t) := e^{i\omega t} g_\alpha(t-b) \quad (1.18)$$

Tenemos que

$$G_{b,\omega}^\alpha f(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{G_{b,\omega}^\alpha} dt \quad (1.19)$$

En otras palabras, en vez de considerar G_b^α como localización de la transformada de Fourier, la interpretamos como un “enventanado” de la función o señal, usando la función ventana dada por la ecuación (1.19). Esto se presenta en la figura 1.4.

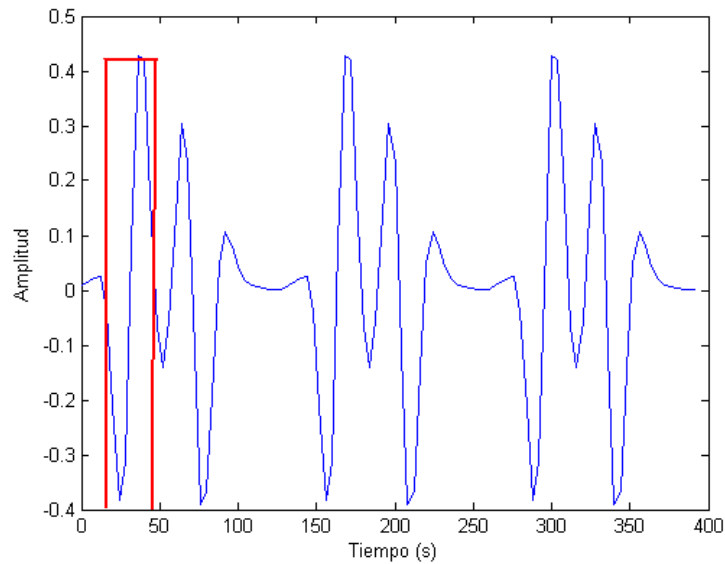


Figura 1.4. La señal es recorrida con una ventana fija que se desliza en el tiempo.

Una ventaja de expresar la Transformada de Gabor de f como en (1.19) es que permite relacionarla con la Transformada de Gabor de \hat{f} :

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{G}_{b,\omega}^\alpha \rangle \quad (1.20)$$

Esto puede interpretarse de dos maneras distintas:

1.- Si consideramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_\alpha(t-b) dt = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-i\omega b} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta b} \hat{f}(\eta) \right) \frac{g_1}{4\alpha} (\eta - \omega) d\eta \quad (1.21)$$

Lo que significa es que con la excepción del término multiplicativo $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-i\omega b}$ la función ventana g_α en $t = b$ concuerda con la transformada inversa ventaneada de \hat{f} con función ventana $\frac{g_1}{4\alpha}$ en $\eta = \omega$.

El producto de estas dos ventanas es:

$$(2\Delta g_\alpha)(2\Delta g_1/4\alpha) = 2$$

2.- Por otro lado, considerando

$$H_{b,\omega}^\alpha(\eta) := \frac{1}{2\pi} \hat{G}_{b,\omega}^\alpha(\omega) = \left(\frac{e^{i\eta b}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \right) e^{-i\eta b} \frac{g_1}{4\alpha} (\eta - \omega) \quad (1.22)$$

tenemos

$$\langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \langle \hat{f}, H_{b,\omega}^\alpha \rangle$$

Indicando que la información obtenida al investigar una señal análoga $f(t)$ en $t = b$ usando una función ventana como la definida en (1.18), también puede ser obtenida observando el espectro $\hat{f}(\eta)$ de la señal estudiada en una vecindad de la frecuencia $\eta = \omega$ usando la función ventana definida en (1.22).

El producto de estas dos ventanas viene dado por

$$(2\Delta G_{b,\omega}^\alpha)(2\Delta H_{b,\omega}^\alpha) = 2 \quad (1.23)$$

El producto cartesiano

$$\left[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha} \right] * \left[\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \right] \quad (1.24)$$

de las dos ventanas es lo que se conoce como ventana rectangular en tiempo-frecuencia y en ella se muestra cómo la señal es localizada. El ancho $2\sqrt{\alpha}$ es llamado el ancho de la ventana tiempo y el ancho $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ de la frecuencia es la altura de la ventana. En esta ventana se establece el grado de resolución tanto de tiempo como de frecuencia que se desea, esto se muestra en la figura 1.5.

Observe que el producto de las dos ventanas viene dado por $\Delta\omega\Delta t = \frac{1}{2}$ que es el límite inferior permitido por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

Esta es una nueva base de representación de la señal que depende del tamaño de la ventana: si la ventana es muy angosta se analiza una porción de la señal muy pequeña, lo que permite obtener una buena resolución en tiempo pero no en frecuencia. Por otro lado si la ventana es muy ancha, se obtiene buena resolución en frecuencia pero no en tiempo. Observe que el ancho de la ventana no cambia al observar el espectro de todas las frecuencias, esto sucede porque el soporte de la ventana es fijo y no se adapta a la señal que está siendo analizada.

Esto restringe el uso de la transformada de Gabor y la STFT para estudiar señales con altas y bajas frecuencias.

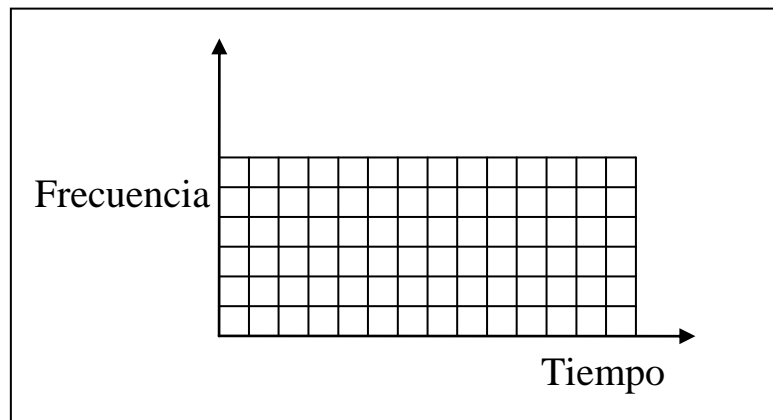


Figura 1.5. Ventana fija de Gabor.

Con los ejemplos anteriores se ha demostrado el problema implícito en la resolución de la STFT lo que crea una interrogante: ¿Será posible obtener una función ventana que tenga soporte dinámico y no estático?

Esto es, obtener una función ventana que tenga la capacidad de cambiar de soporte en forma automática dependiendo del contenido espectral del segmento de la señal analizada. Una situación ideal sería tener buena resolución en tiempo para frecuencias altas y buena resolución en frecuencias para contenido de bajas frecuencias.

Para resolver este dilema existe una herramienta denominada Transformada de Ondículas que fue desarrollada como herramienta alternativa de análisis frente a la STFT y será presentada en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II

TEORÍA DE ONDÍCULAS

La Teoría de Ondículas es una técnica relativamente nueva que ha sido propuesta como una poderosa herramienta en el análisis del comportamiento local de una señal. Al igual que la STFT, esta transformada utiliza una función ventana que encuadra una señal dentro de un intervalo y permite focalizar el análisis sólo en ese segmento de la señal. Su capacidad para permitir un intercambio flexible de la resolución del tiempo por la resolución de la frecuencia y viceversa, ha hecho que esta técnica sea muy útil en el análisis de señales.

La Teoría de Ondículas puede ser definida para una gran clase de funciones. La intención de esta transformada es solventar alguna de las limitaciones de la STFT. En vez de tener una resolución fija en tiempo y frecuencia, uno puede variar esta resolución en el plano tiempo-frecuencia para obtener un análisis multiresolución. Esta variación puede ser realizada sin violar el principio de incertidumbre de Heisenberg, para ello la resolución en tiempo debe decrecer cuando crece la resolución en frecuencia y viceversa.

2.1. Transformada de Ondícula Continua

Una ondícula se define como una función continua en el tiempo de corta duración que cumple con las siguientes propiedades:

- Su valor medio es nulo
- Se definen como funciones normalizadas, de norma igual a uno y centradas en $t = 0$
- Analizadas en el dominio de la frecuencia, se tratan de filtros pasabanda
- Son funciones que decaen rápidamente a cero
- Tienen buena localización en tiempo-frecuencia

- Se calculan de manera rápida usando algoritmos muy sencillos
- Permiten realizar análisis multiresolución

En la figura 2.1 se muestra la ondícula de Meyer en la parte superior y en la parte inferior se muestra la ondícula de Morlet.

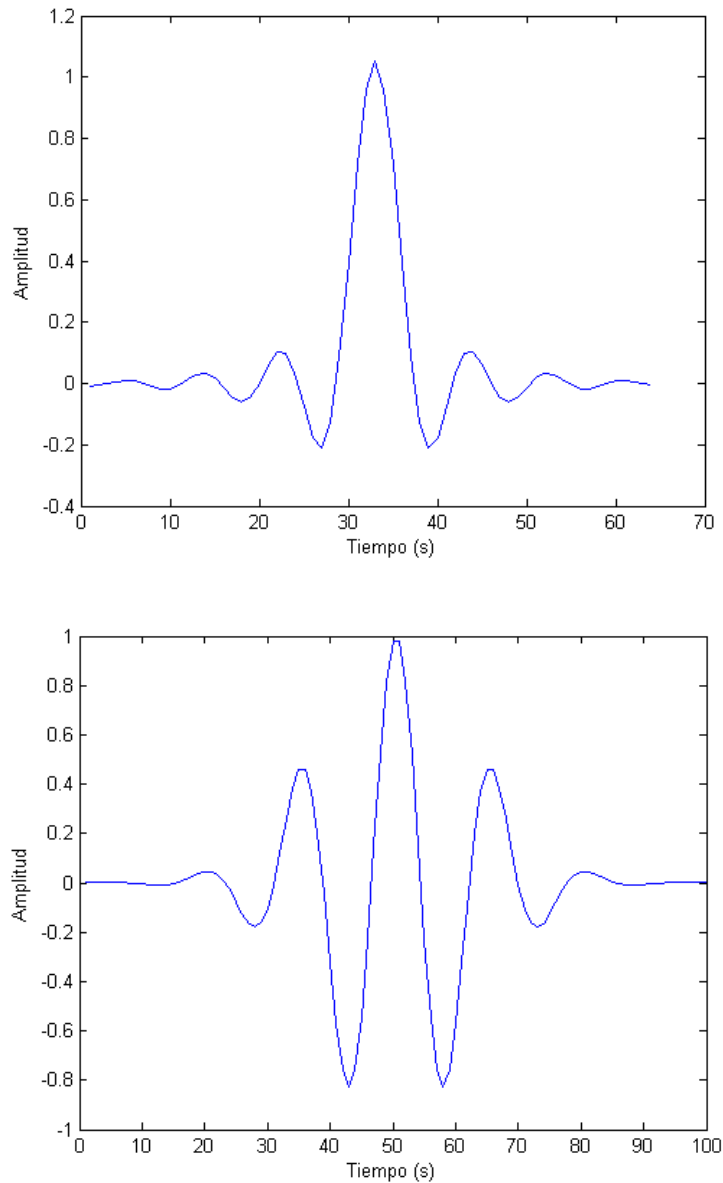


Figura 2.1 a) Ondícula de Meyer. b) Ondícula de Morlet.

La teoría de Ondículas permite conocer las frecuencias que componen una señal con las siguientes resoluciones:

- Para las altas frecuencias se consigue una buena resolución en el tiempo que permite su exacta localización temporal, a cambio de perder resolución frecuencial.
- Para las componentes de bajas frecuencias lo más relevante es conocer su frecuencia, a costa de perder resolución temporal. Esto puede observarse en la figura 2.2.

Al igual que en la Teoría de Fourier, en donde todo el espacio es generado por dilatación de una sola función, $w(x) = e^{ix}$, en la Teoría de Ondículas se tiene una sola función que puede ser trasladada, modulada y dilatada [Charles, 1998; Nicholas, 2000].

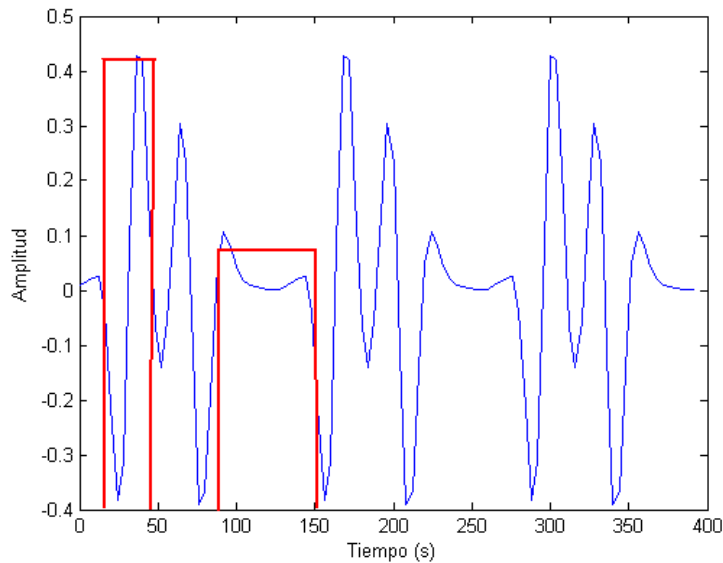


Figura 2.2. La señal es recorrida con una ventana que se desplaza en el tiempo y se adapta a la señal.

Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es llamada una ondícula madre si satisface la condición de admisibilidad dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (2.1)$$

Relativa a cualquier ondícula madre o básica ψ , se define la transformada continua de ondículas (CWT) sobre $L^2(\mathbb{R})$ como

$$W_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}^*(t) f(t) dt \quad (2.2)$$

Esta ecuación puede interpretarse como la convolución de la señal $f(t)$ con la función $\psi_{a,b}$, transformando la señal del dominio del tiempo al dominio de ondículas, usando la función base $\psi_{a,b}$. Estas funciones bases están definidas como

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \text{ y } b \in R \text{ y } a \neq 0 \quad (2.3)$$

El parámetro a es un factor de escala (conocido como parámetro de dilatación) y se relaciona con el contenido frecuencial de la señal de manera inversa: a mayor escala, menor frecuencia y viceversa. El parámetro b es un parámetro de traslación y proporciona la posición de la ondícula.

De acuerdo con la ecuación (2.3) las ondículas son versiones escaladas y trasladadas de una ondícula básica u ondícula madre. Si $|a| \ll 1$, la ondícula es una versión altamente concentrada y comprimida de la ondícula madre $\psi_{a,b}$ con contenido de frecuencias concentrado en el intervalo de altas frecuencias. Si $|a| \gg 1$, la ondícula $\psi_{a,b}$ está muy dispersa y tiene mayormente frecuencias bajas.

Usando la ecuación (2.3), la CWT puede ser escrita como

$$(W_{\psi} f)_{a,b} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (2.4)$$

Esta relación permite obtener información local de una señal análoga f con ventana tiempo $[b + at^* - a\Delta\psi, b + at^* + a\Delta\psi]$.

Aplicando la fórmula de Parseval

$$W_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}^*(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{a,b}^*(\omega) d\omega \quad (2.5)$$

se observa que la CWT también permite obtener información local de f con una

ventana de frecuencia $\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta\hat{\psi} \right]$ con centro de frecuencia en ω^*/a y ancho de banda $2\Delta\hat{\psi}/a$.

Con lo anterior, podemos obtener una ventana en tiempo-escala

$$\left[b + at^* - a\Delta\psi, b + at^* + a\Delta\psi \right] * \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta\hat{\psi}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta\hat{\psi} \right] \quad (2.6)$$

que se estrecha para valores pequeños de a y se amplía a medida que a se hace más grande, como se muestra en la figura 2.3.

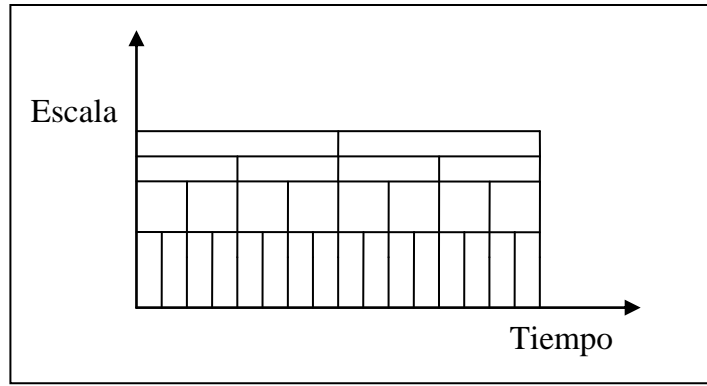


Figura 2.3 Ventana variable de ondícula

La transformada inversa está definida para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $t \in \mathbb{R}$, en la cual f es continua, de la siguiente manera [Deighan, 1997; Aimar, 1998].

$$f(t) = \frac{1}{C\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{a,b} \psi_{a,b} \frac{da}{a^2} db \quad (2.7)$$

donde

$$C\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\omega|} |\hat{\psi}|^2 d\omega \quad (2.8)$$

Para la transformada de ondícula la condición de admisibilidad puede ser escrita como $\Psi(0) = 0$, esto es una condición necesaria para que la reconstrucción se pueda lograr de manera eficiente, donde $\Psi = \Psi(\omega)$ corresponde a la transformada de Fourier de $\psi(t)$.

El cumplimiento de esta condición significa que el valor medio de Ψ es igual a cero. En conclusión, la CWT al igual que la STFT mantiene los corrimientos en el

tiempo y mantiene el escalamiento en el tiempo, pero a diferencia de la STFT, la CWT no conserva los corrimientos en frecuencia [Nicholas, 2000].

Además, como esta función ventaniza la señal sobre un intervalo dado por a alrededor de un punto $t = b$, se observa que es de soporte compacto, es decir, Ψ es una onda definida sobre un intervalo de tiempo finito, a esto se debe el nombre de wavelet u ondícula. Al cumplirse la condición de admisibilidad, la función $\psi(\omega)$ tiene un rápido decaimiento cuando ω tiende a cero, lo que hace pensar que Ψ es una función ventana pasa banda en el dominio de la frecuencia [Faúndez, apéndice B].

2.2. Variables de Escala a y Traslación b

Al variar el parámetro a podemos comprimir ($|a| < 1$) o dilatar ($|a| > 1$) la función $\psi(t)$, lo que dará el grado de resolución con el cual se desea analizar la señal. Por definición, la representación de la Transformada Continua es más una representación de tiempo-escala que de tiempo-frecuencia. Para valores pequeños de a , la CWT obtiene información de la función localizada en el tiempo, mientras que para valores grandes de a la CWT nos ofrece una buena resolución en el dominio de la frecuencia. Cuando a cambia, tanto la duración como el ancho de banda de la ondícula cambia, pero su forma permanece constante, a diferencia de la STFT que ocupa una sola ventana con la misma duración tanto para altas frecuencias como para bajas frecuencias [Faundez, apéndice B].

Es posible obtener una relación entre la escala y la frecuencia. Considere que ω denota la frecuencia de portadora de la ondícula que se está analizando y ω_0 es la frecuencia fundamental. El factor de escala se relaciona inversamente con la frecuencia de la siguiente manera

$$a = \frac{\omega_0}{\omega} \quad (2.9)$$

Por definición, una ondícula es una versión escalada del mismo prototipo, así que podemos escribir

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = Q \quad (2.10)$$

donde $\Delta\omega$ es la resolución de frecuencia de la ondícula que se analiza y Q es una constante que recibe el nombre de constante de calibración en unidades de frecuencia. Al elegir una función gaussiana y utilizar la definición del Principio de Incertidumbre, se puede expresar la resolución de tiempo de la ondícula como:

$$\Delta t = \frac{1}{2\Delta\omega} = \frac{1}{2Q\omega} \quad (2.11)$$

De esta ecuación se puede establecer que

- La resolución de tiempo varía inversamente con la frecuencia de la portadora de la ondícula que se analiza.
- La resolución de frecuencia varía linealmente con la frecuencia de la portadora de la ondícula que se analiza, por ello es posible que se adapte según la frecuencia que va a ser analizada.

En cuanto al parámetro b es el que permite controlar la ubicación de la función en el espacio de tiempo permitiéndonos deslizar la función $\Psi(t)$ sobre el intervalo de tiempo en el que haya definido la función a analizar. Es importante resaltar que la ondícula se traslada cubriendo toda la señal para cada valor de a .

Por lo tanto la variable b nos da la cantidad por la cual $\Psi\left(\frac{t}{a}\right)$ ha sido trasladada en el dominio del tiempo. En la figura 2.4a se presenta una ondícula con diferentes escalas y en la figura 2.4.b se presenta una ondícula con diferentes traslaciones.

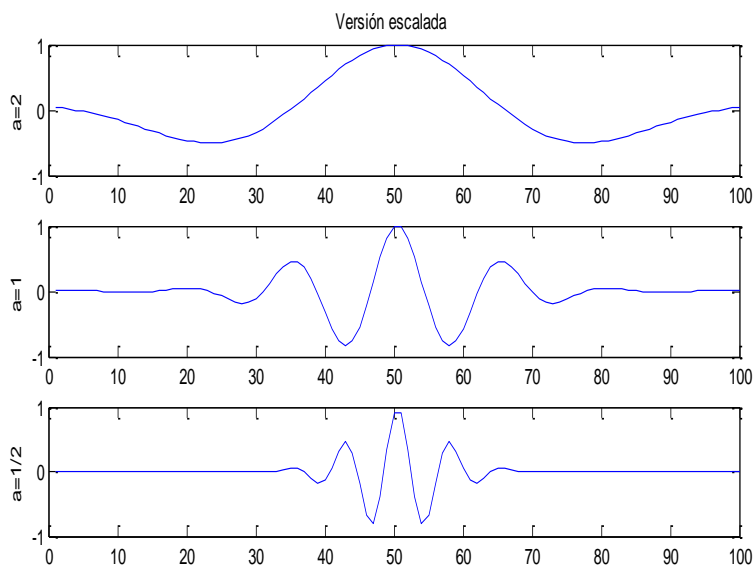


Figura 2.4.a. Ondículas con diferentes escalas

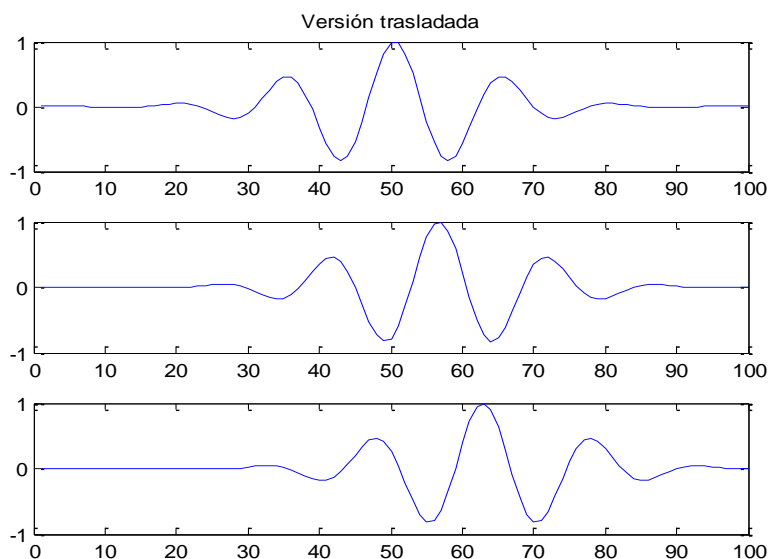


Figura 2.4.b. Ondícula trasladada.

Al comparar ambas teorías nos damos cuenta que la Teoría de Ondículas ofrece múltiples ventajas en relación con la Teoría de Fourier: permite analizar de manera adecuada las señales no estacionarias que contienen transitorios de altas frecuencias superpuestos sobre componentes de baja frecuencia de más larga duración. La Transformada de Ondícula tiene una capacidad de resolución múltiple,

además divide el plano de tiempo-frecuencia en franjas de la misma área pero con anchos y alturas variables que dependen de la frecuencia de la portadora de la ondícula de análisis, proporcionando un compromiso entre las resoluciones de tiempo y frecuencia. (Ancho/altura más estrecho corresponden a una mejor resolución)

2.3 Transformada Discreta de Ondículas

La continuidad de la CWT reside en que tanto la variable de escala, como la variable de traslación varían en forma continua. Sin embargo, para fines computacionales es imprescindible discretizar la transformada, para ello se discretizan estos valores. La forma más común (aunque no la única) es hacer que $a = 2^{-j}$ y $b = k2^{-j}$. Así la ondícula madre representada por $\Psi(t)$ se parametriza en dos dimensiones y se representa como:

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

que corresponde a la versión diádicamente discretizada de la función ondícula.

A los sistemas que son generados sólo por traslaciones enteras y escalamiento de una única función ondícula se les conoce como ondículas de primera generación. El factor $2^{j/2}$ normaliza cada ondícula para mantener una norma constante independiente de la escala j .

La idea de multiresolución es básica en el análisis de ondículas [Strang 1996; Champeney 1973]. La señal es dividida en diferentes escalas. Para comprender mejor la idea de multiresolución definamos $\varphi(t)$ una función escala, similar a la definida en la ecuación (2.9), que sirve de nueva base para el conjunto de señales, como

$$\varphi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

Los niveles vienen dado por el conjunto denotado con el índice j y los pasos en el tiempo están en el nivel 2^{-j} . Los detalles en el nivel j están representados por las ondículas $\psi(2^j t - k)$. Así la señal aproximada más los detalles (ψ 's + φ 's) se combinan en una multiresolución de la señal a un nivel más fino $j+1$.

La multiresolución divide la frecuencia en bandas de octavo de ω a 2ω en vez de bandas uniformes de ω a $\omega + \Delta\omega$. En la mayoría de las señales son los componentes de baja frecuencia las que le otorgan a la señal la mayor parte de su información (aproximaciones, representada por la función escala) y los componentes de alta frecuencia se encargan de incorporar características más particulares (los detalles, o en nuestro caso las ondículas)

Por ello se usan filtros para separar esas dos componentes, para señales complejas se hacen descomposiciones de más niveles para poder separar las características y poder analizarlas independientemente, es aquí en donde se hace uso de la teoría de multifiltros, que se basa en la multiresolución. Una explicación más detallada del análisis de filtros y de multiresolución puede encontrarse en Strang (1996) y Daubechies (1992).

Cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser escrita como:

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.14)$$

Esta representación de f se conoce como series de ondículas.

Análogo a la serie de Fourier, los coeficientes de ondículas $c_{j,k}$ vienen dados por

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (2.15)$$

Es decir, f puede ser reconstruida de sus coeficientes, usando serie de ondículas.

Podemos considerar que los valores de los coeficientes en ondícula, resumen la información de la señal, en forma análoga al caso continuo.

El apropiado truncamiento de las series de ondículas, realizado en cada nivel j , no destruye la señal y permite localizar, por medio del espectro, tanto fenómenos locales como patrones de autosimilaridad, a distintas escalas.

2.4 Espectrograma y Escalograma

La magnitud de la STFT es llamada espectrograma. La gráfica se representa en dos dimensiones con el tiempo en el eje horizontal, la frecuencia en el eje vertical y la amplitud viene dada por una escala de colores. En la figura 2.5 puede observarse el espectrograma de una señal.

La magnitud de la CWT se llama escalograma. La gráfica se representa en dos dimensiones (aunque también puede presentarse en tres dimensiones) con el tiempo en el eje horizontal, la escala en el eje vertical y la amplitud corresponde a una escala de colores. En la figura 2.6 se observa el escalograma de una señal.

La frecuencia es inversamente proporcional al valor de la escala, así que las altas frecuencias corresponden a bajos valores de escala en el escalograma. En la figura 2.7 se presenta el escalograma, pero se ha hecho el cambio de la escala por frecuencia en el eje vertical.

El escalograma revela mucha información acerca de la naturaleza de los procesos no estacionarios que permanecían ocultos. Un ejemplo de aplicación se tiene en el diagnóstico de eventos especiales en el comportamiento estructural durante o previo a un terremoto. Cualquier cambio en el contenido frecuencial, que pueda representar cambios en la degradación de la rigidez de las estructuras, repentinos eventos no dúctiles, intercambio de energía entre modos por medio de la respuesta de acoplamiento, etc., puede ser identificado en el escalograma. [Kurtis, apéndice B]

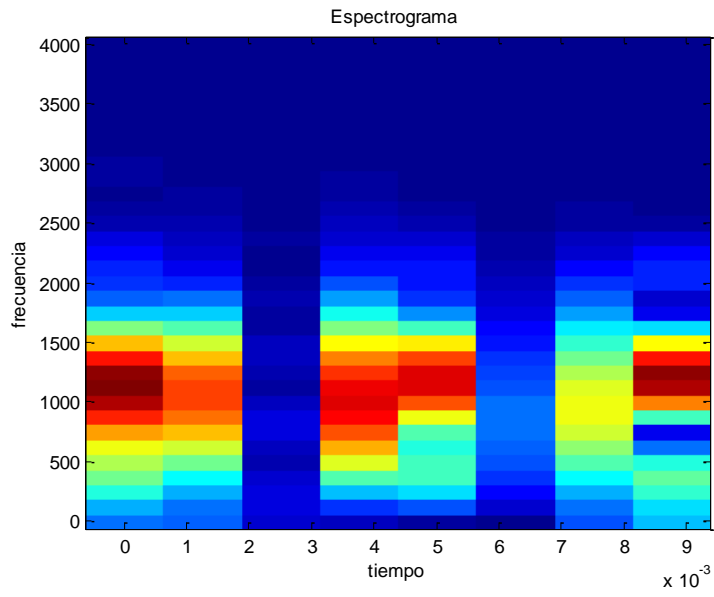


Figura 2.5: Espectrograma de una señal.

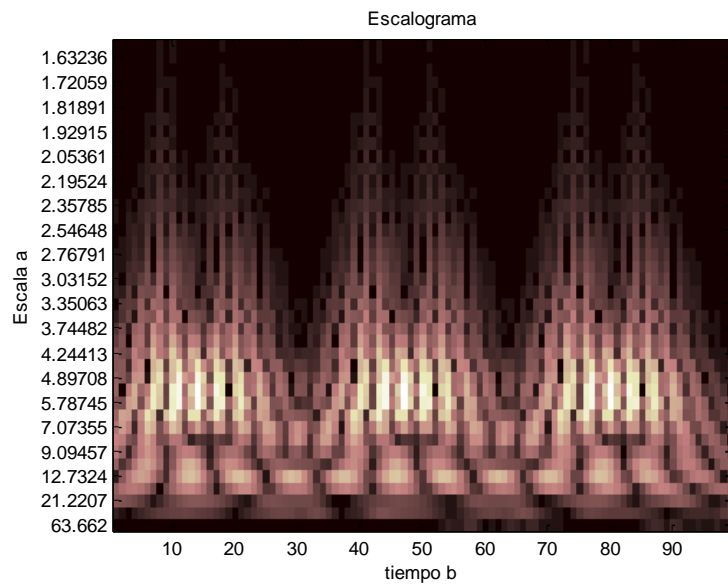


Figura 2.6 Escalograma de una señal.

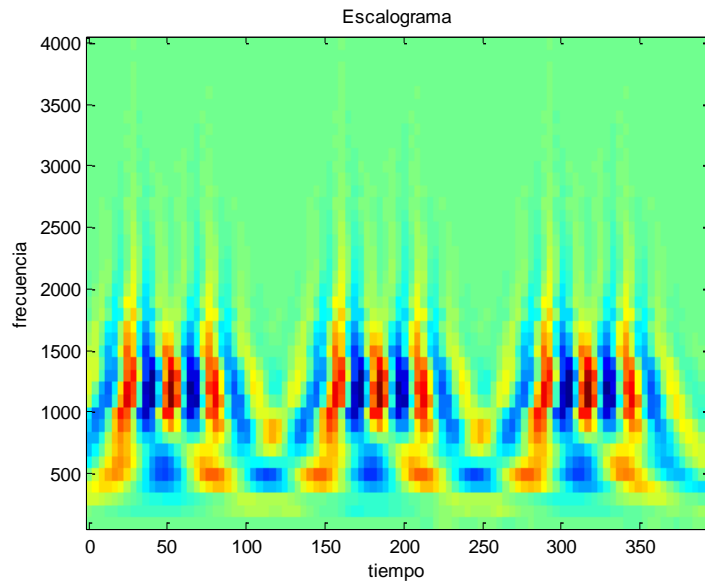


Figura 2.7. Escalograma frecuencia versus tiempo.

2.5 Selección de la Ondícula

La selección de la función ondícula no es única, muchas funciones ondículas pueden ser seleccionadas y tener distintas propiedades. Las ondículas de Daubechies son perfectamente compactas en el tiempo, pero en el dominio de la frecuencia existe un gran solapamiento espectral entre escalas, aunque cumplen con la condición de ortogonalidad, haciendo más estables los cálculos numéricos.

En términos de optimización para la compresión en tiempo frecuencia, los átomos de Gabor son las ondículas ideales pero no son ortogonales. Otros tipos de ondículas incluyen Coiflet, Meyer, Spline, entre otras. Algunas de las cuales son ortogonales y todas tienen una tasa de decaimiento que varía en tiempo y frecuencia.

En teoría de filtros, la ondícula seleccionada debe minimizar el solapamiento de frecuencias entre escalas para reducir la introducción del ruido (aliasing) [Deighan, 1997].

Las ondículas más comunes son el sombrero mexicano y la ondícula de Morlet.

El sombrero mexicano es la segunda derivada de la función gaussiana dada por:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2} \quad (2.16)$$

La ondícula de Morlet está dada por

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad \omega_0 \geq 5 \quad (2.17)$$

esta ondícula toma valores complejos y permite extraer información acerca de la amplitud y la fase del proceso que está siendo analizado. Su transformada de Fourier está dada por

$$\hat{\psi}(\omega) = \pi^{-1/4} \exp\left[-(\omega - \omega_0)^2 / 2\right] \quad (2.18)$$

y es aproximadamente igual a cero para $\omega < 0$ lo que es de gran utilidad cuando se hace análisis en donde se necesita eliminar la interferencia de frecuencias positivas y negativas para la interpretación de los resultados [Foufoula, 1997].

CAPÍTULO III

IMPLEMENTACIÓN DE LA TEORÍA DE FOURIER Y ONDÍCULA A UNA SEÑAL

El análisis de ondículas es capaz de revelar aspectos de la data que no pueden ser obtenidos con el análisis de Fourier, esto se debe a que la función núcleo en Fourier es fija, mientras que en el análisis de ondículas tenemos una sucesión de funciones que se adaptan a la señal en estudio [Millerd, 2002].

En la figura 3.1 se presenta en la parte superior, una señal que es la suma de dos sinusoides de frecuencias $f_1 = 500\text{Hz}$, $f_2 = 1000\text{ Hz}$, y dos impulsos a un tiempo $t_1 = 125\text{ ms}$ y $t_2 = 130\text{ ms}$. En la parte inferior se presenta el contenido de frecuencias de dicha señal. Puede observarse que en el dominio del tiempo, los dos picos están claramente identificados, pero no las sinusoides. Cuando la señal es presentada en el dominio de la frecuencia, se pierde la información de la ubicación de los picos pero aparecen las frecuencias [Phillips, 2003].

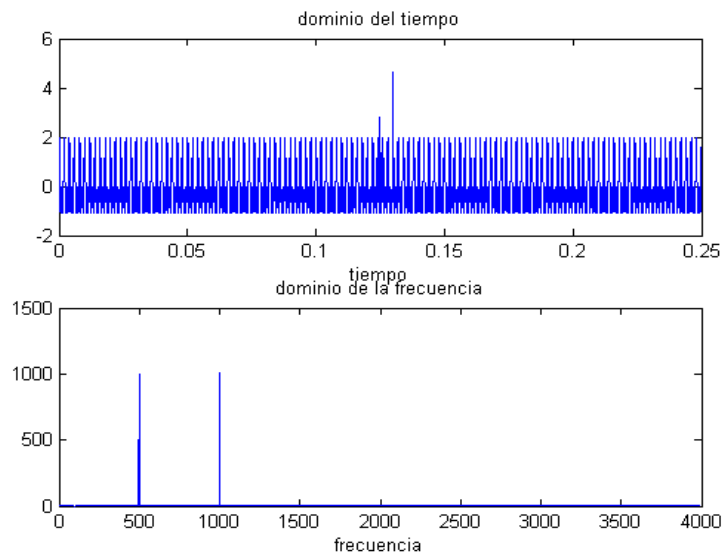


Figura 3.1. Parte superior: señal sinusoidal con frecuencias en $f_1 = 500\text{Hz}$, $f_2 = 1000\text{ Hz}$, y dos impulsos ubicados en $t_1 = 125\text{ms}$ y $t_2 = 130\text{ms}$. Parte inferior: Contenido frecuencial de la señal arriba mostrada.

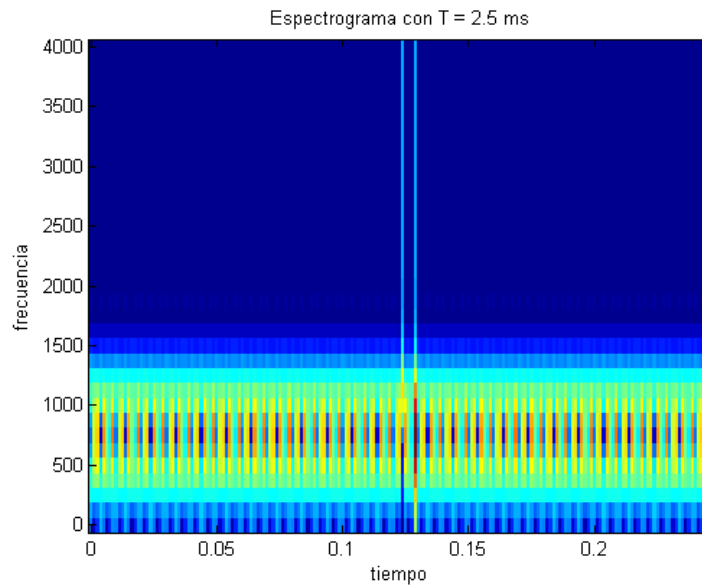


Figura 3.2. Espectrograma de la señal mostrada en la figura 3.1.

En la figura 3.2 se presenta el espectrograma de la señal mostrada en la figura 3.1, en donde el análisis se hace con la STFT, con un ancho de ventana fijo de $T = 2.5$ ms., la frecuencia viene dada por $f = 1/T$. En esta figura se observa que se pueden resolver los picos, pero no las sinusoides.

Para resolver picos muy cercanos el tamaño de la ventana debe ser más pequeño que la diferencia entre los dos picos. En este caso se cumple esta condición, ya que $130 \text{ ms} - 125 \text{ ms} = 5 \text{ ms}$ y esta diferencia es mayor que 2.5 ms , que es la ventana con la que fue analizada la señal.

Con respecto a las sinusoides, para resolver frecuencias muy cercanas se debe cumplir que $|f_1 - f_2| > \frac{2}{T}$, en este caso no se cumple la condición, ya que 500 Hz que es la diferencia de las dos sinusoides es menor que 800 Hz ($2/2.5\text{ms}$)

En la figura 3.3 se presenta el escalograma de la misma señal, en ello se observa que se pueden resolver tanto las sinusoides como los picos. En este análisis se ha hecho uso de la ondícula de Morlet, por ello la ventana varía automáticamente ajustándose a los cambios presentes en la señal.

En la figura 3.4 se presenta el escalograma de la señal, pero se ha hecho la conversión de la escala a frecuencia, según la siguiente relación $Fa = \frac{Fc}{a\Delta}$

Donde Fa es la frecuencia asociada a la escala, Fc es la frecuencia de corte (se calcula en MatLab con la función 'centfrq'), a escala y Δ es el período de muestreo, en nuestro análisis tiene un valor de 0.0001 seg.

Para la ondícula Morlet $Fc = 0.8125$ Hz.

La escala cuando $f_1 = 500$ Hz es 12.74 y la escala cuando $f_2 = 1000$ Hz es 6.37. Observándose que aproximadamente coinciden estos valores, con los mostrados en la figura.

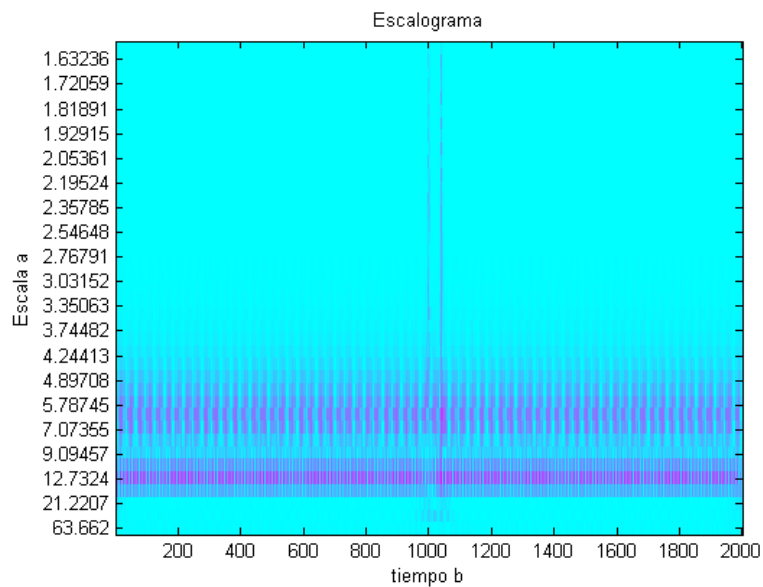


Figura 3.3. Escalograma de la señal mostrada en la figura 3.1. Escala versus tiempo.

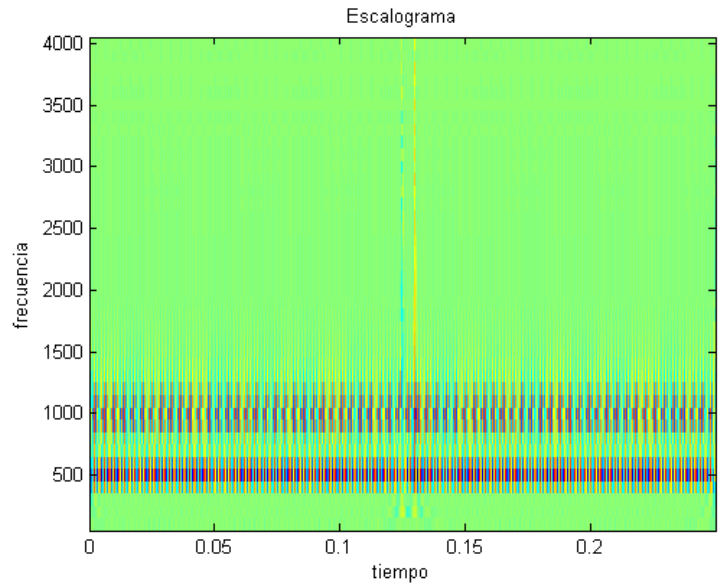


Figura 3.4. Escalograma de la señal mostrada en la figura 3.1. Frecuencia versus tiempo.

En la figura 3.5 se presenta el espectrograma de la señal mostrada en la figura 3.2, con un ancho de ventana fijo $T = 8$ ms, observándose que se resuelven las sinusoides, pero no los picos.

Siguiendo el orden del análisis anterior, la diferencia entre los picos, que es de 5 ms, es menor que 8 ms, por ello, no se pueden resolver los picos.

Con respecto a las sinusoides, se cumple que $|f_1 - f_2| > \frac{2}{T} = 500\text{Hz}$ y esta frecuencia es mayor que 250 Hz ($2/8\text{ms}$), por lo tanto, las frecuencias son bien resueltas, pero se pierde resolución en el tiempo.

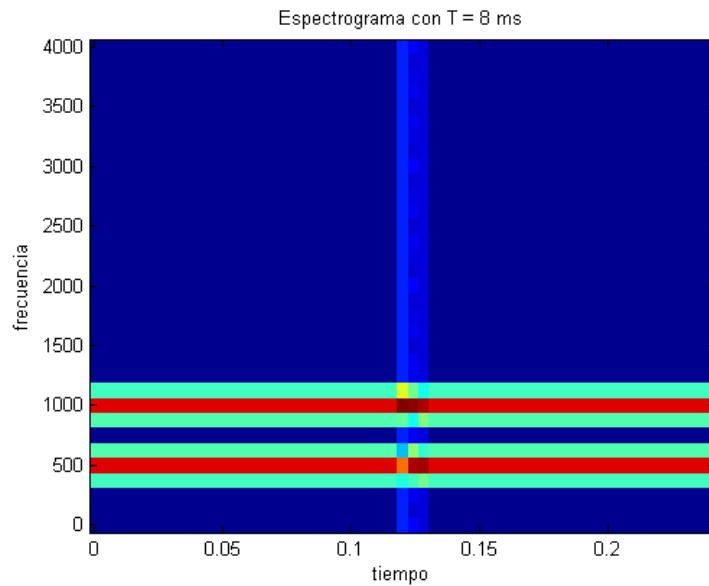


Figura 3.5. Espectrograma de la señal mostrada en la figura 3.1. Frecuencia versus tiempo, período igual a 8 ms.

En este caso, no se presenta el escalograma, porque éste es igual a la figura 3.3, en donde se resuelven bien los picos y las frecuencias.

En la figura 3.6 se presenta otra señal con frecuencias ubicadas en $f_1 = 500\text{Hz}$, $f_2 = 1500\text{ Hz}$, y dos impulsos ubicados en $t_1 = 125\text{ms}$ y $t_2 = 130\text{ms}$. En la parte inferior se presenta su contenido frecuencial [Phillips, 2003].

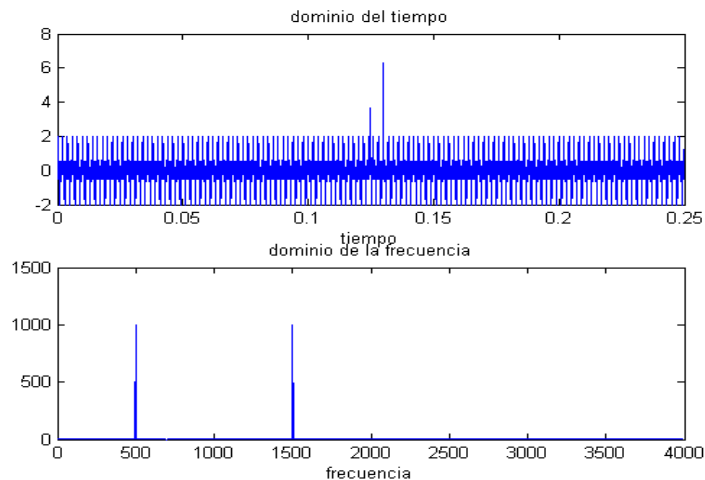


Figura 3.6. Parte superior: señal sinusoidal con frecuencias en $f_1 = 500\text{Hz}$, $F_2 = 1500\text{ Hz}$, y dos impulsos ubicados en $t_1 = 125\text{ms}$ y $t_2 = 130\text{ms}$. Parte inferior: Contenido frecuencial de la señal arriba mostrada.

En la figura 3.7 se presenta el espectrograma con un ancho de ventana fijo de período $T = 2.5$ ms, puede observarse que se resuelven bien los picos, ya que la diferencia entre ellos es de 5 ms, mayor a T . También se observa buena resolución en frecuencia, ya que $|f_1 - f_2| > \frac{2}{T} = 1000\text{Hz}$ es mayor que 400 Hz ($2/2.5\text{ms}$).

En la figura 3.8 se observa el escalograma de la señal mostrada en la figura 3.6, observándose que se resuelven bien los picos y las sinusoides.

Con todo lo anteriormente expuesto se muestra la ventaja de analizar la señal con transformada de ondícula (Morlet) con respecto al análisis de Fourier. La ventana variable de la transformada de ondícula permitió ubicar sinusoides y picos de manera automática. Por su parte, la transformada de Fourier, permite hacer un análisis eficiente, siempre que se logre conseguir la ventana adecuada, ya que ésta permanece fija.

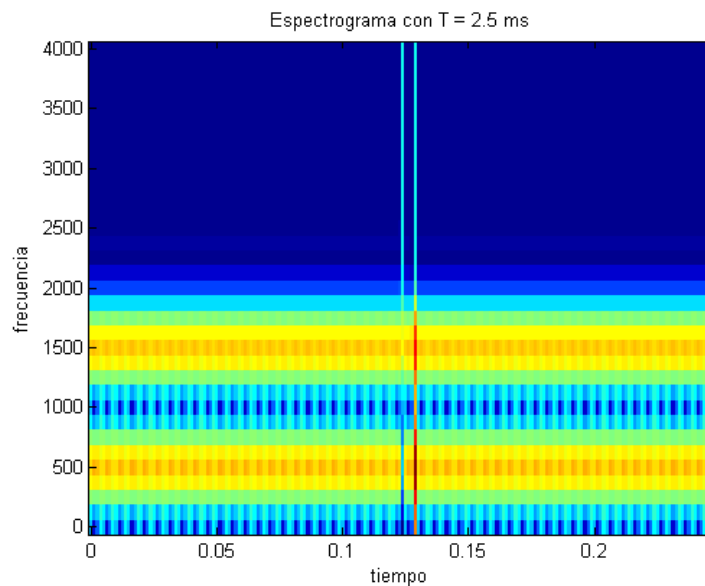


Figura 3.7. Espectrograma de la señal mostrada en la figura 3.6.

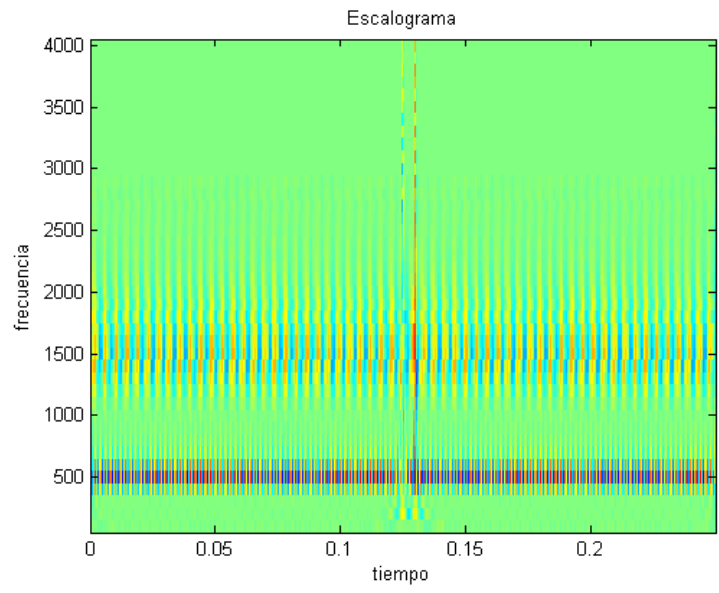


Figura 3.8. Escalograma de la señal mostrada en la figura 3.6. Frecuencia versus tiempo.

CAPÍTULO IV

FILTRADO DE UNA SEÑAL EN EL DOMINIO DE FOURIER Y EN EL DOMINIO DE ONDÍCULAS

El Modelo Dinámico de la Tierra establece, que ésta está compuesta de capas de rocas con diferentes litologías y propiedades físicas. Sísmicamente, las capas de rocas están definidas por parámetros como los valores de la velocidad de la onda y la densidad del estrato, cuyo producto se conoce como impedancia sísmica [Hatton, 1986; Zharkov, 1985].

El contraste de impedancia entre rocas adyacentes, causa reflexiones que son grabadas en la superficie como trazas sísmicas.

La traza sísmica es grabada en un proceso conocido como “Adquisición de Datos Sísmicos”, en donde es inevitable que aparezcan en la grabación las frecuencias ruidosas que contaminan a la señal deseada.

En el “Procesamiento de Datos Sísmicos” se ejecutan una serie de pruebas de varios filtros pasabanda, con el objeto de examinar las componentes de frecuencia contenidas en la señal sísmica. Lo anterior, permite determinar el filtro más conveniente para eliminar el conjunto de frecuencias ruidosas, que degradan la calidad de los datos sísmicos. Dicho análisis, se conoce como Análisis Espectral y el uso de filtros permite atenuar y/o eliminar el ruido y las altas frecuencias, cuando éstas no son deseadas.

4.1 Filtros

Puesto que una señal sísmica se define como una serie de reflexiones impulsivas de energía, se asume que tienen una relación proporcional, con la estratificación geológica vertical, en el punto medio entre fuentes y receptores.

Por ende, el ruido se define como aquella interferencia que pueda distorsionar la relación de proporcionalidad, de aquellos eventos, que son reflexiones primarias del subsuelo [S.E.G., 1982].

En consecuencia, depurar los datos, significa aplicar un filtro pasa banda, a todos los datos sísmicos, que permita separar la información deseada de la no deseada. El filtro se selecciona, basándose en los resultados de los análisis espectrales. Este proceso puede ser aplicado al principio del procesamiento, a nivel de registros de campo y después del proceso de apilamiento.

Para tratar de obtener la relación de proporcionalidad con la estratificación geológica, los filtros deben satisfacer todas las condiciones de los sistemas lineales. Si y sólo si se asume el principio de superposición como válido, la traza sísmica filtrada, va a ser el resultado de convolucionar la traza sísmica sin filtrar con el filtro. Por otro lado, para no alterar la fase de la traza sísmica, produciendo retrasos o alteraciones de la posición real de ella en el tiempo, los filtros se deben diseñar con fase igual a cero [S.E.G., 1982].

Es importante puntualizar que en la praxis, la separación de la señal deseada del ruido, puede efectuarse en base a la frecuencia o la velocidad [Oppenheim, 1998].

Entre los filtros digitales más comunes tenemos:

- Filtro pasa bajo
- Filtro pasa alto
- Filtro Knoch
- Filtro anti solapamiento
- Filtro pasa-banda

Los filtros pasa alto, eliminan las bajas frecuencias y los de pasa bajo eliminan sólo las altas frecuencias. El filtro Knoch, elimina la frecuencia de 60 Hertz. El filtro anti solapamiento, se utiliza para evitar el fenómeno de solapamiento de frecuencias (aliasing), de manera que se pueda satisfacer el teorema del muestreo [Bracewell, 1978].

Uno de los pasos más importantes, en la secuencia del procesamiento sísmico de datos de reflexión, es el análisis en frecuencia temporal de los datos sísmicos y el filtraje de aquellas frecuencias, en las cuales el ruido predomina sobre la señal.

Por otro lado, un filtro ideal, es aquel que posee sus pendientes de cortes verticales. Este filtro deja pasar las frecuencias limitadas en un rango y atenúa las que están fuera de éste. En la práctica, dicho filtro, produce un efecto indeseable conocido como “Fenómeno de Gibbs”, el cual consiste en la deformación del espectro de amplitud en los límites de la frecuencia.

Para minimizar este efecto se usan pendientes no verticales, que permiten suavizar la pendiente [Oppenheim, 1998].

El filtro pasa banda, es una combinación de los filtros de pasa bajo y pasa alto. El filtro pasa banda es una simple y económica manera de eliminar ruido que se encuentran fuera del espectro de frecuencias de la señal sísmica deseada.

La aplicación del filtro puede ser efectuada en el dominio del tiempo o de la frecuencia, pero su implementación es más eficiente en el dominio de la frecuencia.

Las altas frecuencias se encuentran en la parte superior de la sección sísmica, mientras que las bajas se encuentran tanto en la parte superior como la inferior por tener más alta penetración en el subsuelo. Esto se debe a la absorción natural de las altas frecuencias, en el recorrido de la onda sísmica, en el subsuelo.

Si se observa que estos patrones están cambiados en la sección sísmica es muy probable que se deba a ruido sísmico y por lo tanto se hace necesario la aplicación de un filtro [S.E.G., 1982].

Los errores que se cometen en el proceso de filtrado son:

- Zonas de transición muy cortas en la aplicación de filtros variantes en el tiempo.
- Distribución de frecuencias ruidosas, espacialmente, variables.
- Pendientes muy altas en los filtros.

Las fuentes sísmicas generan varios tipos de ondas superficiales dependiendo del ambiente cercano a la superficie y de la naturaleza y posición de la fuente. Las

ondas superficiales son una fuente común de ruido no deseado en el registro sísmico [Manzoni, 2001].

Para resolver este problema, la data puede ser procesada usando la Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT), teniendo la precaución de elegir una ventana temporal adecuada y tomando en cuenta las frecuencias presentes.

Las técnicas en dos dimensiones, tales como los filtros $f - k$ producen una distorsión en la señal y una correlación espacial del ruido. El diseño de estos tipos de filtros no es trivial y además, resultan ser muy costosos.

Una característica común de todas estas técnicas es que son implementadas con el uso de la Transformada de Fourier, una base, que como ya vimos, si tiene perfecta localización en frecuencia, entonces su localización en el tiempo es infinita, cuando se asume que la señal es estacionaria. Sin embargo, esta base no es apropiada para tratar las señales sísmicas en donde el contenido de frecuencia es dependiente del tiempo [Strang, 1996; Temme 1998].

4.2 Convolución

En un sistema lineal invariante en el tiempo con una función $x(t)$ de entrada y una función $y(t)$ de salida, la relación entre ambas funciones está dada por la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (4.1)$$

donde $h(t)$ es la respuesta del sistema a una excitación, en la forma de un impulso que ocurre en un $t = 0$, y cuya integral es la unidad.

Físicamente, el efecto no puede preceder la causa, así que

$$h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0 \quad (4.2)$$

En un proceso fortuito, la señal de entrada, generalmente es una mezcla de señal pura y ruido. Esta mezcla puede ser de muchas formas, asumiendo que es aditiva se tiene que $x(t) = m(t) + n(t)$.

Se deben determinar las características del sistema lineal, $h(t)$ que cumpla los requerimientos del problema, para obtener una salida deseada, digamos, $z(t)$.

Por ejemplo, si el problema es de predicción, se debe tener que $x(t) = m(t)$ y $z(t) = m(t + \alpha)$, esto es, la entrada es la señal pura y la salida deseada es la misma señal con un avance en el tiempo de α segundos. ($\alpha > 0$)

Si el problema es de filtrado, se tiene que $x(t) = m(t) + n(t)$ y $z(t) = m(t - \alpha)$, esto es, la entrada es una mezcla aditiva de señal pura mas ruido y la salida es la señal con un retardo en el tiempo de α segundos.

Cuando la salida se especifica de esta manera, se asume un resultado ideal, que no se espera obtener perfectamente, de un sistema físico lineal. El error escogido por Wiener fue el error cuadrático medio [Wiener, 1964]

$$\overline{e^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y(t) - z(t)]^2 dt \quad (4.3)$$

Expandiendo esta ecuación, aplicando la ecuación (4.1) y luego de cambiar el orden de integración, se tiene

$$\overline{e^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \phi_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \phi_{xz}(\tau) d\tau + \phi_{zz}(0) \quad (4.4)$$

donde

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (4.5)$$

es la autocorrelación de la función de entrada.

$$\phi_{xz}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)z(t + \tau) dt \quad (4.6)$$

es la correlación cruzada de la función de entrada y la función de salida.

$$\phi_{zz}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z^2(t) dt \quad (4.7)$$

Para encontrar la condición necesaria y suficiente, bajo la cual el sistema lineal característico, $h(t)$ minimiza el error medio cuadrático, se aplica la Teoría del Cálculo Variacional, obteniéndose como resultado [Wiener, 1964]

$$\phi_{xz}(\tau) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\sigma) \phi_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma = 0 \quad \tau \geq 0 \quad (4.8)$$

En la cual, $h_{opt}(t)$ es la respuesta de impulso unitario, del sistema lineal óptimo, que minimiza el error medio cuadrático.

La ecuación integral dada en (4.8) se conoce como ecuación de Wiener-Hopf.

4.3 Correlación Cruzada y Autocorrelación.

La correlación cruzada, es una operación matemática entre dos funciones, usada para dar un estimado cuantitativo del grado de similitud entre dos series temporales como función de un cambio relativo en tiempo entre ellas. Se define de la siguiente manera [Pereira, 1990]

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau + t) dt \quad (4.9)$$

La correlación cruzada de una serie temporal consigo misma se denomina autocorrelación. La autocorrelación mide el grado de similitud entre una serie temporal y una copia de sí misma trasladada, como función de este traslado y su expresión matemática es

$$\rho_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(\tau + t) dt \quad (4.10)$$

Tanto la convolución como la correlación producen una salida con un ancho de banda espectral que es común ambas señales.

La autocorrelación es parte indispensable en el algoritmo de deconvolución.

4.4 Convolución en el Dominio Discreto.

La convolución lineal discreta de dos series temporales x y h puede expresarse:

$$Y_k = \sum_{j=0}^{L_h} h_j \cdot x_{k-j} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, L_s = L_h + L_x - 1 \quad (4.11)$$

donde L_h es la longitud del filtro h . L_x es la longitud de la señal de entrada x . L_y es la longitud de la salida y .

Esta ecuación puede expresarse en su forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{L_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{L_x} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$Y = XH \quad (4.13)$$

donde Y es el vector columna de la señal de salida $[y_0, \dots, y_{L_y}]^T$ X es la matriz formada con los coeficientes de la señal de entrada y H es vector formado por los coeficientes del filtro.

El problema que se plantea es el siguiente: suponer un filtro h , el cual, al convolucionar con una señal de entrada x produzca la salida deseada d . En la práctica, para series temporales finitas y discretas tales filtros no existen. El replanteamiento del problema es ahora el suponer un filtro que sea el más adecuado para producir el efecto deseado sobre la data en algún sentido.

La solución de los mínimos cuadrados puede establecerse como un filtro que minimice

$$I = \sum_{k=0}^{L_h+L_k} (d_k - y_k)^2 \quad (4.14)$$

es decir, minimizar la diferencia cuadrada de las salidas deseadas (d_k) y la salida de entrada (y_k) .

Sustituyendo (4.11) en (4.14)

$$I = \sum_{k=0}^{L_h+L_k} \left(d_k - \sum_{t=0}^{L_h+L_k} h_t \cdot x_{k-t} \right)^2 \quad (4.15)$$

Ahora, expandiendo la definición de x , d y h para introducir el concepto de tiempo cero, tenemos que definir

x_p como la señal de entrada donde $l = -P, \dots, 0, \dots, Q$

d_m como la señal de salida deseada donde $m = -r, \dots, 0, \dots, S$

h_n como el filtro deseado donde $n = -T, \dots, 0, \dots, U$, entonces

$$I = \sum_{k=-P-T}^{t+Q} \left(d_k - \sum_{t=-T}^{U_x} h_t \cdot x_{k-t} \right)^2 \quad (4.16)$$

Al tomar la derivada parcial con respecto a h_t para todo t , igualando a cero y luego de algunas operaciones matemáticas sencillas, se obtiene

$$\sum_{k=-P-T}^{U+Q} x_{k-z} \cdot x_{k-j} \sum_{t=-T}^U h_t = \sum_{k=-P-T}^{U+Q} d_k \cdot x_{k-t} \quad (4.17)$$

para $j = -T, \dots, 0, \dots, U$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Wiener-Hopf en su forma discreta. El primer término del lado izquierdo es la autocorrelación de la señal de entrada, la cual es conocida, el segundo término son los coeficientes del filtro, los cuales son desconocidos. El lado derecho, es la correlación cruzada de la entrada con la salida deseada, la cual también es conocida.

En su forma matricial, esta ecuación se escribe como

$$X^T XH = X^T D \quad (4.18)$$

Esta ecuación aparece muy frecuentemente en muchos aspectos del procesamiento de la data sísmica y es importante en muchas técnicas de filtrado inverso.

4.5 Deconvolución

En la exploración sísmológica es muy común invertir alguna respuesta dada, esto se hace diseñando un filtro que cuando convolucione con la respuesta dada se produzca un solo pico a un tiempo cero. Este proceso es conocido como **deconvolución** y la ecuación (4.18) describe de manera matemática este proceso.

En la deconvolución predictiva se intenta predecir los valores futuros de una serie temporal de los valores pasados y presentes.

En Geofísica, la deconvolución es usada para atenuar y/o eliminar múltiples, reverberaciones o periodicidad de la onda; con ello se logra mejorar la forma de la ondícula, disminuyendo su anchura y haciéndola más resolutive. La deconvolución, idealmente, comprime los componentes de la ondícula eliminando los múltiples y dejando sólo la reflectividad de la tierra en la traza sísmica. La energía de los múltiples o reverberaciones, es ruido sísmico de tipo coherente y es fuente de confusión en la interpretación sísmica [Yilmaz, 1997; Hatton, 1986].

La técnica de deconvolución, comúnmente usada en el procesamiento de datos sísmico, se basa en el filtro de Wiener-Levinson, el cual constituye una herramienta para atenuar, digitalmente, las trazas sísmicas. Este filtro se basa en la ecuación de Wiener-Hopf. Mediante este filtro de deconvolución, es posible remover eventos repetitivos con una periodicidad específica [Hatton, 1986].

Para el diseño y aplicación del filtro inverso estadístico de Wiener-Levinson se hace necesario seleccionar los siguientes parámetros:

- Ventana de diseño
- Longitud del operador
- Distancia predictiva
- Ruido blanco o aleatorio
- Ventana de aplicación

Si se desea aplicar una deconvolución, físicamente cónsona con la superficie, habrá que suministrar al programa de computación que realiza estos cálculos,

parámetros adicionales como número de disparos, número de receptores y distancia entre receptores [Manzoni, 2001].

La importancia de esta técnica de filtrado en sismología, es que los múltiples son generalmente predecibles, mientras que la serie de reflexión, con la cual ella está convolucionando son normalmente no predecibles. Por ello si la deconvolución predictiva se aplica de la manera correcta, es muy útil para atenuar las energías múltiples, en particular, las de período corto.

En la figura 4.1 se presenta una señal con ruido en la parte de arriba, en la parte inferior de la figura se presenta la señal filtrada con filtro Wiener.

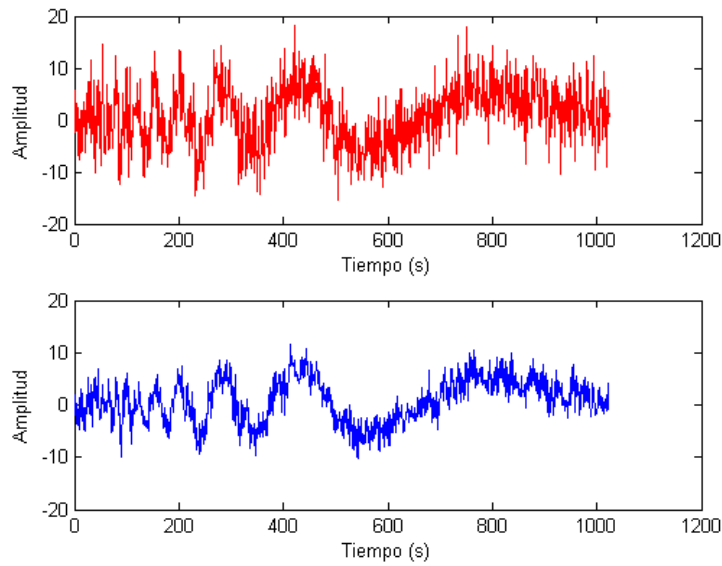


Figura 4.1. Señal con ruido: parte superior de la figura, en la inferior la misma señal filtrada con Wiener en el dominio de Fourier.

4.5 Modelo Unidimensional de Convolución de una Traza Sísmica

La convolución S_k de dos funciones discretas dadas por ω_i y e_j con $i = 0,1,2,\dots,L_\omega$ y $j = 0,1,2,\dots,L_e$ está definida como

$$S_k = \sum_{j=0}^{L_\omega} \omega_j e_{k-j} \quad \text{donde } k = 0,1,2,\dots,L_s = L_\omega + L_e - 1 \quad (4.19)$$

Esta relación puede escribirse como

$$s = \omega * e \quad (4.20)$$

donde * denota convolución, ω se identifica con la ondícula fuente incidente y e es una serie temporal que contiene las funciones de impedancia acústica. Ésta función es conocida como serie de reflexión.

La traza sísmica puede ser modelada como la convolución de la respuesta impulsiva con la ondícula sísmica. La ondícula en cuestión tiene varios componentes: ondícula de la fuente, respuesta instrumental, reflexiones superficiales y la respuesta de los geófonos. La respuesta impulsiva de la tierra comprende, además de las reflexiones primarias, todos los posibles múltiples o reverberaciones originadas de las discontinuidades litológicas y variaciones de las propiedades físicas de las rocas [Yilmaz, 1997].

En cualquier experimento real, es inevitable la presencia del ruido, por ello, el modelo convolucional 1D de las trazas sísmicas viene dado por [Hatton, 1986]

$$S = \omega * e + n \quad (4.21)$$

donde n denota el ruido aditivo.

En el dominio de la frecuencia, la convolución viene dada por:

$$S_p = N.W_p.E_p \quad (4.22)$$

W_p es la DFT de ω , E es la DFT de e y N aparece como consecuencia de la definición de la DFT (Ver sección 1.6) $p = 0,1,2,\dots,N-1$. El punto indica que la relación es de tipo multiplicativa.

La expresión (4.22) es la expresión discreta del teorema de convolución, que establece que la convolución (*) en el dominio del tiempo, es equivalente a la multiplicación (.) de las respectivas transformadas de Fourier, en el dominio de la frecuencia.

En la praxis, muchos efectos aparecen en una traza sísmica, así, el modelo de convolución, en el dominio del tiempo, se amplía de la siguiente manera [Hatton, 1986]

$$S(t) = \omega(t) * e(t) * s_g(t) * r_g(t) * i(t) + n(t) \quad (4.23)$$

ω es la ondícula sísmica de la fuente

e es la serie reflectiva de la tierra
 s_g es el ruido fantasma de la fuente
 r_g es el ruido fantasma del receptor
 i es la respuesta del instrumento
 n es el ruido adicional presente.

Tomando la DFT de cada variable, el modelo de la convolución en el dominio de la frecuencia, se expresa

$$S(f) = W(f).E(f).S_g(f).R_g(f).I(f) + N(f) \quad (4.24)$$

En este dominio, las respuestas son multiplicativas, por ello se hace uso del punto (.) para no confundir con * que denota convolución.

De esta ecuación, se puede observar que si el ruido fantasma de la fuente o del receptor son cero, a cualquier frecuencia, La respuesta S es ruido o cero, dependiendo de la presencia o ausencia de ruido en la señal.

Por otro lado, es posible usar la ecuación (4.24) para remover la respuesta convolucional conocida de S , por una simple división. Esto se logra aplicando la técnica de deconvolución.

4.6. Análisis de la Traza Sísmica con el uso de la Transformada de Ondículas

Se ha hecho muy popular el uso de la Transformada de Ondícula para analizar las trazas sísmicas. Esta técnica descompone las trazas en coeficientes de ondículas en el plano tiempo-escala, de tal manera que la escala se adapte al rango de frecuencias presentes y consecuentemente, la traza puede ser analizada y filtrada.

En el proceso de filtrado la ondícula escogida debe minimizar el solapamiento entre escalas y minimizar el solapamiento de frecuencias (aliasing). También es recomendable que posea una fase lineal, es decir, que sea simétrica, [Daubechies, 1992; Daubechies, 1996].

La Transformada de Ondículas descompone una función en una suma promediada de diferentes ondículas derivadas de dilatación y traslación de una sólo ondícula madre.

La dilatación permite la caracterización del contenido de frecuencias de la función, mientras que con traslación se es capaz de localizar este contenido en un espacio o tiempo.

Cuando las ondículas son ortonormales, la Transformada de Ondícula es ortonormal y la señal original puede ser reconstruida perfectamente de la transformada, como en el caso de la Transformada de Fourier.

La Transformada de Ondículas representa la data continua $f(t)$ como una combinación de componentes llamadas aproximaciones y detalles [Oliveira, 2004]

$$f(t) = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \varphi_{j-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \varphi_{1,k}(t) \quad (4.25)$$

donde los $s_{j,k}$ son los coeficientes de ondícula de las aproximaciones; $d_{j,k}$ son los coeficientes de ondícula de los detalles; j es la resolución más baja de la combinación; k es el número de coeficientes de cada componente; ϕ y φ son las funciones escala y analizadora, respectivamente.

Las aproximaciones son las escalas más altas (o componentes de baja frecuencia) y los detalles son las escalas bajas (o componentes de alta frecuencia). En la figura 4.2 se presenta una señal de entrada que luego es separada en sus aproximaciones (A) y detalles (D).

La selección de la ondícula y el nivel de descomposición dependen de las propiedades de la señal. Si las ondículas son suaves (de orden mayor, expandida) se crean aproximaciones más suaves de la señal. Por otro lado, si la ondícula es más corta (contraída, de menor orden) se obtiene mejor información de los cambios abruptos que pueden estar presentes en la señal [Misiti, 1996].

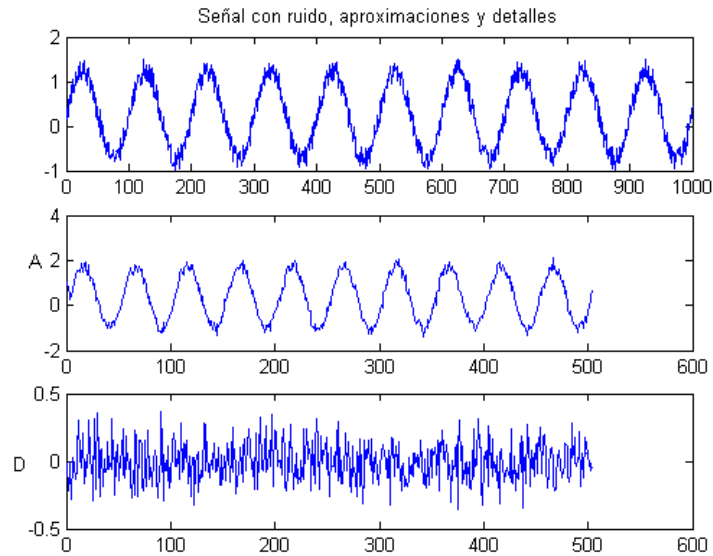


Figura 4.2. Señal con ruido, luego los componentes de baja frecuencia y en la parte inferior los componentes de alta frecuencia.

En cuanto al nivel de descomposición, éstos están influenciados por la escala de detalles. Es decir, a mayor nivel de descomposición, el modelo sustrae ruido de mayor nivel, aunque también son eliminados componentes de alta frecuencia que pueden contener información valiosa de la señal original. Esto hechos son evidenciados en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5. En la figura 4.3 se ha hecho la separación de la señal original en aproximaciones y detalles con la ondícula Daubechies de orden 1 y nivel 1. En la figura 4.4 se usa Daubechies de orden 1 y nivel 3 y en la figura 4.5, se usa Daubechies de orden 10 y nivel 3.

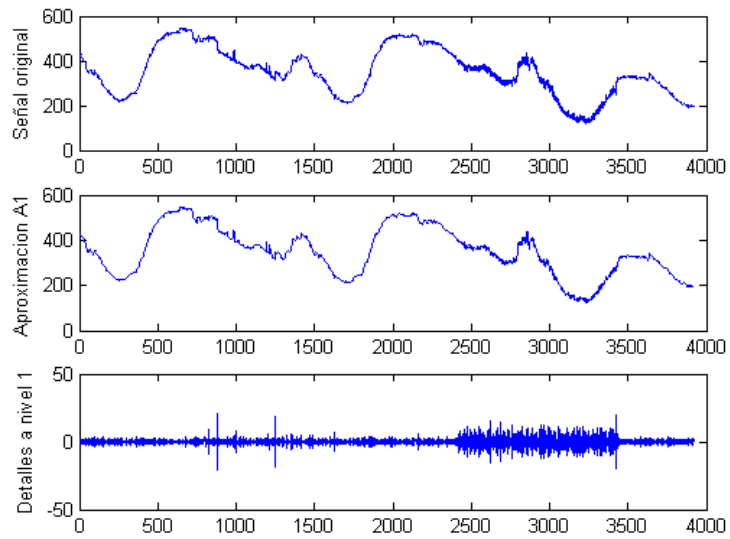


Figura 4.3. Descomposición con 'db11' (orden 1 y nivel 1).

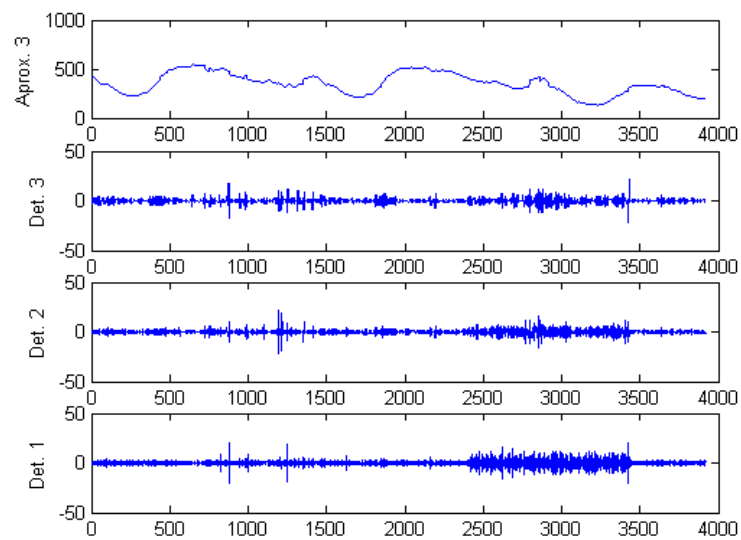


Figura 4.4. Descomposición con 'db13' (De orden 1, pero de nivel 3).

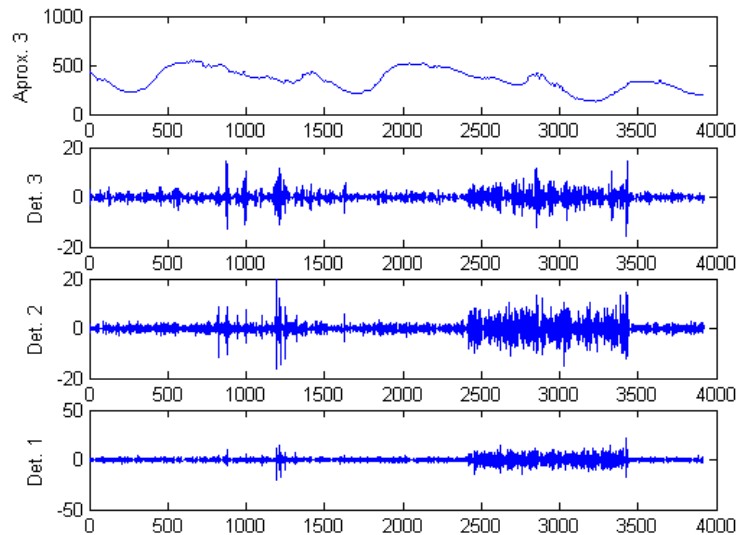


Figura 4.5. Descomposición con 'db103' (Señal de orden 10 y de nivel 3).

La Transformada de Ondículas provee una poderosa herramienta para analizar y procesar data sísmica. Ésta transformada puede expresarse como un par de filtros pasa alta y pasa baja, los cuales son aplicados repetidamente a la traza sísmica [Roueff, 2004; Kroon, 1996]

Estos filtros permiten separar las porciones de la señal de alta frecuencia (detalles) de las de baja frecuencia (aproximaciones).

Este procedimiento se repite cada vez, sobre algunas porciones, obteniéndose un grupo de señales que representan la misma señal, pero todas ellas corresponden a diferentes bandas de frecuencia.

Al descomponer la señal en mayor cantidad de bandas de frecuencias, se posee una información más detallada de la señal, este método se conoce como multiresolución. El esquema se muestra en la figura 4.6. Para reconstruir la señal se aplica la Transformada de Ondícula Discreta Inversa.

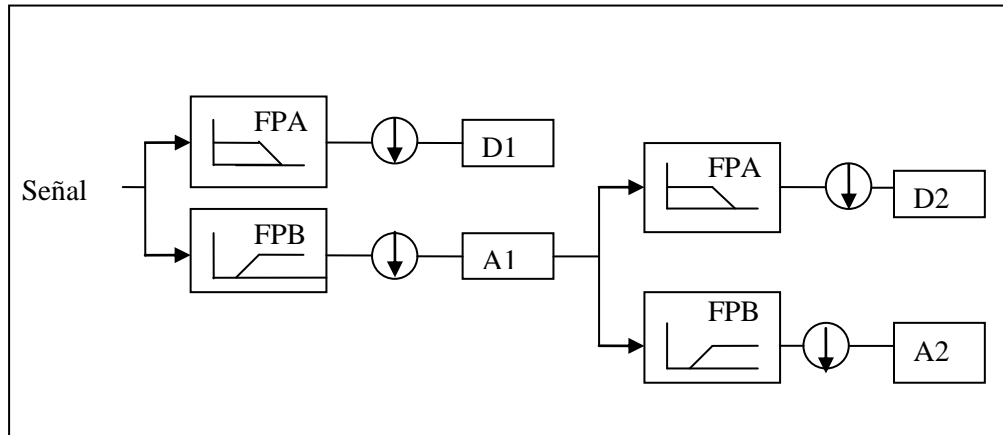


Figura 4.6. Esquema del método de descomposición de la señal.

Este método tiene la desventaja que aumenta al doble el número de datos originales, lo que aumenta el costo computacional. Para corregir esta discrepancia, se utiliza la técnica del submuestreo, en donde sólo son guardadas la mitad de los puntos de las aproximaciones y detalles, sin perder información de la señal [Oliveira, 2004].

Esta transformación es matemáticamente equivalente a la multiplicación del vector \vec{g} de un conjunto de muestras discretas de $f(t)$ por una matriz ortonormal \vec{W}

$$\vec{w} = \vec{W}\vec{g} \quad (4.26)$$

donde \vec{w} es el vector formado por los coeficientes de la ondícula.

La ecuación (4.26) es una descomposición multiresolución que representa las características de la señal a diferentes resoluciones, es decir a diferentes escalas. En esta descomposición, cada escala corresponde a una banda de frecuencia diferente, definida [Oliveira, 2004]

$$\left[\frac{1}{\Delta t(2^{j+1})}, \frac{1}{\Delta t(2^j)} \right] \quad (4.27)$$

donde Δt es el intervalo de muestreo de la data. Así, la información de las altas frecuencias es mapeada en escalas más finas mientras que con escalas más gruesas se representa la información de las frecuencias más bajas.

Las diferentes escalas corresponden a diferentes grados de aproximación a la data original. Por otro lado, los detalles corresponden a correcciones más finas de la aproximación inicial.

Usando esta estructura, los geofísicos pueden suprimir y/o eliminar el ruido en el dominio de ondículas [Walnut, apéndice B].

En la figura 4.7 se presenta una señal con ruido en la parte superior, en la parte inferior se presenta la misma señal luego de ser filtrada con la ondícula Meyer.

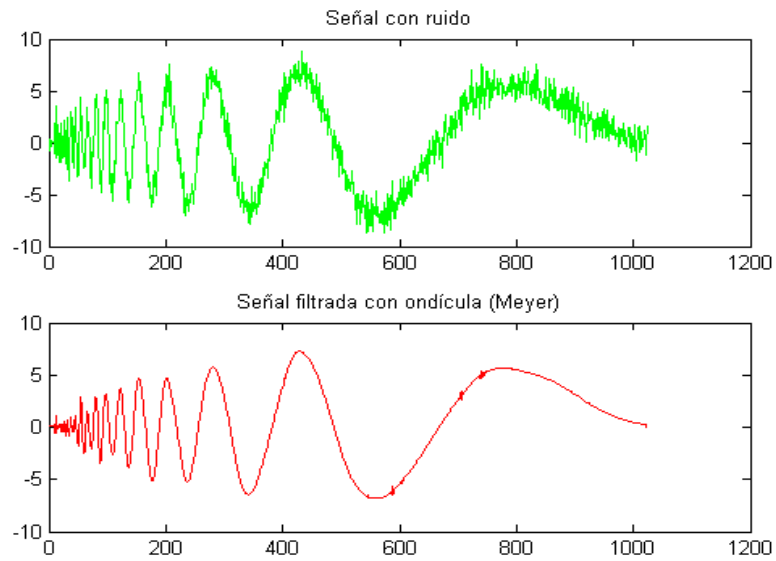


Figura 4.7. Parte superior: señal con ruido, parte inferior: Señal filtrada con ondícula.

CAPITULO V

METODOLOGÍA Y RESULTADOS OBTENIDOS

Para establecer las respectivas comparaciones entre la teoría de Fourier y la teoría de Ondículas, se hará uso de la ondícula Ricker. Esta ondícula es muy utilizada en geofísica para la construcción de sismogramas sintéticos. Es la segunda derivada de una gaussiana, es de fase cero y viene dada por

$$h(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} \text{ donde } \sigma \text{ es el parámetro ancho, se escoge de tal manera que la}$$

ondícula se aproxime a la fase de interés.

En el programa MatLab se genera una ondícula Ricker, usando la función $[w] = ricker(f,dt)$, donde dt es el intervalo de muestreo en segundos y f es la frecuencia central en Hz ($f < 1/(2dt)$).

La ondícula Ricker mostrada en la figura 5.1 es generada con un intervalo de muestreo igual a 0.0004 seg.

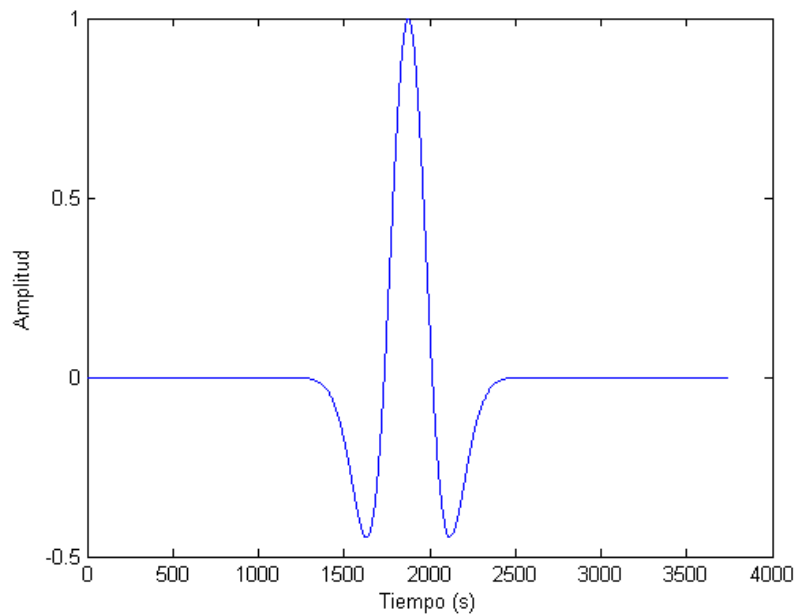


Figura 5.1 Ondícula Ricker

El ruido blanco gaussiano se genera con una función $nn=GWN(l,ds)$, donde l es la longitud de la señal de entrada, ds es la desviación estándar y nn es el ruido resultante.

Se escogen dos niveles de desviación estándar por debajo del valor de la desviación estándar de la señal y dos valores por encima de dicho valor.

La desviación estándar de la ondícula mostrada en la figura 5.1 es de 0.2236, y los valores adicionales seleccionados son: 0.025, 0.125, 0.225 y 0.325.

Esto se realiza con el fin de obtener cinco señales ruidosas, que se obtienen al sumar la ondícula Ricker con los ruidos generados.

Estas señales ruidosas van a ser filtradas usando tres métodos distintos:

- El filtro Wiener en el dominio de Fourier
- El método de la umbralización (Separación de la señal en aproximaciones y detalles)
- El filtro Wiener en el dominio de Ondículas

5.1 Filtro Wiener en el Dominio de la Frecuencia

Llamemos $x(n)$ a la señal ruidosa (o señal de entrada), $sd(n)$ será la señal deseada y nn es el ruido blanco aleatorio.

$$\text{Así } x(n) = sd(n) + nn$$

Cuando a la ondícula Ricker se le suma ruido blanco, la señal deja de ser predecible y se convierte en un proceso no estacionario. En este caso se debe diseñar un filtro que logre separar la señal predecible del ruido, que en este caso es impredecible.

La ecuación de Wiener-Hopf en su forma discreta en el dominio del tiempo fue definida en la ecuación (4.17) como

$$\sum_{q=0}^{Q-1} R_{xx}(l-q) \sum_{t=-T}^U h^*(q) = \sum_{q=0}^{Q-1} R_{dx} \quad (5.1)$$

donde $l = 0, \dots, Q-1$, $q = 0, \dots, Q-1$ y Q es la longitud del filtro.

R_{xx} es la autocorrelación de la señal de entrada, h es el filtro buscado, R_{dx} es la correlación cruzada de la señal de entrada con la salida deseada.

Cuando la ecuación anterior incluye un filtro de respuesta que se extiende desde $-\infty$ a ∞ , el comportamiento del filtro Wiener en el dominio de la frecuencia viene dado por la expresión [Lagunas, 2003, apéndice B]

$$H(\omega)S_x(-\omega) = S_{dx}(-\omega) \Leftrightarrow H^*(-\omega)S_x(\omega) = S_{dx}(\omega) \quad (5.2)$$

Siendo $H^*(-\omega)$ la respuesta en frecuencia, $S_x(\omega)$ la densidad espectral de la señal ruidosa y $S_{dx}(\omega)$ la densidad espectral cruzada de la señal ruidosa con la señal deseada.

Es de destacar, que en general, la solución óptima de Wiener planteada a nivel frecuencial, produce un filtro no causal, por lo que cuando se usa un filtro FIR, las derivadas tienen un carácter aproximado.

Los coeficientes del filtro se obtienen de la ecuación (5.2)

$$H^*(-\omega) = \frac{S_{dx}(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{RSR}{1 + RSR} \quad (5.3)$$

La relación $\frac{RSR}{1 + RSR}$ es lo que se conoce como coherencia espectral, relaciona la potencia de la señal de salida coherente con la entrada y ruido a aquella que no lo es. Lagunas (2003) la relaciona de la siguiente manera

$$\frac{RSR}{1 + RSR} = \frac{1}{1 + \frac{S_n(\omega)}{S_d(\omega)}} = \frac{S_d(\omega)}{S_d(\omega) + S_n(\omega)} \quad (5.4)$$

Donde $S_n(\omega)$ es la densidad espectral del ruido y $S_d(\omega)$ es la densidad espectral de la señal deseada.

Con esta relación se evidencia como la relación señal-ruido en el dominio de frecuencia afecta a la coherencia espectral. También se observa como el ruido afecta la calidad del filtro Wiener.

Es importante resaltar, que para que dos señales sean coherentes debe existir una relación lineal entre ellas. Es decir, para que el contenido en una banda de

frecuencia de una señal sea coherente con el de otra señal, debe obtenerse una de la otra por una transformación lineal, en este caso, a través de un filtro lineal.

Para obtener la señal deseada utilizando filtro Wiener en el dominio de la frecuencia se procede de la siguiente manera:

- 1.- Se calcula la transformada de Fourier de la señal ruidosa.
- 2.- Se calcula la transformada de Fourier del ruido.
- 3.- Se calcula el espectro de potencia de la transformada de Fourier de la señal ruidosa y del ruido.
- 4.- El espectro de potencia de la señal deseada será el espectro de potencia de la señal ruidosa menos el espectro del ruido.
- 5.- Se diseña el filtro Wiener en el dominio de frecuencia, utilizando la relación dada en la ecuación 5.4.
- 6.- La señal filtrada se obtiene al multiplicar la transformada de Fourier de la señal ruidosa con el filtro.
- 7.- Se aplica la transformada inversa de Fourier para obtener la señal filtrada en el dominio del tiempo. Esta señal se denotará como sf .

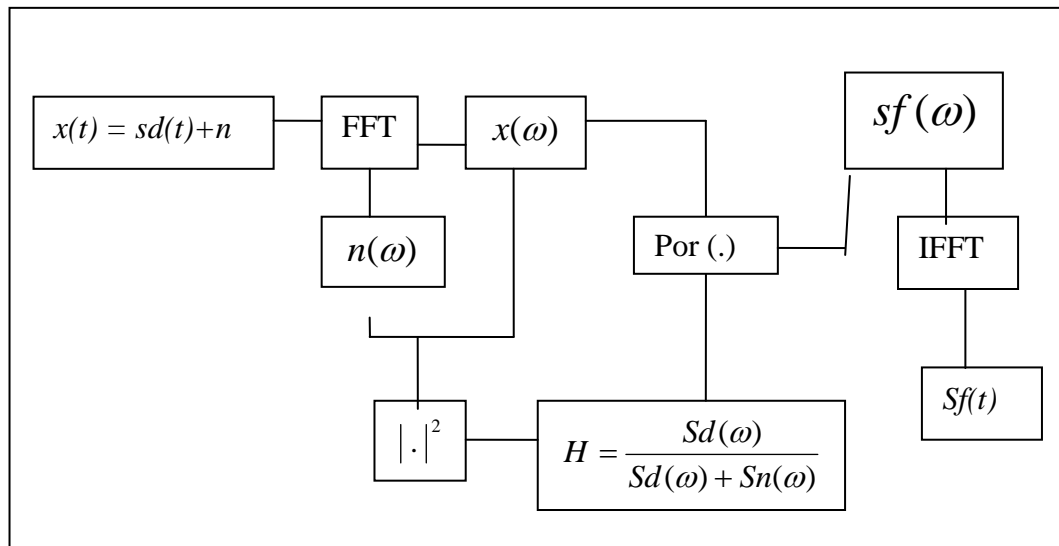


Figura 5.2 Esquema del filtro Wiener en el dominio de Fourier.

El programa se realizó en MatLab, utilizando el WaveLab802, con una subrutina que utiliza la función $sf = Wiener$ (señal ruidosa, señal de entrada, desviación estándar).

Los resultados de aplicar filtro Wiener a la señal Ricker con una desviación estándar de ruido de 0.025 se presenta en la figura 5.3.

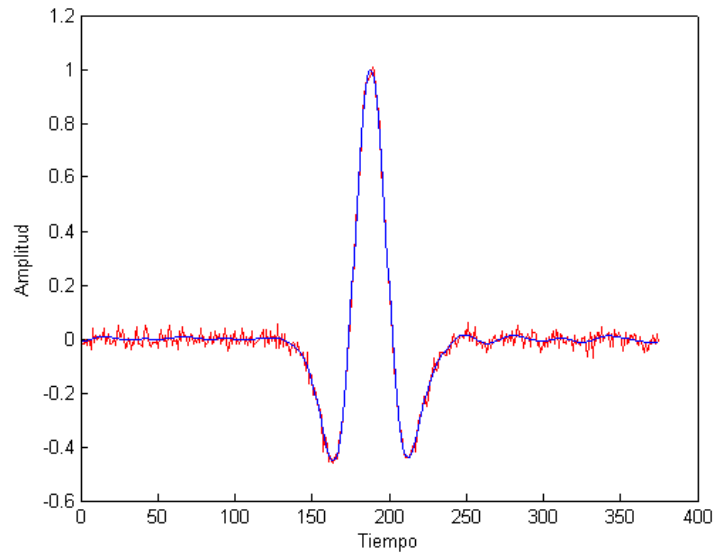


Figura 5.3. Señal ruidosa en rojo y señal filtrada en azul. (0.025)

Los resultados de aplicar filtro Wiener a la señal Ricker con una desviación estándar de ruido de 0.125 se presenta en la figura 5.4.

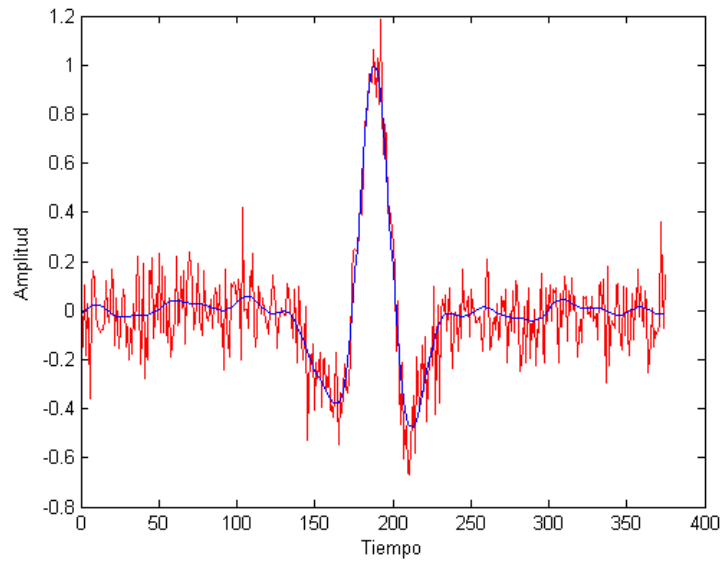


Figura 5.4. Señal ruidosa en rojo y señal filtrada en azul. (0.125)

Los resultados de aplicar filtro Wiener a la señal Ricker con una desviación estándar de ruido de 0.2236 se presenta en la figura 5.5.

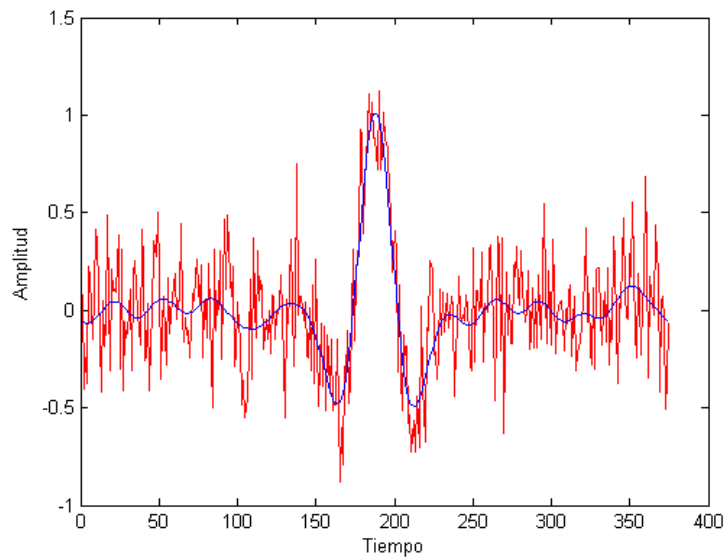


Figura 5.5. Señal ruidosa en rojo y señal filtrada en azul. (0.2236)

Los resultados de aplicar filtro Wiener a la señal Ricker con una desviación estándar de ruido de 0.225 se presenta en la figura 5.6.

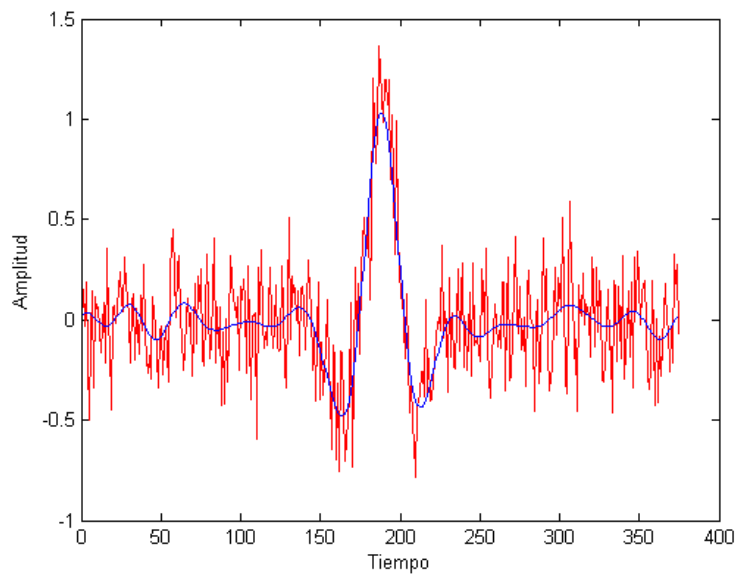


Figura 5.6. Señal ruidosa en rojo y señal filtrada en azul. (0.225)

Los resultados de aplicar filtro Wiener a la señal Ricker con una desviación estándar de ruido de 0.325 se presenta en la figura 5.7.

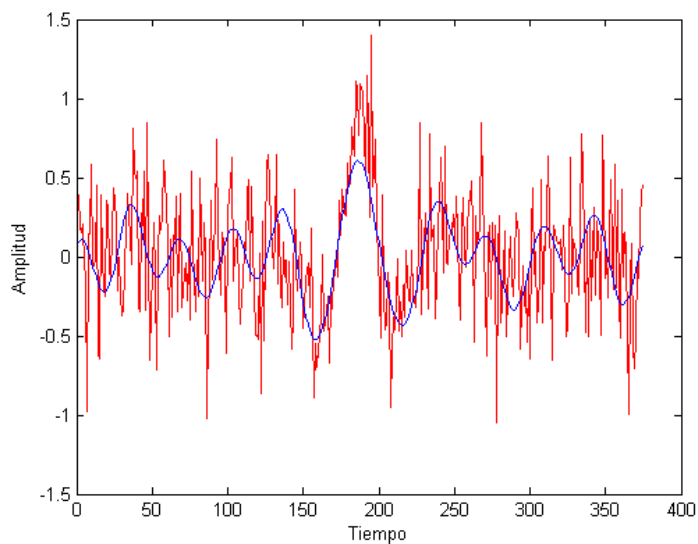


Figura 5.7. Señal ruidosa en rojo y señal filtrada en azul. (0.325)

Los errores relativos se presentan en la tabla 5.1, se hace la relación entre $errorfft1 = \text{sum}(\text{abs}(w-x)/\text{abs}(w))$

$$errorfft2 = \text{sum}(\text{abs}(sf-x)/\text{abs}(sf))$$

$$errorfft3 = \text{sum}(\text{abs}(sf-w)/\text{abs}(w))$$

w es la ondícula Ricker, x señal ruidosa y sf señal filtrada

Tabla 5.1. Errores relativos de las señales ruidosas con distintos ruidos utilizando el método de filtro Wiener en el dominio de Fourier.

	0.025	0.125	0.2236	0.225	0.325
Errorff1	0.0363	0.1714	0.3387	0.2851	0.5360
Errorff2	0.0341	0.2182	0.4895	0.3998	0.7777
Errorfft3	0.0198	0.0596	0.1027	0.1023	0.0831

Con los resultados obtenidos en la tabla 5.1 se observa que a medida que aumenta el ruido presente en la señal, el análisis se hace menos eficiente. En las gráficas 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 se observa que el filtrado de la señal con la técnica de Fourier es eficiente para eliminar el ruido blanco gaussiano presente en la señal.

5.2.- Filtrado en el dominio de ondícula con el método de umbralización

Dada la señal $x(n) = sd(n) + nn$, donde $x(n)$ es la señal ruidosa (o señal de entrada), $sf(n)$ señal deseada y nn es el ruido blanco aleatorio. Se procede a aplicar la Transformada de Ondícula a cada señal ruidosa para separarla en aproximaciones y detalles, ésta técnica de separación se conoce como método de umbralización.

La Transformada de Ondícula separa la señal en un conjunto de coeficientes como se describe a continuación (ver figura 4.6)

1. Los coeficientes de aproximación se obtienen convolucionando la señal ruidosa con un filtro pasa bajo.
2. Los coeficientes de los detalles se obtienen convolucionando la señal ruidosa con un filtro pasa alto.
3. Se repiten los pasos 1 y 2, a la primera aproximación y la señal es nuevamente separada, en una aproximación 2 y los detalles.
4. Esta nueva aproximación, se vuelve a separar para obtener la aproximación tres y los detalles, así sucesivamente hasta llegar al nivel deseado.

5. La señal de salida será un vector concatenado, en donde están presentes los coeficientes de la última aproximación y la de todos los detalles.

El comando a usar en MatLab es $wden = (x, thtr, sorh, scal, n, wav)$, para ello se debe suministrar al programa los siguientes parámetros:

- x que es la señal ruidosa.
- El $thtr$, es lo que permite seleccionar el umbral. Existen varias opciones automáticas.
 - ‘*rigsure*’, el umbral se selecciona usando Principio de Stein (Stein’s Unbiased Risk Estimate)
 - ‘*sqtwolog*’ fija el umbral utilizando la siguiente relación: $\sqrt{2\log(\text{longitud}(\text{señal de entrada}))}$.
 - ‘*heursure*’ selecciona el umbral, usando una mezcla de las opciones anteriores.
 - ‘*minimaxi*’ selecciona un principio mínimo.
- Con el $sorh$ se especifica el umbral de los coeficientes de detalles, puede ser un umbral “duro” o un umbral “suave”.
 - El umbral “duro” descarta los coeficientes por encima del umbral seleccionado: [Ghael, Choi, apéndice B]

$$h_h(i) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } |\hat{S}| > \tau \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad (5.5)$$

τ es el valor del umbral, que depende de la varianza del ruido y \hat{S} es la transformada de ondícula de la señal ruidosa.

- El umbral “suave” descarta los coeficientes por encima del umbral seleccionado pero además comprime los coeficientes de la ondícula: [Ghael, apéndice B]

$$h_h(i) \equiv \begin{cases} \frac{\hat{S}(|\hat{S}| - \tau)}{\hat{S}} & \text{si } |\hat{S}| > \tau \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad (5.6)$$

τ es el valor del umbral, que depende de la varianza del ruido y \hat{S} es la transformada de ondícula de la señal ruidosa.

- La escala también debe ser especificada, afecta a los coeficientes de los detalles.
 - ‘*one*’ que es el modelo básico. En esta selección, los detalles se concentran en unos pocos coeficientes, si la función es regular.
 - ‘*sln*’ estima la escala en función de los primeros coeficientes del ruido
 - ‘*mln*’ ubica el umbral usando una estimación dependiente del nivel del ruido.
- n es el nivel y wav es la ondícula seleccionada.

Al seleccionar la ondícula se deben tener en cuenta los siguientes criterios:

- Debe ser de soporte compacto.
- Debe ser, preferiblemente simétrica, lo cual es útil para evitar el desfase.
- Debe tener un número determinado de momentos nulos, lo cual es muy útil para comprimir las señales.
- Deben ser regulares, lo que permite obtener un mejor suavizado de la señal.

El nivel n se escoge dependiendo de la señal y de los objetivos del estudio. Si la meta es eliminar todos los componentes de altas frecuencias se escogen ondículas de niveles más grandes. Por el contrario si se desea, preservar los cambios abruptos en la señal, se recomienda el uso de ondículas de menor nivel.

Antes de aplicar la transformada de ondícula para filtrar la señal con el método de la umbralización, se procede a estudiar la influencia de la variación de los parámetros sobre la calidad de la señal filtrada obtenida y se calcula la mejor combinación.

Se estudiarán los siguientes parámetros: la ondícula, selección del umbral (*thtr*), el umbral (*sorh*) que afectará a los detalles y la escala (*scal*). El nivel de la ondícula se dejará fijo en uno.

Las ondículas madres seleccionadas fueron las Daubechies y Symlet, dentro de las cuales se han escogido Db1 (o de Haar), Db3, Db6, Db9, Db15, Sym1, Sym3, Sym6, Sym9 y Sym15.

Las ondícula Daubechies son de soporte compacto, por lo general son muy asimétricas, con momentos nulos para un ancho de soporte dado. Los filtros escalantes (scaling filter) de estas ondículas se asocian a los filtros de fase mínima. En cuanto a la ondícula Symlet, tiene propiedades muy parecidas a las ondícula Daubechies pero son más simétricas.

La señal ruidosa que va a ser analizada es la señal obtenida de la suma de la ondícula Ricker y el ruido blanco gaussiano generado con la desviación estándar de la señal que es 0.2236.

En la tabla 5.2 se presentan los errores absolutos de las posibles combinaciones de parámetro para la ondícula madre Daubechies.

w es la ondícula Ricker, x es la señal ruidosa sf es la señal filtrada con escala 'one', $sf1$ es la señal filtrada con 'slm' y $sf2$ es la señal filtrada con 'mlm'.

Los errores relativos se calculan con las siguientes relaciones:

$$E0 = \text{sum}(\text{abs}(w-x)/\text{abs}(w)) \quad E1 = \text{sum}(\text{abs}(sf-w)/\text{abs}(w))$$

$$E2 = \text{sum}(\text{abs}(sf1-w)/\text{abs}(w)) \quad E3 = \text{sum}(\text{abs}(sf2-w)/\text{abs}(w))$$

Para identificar se usarán las siguientes letras R = *rigrsure*, Sq = *sqtwolog*, H = *heursure* y M = *minimaxi*. s = suave y d = duro. O = *one*, S = *slm* y M = *mln*

Tabla 5.2. Errores relativos de la combinación de algunos parámetros para la ondícula madre Daubechies.

Db1-Nivel 1								
ERRORES	Rigrsure -R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3486	0,3378	0,2979	0,3935	0,3416	0,3237	0,3196	0,3715
E1'one'	0,2684	0,2299	0,2485	0,2948	0,2111	0,2251	0,2671	0,2196
E2'sln'	0,2684	0,2299	0,2485	0,2948	0,2111	0,2251	0,2671	0,2715
E3'mln'	0,2684	0,2299	0,2485	0,2948	0,2111	0,2251	0,2671	0,2715

Db3-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3719	0,3463	0,3241	0,3265	0,3237	0,3375	0,3776	0,3219
E1'one'	0,2402	0,241	0,2254	0,2309	0,1964	0,2151	0,2985	0,2533
E2'sln'	0,2402	0,2575	0,2254	0,2309	0,1964	0,2151	0,3001	0,2739
E3'mln'	0,2402	0,241	0,2254	0,2309	0,1964	0,2151	0,2985	0,2533

Db6-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3033	0,3468	0,3156	0,3493	0,3463	0,2914	0,2813	0,3005
E1'one'	0,2294	0,2553	0,2251	0,2654	0,228	0,1866	0,257	0,2037
E2'sln'	0,2322	0,2911	0,2251	0,2654	0,228	0,1866	0,257	0,2037
E3'mln'	0,2294	0,2553	0,2251	0,2654	0,228	0,1866	0,257	0,2037

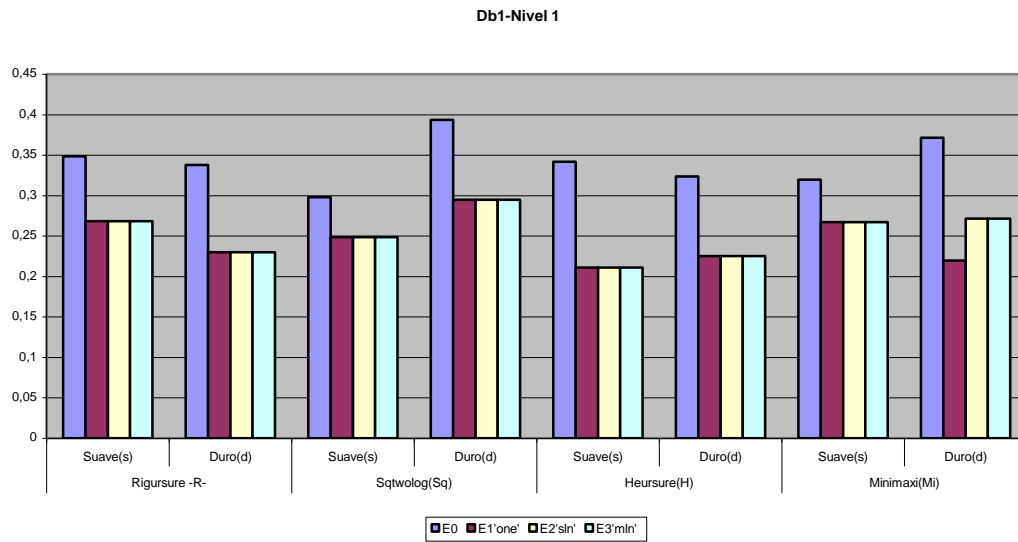
Db9-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3218	0,3666	0,3797	0,3069	0,368	0,3602	0,3047	0,3982
E1'one'	0,244	0,2677	0,2788	0,2023	0,2058	0,2767	0,253	0,3243
E2'sln'	0,244	0,2677	0,2788	0,2023	0,2058	0,2767	0,253	0,3243
E3'mln'	0,244	0,2677	0,2788	0,2023	0,2058	0,2767	0,253	0,3243

Db15-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,357	0,4003	0,2797	0,3686	0,3664	0,3281	0,3001	0,3543
E1'one'	0,2283	0,3305	0,2323	0,2597	0,3159	0,2446	0,2262	0,2551
E2'sln'	0,2283	0,3305	0,2323	0,2597	0,3159	0,2446	0,2262	0,2551
E3'mln'	0,2283	0,3305	0,2323	0,2597	0,3159	0,2446	0,2262	0,2551

En los siguientes gráficos se observa la tendencia de los errores con la combinación de los parámetros para la ondícula madre Daubechies.

La barra violeta es el valor absoluto de la diferencia entre la señal original y la señal ruidosa, la barra vinotinto es la representación del error con la escala 'one', la

barra amarilla representa el error con la escala 'slm' y barra azul claro representa el error con la escala 'mln'.



Fi

gura 5.9 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Db1

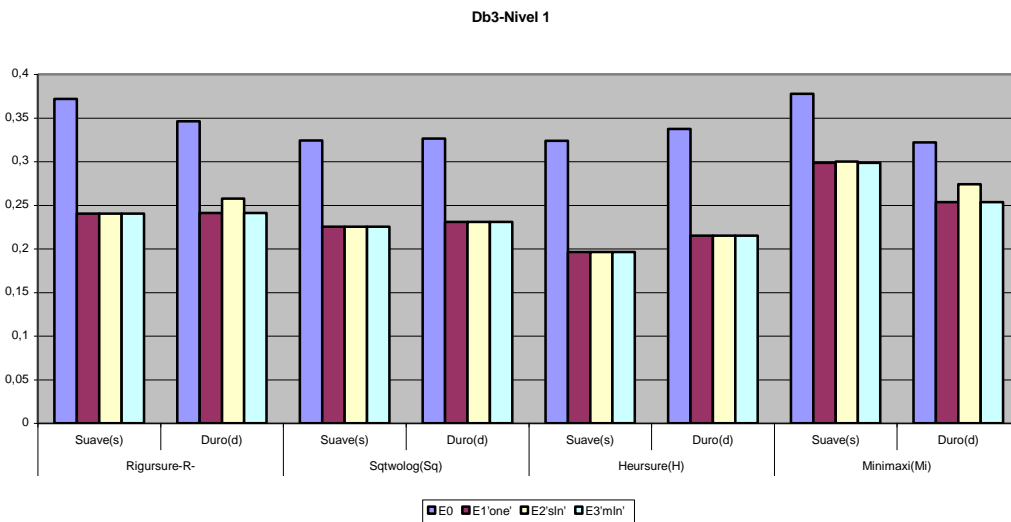


Figura 5.10 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Db3

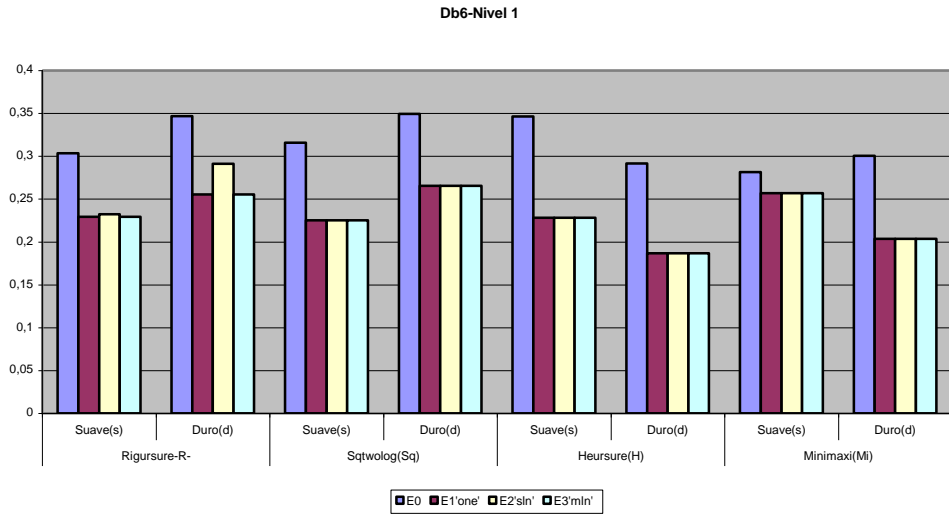


Figura 5.11 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Db6

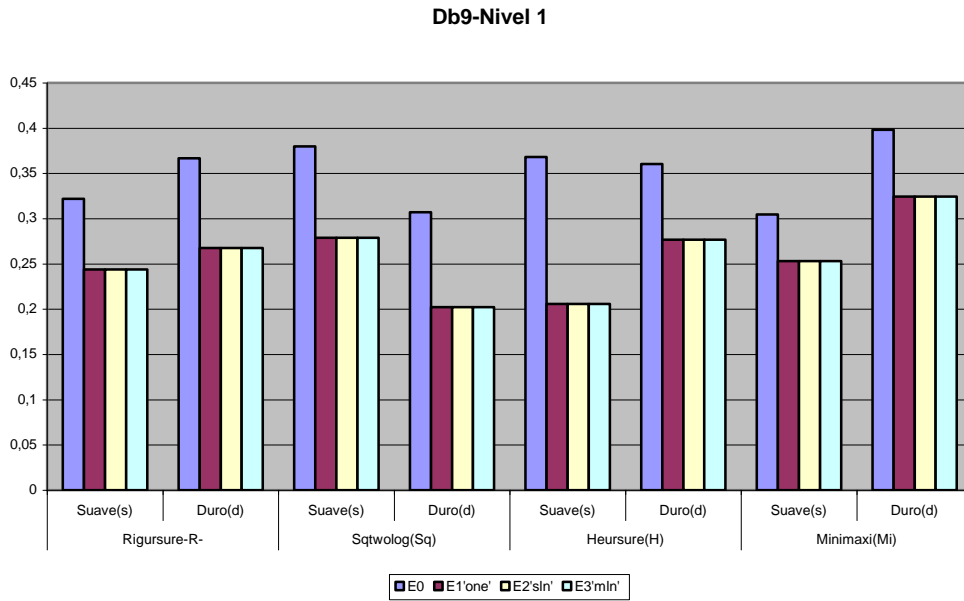
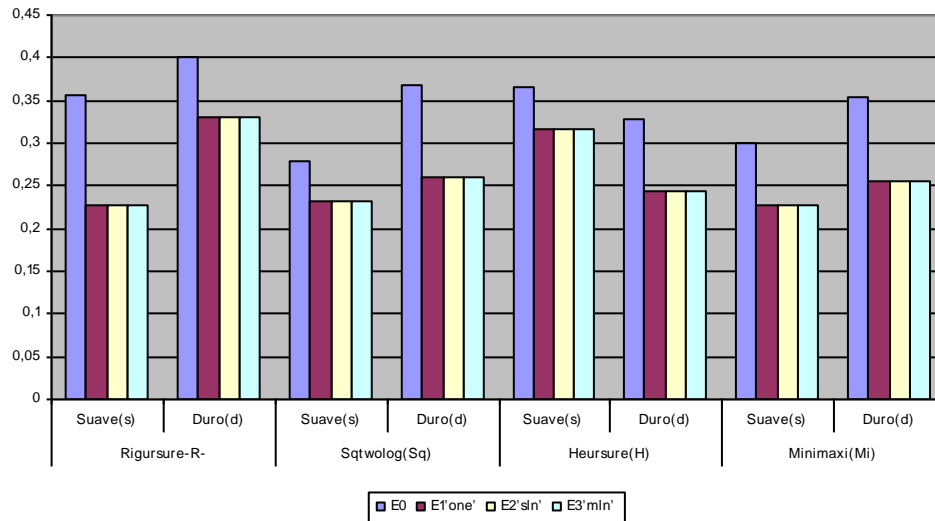


Figura 5.12 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Db9

Db15-Nivel 1



Fig

ura 5.13 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Db15

Se repite el procedimiento anterior, pero ahora con la ondícula Symlet.

Tabla 5.3. Errores relativos de la combinación de algunos parámetros para la ondícula madre Symlet.

Sym1-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure -R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3381	0,3016	0,3089	0,3091	0,3265	0,3556	0,2451	0,2974
E1'one'	0,1894	0,2134	0,2125	0,245	0,1948	0,2891	0,1761	0,1888
E2'sln'	0,1894	0,2638	0,2125	0,245	0,1948	0,2891	0,1761	0,2197
E3'mln'	0,1894	0,2134	0,2125	0,245	0,1948	0,2891	0,1761	0,1888

Sym3-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3061	0,3133	0,2866	0,401	0,3763	0,2989	0,3217	0,2965
E1'one'	0,2286	0,2516	0,2037	0,2564	0,303	0,1964	0,2474	0,2191
E2'sln'	0,2286	0,2516	0,2037	0,2564	0,303	0,1964	0,2474	0,2191
E3'mln'	0,2286	0,2516	0,2037	0,2564	0,303	0,1964	0,2474	0,2191

Sym6-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3354	0,3174	0,3055	0,3464	0,3654	0,3992	0,3334	0,3129
E1'one'	0,2301	0,2757	0,1806	0,2678	0,2597	0,2667	0,254	0,2534
E2'sln'	0,2301	0,2757	0,1806	0,2678	0,2597	0,2667	0,254	0,2534

E3'mln'	0,2301	0,2757	0,1806	0,2678	0,2597	0,2667	0,254	0,2534
---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-------	--------

Sym9-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,3339	0,322	0,3653	0,3431	0,3516	0,3059	0,2928	0,2967
E1'one'	0,2605	0,2302	0,2864	0,2398	0,2375	0,2374	0,2016	0,2456
E2'sln'	0,2605	0,2302	0,2864	0,2398	0,2375	0,2374	0,2051	0,2456
E3'mln'	0,2605	0,2302	0,2864	0,2398	0,2375	0,2374	0,2016	0,2456

Sym15-Nivel 1								
ERRORES	Rigursure-R-		Sqtwolog(Sq)		Heursure(H)		Minimaxi(Mi)	
	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)	Suave(s)	Duro(d)
E0	0,2904	0,3463	0,342	0,3917	0,3431	0,3223	0,3664	0,3535
E1'one'	0,211	0,2625	0,2746	0,2688	0,1967	0,2497	0,2589	0,2346
E2'sln'	0,2123	0,2625	0,2746	0,2688	0,1967	0,2497	0,261	0,2407
E3'mln'	0,211	0,2625	0,2746	0,2688	0,1967	0,2497	0,2589	0,2346

Sym1-Nivel 1

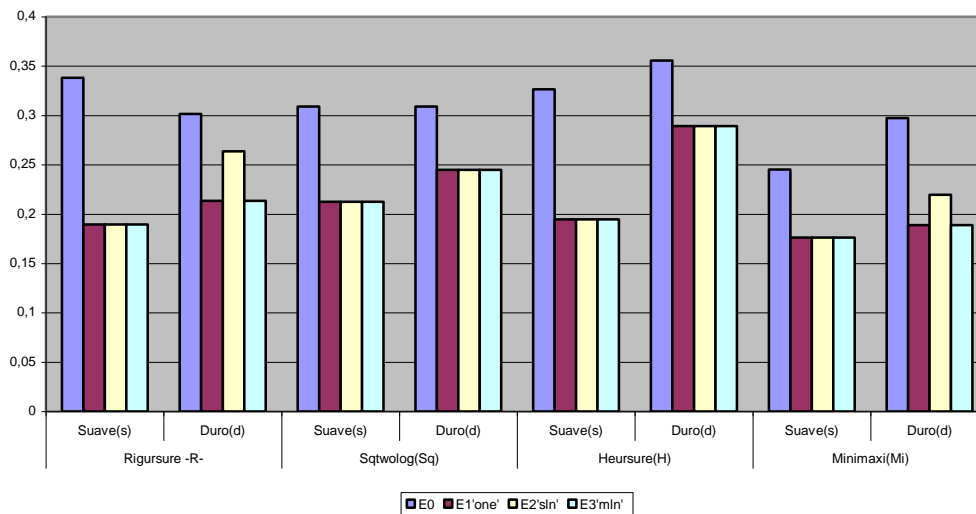


Figura 5.14 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Sym1.

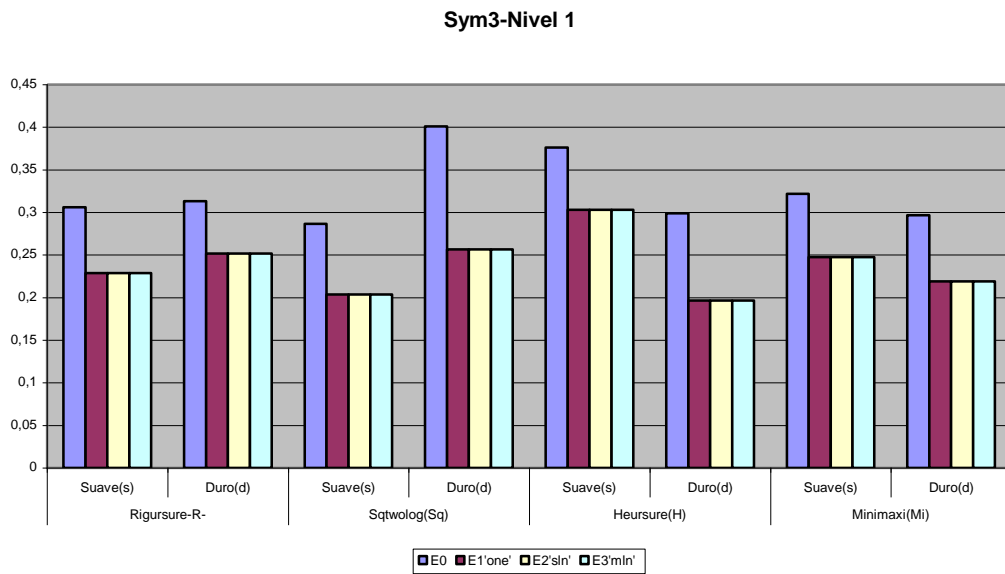


Figura 5.15 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Sym3.

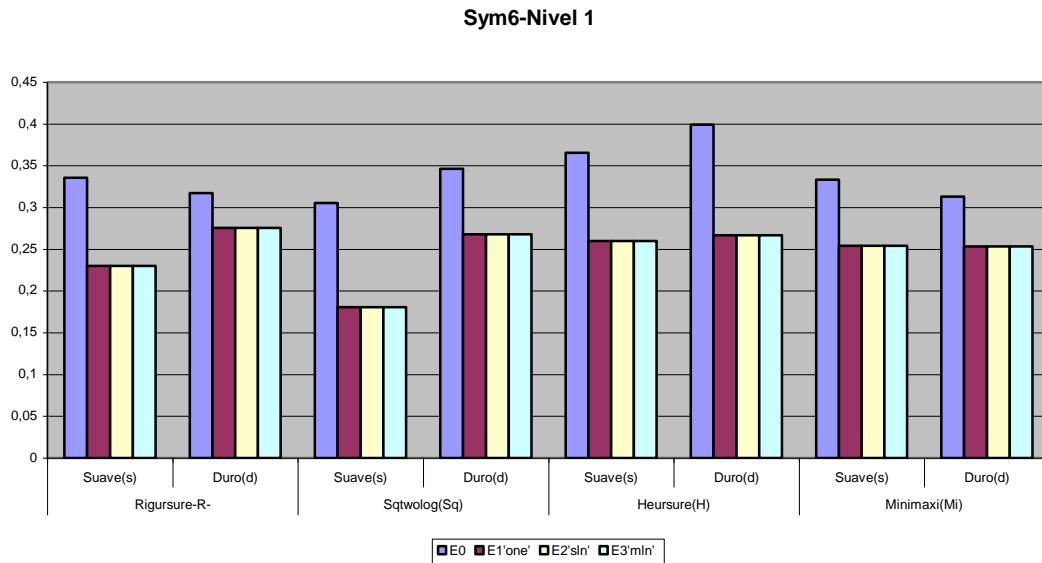


Figura 5.16 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Sym6

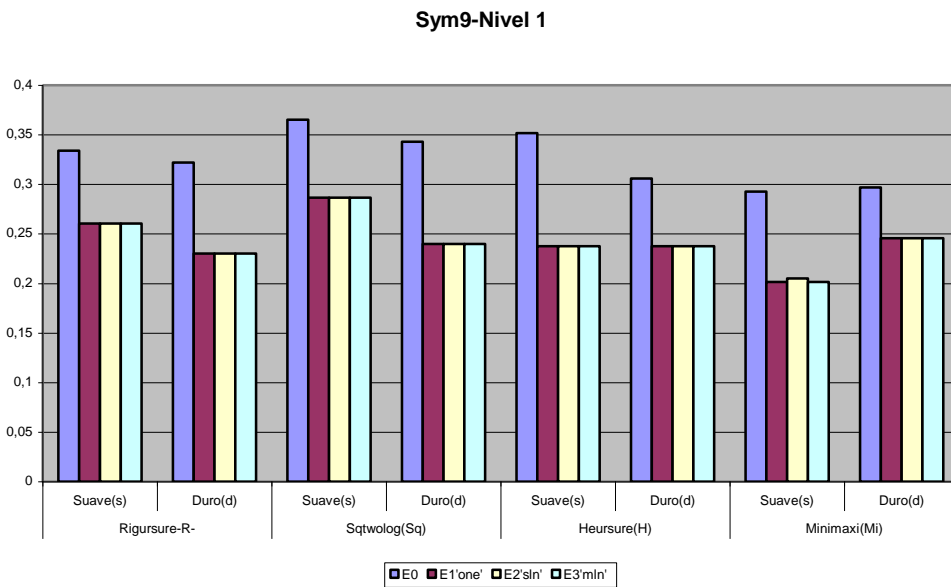


Figura 5.17 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Sym9

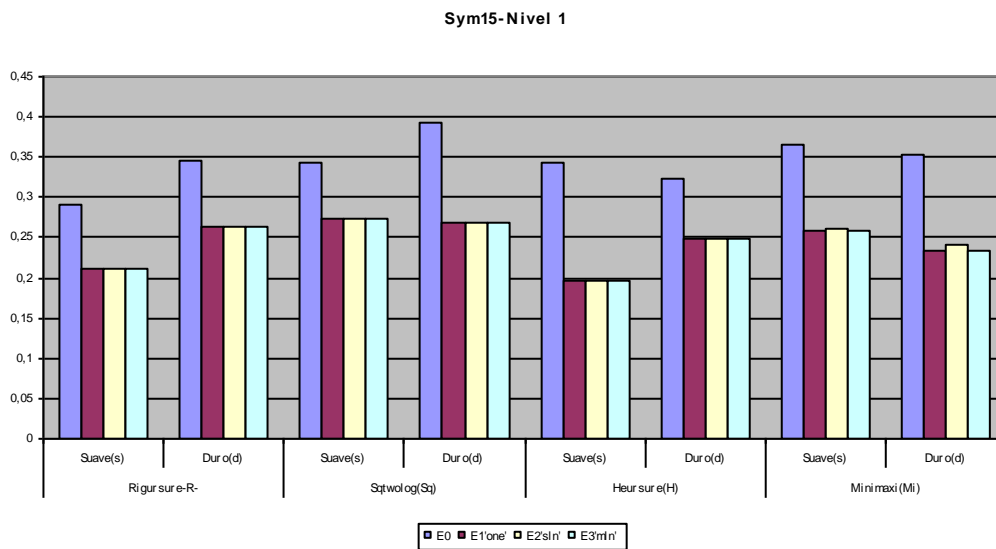


Figura 5.18 Comparación de los errores con la combinación de los parámetros y ondícula fija Sym15

5.3 Análisis de los resultados obtenidos en la variación de los parámetros

Se observa que para las ondículas Daubechies escogidas, la selección de la escala no afecta la calidad de los resultados obtenidos, esto se evidencia porque los valores para E1 'one', E2 'slm' y E3 'mln' son muy semejantes.

Con el umbral se observa que los menores valores de los errores se obtienen para la opción *heursure*.

Con respecto a la selección del umbral de los coeficientes se tiene que con la opción suave se obtienen menores valores en el error.

Con estos resultados, se seleccionará la opción *heursure* para el umbral y la opción suave para el umbral de los coeficientes. La escala se dejará fija en *one*.

Las ondículas que serán usadas para filtrar por el método de la umbralización serán Db1, Db3 y Db9 por obtenerse los menores valores de error en la diferencia de la señal filtrada y la señal original, con un solo nivel de descomposición.

Se observa que para las ondículas Symlet seleccionadas, la selección de la escala no afecta la calidad de los resultados obtenidos, al igual que en el caso de la ondícula Daubechies.

Con la selección del umbral de los coeficientes se tiene que con la opción suave se obtienen menores valores en el error.

Con respecto a la selección del umbral no se tuvo una tendencia definida, aunque el menor valor del error obtenido fue para la opción *minimaxi*.

Con estos resultados, se seleccionará la combinación de los parámetros para la ondícula Symlet de la siguiente manera: la opción *minimaxi* para el umbral y la opción suave para el umbral de los coeficientes. La escala se dejará fija en *one*.

Las ondículas que serán usadas para filtrar por el método Wiener en el dominio de las ondículas serán db6 y Sym6 por obtenerse los menores valores de error en la diferencia de la señal filtrada y la señal original.

Con este análisis se han fijado los parámetros con los que se hará un primer filtrado de las señales ruidosas.

5.4.- Filtrado con Filtro Wiener en el dominio de ondícula

Cuando se hace la separación de la señal en aproximaciones y detalles, se puede asumir [Ghael, Sarkar, Choi, apéndice B] que la mayor parte de la señal deseada se encuentra presente en la aproximación y que el ruido, puede asumirse presente en los coeficientes de los primeros detalles.

Esta hipótesis de trabajo permite obtener un estimado de la señal deseada y del ruido, sin conocimiento previo del ruido presente.

Se propone diseñar un filtro Wiener con los coeficientes de la última aproximación hecha con el método de umbralización y los coeficientes del primer detalles de la señal. El filtro Wiener en el dominio de ondícula se diseña como

$$H = \frac{\theta^2}{\theta^2 + z^2} \quad (5.7)$$

donde θ es la transformada de ondícula de la señal deseada y z es la transformada de ondícula de ruido. Se debe usar una transformada distinta a la usada en el método de la umbralización.

Para aplicar el filtro Wiener en el dominio de ondículas se sigue el mismo método que para su aplicación en el dominio de Fourier. La diferencia es que la señal de entrada será la señal aproximada obtenida del filtrado por el método de umbralización y el ruido quedará determinado por los coeficientes de los detalles a un nivel 1.

En resumen, los pasos a seguir para el filtrado con los dos métodos en el dominio de ondículas, se presenta a continuación:

1. Se toma la señal ruidosa y se aplica Transformada de Ondícula con un umbral fijo y un nivel de descomposición uno, obteniéndose las aproximaciones y detalles.
2. Se aplica la transformada inversa a la aproximación, obteniéndose la señal filtrada y se aplica la transformada inversa a los detalles para obtener los coeficientes del ruido. Con ello se obtiene una nueva señal ruidosa $x' = A_1 + d_1$
3. A esta nueva señal ruidosa (señal filtrada 1) se le aplica nuevamente la transformada de ondícula, pero con otra ondícula madre (se usará db6 y sym6), obteniéndose $y = \theta + z$
4. Se diseña el filtro Wiener con la ecuación 5.7
5. La señal filtrada se obtiene al multiplicar la transformada de ondícula de la señal ruidosa con el filtro.

6. Se aplica la transformada inversa de Ondícula para obtener la señal filtrada en el dominio del tiempo.

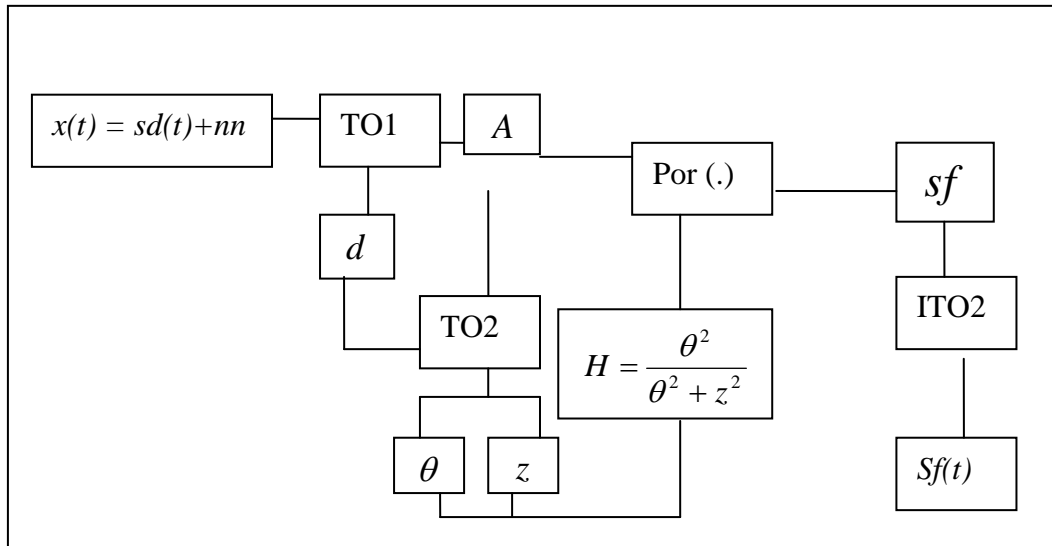


Figura 5.19. Esquema del filtrado en el dominio de ondículas.

En la tabla 5.4 se presentan los resultados del análisis hecho a las señales ruidosas, con db1, db3 y db9 para el primer filtrado y db6 para la aplicación del filtro Wiener. En la tabla 5.5 se presentan los resultados obtenidos cuando el filtro Wiener se aplica con Sym6.

$$error_{dwt1} = \frac{\sum(\text{abs}(w-x))}{\sum(\text{abs}(w))}$$

$$error_{dwt2} = \frac{\sum(\text{abs}(xd-x))}{\sum(\text{abs}(xd))}$$

$$error_{dwt3} = \frac{\sum(\text{abs}(xd1-x))}{\sum(\text{abs}(xd1))}$$

w es la ondícula Ricker, x señal ruidosa, xd es la señal filtrada con método de la umbralización y $xd1$ es la señal filtrada con el filtro Wiener en el dominio de ondículas.

Tabla 5.4. Errores relativos de las señales ruidosas con distintos ruidos utilizando el método de la umbralización con db1 y el filtro Wiener en el dominio de ondícula con db6.

	Db1 y Db6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0327	0,1899	0,3006	0,3108	0,4522
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037
Errorrdwt2	0,0497	0,2599	0,4612	0,4874	0,6023
Errorrdwt3	0,0801	0,2416	0,4601	0,449	0,5682
	Db3 y Db6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0395	0,1849	0,3072	0,3353	0,4134
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037
Errorrdwt2	0,0567	0,2001	0,3999	0,3729	0,5832
Errorrdwt3	0,0361	0,1952	0,3892	0,3461	0,5378
	Db9 y Db6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0443	0,1918	0,3046	0,3226	0,469
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037
Errorrdwt2	0,058	0,2221	0,398	0,4427	0,6582
Errorrdwt3	0,0462	0,2165	0,3859	0,4245	0,633

Tabla 5.5. Errores absolutos de las señales ruidosas con distintos ruidos utilizando el método de la umbralización con db1 y el filtro Wiener en el dominio de ondícula con sym6.

	Db1 y Sym6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0361	0,1933	0,2866	0,3454	0,5649
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037
Errorrdwt2	0,1418	0,2871	0,4699	0,4868	0,8632
Errorrdwt3	0,0763	0,2455	0,4445	0,4388	0,791
	Db3 y Sym6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0345	0,1795	0,2963	0,3434	0,5078
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037
Errorrdwt2	0,0511	0,2279	0,4547	0,4301	0,7082
Errorrdwt3	0,0332	0,2124	0,4467	0,411	0,6974
	Db9 y Sym6				
	ds1-0.025	ds2-0.125	ds3-0.2236	ds4-0.225	ds5-0.325
Errorrdwt1	0,0381	0,1743	0,2755	0,3701	0,5203
Errorfft2	0,0577	0,179	0,354	0,3133	0,6037

Errordwt2	0,0387	0,1915	0,3376	0,4858	0,7564
Errordwt3	0,0372	0,1813	0,3295	0,5011	0,7455

En las siguientes figuras, se presenta la señal ruidosa, la señal obtenida luego del primer filtrado con el método de la umbralización y la señal obtenida por el método de aplicar Wiener en el dominio de ondículas.

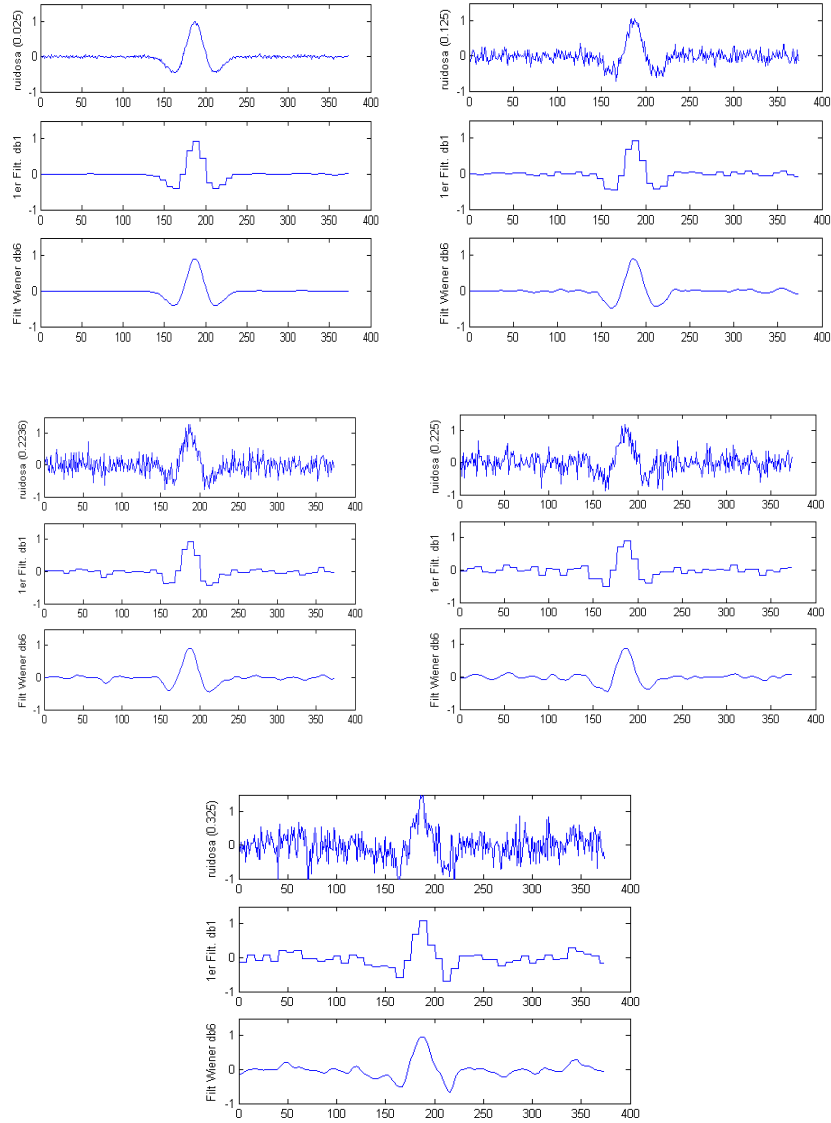


Figura 5.20 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db1 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con db6.

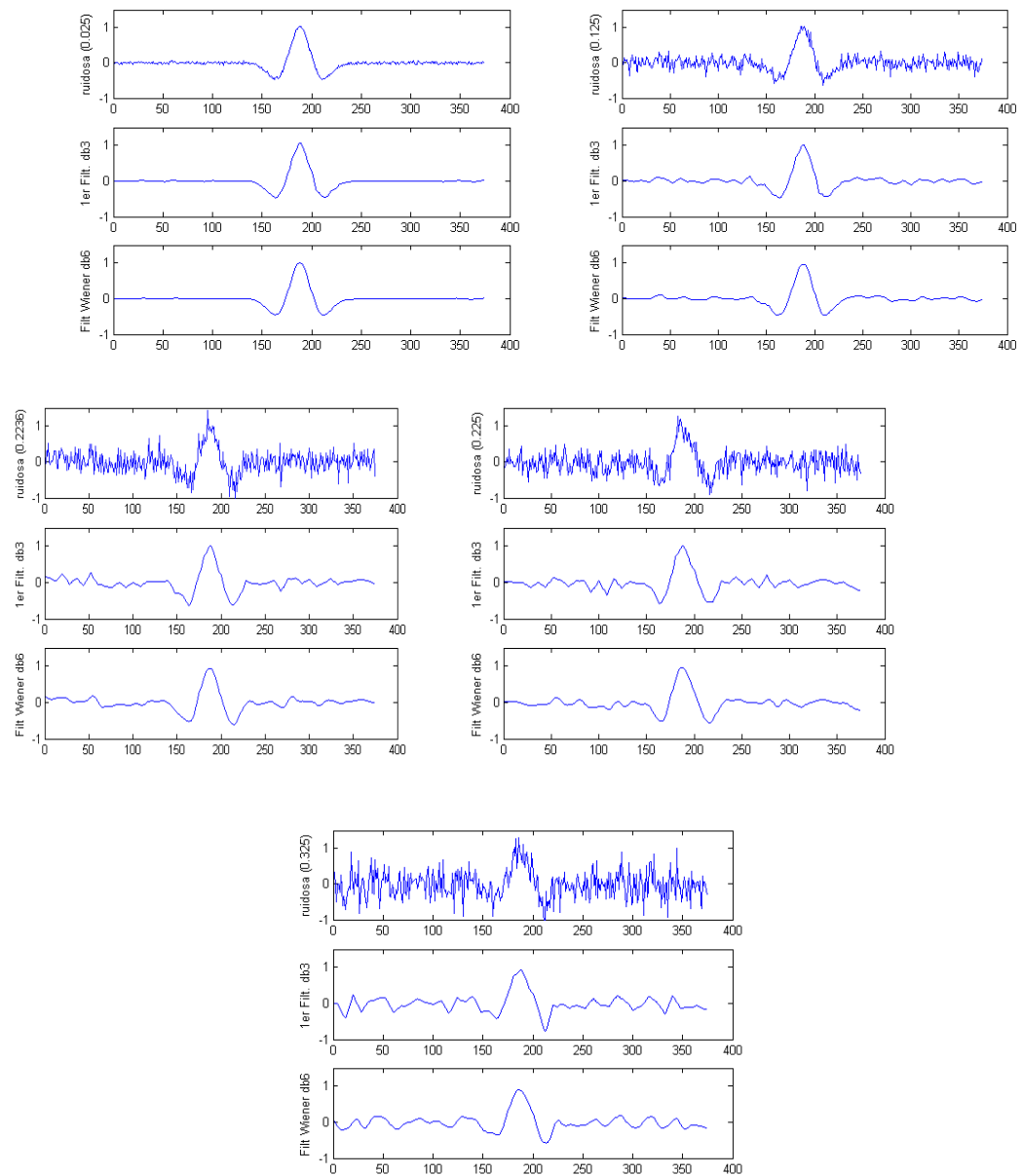


Figura 5.21 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db3 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con db6.

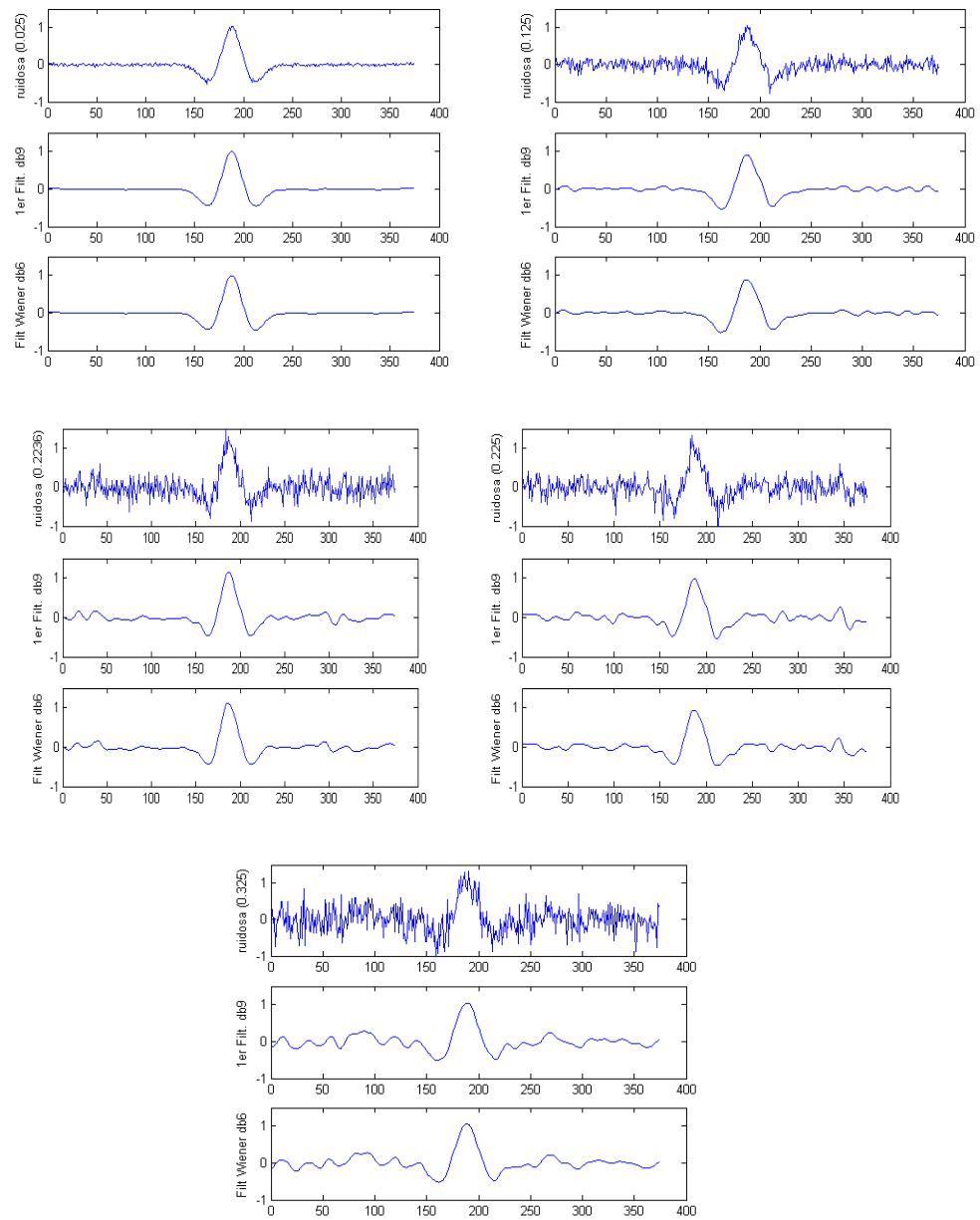


Figura 5.22 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db9 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con db6.

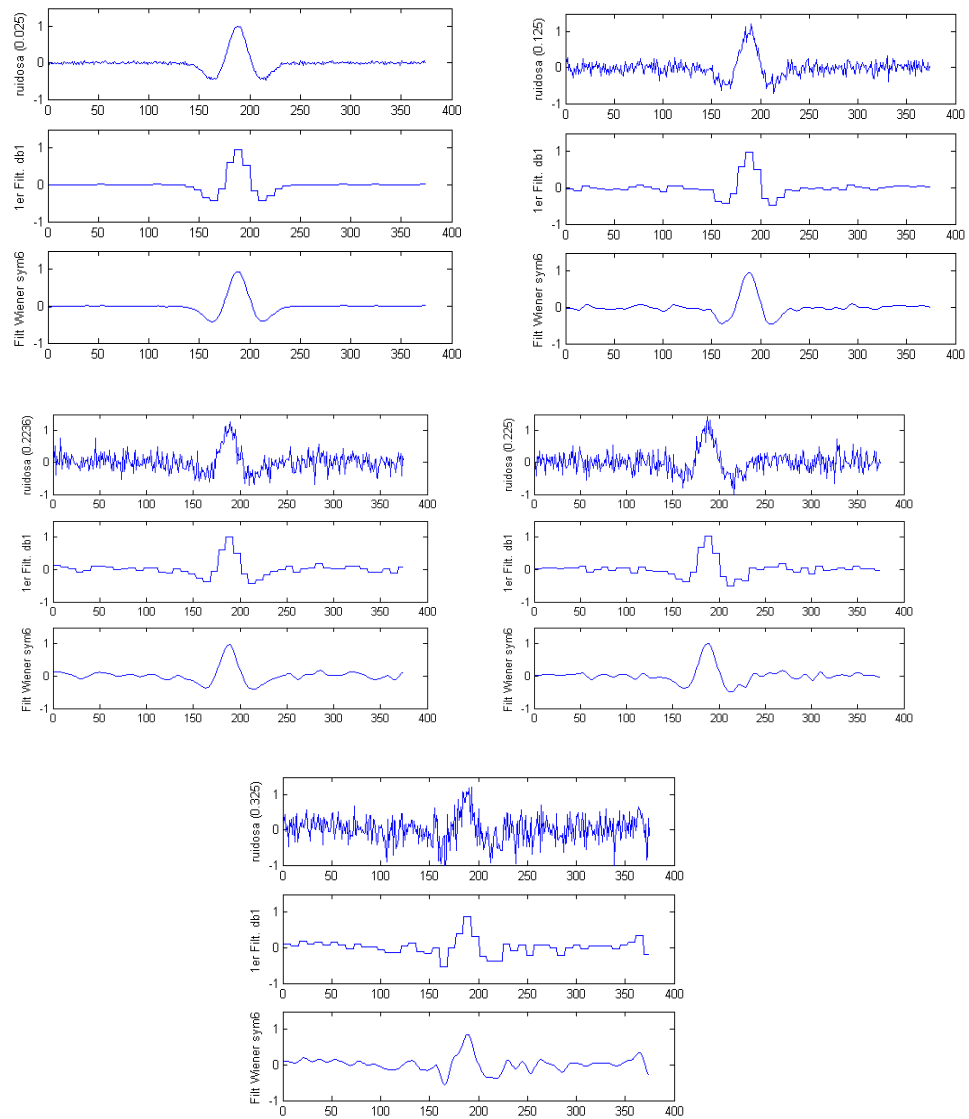
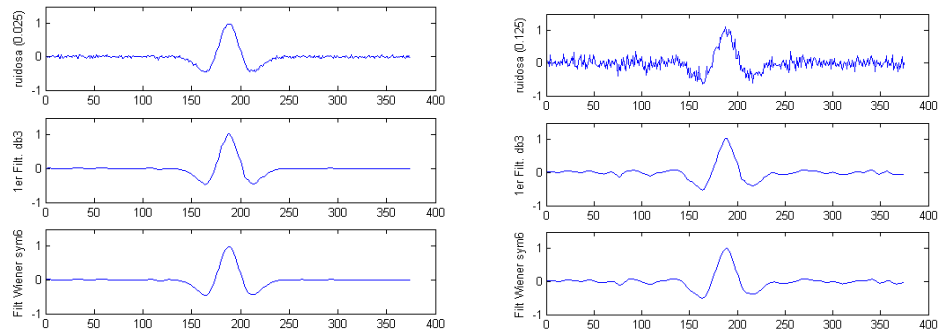


Figura 5.23 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db1 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con Sym6.



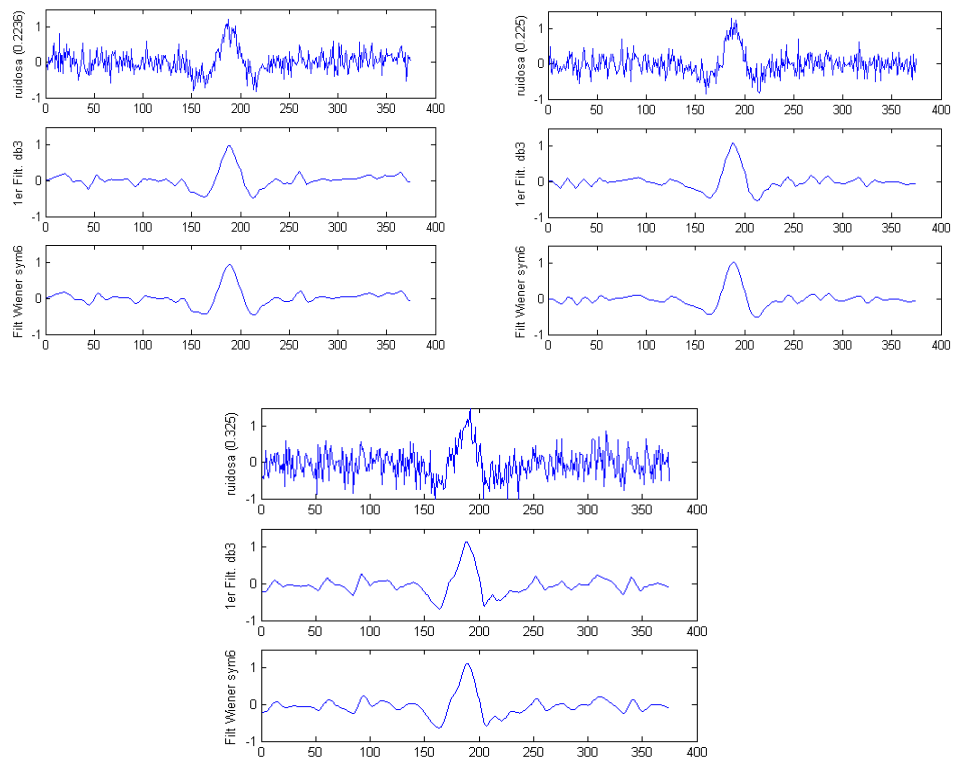


Figura 5.24 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db3 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con Sym6.

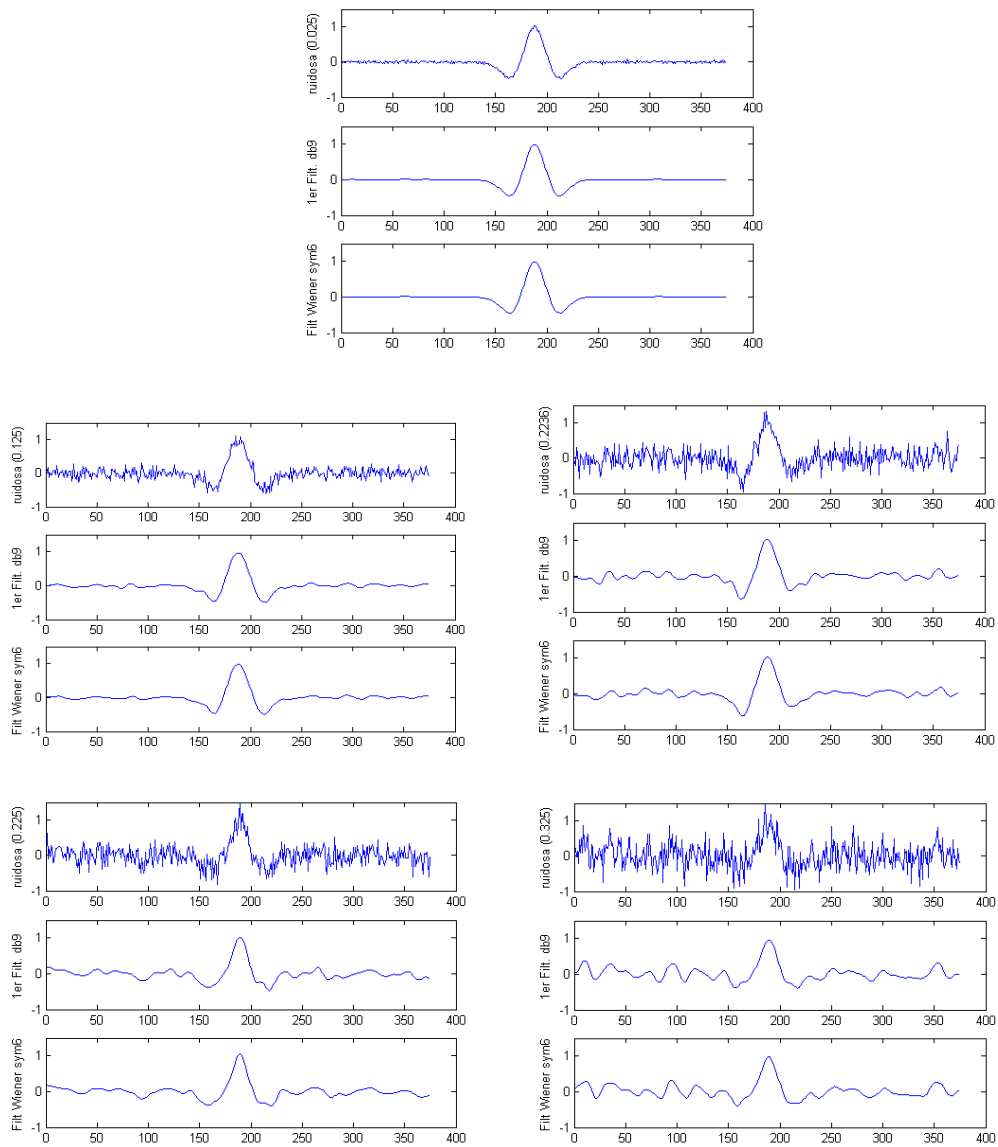


Figura 5.25 Señal ruidosa, señal filtrada con el método de la umbralización con db9 y señal filtrada con Wiener en el dominio de ondículas con Sym6.

En los gráficos que se presentan a continuación, se hace una comparación de los errores obtenidos con los distintos métodos. La barra en violeta es el error relativo del valor absoluto de la diferencia de la señal original y la señal ruidosa sobre el valor absoluto de la señal original. La barra vinotinto representa el error obtenido con el análisis de filtro Wiener en el dominio de Fourier. La barra amarilla representa el

error del filtrado con el método de la umbralización y la barra azul claro representa el error obtenido de analizar con el filtro Wiener en el dominio de la frecuencia.

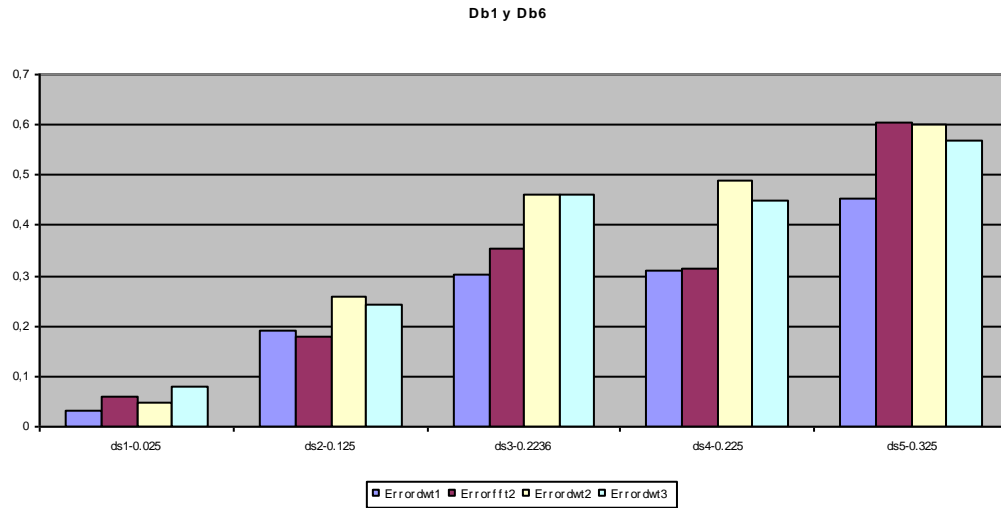


Figura 5.26. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

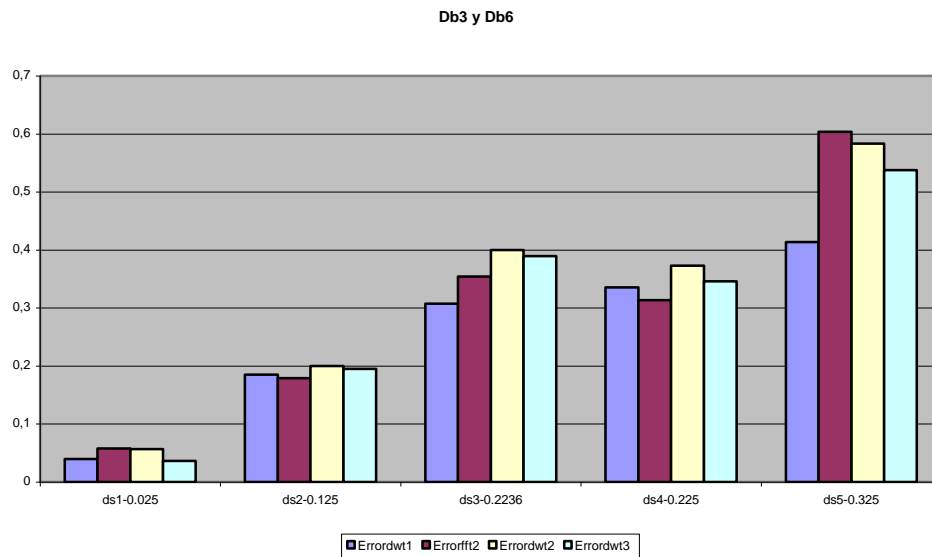


Figura 5.27. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

Db9 y Db6

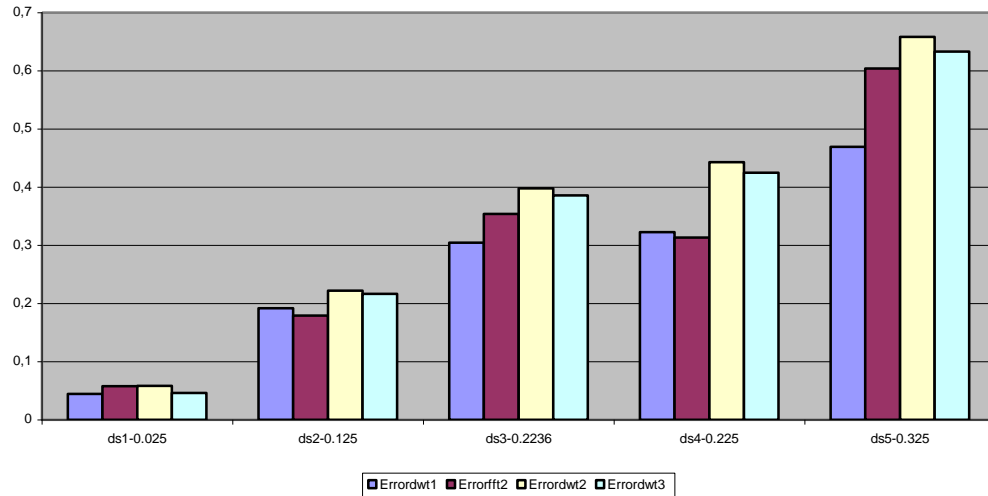


Figura 5.28. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

Db1 y Sym6

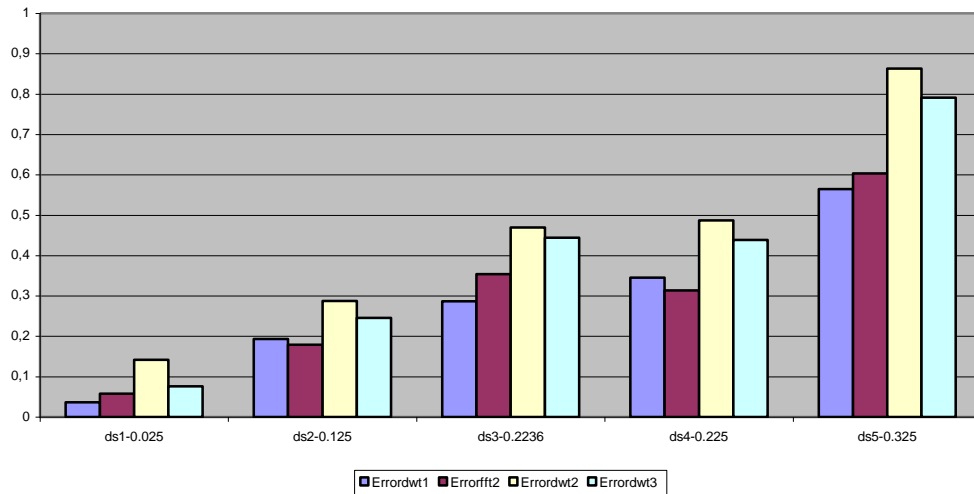


Figura 5.29. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

Db3 y Sym6

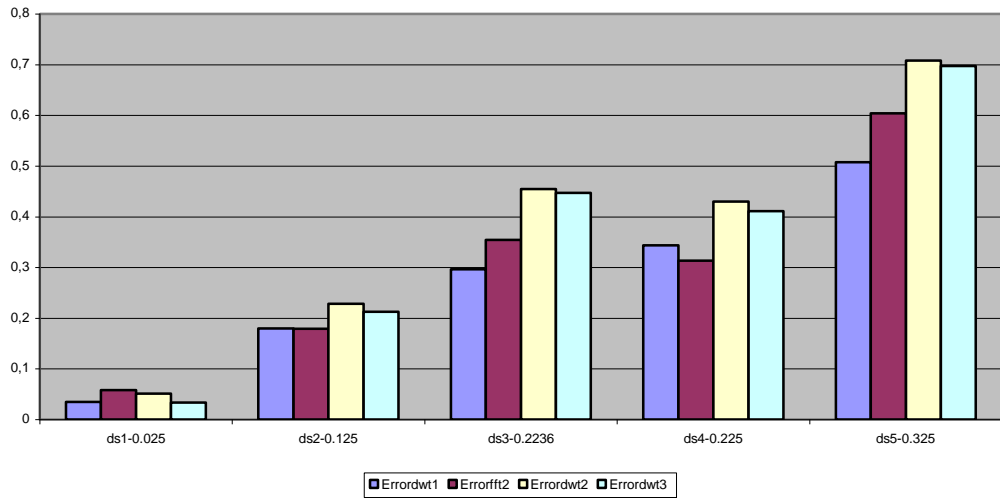


Figura 5.30. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

Db9 y Sym6

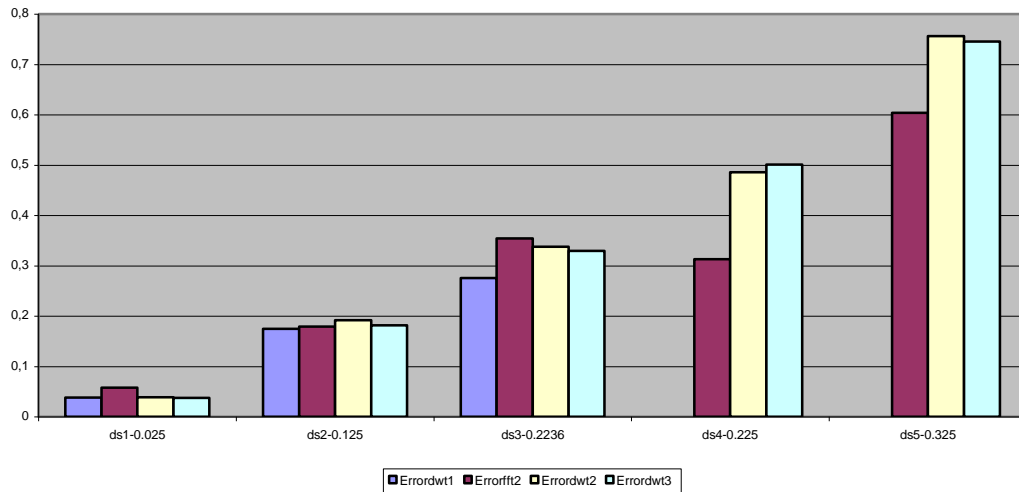


Figura 5.31. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con el método de la umbralización y la señal ruidosa. La barra azul cielo es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa.

5.5 Análisis de los resultados obtenidos al filtrar la señal ruidosa con filtro Wiener en el dominio de Fourier y en el dominio de Ondículas

Se observa que a medida que aumenta el ruido en la señal, los errores aumentan y las técnicas de filtrado son menos eficientes.

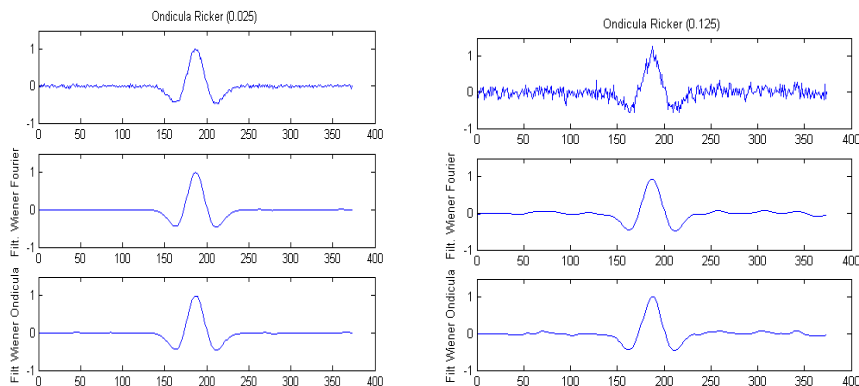
Cuando el error presente en la señal es pequeño, no hay mucha diferencia entre los tres métodos de filtrado.

Luego de aplicar el filtro Wiener en el dominio de Ondículas se obtiene una mejor representación de la señal y el error disminuye.

El error obtenido con el análisis de Fourier es menor porque el diseño del filtro se realiza con conocimiento previo del ruido presente en la señal ruidosa. A diferencia del análisis de Ondícula en donde no se conoce previamente la relación señal-ruido presente.

Los menores valores de errores en el dominio de ondícula se obtuvieron cuando se realizó el primer filtrado con db3 y la aplicación del filtro Wiener con db6. También se tienen menores valores al aplicar db9 para el primer filtrado y sym6 para la aplicación del filtro Wiener.

Se procede luego, a aplicar el filtro Wiener en el dominio de Ondículas, con las ondículas db9 y sym6 y un nivel de descomposición tres, en donde se obtuvieron los menores valores del error y comparar los resultados con el filtrado en el dominio de Fourier. Los resultados se muestran en la figura 5.32 y en figura 5.33 se presentan los errores obtenidos.



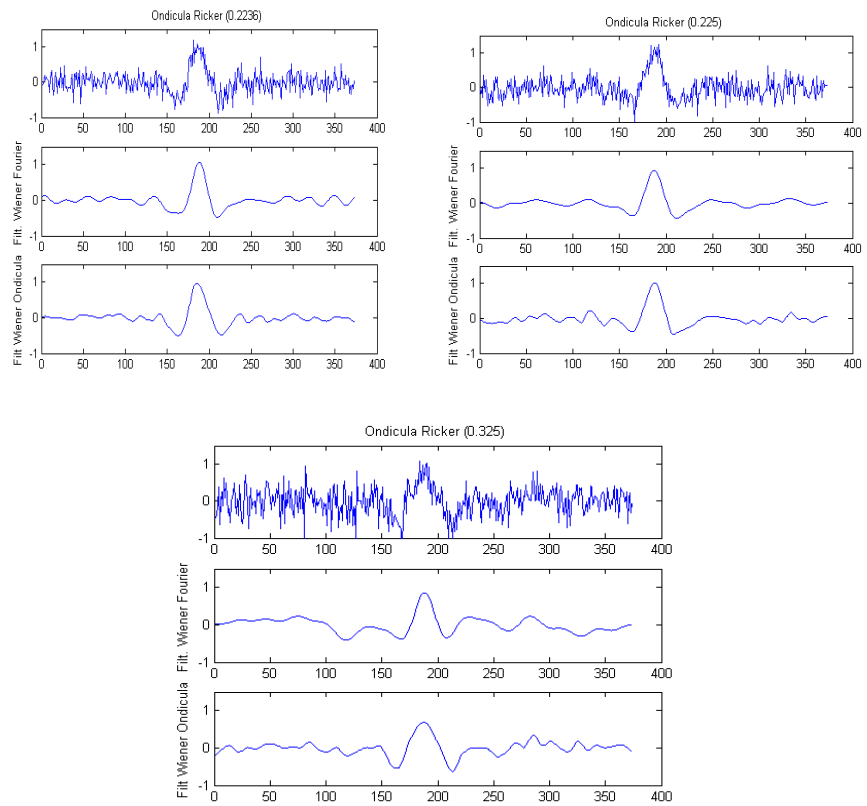


Figura 5.32. Señal ruidosa, señal filtrada con el método Fourier y señal filtrada con el método de Ondículas con los mejores parámetros y un nivel de descomposición tres.

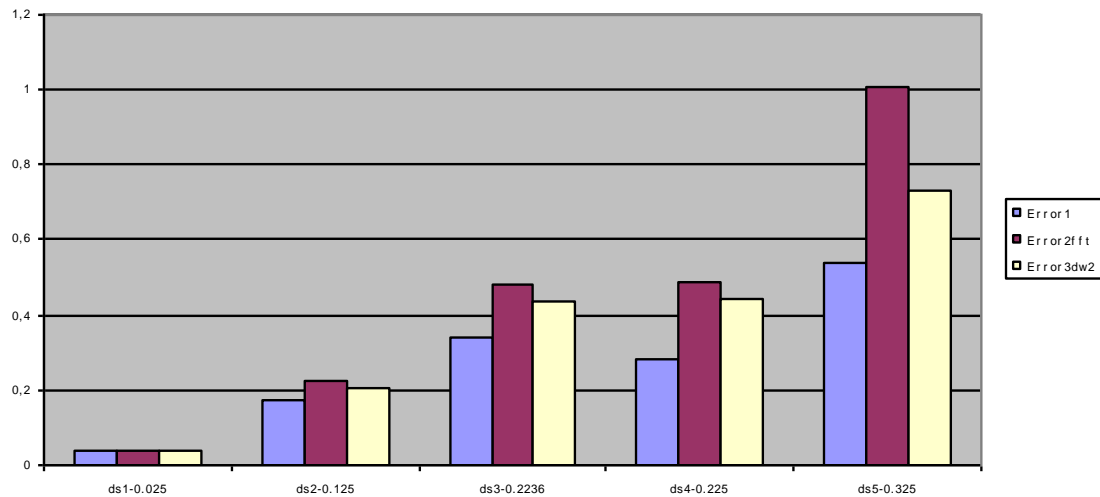


Figura 5.33. Tabla comparativa de errores. La barra violeta es el error relativo entre la señal ruidosa y la señal original. La barra vinotinto es el error de la señal filtrada con Fourier y la señal ruidosa. La barra amarilla es el error entre la señal filtrada con Wiener en dominio de ondículas y la señal ruidosa con los mejores parámetros.

Luego de hacer el análisis a la ondícula Ricker, se procedió a convolucionar esta señal con otra señal y se aplica los métodos antes estudiados con las combinaciones en donde se obtienen los mejores resultados. En las siguientes gráficas se observa la señal ruidosa en la parte superior, en la parte central se tiene a la señal ruidosa filtrada con Wiener en el dominio de Fourier y en la parte inferior, se presenta la señal filtrada con Wiener en el dominio de Ondículas.

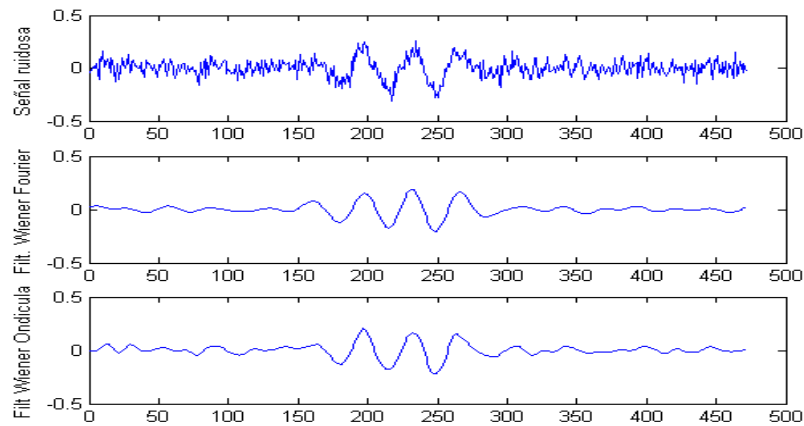


Figura 5.34 Los errores obtenidos son. Error entre la señal original y la ruidosa: 0.3621. Error entre la filtrada con Fourier y la ruidosa: 0.4523. Error entre la filtrada con Ondícula y la ruidosa: 0.3978.

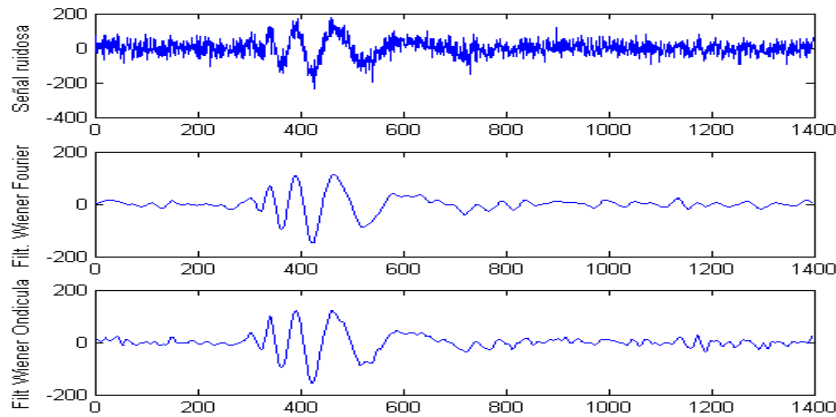


Figura 5.35 Los errores obtenidos son. Error entre la señal original y la ruidosa: 0.3933. Error entre la filtrada con Fourier y la ruidosa: 0.5008. Error entre la filtrada con Ondícula y la ruidosa: 0.4364.

Se observa un buen filtrado con ambas técnicas, aunque cuando se seleccionan los mejores parámetros para el análisis de Ondículas se tiene que la técnica de Ondículas es más eficiente que la técnica de Fourier. La diferencia principal radica en que el diseño del filtro Wiener en el dominio de Fourier se realiza con conocimiento previo del ruido en la señal mientras que el diseño del filtro Wiener en el dominio de Ondículas, extrae la información de la señal deseada y del ruido de la señal ruidosa, lo que hace que su aplicación tenga ventajas en el análisis de datos experimentales.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Para el análisis geofísico de cualquier señal, son muy útiles aquellas herramientas que ofrecen la posibilidad de examinar la variación de un proceso a diferentes escalas. También es muy importante contar con bases matemáticas apropiadas, que permitan que la función núcleo se adapte cambios presentes en la señal.

La transformada de ondículas ofrece tales herramientas, por ello su uso se ha extendido a muchas ramas de la ciencia y la ingeniería. [Foufoula, 1994; Robinson, 1967; Polikar, 2001]

En este trabajo de investigación se han presentado algunas diferencias y semejanzas entre el análisis basado en la técnica de Fourier y en la técnica de ondículas. También se han puntualizado las propiedades más importantes de la transformada de ondículas, para comprender su atractiva aplicación a la geofísica.

En general:

- Se ha verificado la utilidad de la Transformada de Ondículas como una poderosa herramienta para eliminar ruido blanco de las señales sísmicas.
- Se ha presentado una comparación entre ambas técnicas, entregándose una perspectiva global que permitirá, elegir la técnica que más se adapte a la señal que va a ser analizada.
- La Transformada de Ondículas hace uso de diferentes funciones núcleos que se adaptan a la señal, según la forma que ésta tenga. La Transformada de Fourier analiza la señal con dos funciones: senos y cosenos.

- Las funciones de ondículas tienen duración finita, mientras que las funciones senos y cosenos son de duración infinita, lo que limita sus posibilidades de analizar adecuadamente una señal con cambios abruptos y discontinuidades.

Con respecto a los resultados obtenidos.

- Luego de variar algunos de los parámetros para implementar la técnica de la umbralización a la ondícula Ricker. Se recomienda usar la opción `heursure` para el umbral de las aproximaciones cuando la ondícula usada es de la familia Daubechies. Con respecto a la selección del umbral de los coeficientes se sugiere la opción suave por obtenerse los menores valores en el error. Esto se evidencia en la tabla 5.2 y en las figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13.
- Con respecto a la ondícula Symlet no se tiene una tendencia definida, pero en las ondículas seleccionadas se observa que la menor discrepancia se obtiene con la opción `minimaxi`. Esto se demuestra en la tabla 5.3 y en las figuras 5.14, 5.15, 5.16 5.17 y 5.18.
- Para la separación de la señal en aproximaciones y detalles, se sugiere una ondícula de orden mayor a seis y usar un nivel de descomposición tres. Con esos parámetros se obtienen una señal mejor filtrada, que será usada para el diseño del filtro Wiener. Si por el contrario, se desea preservar componentes de alta frecuencia por considerar que contienen información pertinente, se recomienda usar ondículas de menor orden y un solo nivel de descomposición.
- Para la ondícula Ricker el diseño del filtro Wiener en el dominio de Ondículas, presenta los mejores resultados con la Ondícula Daubechies de orden 6 y Symlet de orden 6.
- En las tablas 5.26 hasta la tabla 5.31, en donde se presentan los errores del filtrado con filtro Wiener en el dominio de Fourier y filtro Wiener en el dominio de Ondículas, se tienen buenos resultados con ambas

técnicas. Los menores valores del error se presenta con la técnica de Fourier, esto se explica porque para diseñar el filtro Wiener en el dominio de Fourier se usa el conocimiento previo que se tiene del ruido presente en la señal.

- Con la técnica de la umbralización se puede hacer un estimado de la señal deseada y del ruido presente en la señal de entrada. Esto permite diseñar un filtro Wiener en el dominio de Ondícula, sin conocimiento del ruido presente en la señal, lo que hace que esta técnica sea muy útil de aplicar a situaciones experimentales.
- En la figura 5.32 se aplicó el filtrado a la ondícula Ricker en el dominio de Ondículas con los mejores parámetros, es decir, los parámetros en donde se obtienen los menores valores del error y se compara con el filtrado con la técnica de Fourier. En la figura 5.33 se presentan los errores y se observa que se obtienen los menores valores del error con el análisis de Ondículas.
- En las figuras 5.34 y 5.35 se ha hecho el análisis de filtrado a la convolución de la ondícula Ricker con otra señal. Puede observarse que también se obtiene menor valor del error con la técnica de Ondículas que con la técnica de Fourier. Por ello la Técnica de Ondículas se presenta como mejor alternativa cuando se analizan señales, en donde no se tiene conocimiento previo del ruido que la misma contiene.
- Se recomienda realizar un estudio de la aplicación de esta técnica al área de Sísmica de Reflexión, en donde se tiene que en las reflexiones profundas, prevalecen las bajas frecuencias mientras que en las reflexiones someras, prevalecen las altas frecuencias (esto originado por la absorción natural de las altas frecuencias en el recorrido de la onda sísmica, en el subsuelo). Por ello, la aplicación de esta técnica de filtrado en donde se hace la separación de las altas y bajas frecuencias de la señal ofrece una excelente alternativa de análisis.

APÉNDICE A

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Podemos construir una función f cuya energía esté bien localizada en tiempo y cuya transformada de Fourier \hat{f} tenga una energía concentrada en una pequeña región de frecuencias.

La delta de Dirac $\delta(t-u)$ tiene un soporte restringido en $t=u$ pero su transformada de Fourier $e^{-i\omega u}$ tiene una dispersión uniforme sobre todas las frecuencias.

Sabemos que $|\hat{f}(\omega)|$ decae rápidamente a altas frecuencia sólo si f tiene variaciones locales en el tiempo.

Para reducir la dispersión en el tiempo de f podemos escalar ésta por $s < 1$ mientras mantenemos constante su energía total.

$$\text{Si } f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \text{ entonces } \|f_s\|^2 = \|f\|^2$$

La transformada de Fourier $\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{s}\hat{f}(s\omega)$ es dilatada por $1/s$ con lo que se verifica que se pierde localización en frecuencia a medida que gana en tiempo.

Las concentraciones de energía y tiempo son restringidas por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg. Este principio tiene una interpretación particularmente importante en mecánica Cuántica como una incertidumbre en la posición y el momentum de una partícula libre.

El estado de una partícula unidimensional está descrito por una función de onda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

La densidad de probabilidad que esta partícula esté localizada en t es

$$\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2.$$

La densidad de probabilidad de que su momento sea igual a ω es

$$\frac{1}{\|f\|^2 2\pi} |\hat{f}(\omega)|^2$$

La localización promedio de esta partícula viene dada por

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt$$

y el momento promedio

$$\xi = \frac{1}{\|f\|^2 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Las varianzas alrededor de esos valores promedios son respectivamente

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |f(t)|^2 dt \quad \text{y} \quad \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|f\|^2 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

El σ_t más grande está relacionado con la incertidumbre en la posición de la partícula libre, mientras que el σ_ω más grande se relaciona con la incertidumbre en el momento.

Teorema del Principio de Incertidumbre de Heisenberg

La varianza temporal y la varianza de frecuencia de $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisface

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}$$

Esta inecuación se convierte en igualdad si y sólo si

$$(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 \text{ tal que } f(t) = a \exp(i\xi t - b(t-u)^2)$$

En mecánica Cuántica, este teorema muestra que no puede reducirse arbitrariamente la posición y el momentum de una partícula libre.

En términos de Procesamiento de Señales, la gaussiana modulada dada por la expresión anterior que tiene un mínimo de localización tiempo frecuencia son llamados átomos de Gabor.

APÉNDICE B

REFERENCIAS INTERNET

La siguiente lista es una recopilación de la bibliografía consultada en internet.

1. <http://www.stats.bris.ac.uk/pub/reports/Wavelets/WavByTop.html>

Artículos y papers de ondículas aplicado a problemas de estadística principalmente.

2. <http://www.oslo.sintef.no/wavelets/theory.html>

Descripción y Teoría sobre Análisis Multi - Resolución.

3. <http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>

An introduction to wavelets analysis, ISBN 0-8176-3962-4, Library of Congress Cataloging in Publication Data. 7-115.

R.Polikar, “The Wavelet Tutorial”,

4. http://www.smi.hst.aau.dk/~vhooraz/tesis_wavelet.pdf

Procesamiento Digital de Señales Acústicas utilizando Wavelets.

Faundez, Pablo e-mail: pfaundez@fci.uach.cl, Fuentes, Alvaro, e-mail: afuentes@fci.uach.cl

5. <http://www.miba.auc.dk/~kdn/undervis/candidates.html>

Artículos y papers de teoría de ondículas

6.- http://www.ercim.org/publication/Ercim_News/enw34/temme.html

Temme, Nico ERCIM News No.34 - July 1998, The Use of Wavelets in Seismic and Geophysics.

7.- <http://mceer.buffalo.edu/publications/resaccom/03-P06/webpdfs/04Politis.pdf>

Comparación de distintas técnicas para analizar una señal.

8.- <http://www.geology.wisc.edu/~hjzhang/Reviewed/Zhang.autopick.BSSA.03.pdf>

Uso de ondículas para analizar señales

9.- http://www.ercim.org/publication/Ercim_News/enw41/nieland.html

Información de terremotos con el uso de ondículas.

10.- http://cgiss.boisestate.edu/~routh/seg2003_wavelets.pdf

Mapeo de una señal en tiempo frecuencia usando teoría de ondículas

11.- <http://www.stw.nl/projecten/C/cwi/cwi3403.html>

Análisis de señale sísmicas

12.-

<http://www.google.co.ve/search?hl=es&q=deconvolution++wiener&meta>

Deconvolucion Wiener

13.- <http://www.ce.berkeley.edu/~glaser/documents/JASA-minimax.pdf>

Ching, Jianye, Albert C. To, and Steven D. Glaserb Microseismic source deconvolution: Wiener filter versus minimax, Fourier versus wavelets, and linear versus nonlinear,

14.- <http://users.ce.ufl.edu/~kgurl/Papers/wave.pdf>

Kareem, Ahsan and Kurtis Gurley Applications of Wavelet Transforms in Earthquake, Wind and. Ocean Engineering.

15.-

<http://www.bosai.go.jp/library/pub/report/PDF/66/66kinoshita.pdf>

Filtros digitales para procesar señales sísmicas

16.- <http://www.dspguide.com/whatdsp.htm>

Procesamiento digital de señales

17.- <http://www.dsp.rice.edu/~riedi>.

Rice Riedi, Rudolf H., Multifractals and wavelets: A potential tool in geophysics.

18. - <http://web.syr.edu/~tksarkar>

Sarkar Tapan and Su (), A Tutorial on Wavelet from an Electrical Engineering Perspective, Part 2: The Continuous Case.

19. - <http://web.syr.edu/~tksarkar>

Sarkar Tapan and Su (), A Tutorial on Wavelet from an Electrical Engineering Perspective, Part 1: Discrete Wavelet Techniques.

20.- http://www.cttc.es/docs/undergraduate/mimo0_portada.pdf

<http://www.cttc.es/docs/CapIV.Wiener.pdf>

Lagunas, Miguel Angel, 2003.

21.- <http://www-dsp.rice.edu>

Ghael, Sandeep, Akbar, Sayeed and Baraniuk, Richard (1997), Improved Wavelet Denoising via Empirical Wiener Filtering.

22.- <http://www.dsp.edu>

Choi, Hyeokho and Baraniuk Richard, Analysis of Wavelet-Domain Wiener Filter.

23.-www.eurasip.org/content/Eusipco/2000/sessions/TueAm/OR2/cr1642.pdf

Nikolaev, Nikolay and Gotchev, Atanas, ECG Signal Denoising using Wavelet Domain Wiener Filtering.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alonso M., Finn, E., (1970) *Física, Vol. II*, Addison Wesley Iberoamericana, S.A.

1.- Aimar H., Bernardis A. y Hernández L., (1998) *Construcción de bases de ondas en espacios funcionales a partir de un análisis de multiresolución*, Santa Fé, Argentina, 15-65.

Boccaletti, A., Gaquinta and Arecchi, F.T., (1997) *Adaptive recognition and filtering of noise using wavelets*, Physical Review E, vol 55, no 5, mayo.

Bracewell, R., (1978) *The Fourier Transform and its applications*, McGraw Hill Kogakusha, LTD., second edition.

Brighman, E.O., (1974) *The fast Fourier Transform*, Prentice Hall, New Jersey.

Champeney, D.C (1973) *Fourier Transforms and their physical applications*, academicPress, London and New York, pp 1-250.

Chakraborty, A. and Okaya, D., (1995) *Frequency-time decomposition of seismic data using wavelet based methods*, Society of exploration Geophysicists, vol 60, No 6, pp 1906-1916, December.

Charles, C., (1998) *An introduction to wavelets, Wavelets Analysis and its applications*, Academic Press, Texas.

Ching, J., To, A. and Glaser, S., (2004) *Microseismic source deconvolution: Wiener Filter versus Minimax, Fourier versus wavelet and Linear versus Nonlinear*, J. Acoust. Soc. Am. 115, no 6, June, pp 3048-3058.

Claerbout, J.F., (1976) Fundamentals of Geophysical Data Processing. New York : Mc Graw Hill.

Cormac H. and Jelena K., (1993) Tiling of the time-frequency plane: construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms, IEEE Transactions on signal processing, December vol 41, no 12, 3341-3359.

Daubechies, I., (1996) Where do wavelets from? A personal point of view, Proceedings of the IEEE, April, vol 84, No 4.

Daubechies, I., (1992) Ten Lectures on Wavelets, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 17-313.

Deighan, A. and Watts D. (1997) Ground-roll suppression using the wavelet transform, vol 62, No 6, pp 1896-1903, December.

Foufoula, G. and Kumar P., (1994) Wavelets in Geophysics, Academic Press, Inc.

Foufoula, G. and Kumar P., (1997) Wavelet Analysis for Geophysical Applications, Reviews of Geophysics, vol 35, No 4, November.

Hatton, L, Worthington, M.H, Makin, J., (1986) Seismic Data Processing, Theory and Practice, Blackwell scientific publications, propiedad de Lagoven, centro de información y recopilación.

Jensen and A La Cour-Harbo (2000) Ripples in Mathematics, The Discrete Wavelet Transform, Springer, 7-156.

Kumar P., Foufoula G., Efi, (1997) Wavelet Analisis for Geophysical Applications, Reviews of Geophysics, 35, 4, November.

20.-Kumar P., Foufoula G., Efi, (1994) Wavelet in Geophysical, Academic Press.

Kroon, M. and Weggdam G. (1996) Analysis of dynamic light scattering signals with discrete wavelet transformation, Europhys, Lett, 35 (8), 621-626.

Manzoni, S. (2001) Secuencia Básica de Procesamiento de Data sísmica para obtener datos finales, orientada a estudiantes de Ingeniería Geofísica, Trabajo especial de Grado presentado en la Universidad Central de Venezuela.

Márquez, R., (2003) Aplicación de la Transformada de Ondícula a problemas de escalamiento y flujo bifásico en rocas de yacimiento. Trabajo especial de Grado presentado en la Universidad Central de Venezuela.

Millerd, W., (2002) Three Introductory Lectures and Fourier Analysis and Wavelet, August, 22.

Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G. and Michel, J., (1996), Wavelet Toolbox, for use with MatLab, The Math Works Inc., First Printing.

Morlet J., A., Fourgeau, G, Giard, D., (1982) Wave propagation and sampling theory-Part I: Complex signal and scattering in multilayered media, Geophysics, vol 47, no 2, pp 203-221.

Morlet J., A., Fourgeau, G., Giard, D., (1982) Wave propagation and sampling theory-Part II: Sampling theory and complex waves, Geophysics, vol 47, no 2, pp 222-236.

Nicholas, R., (2000) Fourier and wavelet representations of functions, Furman University, Electronic Journal of undergraduate mathematics, vol 6, December, 1-12.

Nikolaj Hess N., Wickerhauser M., (1996) Wavelets and time frequency Analysis, Proceedings of the IEEE, April 1996, vol 84, No 4. 523-539.

Oliveira D., Tenorio L., Yaoguo, L., (2004) Efficient automatic denoising of gravity gradiometry data, society of Exploration Geophysicists.

Oppenheim A., (1998) Señales y Sistemas., Prentice Hall Hispanoamericana, 176-335.

Pereira, J., Del Pino, E y otros, (1990) Curso básico de Procesamiento Sísmico de Reflexión. Publicado por Lagoven, Filial de Petróleos de Venezuela.

Phillips, W.J., (2003) Wavelets and Filter Banks Course Notes, January, 9.

Polikar R., (2001) Wavelets: Theory and Engineering applications, <http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>.

Polikar R., (1995) The wavelet tutorial, Durham Computation Center. Iowa State University, USA. Documento disponible en: <http://engineering.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>.

Reza, A., (1999) From Fourier Transform to Wavelet Transform, October, 27, White Paper.

Rice, R. B., (1962) Inverse Convolution Filter, Geophysics.

Roueff, A., Chanussot, J., Mars, J. and Nguyen M., (2004) Unsupervised separation of seismic waves using the Watershed algorithm on time-scale images, Geophysical Prospecting, vol 52, pp 287-300.

Robinson, E. A., (1967) Predictive Decomposition of Time Series with application to seismic exploration geophysics, Geophysics, vol 32.

Strang G., Nyuyen T., (1996) Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, 1-485.

(S.E.G) (1982) Society of Exploration Geophysicists, Digital Tape Standards, Tulsa, OK.

Temme N., (1998) The use of wavelets in seismic and geophysics, Ercim News No 34-July. <http://www.cwi.nl/cwi/projects/wavelets.html>.

Walnut, D. Heil, C., (1989) Continuous and Discrete Wavelet Transforms, Siam Review, vol 31, No 4, pp 628-666.

Wiener, N., (1964) Selected papers of Norbert Wiener, published by Society for Industrial and Applied Mathematics and The Technology, Cambridge Massachusetts.

Yilmaz, O., (1997) Seismic Data Processing. Investigation of Geophysics, vol 2, 1997.

Zharkov, (1985) Estructura interior de la tierra y de los planetas. Edt. Mir.