



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

## Aplicación de ecuaciones diferenciales estocásticas para el desarrollo de un modelo de difusión de contaminantes en la superficie del Lago de Valencia.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Lic. Jocelyn León Pastrán** para optar al título de "*Magíster Scientiarum*" Mención Modelos Aleatorios.

**Tutor: Dr. José Rafael León Ramos**

Caracas - Venezuela

12 de diciembre de 2011



## Agradecimiento

Agradezco Primeramente a Dios, a mis padres, Milagros Pastrán y Armando León, a mi abuela Balbina, que Dios la tenga en su Gloria, a mi tía Haydeé, a mi tía Reyna y a mi esposo Adrián Hernández. A mi muy apreciado tutor José Rafael León, a mis amigos y profesores por todo su apoyo.



## Resumen

El área circundante al Lago de Valencia está rodeada de complejos industriales, zonas residenciales y ríos tributarios que son descarga de grandes cantidades de sustancias químicas, entre ellas, los detergentes sintéticos de origen industrial y doméstico. Con esta situación se ha venido presentando un grave desequilibrio ecológico que ha estado provocando una serie de problemas ambientales.

De allí la importancia de realizar estudios que permitan, considerando las características de la región, tomar las medidas necesarias para la recuperación del Lago de Valencia. Uno de los aspectos de gran importancia, relacionado con diversas áreas de investigación, es la simulación de la trayectoria de los contaminantes, de tal modo que sea posible una toma de decisión adecuada para atacar el problema ambiental.

Estudiamos el comportamiento y trayectoria en dos dimensiones del contaminante mediante el proceso de difusión de sus partículas, cuya suma constituye hipotéticamente el derrame del contaminante. El desplazamiento de cada partícula está determinado por ecuaciones diferenciales estocásticas. Utilizamos como método de aproximación numérica a las ecuaciones diferenciales estocásticas propuestas en el *método de aproximación de Milstein*. Se considera como puntos de inicio del proceso de difusión algunos de los afluentes del Lago de mayor incidencia en el índice de contaminación. En cuanto a la representación de condiciones y procesos que se dan a lugar en el Lago, se cuenta con el valor máximo y mínimo de la velocidad del viento en la región, además, se tomará en consideración el comportamiento del derrame al aproximarse al borde del Lago. Complementamos el estudio incorporando una imagen satelital del Lago de Valencia, que nos permite ilustrar el esparcimiento de contaminante, bajo determinadas condiciones, con el uso de técnicas de procesamiento digital de imágenes.





# Índice general

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                                                           | <b>1</b>  |
| <b>1. Ecuación Diferencial Estocástica</b>                                                                    | <b>5</b>  |
| 1.1. Conceptos Básicos de Espacios de Probabilidad, Variables Aleatorias y<br>Procesos Estocásticos . . . . . | 7         |
| 1.2. Movimiento Browniano . . . . .                                                                           | 11        |
| 1.2.1. Breve reseña histórica . . . . .                                                                       | 11        |
| 1.2.2. Caminatas Aleatorias . . . . .                                                                         | 12        |
| 1.2.3. Construcción Lévy-Ciesielski del movimiento Browniano . . . . .                                        | 17        |
| 1.2.4. Movimiento Browniano en $R^n$ . . . . .                                                                | 23        |
| 1.3. Integral de Itô . . . . .                                                                                | 31        |
| 1.3.1. La integral de Itô . . . . .                                                                           | 34        |
| 1.3.2. Algunas Propiedades de la Integral de Itô . . . . .                                                    | 37        |
| 1.3.3. Extensiones de la integral de Itô . . . . .                                                            | 39        |
| 1.3.4. La Fórmula de Itô . . . . .                                                                            | 41        |
| 1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .                                                          | 45        |
| 1.4.1. Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales<br>estocásticas . . . . .             | 45        |
| 1.4.2. Solución Numérica . . . . .                                                                            | 49        |
| <b>2. Técnica de Predicción Espacial: Kriging</b>                                                             | <b>57</b> |
| 2.1. Definiciones Básicas . . . . .                                                                           | 58        |



|           |                                                                                                                                       |           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.1.1.    | Tipos de Datos Espaciales . . . . .                                                                                                   | 58        |
| 2.1.2.    | Autocorrelación espacial . . . . .                                                                                                    | 60        |
| 2.1.3.    | Estacionaridad, Isotropía y Gaussianidad . . . . .                                                                                    | 60        |
| 2.1.4.    | Continuidad Espacial . . . . .                                                                                                        | 63        |
| 2.2.      | Semivariograma: Análisis y Estimación . . . . .                                                                                       | 64        |
| 2.2.1.    | Formas generales del semivariograma muestral . . . . .                                                                                | 65        |
| 2.2.2.    | Condiciones que deben cumplir los modelos del semivariograma . . .                                                                    | 67        |
| 2.2.3.    | Modelos autorizados para el semivariograma . . . . .                                                                                  | 69        |
| 2.3.      | Estimación de datos geoestadísticos . . . . .                                                                                         | 73        |
| 2.3.1.    | Métodos de interpolación determinista . . . . .                                                                                       | 73        |
| 2.3.2.    | Métodos de interpolación estocástica. Kriging . . . . .                                                                               | 74        |
| <b>3.</b> | <b>Desarrollo de la Herramienta Computacional</b>                                                                                     | <b>87</b> |
| 3.1.      | Estimación del flujo de las velocidades de las corrientes superficiales del Lago de Valencia utilizando Kriging . . . . .             | 88        |
| 3.1.1.    | Recolección de los datos para la estimación del flujo de velocidades de las corrientes superficiales en el Lago de Valencia . . . . . | 88        |
| 3.1.2.    | Aplicación de la técnica de predicción espacial Kriging . . . . .                                                                     | 92        |
| 3.2.      | Descripción del algoritmo de simulación . . . . .                                                                                     | 94        |
| 3.2.1.    | Procesamiento digital de imágenes: Conceptos básicos . . . . .                                                                        | 95        |
| 3.2.2.    | Selección y Georreferenciación de la imagen satelital . . . . .                                                                       | 99        |
| 3.2.3.    | Modelo de dispersión de partículas . . . . .                                                                                          | 104       |
| 3.2.4.    | Procesamiento digital de imágenes . . . . .                                                                                           | 106       |
| 3.3.      | Construcción de Interfaz Gráfica . . . . .                                                                                            | 107       |
| 3.3.1.    | Graphical User Interface Development Environment (GUIDE) . . . .                                                                      | 107       |
| 3.3.2.    | Consideraciones importantes en el diseño de una GUI . . . . .                                                                         | 108       |
| 3.3.3.    | Funcionamiento de una aplicación GUIDE . . . . .                                                                                      | 109       |
| 3.3.4.    | Manejo de datos entre los elementos de la aplicación y el archivo .m                                                                  | 109       |

**4. Simulaciones y Análisis de Resultados 113**

4.1. Sinopsis del algoritmo . . . . . 114

4.2. Análisis de resultados . . . . . 116

**5. Conclusiones 121**

**Bibliografía 123**

# Introducción

Por años la actividad humana ha provocado daños al medio ambiente que, en algunos casos son reparables, pero, en otros, es imposible su recuperación. La temática ambiental ha despertado la atención de la comunidad internacional sobre la importancia de los componentes esenciales del sistema terrestre: tierra sólida, agua, aire y seres vivos. Los cambios en los sistemas naturales están produciendo efectos irreparables en los ecosistemas acuáticos, en la vegetación terrestre y, en general, un cambio global del medio ambiente.

La problemática de la contaminación del agua es uno de los aspectos que requiere de estudios urgentes, que ayuden a tomar las medidas que permitan controlar el deterioro que se está causando.

Es por ello que hoy en día se vienen tomando una serie de medidas, que tienen que ver con el impacto ambiental que producen diferentes contaminantes, tanto en cuerpos líquidos como sólidos y gaseosos. Estudiar las propiedades, efectos y alcances que tiene un contaminante en particular en un medio determinado, es de vital importancia para realizar un plan de contingencia y saneamiento de las zonas afectadas que sea lo más rápido y efectivo posible.

Por otra parte, las actividades económicas son parte esencial de la existencia de las sociedades, ellas permiten la producción de riquezas, el trabajo de los individuos y generan los bienes y servicios que garantizan su bienestar social. Estas actividades son cada día más complejas y requieren del uso de tecnologías avanzadas, con el objeto de mantener la productividad competitiva en un mercado cada vez más exigente. Lamentablemente en la actualidad, muchas actividades económicas son fuente permanente de contaminación.

El área circundante al Lago de Valencia está rodeada de complejos industriales, zonas residenciales y ríos tributarios que son descarga de grandes cantidades de sustancias químicas, entre ellas, los detergentes sintéticos de origen industrial y doméstico, así como nutrientes producto de la fertilización de los suelos. Con esta situación se ha venido presentando un grave desequilibrio ecológico que ha estado provocando una serie de

problemas ambientales.

Se estima que en la cuenca del Lago de Valencia existen unas 140 especies de mamíferos y unas 500 especies de aves que corresponden, respectivamente, a 44 % y 37 % de esos grupos en el país; por tal motivo fue decretado área crítica con prioridad de tratamiento.

De allí la importancia de realizar estudios que permitan, considerando las características de la región, tomar las medidas necesarias para la recuperación del Lago de Valencia. Uno de los aspectos de gran importancia, relacionado con diversas áreas de investigación, es la simulación de la trayectoria de los contaminantes, de tal modo que sea posible una toma de decisión adecuada para atacar este problema ambiental.

Por tal razón, este trabajo de investigación presenta un modelo matemático que permite simular la trayectoria superficial del esparcimiento de partículas, las cuales se suponen más densas que el fluido que las circunda. Por ejemplo, las partículas de polvo en el viento, las partículas de contaminantes en el agua, entre otros. Es así como se ha planteado el desarrollo de un programa de simulación de transporte de partículas de contaminantes, en dos dimensiones, en la superficie del Lago de Valencia, a través de una interfaz gráfica que nos permita visualizar la evolución de la dispersión. Esta interfaz tendrá como base una imagen satelital del Lago de Valencia. Dicha imagen será procesada digitalmente a fin de obtener una representación gráfica, en el entorno del Lago de Valencia, de la solución numérica del modelo planteado.

La descripción del movimiento de los fluidos se puede realizar desde dos enfoques, el enfoque Euleriano y el enfoque Lagrangiano. En el enfoque Euleriano, dada una región fija, la solución es el valor de las magnitudes de las partículas de fluido que en cada instante  $t$  están ocupando la región fijada, mientras que, en el enfoque Lagrangiano la solución buscada es la evolución temporal de las magnitudes de todas y cada una de las partículas de fluido que intervienen en el problema. Nuestra investigación está sustentada bajo el enfoque Lagrangiano.

Se verá el fluido de contaminante como un gran número de partículas, cuya trayectoria está determinada por las corrientes debidas a la acción del viento, del oleaje y del flujo del agua vertida por los ríos que caen en el Lago. Cada partícula es gobernada por una

fuerza que la podemos dividir en dos categorías, Una fuerza determinista (fuerza viscosa continua) y una fuerza estocástica (proveniente de la discontinuidad de la materia). Es aquí donde entra en juego una de las ramas ampliamente desarrollada de la probabilidad, con aplicaciones importantes dentro y fuera de la matemática, estamos hablando de la teoría de los procesos estocásticos.

Será base de nuestra investigación un proceso estocástico ampliamente estudiado denominado movimiento Browniano o proceso de Wiener, el cual es un proceso Guassiano con ciertas características, y que tiene la bondad de estar completamente descrito una vez que se conoce su función de media y su función de covarianza. Las trayectorias de un movimiento Browniano son continuas, pero no diferenciables, un indicio de esta irregularidad viene dado porque las trayectorias Brownianas no tienen variación acotada sobre cualquier intervalo finito  $[0, T]$ ,  $T \in R^+$ .

Otro concepto clave lo constituye la integral estocástica. La integral estocástica surge de la necesidad de resolver determinados problemas, en los que aparecen implicados ciertos procesos estocásticos, como el Movimiento Browniano. Por ejemplo, las integrales del tipo

$$\int_0^t f(s, w) dW_s(w).$$

El hecho de que las trayectorias de los Movimientos Brownianos no sean diferenciables ni de variación acotada impide integrar respecto a este movimiento en el sentido de Riemann- Stieltjes. Surge por tanto la necesidad de crear una nueva integral, que en casos de regularidad del integrando sí coincidirá con la integral de Riemann-Stieltjes. Esta integral es la denominada integral de Itô.

Ahora bien, como lo hemos mencionado, cada partícula estará influenciada por dos fuerzas, una aleatoria y otra determinista, por lo que requerimos de un modelo que describa una trayectoria que presente perturbación, pero guarde cierta estructura determinista. El modelo que está propuesto, dentro del enfoque Langragiano, en este trabajo de investigación es una ecuación diferencial estocástica, que claramente cumple con las condiciones antes expuestas.

Hemos hallado un modelo matemático que nos permitirá simular la trayectoria de las partículas de contaminante. Sin embargo, no basta tener la definición del modelo, pues

pueden surgir preguntas como: ¿este tipo de ecuación tiene solución?, y en caso de tenerla, ¿es única?. El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas nos responde afirmativamente las interrogantes planteadas. No obstante, las ecuaciones diferenciales estocásticas que admiten una solución explícita son una excepción a la regla, por ende necesitamos hallar una técnica que nos permita aproximar esta solución explícita, a dicha aproximación se le denomina solución numérica.

Una manera sencilla de hallar la aproximación numérica es considerar los diferenciales como diferencias, es así como se obtiene el esquema de aproximación de Euler. Por otro lado tenemos el esquema de aproximación de Milstein, hallándose un término de corrección adicional que contiene los incrementos cuadrados del movimiento Browniano. Todo el sustento teórico descrito anteriormente se desarrollará en el Capítulo 1 del presente trabajo de investigación.

En este caso, el modelo específico a utilizar está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(X_t^1, X_t^2) \\ b_2(X_t^1, X_t^2) \end{pmatrix} dt$$

donde  $(b_1(X_t^1, X_t^2), b_2(X_t^1, X_t^2))$  está dado por el flujo de las corrientes superficiales del Lago de Valencia,  $(dW_t^1, dW_t^2)$  es un movimiento Browniano estándar bidimensional,  $a_{11}$  y  $a_{22}$  constantes. Esta ecuación será aproximada por el método de aproximación de Milstein.

En el Capítulo 2, se describirá la técnica de predicción espacial Kriging, con la cual se estimará el campo de velocidades de las corrientes superficiales presentes en el Lago.

En el Capítulo 3, se explicará detalladamente la metodología utilizada para el desarrollo del modelo. Donde, una vez se tiene la aproximación numérica de la ecuación diferencial estocástica, se hará uso de técnicas básicas de procesamiento digital de imágenes para el desarrollo de una interfaz gráfica que nos permita apreciar la solución bajo el entorno aportado por una imagen satelital del Lago de Valencia.

En el Capítulo 4, se analizarán y se reflexionará acerca de los resultados obtenidos, se establecerán las conclusiones y señalarán las vías de trabajos futuros, finalizando así este trabajo de investigación.

## Capítulo 1

# Ecuación Diferencial Estocástica

Desde que en el siglo XVII Newton y Leibniz pusieron las bases del que ahora llamamos “Cálculo Diferencial”, las ecuaciones diferenciales han sido una herramienta matemática fundamental para modelar sistemas físicos. Las leyes físicas que gobiernan un sistema determinan las ecuaciones correspondientes, que después intentamos resolver, es decir, de las cuales intentamos obtener una expresión del estado del sistema en el instante de tiempo  $t$  como función explícita de  $t$ . Muchos fenómenos naturales pueden ser modelados por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$dx(t) = a(x(t)), x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Interacciones de planetas, flujos de flúidos, reacciones químicas, dinámicas poblacionales y económicas, son algunos de los innumerables ejemplos. Las soluciones de estas ecuaciones son curvas regulares  $x(t)$  que representan el estado del sistema en cada instante, como se muestra en la figura 1.1. Sin embargo, en muchas aplicaciones, las trayectorias (medidas experimentalmente) de sistemas modelados con ecuaciones diferenciales ordinarias muestran comportamientos como se observan en la figura 1.2. Algunas observaciones surgen de comparar ambas trayectorias:

- No parece adecuado modelar este fenómeno con curvas regulares.

- Si bien en el gráfico 1.2 se observa una componente aleatoria también puede observarse cierta estructura determinista.
- Parece razonable modificar el modelo dado por la ecuación diferencial ordinaria de forma tal de poder incluir efectos aleatorios (ruido) que perturben el sistema en cada instante.

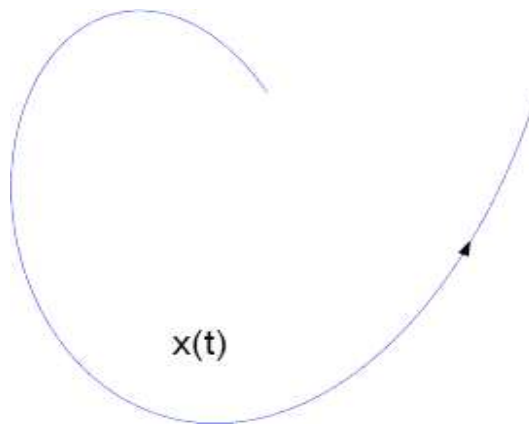


Figura 1.1: Trayectoria de una solución de una EDO

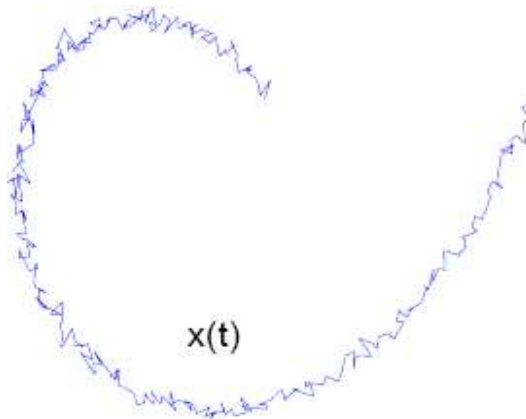


Figura 1.2: Una trayectoria de una solución de una ecuación diferencial estocástica

Si para una solución de la ecuación (1.1) se tiene que



$$x(t + \Delta t) - x(t) = a(x(t))\Delta t + o(\Delta t)$$

entonces una forma de perturbar el modelo dado por la ecuación diferencial ordinaria es considerar

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a(x(t))\Delta t + \text{ruido} + o(\Delta t),$$

más precisamente,

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))\xi(t).$$

Es decir que el vector tangente a la curva en  $x(t)$ , si existiese, estaría determinado fundamentalmente por  $a(x(t))$ , pero también por una componente aleatoria que debemos determinar caracterizada por el ruido  $\xi$ , que es razonable representar con el movimiento Browniano.

## 1.1. Conceptos Básicos de Espacios de Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos

Dada la situación mostrada anteriormente es importante proceder a encontrar nociones matemáticas correspondientes al modelo que se quiere plantear. El modelo matemático para una cantidad aleatoria es una variable aleatoria. Antes de definirla, recordemos algunos conceptos básicos de teoría de Probabilidad.

**Definición 1.1** Si  $\Omega$  es un conjunto dado, entonces una  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$  sobre  $\Omega$  es una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- (ii)  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$ , donde  $F^C = \Omega \setminus F$  es el complemento de  $F$  en  $\Omega$ .
- (iii)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

El par  $(\Omega, \mathcal{F})$  se llama espacio medible. Una medida de probabilidad  $P$  sobre un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una función  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que,

(a)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1,$

(b) si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  y  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  es disjunta (esto es,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ) entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

La tripleta  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es llamado espacio de probabilidad. Él es denominado un espacio de probabilidad completo si  $\mathcal{F}$  contiene todos los subconjuntos  $G$  de  $\Omega$  con  $P$ -medida exterior cero, esto es con

$$P^*(G) = \inf\{P(F); F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

A partir de ahora vamos a suponer que todos nuestros espacios de probabilidad son completos. Los subconjuntos  $F$  de  $\Omega$  los cuales pertenecen a  $\mathcal{F}$  son llamados conjuntos  $\mathcal{F}$ -medibles. En un contexto de probabilidad esos conjuntos son llamados eventos y usamos la interpretación,

$$P(F) = \text{“la probabilidad que el evento } F \text{ ocurra”}.$$

En particular, si  $P(F) = 1$  se dice que “ $F$  ocurre casi seguramente (c.s)”.

Dada cualquier familia  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $\Omega$  existe la  $\sigma$ -álgebra más pequeña  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  que contiene a  $\mathcal{U}$ , esto es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \bigcap \{\mathcal{H}; \mathcal{H} \text{ } \sigma\text{-álgebra de } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}.$$

Llamaremos  $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{U}$ .

Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad dado, entonces una función  $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es llamada  $\mathcal{F}$ -medible si

$$Y^{-1} := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

para todo conjunto abierto  $U \subset \mathbf{R}^n$ .

Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es cualquier función, entonces la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{H}_X$  generada por  $X$  es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña sobre  $\Omega$  que contiene a todos los subconjuntos

$$X^{-1}(U); \quad U \subset \mathbf{R}^n \text{ abierto.}$$

Además,

$$\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\},$$

donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbf{R}^n$ . Claramente,  $X$  será  $\mathcal{H}_X$ -medible y  $\mathcal{H}_X$  es la más pequeña  $\sigma$ -álgebra con esta propiedad.

**Lema 1.1** Si  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  son dos funciones dadas, entonces  $Y$  es  $\mathcal{H}_X$ -medible si y sólo si existe una función Borel medible  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  tal que

$$Y = g(X).$$

Una variable aleatoria es una función  $\mathcal{F}$ -medible  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Cada variable aleatoria induce una medida de probabilidad  $\mu_X$  sobre  $\mathbf{R}^n$ , definida por

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

$\mu_X$  es llamada la función de distribución de  $X$ .

Si  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  es medible Borel y  $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| dP(\omega) < \infty$  entonces tenemos que,

$$E|f(X)| := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) d\mu_X(x).$$

**Los espacios  $L^p$**

Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  es una variable aleatoria y  $p \in [1, \infty)$  es una constante, definimos la norma  $L^p$  de  $X$ ,  $\|X\|_p$ , por

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^p(P)} = \left( \int_{\Omega} |X(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{1/p}.$$

Si  $p = \infty$ , definimos

$$\|X\|_{\infty} = \|X\|_{L^{\infty}(P)} = \text{ess sup}\{|X(\omega)|; \omega \in \Omega\}.$$

Los correspondientes espacios  $L^p$  estan definidos por

$$L^p(P) = L^p(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n; \|X\|_p < \infty\}.$$

Con esta norma los espacios  $L_p$  son espacios de Banach, esto es espacios lineales normados completos. Si  $p = 2$  el espacio  $L^2(P)$  es incluso un espacio de Hilbert, es decir un espacio completo con producto interno

$$(X, Y)_{L^2(P)} := E[X \cdot Y]; \quad X, Y \in L^2(P).$$

**Definición 1.2** Dos subconjuntos  $A, B \in \mathcal{F}$  son llamados independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Una colección  $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i; i \in I\}$  de familias  $\mathcal{H}_i$  de conjuntos medibles es independiente si

$$P(H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \dots P(H_{i_k})$$

para toda elección de  $H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1}, \dots, H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$  con diferentes índices  $i_1, \dots, i_k$ .

Una colección de variables aleatorias  $\{X_i; i \in I\}$  es independiente si la colección de  $\sigma$ -álgebras generadas  $\mathcal{H}_{X_i}$  es independiente.

Si dos variables aleatorias  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  son independientes, entonces

$$E[XY] = E[X]E[Y],$$

siempre que  $E[|X|] < \infty$  y  $E[|Y|] < \infty$ .

**Definición 1.3** Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias

$$\{X_t\}_{t \in T}$$

definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y asumiendo valores en  $\mathbf{R}^n$ ,  $T$  un conjunto de índices.

El espacio del parámetro  $T$  es generalmente la semirrecta  $[0, \infty)$ , pero también puede ser un intervalo  $[a, b]$ , de números enteros no negativos, y subconjuntos de  $\mathbf{R}^n$  para  $n \geq 1$ . Se debe tener en cuenta que para cada  $t \in T$  fijo tenemos una variable aleatoria

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega$$

Por otro lado, fijando  $\omega \in \Omega$  podemos considerar la función

$$t \rightarrow X_t(\omega); \quad t \in T$$

la cual es llamada una trayectoria de  $X_t$ .

## 1.2. Movimiento Browniano

### 1.2.1. Breve reseña histórica

En 1827, el botánico Robert Brown (1773-1858) [ver Figura 1.3] observó, a través del microscopio que pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento vigoroso, irregular e incesante, como si fueran pequeños seres vivos. El propio Brown descubrió que partículas muy finas de varios minerales, seguían el mismo movimiento.

En 1900, L.Bachelier introduce un modelo del movimiento Browniano para caracterizar las fluctuaciones de la bolsa de París.



Figura 1.3: Robert Brown (Escocia, 1773-1858).

La primera explicación científica de este fenómeno la realizó Albert Einstein en 1905, sentando las bases teóricas y experimentales de la teoría atómica de la materia.

Norbert Wiener (1894-1964) [ver Figura 1.4] en sus trabajos entre 1920 y 1923 logra dar un modelo preciso y riguroso para las trayectorias de las partículas, siendo una función continua pero no diferenciable en ningún punto, como la presentada por Weierstrass en los albores del Análisis Matemático, desarrolla una medida de probabilidad para conjuntos de trayectorias no diferenciables, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias. Otros desarrollos posteriores:

1. Paul P. Lévy (1886-1971) en trabajos desarrollados en 1939 y 1948: estudio de los “ceros” del movimiento Browniano, “ley arco seno”.

2. Itô (1944): definición de la integral estocástica.
3. Hunt (1956): propiedad de Markov fuerte para el Movimiento Browniano.
4. Donsker (1951), Prohorov (1956): convergencia de los paseos aleatorios hacia el movimiento Browniano, aplicaciones estadísticas, comienzo de la teoría de los procesos empíricos.
5. Doob (1953), Girsanov (1960): resultados sobre la integración estocástica.
6. Samuelson (1965): “redescubrimiento” y actualización de las ideas de Bachelier (1900) sobre las aplicaciones en Economía.
7. Kunita y Watanabe (1967): generalización de la integral estocástica.



Figura 1.4: Norbert Wiener (Estados Unidos, 1894-1964).

### 1.2.2. Caminatas Aleatorias

Introducimos una malla rectangular bidimensional, que se define por  $\{(m\Delta x, n\Delta t) | m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Considere una partícula comenzando en  $x = 0$  en el tiempo  $t = 0$  y cada tiempo  $n\Delta t$  se mueve hacia abajo una distancia  $\Delta x$  con probabilidad  $1/2$ , o hacia arriba una distancia  $\Delta x$  con probabilidad  $1/2$ . Denotemos por  $p(m, n)$  la probabilidad que la partícula esté en la posición  $m\Delta x$  al tiempo  $n\Delta t$ . Entonces,

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

También

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n),$$

y así

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}(p(m+1, n) - 2p(m, n) + p(m-1, n)).$$

Ahora se asume que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D \quad \text{para alguna constante positiva } D$$

Esto implica que

$$\frac{p(m, n+1) - p(m, n)}{\Delta t} = \frac{D}{2} \left( \frac{p(m+1, n) - 2p(m, n) + p(m-1, n)}{(\Delta x)^2} \right). \quad (1.1)$$

Sea  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $m\Delta x \rightarrow x$ ,  $n\Delta t \rightarrow t$ , con  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \equiv D$ . Entonces, presumiblemente  $p(m, n) \rightarrow f(x, t)$ , la cual interpretamos como la densidad de probabilidad cuando la partícula está en  $x$  en el tiempo  $t$ . La ecuación (1.1) se convierte formalmente en el límite

$$f_t = \frac{D}{2} f_{xx},$$

y así se llega a la ecuación de difusión.

Un estudio más cuidadoso de esta técnica del paso al límite en caminatas aleatorias en una malla depende del teorema Laplace-De Moivre, el cual enunciamos a continuación:

**Teorema 1.1 Teorema de Laplace - De Moivre**

Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias a valores reales, independientes idénticamente distribuídas tales que

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = p \\ P(X_i = 0) = q \end{cases}$$

para  $p, q \geq 0, p + q = 1$ . Se define la suma

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Entonces para todo  $-\infty < a, b < \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Igual que anteriormente supongamos que la partícula se mueve hacia abajo o arriba una distancia  $\Delta x$  con probabilidad  $1/2$ . Sea  $X(t)$  denota la posición de la partícula en el tiempo  $t = n\Delta t, n = 0, 1, \dots$ . Se define

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

donde los  $X_i$  son variables aleatorias independientes tales que

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = 1/2 \\ P(X_i = 0) = 1/2 \end{cases}$$

para  $i = 1, 2, \dots$ . Entonces  $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{4}$ . Ahora  $S_n$  es el número de movimientos hacia arriba para el tiempo  $t = n\Delta t$ .

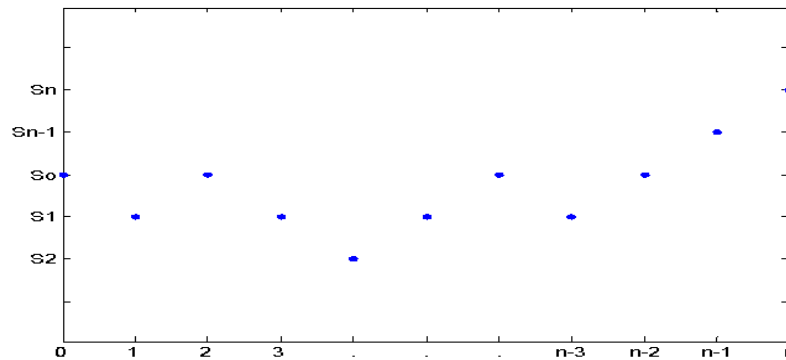


Figura 1.5: Trayectoria de  $S_n$

Por consiguiente,



$$\begin{aligned}
X(t) &= S_n \Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) \\
&= (2S_n - n)\Delta x.
\end{aligned}$$

Note también que

$$\begin{aligned}
Var(X(t)) &= (\Delta x)^2 Var(2S_n - n) \\
&= (\Delta x)^2 4 Var(S_n) \\
&= (\Delta x)^2 4n Var(X_1) \\
&= (\Delta x)^2 n \\
&= \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t.
\end{aligned}$$

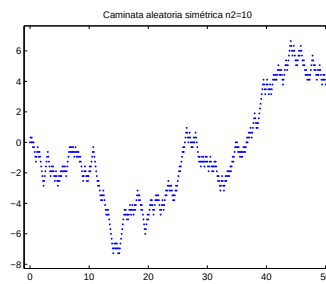
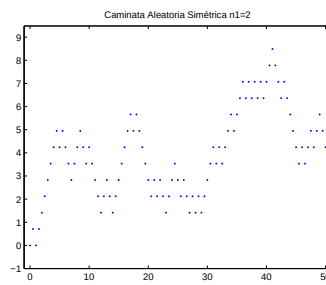
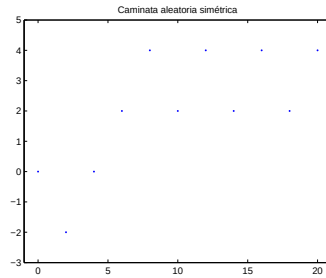
Nuevamente asumimos que  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$ . Entonces

$$\begin{aligned}
X(t) &= (2S_n - n)\Delta x \\
&= \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \sqrt{n} \Delta x \\
&= \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right) \sqrt{tD}.
\end{aligned}$$

El teorema de Laplace- De Moivre en consecuencia implica

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty, t=n\Delta t, \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}=D} P(a \leq X(t) \leq b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{a}{\sqrt{tD}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq \frac{b}{\sqrt{tD}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{tD}}}^{\frac{b}{\sqrt{tD}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dx.
\end{aligned}$$

Obtenemos la distribución  $N(0, Dt)$ . En lo que sigue, introducimos el movimiento Browniano, para el cual tomamos  $D=1$ .

**Comportamiento de una caminata aleatoria cuando  $n \rightarrow \infty$** 

**Definición 1.4** Un proceso estocástico a valores reales  $W(\cdot)$  es llamado movimiento Browniano o proceso de Wiener si

- (i)  $W(0) = 0$  casi seguramente,
- (ii)  $W(t) - W(s)$  se distribuye  $N(0, t - s)$  para todo  $t \geq s \geq 0$ ,
- (iii) Para todos los tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , las variables aleatorias  $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$  son independientes (“incrementos independientes”).

Nótese que en particular

$$E(W(t)) = 0, \quad E(W^2(t)) = t \quad \text{para cada tiempo } t \geq 0$$

### 1.2.3. Construcción Lévy-Ciesielski del movimiento Browniano

**Definición 1.5** La familia  $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  de funciones de Haar están definidas para  $0 \leq t \leq 1$  como sigue:

$$\begin{aligned} h_0(t) &:= 1 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1. \\ h_1(t) &:= \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2. \\ -1 & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , colocamos

$$h_k(t) := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{para } \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1/2}{2^n}. \\ -2^{n/2} & \text{para } \frac{k-2^n+1/2}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n}. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Lema 1.2** Las funciones  $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  forman una base completa y ortogonal de  $L^2(0, 2)$ .

*Demostración :* 1. Tenemos  $\int_0^1 h_k^2 dt = 2^n \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 1$ .

Nótese también que para todo  $l > k$ ,  $h_k h_l = 0$  para todo  $t$  o  $h_k$  es constante sobre el soporte de  $h_l$ . En este segundo caso

$$\int_0^1 h_l h_k dt = \pm 2^{n/2} \int_0^1 h_l dt = 0.$$

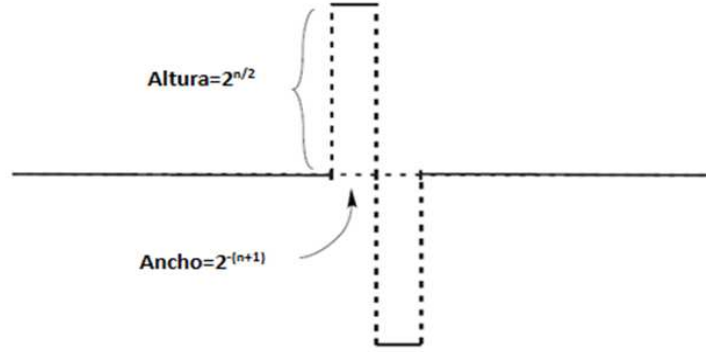


Figura 1.6: Gráfico de una función de Haar

2. Supongamos  $f \in L^2(0,1)$ ,  $\int_0^1 f h_k dt = 0$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ . Probaremos  $f = 0$  en casi todas partes.

Si  $n = 0$ , tenemos  $\int_0^1 f dt = 0$ . Sea  $n = 1$ , entonces  $\int_0^{1/2} f dt = \int_{1/2}^1 f dt$ , y ambos son iguales a cero, así  $0 = \int_0^{1/2} f dt + \int_{1/2}^1 f dt = \int_0^1 f dt$ .

Continuando de esta forma, deducimos

$$\int_{\frac{k}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^{n+1}}} f dt = 0 \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq 2^{n+1}.$$

En consecuencia  $\int_s^r f dt = 0$  para todos los racionales diádicos  $0 \leq s \leq r \leq 1$ , y así para todo  $0 \leq s \leq r \leq 1$ . Ahora bien,

$$f(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r f(t) dt = 0 \quad \text{para casi todo } r.$$

□

**Definición 1.6** Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $S_k(t) := \int_0^t h_k ds$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) es la función  $k$ -ésima-Schauder.

El gráfico de  $S_k$  es una “tienda de campaña” de altura  $2^{-\frac{n}{2}-1}$ , situada sobre el intervalo  $[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k-2^n+1}{2^n}]$ . Por consiguiente, si  $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$ , entonces

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |S_k(t)| = 2^{-\frac{n}{2}-1}.$$

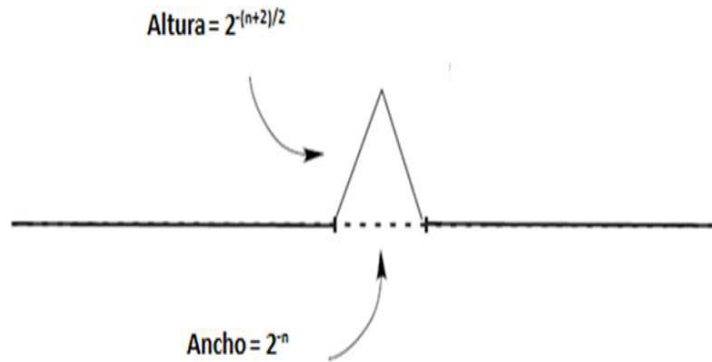


Figura 1.7: Gráfico de una función de Schauder

Nuestro objetivo es definir

$$W(t) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k S_k(t)$$

para  $0 \leq t \leq 1$ , donde los coeficientes  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  son variables aleatorias independientes  $N(0,1)$  definidas sobre algún espacio de probabilidad.

Debemos en primer lugar comprobar si esta serie converge.

**Lema 1.3** Sea  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión de números reales tales que

$$|a_k| = O(k^{\delta}) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

para algún  $0 \leq \delta \leq 1/2$ . Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t)$$

converge uniformemente para  $0 \leq t \leq 1$ .

*Demostración :* Sea  $\varepsilon > 0$  fijo. Nótese que para  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ , las funciones  $S_k(\cdot)$  tiene soportes disjuntos. Sea

$$b_n := \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k| \leq C(2^{n+1})^{\delta}.$$

Entonces para  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\sum_{k=2^m}^{\infty} |a_k| |S_k(t)| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}; 0 \leq t \leq 1} |S_k(t)| \leq C \sum_{n=m}^{\infty} (2^{n+1})^{\delta} 2^{-\frac{n}{2}-1} < \varepsilon$$

para  $m$  suficientemente grande, donde  $0 \leq \delta \leq 1/2$ .  $\square$

**Lema 1.4** Supongamos  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  son variables aleatorias  $N(0,1)$  e independientes. Entonces para casi todo  $\omega$ ,  $|A_k(\omega)| = o(\sqrt{\log k})$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

En particular, los números  $\{A_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$  casi seguramente satisfacen la hipótesis del lema 1.3.

*Demostración :* Para todo  $x > 0$ ,  $k = 2, \dots$ , tenemos

$$P(|A_k| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \leq C e^{-\frac{x^2}{4}},$$

para alguna constante  $C$ . Colocamos  $x := 4\sqrt{\log k}$ , entonces

$$P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}) \leq C e^{-4 \log k} = C \frac{1}{k^4}.$$

Así  $\sum \frac{1}{k^4} < \infty$ , el lema Borel-Cantelli implica

$$P(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k} \text{ infinitas veces}) = 0.$$

Por lo tanto para casi todo  $\omega$ , tenemos

$$|A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k} \text{ siempre que } k \geq K,$$

donde  $K$  depende de  $\omega$ .  $\square$

**Lema 1.5**  $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s) s_k(t) = t \wedge s$  para cada  $0 \leq s, t \leq 1$ .

*Demostración :* Se define para  $0 \leq s \leq 1$ ,

$$\phi_s(\tau) := \begin{cases} 1 & 0 \leq \tau \leq s. \\ 0 & s \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Entonces si  $s \leq t$ , el lema 1.2 implica

$$s = \int_0^1 \phi_t \phi_s d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k,$$

donde,

$$a_k = \int_0^1 \phi_t h_k d\tau = \int_0^t h_k d\tau = s_k(t),$$

$$b_k = \int_0^1 \phi_s h_k d\tau = s_k(s).$$

□

**Teorema 1.2** Sea  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión de variables aleatorias independientes  $N(0,1)$  definidas sobre algún espacio de probabilidad. Entonces la suma

$$W(t, \omega) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

converge uniformemente en  $t$ , para casi todo  $\omega$ , Además

- (i)  $W(\cdot)$  es un movimiento Browniano, y
- (ii) para casi todo  $\omega$ , la trayectoria  $t \mapsto W(t, \omega)$  es continua.

*Demostración :* 1. La convergencia uniforme es consecuencia del lema 1.3 y el lema 1.4; esto implica (ii).

- 2. Para probar que  $W(\cdot)$  es un mB, primero notamos que  $W(0) = 0$  casi seguramente. Afirmamos también que  $W(t) - W(s)$  es  $N(0, t - s)$  para todo  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , para probar esto vamos a calcular la función característica de los incrementos, para ello debemos recordar que la función característica de una variable aleatoria  $X \sim N(0, 1)$  viene dada por  $E[e^{i\lambda X}] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ .

$$\begin{aligned}
E(e^{i\lambda(W(t)-W(s))}) &= E(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s_k(t)-s_k(s))}) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} E(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}) \quad \text{por independencia} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-\lambda^2}{2}(s_k(t)-s_k(s))^2} \quad \text{pues } A_k \text{ es } N(0,1) \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (s_k(t)-s_k(s))^2} \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2(t) - 2s_k(t)s_k(s) + s_k^2(s)} \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-2s+s)} \quad \text{por lema 4} \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}.
\end{aligned}$$

Por unicidad de las funciones características, los incrementos  $W(t) - W(s)$  están  $N(0, t - s)$ , como se afirmó.

3. Ahora busquemos para todo  $m = 1, 2, \dots$  y para todo  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$ , que

$$E(e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1})))} = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}. \quad (1.2)$$

Una vez que esto es probado, tendremos de la unicidad de las funciones características que:

$$F_{W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_1, \dots, x_m) = F_{W(t_1)}(x_1) \dots F_{W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_m)$$

para todo  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ . Esto prueba que  $W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$  son independientes. Por lo tanto la ecuación 1.2 establecerá el teorema 1.2.

Ahora bien, en el caso  $m = 2$ , tenemos



$$\begin{aligned}
E(e^{i[\lambda_1 W(t_1) + \lambda_2 (W(t_2) - W(t_1))]})) &= E(e^{i[(\lambda_1 - \lambda_2)W(t_1) + \lambda_2 W(t_2)]}) \\
&= E(e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t_1) + i\lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t_2)}) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} E(e^{iA_k [(\lambda_1 - \lambda_2)s_k(t_1) + \lambda_2 s_k(t_2)]}) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((\lambda_1 - \lambda_2)s_k(t_1) + \lambda_2 s_k(t_2))^2} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 s_k^2(t_1) + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 s_k(t_1)s_k(t_2) + \lambda_2^2 s_k^2(t_2)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 t_1 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 t_1 + \lambda_2^2 t_2]} \quad \text{por lema 1.5} \\
&= e^{-\frac{1}{2}[\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 (t_2 - t_1)]}
\end{aligned}$$

Esto es 1.2 para  $m = 2$ , y el caso general sigue por inducción.

□

#### 1.2.4. Movimiento Browniano en $R^n$

**Definición 1.7** Un proceso estocástico en  $R^n$   $\mathbf{W}(\cdot) = (W_1(\cdot), \dots, W_n(\cdot))$  es un proceso de Wiener  $n$ -dimensional (o movimiento Browniano) siempre que

- (i) Para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $W_k(\cdot)$  es un proceso de Wiener 1-dimensional, y
- (ii) La  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{W}_k$  definidas como las  $\sigma$ -álgebras generadas por  $W_k(t)$ ,  $t \leq 0$  son independientes,  $k = 1, \dots, n$ .

Por los argumentos anteriores podemos construir un espacio de probabilidad y sobre este  $n$  procesos de Wiener 1-dimensional independientes  $W_k(\cdot)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Entonces  $\mathbf{W}(\cdot) := (W_1(\cdot), \dots, W_n(\cdot))$  es un movimiento Browniano  $n$ -dimensional. Ver [8].

**Lema 1.6** Si  $\mathbf{W}(\cdot)$  es un proceso de Wiener  $n$ -dimensional, entonces

- (i)  $E(W_k(t)W_l(s)) = (t \wedge s)\delta_{kl}$  ( $k, l = 1, \dots, n$ )
- (ii)  $E((W_k(t) - W_k(s))(W_l(t) - W_l(s))) = (t - s)\delta_{kl}$  ( $k, l = 1, \dots, n$ ,  $t \geq s \geq 0$ .)

*Demostración :* (i) Si  $k = l$ , tenemos que

$$E(W_k(t)W_k(s)) = \frac{E(W_k^2(t))}{2} + \frac{E(W_k^2(s))}{2} - \frac{Var(W_k(t) - W_k(s))}{2}$$

Como  $W_k(\cdot)$  es un proceso de Wiener 1-dimensional se satisface que

$$E(W_k(t)W_k(s)) = \frac{t+s}{2} - \frac{t-s}{2}$$

Como  $t \geq s \geq 0$

$$E(W_k(t)W_k(s)) = \frac{|t+s|}{2} - \frac{|t-s|}{2} = t \wedge s.$$

Si  $k \neq l$

$$E(W_k(t)W_l(s)) = E(W_k(t))E(W_l(s)) = 0 \quad \text{por independencia.}$$

(ii) Si  $k = l$

$$E((W_k(t)-W_k(s))(W_k(t)-W_k(s))) = E((W_k(t)-W_k(s))^2) = Var(W_k(t)-W_k(s)) = t-s.$$

Si  $k \neq l$

$$E((W_k(t)-W_k(s))(W_l(t)-W_l(s))) = E(W_k(t)W_l(t)-W_k(t)W_l(s)-W_k(s)W_l(t)+W_k(s)W_l(s)) = 0$$

por linealidad e independencia.

□

**Teorema 1.3** (i) Si  $\mathbf{W}(\cdot)$  es un movimiento Browniano  $n$ -dimensional, entonces  $\mathbf{W}(t)$  es  $N(0, tI)$  para cada tiempo  $t > 0$ . Por lo tanto

$$P(\mathbf{W}(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx$$

para subconjunto Borel  $A \subseteq R^n$ .

(ii) De forma más general, para cada  $m = 1, 2, \dots$  y cada función  $f : R^n \times R^n \times R^n \times \dots \times R^n \rightarrow R$ , tenemos

$$\begin{aligned} E(f(\mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_m))) &= \int_{R^n} \dots \int_{R^n} f(x_1, \dots, x_m) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \\ &\quad \dots g(x_m, t_m - t_{m-1}|x_{m-1}) dx_m \dots dx_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde

$$g(x, t|y) := \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

*Demostración :* Para cada tiempo  $t > 0$ , las variables aleatorias  $W_1(t), \dots, W_n(t)$  son independientes. En consecuencia para cada punto  $x = x_1, \dots, x_n \in R^n$ , tenemos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{W}(t)}(x_1, \dots, x_n) &= f_{W_1(t)}(x_1) \dots f_{W_n(t)}(x_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t}} \dots \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_n^2}{2t}} \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} = g(x, t|0). \end{aligned}$$

Se ha probado la ecuación 1.3 en el caso unidimensional.  $\square$

### Propiedades de las trayectorias

En este apartado demostraremos que para casi todo  $\omega$ , la trayectoria  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$  es uniformemente Hölder continua para exponente  $\gamma < \frac{1}{2}$ , pero no es en ningún sitio Hölder continua para cualquier exponente  $\gamma > \frac{1}{2}$ . En particular  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$  es no diferenciable en cualquier parte casi seguramente y de variación infinita para cada intervalo de tiempo.

**Definición 1.8** (i) Sea  $0 < \gamma \leq 1$ . Una función  $f : [0, T] \rightarrow R$  es llamada *uniformemente Hölder continua* con exponente  $\gamma > 0$  si existe una constante  $K$  tal que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{para todo } s, t \in [0, T].$$

(ii) Decimos que  $f$  es continua Hölder con exponente  $\gamma > 0$  en el punto  $s$  si existe una constante  $K$  tal que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

### ■ Continuidad de las trayectorias

Un teorema de interés general para demostrar la continuidad de Hölder es el importante teorema de Kolmogorov:

**Teorema 1.4** Sea  $\mathbf{X}(\cdot)$  un proceso estocástico con trayectorias continuas casi seguramente, tal que

$$E(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^\beta) \leq C|t - s|^{1+\alpha}$$

para constantes  $\beta, \alpha > 0$ ,  $C \geq 0$  y para todo  $0 \leq t, s$ .

Entonces para cada  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $T > 0$ , y para cualquier  $\omega$ , existe una constante  $K = K(\omega, \gamma, T)$  tal que

$$|\mathbf{X}(t, \omega) - \mathbf{X}(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma \text{ para todo } 0 \leq s, t \leq T.$$

Por lo tanto la trayectoria  $t \mapsto \mathbf{X}(t, \omega)$  es uniformemente Hölder continua con exponente  $\gamma$  en  $[0, T]$ .

Antes de hacer la demostración de este teorema:

**Aplicación al movimiento Browniano.** Considere  $\mathbf{W}(\cdot)$ , un movimiento Browniano  $n$ -dimensional. Tenemos para todo entero  $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)|^{2m}) &= \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} \int_{R^n} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx \text{ para } r = t - s > 0 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} r^m \int_{R^n} |y|^{2m} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy \quad (y = \frac{x}{\sqrt{r}}) \\ &= C_m r^m = C_m |t - s|^m. \end{aligned}$$

Así las hipótesis del teorema de Kolmogorov se mantienen para  $\beta = 2m$ ,  $\alpha = m - 1$ .

El proceso  $\mathbf{W}(\cdot)$  es Hölder continuo casi seguramente para exponentes

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \text{ para todo } m.$$

Así para casi todo  $\omega$  y cualquier  $T > 0$ , la trayectoria  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$  es uniformemente Hölder continua sobre  $[0, T]$  para cada exponente  $0 < \gamma < 1/2$ .

*Demostración :* PRUEBA DEL TEOREMA 1.4

1. Por simplicidad tomamos  $T = 1$ . Elegimos cualquier

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.4)$$

Ahora definimos para  $n = 1, \dots$ ,

$$A_n = \left\{ \left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ para algún entero } 0 \leq i < 2^n \right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} P\left(\left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} E\left(\left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}\right) \right|^\beta\right) \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \quad \text{por la desigualdad de Chebyshev} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \\ &= C 2^{n(-\alpha+\gamma\beta)}. \end{aligned}$$

Ya que de la expresión 1.4, se tiene que en efecto  $-\alpha + \gamma\beta < 0$ , y así deducimos  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , y por consiguiente el lema de Borel-Cantelli implica

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 0;$$

Así para cualquier  $\omega$  existe  $m = m(\omega)$  tal que

$$\left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}, \omega\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad \text{para } 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

siempre que  $n \geq m$ . Pero entonces tenemos que

$$\left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}, \omega\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| \leq K \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad \text{para } 0 \leq i \leq 2^n - 1 \quad \text{para todo } n \geq 0, \quad (1.5)$$

si seleccionamos  $K = K(\omega)$  lo suficientemente grande.

2. Ahora decimos que (1.5) implica el inicio de la continuidad de Hölder. Para ver esto, se fija  $\omega \in \Omega$  para el cual se tiene (1.5). Sea  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  racionales diádicos,  $0 < t_2 - t_1 < 1$ . Seleccionamos  $n \geq 1$  de manera que

$$2^{-n} \leq t < 2^{-(n-1)} \text{ para cada } t := t_2 - t_1. \quad (1.6)$$

Podemos escribir

$$\phi_s(\tau) := \begin{cases} t_1 = \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_k}} & (n < p_1 < \dots < p_k). \\ t_2 = \frac{j}{2^n} - \frac{1}{2^{q_1}} - \dots - \frac{1}{2^{q_l}} & (n < q_1 < \dots < q_l). \end{cases}$$

para

$$t_1 \leq \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2.$$

Entonces

$$\frac{j-i}{2^n} \leq t < \frac{1}{2^{n-1}}$$

y así  $j = i$  o  $i + 1$ . En función a (1.5),

$$|\mathbf{X}(i/2^n, \omega) - \mathbf{X}(j/2^n, \omega)| \leq K \left| \frac{i-j}{2^n} \right|^\gamma \leq K t^\gamma.$$

Además,

$$|\mathbf{X}(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_r}}, \omega) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_{r-1}}}, \omega)| \leq K \left| \frac{1}{2^{p_r}} \right|^\gamma$$

para  $r = 1, \dots, k$ ; y en consecuencia

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(t_1, \omega) - \mathbf{X}(i/2^n, \omega)| &\leq K \sum_{r=1}^k \left| \frac{1}{2^{p_r}} \right|^\gamma \\ &= \frac{K}{2^{n\gamma}} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{2^{r\gamma}} \text{ tal que } p_r > n \\ &= \frac{C}{2^{n\gamma}} \leq C t^\gamma \text{ por (1.6).} \end{aligned}$$

De esa misma forma se deduce que

$$|\mathbf{X}(t_2, \omega) - \mathbf{X}(j/2^n, \omega)| \leq C t^\gamma.$$

Por todo lo anterior, se tiene que

$$|\mathbf{X}(t_1, \omega) - \mathbf{X}(t_2, \omega)| \leq C |t_1 - t_2|^\gamma.$$

para todo racional diádico  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  y alguna constante  $C = C(\omega)$ . Tal que  $t \mapsto \mathbf{X}(t, \omega)$  es continua para casi todo  $\omega$ , la apreciación anterior es válida para todo  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ .

□

### ■ No diferenciabilidad de las trayectorias

En lo que sigue probaremos que las trayectorias del movimiento Browniano son, con probabilidad uno, en ninguna parte continuas Hölder con exponente mayor que  $\frac{1}{2}$ , y por lo tanto en ningún punto diferenciable.

**Teorema 1.5** (i) Para cada  $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$  y casi todo  $\omega$ ,  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$ , en ningún punto es continua Hölder con el exponente  $\gamma$ .

(ii) En particular, para casi todo  $\omega$ , la trayectoria  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$  es en ninguna parte diferenciable y es de variación infinita sobre cada subintervalo.

*Demostración :* (Dvoretzky, Erdős, Kakutani)

1. Es suficiente considerar un movimiento Browniano uni-dimensional y podemos, para simplificar, considerar sólo tiempos  $0 \leq t \leq 1$ . Se fija un número entero  $N$  tan grande que

$$N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1.$$

Ahora, si la función  $t \mapsto W(t, \omega)$  es continua Hölder con exponente  $\gamma$  en algún punto  $0 \leq s < 1$ , entonces

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ y alguna constante } K.$$

Para  $n \gg 1$ , fijar  $i = [ns] + 1$  y note que para  $j = i, i + 1, \dots, i + N - 1$ .

$$\begin{aligned}
\left| W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) \right| &\leq \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) \right| + \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) \right| \\
&\leq K \left( \left| s - \frac{j}{n} \right|^\gamma + \left| s - \frac{j+1}{n} \right|^\gamma \right) \\
&\leq \frac{M}{n^\gamma}
\end{aligned}$$

Para alguna constante  $M$ . Por lo tanto

$$\omega \in A_{M,n}^i := \left\{ \left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{j+1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma} \text{ para } j = i, \dots, i + N - 1 \right\}$$

para algún  $1 \leq i \leq n$ , algún  $M \geq 1$ , y todo  $n$  grande.

Por lo tanto el conjunto de  $\omega \in \Omega$  tales que  $W(\omega, \cdot)$  es continua Hölder con exponente  $\gamma$  en algún tiempo  $0 \leq s < 1$  está contenido en

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{M,n}^i.$$

Veremos que este evento tiene probabilidad 0.

2. Para todo  $k$  y  $M$ ,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_{M,n}^i) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( P\left(\left| W\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}\right) \right)^N,
\end{aligned}$$

tal que las variables  $W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n})$  son  $N(0, \frac{1}{n})$  e independientes. Ahora,

$$\begin{aligned}
P\left(\left| W\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{-\gamma}}^{Mn^{-\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{1/2-\gamma}}^{Mn^{1/2-\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&\leq Cn^{1/2-\gamma}.
\end{aligned}$$



Usamos este cálculo para deducir:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} nC[n^{1/2-\gamma}]^N = 0,$$

donde  $N(\gamma - 1/2) > 1$ . Esto se satisface para todo  $k, M$ . Por lo tanto

$$P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) = 0,$$

y la afirmación (i) del Teorema sigue.

3. Si  $W(t, \omega)$  es diferenciable en  $s$ , entonces  $W(t, \omega)$  sería continuo Hölder (con exponente 1) en  $s$ . Pero esto no es así casi seguramente. Si  $W(t, \omega)$  fuese de variación finita sobre algún intervalo, sería entonces diferenciable en casi todas partes.

□

### 1.3. Integral de Itô

Recordemos que al inicio de este capítulo se enunció una ecuación similar a la que sigue:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{“ruido”}, \quad (1.1)$$

donde  $b$  y  $\sigma$  son funciones dadas cualesquiera. Consideremos como primer caso cuando el ruido es 1-dimensional. Es razonable buscar algún tipo de proceso estocástico  $B_t$  para representar el término de ruido, de modo que

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot B_t, \quad (1.2)$$

Sobre la base de muchas situaciones, por ejemplo, en ingeniería, uno se ve obligado a asumir que  $B_t$  tiene, al menos aproximadamente, estas propiedades:

- (i)  $t_1 \neq t_2$  entonces  $B_{t_1}$  y  $B_{t_2}$  son independientes.
- (ii)  $\{B_t\}$  es estacionario, esto es la distribución conjunta de  $\{B_{t_1+t}, \dots, B_{t_k+t}\}$  no depende de  $t$ .

(iii)  $E[B_t] = 0$  para todo  $t$ .

Sin embargo, resulta que no existe ningún proceso estocástico “razonable” que satisfaga (i) y (ii): Tal que  $B_t$  no tiene trayectorias continuas. Si establecemos que  $E[B_t^2] = 1$  entonces la función  $(t, \omega) \rightarrow B_t(\omega)$  ni siquiera es medible con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $[0, \infty]$ . No obstante, es posible representar  $B_t$  como un proceso estocástico generalizado llamado *proceso de ruido blanco*.

Intentaremos reescribir la ecuación (1.2) en una forma que sugiere reemplazar  $B_t$  por un proceso estocástico apropiado: Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  y considerar una versión discreta de (1.2):

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)B_k\Delta t_k \quad (1.3)$$

donde

$$X_j = X(t_j), \quad B_k = B_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Dejamos la notación  $B_k$  y reemplazamos  $B_k\Delta t_k$  por  $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$ , donde  $\{V_t\}_{t \geq 0}$  es algún proceso estocástico conveniente. Los supuestos (i), (ii) y (iii) sobre  $B_t$  sugieren que  $V_t$  debe tener incrementos independientes estacionarios con media 0. Resulta que el único proceso tal que tenga trayectorias continuas es el movimiento Browniano  $W_t$ . En consecuencia planteamos  $V_t = W_t$  y obtenemos de la ecuación (1.3):

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta W_j. \quad (1.4)$$

¿Es posible probar qué el límite del lado derecho de la ecuación (1.4) existe, en algún sentido, cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ ? y la respuesta es sí, entonces aplicando la notación de integración usual obtenemos,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s'' \quad (1.5)$$

y debemos adoptar como una convención que (1.2) realmente significa que  $X_t = X_t(\omega)$  es un proceso estocástico que satisface (1.5).

En consecuencia, en lo que sigue probaremos la existencia, en cierto sentido, de

$$\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s''$$

donde  $W_t(\omega)$  es un movimiento Browniano 1-dimensional que comienza en el origen, para una clase extensa de funciones  $f : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow R$ .

**Definición 1.9** Sea  $W_t(\omega)$  un movimiento Browniano  $n$ -dimensional. Entonces definimos  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por las variables aleatorias  $\{W_i(s)\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq s \leq t}$ . En otras palabras,  $\mathcal{F}_t$  es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos de la forma

$$\{\omega : W_{t_1} \in F_1, \dots, W_{t_k} \in F_k\},$$

donde  $t_j \leq t$  y  $F_j \subset R^n$  son conjuntos de Borel,  $j \leq k = 1, 2, \dots$  (Suponemos que todos los conjuntos de medida cero están incluidos en  $\mathcal{F}_t$ ).

Intuitivamente podemos pensar  $\mathcal{F}_t$  como “la historia de  $W_s$  hasta el momento  $t$ ”. Nótese que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  para  $s < t$ , es decir,  $\mathcal{F}_t$  es creciente y que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  para todo  $t$ .

**Definición 1.10** Sea  $\{\mathcal{N}_t\}_{t \geq 0}$  una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $\Omega$ . Un proceso  $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R_n$  es llamado  $\mathcal{N}_t$ -adaptado si para cada  $t \geq 0$  la función

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

es  $\mathcal{N}_t$ -medible.

Ahora describiremos la clase de funciones para la cual la integral de Itô está definida:

**Definición 1.11** Sea  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  la clase de funciones

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$$

tales que

- (i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible, donde  $\mathcal{B}$  denota la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $[0, \infty)$ .
- (ii)  $f(t, \omega)$  es  $\mathcal{F}_t$ -adaptado.
- (iii)  $E[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < \infty$ .

### 1.3.1. La integral de Itô

Para funciones  $f \in \mathcal{V}$  veremos como se define la integral de Itô

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dW_t,$$

donde  $W_t$  es un movimiento Browniano unidimensional.

La idea es natural: Primero definimos  $\mathcal{I}[\phi]$  para una clase de funciones simples  $\phi$ . Entonces vemos que cada  $f \in \mathcal{V}$  puede ser aproximado, en algún sentido, por funciones  $\phi$  y usar esto para definir  $\int f dW$  como límite de  $\int \phi dW$  cuando  $\phi \rightarrow f$ .

Una función  $\phi \in \mathcal{V}$  es llamada *elemental* si tiene la forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t). \quad (1.6)$$

Para funciones elementales  $\phi(t, \omega)$  definimos la integral correspondiente:

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega). \quad (1.7)$$

**Lema 1.7 (La isometría de Itô).** Si  $\phi(t, \omega)$  es acotada y elemental entonces

$$E[(\int_S^T \phi(t, \omega) dW_t(\omega))^2] = E[\int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt]. \quad (1.8)$$

*Demostración :* Colocamos  $\Delta W_j = W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ . Entonces

$$E[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) & si \quad i = j \end{cases}$$

Usando que  $e_i e_j \Delta W_i$  y  $\Delta W_j$  son independientes si  $i < j$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[(\int_S^T \phi dW)^2] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] \\ &= \sum_j E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ &= E[\int_S^T \phi^2 dt]. \end{aligned}$$

□

La idea es usar la isometría (1.8) para extender la definición de funciones elementales a funciones en  $\mathcal{V}$ . Haremos esto en varios pasos:

**Paso 1.** Sea  $g \in \mathcal{V}$  acotada y  $g(\cdot, \omega)$  continua para cada  $\omega$ . Entonces existen funciones elementales  $\phi_n \in \mathcal{V}$  tal que

$$E\left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

*Demostración :* Define  $\phi_n(t, \omega) = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$ . Entonces  $\phi_n$  es elemental así  $g \in \mathcal{V}$ , y

$$\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \text{ para cada } \omega,$$

donde  $g(\cdot, \omega)$  es continuo por cada  $\omega$ . Así  $E\left[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\right] \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por convergencia acotada.  $\square$

**Paso 2.** Sea  $h \in \mathcal{V}$  acotada. Entonces existen funciones  $g_n \in \mathcal{V}$  tales que  $g_n(\cdot, \omega)$  es continua para todo  $\omega$  y  $n$ , y

$$E\left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt\right] \rightarrow 0.$$

*Demostración :* Asumamos que  $|h(t, \omega)| \leq M$  para todo  $(t, \omega)$ . Para cada  $n$ , sea  $\psi_n$  una función continua no negativa en  $R$  tal que

$$(i) \quad \psi_n(x) = 0 \text{ para } x \leq -\frac{1}{n} \text{ y } x \geq 0$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$$

Se define

$$g_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s - t) h(s, \omega) ds.$$

Entonces  $g_n(\cdot, \omega)$  es continua para cada  $\omega$  y  $|g_n(t, \omega)| \leq M$ . Ya que  $h \in \mathcal{V}$  podemos ver que  $g_n(t, \cdot)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t$ . Además,

$$\int_S^T (g_n(s, \omega) - h(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \text{ para cada } \omega,$$

ya que  $\{\psi_n\}_n$  constituye una identidad aproximada. Así por convergencia acotada

$$E\left[\int_S^T (h(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

tal como se afirmó.  $\square$

**Paso 3.** Sea  $f \in \mathcal{V}$ . Entonces existe una sucesión  $\{h_n \in \mathcal{V}\}$  tal que  $h_n$  es acotada para cada  $n$  y

$$E\left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

*Demostración :* Coloquemos

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n & \text{si } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega) & \text{si } -n \leq f(t, \omega) \leq n \\ n & \text{si } f(t, \omega) > n. \end{cases}$$

Entonces la conclusión sigue por convergencia dominada.  $\square$

Ahora estamos listos para completar la definición de la integral de Itô

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ para } f \in \mathcal{V}.$$

**Definición 1.12 (La Integral de Itô).** Sea  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . Entonces la integral de Itô de  $f$ , de  $S$  a  $T$ , está definida por

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ (límite en } L^2(P)) \quad (1.9)$$

donde  $\{\phi_n\}$  es una sucesión de funciones elementales tales que

$$E\left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Corolario 1.1 (La isometría de Itô)**

$$E\left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dW_t\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt\right] \text{ para todo } f \in \mathcal{V}(S, T). \quad (1.10)$$

**Corolario 1.2** Si  $f(t, \omega) \in \mathcal{V}(S, T)$  y  $f_n(t, \omega) \in \mathcal{V}(S, T)$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $E\left[\int_S^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dW_t(\omega) \rightarrow \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \text{ en } L^2(P) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

### 1.3.2. Algunas Propiedades de la Integral de Itô

**Teorema 1.6** Sea  $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$  y sea  $0 \leq S < U < T$ . Entonces

- (i)  $\int_S^T f dW_t = \int_S^U f dW_t + \int_U^T f dW_t$  para casi todo  $\omega$ .
- (ii)  $\int_S^T (cf + g) dW_t = c \cdot \int_S^T f dW_t + \int_S^T g dW_t$  para casi todo  $\omega$  y  $c$  constante.
- (iii)  $E[\int_S^T f dW_t] = 0$
- (iv)  $\int_S^T f dW_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible. Véase [2].

**Definición 1.13** Una filtración (sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ ) es una familia  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$  tal que

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

esto es,  $\{\mathcal{M}_t\}$  es creciente. Un proceso estocástico  $n$ -dimensional  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es llamado una Martingala con respecto a la filtración  $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$  y con respecto a  $P$  si

- (i)  $M_t$  es  $\mathcal{M}_t$ -medible para todo  $t$ ,
- (ii)  $E[|M_t|] < \infty$  para todo  $t$ , y
- (iii)  $E[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$  para todo  $s \geq t$ .

**Teorema 1.7 (Desigualdad martingala de Doob).** Si  $M_t$  es un martingala tal que  $t \rightarrow M_t(\omega)$  es continua casi seguramente, entonces para todo  $p \geq 1$ ,  $T \geq C$  y todo  $\lambda > 0$

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p} \cdot E[|M_T|^p].$$

**Teorema 1.8** Sea  $f \in \mathcal{V}(0, T)$ . Entonces existe una versión  $t$ -continua de

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega); \quad 0 \leq t \leq T,$$

esto es, existe un proceso estocástico  $t$ -continuo  $J_t$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que

$$P\left[J_t = \int_0^t f dW\right] = 1 \quad \text{para todo } t, 0 \leq t \leq T. \quad (1.11)$$

*Demostración :* Sea  $\phi_n = \phi_n(t, \omega) = \sum_j e_j^{(n)}(\omega) \mathcal{X}_{[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})}(t)$  funciones elementales tales que

$$E\left[\int_0^T (f - \phi_n)^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Colocamos

$$I_n(t, \omega) = \int_0^t \phi_n(s, \omega) dW_s(\omega)$$

y

$$I_t = I(t, \omega) = \int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega); \quad 0 \leq t \leq T.$$

Entonces  $I_n(\cdot, \omega)$  es continuo, para todo  $n$ . Además,  $I_n(t, \omega)$  es una martingala con respecto a  $\mathcal{F}_t$ , para todo  $n$ :

$$\begin{aligned} E[I_n(s, \omega)] &= E\left[\left(\int_0^t \phi_n dW + \int_t^s \phi_n dW\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_0^t \phi_n dW + E\left[\sum_{t \leq t_j^{(n)} \leq t_{j+1}^{(n)} \leq s} e_j^{(n)} \Delta W_j \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_0^t \phi_n dW + \sum_j E[E[e_j^{(n)} \Delta W_j | \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}] | \mathcal{F}_t] \\ &= \int_0^t \phi_n dW + \sum_j E[e_j^{(n)} E[\Delta W_j | \mathcal{F}_{t_j^{(n)}}] | \mathcal{F}_t] \\ &= \int_0^t \phi_n dW = I_n(t, \omega) \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde  $t < s$ .

Por lo tanto  $I_n - I_m$  es también una  $\mathcal{F}_t$ -martingala, así por la desigualdad de martingala (teorema 1.7) sigue que,

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I_n(t, \omega) - I_m(t, \omega)| > \epsilon\right] &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \cdot E[|I_n(T, \omega) - I_m(T, \omega)|^2] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} E\left[\int_0^T (\phi_n - \phi_m)^2 ds\right] \rightarrow 0 \text{ cuando } m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos elegir una sucesión  $n_k \uparrow \infty$  tal que

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_{k+1}}(t, \omega) - I_{n_k}(t, \omega)| > 2^{-k}\right] < 2^{-k}.$$



Por el lema Borel - Cantelli

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_{k+1}}(t, \omega) - I_{n_k}(t, \omega)| > 2^{-k} \text{ para un número infinito de } K\right] = 0.$$

Así para casi todo  $\omega$  existe  $k_1(\omega)$  tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_{k+1}}(t, \omega) - I_{n_k}(t, \omega)| \leq 2^{-k} \text{ para } k \geq k_1(\omega).$$

Por lo tanto  $I_{n_k}(t, \omega)$  es uniformemente convergente para  $t \in [0, T]$ , para casi todo  $\omega$  y así el límite, denotado por  $J_t(\omega)$ , es  $t$ -continuo para  $t \in [0, T]$  casi seguramente. Ya que  $I_{n_k}(t, \cdot) \rightarrow I(t, \cdot)$  en  $L^2[P]$  para todo  $t$ , tenemos que

$$I_t = J_t \text{ casi seguramente, para todo } t \in [0, T].$$

□

**Corolario 1.3** Sea  $f(t, \omega) \in \mathcal{V}(0, T)$  para todo  $T$ . Entonces

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dW_s$$

es una martingala con respecto a  $\mathcal{F}_t$  y

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot E\left[\int_0^T f(s, \omega)^2 ds\right]; \quad \lambda, T > 0. \quad (1.13)$$

### 1.3.3. Extensiones de la integral de Itô

La integral de Itô  $\int f dW$  puede ser definida para una gran clase de integrandos  $f$  de  $\mathcal{V}$ . Primero, la condición de medibilidad (ii) de la definición 1.11 puede ser relajada a la siguiente:

(ii)' Existe una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{H}_t$ ;  $t \geq 0$  tal que

- a)  $W_t$  es una martingala con respecto a  $\mathcal{H}_t$  y
- b)  $f_t$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado.

Note que a) implica que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ . La esencia de esta extensión es que podemos permitir a  $f_t$  depender de  $\mathcal{F}_t$  siempre y cuando  $W_t$  sea una martingala con respecto a la “historia” de  $f_s$ ;  $s \leq t$ .

**Definición 1.14** Sea  $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$  un movimiento Browniano  $n$ -dimensional. Entonces  $V_H^{m \times n}(S, T)$  denota el conjunto de matrices  $m \times n$   $v = [v_{ij}(t, \omega)]$  donde cada entrada  $v_{ij}(t, \omega)$  satisface (i) y (iii) de la definición 1.11 y (ii)’ ya mencionada, con respecto a alguna filtración  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$ . Si  $v \in \mathcal{V}_H^{m \times n}(S, T)$  definimos, usando notación matricial

$$\int_S^T v dW = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{pmatrix}$$

La matriz  $m \times 1$  cuya  $i$ -ésima componente es la siguiente suma de integrales de Itô 1-dimensionales:

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s, \omega) dW_j(s, \omega).$$

Si  $\mathcal{H} = \mathcal{F}^n = \{\mathcal{F}_t^n\}_{t \geq 0}$  escribimos  $\mathcal{V}^{m \times n}(S, T)$  y si  $m = 1$  escribimos  $\mathcal{V}_H^n(S, T)$  (respectivamente  $\mathcal{V}^n(S, T)$ ) en lugar de  $\mathcal{V}_H^{n \times 1}(S, T)$  (respectivamente  $\mathcal{V}^{n \times 1}(S, T)$ ). Así colocamos

$$\mathcal{V}^{m \times n} = \mathcal{V}^{m \times n}(0, \infty) = \bigcap_{T > 0} \mathcal{V}^{m \times n}(0, T).$$

La nueva extensión de la Integral de Itô consiste en debilitar la condición (iii) de la definición 1.11 a

$$(iii)' \quad P\left[\int_S^T f(s, \omega)^2 ds < \infty\right] = 1.$$

**Definición 1.15**  $\mathcal{W}_H(S, T)$  denota la clase de procesos  $f(t, \omega) \in R$  que satisface (i) de la definición 1.11 y (ii)', (iii)' antes mencionadas. Similarmente a la notación de  $\mathcal{V}$  colocamos  $\mathcal{W}_H = \bigcap_{T > 0} \mathcal{W}_H(0, T)$  y en el caso de las matrices escribimos  $\mathcal{W}_H^{m \times n}(S, T)$ , etc. Si  $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)}$  escribimos  $\mathcal{W}(S, T)$  en lugar de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}^{(n)}}(S, T)$ , etc. Si la dimensión es clara del contexto algunas veces se suprimirá el superíndice y escribiremos  $\mathcal{F}$  en lugar de  $\mathcal{F}_{(n)}$  y así sucesivamente.

Denotemos por  $W_t$  a un movimiento Browniano 1-dimensional. Si  $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  se puede ver que para todo  $t$  existen funciones escalonadas  $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  tal que  $\int_0^t |f_n - f|^2 ds \rightarrow 0$  en probabilidad, esto es en medida con respecto a  $P$ . Para tal sucesión se tiene que  $\int_0^t f_n(s, \omega) dW_s$  converge en probabilidad para alguna variable aleatoria y el límite sólo depende de  $f$ , no de la sucesión  $\{f_n\}$ . Por lo tanto definimos

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s, \omega) dW_s(\omega) \quad (\text{límite en probabilidad}) \quad \text{para } f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}. \quad (1.14)$$

Como antes existe una versión  $t$ -continua de esta integral.

#### 1.3.4. La Fórmula de Itô

**Definición 1.16** Sea  $W_t$  un movimiento Browniano sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un proceso de Itô unidimensional (o integral estocástica) es un proceso estocástico  $X_t$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s, \quad (1.15)$$

donde  $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ , tal que

$$P\left[\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0\right] = 1 \quad (1.16)$$

Asumimos que  $u$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado (donde  $\mathcal{H}_t$  es como en (ii)') y

$$P\left[\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \text{ para todo } t \geq 0\right] = 1. \quad (1.17)$$

Si  $X_t$  es un proceso de Itô de la forma (1.15), la ecuación 1.15 algunas veces es escrita en forma diferencial

$$dX_t = u dt + v dW_t. \quad (1.18)$$

#### Teorema 1.9 (La fórmula de Itô unidimensional).

Sea  $X_t$  un proceso de Itô dado por

$$dX_t = u dt + v dW_t.$$

Sea  $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times R)$ , esto es que  $g$  es dos veces continuamente diferenciable sobre  $[0, \infty) \times R$ . Entoces

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es de nuevo un proceso de Itô, y

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (1.19)$$

donde  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  es calculado de acuerdo a las siguientes reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt. \quad (1.20)$$

**Teorema 1.10** Supongamos que  $f(s, \omega)$  es continua y de variación acotada con respecto a  $s \in [0, t]$ , para casi todo  $\omega$ . Entonces

$$\int_0^t f(s) dW_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s df_s.$$

*Esquema de la prueba de la fórmula de Itô.* Primero obsérvese que si sustituímos

$$dX_t = udt + v dW_t$$

en (1.19) y usando (1.20) se obtiene la expresión equivalente

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} v_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds + \int_0^t v_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dW_s \quad (1.21)$$

donde  $u_s = u(s, \omega)$ ,  $v_s = v(s, \omega)$ . Note que (1.21) es un proceso de Itô en el sentido de la definición 1.16.

Asumimos que  $g$ ,  $\frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  son acotadas. Si (1.21) es probada para este caso, entonces obtenemos el caso general por aproximación de funciones  $\mathcal{C}^2$ ,  $g_n$ , tales que  $g_n$ ,  $\frac{\partial g_n}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g_n}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$  son acotadas para cada  $n$  y convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $[0, \infty) \times R$  a  $g$ ,  $\frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ , respectivamente. Además, de (1.14) vemos que se asume que  $u(t, \omega)$  y  $v(t, \omega)$  son funciones elementales. Usando el teorema de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned}
g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_j) \\
&= g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_j)^2 \\
&\quad + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} (\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j,
\end{aligned}$$

donde  $\frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  etc. son evaluados en los puntos  $(t_j, X_{t_j})$ ,  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ ,  $\Delta g(t_j, X_{t_j}) = g((t_{j+1}, X_{t_{j+1}})) - g(t_j, X_{t_j})$ , y  $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$  para todo  $j$ .

Si  $\Delta t_j \rightarrow 0$  entonces

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j) \Delta t_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds \quad (1.22)$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j) \Delta X_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s. \quad (1.23)$$

Además, ya que  $u$  y  $v$  son elementales obtenemos

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v_j^2 \cdot (\Delta W_j)^2, \quad (1.24)$$

donde  $u_j = u(t_j, \omega)$ ,  $v_j = v(t_j, \omega)$ .

Los primeros dos términos tienden a cero cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Por ejemplo,

$$E[(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j)(\Delta W_j))^2] = \sum_j E[(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j)^2] (\Delta t_j)^3 \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta t_j \rightarrow 0.$$

Afirmamos que el término anterior tiende a

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v^2 ds \text{ en } L^2(P), \text{ cuando } \Delta t_j \rightarrow 0.$$

Para probar esto, colocamos  $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) v^2(t, \omega)$ ,  $a_j = a(t_j)$  y consideramos,

$$E[(\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j)^2] = \sum_{i,j} E[a_i a_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)].$$

Si  $i < j$  entonces  $a_i a_j ((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i)$  y  $(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j$  son independientes, así que los términos desaparecen en este caso, y de forma similar si  $i > j$ . Así nos queda

$$\begin{aligned} \sum_j E[a_j^2 ((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j)^2] &= \sum_j E[a_j^2] \cdot E[(\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2] \\ &= \sum_j E[a_j^2] \cdot (3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) \\ &= 2 \sum_j E[a_j^2] \cdot (\Delta t_j)^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, hemos establecido que

$$\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 \rightarrow \int_0^t a(s) ds \text{ en } L^2(P) \text{ cuando } \Delta t_j \rightarrow 0$$

y esto es a menudo expresado en pocas palabras por la fórmula notable

$$(dW_t)^2 = dt. \quad (1.25)$$

El argumento anterior también demuestra que  $\sum R_j \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Y así se completa la prueba de la fórmula de Itô.

□

### La Fórmula de Itô Multi-dimensional

Sea  $W(t, \omega) = (w_1(t, \omega), \dots, W_m(t, \omega))$  un movimiento Browniano  $m$ -dimensional. Si cada proceso  $u_i(t, \omega)$  y  $v_{ij}(t, \omega)$  satisface las condiciones dadas en la definición 1.16, ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ) entonces podemos formar los siguientes  $n$  procesos de Itô

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 + v_{11}dW_1 + \dots + v_{1m}dW_m \\ \vdots \\ dX_n = u_n + v_{n1}dW_1 + \dots + v_{nm}dW_m \end{cases} \quad (1.26)$$

O, en simple notación matricial

$$dX(t) = udt + v dW(t), \quad (1.27)$$

donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}, dW(t) = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Tal que el proceso  $X(t)$  es llamado **proceso de Itô  $n$ -dimensional**. Véase [8].

**Teorema 1.11 (La fórmula general de Itô).**

Sea

$$dX(t) = udt + vdw(t)$$

Sea un proceso de Itô  $n$ -dimensional como el anterior. Sea  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$   $\mathcal{C}^2$  de  $[0, \infty) \times R^n$  en  $R^p$ . Entonces el proceso

$$Y(t, m) = g(t, X(t))$$

es nuevamente un proceso de Itô, cuyas componentes numéricas  $k, Y_k$ , están dadas por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_j \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j \quad (1.29)$$

donde  $dW_i dW_j = \delta_{ij} dt$ ,  $dW_i dt = dt dW_i = 0$ .

## 1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

### 1.4.1. Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas

**Teorema 1.12** Sean  $T > 0$  y  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ ,  $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times R^n \rightarrow R^{n \times m}$  funciones medibles que satisfacen

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in R^n, t \in [0, T] \quad (1.1)$$

para alguna constante  $C$ , (donde  $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$ ) y tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in R^n, t \in [0, T] \quad (1.2)$$

para alguna constante  $D$ . Sea  $Z$  una variable aleatoria la cual es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$  generada por  $W_s(\cdot)$ ,  $s \geq 0$  y tal que

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z \quad (1.3)$$

tiene una solución única  $t$ -continua,  $X_t(\omega)$ , con la propiedad que:

$X_t$  es adaptado para la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $B_s(\cdot)$ ;  $s \leq t$  y

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty. \quad (1.4)$$

*Demostración :* La unicidad sigue de la Isometría de Itô y de la propiedad de Lipschitz (1.2): Sea  $X_1(t, \omega) = X_t(\omega)$  y  $X_2(t, \omega) = \hat{X}_t(\omega)$  soluciones con valores iniciales  $Z$ ,  $\hat{Z}$  respectivamente, esto es  $X_1(0, \omega) = Z(\omega)$ ,  $X_2(0, \omega) = \hat{Z}(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Consideramos  $a(s, \omega) = b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)$  y  $\gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$ . Entonces

$$\begin{aligned} E[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= E\left[\left(Z - \hat{Z} + \int_0^t a ds + \int_0^t \gamma dW_s\right)^2\right] \\ &\leq 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3E\left[\left(\int_0^t a ds\right)^2\right] + 3E\left[\left(\int_0^t \gamma dW_s\right)^2\right] \\ &\leq 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3tE\left[\int_0^t a^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^t \gamma^2 ds\right] \\ &\leq 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3(1+t)D^2 \int_0^t E[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds. \end{aligned}$$

Así la función

$$v(t) = E[|X_t - \hat{X}_t|^2]; \quad 0 \leq t \leq T$$

satisface

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds, \quad (1.5)$$

donde  $F = 3E[|Z - \hat{Z}|^2]$  y  $A = 3(1+T)D^2$ .



Por la desigualdad de Gronwall concluimos que

$$v(t) \leq \text{Exp}(A_t). \quad (1.6)$$

Ahora asumimos que  $Z = \widehat{Z}$ . Entonces  $F = 0$  y así  $v(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Por lo tanto

$$P[|X_t - \widehat{X}_t| = 0 \text{ para todo } t \in Q \cap [0, T]] = 1,$$

donde  $Q$  denota los números racionales.

Por continuidad de  $t \rightarrow |X_t - \widehat{X}_t|$  sigue que

$$P[|X_1(t, \omega) - X_2(t, \omega)| = 0 \text{ para todo } t \in [0, T]] = 1, \quad (1.7)$$

y la unicidad está probada.

La prueba de existencia es similar a la prueba de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias: Se define  $Y_t^{(0)} = X_0$  y  $Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)}(\omega)$  inductivamente como sigue

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)})dW_s. \quad (1.8)$$

Entonces, un cálculo similar al utilizado en la prueba de unicidad nos da que

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|] \leq (1 + T)3D^2 \int_0^t E[|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2]ds,$$

para  $k \geq 1$ ,  $t \leq T$  y

$$E[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(2)}|^2] \leq 2C^2t^2(1 + E[|X_0|^2]) + 2C^2t(1 + E[|X_0|^2]) \leq A_1t$$

donde la constante  $A_1$  sólo depende de  $C$ ,  $T$  y  $E[|X_0|^2]$ . Así por inducción sobre  $k$  obtenemos

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leq \frac{A_2^{(k+1)}t^{(k+1)}}{(k+1)!}; \quad k \geq 0, \quad t \in [0, T] \quad (1.9)$$

para una constante  $A_2$  adecuada que depende sólo de  $C$ ,  $D$ ,  $T$  y  $E[|X_0|^2]$ .

Por lo tanto, si  $\lambda$  denota la medida de Lebesgue sobre  $[0, T]$  y  $m > n \geq 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^2(\lambda \times P)} &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} Y_t^{k+1} - Y_t^{(k)} \right\|_{L^2(\lambda \times P)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{k+1} - Y_t^{(k)}\|_{L^2(\lambda \times P)} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} (E[\int_0^T |Y_t^{k+1} - Y_t^{(k)}|^2 dt])^{1/2} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} (\int_0^T \frac{A_2^{(k+1)} t^{(k+1)}}{(k+1)!} dt)^{1/2} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} (\frac{A_2^{(k+1)} T^{(k+2)}}{(k+2)!})^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m, n \rightarrow \infty. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\lambda \times P)$ . Así  $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^\infty$  es convergente en  $L^2(\lambda \times P)$ . Definimos

$$X_t := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)} \quad (\text{límite en } L^2(\lambda \times P)).$$

Entonces  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t^Z$ -medible para todo  $t$ , y esto se tiene para cada  $Y_t^{(n)}$ . Probamos que  $X_t$  satisface (1.3):

Para todo  $n$  y todo  $t \in [0, T]$  tenemos que

$$Y_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dW_s.$$

Ahora hacemos  $n \rightarrow \infty$ . Entonces por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds \rightarrow \int_0^t b(s, X_s) ds \quad \text{en } L^2(P)$$

y por la isometría de Itô sigue que

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dW_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \text{en } L^2(P).$$

Concluimos que para todo  $t \in [0, T]$  tenemos

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \text{casi seguramente.} \quad (1.11)$$

Esto es,  $X_t$  satisface (1.3).

Resta probar que  $X_t$  puede ser continua. Por el teorema 1.8 existe una versión continua del lado derecho de (1.11). Denotaremos esta versión por  $\tilde{X}_t$ . Entonces  $\tilde{X}_t$  es continua y

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \text{ para casi todo } \omega \\ &= \tilde{X}_0 + \int_0^t b(s, \tilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s)dW_s \text{ para casi todo } \omega\end{aligned}$$

□

### 1.4.2. Solución Numérica

Las ecuaciones estocásticas las cuales admiten una solución explícita son una excepción a la regla. Por consiguiente, se requieren técnicas numéricas para la aproximación de la solución de una ecuación diferencial estocásticas. En lo que sigue, a tal aproximación se le llamará *solución numérica*.

Las soluciones numéricas son necesarias para diferentes objetivos. Uno de los propósitos es visualizar una variedad de trayectorias de la solución. Da una idea del comportamiento de las posibles trayectorias. En este sentido, podremos conseguir una buena predicción del proceso estocástico para instantes de tiempo futuro. En la vida real nunca conoceremos la trayectoria Browniana que gobierna a una ecuación diferencial estocástica, y la simulación de un par de trayectorias no es representativa para el gráfico general.

Un segundo objetivo (quizás el más importante) es lograr una aproximación razonable para las características distribucionales de la solución para una ecuación diferencial estocástica. Ellas incluyen las esperanzas, covarianzas, varianzas y los momentos de orden superior. Esto es verdaderamente importante ya que sólo en pocos casos se tienen explícitamente formuladas estas cantidades, y frecuentemente se incluyen funciones especiales las cuales tienen que ser aproximadas numéricamente. Las soluciones numéricas nos permiten simular tantas trayectorias como nosotros queramos; ellas constituyen la base en la técnica

de Monte-Carlo para obtener las características distribucionales.

Con el propósito de ilustrar, nos vamos a restringir a la solución numérica de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

donde, como es usual,  $W$  denota el movimiento Browniano, supongamos que las funciones coeficientes  $a(x)$   $b(x)$  son continuas Lipschitz. Además  $E[X_0^2] < \infty$ , estas suposiciones garantizan la existencia y unicidad de una solución fuerte.

### La Aproximación de Euler

Una *solución numérica*  $X^{(n)} = (X_t^{(n)}, t \in [0, T], T \in \mathbb{R}^+)$  de la ecuación diferencial estocástica (1.12) es un proceso estocástico que aproxima la solución  $X = (X_t, t \in [0, T])$  de (1.12). Tal solución está caracterizada por una partición  $\tau_n$  de  $[0, T]$ :

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T,$$

tal que

$$\delta_n := mesh(\tau_n) := \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i.$$

El proceso  $X^{(n)}$  es calculado sólo en los puntos  $t_i$  de la partición  $\tau_n$ . Puesto que estamos interesados en soluciones  $X$  con trayectorias continuas suponemos que  $X_t^{(n)}$  se obtiene por una interpolación lineal simple de los puntos  $(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{(n)})$  y  $(t_i, X_{t_i}^{(n)})$ .

Un esquema de aproximación numérica determina  $X^{(n)}$  en los puntos  $t_i$ . Una manera sencilla para obtener la solución numérica es reemplazar los diferenciales en la ecuación diferencial estocástica (1.12) con diferencias. Esto es una ventaja para el siguiente esquema iterativo:

**Esquema de aproximación de Euler:**

Denotamos, como es usual,

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} \text{ y } \Delta_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} &= X_0, \\ X_{t_1}^{(n)} &= X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)})\Delta_1 + b(X_0^{(n)})\Delta_1 W \\ X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 W \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ X_{t_{n-1}}^{(n)} &= X_{t_{n-2}}^{(n)} + a(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} + b(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} W \\ X_T^{(n)} &= X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n W \end{aligned}$$

En la práctica uno usualmente escoge puntos equidistantes  $t_i$  tales que

$$\delta_n = mesh(\tau_n) = T/n,$$

y

$$\begin{aligned} X_{iT/n}^{(n)} &= X_{(i-1)T/n}^{(n)} + a(X_{(i-1)T/n}^{(n)})\Delta_i + b(X_{(i-1)T/n}^{(n)})\Delta_i W, \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Si estamos interesados en la aproximación de la trayectoria de  $X$ , nos gustaría que la muestra  $X^{(n)}(\omega)$  se aproxime a  $X(\omega)$  para una trayectoria Browniana  $W(\omega)$  dada. Como una medida de la calidad de la aproximación de la trayectoria podemos elegir la cantidad

$$e_s(\delta_n) = E|X_T(\omega) - X_T^{(n)}(\omega)|.$$

Nótese que  $e_s$  verdaderamente describe la comparación de las trayectorias de  $X$  y  $X^{(n)}$  en  $t = T$ . El índice "s" en  $e_s$  denotará que la aproximación es fuerte. Existen ciertamente más criterios apropiados para describir la proximidad de las trayectorias de  $X$  y  $X^{(n)}$ , uno de ellos podría ser  $E[\sup_{t \in [0, T]} |X_t(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)|]$ . Sin embargo, esta cantidad es más difícil de tratar teóricamente. Así podemos pensar que las trayectorias  $X^{(n)}(\omega)$  y  $X(\omega)$  convergen siempre que converjan en los extremos del intervalo  $[0, T]$ .

**Definición 1.17** Decimos que  $X^{(n)}$  es una **solución numérica fuerte** de la ecuación diferencial estocástica (1.12) si

$$e_s(\delta_n) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \delta_n = \text{mesh}(\tau_n) \rightarrow 0.$$

En contraste a una *solución numérica fuerte*, una **solución numérica débil** es aquella que aproxima los momentos de la solución  $X$ . En este caso no es esencial si  $X_t(\omega)$  y  $X_t^{(n)}(\omega)$  son realmente convergentes. Lo importante es que la diferencia de momentos

$$e_w(\delta_n) = \left| Ef(X_T) - Ef(X_T^{(n)}) \right|$$

sea pequeña. Aquí  $f$  es escogido de una clase de funciones suaves, por ejemplo ciertos polinomios o funciones con un desarrollo polinómico específico. El "w" en  $e_w$  denota que la aproximación es débil.

**Definición 1.18** Decimos que  $X^{(n)}$  es una **solución numérica débil** de la ecuación diferencial estocástica (1.12) si

$$e_w(\delta_n) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \delta_n = \text{mesh}(\tau_n) \rightarrow 0.$$

Para medir la calidad de la aproximación de  $X$  por  $X^{(n)}$  uno introduce el **orden de convergencia**:

La solución numérica  $X^{(n)}$  **converge fuertemente a  $X$  con  $\gamma > 0$  si existe una constante  $c > 0$  tal que**

$$e_s(\delta_n) \leq c \delta_n^\gamma \quad \text{para } \delta_n \leq \delta_0.$$

La solución numérica  $X^{(n)}$  **converge débilmente a  $X$  con orden  $\gamma > 0$  si existe constante  $c > 0$  tal que**

$$e_w(\delta_n) \leq c \delta_n^\gamma \quad \text{para } \delta_n \leq \delta_0.$$

La aproximación de Euler converge fuertemente con orden 0.5. y debilmente con orden 1.0 (para una clase de funciones con un desarrollo polinómico apropiado). Véase [1].

### La Aproximación de Milstein

La aproximación de Euler puede mejorarse aún más. Ilustramos esto intruduciendo la aproximación de Milstein. Como antes, consideramos la ecuación diferencial estocástica

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Para los puntos  $t_i$  de la partición  $\tau_n$  podemos considerar la diferencia  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$  y obtener:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dW_s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

La aproximación de Euler está basada en una discretización de las integrales en (1.14). Veamos, primero consideremos las aproximaciones

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds \approx a(X_{t_{i-1}})\Delta_i, \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dW_s \approx b(X_{t_{i-1}})\Delta_i W,$$

y entonces reemplazamos  $X_{t_i}$  con  $X_{t_i}^{(n)}$ :

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i W, \quad i = 1, \dots, n.$$

La aproximación de Milstein se aprovecha de la llamada *expansión de Taylor-Itô* respecto a (1.14). La idea consiste en la aplicación de la fórmula de Itô 1.9 a los integrandos  $a(X_s)$  y  $b(X_s)$  en (1.14). Para hacer las fórmulas que siguen más breves escribiremos  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ , ... en lugar de  $a(X_y)$ ,  $b(X_y)$ ,  $a'(X_y)$ , ....

$$\begin{aligned} X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ a(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^s (aa' + \frac{1}{2}b^2a'')dy + \int_{t_{i-1}}^s ba'dW_y \right] ds \\ &\quad + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ b(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^s (ab' + \frac{1}{2}b^2b'')dy + \int_{t_{i-1}}^s bb'dW_y \right] dW_s \\ &= a(X_{t_{i-1}})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}})\Delta_i W + R_i, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde el término del resto está dado por

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \int_{t_{i-1}}^s bb'dW_y \right] dW_s + R_i^{(2)}. \quad (1.16)$$

La integral estocástica doble  $R_i^{(1)}$  es entonces aproximada por

$$R_i^{(1)} \approx b(X_{t_{i-1}}) b'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_{t_{i-1}}^s dW_y \right) dW_s. \quad (1.17)$$

Se denota la integral doble del lado derecho como  $I$ . Recordemos que  $(dW_s)^2 = ds$ , y por lo tanto

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (dW_s)^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds = \Delta_i.$$

Consideramos la integral doble

$$\begin{aligned} (\Delta_i W)^2 &= \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_s \right) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_y \right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_y \right) dW_s. \end{aligned} \quad (1.18)$$

La integral del lado derecho la podemos reescribir como



$$\begin{aligned}
& \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_{t_{i-1}}^s dW_y \right) dW_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_s^{t_i} dW_y \right) dW_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (dW_s)^2 \\
&= 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \int_{t_{i-1}}^s dW_y \right) dW_s + \Delta_i = 2I + \Delta_i.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Combinando (1.17) con (1.18) y (1.19), tenemos que

$$R_i^{(1)} \approx \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}}) b'(X_{t_{i-1}}) [(\Delta_i W)^2 - \Delta_i]. \tag{1.20}$$

Bajo las suposiciones de suavidad de las funciones coeficientes  $a(x)$  y  $b(x)$  uno puede ver que  $R_i^{(2)}$  es pequeño comparado con  $R_i^{(1)}$ , así este último determina el orden de magnitud de  $R_i$ . La relación entre (1.15) y (1.20) da la motivación para la definición del *esquema de aproximación de Milstein*. Nótese que este esquema es la aproximación de Euler con un término de corrección adicional que contiene los incrementos cuadrados del movimiento Browniano.

**Esquema de aproximación de Milstein:**

$X_0^{(n)} = X_0$  y para  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}
X_{t_i}^{(n)} &= X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \Delta_i W \\
&\quad + \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}}^{(n)}) b'(X_{t_{i-1}}^{(n)}) [(\Delta_i W)^2 - \Delta_i].
\end{aligned}$$

La aproximación de Milstein tiene como ventaja una sustancial mejora de la calidad de la solución numérica:

La aproximación de Milstein converge fuertemente con orden 1.0. Véase [1].

En este capítulo hemos dado el sustento teórico de nuestro modelo. En lo que sigue desarrollaremos una serie de conceptos asociados con la técnica de predicción espacial kriging, la cual será de utilidad para la estimación de variables que alimentan el modelo propuesto.



## Capítulo 2

# Técnica de Predicción Espacial: Kriging

El desarrollo de la minería ha traído unido el perfeccionamiento de los métodos de búsqueda de los minerales útiles, y la determinación de su utilidad para la extracción. Existiendo actualmente varias formas de realizar el cálculo de reservas, los métodos clásicos y los modernos. De los clásicos se pueden destacar, el de “Bloques Geológicos” y el de “Perfiles Paralelos”. Estos se caracterizan por el uso de valores medios o media ponderadas de los contenidos de la exploración en bloques definidos convenientemente, los cuales son eficientes cuando la información disponible presenta determinada regularidad. La práctica ha llevado a la utilización de técnicas estadísticas para resolver un único problema: estimar valores desconocidos a partir de los conocidos, claro está, no existe un método por muy sofisticado que sea, que obtenga resultados exactos. Buscando el mejor estimador que minimice la varianza del error de estimación surge, en la segunda mitad del siglo XX, la Geoestadística por inspiración de un ingeniero en minas Sudafricano *Danie G Krige*. Conceptos iniciales que fueron tomados por la escuela francesa de Geología con *George Matheron*. La cual se consolidó y desarrollo en los últimos años como ciencia aplicada casi exclusivamente en el campo minero, existiendo únicamente como respuesta a necesidades prácticas concretas.

El término Geoestadística fue inventado por el profesor George Matheron en su trabajos de 1960 interesado en los problemas de estimación de reservas minerales.

La geostatística es una rama de la estadística que conforma un conjunto de técnicas para el análisis y predicción de valores distribuidos en el espacio y en el tiempo, los cuales se asumen correlacionados entre sí. Con ello llegamos a conocer la forma en que varía cualquier variable continua en el espacio (patrón espacial) a una o varias escalas seleccionadas, con un nivel de detalle que permite cuantificar la variación espacial de la variable en distintas direcciones del espacio. La geostatística utiliza funciones para modelar esta variación espacial, y estas funciones son utilizadas posteriormente para interpolar en el espacio el valor de la variable en sitios no muestreados. La fortaleza de la geostatística es que esta interpolación (conocida como kriging) es considerada una estimación robusta y que en contraste con otros métodos de interpolación permite asociar la variabilidad de la estimación, conocido como grado de incertidumbre. De la aplicación en minería se ha pasado a una gama importante de otras aplicaciones, en particular en imágenes satelitales, evaluación de medidas espaciales no mineras, etcétera.

## 2.1. Definiciones Básicas

### 2.1.1. Tipos de Datos Espaciales

Cuando se habla de datos espaciales se refiere a mediciones y observaciones realizadas en localizaciones o en áreas específicas. Las localizaciones pueden referirse a puntos o a áreas, y estas pueden ser regulares o irregulares. La clasificación que adoptamos sigue Cressie (1993) y distingue los tipos de datos por la naturaleza del dominio espacial.

**Definición 2.1** Se denota un proceso espacial en  $d$  dimensiones como

$$\{Z(s) : s \in D \subset R^d\}.$$

Aquí,  $Z$  denota el atributo observado, por ejemplo, rendimiento, concentración o número de muertes infantiles. La localización en la cual  $Z$  es observado es  $s$ , que es un vector de  $d$

coordenadas. Los tipos de datos espaciales son distinguidos a través de las características del dominio  $D$ .

### Datos Geoestadísticos

El dominio  $D$  es continuo y fijo. Por continuo entendemos que  $Z(s)$  puede ser observado en cualquier parte en  $D$ , esto es, entre dos localizaciones cualesquiera  $s_i$  y  $s_j$  se puede teóricamente encontrar un número infinito de otros puntos. Por fijo entendemos que los puntos de  $D$  no son estocásticos. Debido a la continuidad de  $D$ , los datos geoestadísticos también se conoce como “datos espaciales con variación continua”. Es importante asociar la continuidad con el dominio, no con el atributo que está siendo medido. Que el atributo  $Z$  sea continuo o discreto no tiene relación con que los datos sean geoestadísticos o no.

### Datos en retícula

Los datos en retícula son datos espaciales donde el dominio  $D$  es fijo y discreto, en otras palabras, no aleatorio y contable. El número de localizaciones puede ser infinito, lo importante es que pueda ser enumerado. Las localizaciones espaciales con datos en retícula se refieren con frecuencia a sitios que no representan puntos en el espacio, sino regiones de área. Es con frecuencia conveniente o necesario matemáticamente, asignar a cada sitio una coordenada espacial precisa, es decir, una localización “representativa”.

Matemáticamente una retícula queda definida como un conjunto de lados y vértices (distribuidos regular o irregularmente), es decir, un conjunto de índices y localizaciones con un conjunto asociado de vecinos. Ya que los datos de la rejilla están definidos en regiones espaciales las localizaciones concretas suelen referirse al centroide de la región.

### Procesos puntuales

Los datos geoestadísticos y en retícula tienen en común que son fijos, es decir, el dominio no es estocástico. En el caso de los procesos puntuales no sucede así.

Se habla de procesos puntuales cuando las localizaciones, y no las mediciones, son las variables de interés. Consiste en un número finito de observaciones en una región

determinada. El objetivo de los procesos puntuales es conocer la variación de la intensidad de los eventos sobre la región de estudio y el de buscar modelos que ayuden a explicar o comprender el fenómenos.

### 2.1.2. Autocorrelación espacial

Si  $Z(s)$  es el atributo  $Z$  observado en el plano en la localización espacial  $s$ , entonces el término *autocorrelación espacial* se refiere a la correlación entre  $Z(s_i)$  y  $Z(s_j)$ . Es una correlación entre el mismo atributo en dos localizaciones.

**Definición 2.2** La función de covarianza de un proceso espacial está definida como

$$C(s, h) = Cov[Z(s), Z(s + h)] = E[\{Z(s) - \mu(s)\}\{Z(s + h) - \mu(s + h)\}]$$

y función de autocorrelación (o correlograma) es

$$R(s, h) = \frac{C(s, h)}{\sqrt{Var[Z(s)]Var[Z(s + h)]}}.$$

donde  $s, h \in D \subset R^d$

### 2.1.3. Estacionaridad, Isotropía y Gaussianidad

**Definición 2.3** Un campo aleatorio

$$\{Z(s) : s \in D \subset R^d\} \tag{2.1}$$

es llamado un campo estacionario estricto (o fuerte) si la distribución espacial es invariante bajo traslaciones de las coordenadas, esto es

$$P(Z(s_1) < z_1, Z(s_2) < z_2, \dots, Z(s_k) < z_k) = P(Z(s_1+h) < z_1, Z(s_2+h) < z_2, \dots, Z(s_k+h) < z_k),$$

para todo  $k$  y  $h$ .

Como su nombre lo indica, estacionariedad estricta es una condición estricta, la mayoría de los métodos estadísticos para el análisis de datos espaciales se satisfacen con las condiciones de estacionaridad basadas en los momentos de la distribución espacial en lugar

de la propia distribución. Esto es similar a los procedimientos de estimación estadística basados en la media y la varianza de una variable aleatoria, método de mínimos cuadrados, los cuales no requiere conocer la distribución conjunta de los datos.

**Definición 2.4** La estacionaridad de segundo orden (o débil) de un campo aleatorio implica que

$$E[Z(s)] = \mu$$

y

$$Cov[Z(s), Z(s+h)] = C(h).$$

La media de un campo aleatorio estacionario de segundo orden es constante y la covarianza entre atributos en diferentes localizaciones es una función que depende sólo de su separación espacial  $h$ .

La función  $C(h)$  es llamada función de covarianza de los procesos espaciales y juegan un papel importante en el desarrollo de modelos de datos espaciales. La función de covarianza  $C(h)$  de un campo estacionario de segundo orden tiene propiedades muy importantes. En particular,

- (i)  $C(0) \geq 0$ ;
- (ii)  $C(h) = C(-h)$ , esto es,  $C$  es una función par;
- (iii)  $C(0) \geq |C(h)|$ ;
- (iv)  $C(h) = Cov[Z(s), Z(s+h)] = Cov[Z(0), Z(h)]$ ;
- (v) Si  $C_j(h)$  son funciones de covarianza,  $j = 1, \dots, k$  entonces  $\sum_{j=1}^k b_j C_j(h)$  es una función de covarianza, si  $b_j \geq 0$  para todo  $j$ ;
- (vi) Si  $C_j(h)$  son funciones de covarianza,  $j = 1, \dots, k$ , entonces  $\prod_{j=1}^k C_j(h)$  es una función de covarianza.
- (vii) Si  $C(h)$  es una función de covarianza en  $R^d$ , entonces también es una función de covarianza en  $R^p$ , si  $p < d$ .

**Definición 2.5** El proceso  $\{Z(s) : s \in D \subset R^d\}$  se dice intrínsecamente estacionario si  $E[Z(s)] = \mu$  y

$$\frac{1}{2}Var[Z(s) - Z(s+h)] = \gamma(h).$$

La función  $\gamma(h)$  es llamada el semivariograma del proceso espacial.

Un proceso estacionario de segundo orden es también intrínsecamente estacionario, para verificar esto es suficiente con examinar que

$$\begin{aligned} Var[Z(s) - Z(s+h)] &= Var[Z(s)] + Var[Z(s+h)] - 2Cov[Z(s), Z(s+h)] \\ &= 2\{Var[Z(s)] - 2C(h)\} \\ &= 2\{C(0) - C(h)\} = 2\gamma(h). \end{aligned}$$

El recíproco no es cierto, estacionaridad intrínseca no implica estacionaridad de segundo orden.

La estructura del segundo momento de un campo estacionario débil es una función de la separación espacial  $h$ , pero la función de covarianza puede depender de la dirección. En la ausencia de esta dependencia de la dirección, es decir, cuando la función de covarianza o el semivariograma depende sólo del valor absoluto de la distancia entre los puntos, la función es llamada isotrópica (en caso contrario se denomina anisotrópica).

**Definición 2.6** Un campo aleatorio  $\{Z(s) : s \in D \subset R^d\}$  es un campo aleatorio Gaussiano, si la función de distribución acumulativa

$$P(Z(s_1) < z_1, Z(s_2) < z_2, \dots, Z(s_k) < z_k),$$

es aquella de una variable aleatoria Gaussiana  $k$ -variada para todo  $k$ .

Por las propiedades de la distribución Gaussiana multivariada esto implica que  $Z(s_i)$  es una variable aleatoria Gaussiana. El recíproco no es cierto. Incluso si  $Z(s_i) \sim G(\mu(s_i), \sigma^2(s_i))$ , esto no implica que la distribución conjunta de  $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$  es Gaussiana multivariada.



La distribución Gaussiana es a menudo el modelo de población por defecto para variables aleatorias continuas en estadística clásica. Si los datos son claramente no Gaussianos, se tiende a buscar transformaciones para hacer los datos más parecidos a un proceso Gaussiano. En estadística espacial necesitamos hacer una importantísima distinción entre los tipos de datos espaciales, relacionado a las características del dominio  $D$ , y las propiedades de distribución del atributo  $Z$  en estudio. El hecho que el dominio  $D$  sea continuo, esto es, los datos son geoestadísticos, no tiene incidencia alguna sobre la naturaleza del atributo, como discreto o continuo. El hecho que  $D$  sea discreto, no impide que el atributo  $Z(s)$  en la localización  $s$  posiblemente siga la ley Gaussiana. Tampoco la continuidad del dominio debe interpretarse como una sugerencia de un campo aleatorio Gaussiano.

#### 2.1.4. Continuidad Espacial

La derivadas parciales del campo aleatorio  $\{Z(s) : s \in D \subset R^d\}$ ,

$$\dot{Z}(s) = \frac{\partial Z(s)}{\partial s_j},$$

son variables aleatorias cuyo comportamiento estocástico contiene información importante acerca de la naturaleza del proceso, en particular de su continuidad.

Tenemos que enfocarnos en inferir el grado de continuidad del comportamiento del modelo de correlación (o covarianza) cercano al origen. Esto es intuitivo, ya que el comportamiento cercano al origen gobierna el intervalo para el cual las correlaciones son altas. Se Considera una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}$ . Para un campo espacial aleatorio  $\{Z(s) : s \in D \subset R^d\}$  con media constante y varianza constante, la continuidad en media cuadrática en  $s$  implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[(Z(s) - Z(s+h))^2] = 0.$$

ya que  $E[(Z(s) - Z(s+h))^2] = 2\text{Var}[Z(s)] - 2C(h) = 2(C(0) - C(h)) = 2\gamma(h)$ ,

concluimos de

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[(Z(s) - Z(s+h))^2] = \lim_{h \rightarrow 0} 2(C(0) - C(h)),$$

que a menos que  $C(h) \rightarrow C(0)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , el campo aleatorio no puede ser continuo en  $s$ . El campo aleatorio será continuo en media cuadrática, si y sólo si es continuo en el origen. La continuidad en media cuadrática puede ser verificada a través del comportamiento de la función de covarianza cerca de 0.

Algunos procesos parecen tener un semivariograma para el cual  $\gamma(h) \rightarrow c \equiv \text{constante}$ , cuando  $h \rightarrow 0$ . Mientras los datos empíricos pueden sugerir que el semivariograma no pasa a través del origen, este fenómeno es conocido como el efecto nugget o efecto pepita.

## 2.2. Semivariograma: Análisis y Estimación

El semivariograma es una herramienta geoestadística importante en la determinación de las características espaciales de una variable, jugando el rol central en la geoestadística, se le llama el prerrequisito para la estimación Geoestadística.

En otras palabras, los instrumentos para analizar la dependencia espacial en datos geoestadísticos son las funciones de covarianza (covariograma) o el semivariograma.

Sea  $Z(s)$  un vector aleatorio en la localización  $s \in D$ . El momento de primer orden de  $Z(s)$  es la esperanza matemática definida como:

$$m(s) = E[Z(s)]$$

Los momentos de segundo orden son:

- La varianza,  $Var[Z(s)] = E[(Z(s) - m(s))^2]$
- La covarianza o autocovarianza,  $C(s_i, s_j) = E[(Z(s_i) - m(s_i))(Z(s_j) - m(s_j))]$
- El semivariograma,  $\gamma(s_i, s_j) = \frac{1}{2}Var[Z(s_i) - Z(s_j)]$
- Suponiendo estacionaridad del proceso  $Z(s)$ , el semivariograma se puede definir como

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}Var[Z(s) - Z(s+h)] = \frac{1}{2}E[(Z(s) - Z(s+h))^2]$$

Existe una relación directa entre el semivariograma y la función de covarianza,

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Por lo tanto resulta suficiente usar una de las dos funciones para caracterizar la dependencia espacial, aunque habitualmente se utiliza el variograma.

El estimador más común del semivariograma viene dado por

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(s_i + h) - Z(s_i)]^2 \quad (2.1)$$

donde  $N(h)$  es el número de pares  $Z(s_i)$  y  $Z(s_i + h)$  separados por una distancia  $h = |h|$ .

Aunque no existe un criterio fijo, ni una justificación teórica para determinar el número de pares necesarios para calcular cada valor del semivariograma, algunos autores sugieren 30 pares como mínimo para obtener una masa estadística suficientemente grande.

El estimador mostrado en la ecuación (2.1) es un estimador no paramétrico y óptimo, cuando se dispone de una malla de muestreo que sea representativa y la distribución sea normal. En la práctica este estimador produce variogramas erráticos, debido a desviaciones de las condiciones ideales vistas arriba. Además, debido a que  $\hat{\gamma}(h)$  es esencialmente una media muestral, el estimador tiene todas las desventajas comúnmente asociadas a la misma, en particular la no robustez.

Una alternativa robusta fue la propuesta por Cressie y Hawkins:

$$\hat{\gamma}^*(h) = \frac{1}{2} (0.457 + 0.494/N(h))^{-1} \left[ \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (|Z(s_i + h) - Z(s_i)|)^{1/2} \right]^4.$$

Aunque el estimador de Cressie y Hawkins se considera óptimo en condiciones de normalidad, suele infravalorar los valores atípicos.

Como alternativa se han propuestos otros estimadores, denominados estimadores ponderados, los cuales se basan bien en la función de distribución acumulada o bien en la densidad. La experiencia práctica con estos estimadores, sin embargo, es muy reducida.

### 2.2.1. Formas generales del semivariograma muestral

En un sentido amplio se considera que hay dos tipos principales de semivariogramas. En el primer tipo, la semivarianza aumenta conforme lo hace el valor absoluto del intervalo  $|h|$  hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual se mantiene relativamente constante y oscila alrededor del mismo. Estos semivariogramas son conocidos como tipo transitivos.

El valor del intervalo a partir del cual el semivariograma no se incrementa es conocido como alcance o rango y marca el límite de la dependencia espacial. La varianza máxima es conocida como 'sill' o meseta del semivariograma y teóricamente debe coincidir con la varianza a priori de la muestra de la variable aleatoria  $Z(s)$ .

Cuando la variable presenta este tipo de semivariograma cumple no sólo la hipótesis intrínseca (es débilmente estacionaria), sino también es estacionaria de segundo orden. Es decir, su valor esperado es constante,

$$E[Z(s)] = m; \forall s$$

la función de covarianza existe y está definida por,

$$C(h) = Cov[Z(s+h), Z(s)] \equiv E[(Z(s) - m)(Z(s+h) - m)]$$

y el semivariograma está relacionado con las funciones de covarianza y de autocorrelación como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= C(0) - C(h) \\ \rho(h) &= C(h)/C(0) = 1 - \gamma(h)/C(0) \end{aligned}$$

donde  $C(0)$  es la varianza de la muestra, también conocida como la varianza a priori de  $Z(s)$ .

El segundo tipo de variograma aparenta un incremento sin límite, por lo que se denomina no acotados.

Por definición debe cumplirse  $\gamma(0) = 0$ , pero en la práctica el semivariograma muestral no necesariamente se anula cuando  $h$  tiende a 0. Esto es conocido como el efecto nugget o pepita, y el valor del semivariograma en cero  $\gamma(0)$  es conocido como la varianza nugget o microvarianza. En principio esto puede ocurrir solamente si existen discontinuidades en la variable aleatoria. En la práctica su existencia se debe a variación espacial que no puede explicar el variograma, a fenómenos de escala y a errores de medida.

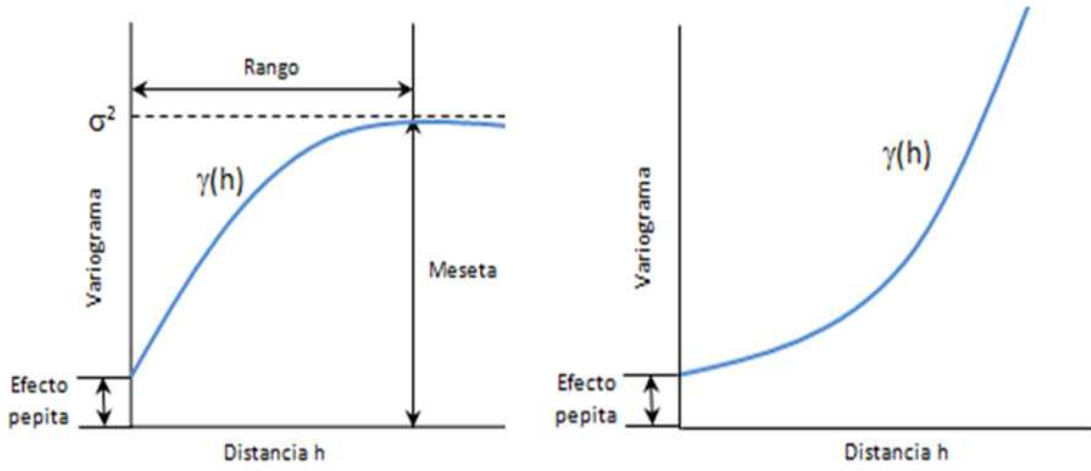


Figura 2.1: Variograma transitivo (izquierda) y Variograma no acotado (derecha)

### 2.2.2. Condiciones que deben cumplir los modelos del semivariograma

En resumen, en la selección de una función adecuada para ser ajustada a un semivariograma muestral, se debe tener en cuenta en la mayoría de los casos hasta tres elementos: la ordenada en el origen, una sección monótonamente creciente y una meseta. Sin embargo, no servirá cualquier función debido a la siguiente razón.

Supóngase que  $Z(s)$  es una variable aleatoria estacionaria de segundo orden de la cual se obtiene la variable regionalizada  $\{Z(s_i), i = 1, \dots, n\}$ , es decir distribuida especialmente, con semivariograma y función de covarianza,  $\gamma(h)$  y  $C(h)$  respectivamente.

Sea  $Y$  una combinación lineal de  $Z(s_i)$  tal que

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$$

donde  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son ponderaciones arbitrarias.

La variable  $Y$  también es una variable regionalizada con varianza:

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(s_i, s_j)$$

la cual no puede ser negativa en ningún caso. Así la función de covarianza en la parte derecha de la expresión anterior debe asegurar que esta condición se cumpla.

La matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} C(s_1, s_1) & C(s_1, s_2) & \dots & C(s_1, s_n) \\ C(s_2, s_1) & C(s_2, s_2) & \dots & C(s_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(s_n, s_1) & C(s_n, s_2) & \dots & C(s_n, s_n) \end{pmatrix}$$

debe ser positiva definida, es decir, el determinante y todos sus menores principales son positivos o cero. Aquí las covarianzas están definidas como  $C(s_i, s_j) = Cov[Z(s_i), Z(s_j)]$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ .

Las variables que no tengan covarianzas a priori finitas no tendrán definida la función de covarianzas. En el caso de que cumplan la hipótesis intrínseca, entonces estará definido el semivariograma y se cumplirá que:

$$Var[Y] = C(0) \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i, s_j).$$

Si las ponderaciones  $\lambda_i$  suman 0, es decir  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  entonces:

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i, s_j).$$

Esto implica que  $-\gamma(h)$  debe ser condicionalmente semidefinida positiva, con la condición  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ . Esto es equivalente a decir que  $\gamma(h)$  debe ser condicionalmente semidefinida negativa.

Como consecuencia, se puede demostrar que el semivariograma debe tener un ritmo de crecimiento inferior a  $h^2$ , es decir se debe cumplir que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} = 0$$

Cuando no se satisface esta condición puede ser un indicador de que la función aleatoria no sea estacionaria. Véase [11].

Por otro lado de la definición de semivariograma se infiere que este debe anularse en el origen, es decir  $\gamma(0) = 0$ .

Las funciones que cumplen las condiciones anteriores son conocidas como modelos del semivariograma.

### 2.2.3. Modelos autorizados para el semivariograma

#### Modelos isotrópicos

Los modelos isotrópicos son aquellos en los que la dependencia espacial no varía con dirección espacial que se tome. Como se mencionó antes, según la forma del semivariograma, estos modelos se pueden dividir en transitivos o acotados y no acotados.

- *Modelos transitivos o acotados*

Los modelos de variogramas isotrópicos acotados más utilizados son: el modelo lineal con meseta, modelo esférico, modelo exponencial y el modelo Gaussiano.

- Modelo lineal con meseta

La función de autocorrelación de este modelo es la siguiente:

$$\rho(h) = 1 - h/a$$

donde  $h$  representa la distancia entre dos localizaciones y  $a$  la distancia en la que empieza la meseta. El semivariograma se expresa como

$$\gamma(h) = \begin{cases} S(h/a) & \text{para } 0 \leq h \leq a. \\ S & \text{para } h > a. \end{cases}$$

Donde  $S$  es una constante positiva. El modelo lineal solamente es apropiado para el caso unidimensional.

- Modelo esférico

La función de autocorrelación de este modelo es:

$$\rho(h) = 1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3$$

y el semivariograma

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{S}{2} \left( 3\left(\frac{h}{a}\right) - \left(\frac{h}{a}\right)^3 \right) & \text{para } 0 \leq h \leq a. \\ S & \text{para } h > a. \end{cases}$$

$$\text{gradiente} = 3S/(2a)$$

donde  $S$  es constante. Debe señalarse que el modelo esférico es apropiado para el caso de tres dimensiones aunque se puede aplicar para casos de una y dos.

- Modelo exponencial

En este caso el semivariograma es

$$\gamma(h) = S(1 - e^{-\frac{h}{r}}) \text{ para } h \geq 0$$

$$\text{gradiente} = S/r$$

donde  $S$  es constante. Se considera como rango efectivo  $a=3r$ .

- Modelo Gaussiano

Viene dado por la expresión

$$\gamma(h) = S(1 - e^{-\left(\frac{h}{r}\right)^2}) \text{ para } h \geq 0$$

donde  $r$  es un parámetro que determina la escala espacial de la variación, como en el caso exponencial. El rango efectivo se considera  $a = \sqrt{3}r$ , que corresponde al valor 0.955 del variograma.

La hipótesis subyacente a este modelo es que los fenómenos que representa han de ser continuos e infinitamente diferenciables. En muchas ocasiones esta hipótesis es difícil de cumplir.

- Modelo de Gneiting

El modelo de Gneiting es muy parecido al gaussiano, gráficamente prácticamente son indistinguibles, pero que no tiene ninguna de las desventajas del modelo



gaussiano. En concreto, el modelo gaussiano es muy sensible a la existencia de discontinuidades en los datos.

El modelo es el siguiente:

$$C(h) = (1 + 8sh + 25(sh)^2 + 32(sh)^3)(1 - sh)^8 1_{[0,1]}(sh)$$

siendo  $C(h)$  la covarianza y  $s = \frac{10\sqrt{2}}{47}$ .

- Modelo Matérn o  $K$ -Bessel

$$C(h) = \frac{1}{2^{\kappa-1}\Gamma(\kappa)} \left(\frac{|h|}{a}\right)^{\kappa} K_{\kappa}\left(\frac{|h|}{a}\right),$$

donde  $a > 0$ ,  $\kappa \geq 0$ ,  $\Gamma$  es la función gamma, y  $K_{\kappa}$  es la función de Bessel modificada de segundo orden  $\kappa$ .

Este modelo resulta particularmente interesante y muy flexible para modelar variogramas que tiendan más o menos rápido hacia la meseta, lo que se consigue variando el valor de  $\kappa$ , que se conoce como parámetro de suavizado. En particular, si  $\kappa = 0.5$  se obtiene el modelo de covarianza exponencial. Con valores  $\kappa$  mayores a 0.5 se consiguen variogramas que tienden lentamente hacia la meseta, es decir, son modelos que consideran un mayor rango de dependencia. Contrariamente, para valores de  $\kappa$  menores a 0.5 se consiguen variogramas que tienden más rápidamente hacia la meseta, lo que significa que son modelos que consideran menores rangos de dependencia.

- *Modelos no acotados*

- Modelo de potencia

Existen casos en la varianza aparenta incrementarse indefinidamente. Un movimiento Browniano en una dimensión, no es más que una variable aleatoria gaussiana espacialmente independiente. El semivariograma del modelo de potencia es:

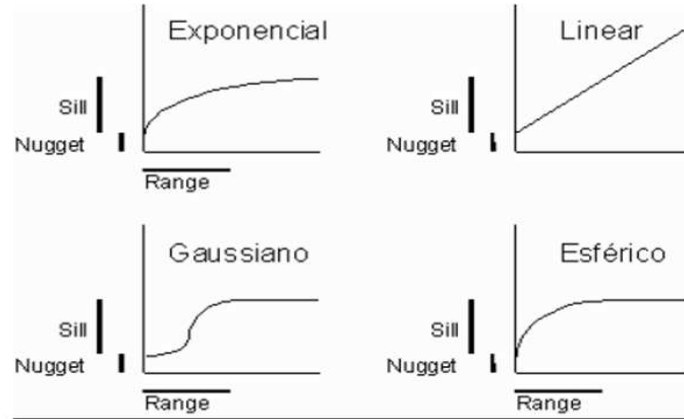


Figura 2.2: Algunos modelos isotrópicos

$\gamma(h) = s|h|^\theta$ ; para  $0 < \theta < 2$ , en la que  $s$  se denomina factor de escala

Si  $\theta = 1/2$  se tiene el movimiento Browniano. Este modelo representa fenómenos no estacionarios en los que el comportamiento en el origen depende del valor  $\theta$ .

- Modelo de efecto pepita puro

Este modelo representa un fenómeno completamente aleatorio, en el cual no existe correlación espacial. No importa lo cercano que se encuentren los valores de las variables, siempre estarán no correlacionadas.

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| = 0 \\ S & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

- Modelo logarítmico (Modelo de Wijsian)

Se define como

$$\gamma(h) = k \log(h)$$

Puede ser utilizado cuando el semivariograma experimental se comporta linealmente, utilizando una escala logarítmica para las distancias.

### Modelos anisotrópicos

Los modelos hasta ahora descritos son isotrópicos. En la práctica existen numerosas situaciones en que la variación espacial es anisotrópica, por lo que existe un semivariograma diferente para cada una de las direcciones.

En la práctica se estudian cuatro direcciones, estimando los semivariogramas y determinando los rangos para los mismos, y luego se construye el gráfico direccional de los rangos para decidir si hay anisotropía o no.

A veces la anisotropía se puede representar mediante una transformación lineal simple de las coordenadas. La transformación se puede expresar como:

$$\Omega(\theta) = (A^2 \cos^2(\theta - \phi) + B^2 \sin^2(\theta - \phi))^{1/2}$$

y se aplica sobre el argumento  $h$  de la función semivarianza en el caso de los modelos transitivos o sobre el gradiente en los modelos no acotados.

En presencia de anisotropía geométrica, el gráfico direccional de los rangos forma una elipse, en la cual el eje menor  $B$  es el rango de la dirección de más rápida variación y  $A$ , el eje mayor, está en la dirección en que la variabilidad es más lenta. La relación  $\lambda = A/B$  es una medida de anisotropía.

## 2.3. Estimación de datos geoestadísticos

### 2.3.1. Métodos de interpolación determinista

El objetivo de los métodos de interpolación espacial es el de estimar datos geoestadísticos en puntos en el dominio espacial que no coinciden con aquellos observados en el mismo. Existen diversas técnicas que difieren en sus hipótesis, métodos y complejidad. Entre los métodos de interpolación determinista podemos mencionar:

- *Análisis tendencial de la superficie (Trend surface analysis)*

Es un método sencillo que consiste en la aplicación de un análisis de regresión múltiple a fin de obtener una superficie de predicción. Habitualmente la superficie se aproxima

por un polinomio, aunque existe gran variedad de funciones alternativas.

- *Ponderación inversa de la distancia (Inverse Distance Weighted, IDW)*

Es el método más utilizado y consiste en una combinación lineal de aquellos puntos observados en el dominio espacial. Como especificidad, el método IDW utiliza como ponderaciones el inverso de la distancia, normalizado de tal forma que la suma de todas las ponderaciones sea igual a la unidad.

$$w(d) = 1/d^p$$

donde  $w$  son las ponderaciones de la distancia y el exponente  $p$  (en general, varía de 0 a 2, aunque comúnmente es 2) se especifica a priori y, al penalizar la distancia debe ser escogido en función de la suavización que se pretenda conseguir.

- *Spline*

Se trata de una técnica determinista que permite representar curvas de dos dimensiones y superficies de tres dimensiones. Consiste en encontrar un conjunto de funciones que interpolen los puntos observados, minimizando el criterio de suavización. En algunas condiciones de las funciones utilizadas y del criterio de suavización empleado, se puede mostrar su equivalencia con el kriging.

### 2.3.2. Métodos de interpolación estocástica. Kriging

En los años 50 del siglo XX, el ingeniero sudafricano D. G. Krige diseñó un método de interpolación para determinar la presencia de vetas de oro, a partir de muestras de terreno. La idea básica era que esas predicciones no eran más que medias ponderadas de las cantidades observadas de oro en las muestras. Las ponderaciones de la media dependían de la distancia entre el punto que se quería predecir y aquellos que se habían observado. Se escogían minimizando la varianza de predicción, es decir que las ponderaciones proporcionaban un estimador lineal, insesgado y óptimo (ELIO). Por este motivo, el método kriging también se denomina interpolación óptima.

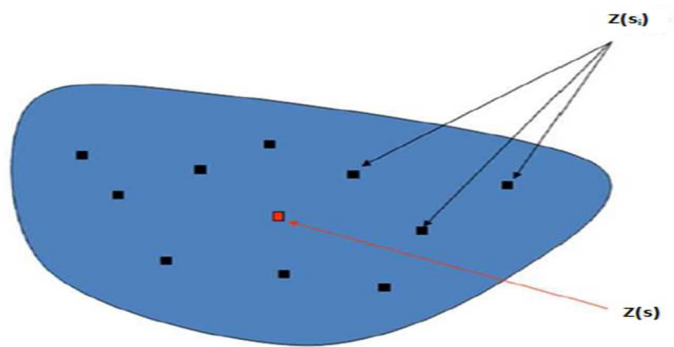


Figura 2.3: Observaciones  $Z(s_i)$  a partir de las cuales se estima el valor de  $Z(s)$

Así pues, el kriging tiene dos ventajas principales con respecto a los estimadores deterministas:

- Las ponderaciones utilizadas en la estimación son determinadas como una función entre la distancia estructural de los puntos observados (el semivariograma) y del valor que va a ser predicho.
- La estimación lleva asociada una cuantificación de incertidumbre, la desviación típica, o la varianza, del kriging.

Es importante señalar que la realización sobre la que se aplique el kriging debe provenir de una variable aleatoria estacionaria.

Sea  $Z(s)$  una variable aleatoria, definida en un soporte puntual y estacionario de segundo orden, con:

- Un valor esperado

$$E[Z(s)] = m; \quad \forall s$$

$m$  es una constante generalmente desconocida,

- Una función de covarianza centrada

$$C(h) = E[Z(s+h)Z(s)] - m^2.$$

- Un variograma

$$\text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = 2\gamma(h).$$

Al menos uno de estos dos momentos de segundo orden se supone conocido. En caso de existir el semivariograma únicamente, la variable  $Z(s)$  debe ser intrínseca.

Sean  $\{Z(s_i), i = 1, \dots, n\}$  los valores observados de la variable aleatoria. Con frecuencia estos valores están definidos en soportes puntuales o casi puntuales, en otros casos son los valores medios  $Z_{V_i}(s_i)$  definidos en los soportes  $V_i$  centrados en los puntos  $s_i$ , donde los  $n$  soportes pueden ser todos diferentes.

La estimación del valor medio  $Z_{V_i}(s_i)$  en el dominio de  $V_i$  se define como:

$$Z_{V_i}(s_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Z(s) ds.$$

Es preciso destacar que bajo las hipótesis de estacionaridad el valor esperado es  $E[Z(s_i)] = m, \forall i$ .

El estimador lineal  $Z^*(s)$  es una combinación lineal de  $n$  valores de los datos tal que:

$$Z^*(s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i).$$

Las  $n$  ponderaciones  $\lambda_i$  se calculan de tal forma que el estimador es insesgado y la varianza de la estimación es mínima, es decir, el estimador  $Z^*(s)$  es óptimo.

Existen gran variedad de métodos de kriging, en este caso nos enfocaremos en describir el kriging simple y el kriging ordinario.

### Kriging Simple

El caso menos complejo se denomina kriging simple y la hipótesis básica es la estacionaridad junto con el hecho de que se asume que la media de la función aleatoria es conocida. Esto es,

$$E(Z(s)) = m \text{ y } m \text{ es conocida.}$$

- Caso n° 1.  $m = 0$

Bajo esta condición se asegura que el estimador de kriging es insesgado, ya que

$$E(Z^*(s)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E(Z(s_i)) = 0 = E(Z(s)).$$

Ahora sólo resta hallar los pesos para que la condición de varianza mínima se satisfaga. Considérese primero el caso en que se cuenta con una sola observación

$$Z^*(s) = \lambda_1 Z(s_1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(s) - Z^*(s)] &= \text{var}\left[\sum_{i=0}^1 \lambda'_i Z(s_i)\right], \text{ donde } \lambda'_0 = 1, \lambda'_i = -\lambda_i, s_0 = s \\ &= \lambda_0^2 \text{var}(Z(s_0)) + \lambda_1^2 \text{var}(Z(s_1)) - 2\lambda_0 \lambda_1 \text{cov}(Z(s_0), Z(s_1)) \\ &= \sigma^2 + \lambda_1^2 \sigma^2 - 2\lambda_1 \text{cov}(s - s_1). \end{aligned}$$

Derivando respecto al parámetro e igualando a cero se tiene

$$\frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 \sigma^2 - 2\text{cov}(s - s_1) = 0.$$

Con lo cual

$$\lambda_1 = \frac{\text{cov}(s - s_1)}{\sigma^2} = \rho(s - s_1)$$

$$Z^*(s) = \rho(s - s_1) Z(s_1).$$

Es decir, el estimador de kriging simple es igual al valor conocido de la variable multiplicado por la correlación que existe entre la variable en el punto objetivo y la variable en el punto de observación.

Utilizando el valor del parámetro se obtiene que:

$$\text{var}[Z(s) - Z^*(s)] = \sigma^2[1 - \rho^2(s - s_1)].$$

Este tipo de resultados generalmente se utiliza para determinar el error asociado a la estimación. Debe ser usado con cautela porque no depende de los datos sino de la continuidad de estos. Utilizando la forma del estimador de kriging se tiene que:

$$\text{var}[Z^*(s)] = \sigma^2 \rho^2(s - s_1) \leq \sigma^2 = \text{var}[Z(s)]$$

Considérese ahora el caso en que se cuenta con dos observaciones:

$$Z^*(s) = \lambda_1 Z(s_1) + \lambda_2 Z(s_2)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(s) - Z^*(s)] &= \text{var}\left[\sum_{i=0}^2 \lambda'_i Z(s_i)\right], \text{ donde } \lambda'_0 = 1, \lambda'_i = -\lambda_i, s_0 = s \\ &= \lambda_0^2 \text{var}(Z(s_0)) + \lambda_1^2 \text{var}(Z(s_1)) + \lambda_2^2 \text{var}(Z(s_2)) \\ &\quad - 2\lambda_1 \lambda_2 \text{cov}(s_1 - s_2) - 2\lambda_1 \text{cov}(s_0 - s_1) - 2\lambda_2 \text{cov}(s_0 - s_2) \end{aligned}$$

Ahora hay dos parámetros desconocidos, por lo tanto debemos calcular dos derivadas parciales e igualarlas a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_1} &= \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \text{cov}(s_1 - s_2) - \text{cov}(s_0 - s_1) = 0 \\ \frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_2} &= \lambda_2 \sigma^2 + \lambda_1 \text{cov}(s_2 - s_1) - \text{cov}(s_0 - s_2) = 0. \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(s_1 - s_2) \\ C(s_2 - s_1) & C(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_0 - s_1) \\ C(s_0 - s_2) \end{pmatrix}$$



Dado que los dos parámetros resuelven el sistema de ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(s) - Z^*(s)] &= \sigma^2 - \lambda_1 C(s_0 - s_1) - \lambda_2 C(s_0 - s_2) \\ &= \sigma^2 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i C(s_0 - s_i). \end{aligned}$$

Nuevamente, el error no depende directamente de los datos sino de la continuidad espacial de estos.

Como los valores  $\lambda$ 's resuelven el sistema de ecuaciones se tiene que:

$$\text{Cov}(Z(s) - Z^*(s), Z^*(s)) = 0.$$

Es decir, el estimador de kriging simple es ortogonal al error. Esta es una propiedad muy importante que solo satisface el kriging simple, Véase [9]. Utilizando este resultado se tiene que

$$\text{var}[Z(s)] = \text{var}(Z(s) - Z^*(s)) + \text{var}[Z^*(s)].$$

Lo que muestra que:

$$\text{var}[Z^*(s)] \leq [Z(s)].$$

El caso general se obtiene de manera análoga:

$$Z^*(s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(s) - Z^*(s)] &= \text{var}\left[\sum_{i=0}^n \lambda'_i Z(s_i)\right], \text{ donde } \lambda'_0 = 1, \lambda'_i = -\lambda_i, s_0 = s \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 \text{var}(Z(s_i)) + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \text{cov}(s_i - s_j) \end{aligned}$$

Derivando respecto a cada uno de los parámetros e igualando a cero se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(s_1 - s_2) & \dots & C(s_1 - s_n) \\ C(s_2 - s_1) & C(0) & \dots & C(s_2 - s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(s_n - s_1) & C(s_n - s_2) & \dots & C(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_1 - s) \\ C(s_2 - s) \\ \vdots \\ C(s_n - s) \end{pmatrix}$$

O equivalentemente

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C(s_i - s_j) = C(s_i - s) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La varianza del error o varianza del kriging es entonces:

$$\text{var}[Z(s) - Z^*(s)] = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(s_0 - s_i).$$

Nuevamente, el error no depende directamente de los datos sino de la continuidad espacial de estos.

■ *Caso n° 2.  $m \neq 0$*

En este caso se consideran nuevas funciones aleatorias de media cero para aplicar el caso kriging simple estudiado anteriormente

$$Y(s) := Z(s) - m.$$

La nueva función aleatoria es estacionaria y tiene media cero, por lo cual el estimador de kriging simple es:

$$\begin{aligned}
Y^*(s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(s_i) \\
Z^*(s) &= m + \sum_{i=1}^n \lambda_i (Z(s_i) - m) \\
&= m(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i).
\end{aligned}$$

Una propiedad muy importante del kriging simple es la siguiente: Si la función aleatoria  $Z(s)$  es gaussiana, entonces:

$$E(Z(s)|Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n)) = Z^*(s).$$

Es decir, el valor esperado de la propiedad en el punto  $s$  dado los valores observados coincide con el valor del kriging simple.

### Kriging Ordinario

Generalmente, el valor de la media  $m$  es desconocido y por lo tanto el kriging simple no se puede utilizar. El kriging ordinario establece una condición adicional al sistema de ecuaciones del kriging simple con el fin de filtrar la media desconocida.

Al igual que antes el estimador propuesto es de la forma

$$Z^*(s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(s) Z(s_i).$$

Para que el estimador sea insesgado debe ocurrir

$$E(Z^*(s)) = m = E(Z(s)).$$

De esta forma, como

$$\begin{aligned}
E(Z^*(s)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(s) E(Z(s_i)) \\
&= m \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)
\end{aligned}$$

debe ocurrir que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(s) = 1.$$

En kriging ordinario el problema de minimización de la varianza del error es distinto al caso de kriging simple. No es suficiente buscar los valores  $\lambda$ 's que minimizan la varianza. Hay que buscar los valores  $\lambda$ 's que minimizan la varianza y que satisfagan que su suma sea igual a 1, para garantizar la condición de insesgamiento. Este tipo de problema de minimización con restricciones se resuelve utilizando una técnica denominada *multiplicadores de Lagrange*. La idea es establecer un sistema de ecuaciones que incluya la restricción sobre los valores  $\lambda$ 's.

Considérese una nueva función  $\Phi$  de la forma siguiente:

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) = \text{var}(Z(s) - Z^*(s)) + 2\mu(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i).$$

El punto donde la nueva función alcanza un mínimo contiene los valores de los  $\lambda$ 's que minimiza la varianza y cuya suma es igual a 1. Para minimizar a la función  $\Phi$  no existen restricciones, por lo que sólo hay que calcular las derivadas e igualarlas a cero,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu)}{\partial \lambda_j} &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\frac{\partial \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu)}{\partial \mu} &= 0
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu)}{\partial \lambda_j} &= \frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_j} - 2\mu \quad j = 1, 2, \dots, n \\
\frac{\partial \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu)}{\partial \mu} &= 2(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i)
\end{aligned}$$

Luego, igualando a cero las derivadas se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_j} &= 2\mu \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(s) &= 1\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial \text{var}[Z(s) - Z^*(s)]}{\partial \lambda_j} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}(s_i - s_j) - 2\text{cov}(s - s_j)$$

y por lo tanto se obtiene que:

$$\begin{aligned}2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}(s_i - s_j) - 2\mu &= 2\text{cov}(s - s_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(s) &= 1.\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} C(0) & C(s_1 - s_2) & \dots & C(s_1 - s_n) & 1 \\ C(s_2 - s_1) & C(0) & \dots & C(s_2 - s_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(s_n - s_1) & C(s_n - s_2) & \dots & C(0) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s - s_1) \\ C(s - s_2) \\ \vdots \\ C(s - s_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora la varianza del error es:

$$\text{var}[Z(s) - Z^*(s)] = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(s_0 - s_i) - \mu.$$

Nuevamente, el error no depende directamente de los datos sino de la continuidad espacial de estos.

Kriging ordinario usando el variograma

Usando la relación usual entre el variograma y la covarianza

$$C(h) = C(0) - \gamma(h)$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i [C(0) - \gamma(s_i - s_j)] - \mu = C(0) - \gamma(s - s_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(s_i - s_j) + \mu = \gamma(s - s_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Y el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial es entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma(s_1 - s_2) & \dots & \gamma(s_1 - s_n) & 1 \\ \gamma(s_2 - s_1) & 0 & \dots & \gamma(s_2 - s_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(s_n - s_1) & \gamma(s_n - s_2) & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s - s_1) \\ \gamma(s - s_2) \\ \vdots \\ \gamma(s - s_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto los resultados obtenidos serán exactamente iguales.

Esta propiedad no es cierta en el caso del kriging simple. Esto es, el sistema de ecuaciones del kriging simple sólo debe ser escrito usando la función de covarianza y no el variograma.

Relación entre el kriging ordinario y el kriging simple

Una idea tentadora es estimar el valor promedio utilizando kriging ordinario y tomar este valor como el verdadero valor de la media para usar kriging simple. Este procedimiento produce como resultado una estimación que es exactamente igual a la estimación de kriging ordinario.

Entre otros métodos de kriging podemos mencionar: el kriging por bloques, en el cual en lugar de considerar puntos en el espacio se estima el valor sobre un área; el kriging universal, donde la media no es estacionaria, y se supone que puede ser expresada como un

polinomio de orden  $k$  finito; como también el kriging lognormal, disyuntivo, multigaussiano, residual, etc.

#### Kriging en presencia de no estacionaridad

En caso de no estacionaridad se pueden producir dos situaciones: no linealidad y linealidad. En el primer caso, para calcular el estimador  $E(Z(s)|Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n))$  sería necesario conocer la distribución conjunta con  $n + 1$  dimensiones. En la práctica esto resulta inviable. En el segundo caso, si se tiene una variable aleatoria Gaussiana, el mejor predictor es el estimador lineal. Por lo tanto, debe transformarse adecuadamente la variable si esta no es Gaussiana. La predicción, sin embargo, debe obtenerse en la escala original, por lo que al invertir las transformaciones se deben hacer las correcciones oportunas para el sesgo y la varianza.





## Capítulo 3

# Desarrollo de la Herramienta Computacional

Tal como se mencionó, este trabajo de investigación plantea un modelo matemático que permite simular la trayectoria superficial del esparcimiento de partículas, las cuales se suponen más densas que el fluido que las circunda, sustentándose bajo el enfoque Lagrangiano, por lo que se verá el fluido de contaminante como un gran número de partículas cuya trayectoria está determinada por las corrientes debidas a la acción del viento, del oleaje y del flujo del agua vertida por los ríos que caen en el Lago de Valencia. Cada partícula es gobernada por una fuerza que la podemos dividir en dos categorías, Una fuerza determinista (fuerza viscosa continua) y una fuerza estocástica (proveniente de la discontinuidad de la materia). En base a esto, el modelo propuesto está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(X_t^1, X_t^2) \\ b_2(X_t^1, X_t^2) \end{pmatrix} dt \quad (3.1)$$

donde  $(b_1(X_t^1, X_t^2), b_2(X_t^1, X_t^2))$  está dado por el flujo de las corrientes superficiales del Lago de Valencia,  $(dW_t^1, dW_t^2)$  es un movimiento Browniano estándar bidimensional,  $a_{11}$  y  $a_{22}$  constantes. Esta ecuación será aproximada por el método de Milstein.

El presente capítulo se dividirá en tres secciones, la primera de ellas abarca la estimación

del flujo de velocidades superficiales del Lago de Valencia a partir del uso de la técnica de predicción espacial kriging. El segundo bloque consiste en describir detalladamente el algoritmo de simulación utilizado. Y en el último apartado se construirá una interfaz gráfica de usuario que facilite la implementación de la herramienta computacional desarrollada.

### 3.1. Estimación del flujo de las velocidades de las corrientes superficiales del Lago de Valencia utilizando Kriging

En esta sección nos enfocaremos en el segundo término de la ecuación (4.1). El vector  $(b_1(X_t^1, X_t^2), b_2(X_t^1, X_t^2))$  está dado por el campo de velocidades de las corrientes superficiales del Lago de Valencia. En lo que sigue describiremos los elementos utilizados para la estimación del campo de velocidades.

#### 3.1.1. Recolección de los datos para la estimación del flujo de velocidades de las corrientes superficiales en el Lago de Valencia

Como ya se ha mencionado, el Lago de Valencia presenta altos niveles de contaminación. Es por ello que el Ministerio del Ambiente y de los Recursos Naturales (MARN), desde 1978 viene realizando estudios, con el fin de evaluar el grado de contaminación del lago y su evolución en el tiempo. Ubicaron 40 estaciones para realizar diferentes análisis físico-químicos que han contribuido a diagnosticar y evaluar la calidad del agua del Lago, ver figura 3.1.

En este caso, supondremos que en cada estación se mide la velocidad de las corrientes superficiales del Lago, y estos datos serán obtenidos a partir del software GCLAM (Modelo del Lago de Valencia en Coordenadas Curvilíneas), este es uno de los logros obtenidos por el proyecto *“Alternativas de saneamiento del Lago de Valencia a través de un modelo matemático tridimensional”* de la Universidad de Carabobo, cuyo responsable es el Prof. Germán Larrazábal.

El Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (Cemvicc), de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad de Carabobo (Facyt-UC) desarrolló un

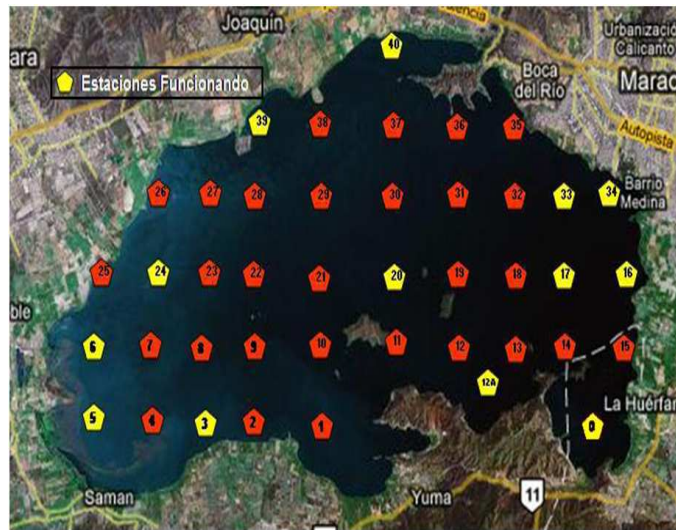


Figura 3.1: Estaciones de monitoreo en la cuenca del Lago de Valencia. Imagen obtenida de [10].

modelo matemático tridimensional del Lago de Valencia. Esto como producto de un esfuerzo conjunto del profesor Larrazábal y su equipo que requirió el procesamiento de la información de medición batimétrica que le facilitó la Dirección de Hidrografía y Navegación de la Armada Venezuela, y así la reconstrucción digital de la forma del Lago de Valencia, para su validación fue comparada con mapas satelitales obtenidos gratuitamente de google.com. Luego, se llevó el proceso de colocar sensores y medir las variables físicas que intervienen. Con el objeto de nutrir el simulador y poder determinar el comportamiento del cuerpo de agua en la computadora antes de aplicarlo directamente en la realidad.

Se instalaron estaciones meteorológicas para determinar la dirección y magnitud del viento en la zona, esto con ayuda del Instituto de Investigaciones Oceánicas de la Universidad de Baja California, México. Las estaciones registran los datos en tiempo real, y éstos son transmitidos a través de una conexión inalámbrica para ser almacenados. Luego son enviados a la base de datos del Cemvcc usando la red de Digitel, mediante tecnología GPRS/GSM. El protocolo de transmisión de datos, necesario para la comunicación entre un punto y otro, fue desarrollado por el equipo del Cemvcc, con fundamento en software libre.

En el modelo matemático tridimensional del Lago de Valencia también están incluidos los afluentes más importantes. Esto permite derramar digitalmente un contaminante o algún nutriente en el Lago de Valencia, y así observar cómo se distribuirá en los siguientes días, ayudado por la corriente y el viento, además de la fuerza de los ríos.

Para nuestro estudio se determinó de forma manual la Latitud y Longitud correspondiente a la ubicación de cada estación con la ayuda de Google Earth, ver figura 3.2. Luego, utilizamos una regla que ofrece el software GCLAM para ubicar las estaciones con respecto al sistema de coordenadas utilizado en el software GCLAM, ver figura 3.3.

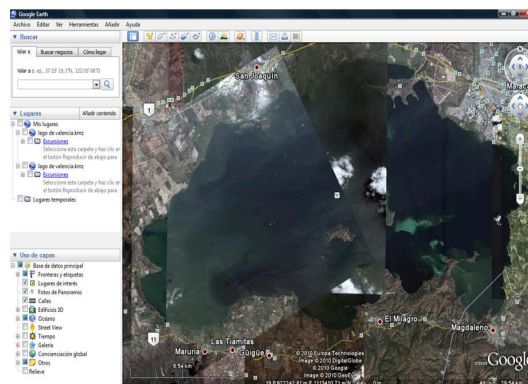


Figura 3.2: Interfaz gráfica de Google Earth

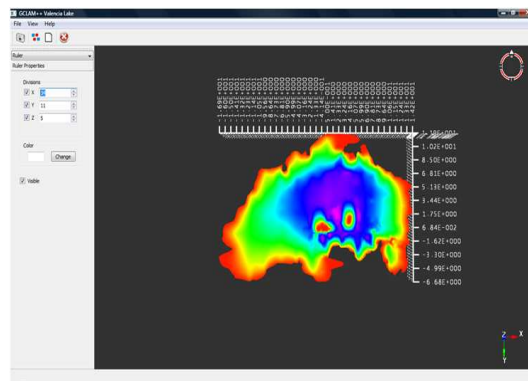


Figura 3.3: Regla ofrecida por el software GCLAM

Buscamos las velocidades asociadas a los puntos de ubicación de las estaciones. El

plano  $Z = 10$ , en el reticulado aportado por el software GCLAM, corresponde a los puntos más cercanos a la superficie. Notamos que las velocidades están estimadas únicamente en la región punteada que mostramos en la figura 3.4, los cuales corresponden al semiplano  $X \leq 94$  y  $Y \geq 68$ .

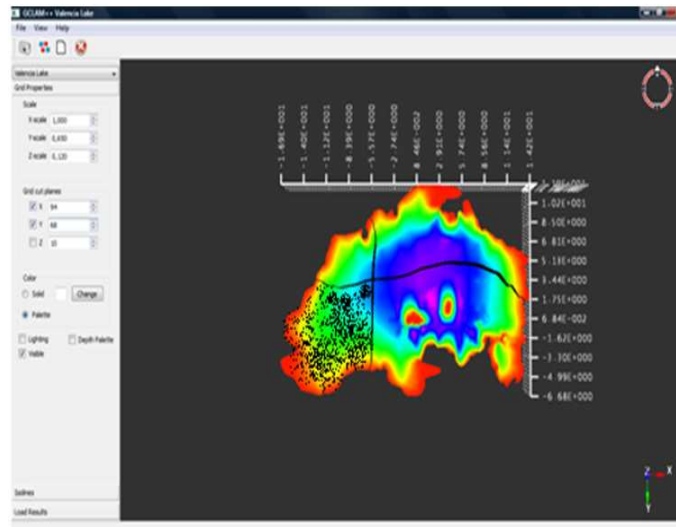


Figura 3.4: Región en la cual coinciden las estaciones de monitoreo y datos simulados de las velocidades de las corrientes en el Lago aportados por el software GCLAM

Por lo tanto se decidió completar los valores de velocidad asociados a las estaciones restantes en el Lago. Consideramos la información aportada por la imagen 3.5, asociada a la distribución mensual de la velocidad del viento en la región central de Venezuela, véase [12]. Allí podemos observar que el rango velocidades del viento presentadas en el Lago oscila entre  $[4 \text{ Km/h}, 13 \text{ Km/h}]$ . Recordando la relación que existe entre la velocidad del viento y las velocidad de las corrientes superficiales del agua, mencionada en el informe “Informe de pasantias en el marco del proyecto de investigación: Estudio del transporte de contaminantes en el Lago de Valencia.” (Elaborado como resultado de mi experiencia profesional en el proyecto liderizado por el Prof. Rafael León en la Universidad Central de Venezuela), tomaremos la velocidad de las corrientes superficiales como el 3% de la velocidad del viento.

Finalmente se tiene la malla de la figura (3.6) la cual muestra los puntos donde se

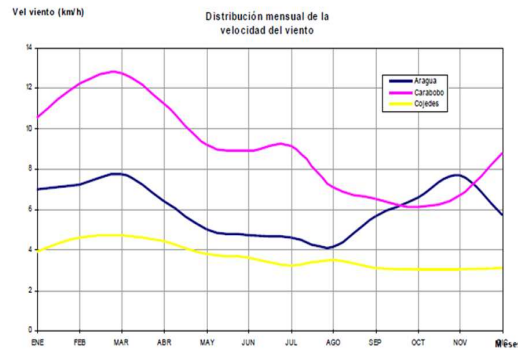


Figura 3.5: Distribución mensual de la velocidad del viento en la región central de Venezuela

disponen las velocidades simuladas por el software GCLAM y a partir de esta se aplicará la técnica de predicción espacial Kriging.

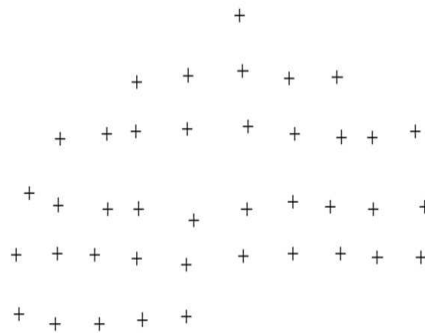


Figura 3.6: Malla de las velocidades de las corrientes superficiales del Lago de Valencia

### 3.1.2. Aplicación de la técnica de predicción espacial Kriging

Dado que la función media y varianza para la coordenada  $X$  y  $Y$  de la velocidad parecen estabilizarse las supondremos constantes, ver figura 3.1.2. Por lo que podemos aplicar Kriging Ordinario, cuyo resultado se muestra en las figuras 3.8 y 3.9. Este estudio se realizó utilizando en software  $R$ , el cual es un lenguaje de libre disposición para el cálculo estadístico y gráficos. Que ofrece una gran variedad de técnicas estadísticas y

gráficas: modelos lineales y no lineales, pruebas estadísticas, análisis de series temporales, clasificación, clustering, entre otros. La estimación obtenida representa, para nosotros, el flujo de las velocidades en el Lago de Valencia, el cual será incorporado al algoritmo desarrollado.

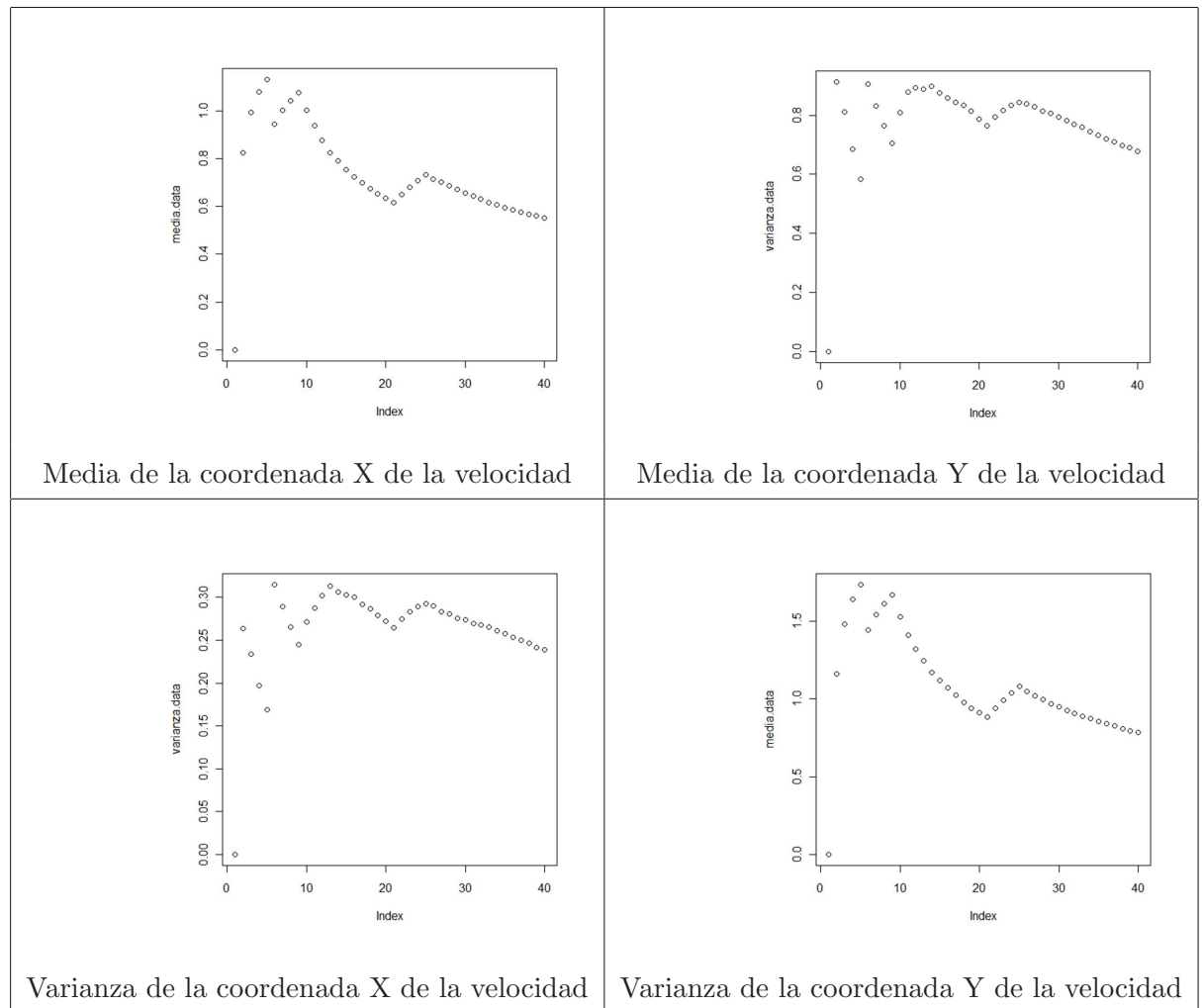


Figura 3.7: Funciones de Media y Varianza para las velocidades en las coordenadas X e Y. (*Index* representa el índice del *i*-ésimo valor considerado para el cálculo iterativo de la Función Media y Varianza)

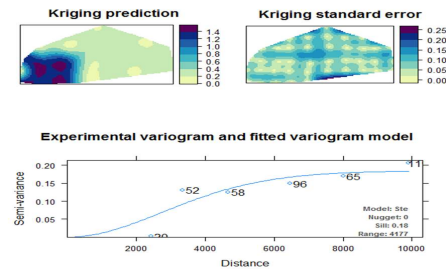


Figura 3.8: Kriging correspondiente a los datos de las velocidades en X. (*Modelo: Matérn*)

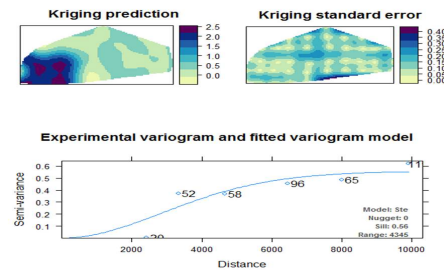


Figura 3.9: Kriging correspondiente a los datos de las velocidades en Y. (*Modelo: Matérn*)

A partir de estos resultados, y con la colaboración de la Lic. Alessandra Fariñas, se diseñaron dos funciones que devuelven las velocidades en cada coordenada dado cualquier punto en el Lago de Valencia. Estas funciones están basadas en las funciones *csapi* y *fnval* de MATLAB, con las que se realiza una interpolación cúbica para estimar las velocidades en un punto dado. En la sección de Anexo se podrá observar el algoritmo empleado y a continuación mostramos, en las figuras 3.10 y 3.11 la interpolación obtenida.

### 3.2. Descripción del algoritmo de simulación

El algoritmo de simulación comprende tres grandes fases. La primera de ellas es una etapa previa al desarrollo del modelo de dispersión de partículas que consiste en la elección de la imagen satelital y su adecuación para su propósito dentro del modelo. Luego sigue el



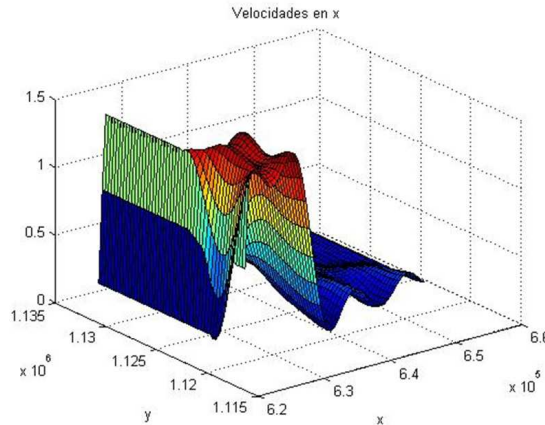


Figura 3.10: Interpolación correspondiente a los datos de las velocidades en X

desarrollo del modelo propiamente, para finalizar con la aplicación de una serie de técnicas básicas de procesamiento digital de imágenes para mostrar adecuadamente la solución de la dispersión.

Si bien al final del algoritmo es cuando hay una aplicación exhaustiva de técnicas de procesamiento digital de imágenes. En el proceso de adecuación de la imagen satelital se hace uso de conceptos básicos relacionados con esta área, es por ello que haremos una breve descripción de los mismos que luego nos permitirán abordar las tres grandes fases del algoritmo mencionadas anteriormente.

### 3.2.1. Procesamiento digital de imágenes: Conceptos básicos

**Definición 3.1** Una imagen puede definirse como una función bidimensional  $f(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  son las coordenadas espaciales, al valor de  $f$  en cualquier punto  $(x, y)$  se le denomina intensidad o nivel de gris de la imagen en ese punto.

El valor de  $f(x, y)$  es positivo, cuyo significado físico es determinado por la interacción del objeto con la energía electromagnética.

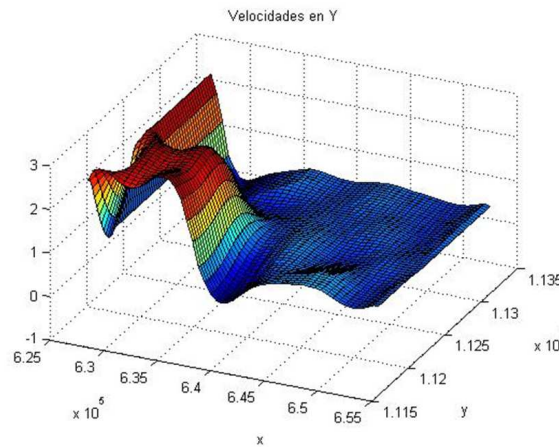


Figura 3.11: Interpolación correspondiente a los datos de las velocidades en Y

### Creación de una imagen digital

Para crear una imagen digital (imagen almacenada en un dispositivo informático: computadora, cámara digital, etc.) se tiene que convertir el continuo de datos, imagen analógica, en datos discretos, imagen digital. Esto es posible, con un objeto de captura de imágenes digitales o un sensor analógico de energía electromagnética y un conversor analógico digital. El valor analógico es digitalizado (digitalización), este proceso consta de dos partes: el muestreo y la cuantificación.

*Muestreo:* consiste en dividir la imagen analógica en porciones iguales (mallas) utilizando una medida que se repite periódicamente para cubrir el plano. Estas porciones son polígonos regulares, como: triángulos, cuadrados, hexágonos, etc.

*Cuantificación:* es un proceso de discretización en el cual, una vez muestreada la imagen, a cada entrada del reticulado se le asigna un valor numérico dentro de una escala finita establecida.

La digitalización da como resultado una matriz de números reales de tamaño  $M \times N$ , ver figura 3.12. Este proceso requiere decisiones acerca de los valores de  $M$ ,  $N$  y del nivel

de gris  $L$  discreto permitido para cada píxel.

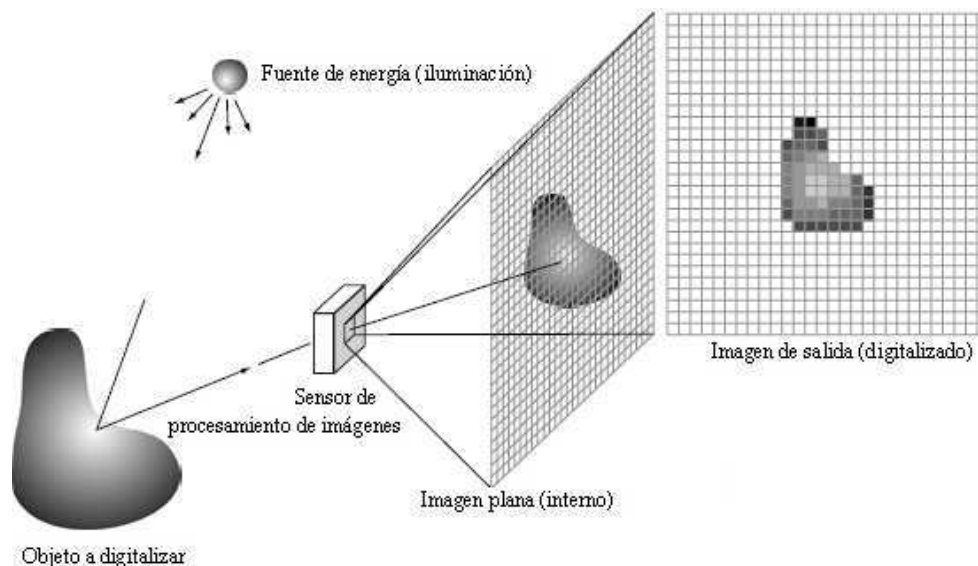


Figura 3.12: Proceso de digitalización. Imagen obtenida de [3] pág. 7

Existen las imágenes multicanales o imágenes multibanda, las cuales se componen de imágenes monocromáticas. A cada píxel de estas imágenes se le asocia un vector de valores escalares. La dimensión de este vector es determinado por el número de canales disponibles. Más precisamente, denotando por  $f$  una imagen multicanal con  $m$  canales, el valor de cada píxel  $p$  del dominio de definición del muestreo de  $f$ , define un vector  $m$ -dimensional, esto es,  $f(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$ , donde  $f_i$  es una imagen definida en escala de gris. Por ejemplo, una imagen a color, RGB, está conformada por tres bandas o canales las cuales son el rojo, verde y azul, i.e.:  $f(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p))$ . (Véase [3]).

### Formatos de almacenamiento más comunes para imágenes digitales

Toda la información asociada a la imagen digital (tamaño, colores, descripción, etc) debe ser estructurada de manera que facilite su almacenamiento. Existe una gran cantidad de formatos caracterizados por disponer de una estructura de organización particular de los datos. Los mas corrientes: bmp, tif, gif, jpg, png.

*BitMaP*: Soporta imágenes de 1, 4, 8 o 24 bits, sin compresión. Fácil de utilizar pero ocupa mucho espacio.

*Graphic Interchange Format*: Soporta imágenes de 1, 4 y 8 bits (baja resolución y hasta 256 colores). Permite como esquema de compresión el LZW, la versión GIF89 permite el interlineado, pueden colocarse varias imágenes.

*JPEG (Joint Photo Expert Group)*: no requiere licencia de uso (varias versiones). Permite más de 256 colores. Compresión de imagen: reducción de tamaño de archivos. Calidad de restitución depende de factor de compresión. Véase [14].

### Realce de imágenes digitales en el dominio espacial

El realce de imágenes tiene por objetivo su procesamiento para obtener una imagen más adecuada para una aplicación específica. En el dominio espacial opera directamente en el plano de la imagen y se fundamenta en la manipulación directa de los píxeles.

Al trabajar en el dominio espacial es necesario tener en cuenta nociones como, vecindad, adyacencia, conectividad, región y distancias, que permiten establecer relaciones entre los píxeles, dependiendo de la topología durante su formación. Para nuestro propósito, es importante detenernos en las nociones de conectividad y región.

**Definición 3.2** Si  $S$  es un subconjunto de píxeles de una imagen. Dos píxeles  $p$  y  $q$  están **conectados** en  $S$ , si existe un camino entre ellos conformado por píxeles de  $S$ .

Si  $R$  es un conjunto de píxeles de una imagen. Constituirá una **Región** si todos sus píxeles están conectados.

Se llama **frontera** o contorno de  $R$  a los píxeles que tienen por lo menos un vecino que no pertenece a  $R$ .

También, es posible realizar operaciones aritméticas con las imágenes de forma análoga como se hace con matrices. En el caso de las operaciones lógicas, estas se pueden efectuar

sólo con imágenes binarias.

**Definición 3.3 Filtro espacial** es una herramienta para el realce de imágenes, basado en una ventana deslizante cuyos coeficientes toman en consideración los píxeles vecinos al píxel que se está procesando.

En este caso estaremos interesados en filtros de frecuencias bajas, las cuales, en el dominio espacial, corresponden a cambios leves de intensidad por unidad de distancia. Véase [14].

### 3.2.2. Selección y Georreferenciación de la imagen satelital

#### Descripción de las características más relevantes de los satélites SPOT, LandSat y TERRA

Conocida comúnmente como percepción remota, la teledetección es la técnica que permite obtener información sobre un objeto, superficie o fenómeno a través del análisis de los datos adquiridos por un instrumento que no está en contacto con él. Por lo general los datos son recogidos a través de sensores instalados en plataformas aerotransportadas o en satélites artificiales, los cuales captan la radiancia emitida o reflejada, obteniéndose una imagen, habitualmente en falso color con una banda para cada una de estas regiones del espectro. Los avances en tecnología han permitido contar con instrumentos cada vez más precisos basados en electrónica y experimentación, con materiales que permiten obtener información cada vez más completa, contenida en imágenes satelitales. Véase [4].

En lo que sigue, se describirá brevemente las características de tres satélites de interés, y posteriormente en base a la información aquí plasmada, elegir de cual de ellos se tomará la imagen para nuestro estudio.

**SPOT:** Serie de Satélites artificiales desarrollados por el Centro Nacional de Estudios Espaciales francés (CNES) en colaboración con Bélgica y Suecia y fabricados por EADS Astrium. El primero de ellos se lanzó en 1986 y en la actualidad el sistema SPOT (Satellite Probatoire pour l'Observation de la Terre) opera con una constelación de tres satélites de observación: SPOT 2, SPOT 4 y SPOT 5. Todos ellos en órbita polar, circular y heliosincrónica sobre la Tierra.

La altura orbital es de 822 km, con una inclinación de  $98^\circ$ , cruzan el ecuador a las 10:80 a.m., con una período orbital de 101 minutos y repiten órbita cada 26 días.

Dentro de las ventajas con que cuentan los satélites SPOT está la posibilidad de observación no vertical de su sensor HRV (Haute Resolution Visible), es lo que denominan sensores enfocables que permite adquirir datos de zonas fuera de su órbita mediante el movimiento de un dispositivo instalado en el equipo óptico. Además, tienen una resolución espacial de hasta 10 m cuando opera de modo pancromático y de 20 m en bandas multiespectrales.

Lo que podría ser considerado como una desventaja, en nuestro caso, es que la imagen del Lago de Valencia suministrada por el satélite es parcial, y se necesitaría tomar dos imágenes complementarias, procesarlas digitalmente, para posteriormente hacerlas coincidir y obtener una imagen completa del área en estudio. Véase [20]

**LandSat:** Los LandSat son una serie de satélites contruidos y puestos en órbita por EE. UU. para la observación en alta resolución de la superficie terrestre. Orbitan alrededor de la Tierra en órbita circular heliosincrónica, a 705 km de altura, con una inclinación de  $98.2^\circ$  respecto del Ecuador y un período de 99 minutos. La órbita de los satélites está diseñada de tal modo que cada vez que éstos cruzan el Ecuador lo hacen de Norte a Sur entre las 10:00 y las 10:15 de la mañana hora local. Están equipados con instrumentos específicos para la teledetección multiespectral.

El primer satélite LandSat (en principio denominado ERTS-1) fue lanzado el 23 de julio de 1972. El último de la serie es el LandSat 7, puesto en órbita en 1999, y es capaz de conseguir una resolución espacial de 15 metros.

Los satélites Landsat 1, Landsat 2, Landsat 3 y Landsat 4 se encuentran fuera de servicio. Landsat-6 tuvo un lanzamiento fallido. Landsat-5 permanece operativo junto con Landsat-7. Este último presenta mejoras con respecto a Landsat-5, como ya se mencionó, una banda pancromática de 15 m de resolución y una mayor resolución de las bandas infrarrojas térmicas. Sin embargo, un defecto aparentemente irreparable en el sistema óptico ha reducido mucho la eficiencia de sus aplicaciones. Véase [21].

**TERRA:** El satélite Terra fué puesto en órbita por la NASA el 18 de diciembre de

1999. Es el primero del programa Earth Observing System (EOS). Terra forma parte de un proyecto multinacional y multidisciplinario con la participación de las agencias espaciales de EEUU, Canadá y Japón. Provee datos globales sobre el estado de la atmósfera, tierra y océano y de las interacciones de cada una de ellas con la radiación solar y entre ellas, desde una única plataforma espacial. Se desplaza a una altura de 705 km con una inclinación de 98.2 grados, nodo descendente 10:30 a.m., período: 98.88 minutos, con una resolución espacial de hasta 250 m. Lleva a bordo cinco instrumentos: ASTER, CERES, MODIS, MISR, MOPITT para mediciones georeferenciadas simultáneamente y para intercomparación de nuevas técnicas de medición.

A continuación, se muestra una breve descripción de los cinco captadores que miden aspectos específicos de nuestro planeta:

*ASTER (Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer)* Fotor-sensor desarrollado conjuntamente por la NASA y el Ministerio de Industria Japonés. Se utiliza para obtener mapas detallados de la temperatura, reflectancia y elevación de la superficie terrestre.

*CERES (Clouds and the Earth's Radiant Energy System)* Instrumento para medir el balance global de radiación de la Tierra. Aporta también datos sobre las propiedades de las nubes y su papel en los flujos de radiación desde la superficie terrestre hasta las zonas altas de la atmósfera.

*MISR (Multi-angle Imaging Spectro-Radiometer)* Este instrumento explora la superficie terrestre con nueve cámaras, cada una de ellas apuntando a un ángulo de observación diferentes. Las imágenes que toman son en cuatro bandas: azul, verde, rojo, e infrarrojo próximo. Este modelo de captación permite al MISR distinguir los diferentes tipos de nubes, los aerosoles y las cubiertas de la superficie terrestre.

*MODIS (Moderate-resolution Imaging Spectroradiometer)* MODIS escanea cada punto del planeta cada 1-2 días en 36 bandas espectrales. Gracias a esta amplia capacidad de captación, este sensor percibe más datos de los signos vitales de la Tierra que los otros sensores del satélite Terra. Entre otros aspectos, MODIS mide cada día el porcentaje de la superficie de la Tierra cubierta por nubes. Combinando las lecturas de MODIS con

los datos de MISR y CERES, es posible establecer el impacto de nubes y aerosoles en el balance energético de la Tierra. Permite, entre otros aspectos, detectar las emisiones de los incendios. Opera continuamente durante el día y la noche. Durante el día toma datos de todas las bandas y en la noche sólo las correspondientes al térmico.

*MOPITT (Measurement of Pollution in the Troposphere)* Instrumento diseñado para captar datos de la baja atmósfera y observar su interacción con la biosfera marina y terrestre. Con los datos que aporte MOPITT se quiere estudiar la distribución, el transporte y las fuentes de monóxido de carbono y de metano en la Troposfera.

En un principio, si bien las imágenes captadas por los satélites SPOT y LandSat tienen mejor resolución espacial que las capturadas por el satélite TERRA, dos razones nos obligan a descartarlas, por una parte el hecho de que las imágenes captadas por LandSat no son gratuitas y además LandSat-7 tiene un defecto en el sistema óptico. Y por otra parte, la serie de satélites SPOT sólo permite la obtención de sus imágenes por parte organizaciones. Por lo tanto, la opción seleccionada, en un primer momento, fue las imágenes captadas por el sensor MODIS del satélite TERRA. Se utilizó la página web <http://glovis.usgs.gov> para la obtención de la imagen del Lago de Valencia. Véase [19].

Luego mediante la colaboración de la MgSc. Claudia De La Hoz, integrante del proyecto “Estudio del transporte de contaminantes en el Lago de Valencia”, se obtuvo las imágenes del satélite SPOT adquiridas por medio de la Fundación Instituto de Ingenieria en el año 2008.

Ahora bien, en el caso de las imágenes captadas por el satélite SPOT se muestra una vista parcial del Lago de Valencia, ver figura 3.13, por lo que es necesario considerar las dos imágenes complementarias que conforman la imagen total del Lago. Para realizar un mosaico de las mismas mediante la superposición de imágenes, se procesa digitalmente las imágenes del lado derecho e izquierdo del Lago, de la siguiente manera:

1. Se llevó la imagen de menor tamaño al número de columnas y filas de la de mayor tamaño.
2. Se creó una matriz de ceros,  $L1$ , 4 veces mayor que el tamaño de las imágenes a



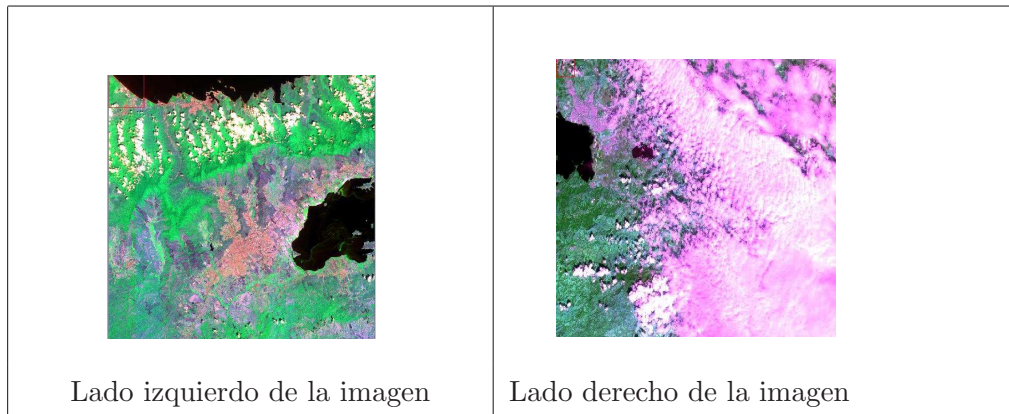


Figura 3.13: Lado derecho e izquierdo de la imagen satelital del Lago de Valencia captada por el satélite SPOT.

unir, ciertamente un tamaño exagerado, pero que garantiza, sin lugar a dudas, la eliminación de problemas de dimensión si se necesitara desplazar una imagen con respecto a la otra.

3. Sobre la matriz  $L1$ , se unen las imágenes del lado derecho e izquierdo del Lago manipulando el desplazamiento a través de las filas y columnas para hacerlas coincidir apropiadamente, ver figura 3.14.

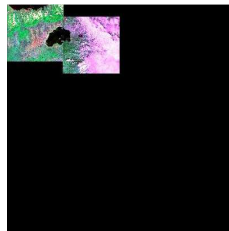


Figura 3.14: Unión de las imágenes correspondientes al lado derecho e izquierdo del Lago de Valencia sobre la matriz de ceros  $L1$ .

4. Una vez unidas las imágenes, se recortó  $L1$  de forma rectangular lo más cercano posible al Lago, consiguiendo así la imagen del Lago de Valencia a utilizar para las simulaciones de dispersión de contaminantes, la cual denotaremos por  $L$ , ver figura

3.15.



Figura 3.15: Imagen satelital del Lago de Valencia captada por el satélite SPOT, procesada digitalmente.

Una vez se cuenta con imagen saltelital del Lago de Valencia  $L$ , procedemos a georreferenciarla usando las funciones *makerefmat* y *pixcenters*, del software MATLAB. *makerefmat* construye una matriz de referencia,  $R$ , a partir la latitud y logitud asociada al pixel  $(1, 1)$  de la imagen y de la resolución de la misma. *pixcenters* retorna las coordenadas espaciales de una imagen espacialmente referenciada a partir la matriz  $R$  y las dimensiones de  $L$ .

### 3.2.3. Modelo de dispersión de partículas

La Cuenca del Lago de Valencia es de tipo endorreica y recibe aportes de agua de numerosas corrientes fluviales de corto curso, entre las que destacan los ríos Güigüe, Turmero, El Limón, Cabriales, Río Cura, Río Ereigne, Los Guayos y el Aragua. Es por ello que, se considerarán distintos puntos de inicio de dispersión, intentando recrear parte de estos afluentes. La matriz de puntos de inicio de dispersión se denotará por  $Do1$ , de dimensión  $NDo1$  donde el número de filas de dicha matriz será equivalente a la cantidad de puntos de inicio de dispersión considerados.

Además de los puntos de inicio de dispersión, tenemos como parámetros de entrada el número de partículas  $N$  y el tiempo de simulación  $Ho$ .

Dado que el modelo de dispersión es en dos dimensiones, se generarán dos trayectorias de desplazamiento unidimensionales las cuales formarán el vector bidimensional de desplazamiento. El algoritmo para la dispersión de partículas se ejecuta por medio de la función *Mdespmoovelnew* y consiste en:

- Dada una partición del intervalo  $[0, Ho]$  de  $T$  elementos y tamaño  $particion = 0.1$ . Se generan dos trayectorias Brownianas de media 0 y varianza el tamaño del incremento en el tiempo.
- Se tomará como Coeficiente de Difusión el vector constante  $C$  arbitrario.
- Iterando  $T$  veces las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
M(1, t) &= M(1, t - 1) \\
&+ (1/\sqrt{200}) * VelX(M(1, t - 1) + Do(1), M(2, t - 1) + Do(2)) * particion \\
&+ C1 * W1(t - 1) + 0.5 * C1^2 * M(1, t - 1) * (W1(t - 1)^2 - particion); \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(2, t) &= M(2, t - 1) \\
&+ (1/\sqrt{200}) * VelY(M(1, t - 1) + Do(1), M(2, t - 1) + Do(2)) * particion \\
&+ C2 * W2(t - 1) + 0.5 * C2^2 * M(2, t - 1) * (W2(t - 1)^2 - particion); \quad (3.2)
\end{aligned}$$

donde  $M$  es la matriz que guarda la posición de la partícula en un instante de tiempo  $t$ . Las funciones  $VelX$  y  $VelY$  constituyen el campo de velocidades en la coordenada  $X$  e  $Y$ , cuyos valores quedan expresados en  $m/s$  al multiplicarlos por la constante  $(1/\sqrt{200})$ , utiliza como argumento la posición de la partícula a partir de un punto de inicio de dispersión  $(Do(j, 1), Do(j, 2))$ . El vector constante  $C = (C1, C2)$  representa el coeficiente de difusión. El vector  $(W1, W2)$  representa la trayectoria Browniana bidimensional.

Así se obtiene la dispersión de  $N$  partículas mediante el método de aproximación de Milstein.

Iterando el procedimiento tantos puntos de inicio de dispersión se consideren, se obtiene la simulación del esparcimiento de contaminantes en el Lago de Valencia, denotado por las

matrices  $GxT$  y  $GyT$  para cada eje. A partir de aquí inicia la aplicación de diversas técnicas básicas de procesamiento digital de imágenes, para representar de manera adecuada la solución del modelo planteado.

### 3.2.4. Procesamiento digital de imágenes

#### Definición de Regiones

La definición de regiones se realiza por medio de la función *RegCon* cuya sintaxis es:

$$[Reg, Llog, RegL, malla, num] = RegCon(a, dl, L);$$

Se crea un reticulado, *malla*, donde cada unidad es de  $a \times a$  píxeles, estos representan las regiones, las cuales nos permitirán contabilizar cuantas partículas caen en cada una de ellas. Dentro de esta función se utiliza el comando *bwlabel* para etiquetar las regiones, formadas considerando conectividad 8. *Reg* corresponde a la matriz de regiones etiquetadas y *num* representa el número de regiones obtenidas. *Llog* es el resultado de usar la función *imLogL*, que crea una imagen lógica del Lago. Ahora bien, para obtener las regiones que servirán para crear el efecto de concentración, *RegL*, se multiplica la matriz *Reg* con la imagen lógica del Lago de Valencia, *Llog*, ver figura 3.16.



Figura 3.16: Regiones para crear efecto de concentración en el Lago de Valencia. Función *RegCon*.

### Matriz de Concentración

Para finalizar creamos la matriz de concentración, utilizando la función *imDispnew*, cuya sintaxis es:

$$[C, U] = \text{imDispnew}(\text{malla}, d, dl, GxT, GyT, RegL, Llog, L, R);$$

En principio se utiliza la función *map2pix* para, por medio de la matriz de referencia *R*, obtener la fila y columna  $[r, c]$  aproximada, de un punto de dispersión expresado en longitud y latitud  $[lon, lat]$ . La ubicación del pixel  $[r, c]$  es utilizada tanto para pintar la imagen del Lago *L*, como para ubicar la etiqueta *k* de la región en *RegL* y, una vez identificada la región, ver que pixeles la conforman, para contabilizar en esta la partícula de contaminante. Al darse este proceso con todas las partículas, se tiene la imagen de concentración, *C*.

Para una apariencia más suave de *C* se le aplicó a la matriz un filtro disco de radio 3, obteniéndose la matriz *ImC*. Luego, se multiplica punto a punto la imagen de concentración filtrada *ImC* y con la imagen lógica del Lago de Valencia.

Finalmente, se fusiona la imagen del Lago de Valencia, en escala de grises, colocando los niveles por debajo de 10, con la imagen de la concentración de partículas, se pinta con el mapa de colores *jet*, la matriz que se obtiene de este proceso se denota por *U*.

## 3.3. Construcción de Interfaz Gráfica

Tal como hemos mencionado es para nosotros de gran importancia la elaboración de una interfaz de usuario, que permita manipular de forma sencilla el programa de simulación desarrollado. A continuación se da una breve descripción del tema.

### 3.3.1. Graphical User Interface Development Environment (GUIDE)

La interfaz gráfica de usuario, conocida también como GUI (del inglés, Graphical User Interface) es un tipo de visualización que permite al usuario elegir comandos, iniciar programas y ver listas de archivos y otras opciones utilizando las representaciones visuales

(iconos) y las listas de elementos del menú. Las selecciones pueden activarse bien a través del teclado o con el ratón.

GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) es un juego de herramientas de soporte de MATLAB, diseñadas para crear GUIs fácil y rápidamente, dada la claridad en el diseño y presentación de los controles de la interfaz, reduciendo la labor al grado de seleccionar, tirar, arrastrar y personalizar propiedades.

El lenguaje más habitual para crear GUI-s es Java, ya que tiene la enorme ventaja de funcionar en cualquier máquina, sin embargo Java resulta muy lenta para hacer cálculos eficientemente, y es aquí donde MATLAB es más poderoso. Las GUI-s son herramientas muy útiles para entregar aplicaciones a aquellas personas que no saben lo suficiente de programación y que quieren beneficiarse de las ventajas de un programa. Véase [5].

### 3.3.2. Consideraciones importantes en el diseño de una GUI

Antes de empezar a programar se debe tener claras cuáles son las necesidades exactas que tienen que ser cubiertas por la aplicación. Para ello es imprescindible entender el tipo de datos y variables que son introducidas por el usuario, así como las excepciones que puedan producirse, los casos que ocurren pocas veces pero que hay que tener en cuenta, si se necesitan gráficos o tablas que salgan por impresora, o cómo se guardan los resultados, dónde se guardan y en qué formato lo hacen.

La parte del diseño es, con mucha diferencia, la más importante desde el punto de vista del usuario. Para diseñar correctamente una GUI, lo mejor es hacerlo con papel y lápiz, tener un boceto e irlo mejorando. De esta manera se consigue que no haya sorpresas y evita que después de haber realizado un gran cantidad de trabajo luego haya que tirarlo a la basura.

Las GUI-s tienen que hacerse de modo que los botones estén donde el usuario espera que estén. Si nuestra GUI tiene varias páginas distintas y en cada una de ellas hay un botón que dice “Guardar” es conveniente que ese botón esté localizado en el mismo sitio siempre.

Una vez que tenemos claro qué objetos tendrá la GUI, gráficos, textos, radio buttons,

check boxes, edición de texto, entrada de valores, lectura de matrices, etc y de qué forma aparecerán en la interfaz (el layout) es necesario hacer un programa de tipo script que tenga la misma funcionalidad que la GUI que queremos programar. Antes de incorporar el programa a la GUI, se debe hacer todo tipo de pruebas con él hasta estar completamente seguros de que el programa que vamos a incorporar en la GUI es el programa que queremos. Para hacer las necesarias pruebas lo mejor es hacerlas sobre un script y no directamente sobre la GUI. Una vez que tengamos el script guardado podremos incorporar los distintos trozos del script en la GUI, de modo que al hacer las pruebas sobre la GUI podamos contrastar los resultados con los que obtenemos del script. Una vez hayamos acabado con los tests sobre la GUI definitiva y estemos completamente seguros de su correcto funcionamiento, la GUI puede ser manipulada por el usuario. Véase [6].

### 3.3.3. Funcionamiento de una aplicación GUIDE

Una aplicación GUIDE consta de dos archivos: `.m` y `.fig`. El archivo `.m` es el que contiene el código con las correspondencias de los botones de control de la interfaz y el archivo `.fig` contiene los elementos gráficos. Cada vez que se adicione un nuevo elemento en la interfaz gráfica, se genera automáticamente código

### 3.3.4. Manejo de datos entre los elementos de la aplicación y el archivo `.m`

Todos los valores de las propiedades de los elementos (color, valor, posición, string...) y los valores de las variables transitorias del programa se almacenan en una estructura, los cuales son accedidos mediante un único y mismo identificador para todos estos. Por ejemplo, el identificador se asigna en:

$$handles.output = hObject;$$

`handles`, es nuestro identificador a los datos de la aplicación. Esta definición de identificador es salvada con la siguiente instrucción:

$$guidata(hObject, handles);$$

*guidata*, es la sentencia para salvar los datos de la aplicación. *guidata* es la función que guarda las variables y propiedades de los elementos en la estructura de datos de la aplicación, por lo tanto, como regla general, en cada subrutina se debe escribir en la última línea lo siguiente:

$$\textit{guidata}(\textit{hObject}, \textit{handles});$$

Esta sentencia nos garantiza que cualquier cambio o asignación de propiedades o variables quede almacenado. Por ejemplo, si dentro de una subrutina una operación dio como resultado una variable  $x$ , para poder utilizarla desde el programa u otra subrutina debemos salvarla de la siguiente manera:

$$\textit{handles}.x = x;$$
$$\textit{guidata}(\textit{hObject}, \textit{handles});$$

La primera línea crea la variable  $x$  a la estructura de datos de la aplicación apuntada por *handles* y la segunda graba el valor.

### Sentencias *get* y *set*

La asignación u obtención de valores de los componentes se realiza mediante las sentencias *get* y *set*. Por ejemplo, si queremos que la variable  $y$  tenga el valor del Slider escribimos:

$$y = \textit{get}(\textit{handles}.slider1, 'Value');$$

Notar que siempre se obtienen los datos a través de los identificadores *handles*. Para asignar el valor a la variable  $y$  al statictext etiquetada como *text1* escribimos:

$$\textit{set}(\textit{handles}.text1, 'String', y);$$

### Creación de la GUI

Para la elaboración de esta interfaz gráfica de usuario se utilizaron los siguientes elementos, ver figura 3.17:



- *Texto estático*: puede exhibir símbolos, mensajes o incluso valores numéricos de una GUI, y puede ubicarse en cualquier lugar de la interfaz.
- *Texto editable*: permite al usuario teclear una cadena de entrada. Se puede escribir varios valores numéricos en forma de vector o matriz como cadena, los cuales se convertirán posteriormente en valores numéricos con el comando `str2num`.
- *Push buttons*: genera una acción cuando se da click con el puntero del mouse sobre ellos. En este caso ejecuta el algoritmo de simulación en base a los parámetros de entrada introducidos en los campos de texto editable.
- *Axes*: abre un eje en un punto especificado dentro de una ventana de figura.

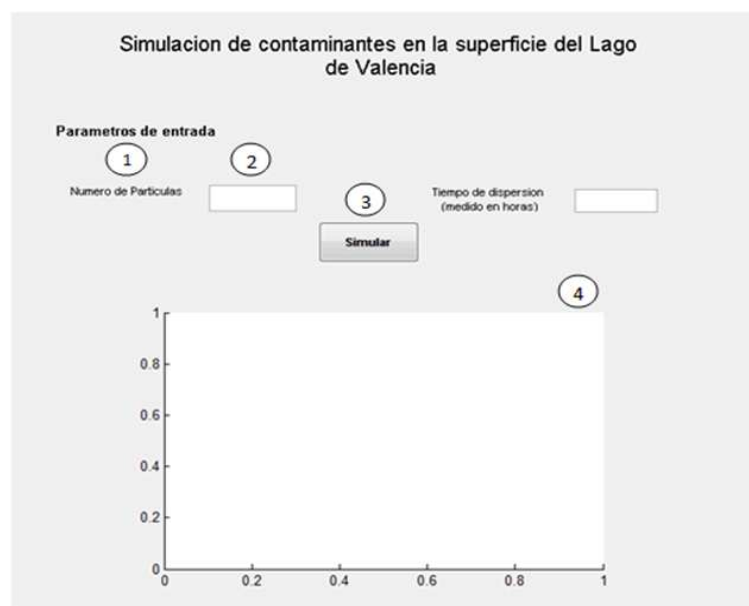


Figura 3.17: Interfaz gráfica de usuario. ① Texto estático, ② Texto editable, ③ Push buttons, ④ Axes

Para cerrar este capítulo resumiremos en el esquema mostrado a continuación, los pasos seguidos:

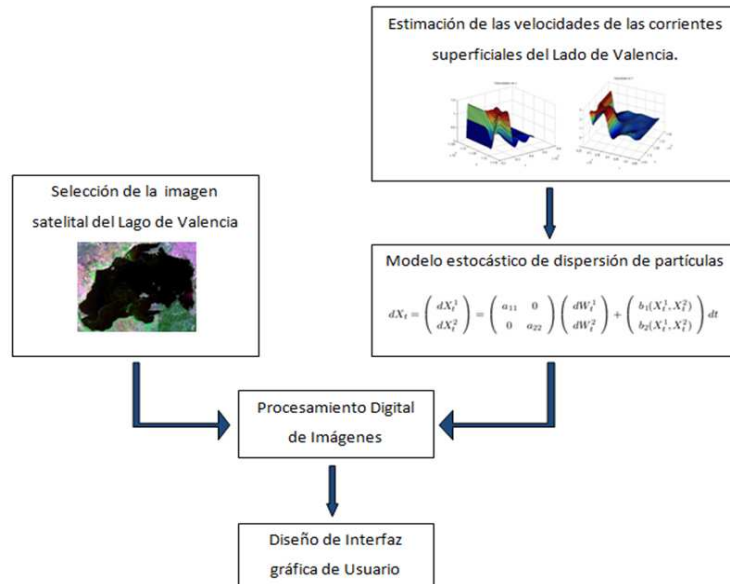


Figura 3.18: Esquema seguido para la elaboración de la Herramienta Computacional

## Capítulo 4

# Simulaciones y Análisis de Resultados

Este trabajo de investigación plantea un modelo matemático que permite simular la trayectoria superficial del esparcimiento de partículas, las cuales se suponen más densas que el fluido que las circunda, sustentándose bajo el enfoque Lagrangiano, por lo que se verá el fluido de contaminante como un gran número de partículas cuya trayectoria está determinada por las corrientes debidas a la acción del viento, del oleaje y del flujo del agua vertida por los ríos que caen en el Lago de Valencia. Cada partícula es gobernada por una fuerza que la podemos dividir en dos categorías, Una fuerza determinista (fuerza viscosa continua) y una fuerza estocástica (proveniente de la discontinuidad de la materia). En base a esto, el modelo desarrollado está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(X_t^1, X_t^2) \\ b_2(X_t^1, X_t^2) \end{pmatrix} dt \quad (4.1)$$

donde  $(b_1(X_t^1, X_t^2), b_2(X_t^1, X_t^2))$  está dado por el flujo de las corrientes superficiales del Lago de Valencia,  $(dW_t^1, dW_t^2)$  es un movimiento Browniano estándar bidimensional,  $a_{11}$  y  $a_{22}$  constantes. Esta ecuación será aproximada por el método de Milstein.

### 4.1. Sinopsis del algoritmo

- Dada la imagen satelital del Lago de Valencia  $L$ , es georreferenciada con el uso de la función *makerefmat* de MATLAB

$$R = \text{makerefmat}(\text{lon}_0, \text{lat}_0, \text{resl}, -\text{resl})$$

Donde  $\text{lon}_0$  y  $\text{lat}_0$  es la longitud y latitud, respectivamente, del pixel de coordenadas (1,1) de la imagen satelital.  $\text{resl}$  representa la resolución de la imagen satelital y  $R$  será la matriz de georreferenciación. En este caso  $\text{lon}_0 = 625250.9506$ ,  $\text{lat}_0 = 1134830.37$  y  $\text{resl} = 30$ .

- Se define el vector  $Do1$  como aquel que contiene las coordenadas de los puntos iniciales de dispersión. Estos puntos son representados en la imagen 4.1.

$$\begin{aligned} Do1 = & [625730.9506 \quad 1129040.37; \\ & 628910.9506 \quad 1129610.37; \\ & 632870.9506 \quad 1130090.37; \\ & 628490.9506 \quad 1133870.37; \\ & 625430.9506 \quad 1130360.37; \\ & 625910.9506 \quad 1131470.37]; \end{aligned}$$

- Dada la cantidad de partículas de dispersión  $N$  y el tiempo de dispersión medido en horas  $Ho$ . Se itera la función *Mdespmoovelnew* tantas veces como puntos de inicio de dispersión se hayan definido

$$[Mx, My, T] = \text{Mdespmoovelnew}(Ho, N, Do);$$

Donde  $Do$  es el punto de inicio de dispersión considerado en cada iteración,  $Mx$  y  $My$  son las coordenadas  $X$  e  $Y$  de la dispersión, respectivamente. Y  $T$  número de



Figura 4.1: Puntos de inicio de dispersión

elementos dentro de la partición  $[0, Ho]$ .

Dado que el campo de velocidades está expresado en  $m/s$ , se multiplican las matrices  $Mx$  y  $My$  por 3600 para observar su desplazamiento en  $m/h$ .

Se suma el punto de inicio de dispersión  $Do$  a las matrices de desplazamiento  $Mx$  y  $My$ , y se almacena cada iteración en las matrices  $GxT$  y  $GyT$ , respectivamente. Siendo estas, una vez finalizada las iteraciones, las matrices de dispersión desde los puntos de inicio considerados.

- Posteriormente se definen las regiones para generar la matriz de concentración con la función *RegCon*,

$$[Reg, Llog, RegL, malla, num] = RegCon(a, dl, L);$$

Donde la  $a$  es el tamaño de cada unidad de la malla, en este caso  $a = 3$ ,  $dl$  la dimensión de la matriz de la imagen satelital del Lago de Valencia  $L$ . Esta función devuelve la matriz con regiones etiquetadas *Reg*, la imagen lógica del Lago de Valencia *Llog*, *RegL* es la multiplicación entrada a entrada de *Reg* y *Llog*. *malla* es el reticulado cuyas unidades son de tamaño  $a \times a$  y *num* la cantidad de regiones etiquetadas.

- Finalmente, se utiliza la función *imDispnew* para generar la matriz de concentración de partículas  $C$ , y la imagen de dispersión de partículas sobre Lago  $U$ . La sintaxis de esta función es

$$[C, U] = imDispnew(malla, d, dl, GxT, GyT, RegL, Llog, L, R); .$$

Con el uso de la interfaz gráfica de usuario, la implementación de cada una de las funciones descritas anteriormente queda enmascarada para el usuario. Mostrándole al mismo sólo aquellos parámetros que el puede manipular, en este caso el número de partículas y el tiempo de simulación, ver imagen 4.2.



Figura 4.2: Interfaz grafica de usuario.

## 4.2. Análisis de resultados

Dado el diseño del algoritmo y por consiguiente de la interfaz gráfica de usuario para la ejecución de una simulación sólo son necesarios dos parámetros de entrada:

- Número de Partículas
- Tiempo de Simulación, medido en horas

Se analizarán dos simulaciones para las cuales se considera el mismo número de partículas y se varía el tiempo de simulación, ver figura 4.3.

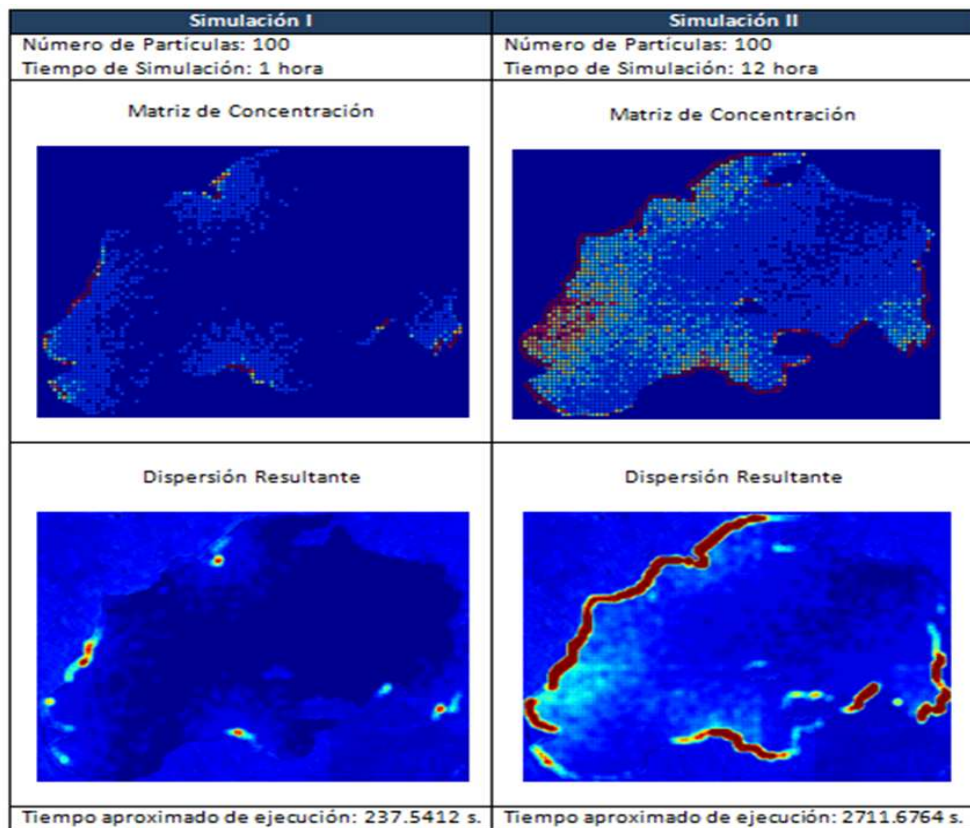


Figura 4.3: Resultados de las simulaciones

- En la imagen 4.3 se observa el desplazamiento orientado hacia la parte norte del Lago, y esto tiene sentido ya que si observamos las imágenes de la estimación de las Velocidades del Lago, figura 3.8 y figura 3.9, la componente  $Y$  de la velocidad toma valores superiores a la componente  $X$ , específicamente en la región sur-oeste del Lago.

- Las velocidades estimadas por Kriging están adimensionadas, por lo tanto una vez incorporadas al algoritmo se requirió multiplicarlas por una constante para dimensionarlas. Dicha constante se tomó del artículo [13], y es  $1/\sqrt{200}$ . Para verificar que efectivamente los valores obtenidos tienen sentido, se tomó la información referente a la velocidad del viento en el Lago, donde se tiene que esta varía de 4 a 13  $Km/h$ . Al multiplicar el intervalo por 0.03 tenemos una aproximación en  $Km/h$  de la variación de las corrientes superficiales inducidas por el viento, ya que la simulación modela el esparcimiento en la capa superficial del Lago, estas cotas en  $m/s$  debían coincidir a menos en el orden con las cotas de las velocidades de las corrientes estimadas por Kriging. En función a esto muestro a continuación el siguiente cuadro:

| Velocidades del Viento en el Lago de Valencia                                                                 | Velocidades de las Corrientes Superficiales inducidas por el viento en $Km/h$                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>[4, 13] <math>Km/h</math></b>                                                                              | <b>[0.12, 0.39] <math>Km/h</math></b>                                                                                                               |
| Velocidades en X de las Corrientes Superficiales del Lago de Valencia, estimadas por Kriging (Adimensionadas) | Velocidades en X de las Corrientes Superficiales del Lago de Valencia, estimadas por Kriging en $m/s$ (multiplicadas por el factor $1/\sqrt{200}$ ) |
| <b>[0.0767, 1.4706]</b>                                                                                       | <b>[0.0054, 0.1040] <math>m/s</math></b>                                                                                                            |
| Velocidades en Y de las Corrientes Superficiales del Lago de Valencia, estimadas por Kriging (Adimensionadas) | Velocidades en Y de las Corrientes Superficiales del Lago de Valencia, estimadas por Kriging en $m/s$ (multiplicadas por el factor $1/\sqrt{200}$ ) |
| <b>[-0.2774, 2.3619]</b>                                                                                      | <b>[-0.0196, 0.1670] <math>m/s</math></b>                                                                                                           |
| Módulo de las Velocidades de las Corrientes Superficiales del Lago de Valencia estimadas por Kriging en $m/s$ | Velocidades de las Corrientes Superficiales inducidas por el viento en $m/s$                                                                        |
| <b>[0.0203, 0.1040] <math>m/s</math></b>                                                                      | <b>[0.0324, 0.1053] <math>m/s</math></b>                                                                                                            |

Figura 4.4: Verificación de las Velocidades de las corrientes superficiales del Lago de Valencia

Como se puede observar el módulo de las velocidades estimadas por kriging y las inducidas por el viento en  $m/s$  coinciden en orden, más aún sus valores se aproximan.

- Además se verificó que el desplazamiento promedio de las partículas estuviese en concordancia con el desplazamiento lineal que deberían tener con respecto a la



velocidad con la que se mueven, por ejemplo, en el caso de la simulación de 1 hora, si las partículas se mueven entre  $[0.0203, 0.1040]$  m/s equivalente a  $[73.08, 374.4]$  m/h, entonces el promedio de desplazamiento de una partícula en una hora debe estar dentro del intervalo  $[73.08, 374.4]$  m, en este caso se obtuvo 133.5 m.

Para la simulación de 12 horas, se tiene un intervalo de  $[876.96, 4492.8]$  m, y se obtuvo que en promedio se desplazó 1157.77 m.

Por lo que se ha expuesto, podemos afirmar que se observa el impacto del efecto del campo de velocidades y los desplazamientos obtenidos guardan concordancia con los planteamientos teóricos en los que nos hemos basado.

Para concluir, se ha extraído una imagen del Lago de Valencia de la aplicación *Google Earth* y comparado con el resultado de la simulación correspondiente a 12 horas, se hace notar la similitud en la distribución de los sedimentos. Observemos que dado los puntos de inicio de dispersión ubicados en la parte inferior-izquierda de la imagen satelital del Lago (ver 4.1), el desplazamiento de las partículas está orientado hacia la parte superior en ambas imágenes, efecto generado por el campo de velocidades estimado para esta área (recordemos que en esta sección del Lago la magnitud de las velocidades en  $Y$  es superior a las velocidades en  $X$ ), ver 4.5.

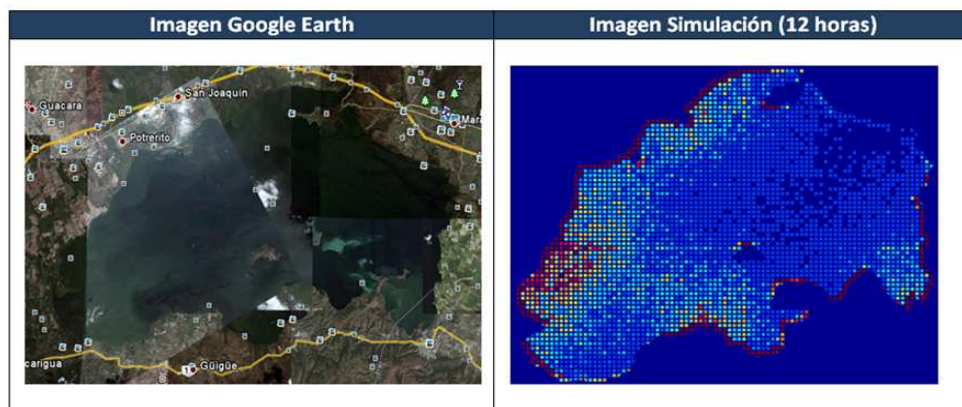


Figura 4.5: Comparación del resultado obtenido con la imagen satelital del Lago de Valencia



## Capítulo 5

# Conclusiones

Hemos partido del hecho que la problemática de la contaminación del agua es uno de los aspectos que requiere de estudios urgentes, que ayuden a tomar las medidas que permitan controlar el deterioro que se está causando. Por tal motivo, en este trabajo de investigación se desarrolló un modelo matemático que permite simular la trayectoria superficial del esparcimiento de partículas de contaminantes en el Lago de Valencia, considerando las características de la región.

Es importante hacer énfasis en este último punto, “considerando las características de la región”, ya que ha sido determinante para los alcances que hemos obtenido, y a su vez es el punto de partida para realizar estudios que nos ayuden a obtener mayor información de variables que describen las características bio-físicas de la región, para su incorporación en el modelo y así mejorar los resultados obtenidos a la fecha.

Por otro lado, es importante resaltar que pese a la simplicidad del modelo propuesto, podemos afirmar que se observa el impacto del efecto del campo de velocidades y los desplazamientos obtenidos guardan concordancia con los planteamientos teóricos en los que nos hemos basado. Obtuvimos que las magnitudes de las velocidades de las corrientes superficiales estimadas en el modelo coincide en orden con las magnitudes de las velocidades de las corrientes superficiales inducidas por el viento, las cuales se calculan considerándolas como un 3 % de la velocidad del viento en el Lago de Valencia. Además, el desplazamiento promedio de las partículas se encuentra dentro del intervalo de desplazamiento inducido por

las velocidades superficiales presentes en el Lago. Por otra parte, hemos logrado fusionar los resultados arrojados por el modelo, desde el punto de vista numérico, con una imagen satelital del Lago de Valencia, lo que ofrece la oportunidad de observar la solución de forma gráfica y dinámica, esto implicó un arduo trabajo relacionado con el uso de técnicas de procesamiento digital de imágenes, georreferenciación y construcción de interfaz gráfica de usuarios.

Aún así se debe continuar profundizando en la obtención del campo de velocidades para toda el área del Lago, ya sea realizando un reconocimiento más detallado del software GCLAM o a partir de otras técnicas que permitan estimarlo.

Otro aspecto que servirá para el desarrollo de nuevas investigaciones, y que va en concordancia con el hecho de la consideración de las características de la región es la estimación del coeficiente de difusión. El cual dependerá de la sustancia cuya dispersión se desee simular, además de la temperatura del medio donde se esté desplazando la partícula. Esto toma vital importancia, cuando se desee extender el modelo considerando tres dimensiones, pues la temperatura variará dependiendo de la profundidad. Aún con el modelo actual resulta conveniente incorporar la estimación del coeficiente de difusión, pues la temperatura podría variar en la superficie del Lago dependiendo de la posición de la partícula.

Es así como, en mi opinión, el realizar estudios que permitan conocer a fondo las características del medio, para involucrarlas en el modelo es determinante para futuras investigaciones, ya que la ecuación diferencial estocástica como modelo matemático se ha demostrado que replica muy bien el comportamiento del fenómeno.

# Bibliografía

- [1] Mikosch, T. Elementary Stochastic Calculus. World Scientific.(1998) 14-163.
- [2] B. Oksendal: Stochastic Differential Equations, fifth edition, Springer-Verlag, 1998.
- [3] Hernández M., Adrian "Registro de imágenes médicas multimodalidad.", Universidad Central de Venezuela, 5-9 (2009). Trabajo Especial de Grado (Licenciatura - Matemática)
- [4] Sobrino,J.A., Raissouni,N., Kerr, Y., Oliosio, A., López-Garcia,M.J., Belaid, A., El Kharraz, M.H., Cuenca,J., Dempere,L., 2000. *Teledetección*. Sobrino,J.A.(Ed). Servicio de publicaciones, Universidad de Valencia (ISBN 84-370-4220-8), Valencia (España).
- [5] Fernández, Gonzalo. Creación de Interfaces Gráficas de Usuario (GUI) con Matlab. Salamanca, 2007. < <http://webpersonal.uma.es/de/gfdc/docencia/GuiSection.pdf> >
- [6] Barragán, Diego. MANUAL DE INTERFAZ GRÁFICA DE USUARIO EN MATLAB PARTE I. 2008. < <http://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/10740/19/%255Bmatlab%255D%20MATLAB%20GUIDE.pdf> >
- [7] Esqueda E., José J. Matlab e Interfaces Gráficas. Instituto Tecnológico de Ciudad Madero. CONATEC 2002.< <http://proton.ucting.udg.mx/cheko/pdf/matv.pdf> >

- [8] Aureli Alabert. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Universidad Autónoma de Barcelona. 2004. < [http://mat.uab.es/~alabert/Docs/teaching/IntroSDE %28Cali %29.pdf](http://mat.uab.es/~alabert/Docs/teaching/IntroSDE%28Cali%29.pdf) >
- [9] Schabenberger O. and Gotway C., Statistical Methods for Spatial Data Analysis. 2005.
- [10] De La Hoz, Claudia “PREDICCIÓN DEL NIVEL DE CONTAMINACIÓN EN LA CUENCA DEL LAGO DE VALENCIA MEDIANTE TÉCNICAS GEOESTADÍSTICA Y DE TELEDETECCIÓN”, Universidad Central de Venezuela, 11-12 (2008). Trabajo Especial de Grado (Maestría - Modelos Aleatorios)
- [11] Lertxundi Manterola, Aitana. Métodos de Estadística Espacial para evaluar la influencia de factores medioambientales sobre la incidencia y mortalidad por cancer. Universitat de Girona. 2006. < [tdx.cat/bitstream/handle/10803/7703/talm.pdf?sequence=1](http://tdx.cat/bitstream/handle/10803/7703/talm.pdf?sequence=1) >
- [12] Guevara E., Guevara J., Garcia E. “Régimen climático y patrón espacial de las lluvias en la cuenca del Lago de Valencia, Venezuela”. Revista de Climatología. Vol. 8 (2008): 29-40. < <http://webs.ono.com/reclim3/reclim08c.pdf> >
- [13] Torres N. Carlos, Larrazábal Germán, Castillo José “UNDERSTANDING THREE-DIMENSIONAL CIRCULATION IN LAKE VALENCIA, VENEZUELA: A NUMERICAL APPROACH”.
- [14] Gonzalez,RafaelC.DigitalImageProcessing.SecondEditionbyPrentice-Hall,(2002).
- [15] Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. (1957) 437-474.
- [16] Universidad de Carabobo. fecha desconocida. Detalles proyecto LOCTI. < [http://www.uc.edu.ve/uc\\_empresas/locti\\_ver\\_detalles.php?cod\\_proyecto=321&cod\\_area=&area=](http://www.uc.edu.ve/uc_empresas/locti_ver_detalles.php?cod_proyecto=321&cod_area=&area=) >. [Con acceso el 31 de mayo de 2010]
- [17] Flores T., Henry ”Estudio Numérico Experimental del Esparcimiento de Hidrocarburos en la Superficie del Agua”, Universidad Central de Venezuela,(1996) 17-38 . Trabajo Especial de Grado (Maestría - Ingeniería Hidráulica)

- [18] Gihman, I.I. AND Skorohod, A.V. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag (1972) 39-43.
- [19] <http://www.conae.gov.ar/satelites/sac-c/terra/modis.html>
- [20] <http://www.spotimage.fr/web/es/311-informacion-tecnica.php>
- [21] <http://www.teledet.com.uy/tutorial-imagenes-satelitales/sensores-satelitales-landsat-spot.htm>