

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

TRANSFERENCIA DE CALOR EN TUBERÍAS DE PRODUCCIÓN/INYECCIÓN EN UN POZO

**Presentado ante la ilustre
Universidad Central de
Venezuela para optar al Título
de Ingeniero de Petróleo por
los**

Br. Pardo Mendoza Pedro

Br. Rodríguez Yarena Juan

Caracas, Noviembre 2005

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

TRANSFERENCIA DE CALOR EN TUBERÍAS DE PRODUCCIÓN/INYECCIÓN EN UN POZO

TUTOR ACADEMICO: Ing. EDGAR PARRA P.

**Presentado ante la ilustre
Universidad Central de
Venezuela para optar al Título
de Ingeniero de Petróleo por
los**

Br. Pardo Mendoza Pedro

Br. Rodriguez Yerena Juan

Caracas, Noviembre 2005

Caracas, Noviembre 2005

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería de Petróleo, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los Bachilleres Pardo Mendoza Pedro y Rodríguez Yerena Juan, titulado:

**TRANSFERENCIA DE CALOR EN TUBERÍAS DE
PRODUCCIÓN/INYECCIÓN EN UN POZO**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero de Petróleo, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por los autores, lo declaran APROBADO.

Prof. Adafel Rincón
Jurado

Prof. Freddy Méndez
Jurado

Prof. Edgar Parra P.
Tutor Académico

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por el apoyo brindado durante todo este tiempo, Especialmente a:

Mi mamá Raquel, por ser la persona que mas admiro por su dedicación y esfuerzo, siendo ejemplo para mi vida familiar y profesional.

Mi papá Pedro y mis hermanos Katuska, Peggy y Jean Carlo, quienes siempre me han brindado solidaridad y apoyo en todo momento, con lo que hemos logrado la familia que somos.

A mis tias, tios y primos, de quienes siempre he recibido cariño y estímulo.

A mi amigo Daniel:

Por el apoyo incondicional que me ha brindado y por su gran amistad.

A todos los profesores de la Universidad Central de Venezuela, Especialmente a:

Ing. Edgar Parra, por sus enseñanzas y orientación en mi trabajo de tesis de grado.
Prof. Nelson Fernandez, por su colaboración en el desarrollo de mi tesis de grado.

A todos mis amigos y compañeros de la Universidad:

Hector, Sergio, Gustavo, Diego, Evelyn, Andriuska, Ines, Marines, Indira, Reyinson, Isabel, Annalyn, Cesar, Douglas, Jose Angel, Rafael Angel, Leo, Lenin, Carelia, Ana, Eilyn, Eliana, Humberto, Margarito, Rafucho, Mabe, Jessica, Mayralit, Issa, Mauricio, Portu, Edison, Carlos, Tato, Hidelfonso, Julio, El Colombiano y todos los demás por su compañerismo tanto en las buenas como en las malas.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a mi familia en especial a:

Mi Mamá Isabel y mi Hermana Rebeca, las cuales me dieron motivos para salir adelante, brindándome su confianza y apoyo en todo momento.

A mi Tía Nubia y mi Prima Madelin, por estar siempre a mi lado recordándome que si se pueden lograr las metas con calma y perseverancia.

A Paola, la cual me apoyo y soporto todos mis buenos y malos momentos, con el amor y cariño a su propio estilo.

A todos los profesores de la Universidad Central de Venezuela, Especialmente a:

Ing. Edgar Parra, por sus enseñanzas y orientación en mi trabajo de tesis de grado.

Prof. Nelson Fernandez, por su colaboración en el desarrollo de mi tesis de grado.

Prof. Jorge Reyes, por su amistad y colaboración en mi trabajo de tesis de grado.

A mis amigos de la Universidad:

Andy, Raul, Raul P., El Colombiano, Lenin, Pedro, Aloy, Wuaraca, Julio, Oriana, Adriana, Eduardo, Colombiano 2, Diego, Hidelfonso, Carelia, Issa, Mauricio, El Portu, Jhonatan, Jucel, Jeyson, Compañeros de Rumba, Parroquia Exámenes y hasta Romances en Común.

A mis panas de siempre:

Jorge y Edgar hermanos mas que amigos con los que he podido contar en las buenas, malas y en las peores, panas que confío y podré confiar siempre.

DEDICATORIA

Dios y mis Padres, por poder contar siempre con ellos (Gracias).

A todos mis familiares, Especialmente a mi Yaya Ramona, mi Yayu Pedro y mi abuela María, quienes siempre estuvieron acompañándome y aun en su ausencia siento que están conmigo.

A toda mi familia en especial a mi Abuela Pastora y mi Mamá Isabel, las cuales hicieron de mí quien soy hoy en día.

Pardo M., Pedro y Rodríguez Y., Juan

**TRANSFERENCIA DE CALOR EN TUBERÍAS DE
PRODUCCIÓN/INYECCIÓN EN UN POZO. Año 2005, 190p.**

Tutor Académico: Edgar Parra P.

Tesis. Caracas, UCV. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería de Petróleo.

Año 2005, 190p.

Palabras Claves: Convección del calor, Temperatura fluido de formación, TFF-30.

Resumen: Se realizó un Programa computacional ejecutable, diseñado en el lenguaje de Microsoft Visual Basic (versión 6.0), con la finalidad de establecer el cálculo de temperatura del fluido siguiendo el modelo matemático planteado por Hasan y Kabir, para la evaluación de la transferencia de calor entre la tubería de producción y los alrededores del pozo bajo producción e inyección y lograr cumplir con los requisitos exigidos por la operación en un momento específico.

Inicialmente se desarrolló la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor en tuberías de producción del modelo matemático de Hasan y Kabir, con el propósito de demostrar que el modelo matemático presentado por ellos simplifica en gran medida los algoritmos en el cálculo de las mediciones realizadas en campo.

Por otro lado, el modelo puede ser utilizado como punto de partida para desarrollar herramientas para el cálculo de la temperatura del fluido en el intercambio de calor que puede afectar a los mismos en la producción de un pozo específico.

Finalmente, se llevó a cabo la realización de un programa computacional ejecutable en el lenguaje de Microsoft Visual Basic (versión 6.0) el cual considera de forma explícita los parámetros que reflejan la transferencia de calor en tuberías registradas mediante pruebas de campo previamente medidas.

Utilizando el programa desarrollado, se ha realizado un conjunto de pruebas con el objeto de evaluar la precisión del modelo numérico con medidas tomadas en campo. Para ello se utilizó diferentes datos de pozos de origen académico e industrial, que aportan información indispensable para el cálculo de otros parámetros como el coeficiente global de transferencia de calor, el parámetro de relajación y la temperatura adimensional entre otros.

De dichas evaluaciones se concluye que, aunque los resultados no sean exactos en situaciones donde el régimen de flujo no es laminar sino turbulento, el conjunto de medidas y el modelo son adecuados para medir la calidad del diseño numérico, considerando la relación entre el costo de aplicación del programa y el costo de las mediciones ejecutadas en campo y el tiempo empleado para ello.

Tabla de Contenido

Introducción.....	1
1. Marco Teórico.....	4
1.1. Teoría de la Conductividad de Calor.....	4
1.2. Calor.....	5
1.2.1. Unidades de Calor.....	5
1.3. Transferencia de Calor.....	6
1.3.1. Mecanismos de Transferencia de Calor.....	6
1.3.2. Leyes de los Mecanismos de Transferencia de Calor.....	8
1.3.2.1. Ley de Fourier/Conducción.....	8
1.3.2.2. Coeficiente de Conductividad Térmica (K).....	13
1.3.2.3. Métodos Experimentales para la Determinación de la Conductividad Térmica.....	17
1.3.2.4. Ley de Enfriamiento de Newton/Convección.....	18
1.3.2.5. Ley de Stefan-Boltzmann/Radiación.....	19
1.3.3. Conducción.....	21
1.3.3.1. Conducción de Calor en un Sólido Isotrópico.....	23
1.3.3.2. La Ecuación Diferencial de Conducción de Calor en un Sólido Isotrópico.....	27
1.3.3.3. La Ecuación Diferencial de Conducción de Calor en un Medio en Movimiento.....	32
1.3.3.4. La Transformación de Coordenadas.....	37
1.3.4. Radiación.....	43
1.3.5. Convección.....	45
1.4. El Flujo de Calor a través de una Superficie.....	51
1.5. El Problema de la Transferencia de Calor por Convección.....	55

1.5.1. Número de Grashoff.....	58
1.5.2. Número de Reynolds.....	60
1.6. Transporte de Calor en el Formación.....	62
1.7. Temperatura en la Formación.....	65
1.7.1. Distribución de temperatura en la Formación.....	66
1.8. Solución de la Ecuación de Difusividad.....	69
1.9. Balance de Energía para el Fluido en el Pozo.....	72
1.10. Coeficiente de Transferencia de Calor para Pozos.....	75
1.11. Pérdida de Calor en la Formación.....	78
1.11.1. Parámetro de Relajación ($L_R = 1/A$).....	80
1.12. Transporte de Calor en la Tubería de Producción Costa Afuera.....	81
1.13. Temperatura del Fluido en el Pozo.....	84
1.13.1. Temperatura del Fluido en Producción. Flujo de una Sola Fase (líquido).....	86
1.13.1.1. Flujo de Gas una Fase.....	91
1.13.2.2. Flujo de Gas/Líquido.....	92
1.14. Temperatura del Fluido en Pozos de Inyección.....	94
1.15. Gradiente Geotérmico Variable.....	95
1.16. Perfiles de Temperatura en Pozo con Sartas de Tuberías Múltiples.....	96
1.16.1. Producción a través de la Tubería y el Anular.....	97
1.16.1.1. Modelo Matemático.....	97

1.16.2. Producción a través de Dos Sartas de Tubería.....	103
1.16.2.2. Modelo Matemático.....	103
1.16.3. Producción e Inyección a través de un mismo Pozo.....	107
1.16.3.1. Modelo Matemático.....	107
2. Metodología.....	110
2.1. Recopilación de Información.....	111
2.2. Desarrollo del Modelo Matemático utilizado por Hasan y Kabir.....	112
2.3. Diseño del Programa bajo el Ambiente de Windows (Visual Basic 6.0) para el Modelo Teórico.....	114
2.4. Evaluación del Modelo Teórico para su Aplicación en Pozos en Regímenes de Flujo Monofásico y Bifásico.....	115
3. Análisis de Resultados.....	117
3.1. Producción de Líquido.....	117
3.1.1. Primera Evaluación.....	117
3.1.2. Segunda Evaluación.....	121
3.2. Producción de Gas.....	125
3.2.1. Primera Evaluación.....	125
3.2.2. Segunda Evaluación.....	130
3.3. Inyección.....	134
3.4. Producción Bifásica Gas/Líquido.....	139
Conclusiones.....	145
Recomendaciones.....	146
Bibliografía.....	147
Apéndice 1. Desarrollo Matemático de las Ecuaciones para el Cálculo de la Temperatura del Fluido en la Formación.....	149

Apéndice 2. Descripción del Programa.....	173
Apéndice 3. Perfiles de Temperatura.....	177
Glosario.....	181
Símbolos y Abreviaturas.....	187

Índice de Figuras

Figura 1.- Mecanismos de Transferencia de Calor: Conducción, Radiación y Convección.....	7
Figura 2.- Ley de Fourier.....	9
Figura 3.- Justificación del Signo Menos en la Ley de Fourier.	10
Figura 4.- Ilustración del Coeficiente de Conductividad Térmica (K).....	13
Figura 5.-Sólido con Isotermas a la cara de los Planos Superior e Inferior	24
Figura 6.- Representación del Punto “P” en el Volumen de un Sólido.....	27
Figura 7.- Sistema de Coordenadas Ortogonales Polar Esférico y Cilíndrico.....	37
Figura 8.- Sistemas de Coordenadas Ortogonales para casos Especiales	38
Figura 9.- Ilustración del Mecanismo de Transmisión de Calor por Radiación Térmica.....	45
Figura 10.- Ilustración del Mecanismo de Transmisión de Calor por Convección...	45
Figura 11.- Flujo a través de un Plano que pasa por en Punto“P”.....	51
Figura 12.- Ilustración de un Tetraedro y sus Áreas ($\lambda\Delta$, $\mu\Delta$, $\nu\Delta$).....	53
Figura 13.-Número de Reynolds vs Coeficiente de Rozamiento y Rugosidad Relativa	62
Figura 14.- Perfiles de Temperatura del Fluido y la Formación durante la Producción e Inyección.....	64
Figura 15.- Esquema de un Perfil de Temperatura de Formación a una Profundidad dada Alrededor del Hoyo.....	68
Figura 16.- Ilustración del Balance de Energía para el Fluido del Pozo.....	72
Figura 17.- Representación de las Resistencias del Flujo de Calor en el Pozo.....	76
Figura 18.- Medidas de la Temperatura del Mar y Perfiles de Velocidad.....	82

Figura 19.- Curvas Isentálpicas y Curva de Inversión para el Nitrógeno.....	87
Figura 20.- Esquema de Producción a través de la Tubería y el Anular.....	97
Figura 21.- Representación de Datos durante el Flujo Tubería/Anular del Pozo...	102
Figura 22.- Producción a través de Dos Sartas de Tubería.....	103
Figura 23.- Representación de Datos durante el Flujo en Dos Sartas de Tuberías Independientes.....	107
Figura 24.- Perfiles de Temperatura durante el Escenario Producción/Inyección ..	108
Figura 25.- Producción e Inyección a través de Dos Sartas Independientes.....	109
Figura 26.- Profundidad Vs Temperatura para Líquidos.....	120
Figura 27.- Profundidad Vs Temperatura para Líquidos.....	124
Figura 28.- Profundidad Vs Temperatura para Gas.....	129
Figura 29.- Profundidad Vs Temperatura para Gas.....	133
Figura 30.- Profundidad Vs Temperatura para Inyección.....	138
Figura 31.- Profundidad Vs Temperatura para Gas/Líquido.....	143
Figura 32.-Perfil de Temperatura en Pozo con Producción de Líquido.....	177
Figura 33.-Perfil de Temperatura en Pozo con Producción de Gas.....	178
Figura 34.-Perfil de Temperatura en Pozo con Producción de Gas.....	179
Figura 35.- Perfil de Temperatura en Pozo con Producción Bifásica Gas/Líquido..	180

Indice de Tablas

Tabla 1.- Valores de la Conductividad Térmica a Diferentes Temperaturas.....	16
Tabla 2.- Valores de la Conductividad Térmica de Diferentes Materiales a 300 K...	16
Tabla 3.- Emisividades Aproximadas de Algunos Metales.....	44
Tabla 4.- Valores del Coeficiente de Transferencia de Calor por Convección (h)....	48
Tabla 5- Tabla Comparativa para Distintos Regímenes de Flujo.....	144

Introducción

La producción de hidrocarburo o la inyección de fluido inevitablemente implican un importante intercambio de calor entre el fluido en la tubería y sus alrededores. Durante la producción, el fluido caliente continúa perdiendo calor hacia los alrededores más fríos al ascender por la tubería. Por el contrario el fluido inyectado puede ganar o perder calor en el descenso, es decir, agua fría o vapor.

La temperatura de formación cercana a la tubería también variará de alguna manera con el tiempo de inyección. En consecuencia la pérdida de calor del fluido de producción disminuye con el tiempo. Los perfiles también describen el aumento de temperatura en el fluido inyectado con la profundidad del pozo.

Un modelo teórico para calcular la temperatura como función de la profundidad del pozo y producción o tiempo de inyección fue primero presentado por Ramey. Algunas de las aplicaciones incluyen cálculos de pérdida de calor en inyección de vapor, pozos geotérmicos, interpretación de registros de calor, cálculo de la temperatura de circulación del fluido y la temperatura de formación estática. Aunque el método de Ramey dio un ímpetu altamente necesitado para un desarrollo futuro, el método tiene limitaciones. Por ejemplo, los efectos de energía cinética y fricción son ignoradas y la corriente de una sola fase del fluido puede ser tomada en cuenta. Igualmente importante Ramey sugirió que el radio del pozo sea variablemente pequeño en la mayoría de los casos, es decir, el radio de drenaje del pozo. Esta suposición es insostenible en muchos casos. Sin embargo, el trabajo de Carslaw y Jaeger (Conducción de Calor en Sólidos) se puede adaptar para eliminar las restricciones del radio de drenaje.

Este enfoque adaptado por Hasan y Kabir introduce un margen de error pequeño y permite una solución analítica al problema. Un balance de energía en la formación entonces conduce a la ecuación diferencial parcial en coordenadas cilíndricas, para la variación de temperatura de formación con distancia radial del pozo y la producción en el tiempo.

En la investigación del trabajo de Hasan Y Kabir basado en la utilización de un modelo matemático realizado con implementaciones complejas de la teoría de transferencia de calor, que actúan como medio para la obtención de temperatura del fluido en pozos de producción e inyección, se realiza el programa computacional ejecutable en el lenguaje de Microsoft Visual Basic (versión 6.0), con la finalidad de optimizar el tiempo de estudio de los resultados obtenidos por dicho modelo.

En el modelo se pueden incluir parámetros tales como el coeficiente global de calor, el parámetro de relajación, temperaturas adimensionales y tiempos adimensionales, disponibles en una biblioteca de módulos que puede ser ampliada para soluciones a la medida.

Se ha puesto especial énfasis en estructuras lógicas que permitan un fácil acceso al cambio de los datos suministrados en cada pozo en particular, por lo que resultan muy adecuadas en entornos con los requisitos exigidos por la operación en un momento específico.

La necesidad de nuevos métodos de optimización lógica para la obtención de temperatura del fluido en la formación ha motivado el presente trabajo de investigación, el cual se centra en su objetivo general el cual es: **el desarrollo y programación de la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor en tuberías de producción del modelo matemático de Hasan y Kabir**, el cual a su vez tiene los siguientes objetivos específicos:

- La evaluación de la transferencia de calor entre la tubería de producción y los alrededores del pozo bajo producción e inyección.
- La demostración del modelo matemático presentado por Hasan y Kabir y su evaluación consecuencia de la variación de temperatura del fluido en la formación con la profundidad del pozo.
- Cálculo de temperaturas para distintos pozos escogidos al azar con énfasis e en distintas corrientes de flujo (monofásico y bifásico).

Para cumplir estos objetivos se propuso el programa computacional que tuviese las siguientes características:

- Desarrollo y demostración del modelo matemático planteado por Hasan y Kabir.
- Programa computacional ejecutable, realizado en el lenguaje de Microsoft Visual Basic (versión 6.0).

1. MARCO TEÓRICO

1.1 Teoría de la Conductividad de Calor

La teoría matemática de la conducción de calor se puede decir que está basada en la hipótesis sugerida por el siguiente experimento “Una placa de un sólido dado, limitado por dos planos paralelos de tal extensión que, solo los puntos en el centro de los planos tienen importancia, estas superficies limitantes o límites se suponen infinitas”.

Los dos planos son mantenidos a diferentes temperaturas siendo la diferencia no tan grande como para causar un cambio sensible en las propiedades del sólido.

Por ejemplo, la superficie superior se puede mantener a la temperatura de fusión del hielo, y la inferior a una temperatura fija por una corriente de agua caliente fluyendo continuamente sobre ella. Cuando estas condiciones han durado lo suficiente para que la temperatura en los diferentes puntos del sólido haya alcanzado un valor estable, en los puntos lejos de las partes finales la temperatura permanece constante a lo largo de los planos paralelos a las superficies de las placas.

Considere la parte del sólido limitada por un cilindro imaginario de área seccional cuyo eje es normal a la superficie de la placa. Este cilindro está supuesto en el centro de la placa y que no hay flujo de calor a través de sus líneas de generación.

Dejemos a la temperatura de la superficie inferior ser $\nu_0^{\circ}\text{C}$ y la de la superior $\nu_1^{\circ}\text{C}$ ($\nu_0 > \nu_1$) y dejemos que el espesor de la placa sea igual a d centímetros.

Los resultados de experimentos en diferentes sólidos sugieren que, cuando se alcanza el estado continuo de temperatura, la cantidad de calor Q que fluye a través de la placa en t_{seg} sobre la superficie S es igual a:

$$\frac{K(\nu_0 - \nu_1)St}{d} \quad (1)$$

donde:

- ♦ K: es la conductividad térmica de la sustancia (Watio/m°K)
- ♦ ν_0 : es la temperatura de la superficie inferior (°K)
- ♦ ν_1 : es la temperatura de la superficie superior (°K)
- ♦ S : es la superficie o area del cuerpo (m²)
- ♦ t: es el tiempo (seg)
- ♦ d: espesor del cuerpo (m)

1.2. Calor

Calor es la transferencia de energía de una parte a otra de un cuerpo, o entre diferentes cuerpos, en virtud de una diferencia o gradiente de temperatura. El calor es energía en movimiento; fluye siempre de una zona de mayor temperatura a una zona de menor temperatura, con lo que eleva la temperatura de la segunda y reduce la de la primera, siempre que el volumen de los cuerpos se mantenga constante. La energía no fluye desde un objeto de temperatura baja a un objeto de temperatura alta. Es importante hacer notar que un cuerpo (o sistema) tiene energía, pero no podemos decir que contiene calor. El calor es un medio por el que la energía se transfiere.

1.2.1. Unidades de Calor

La cantidad de calor se expresa en las mismas unidades que la energía y el trabajo, es decir, en Joules. Otra unidad de calor es la caloría, definida como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 gramo de agua a 1

atmósfera de presión desde 15°C hasta 16 °C. Esta unidad se denomina a veces caloría pequeña o caloría gramo para distinguirla de la caloría grande, o kilocaloría, que equivale a 1.000 calorías y que se emplea en nutrición. La energía mecánica puede convertirse en calor a través del roce, y el trabajo mecánico necesario para producir 1 caloría se conoce como equivalente mecánico del calor. A una caloría le corresponden 4,1855 Joules. Según la ley de Conservación de la Energía, todo el trabajo mecánico realizado para producir calor por rozamiento aparece en forma de energía en los objetos sobre los que se realiza el trabajo. Joule fue el primero en demostrarlo de forma fehaciente en un experimento clásico: calentó agua en un recipiente cerrado haciendo girar unas ruedas de paletas y encontró que el aumento de temperatura del agua era proporcional al trabajo realizado para mover las ruedas.

1.3. Transferencia de Calor

La transferencia de calor en física es el proceso mediante el cual se intercambia energía en forma de calor entre distintos cuerpos, o entre diferentes partes de un mismo cuerpo que están a distinta temperatura. El calor se transfiere por convección, radiación o conducción. Aunque estos tres procesos pueden tener lugar simultáneamente, puede ocurrir que uno de los mecanismos predomine sobre los otros dos. Por ejemplo, el calor se transmite a través de la pared de una casa fundamentalmente por conducción, el agua de una cacerola situada sobre un quemador de gas se calienta en gran medida por convección, y la Tierra recibe calor del Sol casi exclusivamente por radiación.

1.3.1. Mecanismos de Transferencia de Calor

Se reconocen tres mecanismos básicos de transmisión de calor:

1) Conducción.

2) Convección.

3) Radiación.

Las hipótesis de análisis de la transferencia de calor por radiación son:

- No se requiere contacto directo entre cuerpos.
- No requiere medio material entre ellos, es decir que puede haber vacío entre los cuerpos.
- Todo cuerpo a determinada temperatura irradia energía calórica llamada radiación térmica, la cual no es más que una emisión de ondas electromagnéticas que se desplazan a la velocidad de la luz. La tierra recibe el calor del sol por radiación.

Una visión del comportamiento de los tres mecanismos se encuentra ilustrado en la **Figura 1** a continuación:

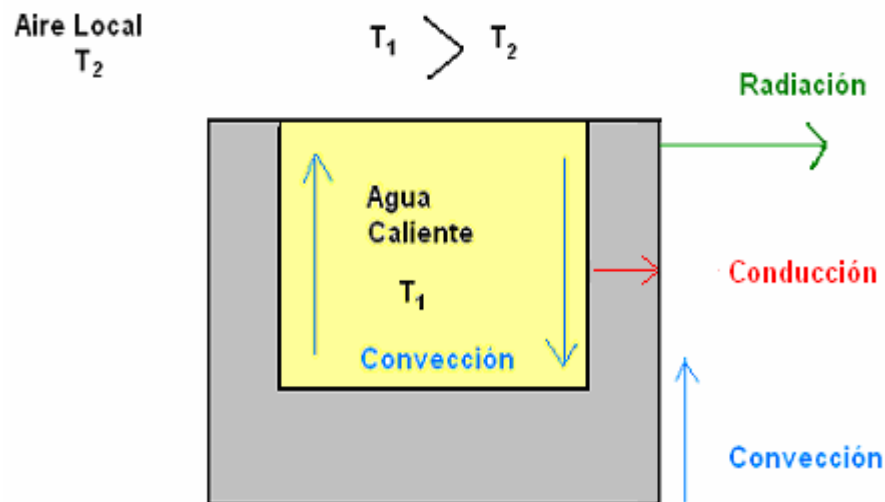


Figura 1

En la **Figura 1**, se observan los mecanismos de transferencia de calor. En la radiación, el calor es transferido a través del espacio vacío en forma de radiación térmica y no requiere de contacto entre la fuente y el receptor de calor. En la conducción, el transporte de calor es a través de una sustancia, el cual fluye desde la zona más caliente hasta la más fría y en la convección, el fluido caliente asciende hacia la región de fluido más frío.

1.3.2. Leyes de los Mecanismos de Transferencia de Calor

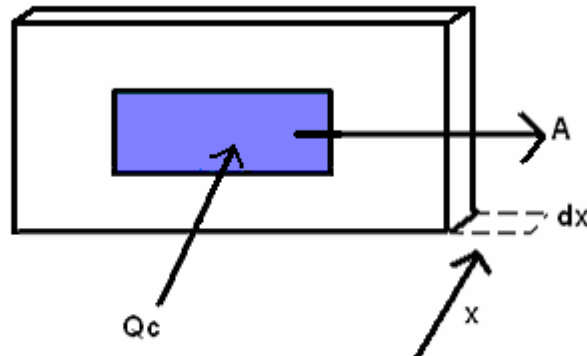
Cada mecanismo de transmisión de calor tiene su ley que lo gobierna:

- Conducción: Ley de Fourier.
- Convección: Ley de Enfriamiento de Newton.
- Radiación: Ley de Stefan - Boltzmann.

1.3.2.1. Ley de Fourier / Conducción

Es la ley física que describe matemáticamente el mecanismo de transferencia de calor por conducción. Se considera que el calor fluirá a través de un medio cuyas moléculas están fijas en sus posiciones, es decir un medio sólido. Como por ejemplo: acero, madera, corcho, plástico.

Este flujo de calor ocurrirá sólo si existe una diferencia de temperaturas entre dos puntos del sólido. Esta diferencia de temperaturas será expresada en forma infinitésima como dt , y puede ser observado tal como se muestra en la **Figura 2**.



Q_c es el flujo de calor por unidad de superficie transversal que atraviesa la superficie A en la dirección positiva de las x (Ley de Fourier)

Figura 2

Con referencia a la **Figura 2**, la Ley de Fourier establece:

$$Q_c = -KA \frac{dT}{dx} \quad (2)$$

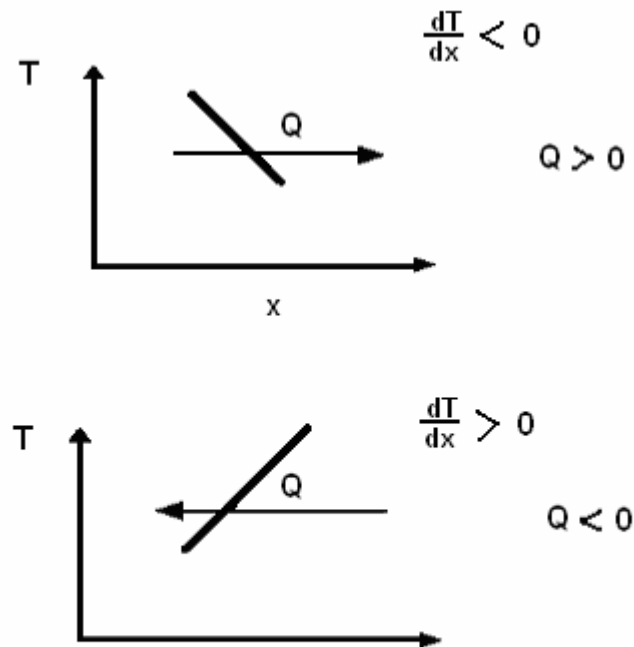
donde:

- ♦ Q_c : Flujo de calor por conducción (Watio)
- ♦ A: área transversal (pies^2)
- ♦ $\frac{dT}{dx}$: gradiente de temperaturas ($^{\circ}\text{K}/\text{m}$) (Kelvin/ metro)
- ♦ K: conductividad térmica [$\text{Watio}/\text{m}^{\circ}\text{K}$] (Watio/ metro x Kelvin)

En la ley de Fourier, la conductividad térmica, K, es una propiedad del medio. En general, la conductividad térmica, K, es una propiedad que depende de la temperatura.

En el signo menos que aparece en la ley de Fourier (Ec.2), es una consecuencia de satisfacer la segunda Ley de la Termodinámica que para este caso impone que el flujo de calor debe darse siempre, desde la región de mayor temperatura hacia la región de menor temperatura.

En la **Figura 3** se ilustra que si el gradiente de temperaturas es negativo el flujo de calor, según el sistema de coordenadas señalado debe ser positivo, y en caso de ser el gradiente de temperaturas positivo, el flujo de calor debe ser negativo.



Justificación del signo menos en la Ley de Fourier

Figura 3

Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es muy grande, el calor transferido en la unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde

el cuerpo por conducción, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo (Ec.3).

$$\frac{dQ}{dt} = \Omega S (T - T_a) \quad (3)$$

donde:

- ♦ Ω : es el coeficiente de intercambio de calor
- ♦ S : es el área del cuerpo.
- ♦ T_a : temperatura del medio ambiente
- ♦ T : temperatura del cuerpo.

Si la temperatura T del cuerpo es mayor que la temperatura del medio ambiente T_a , el cuerpo pierde una cantidad de calor dQ en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + dt$, disminuyendo su temperatura T en dT (Ec.4).

$$dQ = mcdT \quad (4)$$

donde $m = \rho V$ es la masa del cuerpo (ρ es la densidad y V es el volumen), y c el calor específico.

La ecuación que nos da la variación de la temperatura T del cuerpo en función del tiempo sustituyendo la (Ec 4) en la (Ec 3) puesto que ambas son ecuaciones diferenciales en una sola variable podemos obtener:

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = -\Omega S (T - T_a) \quad (5)$$

o bien, al simplificar:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\Omega S}{\rho V_c}(T - T_a) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (6)$$

donde: $\frac{\Omega S}{\rho V_c} = k$

Integrando esta ecuación (6) con la condición inicial de que en el instante $t=0$, la temperatura del cuerpo es T_0 (Ec.7)

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_a} = -k \int_0^T dt \quad (7)$$

Obtenemos la relación lineal siguiente

$$\ln(T - T_a) \Big|_{T_0}^T = -kt \Big|_0^T$$

donde:

$$\ln(T - T_a) = -kt + \ln(T_0 - T_a) \quad (8)$$

Despejando T que es la incognita a considerar obtenemos entonces:

$$\ln(T - T_a) = -kt + \ln(T_0 - T_a) \Rightarrow -kt = \ln(T_0 - T_a) - \ln(T - T_a)$$

$$\Rightarrow -kt = \ln \frac{(T_0 - T_a)}{(T - T_a)} \Rightarrow e^{-kt} = \frac{T_0 - T_a}{T - T_a} \Rightarrow T - T_a = \frac{T_0 - T_a}{e^{-kt}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{T_o - T_a}{e^{-kT}} + T_a \Rightarrow T = (T_o - T_a)e^{kT} + T_a \quad (9)$$

1.3.2.2. Coeficiente de Conductividad Térmica (K)

K es una constante llamada Conductividad Térmica de la sustancia, dependiendo del material. En otras palabras, el flujo de calor entre estas dos superficies es proporcional a la diferencia de temperatura existente entre ellas. (ver **Figura 4**).

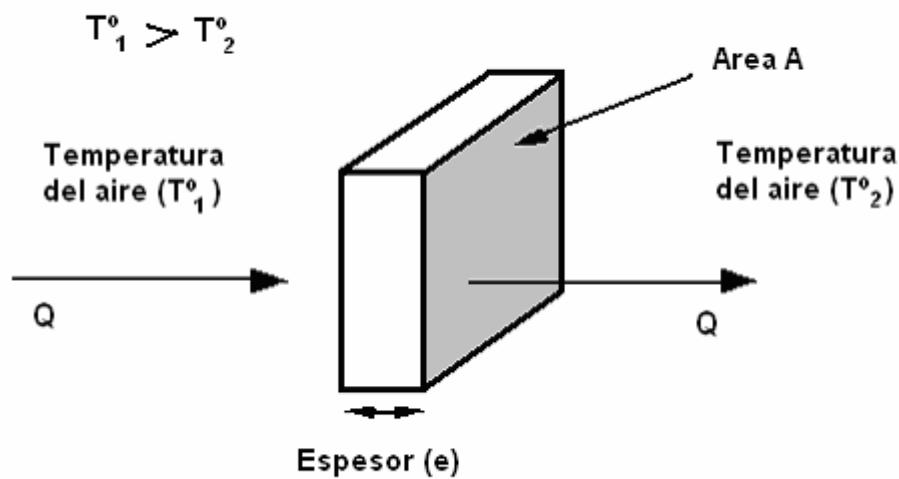


Figura 4

Este resultado no puede ser visto como una prueba de los experimentos. Estos sugieren la ley más que verificarla. La verificación más exacta se encuentra en el acuerdo de los experimentos con los cálculos obtenidos por la teoría matemática basada en la suposición de la veracidad de la ley. El recíproco de la conductividad térmica de una sustancia es llamada su Resistividad Térmica.

Estrictamente hablando, la conductividad K no es constante para la misma sustancia, ya que depende de la temperatura. Sin embargo, cuando el rango de

temperatura es limitado, este cambio en K es despreciable, y en teoría matemática ordinaria se supone que la conductividad no varía con temperatura.

Una cercana aproximación al estado real puede obtenerse haciendo a K una función lineal de la temperatura ν .

$$K = K_0(1 + \beta\nu) \quad (10)$$

donde β es pequeño, y de hecho, es negativo para la mayoría de las sustancias.

De la (Ec. 10), la conductividad térmica esta dada por:

$$K = \frac{Qd}{(\nu_0 - \nu_1)St'} \quad (11)$$

De las variables y dimensiones de esta ecuación vienen las unidades de K . El sistema de unidades usado más frecuente en Física usa cgs. para unidades de longitud, masa y tiempo, mide la temperatura $^{\circ}\text{C}$, y toma como unidad de la cantidad de calor a la caloría, la cual es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 gr de agua en 1°C .

En este sistema los valores de K son expresados en $\text{Cal}/(\text{seg})(\text{cm}^2)(^{\circ}\text{C}/\text{cm})$. El otro sistema importante de unidades, el cual es el más utilizados por ingenieros y usados en trabajos de transferencia de calor toman el pie, libra, hora y $^{\circ}\text{F}$ como unidades y definen la unidad de cantidad de calor como Btu, la cual es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 lb de agua a su máxima densidad (39°F) por 1°F .

La conexión entre las dos unidades es:

$$1\text{Btu} = 252.0\text{cal}$$

En este sistema, los valores numéricos de la conductividad están dadas en $Btu/(hr)(ft^2)(^{\circ}F/ft)$: para expresar esto en términos de $Cal/(seg)(cm^2)(^{\circ}C/cm)$ se debe multiplicar por 0.00413.

Las dimensiones de K en estos sistemas en los cuales la unidad de calor es la que causa una unidad de elevación en temperatura en una unidad de masa de agua se puede ver de la (Ec. 11):

$$[K] = [M] [L^{-1}] [T^{-1}] \quad (12)$$

ya que la unidades de $\frac{Q}{(\nu_0 - \nu_1)}$ conducen a la unidad de masa (M)

Si desea medir la cantidad de calor por el trabajo necesario para producirla, la unidad seria el ergio o el joule. El número de Joules en una caloría, J , es conocido como el equivalente mecánico de calor. Para la caloría de 15° definida arriba $J = 4.184$.

En el experimento fundamental del cual es derivada la definición de conductividad, el sólido es supuesto ser homogéneo y de un material tal que cuando un punto dentro de el es calentado, el calor se distribuye igualmente en todas las direcciones. Tal sólido se dice que es Isotrópico, opuesto a los sólidos cristalinos y anisotrópicos, en los cuales ciertas direcciones son más favorables para la conducción de calor que otras.

Hay también sólidos heterogéneos en las cuales las condiciones de conducción varían de un punto a otro así como también en dirección en cada punto.

Tabla 1
Valores de K a diferentes T

Material	Temperatura (°C)	K $\left(\frac{cal}{seg - cm^2 - k/cm} \right)$
Aluminio sólido	100	0,492
	300	0,640
	600	1,01
Aluminio líquido	700	0,247
	790	0,290
Cobre sólido	18	0,918
	100	0,908
Acero	18	0,112
	100	0,107

Tabla 2
Conductividad Térmica de diferentes materiales a 300 K

Material	Watio / m°K (Watio/metro x Kelvin)
Plata	427
Cobre	400
Aluminio	236
Hierro	80
Madera	0,15
Agua	0,60
Aire	0,025

1.3.2.3. Métodos Experimentales para la Determinación de la Conductividad Térmica

Un gran número de métodos han sido usados para medir conductividad térmica, algunos de estos pueden ahora considerarse como obsoletos, pero su teoría permanece de interés ya que ellos son basados en soluciones de las ecuaciones de conducción de calor para sistemas simples las cuales ocurren a menudo en la práctica.

Primeramente, debería recordarse que las propiedades térmicas de cualquier material ocurren en varias combinaciones que pueden observarse como características de ello, y medida por, diferentes situaciones experimentales.

Estas propiedades son:

- (a) La conductividad K , la cual es medida por experimentos de estado continuo
- (b) La capacidad de calor por unidad de volumen ρc_p la cual es medida por calorimetría
- (c) La cantidad $(K\rho c_p)^{\frac{1}{2}}$ la cual es medida por simple método de experimento periódicos continuos
- (d) La difusividad α cual es medida por experimentos de estado variable

De hecho, más experimentos de estado variable, en principio, permitió determinar K y k .

Damos aquí a una breve clasificación de los métodos más comunes con referencias en las cuales ellos están discutidos. Ellos se dividen esencialmente en los métodos:

- ◆ Estado continuo.
- ◆ Calentamiento periódico
- ◆ Estado variable.

1.3.2.4. Ley de enfriamiento de Newton / Convección

Cuando la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el entorno es pequeña se cumple la llamada “Ley de enfriamiento de Newton” cuyo enunciado es:

“La derivada de la temperatura de un cuerpo respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de temperaturas correspondientes al cuerpo y al entorno que lo rodea.”
(Ec.13)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \quad (13)$$

donde:

- ◆ k : constante de proporcionalidad
- ◆ T : temperatura instantánea del cuerpo
- ◆ T_0 : temperatura del entorno
- ◆ T_i : temperatura inicial del cuerpo
- ◆ $\frac{dT}{dt}$: rapidez del enfriamiento o gradiente de enfriamiento.

Resolviendo la ecuación diferencial (13) para hallar T tenemos lo siguiente:

$$\int_{T_o}^T \frac{dT}{T - T_o} = -k \int_0^T dt$$

Obtenemos la relación lineal siguiente

$$\ln(T - T_o) \Big|_{T_o}^T = -kt \Big|_0^T$$

donde al realizar el despeje de T obtenemos:

$$\ln(T - T_o) = -kt + \ln(T_o - T_o) \Rightarrow -kt = \ln(T - T_o) - \ln(T_o - T_o)$$

$$\ln \frac{T - T_o}{T_o - T_o} = -kt \Rightarrow \frac{T - T_o}{T_o - T_o} = e^{-kt} \Rightarrow T - T_o = \frac{(T_o - T_o)}{e^{-kt}} \Rightarrow$$

$$T = T_o + (T_o - T_o)e^{-kt} \quad (14)$$

1.3.2.5. Ley de Stefan – Boltzmann / Radiación

Cualquier cuerpo emite calor por radiación. La potencia radiada por unidad de superficie viene dada por la Ley de Stefan-Boltzmann, con la cuarta potencia de la Temperatura absoluta del cuerpo. Un cuerpo negro es un sistema que no refleja ninguna radiación ambiente. Por lo tanto, toda la energía que desprende un cuerpo negro es debida a la radiación del propio cuerpo.

La Ley de Stefan - Boltzmann para la radiación del cuerpo negro es:

$$W = e \sigma A T^4 \quad (15)$$

donde:

- ♦ W : potencia total radiada $\left(\text{Watio} / \text{m}^2 \right)$
- ♦ e : es la emisividad del cuerpo, siempre será $0 \leq e \leq 1$, esta propiedad proporciona una medida de la eficiencia con que una superficie emite energía en relación con un cuerpo negro. Esto depende del material de la superficie y de su acabado. Cuando $e=1$, estamos en el caso del cuerpo negro:
- ♦ σ : es la constante de Stefan-Boltzmann.

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \left(\text{Watio} / \text{m}^2 \text{K}^4 \right) \quad \left(\text{Watio} / \text{metro}^2 \text{ Kelvin}^4 \right)$$
- ♦ T : es la temperatura del cuerpo en Kelvin (°K)
- ♦ A : es el área del cuerpo (m^2)

Un cuerpo negro es un sistema ideal capaz de absorber toda la radiación que incide sobre él, y como no refleja la luz se ve negro.

Un cuerpo negro perfecto no existe en la realidad, sino que es un ente ideal que se utiliza como referencia respecto a otros radiadores. No obstante, existen numerosas superficies que son cuerpos negros casi perfectos, sobre todo para radiaciones de onda larga, por lo que para casos prácticos son considerados éstas superficies con suficiente exactitud.

La radiación del cuerpo negro representa el valor máximo de radiación que una sustancia real puede emitir a una temperatura dada.

Para generar un cuerpo negro basta con construir un cuerpo hueco, con un pequeño orificio que lo comunique con el exterior; en estas circunstancias, la radiación incidente en el orificio que penetra en el cuerpo y tras múltiples reflexiones termina por ser totalmente absorbida (la probabilidad de que vuelva a salir es muy

baja). El hueco se convierte en una cavidad resonante de ondas electromagnéticas, en la cual se forman ondas estacionarias según sus dimensiones.

1.3.3. Conducción

Al considerar los cambios de temperatura en una formación en el subsuelo (estrato, arena, etc) es indispensable introducir los conceptos de los mecanismos que rigen la transferencia de calor, con la finalidad de establecer un patrón de referencia que obedece dichos cambios.

Se puede definir uno de estos mecanismos comenzando por la conducción, que es la transferencia de calor de una parte de un cuerpo a alta temperatura, a otra parte del mismo, a menor temperatura, o de un cuerpo a alta temperatura a otro cuerpo a menor temperatura, en contacto físico con él. Si las temperaturas de los cuerpos no cambian con el tiempo, (o sea, el proceso ocurre bajo condiciones de flujo continuo), la ley física que describe el calor por conducción se conoce como la primera Ley de Fourier, propuesta en 1822, y viene dada por:

$$\frac{Q_c}{A} = -K_H \frac{\partial T}{\partial r} \quad (16)$$

donde:

- ◆ Q_c = Tasa de flujo de calor por conducción en (BTU/h)
- ◆ A = Área a través de la cual ocurre el flujo en (pie^2)
- ◆ $\frac{\partial T}{\partial r}$ = Gradiente de temperatura en ($^{\circ}\text{F}/\text{pie}$)
- ◆ K_H = Conductividad térmica del material en $\left(\frac{\text{BTU}}{h - \text{pie} - F} \right)$.
- ◆ r = Radio de la base (pies)
- ◆ T = temperatura ($^{\circ}\text{F}$)

donde:

$$(1 \frac{BTU}{h - pie - F} = 4,136 \times 10^{-3} \frac{cal}{seg - cm - K})$$

El signo negativo indica que la transferencia de calor es en la dirección de menor temperatura.

La ecuación (16) aplica para la conducción en sólidos, líquidos y gases, aunque como es de esperarse, el valor de K_H es mayor para sólidos que para líquidos y gases. Esta ecuación se puede integrar considerando diferentes tipos de cuerpos. Así, si la aplicamos a un cuerpo de área A , espesor Δr , con flujo lineal de calor y diferencia de temperatura igual a ΔT , se obtiene:

$$Q_c = \frac{K_H A \Delta T}{\Delta r} \quad (17)$$

Si se aplica a un tubo cilíndrico, de longitud L , con radios r_{ti} (interno) y r_{to} (externo) respectivamente, de la integración de la ecuación (16) se obtiene (flujo radial) ecuación (18).

$$\partial T = -\frac{Q_c}{2\pi L K_H} \frac{\partial r}{r} \Rightarrow \int \partial T = -\frac{Q_c}{2\pi L K_H} \int_{r_{ti}}^{r_{to}} \frac{\partial r}{r} \Rightarrow \Delta T = \frac{Q_c}{2\pi L K_H} L \ln \left(\frac{r_{to}}{r_{ti}} \right)$$

despejando finalmente Q_c obtenemos:

$$Q_c = \frac{2\pi K_H L \Delta T}{\ln \frac{r_{to}}{r_{ti}}} \quad (18)$$

1.3.3.1. Conducción de calor en un sólido isotrópico

Consideramos solamente medio isotrópico, en el cual el medio cuya estructura y propiedades en los límites de cualquier punto son las mismas en todas las direcciones a través del mismo, debido a que la conducción de calor para diferentes sólidos ya sean metálicos o no metálicos poseen un comportamiento no constante, por ejemplo: la conductibilidad térmica del cuarzo puede ser hasta cuatro veces la de la plata, y a su vez esta podría variar proporcionalmente con la temperatura absoluta del sólido, se establece una simetría, y el vector flujo en un punto debe estar en la normal a la superficie isoterma a través del punto y en la dirección de la temperatura descendiendo.

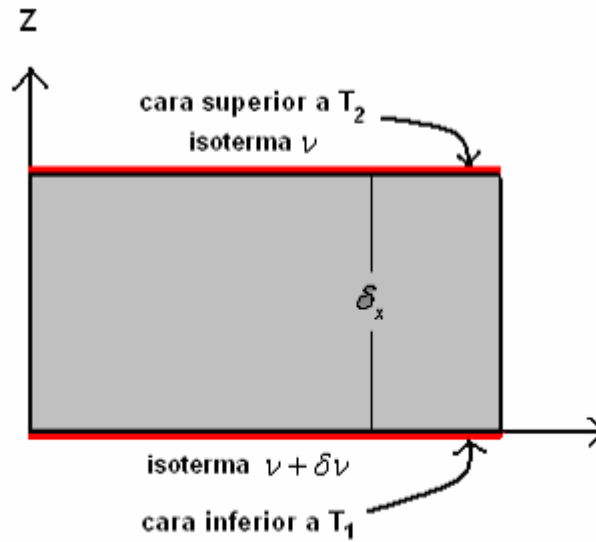
La relación entre la tasa de cambio de temperatura a lo largo de la normal a una isoterma y el vector flujo en tal dirección puede deducirse del experimento descrito en la Ecuación de Conductividad de Calor (Ec.1).

$$\frac{K(\nu_0 - \nu_1)St}{d} \quad (1)$$

donde:

- ♦ K es la conductividad térmica de la sustancia (Watio/m°K)
- ♦ ν_0 : es la temperatura de la superficie inferior (°K)
- ♦ ν_1 : es la temperatura de la superficie superior (°K)
- ♦ S : es la superficie o area del cuerpo (m²)
- ♦ t: es el tiempo (seg)
- ♦ d: espesor del cuerpo (m)

En tal caso las isothermas son planos paralelos a las caras de los planos superiores e inferiores del sólido. Supongamos que las isothermas de temperaturas ν y $\nu + \delta\nu$ están separadas por δ_x . (ver Figura 5)



Sólido con isothermas paralelas a la cara de los planos superior e inferior

Figura 5

Luego por la ecuación (16) la tasa de flujo de calor, por unidad de área por unidad de tiempo, en la dirección de x aumentando es:

$$-K \frac{\delta\nu}{\partial x} \quad (19)$$

Si tomamos el límite para $\delta_x \rightarrow 0$ obtenemos el vector:

$$f_x = -K \frac{\partial v}{\partial x} \quad (20)$$

Extendemos esto a cualquier superficie isoterma y tomamos como nuestra la hipótesis fundamental para la teoría matemática de conducción de calor que la tasa a la cual el calor cruza de adentro hacia afuera de una superficie isoterma por unidad de área por unidad de tiempo en un punto es igual a:

$$-K \frac{\partial v}{\partial n} \quad (21)$$

Donde K es la conductividad térmica de la sustancia, y $\partial/\partial n$ denota diferenciación a lo largo de una normal hacia fuera de la superficie. Procediendo ahora para encontrar el flujo en un punto P a través de cualquier superficie, no necesariamente isoterma. Dejemos el plano tangente en P a la isoterma a través de P tomarlo como el plano XY de tal forma que los vectores flujos a través de los planos de P paralelos a los planos coordenados son:

$$f_x = f_y = 0, f_z = -K \frac{\partial v}{\partial z} \quad (22)$$

Luego si la normal en P a la superficie dada tiene cosenos de dirección (λ, μ, ν) relativo a estos ejes (XY) , el flujo a través de esta dada, por:

$$-K \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -K \frac{\partial v}{\partial h} \quad (23)$$

Donde $\partial/\partial h$ denota diferenciación en la dirección (λ, μ, ν) ya que:

$$\frac{\partial v}{\partial h} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial z}, y \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

Así el flujo de calor en un punto a través de cualquier superficie es:

$$-K \frac{\partial v}{\partial h} \quad (25)$$

Donde $\partial/\partial h$ denota diferenciación en la dirección de la normal hacia afuera. En particular, los flujos a través de los tres (3) planos paralelos a los ejes de coordenadas son:

$$f_x = -K \frac{\partial v}{\partial x} \quad f_y = -K \frac{\partial v}{\partial y} \quad f_z = -K \frac{\partial v}{\partial z} \quad (26)$$

Usando el vector f introducido por un flujo de calor a través de una superficie, muestra los resultados de esta sección que pueden ser expresados por la fórmula del vector flujo y el vector gradiente:

$$f = -K \text{grad } v \quad (27)$$

1.3.3.2. La ecuación diferencial de conducción de calor en un sólido isotrópico

Primero consideremos el caso de un sólido a través del cual esta fluyendo calor, pero dentro de él no se genera calor. La temperatura v en el punto $P(x, y, z)$ será una función continua de $(x, y, z \text{ y } t)$, y puede ser observada también en el flujo de calor a través de una superficie.

Considerando un elemento de volumen del sólido en el punto P , el sólido es un paralelepípedo rectangular con este punto en el centro, sus aristas son paralelas a los ejes de coordenadas y de longitudes $2dx, 2dy$ y $2dz$. $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son las caras en los planos $x - dx$ y $x + dx$, respectivamente (ver Figura 6)

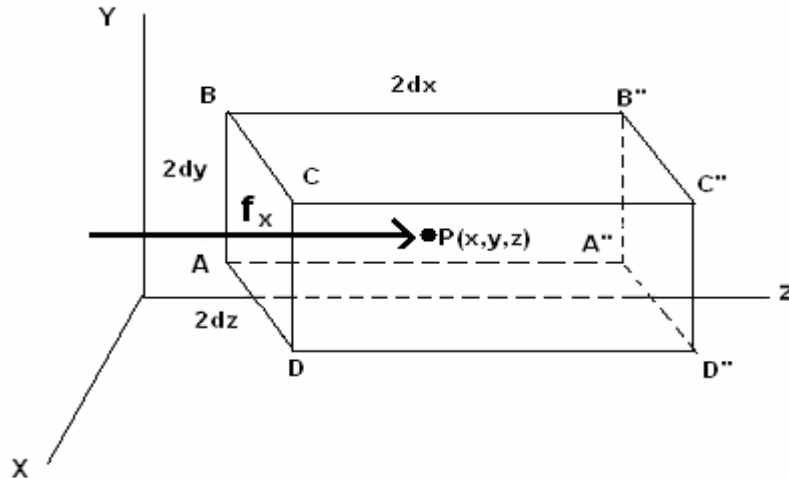


Figura 6

luego la tasa a la cual fluye calor al paralelepípedo sobre la cara ABCD estará dado por:

$$4 \left(f_x - \frac{\partial f_x}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (28)$$

donde f_x es el flujo en P sobre un plano paralelo. Similarmente, la tasa a la cual el flujo de calor sale por la cara $A'B'C'D'$ esta dada por:

$$4\left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} dx\right) dydz \quad (29)$$

Luego la tasa de ganancia de calor por el flujo a través de estas dos caras es igual a:

$$\begin{aligned} & 4\left(f_x - \frac{\partial f_x}{\partial x} dx\right) dydz - 4\left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x} dx\right) dydz \\ & 4f_x dydz - 4\frac{\partial f_x}{\partial x} dx dydz - 4f_x dydz - 4\frac{\partial f_x}{\partial x} dx dydz \\ & - 8dx dydz \frac{\partial f_x}{\partial x} \quad (30) \end{aligned}$$

Hay expresiones similares para la tasa de ganancia por el flujo a través de los otros pares de caras, y sumando estos, la tasa total de ganancia de calor del paralelepípedo por el flujo a través de sus caras se encuentra que es:

$$-8\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) dx dy dz = -8dx dy dz \operatorname{div} f \quad (31)$$

donde f es el vector definido en flujo de calor a través de una superficie de planos paralelos, esta tasa de ganancia de calor es también dada por:

$$8\rho c \frac{\partial \nu}{\partial t} dx dy dz \quad (32)$$

Donde ρ es la densidad y c el calor específico (a la temperatura ν) del sólido. Igualando (Ec. 31) y (Ec. 32) encontramos entonces:

$$\cancel{8\rho c \frac{\partial \nu}{\partial t} dx dy dz} = -\cancel{8} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) \cancel{dx dy dz}$$

entonces al igualar a cero (0) tenemos:

$$\rho c \frac{\partial \nu}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (33)$$

Esta ecuación se cumple en cualquier punto de sólido, siempre que no se genere calor en el punto; el sólido no necesita ser homogéneo o isotrópico. La ecuación (33) corresponde a la Ecuación de Continuidad en Hidrodinámica.

Para un sólido isotrópico homogéneo cuya conductividad térmica es independiente de la temperatura, en f_x, f_y, f_z están dados por la ecuación (Ec. 26), la (Ec. 33) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \nu}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

La variable $\kappa = \frac{K}{\rho c}$ fue llamada por Kelvin la difusividad de la sustancia, y por Maxwell su conductividad térmica, donde K es una constante y la ecuación (Ec. 34) es la ecuación conocida comúnmente como la Ecuación de Conducción de Calor. En el caso de temperatura constante en que v no varía en el tiempo, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ y la ecuación se transforma en la Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (35)$$

Si el sólido produce calor, de tal forma que en el punto $P(x, y, z)$ el calor es suministrado a la tasa $A(x, y, z, t)$ por unidad de tiempo por unidad de volumen, un término $8A dx dy dz$ debe ser añadido a (Ec. 28), y, para el caso de K constante, (Ec. 34) es remplazada por:

$$\nabla^2 v - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A(x, y, z, t)}{K} \quad (36)$$

Para el caso de flujo continuo, en el cual $\frac{dv}{dt} = 0$, la (Ec. 33) se reduce a la Ecuación de Poisson.

En casi todos los problemas para los cuales es posible una solución exacta, y en aquellos casos que se establezca al menos otra condición, las propiedades térmicas K, ρ, c son constantes independientes de la posición y temperatura.

Si este no es el caso, (Ec. 33) todavía se cumple (con $A(x, y, z, t)$ añadido al lado derecho si hay generación de calor) pero la (Ec. 36) es remplazada por:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A}{K} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\frac{K}{\rho c}} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{A}{K}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{A}{K} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{A}{K} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial v}{\partial t}$$

al multiplicar por K ambos lados y separar las derivadas obtenemos entonces:

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right) + A \quad (37)$$

Si K y A son funciones de la posición solamente, la solución de (Ec. 37) no ofrece gran dificultad en principio y hay disponibles un número de soluciones para propiedades térmicas discontinuas (sólidos compuestos) y para leyes simples de variación de K con posición.

Si las propiedades térmicas dependen de la temperatura, la situación es más complicada ya que la ecuación se hace no lineal. Pocos casos han sido estudiados en conexión con conducción de calor ya que la variación de las propiedades térmicas con temperatura es relativamente lenta y la información acerca de ella es escasa e inexacta.

De todas maneras, ellas se han ido haciendo importante cuando hay altos rangos de temperaturas envueltas, también las mismas ecuaciones surgen en la teoría de difusión, donde, debido a la más rápida variación de los coeficientes de difusión con concentración, estas son de mucho más importancia.

1.3.3.3. La ecuación diferencial de conducción de calor en un medio en movimiento

Consideremos primero un sólido moviéndose con una velocidad cuyas componentes son (u_x, u_y, u_z) . Cuando calculamos la tasa a la cual el calor cruza cualquier plano, un término convectivo de componentes $(\rho c v u_x, \rho c v u_y, \rho c v u_z)$ debe añadirse a la parte debida a conducción. Así los componentes del vector flujo de calor son ahora:

$$f_x = -K \frac{\partial v}{\partial x} + \rho c v u_x, \quad f_y = -K \frac{\partial v}{\partial y} + \rho c v u_y, \quad f_z = -K \frac{\partial v}{\partial z} + \rho c v u_z \quad (38)$$

usando entonces estos vectores en la (Ec. 33) se obtiene:

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial \left(-K \frac{\partial v}{\partial x} + \rho c v u_x \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(-K \frac{\partial v}{\partial y} + \rho c v u_y \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(-K \frac{\partial v}{\partial z} + \rho c v u_z \right)}{\partial z} \right) = 0$$

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} + \left(-K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho c \frac{\partial v}{\partial x} u_x - K \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \rho c \frac{\partial v}{\partial y} u_y - K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho c \frac{\partial v}{\partial z} u_z \right) = 0$$

donde :

$$\nabla^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (35) \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{K}{\rho c} \Rightarrow K = \kappa \rho c$$

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} - \kappa \rho c \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho c \left(\frac{\partial v}{\partial x} u_x + \frac{\partial v}{\partial y} u_y + \frac{\partial v}{\partial z} u_z \right) = 0$$

al sustituir finalmente la Ec.(35) y simplificar la ecuación obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_x \frac{\partial v}{\partial x} + u_y \frac{\partial v}{\partial y} + u_z \frac{\partial v}{\partial z} - \kappa \nabla^2 v = 0 \quad (39)$$

y para el caso en el cual K es constante y no hay generación de calor, la ecuación puede escribirse entonces como:

$$\frac{Dv}{Dt} - \kappa \nabla^2 v = 0 \quad (40)$$

Donde D/Dt denota la “diferenciación siguiendo el movimiento” de hidrodinámica, y $\kappa = \frac{K}{\rho c}$ representando la conductividad térmica.

Si se produce calor en el sólido a la tasa A por unidad de tiempo y por unidad de volumen, un término $A/\rho c$ debe añadirse al lado derecho de la (Ec. 40).

Debe resaltarse que la (Ec. 39) sigue, como debiera ser, por transformación de un sistema de coordenadas moviéndose con velocidad u_x, u_y, u_z , con referencia al cual la ecuación ordinaria de conducción de calor (Ec. 34) es válida.

Claramente, las cantidades hidrodinámicas y termodinámicas involucradas deben ahora ser especificadas precisamente, y para las segundas (termodinámicas) usamos la densidad ρ , temperatura absoluta T y la energía interna por unidad de masa U .

Usaremos la notación subíndice x_i , $i = 1, 2, 3$ para las coordenadas, y el subíndice repetido la cual implica sumatoria de los valores 1 a 3, por ejemplo $l_i \xi_i$, en la (Ec. 41) significa $l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3$. Necesitamos el Teorema de Green, el cual establece que si $\xi_i, i=1,2,3$ y sus primeras derivadas son funciones continuas de x_i dentro de una superficie cerrada S , se obtendrá:

$$\iint l_i \xi_i ds = \iiint \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} d\tau \quad (41)$$

Donde $l_i, i=1,2,3$ son las direcciones cosenos de la normal saliendo de S , y la integral superficial es tomada sobre la superficie S , y la integral del volumen sobre su interior.

Dejemos que ahora S sea tan pequeña en la superficie cerrada en el fluido, el cual siempre estaría rodeado por las mismas partículas del fluido.

Escribamos ds para un elemento de esta superficie y $d\tau$ para un elemento de volumen contenido en el elemento. El hecho de que la masa $\rho d\tau$ en cualquier elemento de volumen $d\tau$ de S es conservada implica que:

$$\frac{D(\rho d\tau)}{Dt} = 0 \quad (42)$$

Donde D/Dt implica diferenciación siguiendo el movimiento de fluido y la (Ec. 42) conduce a la ecuación de continuidad.

Si x_i es la fuerza por unidad de masa, E_{ij} , es el tensor de esfuerzo y u_i son las componentes de la velocidad, la ecuación de movimiento en el elemento es:

$$\frac{D}{Dt} \iiint \rho u_i d\tau = \iiint \rho x_i d\tau + \iint E_{ij} l_j dS \quad i = 1, 2, 3, \quad (43)$$

donde las integrales de volumen y superficie están tomadas sobre S y su interior, usando la (Ec. 41) y las (Ec. 42), (Ec. 43) que puede escribirse como:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho x_i + \frac{\partial}{\partial x_j} E_{ij} \quad (44)$$

También aplicando la primera ley de termodinámica al elemento se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \iiint \frac{1}{2} \rho u_i u_i d\tau + \frac{D}{Dt} \iiint \rho u d\tau = \iiint \rho x_i u_i d\tau + \iint E_{ij} u_i l_j dS - \iint f_i l_i dS \quad (45)$$

Donde en la (Ec. 45) f_i son las componentes del vector flujo-calor en S , es:

$$f_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3, \quad (46)$$

Usando las (Ec. 41), (Ec. 42) y la (Ec. 44) en la (Ec. 45) se obtiene:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = E_{ij} e_{ij} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (47)$$

Donde e_{ij} son los componentes de la tasa del tensor.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (48)$$

Las ecuaciones de viscosidad implican conexiones entre E_{ij} y e_{ij} ,

$$E_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk} \right) \quad (49)$$

donde p es la presión hidrostática, μ es la viscosidad o coeficiente de viscosidad, y δ_{ij} es el delta Kronecker el cual es cero a menos que $i = j$, en cuyo caso es la unidad. Usando la (Ec. 49) y la (Ec. 46) en la (Ec. 47), finalmente tenemos:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -pe_{ij} + 2\mu \left(e_{ij}e_{ij} - \left(\frac{1}{3} \right) e_{ii}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (50)$$

Esta es de la misma forma que la (Ec.40). Los primeros dos términos del lado derecho corresponden a la generación de calor por procesos de compresión y fricción en el fluido; el otro término del lado derecho es simplemente el usual $divf$; y en el lado izquierdo $\rho DU/Dt$ que reemplaza al definido $\rho c Dv/Dt$ de la (Ec.40).

Más transformaciones de la (Ec.50) basadas en termodinámica se pueden hacer, y en particular, la misma puede expresarse en términos de la entropía.

1.3.3.4. La transformación de coordenadas

Estas ecuaciones pueden ser fácilmente transformadas a otros sistemas de coordenadas ortogonales, el más usado es el sistema Polar Esférico, en el cual la posición de un punto es determinado por su distancia r al origen, su latitud Θ y su azimut ψ , y el sistema Cilíndrico, en el cual su posición es determinada por las coordenadas polares r, Θ y su proyección en el plano x, y , y la coordenada z (ver Figura 7).

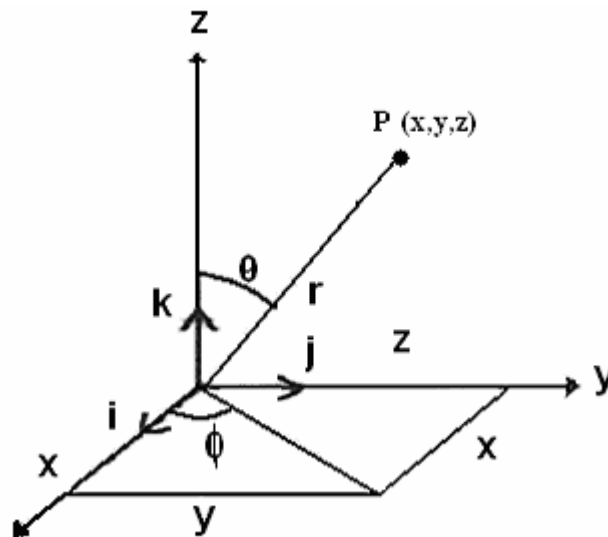
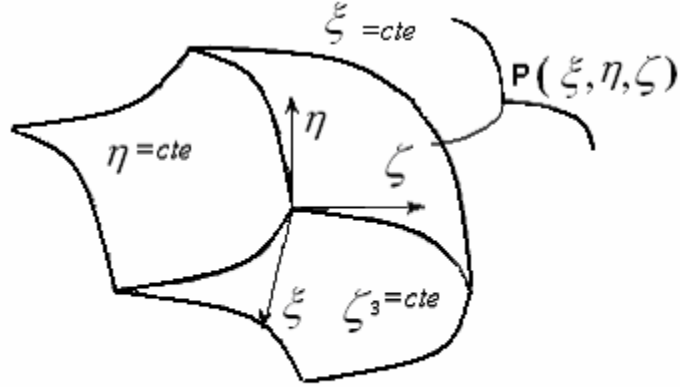


Figura 7

Estos son casos especiales del sistema general de coordenadas ortogonales, en el cual la posición de un punto está dado por la intersección de las 3 superficies ortogonales. (ver Figura 8)

$$\xi = \text{constante}, \quad \eta = \text{constante}, \quad \zeta = \text{constante}$$



Volumen limitado por tres superficies ortogonales

Figura 8

Procedamos a mostrar como esta transformación puede efectuarse fácilmente.
Considerar el elemento de volumen limitado por las superficies

$$\xi \pm d\xi, \eta \pm d\eta, \zeta \pm d\zeta ,$$

de las caras $\xi \pm d\xi$

también la Ec.(51) es la ecuación de la longitud del arco elemental que une al punto (ξ, η, ζ) y $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$.

$$ds^2 = \lambda^2 d\xi^2 + \mu^2 d\eta^2 + \nu^2 d\zeta^2 \quad (51)$$

Luego el área de la sección de la superficie que pasa por $P(\xi, \eta, \zeta)$ cortada por la superficie $\eta \pm d\eta, \zeta \pm d\zeta$ esta dada por:

$$4\mu\nu d\eta d\zeta \quad (52)$$

Y la tasa a la cual el flujo de calor atraviesa esta sección es:

$$4\mu\nu d\eta(d\zeta)f_{\zeta} \quad (53)$$

f_{ζ} es la tasa de flujo de calor en el punto a través de la superficie ξ .

Por consiguiente, la tasa a la cual fluye el calor hacia el elemento y es resaltado en la Ec (54)

$$4\left\{\mu\nu f_{\xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\mu\nu f_{\xi})d\xi\right\}d\eta d\zeta \quad (54)$$

y la tasa a la cual fluye calor fuera o hacia fuera de el elemento por la Ec.(55)

$$4\left\{\mu\nu f_{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\mu\nu f_{\xi})d\xi\right\}d\eta d\zeta \quad (55)$$

Por consiguiente la ganancia o tasa de ganancia de calor de estas dos caras es:

$$-8\frac{\partial}{\partial \xi}(\mu\nu f_{\xi})d\xi d\eta d\zeta \quad (56)$$

Las otras caras dan respectivamente

$$-8 \frac{\partial}{\partial \eta} (v \lambda f_\eta) d\xi d\eta d\zeta - 8 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\lambda \mu f_\zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (57)$$

Insertando los valores de f_ξ, f_η, f_ζ

$$f_\xi = -\frac{K}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad f_\eta = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad f_\zeta = -\frac{K}{v} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (58)$$

sustituyendo la (Ec.58) en la (Ec.56) y (Ec.57) e igualando, queda:

$$8 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu v}{\lambda} K \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta d\zeta = 8 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v \lambda}{\mu} K \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta d\zeta = 8 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\lambda \mu}{v} K \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\xi d\eta d\zeta$$

de tal modo que al igualar la expresión :

$$8 \lambda \mu v d\xi d\eta d\zeta c \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (59)$$

tenemos entonces para las tres coordenadas:

$$\lambda \mu v c \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu v}{\lambda} K \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v \lambda}{\mu} K \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\lambda \mu}{v} K \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \quad (60)$$

la cual se reduce a:

$$\lambda\mu\nu\frac{\partial\nu}{\partial t}=\kappa\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu\nu}{\lambda}\frac{\partial\nu}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\nu\lambda}{\mu}\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial\nu}{\partial\zeta}\right)\right] \quad (61)$$

donde κ es constante, y se puede escribir como:

$$\kappa=K/c\rho$$

Coordenadas polares esféricas:

En este sistema

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (62)$$

y
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (63)$$

así la ecuación para ν se transforma en:

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\frac{\kappa}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\nu}{\partial\phi^2}\right] \quad (64)$$

la cual puede escribirse como:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \nu}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \phi^2} \right] \quad (65)$$

donde:

$$\mu = \cos \theta$$

Coordenadas cilíndricas:

En este sistema

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \end{cases} \quad (66)$$

La ecuación en ν se transforma en:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \right] \quad (67)$$

La cual puede escribirse

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right] \quad (68)$$

1.3.4. Radiación

Es el proceso por el cual el calor es transferido por ondas electromagnéticas. La ecuación básica fue descubierta empíricamente por Stefan en 1879 y derivada teóricamente por Boltzmann en 1884, y viene dada por:

$$\frac{Q_r}{A} = \sigma \epsilon \left(T_1^{*4} - T_2^{*4} \right); \quad T_1^* > T_2^* \quad (69)$$

donde:

- ♦ Q_r/A : es la tasa de flujo de calor por radiación en (BTU/h)
- ♦ A : es el área a través de la cual ocurre el flujo de calor en (pie)²
- ♦ σ : es la constante de Stefan-Boltzman

$$\sigma = 0,1713 \left(\frac{BTU}{h - pie^2 - F^4} \right) \text{ o } 1,355 \times 10^{-12} \left(\frac{cal}{seg - cm^2 - K^4} \right)$$

- ♦ T_1^* es la temperatura absoluta del cuerpo a mayor temperatura en (°F)
- ♦ T_2^* la temperatura absoluta del cuerpo a menor temperatura en (°F)
- ♦ ϵ es la emisividad de la superficie.

La emisividad es una medida de la habilidad de una superficie de absorber radiación. Las emisividades son adimensionales e iguales o menores que la unidad, y dependen de la naturaleza de la superficie. **La Tabla 3** presenta las emisividades aproximadas en algunos metales.

Tabla 3
Emisividades aproximadas de algunos metales

METAL	TEMPERATURA (°F)	EMISIVIDAD (ε)
Aluminio oxidado	400 -1.100	0,11 – 0,19
Aluminio no oxidado	400 -1.100	0,04 – 0,08
Hierro, acero oxidado	400 -1.100	0,75 – 0,95
Hierro, acero no oxidado	350 -1.200	0,05 – 0,30
Acero inoxidable	75 – 210	0,07 – 0,30
Acero pulido	430 – 1.600	0,05 – 0,06

La ecuación (69) se escribe de otra forma utilizando el coeficiente de transferencia de calor por radiación h_r ,

$$\frac{Q_r}{A} = h_r (T_1^* - T_2^*) \quad (70)$$

donde h_r está definido por:

$$h_r = \sigma \varepsilon (T_1^{*2} + T_2^{*2}) (T_1^* + T_2^*) \quad (71)$$

y h_r se expresa en $\left(\frac{BTU}{h - pie^2 - F} \right)$. Los demás términos ya fueron definidos.

Se define entonces la radiación térmica como la transferencia de calor de un cuerpo a otro sin contacto directo, en forma de energía radiante, e ilustrado en la **Figura 9**.

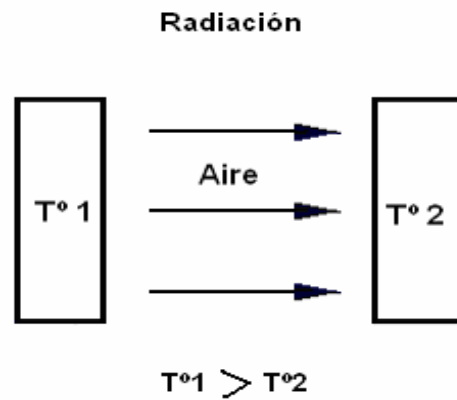


Figura 9

1.3.5. Convección

Es el mecanismo de transferencia de calor que se caracteriza por la presencia de una pared a una temperatura dada y de un fluido en movimiento que incide sobre dicha pared como se muestra a continuación en la **Figura 10**.

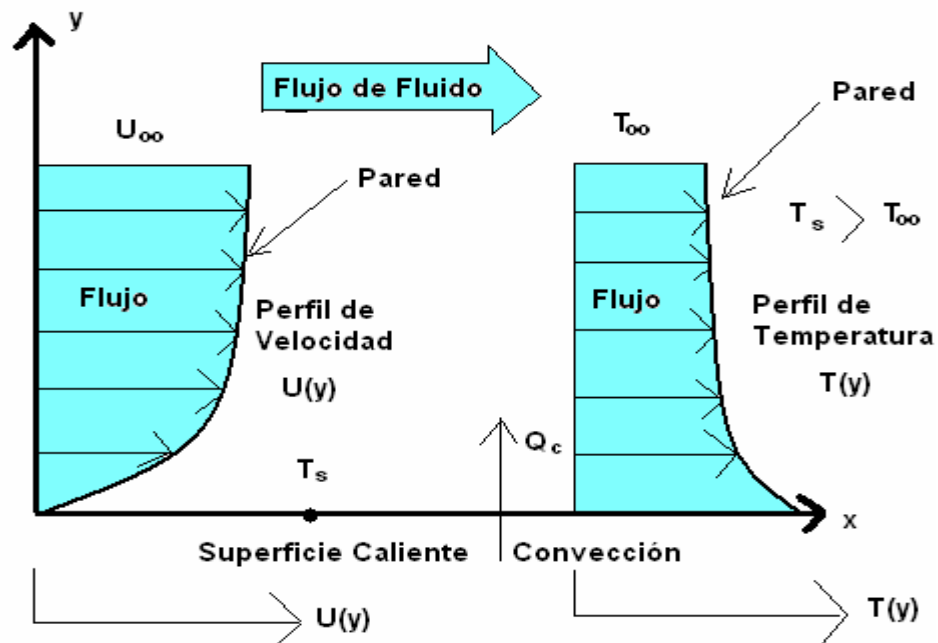


Figura 10

donde:

- ♦ T_{∞} : Denota a la temperatura de la corriente no perturbada
- ♦ U_{∞} : Denota la velocidad de la corriente

Las condiciones de corriente libre se establecen en los valores de U_{∞} y T_{∞} , los cuales no cambian.

La convección ocurre cuando fluidos muy calientes, líquidos o gases, se expanden y ascienden ya que se vuelven menos densos que el material que los rodea. Los movimientos de convección son muy eficientes para transportar material, ya que el material caliente transporta material mas frío dentro del fluido caliente, luego este es calentado y ascendido. Una vez en la superficie vuelve a enfriarse y desciende nuevamente.

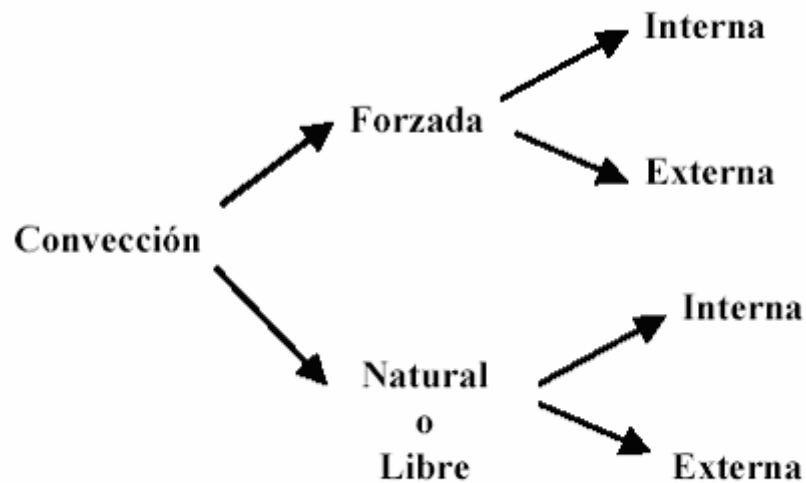
La transferencia de calor por convección se compone de dos mecanismos. Además de la transferencia de energía debido al movimiento molecular aleatorio (difusión), la energía también se transfiere mediante el movimiento global o microscópico del fluido (movimiento browniano). El movimiento del fluido se asocia con el hecho de que, en cualquier instante, grandes números de moléculas se mueven de forma colectiva o como agregados. Tal movimiento en presencia de un gradiente de temperatura, contribuye a la transferencia de calor. Como las moléculas en el agregado mantienen su movimiento aleatorio, la transferencia total de calor se debe entonces a una superposición de transporte de energía por el movimiento aleatorio de las moléculas y por el movimiento global del fluido. Se acostumbra entonces a utilizar el término convección cuando se hace referencia a este transporte acumulado y el término advección cuando se habla de transporte debido al movimiento volumétrico del fluido.

Nuestro interés radica en la transferencia de calor por convección que ocurre entre un fluido en movimiento y una superficie limitante cuando estos tienen

diferentes temperaturas, puesto que el modelo de Hasan y Kabir esta referido al flujo de fluidos por dicho mecanismo de transmisión de calor.

Según la Ley de Newton para que exista transmisión de calor por convección se considera que el calor fluirá a través de un medio cuyas moléculas o partículas presentan movimiento relativo, es decir un medio líquido, gaseoso, o más genéricamente un medio fluido, como por Ejemplo: aire, agua, oxígeno, aceites, etc., todos ellos claro está que a presión y temperatura en que tengan estado gaseoso, líquido o con una viscosidad suficiente para permitir el movimiento relativo de sus partículas.

La transferencia de calor por convección se clasifica de acuerdo con la naturaleza del flujo en:



Clasificación de la Convección

A continuación se presentan los valores típicos del coeficiente de transferencia de calor por convección (h).

Tabla 4
Valores Típicos de h

Proceso	(w/m²°K) vatio/metro²xKelvin
Convección natural	
Gases	2-25
Líquidos	50-1000
Convección Forzada	
Gases	25-250
Líquidos	50-20000
Convección con cambios de fase	
Ebullición o Condensación	2500-100000

Hablamos de convección forzada cuando el flujo es causado por medios externos o medios mecánicos para hacer circular el fluido como un ventilador, una bomba o vientos atmosféricos. En cambio la convección libre (o natural) el flujo es inducido por fuerzas de empuje que surgen a partir de diferencias de densidad ocasionadas por variaciones de temperaturas en el fluido y se justifica por la diferencia de densidad o de peso específico que aparece debido a las diferentes temperaturas. Esto produce que el fluido más frío circule hacia abajo y el más caliente hacia arriba, produciendo una corriente ascendente. En esta consideración participa la fuerza de gravedad.

Sin embargo también se puede justificar a través de las partículas líquidas o gaseosas que tienen movimientos relativos continuos, que aumentan al elevar sus estados térmicos. Este movimiento transporta la energía calórica en forma de energía cinética mientras se desplaza la partícula y va colisionando con las millones que encuentra en su camino, y a su vez éstas hacen lo mismo, verificándose una convección a nivel molecular de flujo muy turbulento. El movimiento de las partículas es conocido como movimiento browniano.

Como último caso tenemos también la llamada convección combinada como resultado de la mezcla de los dos casos anteriores, como por ejemplo si las

velocidades asociadas con el flujo de una convección forzada fuesen pequeñas y las fuerzas de empuje muy grandes, sería posible inducir un flujo secundario comparable al flujo forzado impuesto, donde el flujo inducido sería normal para el flujo forzado y tendría un efecto significativo sobre la transferencia de calor por convección a partir de los componentes.

El adjetivo interno y externo se refiere al confinamiento del flujo. Si la circulación del fluido se realiza a través de un espacio cerrado Ej. tubería, se dice que el flujo es interno, por el contrario si el flujo no se encuentra confinado, se le da el adjetivo de externo. Ej. El flujo de aire impulsado por un ventilador.

Sin importar la naturaleza particular del proceso de transferencia de calor por convección, la ecuación o modelo apropiado fue estudiado por Newton el cual estudió el mecanismo de convección en forma comparativa observando la circulación de fluidos en un sistema de tubos cilíndricos concéntricos donde el fluido circula a contracorriente.

El estudio se realiza por comparación: la transmisión de calor se realiza en regímenes de circulación tanto laminar como turbulento. En estas condiciones, Newton midió cantidad de calor transferido (ΔQ), el gradiente de temperaturas Δt y como consecuencia obtuvo experimentalmente una resistencia al flujo de calor (R) proporcional al gradiente Δt e inversamente proporcional al calor ΔQ .

$$R \approx \frac{\Delta T}{\Delta Q}$$

En la constante de convección para las aplicaciones prácticas se utiliza la constante "h", llamada también coeficiente de película, el cual es de muy difícil determinación, ya que depende de las siguientes variables:

- velocidad de circulación
- densidad de fluido

- calor específico de las sustancias
- diámetro de los tubos
- viscosidad del fluido
- conductividad del material

Para cada sistema de convección existirá una constante "h", de tal forma que la ecuación de Newton se plantea similar a la de Fourier:

$$\left. \frac{dQ}{dT} \right]_A = hA(t - \theta) \quad (72)$$

Esta ecuación representa el flujo de calor que se manifiesta en un sistema a régimen permanente, en donde t es la temperatura de un fluido o un cuerpo en cualquier estado de agregación, y θ es la temperatura del fluido convectivo.

Esta ecuación puede ser vista también de la siguiente manera:

$$q = h(T_s - T_\infty) \quad (73)$$

donde:

- ♦ q = El flujo de calor por convección (BTU/h)
- ♦ T_s = Temperatura de la Superficie (°F)
- ♦ T_∞ = Temperatura del fluido (°F)
- ♦ h = Constante de proporcionalidad o coeficiente de transferencia de calor por convección (Btu/°F-hr- pie²).

2.4. El Flujo de Calor a través de una Superficie

La tasa a la cual el calor es transferido a través de cualquier superficie S en el punto P , por unidad de área por unidad de tiempo, es llamado flujo de calor en ese punto a través de tal superficie, y lo llamaremos f . Valores numéricos de flujo generalmente están dados en $\text{cal}/(\text{cm}^2)(\text{sec})$ o en $\text{Btu}/(\text{ft}^2)(\text{hr})$. La conexión entre las dos unidades es $1\text{cal}/(\text{cm}^2)(\text{sec}) = 13,270 \text{Btu}/(\text{ft}^2)(\text{hr})$.

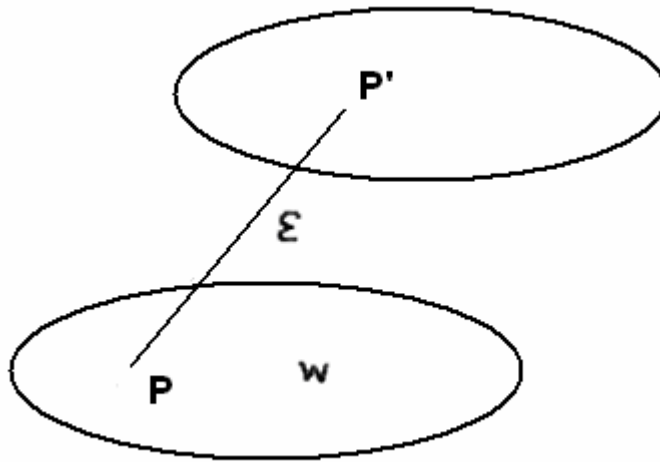


Figura 11

Primero mostraremos que el flujo a través de un plano que pasa por el punto P varía continuamente con la posición del punto P si la dirección de la normal al plano permanece constante. Supongamos un área infinitesimal w que encierra al punto P en el plano, y un cilindro que es formado en esta área como base con generatrices (generadores) iguales y paralelas a PP' cuya longitud ϵ es un infinitesimal de orden más bajo que las dimensiones lineales de w (**Figura 11**)

Dejemos $f_1(w)$ y $f_2(w)$ ser las tasas de flujo por unidad de área por unidad de tiempo a través de los planos superficiales del cilindro que pasa por P y P' .

El flujo a través de la superficie curva es despreciable comparado con éstas. La tasa de flujo de calor dentro del cilindro es:

$$w(f_1 - f_2) \quad (A)$$

También si v es la temperatura promedio en el cilindro y σ la distancia entre sus caras planas, y ρ y c_p la densidad promedio y el calor específico de su material, la tasa a la cual el cilindro gana calor es:

$$\rho c_p w \sigma \frac{\partial v}{\partial t} \quad (B)$$

Igualando A y B

$$f_1 - f_2 = \rho c_p w \sigma \frac{\partial v}{\partial t} \quad (74)$$

Si $\sigma \rightarrow 0$ la expresión en el lado derecho tiende a cero lo mismo que $f_1 \rightarrow f_2$.

Es importante notar que este argumento no requiere que las propiedades térmicas del medio sean continuas, solamente que ellas deben ser finitas.

Esto nos permite asegurar que el flujo es continuo en la superficie de separación de dos medios. Seguidamente mostraremos que, si los valores de f son dados para tres planos perpendiculares mutuamente y que se consiguen en un punto, su valor para cualquier otro plano a través del punto podemos escribirlo sin

problemas. Consideremos el tetraedro elemental PABC, (**Figura 12**), cuyas tres caras PBC, PCA, PAB son paralelas a los ejes de coordenadas, mientras que la perpendicular del punto P a la cara ABC tienen cosenos direccionales (λ, μ, ν) y es de longitud P . Dejemos que el área de ABC sea Δ ; así las áreas de PBC, PCA y PAB son respectivamente $\lambda \Delta$, $\mu \Delta$, $\nu \Delta$.

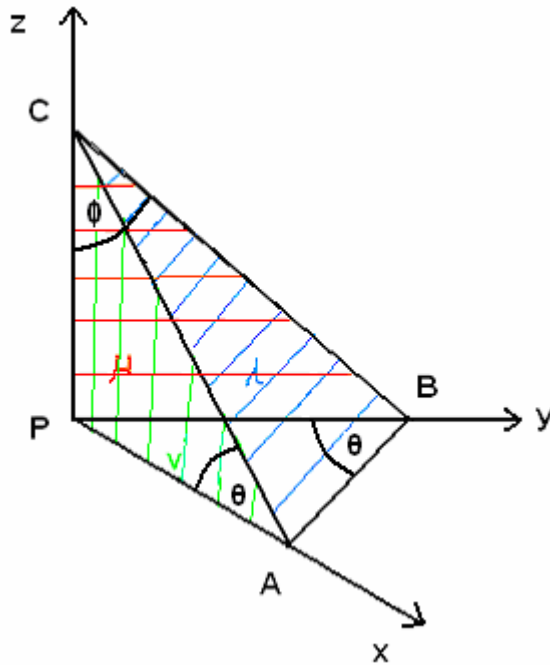


Figura 12

Si llamamos a las tasas de flujo de calor por unidad de tiempo por unidad de área en las áreas elementales PBC, PCA, PAB, y ABC por f_x, f_y, f_z y f , la tasa a la cual el calor es obtenido por el tetraedro esta dado por:

$$(\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z - f)\Delta \quad (C)$$

Sin embargo, si ρ y c_p son la densidad y el calor específico del sólido y v la temperatura promedio sobre el tetraedro, esta tasa de ganancia de calor es igual a:

$$\frac{1}{3} \Delta p \rho c_p \frac{\partial v}{\partial t} \quad (D)$$

De lo cual igualando la ecuación C = ecuación D, simplificamos el parámetro Δ obteniendo así:

$$\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z - f = \frac{1}{3} p \rho c_p \frac{\partial v}{\partial t} \quad (75)$$

Ahora a medida que p tiende a cero, el lado derecho de (Ec. 75) tiende a cero, y f_x, f_y, f_z y f , se convierten respectivamente en los flujos en el punto P a través de los planos paralelos a los planos de coordenadas y a través de un plano que pasa por P y que tiene los cosenos direccionales λ, μ, ν de su normal. Así que tenemos entonces

$$f = \lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z \quad (76)$$

Si los tres flujos f_x, f_y, f_z en el punto P a través de los planos paralelos a los planos coordenadas son conocidos, el flujo a través de cualquier otro plano a través del punto P puede determinarse por la (Ec. 76).

A cada punto P del sólido esta definido un vector f cuyas componentes son f_x, f_y, f_z la magnitud del vector es:

$$f_m = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \quad (77)$$

y el está situado a lo largo de la línea cuyos cosenos direccionales son:

$$\frac{f_x}{f_m}, \frac{f_y}{f_m}, \frac{f_z}{f_m} \quad (78)$$

Este vector puede ser llamado el vector flujo en el punto P . El flujo de calor en P a través de un plano cuya normal tiene la dirección (Ec. 78) es justamente f_m ; mientras el flujo en P a través de un plano cuya normal hace un ángulo θ con esta dirección es $f_m \cos \theta$.

1.5. El Problema de la Transferencia de Calor por Convección

Como la convección no es una ley física sino mas bien una combinación de fenómenos físicos, ésta es representada por una serie de ecuaciones empíricas producto de numerosas investigaciones. Por estas razones, cuando se emplee alguna de estas ecuaciones en particular, debe tenerse el cuidado de aplicarlas bajo condiciones similares y dentro de los límites en las que fueron obtenidas.

El análisis dimensional es una herramienta de gran significado para correlacionar algunas variables del sistema con los resultados obtenidos de los experimentos realizados por los investigadores.

Wilhelm Nusselt, Ingeniero Alemán que realizó notables contribuciones al estudio de la transferencia de calor, le otorga en su honor el nombre de número de Nusselt.

Un número del análisis dimensional de especial interés en este trabajo es el número de Nusselt. Él representa la razón de resistencia térmica entre el fenómeno de la conducción del fluido y la convección del mismo. Una vez obtenida la correlación que vincula los valores experimentales con el de Nusselt, el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección (h_c) es calculado a través de la expresión que define al número de Nusselt.

$$Nu = \frac{D h_c}{k} \quad (79)$$

donde:

- ♦ h_c : coeficiente de transferencia de calor por convección (W/m²K)
(Watio/metro²xKelvin)
- ♦ k : conductividad térmica (W/m x K) (Watio/metro x Kelvin)
- ♦ D : longitud característica (m) (metros)

Existen dos formas de determinar el número de Nusselt, una de ellas es la experimental, la cual da lugar a correlaciones empíricas y la otra mediante el modelaje matemático que implica la resolución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno fluidodinámico y el fenómeno térmico

Al observar que la correlación que vincula el número de Nusselt con los datos experimentales será para convección natural una función como sigue:

$$Nu = f(Gr, Pr) \quad (80)$$

donde:

- ♦ Gr : Número de Grashoff
- ♦ Pr : Número de Prandlt

Para la convección natural sobre la superficie exterior de una tubería horizontal Churchill y Chu desarrollaron una ecuación basada en el análisis dimensional. Esta ecuación relaciona al número de Nusselt con otros dos parámetros adimensionales como son el número de Grashoff y el número de Prandlt. Esto es

$$Nun^{1/2} = 0.6 + 0.387 \left[\frac{(Gr * Pr)}{\left(1 + \left(\frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{16/9}} \right]^{1/6} \quad (81)$$

donde:

- ◆ Nun: Número de Nusselt para convección natural.
- ◆ Gr: Número de Grashoff
- ◆ Pr: Número de Prandlt

El número de Prandlt se define como ν/α . Es una propiedad del fluido y relaciona la capacidad del fluido para difundir cantidad de movimiento frente a su capacidad para difundir calor. El número de Prandlt de los fluidos muy pesados, como el mercurio, es del orden de 10^{-2} . El del agua es del orden de 8 y el de los aceites es del orden de 100.

donde:

- ◆ ν : viscosidad cinemática (Cst) centistoke
- ◆ α : difusividad térmica $[m^2/seg]$, que se define como:

$$\alpha = \frac{K}{\rho \cdot c_p} \quad (82)$$

donde:

- ♦ K: conductividad térmica (J / m x °K) (Joule/ metro x Kelvin)
- ♦ c_p : calor específico. (J / Kg x ° K) (Joule/Kilogramo x Kelvin)
- ♦ ρ : densidad (kg/m³) (Kilogramo/metro³)

La ecuación aplica para cualquier valor de Gr.

1.5.1. Número de Grashoff

El número de Grashoff (Gr) se define como:

$$Gr = \frac{gL^3 \Delta T \beta}{\nu^2} \quad (83)$$

donde:

- ♦ g : aceleración de gravedad (pie/seg²)
- ♦ L : dimensión característica del problema elevada al cubo (pies)
- ♦ ΔT : diferencia de temperatura entre la pared del tubo y el fluido (°F)
- ♦ β : coeficiente de dilatación térmica (1/°F)
- ♦ ν : viscosidad cinemática del fluido. (cp)

El número de Grashoff tiene un significado físico muy importante en cuanto al índice de la fuerza de flotabilidad, representado por el término $(g\beta\Delta T)$ y la

viscosidad. Donde dicho número se utiliza cuanto el fluido tiende a moverse por efecto de la fuerza de flotación, siendo la causa de la convección natural.

El coeficiente de dilatación térmica β viene dado por:

$$\beta = \frac{1}{v} - \frac{dv}{dT} \Big|_{p \rightarrow \text{const}} \quad (84)$$

donde (para un gas):

- ♦ p : es la presión
- ♦ v : es el volumen
- ♦ T : es la temperatura

Para la convección forzada alrededor de un conducto circular, se muestra que la correlación entre los valores experimentales y el número de Nusselt tendrían una expresión de la forma:

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (85)$$

donde:

- ♦ Nu: Número de Nusselt
- ♦ Re: Número de Reynolds
- ♦ Pr: Número de Prandtl

Ahora, para el caso de la convección forzada sobre la superficie exterior de una tubería horizontal, Churchill y Berstein determinaron una ecuación partiendo nuevamente del análisis dimensional. Esta expresa:

$$Nuf = 0.3 + \frac{0.62 * Re^{1/2} * Pr^{1/3}}{\left(1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right)^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{280000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

(86)

donde :

- ♦ Nuf : Número de Nusselt para convección forzada.

Los otros parámetros ya han sido mencionados

La ecuación (100) aplica en un amplio rango de número de Reynolds que se encuentra entre 100 y 10000000.

1.5.2. Número de Reynolds

Cuando la velocidad de flujo de un fluido resulta que es suficientemente grande, se rompe el flujo laminar y se establece la turbulencia. Las características que condicionan el flujo laminar dependen de las propiedades del líquido y de las dimensiones del flujo. Conforme aumenta el flujo másico aumenta las fuerzas del momento o inercia, las cuales son contrarrestadas por la fricción o fuerzas viscosas dentro del líquido que fluye. Cuando estas fuerzas opuestas alcanzan un cierto equilibrio se producen cambios en las características del flujo. En base a los experimentos realizados por Reynolds en 1874 se concluyó que las fuerzas del momento son función de la densidad, del diámetro de la tubería y de la velocidad media. Además, la fricción o fuerza viscosa depende de la viscosidad del líquido. Según dicho análisis, el Número de Reynolds se define como la relación existente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas (o de fricción).

El flujo de un fluido puede caracterizarse mediante un número adimensional al que se denomina número de Reynolds N_R que se define:

$$N_R = \frac{2r_c \rho v}{\mu} \propto \frac{\text{inercia}}{\text{fricción}} \quad (87)$$

donde

- ♦ r_c : radio del conducto.
- ♦ ρ : densidad del fluido.
- ♦ v : velocidad del fluido.
- ♦ μ : viscosidad del fluido.

Cuando el número de Reynolds es:

$< 2000 \longrightarrow$ el flujo es laminar

$> 3000 \longrightarrow$ el flujo es turbulento

Y cuando $2000 < \text{Número de Reynolds} < 3000$ el régimen del flujo puede ser laminar o turbulento.

Este número es importante para definir el comportamiento de un fluido y en particular, la transición del flujo laminar al turbulento. En dinámica de fluidos, es que puede utilizarse para definir las características del flujo dentro de un conducto. Proporciona una indicación de la pérdida de energía causada por efectos viscosos. Si el Número de Reynolds es 2100 o menor el flujo será laminar. Un número de Reynolds mayor de 10.000 indica que las fuerzas viscosas influyen poco en la pérdida de energía y el flujo es turbulento. Una ilustración de lo antes dicho puede ser observada en la **Figura 13**.



Figura 13

Al introducir el concepto de transporte de calor en la formación en el subsuelo (arena, estrato, formación, etc), es importante recordar que el estudio de la distribución de temperaturas en la misma requiere un riguroso modelo que relacione la transferencia de calor en la interfase pozo/formación, basadas en la conducción y convección de calor presentadas por Fourier y Newton respectivamente.

Ramey realiza su primera interpretación en el año 1962 para estimar la temperatura de formación, la cual presenta serias limitaciones, como por ejemplo, los efectos de energía cinética y fricción son ignoradas y toma en cuenta una sola fase del fluido. Carslaw y Jaeger adaptaron dicha interpretación con el propósito de simplificar las ecuaciones y proponer un modelo para obtener resultados de valores de temperatura de mejor estimación. Hasan y Kabir realizaron un enfoque analítico basado en el caso general de flujo estable, al modelar la temperatura del fluido a través de un balance de energía simplificando el problema a un sistema de una sola dimensión.

Como consecuencia de estas interpretaciones, es necesario conocer los diferentes cambios de temperatura en la formación, en el instante que un fluido es producido o inyectado en el pozo.

Cuando el petróleo se produce, la temperatura es aproximadamente la misma a la de la formación. Solamente cuando la caída de presión es muy grande se incrementara la temperatura debido al efecto Joule-Thompson. Por el contrario puede mostrar enfriamiento si la caída de presión es muy pequeña. En cualquier caso la temperatura del fluido en la arena puede ser calculado desde el conocimiento de la temperatura de la formación y el efecto Joule-Thompson. Sin embargo mientras el fluido sube por el pozo su temperatura es mayor que la de los alrededores debido al descenso de la temperatura de la tierra con la disminución de profundidad.

En la **Figura 14** se muestran 2 perfiles: el perfil de la temperatura del fluido en tubería y un perfil estático de la temperatura en el yacimiento, tanto para los procesos de producción e inyección en el pozo.

La diferencia de temperatura entre el fluido en la tubería y la formación causa una transferencia de calor del fluido hacia los alrededores, como lo muestra la **Figura 14**, la variación de temperatura aumenta con la disminución de la profundidad causando una transferencia de calor mayor y una temperatura de fluido mas baja mientras que el fluido sube en la tubería. A cualquier profundidad dada la temperatura variara con la distancia radial del pozo.

La temperatura de formación cercana a la tubería también variará de alguna manera con el tiempo de producción. En consecuencia la pérdida de calor del fluido de producción disminuye con el tiempo. La **Figura 14** también describe el aumento de temperatura en un fluido inyectado con la profundidad del pozo. La importancia de varios aspectos en la transferencia de calor entre el fluido en tubería y la formación ha generado una rica literatura en la materia. Por ejemplo la utilidad de medir la temperatura del fluido en la tubería fue señalada tempranamente en 1937 por Schlumberger y colaboradores.

Quizás la aplicación más temprana del principio de transferencia de calor fue el uso de registros de temperatura para calcular los perfiles de inyección de agua y gas en los años 50. Sin embargo por la escasez de conocimientos físicos de transferencia de calor en los fluidos condujo a problemas en el campo. Las fallas de tensiones térmicas de revestidores en pozos de inyección de vapor es un caso ilustrativo.

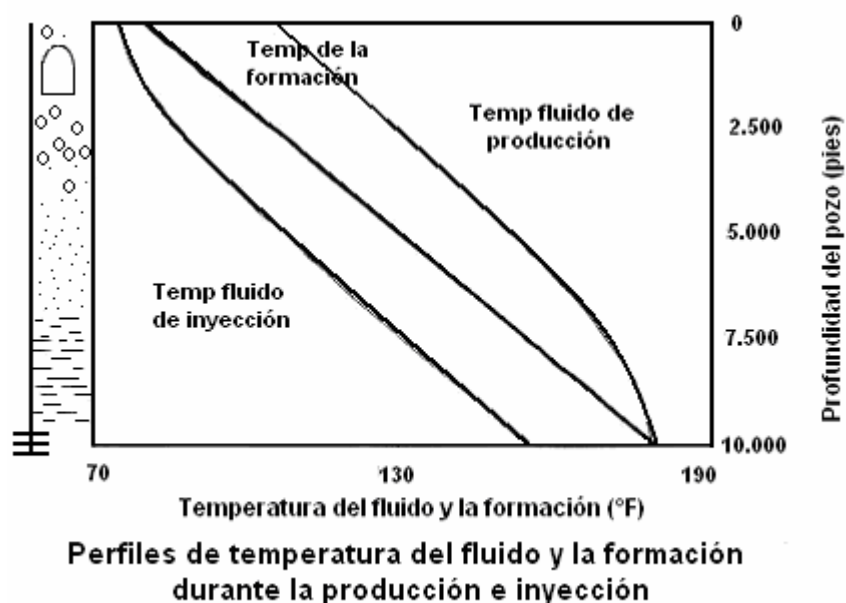


Figura 14

1.7. Temperatura en la Formación

Cuando un líquido es producido de una zona, su temperatura en la cara de la arena podría ser aproximadamente igual a la de la formación, puesto que conocer la temperatura a lo largo de la formación exigiría un estudio mucho mas extenso. Mientras que esto no es verdad en los gases, la temperatura de entrada podría ser estimada utilizando la temperatura de formación si el efecto Joule-Thompson es tomado en cuenta apropiadamente. Así la temperatura en el fondo del pozo del fluido producido podría ser estimada con menor margen de error. Además, a medida que el fluido va ascendiendo en el pozo, su temperatura cambia a valores superiores en comparación con la temperatura atmosférica, esto es debido al incremento de la temperatura con la profundidad.

La diferencia de temperatura existente entre el fluido del pozo y la formación causa una transferencia de calor del fluido hacia los alrededores de la formación, causando una consecuente disminución de la temperatura del fluido a medida que la profundidad disminuye. A cualquier profundidad la temperatura de formación podría variar no solo a una distancia radial desde el pozo, sino que también con el tiempo de producción. Además, cuando se ha alcanzado un flujo continuo, la turbulencia del fluido asegura una constante temperatura de fluido a cierta profundidad. De aquí que, la pérdida de calor del fluido disminuye con el tiempo y depende en las diferentes resistencias de flujo de calor entre el fluido caliente en la tubería y los alrededores de la formación.

Para derivar una expresión para la temperatura del fluido en función de la profundidad el tiempo, primero establecemos la distribución de temperatura de formación como una función de distancia radial y tiempo, dada una constante de flujo de calor del pozo. Un balance de energía en el fluido del pozo relacionará la temperatura del fluido con la interfase formación/pozo y el flujo de calor, dado un coeficiente de calor en términos de la configuración del pozo en particular.

1.7.1. Distribución de Temperatura en la Formación

La difusión de calor en un sólido de tres dimensiones podría ser matemáticamente utilizada como un problema de dos dimensiones, si asumimos simetría alrededor de la fuente de calor como en el caso de un pozo productor o inyector.

Adicionalmente si se considera un pequeño incremento en la dirección vertical del pozo, el problema se simplifica a un sistema unidimensional de calor de difusión, debido a que el calor de difusión vertical puede ser ignorado porque el gradiente vertical de temperatura es relativamente pequeño.

Durante la producción, el fluido en la tubería provee una fuente de calor a la formación, mientras que en la inyección de fluido, la tubería actúa como un aislante del calor.

Para modelar la corriente de calor y la resultante de la distribución de la temperatura en tales sistemas tratamos la formación como un sólido homogéneo. Asumir la simetría alrededor del pozo simplifica el problema de 3D en 2D. Además la difusión de calor en dirección vertical se puede ignorar debido a los gradientes de las temperaturas verticales bajas. Ignorando la corriente de calor vertical se reduce el problema a un sistema de una sola dimensión.

Este enfoque adaptado por Hasan y Kabir introduce un margen de error pequeño y permite una solución analítica al problema. El enfoque analítico es siempre preferido a la alternativa de soluciones numéricas el cual puede ser tedioso.

Un balance de energía en la formación entonces conduce a una ecuación diferencial parcial, derivando en coordenadas cilíndricas, para la variación de temperatura de formación con distancia radial del pozo y el tiempo de producción.

Basado en la ecuación de difusividad aplicada a la conducción de calor se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} = \frac{C_e \rho_e}{k_e} \frac{\partial T_e}{\partial t} \quad (88)$$

La cual se origina a través de la transformación de coordenadas de la ecuación diferencial de conducción de calor (Ec. 68).

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (68)$$

En la ecuación (88), (T_e) es la temperatura de formación en una profundidad arbitraria en el tiempo (t) y la distancia (r) medida desde el centro de la tubería. La capacidad de calor (C_e), la densidad (ρ_e) y la conductividad (k_e). La ecuación de difusividad térmica es análoga a la ecuación de difusividad de presión utilizada para describir el flujo de un fluido en un medio poroso.

Las 3 condiciones obligatorias que se necesitan para la solución de la ecuación (88) se pueden obtener del examen del sistema físico. La **Figura 15** es un esquema de la distribución de temperatura en la formación alrededor de un pozo en producción a una profundidad dada. En poco tiempo la temperatura de formación retiene su valor inicial (T_{ei}) excepto cerca de la tubería como la muestra la curva más interna. Así inicialmente ($t = 0$) asumimos que $T_e = T_{ei}$ en cualquier lugar. Mientras que el tiempo aumenta, el calor transferido del fluido a la temperatura ambiente aumentará la temperatura de formación en las inmediaciones.

El perfil de la temperatura de formación en un tiempo dado se parecerá a la curva (punteada) medida en la **Figura 15**

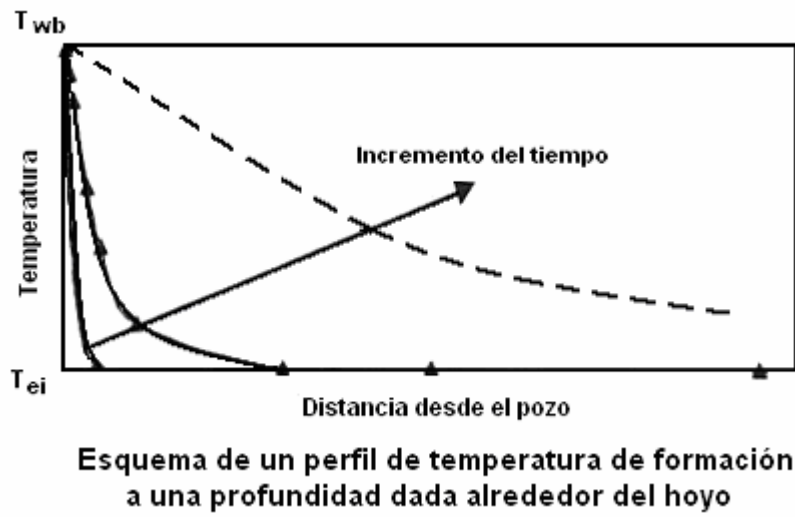


Figura 15

Sin embargo el límite de (T_e) no cambia con la distancia radial, es decir, la pendiente es cero ($dT/dr = 0$).

Finalmente el índice de corriente de calor en la interfase pozo/formación es gobernada por la ley de la Conducción de Calor de Fourier, puesto que ésta genera consecuentemente las 3 condiciones de frontera, las cuales son representadas por:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_e = T_{ei} \quad (89)$$

$$Q = 2\pi k_e \left. \frac{r \partial T_e}{\partial r} \right|_{r=r_{wb}} \quad (90)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial T_e}{\partial r} = 0 \quad (91)$$

En la ecuación (90), Q es la rata de flujo de calor desde la formación al pozo por unidad de longitud y (r_{wb}) es el radio exterior de la tubería.

Mientras que la producción continua, la transferencia de calor desde la tubería causa un aumento gradual en la temperatura de formación de los alrededores, la cual a su vez causa una lenta disminución en el índice de la corriente de calor.

1.8. Solución de la Ecuación de Difusividad

La ecuación (88) es generalmente resuelta en términos de variables adimensionales (r_D) y (t_D) (distancia = $\frac{r}{r_{wd}}$) y $\left(t_D = \frac{k_e T_e}{\rho_e C_e r_w}\right)$. Hasan y Kabir resolvieron la ecuación resultante con la Transformada de Laplace siguiendo el modelo sugerido por Van Everdingen é Hurst.

Para un conjunto similar de ecuaciones usadas para flujo no continuo, ellos expresaron la temperatura de formación como una función de la distancia radial y el tiempo, considerando respectivamente las condiciones de frontera expresadas a través de la Ley de Fourier.

Para calcular la temperatura del fluido fluyente, se necesitan la temperatura de formación y su derivada espacial en la interfase pozo/formación ($rd=1$). Podemos escribir la expresión para la temperatura en la interfase pozo/formación (T_{wb}) como:

$$T_{wb} = T_{ei} + \frac{Q}{\pi^2 k_e} I \quad (92)$$

donde:

- ♦ I es la integral definida en términos adimensionales, y es escrita como:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-u^2 td}}{u^2} \frac{Y_1(u)J_0(u) - J_1(u)Y_0(u)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du \quad (93)$$

donde:

- ◆ J_0, J_1 : funciones de Bessel de 1er orden
- ◆ Y_0, Y_1 : funciones de Bessel de 2do orden

Análogo a las presiones adimensionales, P_d , usada en el análisis de las presiones transientes, definimos la temperatura adimensional como la ecuación:

$$T_D \equiv -\frac{2\pi k_e}{Q} (T_{wb} - T_{ei}) \quad (94)$$

donde:

- ◆ k_e : conductividad de la formación (Btu/hr-ft-°F)
- ◆ Q : tasa de flujo de calor por unidad de longitud de la formación (Btu/hr-ft)
- ◆ T_{wb} : temperatura en la interfase pozo/formación (°F)
- ◆ T_{ei} : temperatura de la formación a condiciones iniciales (°F)

y al sustituir la (Ec.92) en la (Ec.94) de tal forma que:

$$T_D = -\frac{2\pi k_e}{Q} \left(T_{ei} + \frac{Q}{\pi^2 k_e} I - T_{ei} \right) \Rightarrow T_D = -\frac{2\pi k_e T_{ei}}{Q} - \frac{2I}{\pi} + \frac{2\pi k_e T_{ei}}{Q}$$

Así, $T_d = -2I/\pi$. Nótese que T_D es siempre positiva y, que ésta representa el flujo de calor de la formación hacia el pozo. Para el caso más usual de producción

de fluidos, T_{wb} es mayor que T_{ei} , causando que el valor computado de (Q) sea negativo, lo cual significa que el fluido del pozo pierde calor a sus alrededores.

Usando las ecuaciones (92) hasta la (94) se requieren evaluaciones tediosas de una integral que involucra funciones de Bessel modificadas de cero y primer orden entre los límites de cero e infinito.

Hasan y Kabir encontraron las siguientes expresiones algebraicas para temperaturas adimensionales, T_D en términos de tiempo adimensional para representar las soluciones bastante exactas.

$$T_D = \left[0.4063 + \frac{1}{2} Lnt_D \right] \left[1 + \frac{0.6}{t_D} \right], \text{ donde } t_D > 1.5 \quad (95)$$

$$T_D = 1.1281 \sqrt{t_D} (1 - 0.3 \sqrt{t_D}), \text{ donde } t_D \leq 1.5 \quad (96)$$

Las expresiones anteriores para T_D son discontinuas en $T_D = 1.5$. La expresión continua para T_D puede ser más adecuada en algunas aplicaciones y es escrita como:

$$T_D = Ln \left[e^{-0.2 t_D} + (1.5 - 0.3719 e^{-t_D}) \sqrt{t_D} \right] \quad (97)$$

A largos tiempos ambas ecuaciones (95) Y (97) se reducen a la expresión:

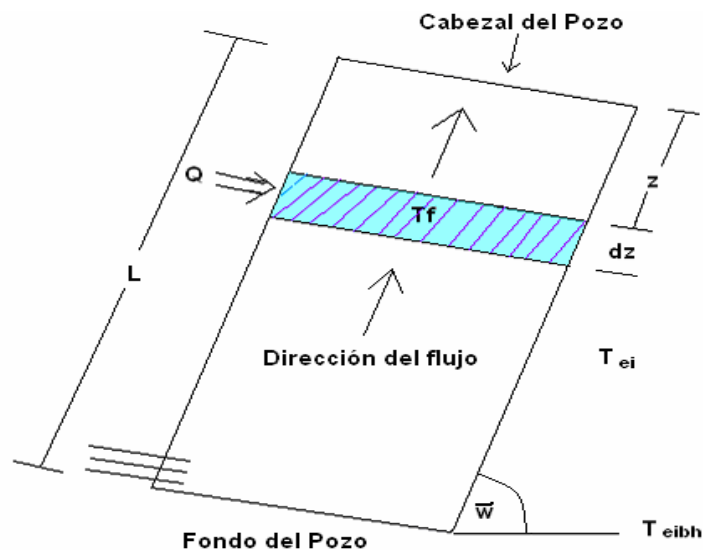
$$T_D = 0.4063 + \frac{1}{2} Lnt_D \quad (98)$$

La representación de T_D , dada por la ecuación anterior, fue primero usada por Ramey y Edwardson y colaboradores y es útil para pozos de diámetros pequeños. En consecuencia las expresiones propuestas por Hasan y Kabir y Ramey son equivalentes en tiempos finales, aunque pueden ocurrir diferencias significativas en tiempos iniciales.

La ecuación (94) es una expresión conveniente que relaciona el calor y la fuerza de conducción de la diferencia de temperatura, ($T_{wb} = T_{ei}$) y permite cálculos de transferencia de calor con la ecuación (95) y debe ser reemplazada por la temperatura del fluido de la tubería. Esta sustitución de T_{wb} por T_f se logra al usar un balance de energía por el fluido de la tubería.

1.9. Balance de Energía para el Fluido en el Pozo

La diferencia de temperatura entre el fluido del pozo y la formación da como resultado un intercambio de energía. Ramey logró un balance de energía para el fluido al suponer una corriente monofásica.



Balance de Energía para el Fluido del Pozo

Figura 16

La **Figura 16** muestra un sistema de producción de una sola tubería, inclinada un ángulo (ϖ) a la horizontal, considerando un volumen de control de longitud (dz) a una distancia z desde el cabezal del pozo en este sistema, donde la distancia coordenada, z , es positiva en dirección descendente. La suma de calor ($wH|_{z+dz}$) entra al elemento ($z + dz$) por convección, mientras la conducción de calor desde la formación agrega presión al elemento.

Similarmente, ($wH|_z$) es el calor desde el elemento en z por convección.

Agregando energía potencial y cinética a la energía de calor del fluido, obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 & wH|_{z+dz} + \frac{(z+dz)wg \sin \varpi}{Jg_c} + \frac{wv^2|_{z+dz}}{2Jg_c} + Qdz \\
 & = wH|_z + \frac{zwg \sin \varpi}{Jg_c} + \frac{wv^2|_z}{2Jg_c} \quad (99)
 \end{aligned}$$

donde:

- ◆ z : profundidad variable del pozo desde la superficie (pies).
- ◆ dz : volumen de control.
- ◆ $wH|_z$: suma de calor (BTU)
- ◆ w : flujo másico del fluido (libras/hr).
- ◆ g : aceleración de gravedad (pie/seg²).
- ◆ g_c : factor de conversión (32.17 (libra-pie/libra-seg²))
- ◆ J : factor de conversión para el balance de energía

- ♦ Q: tasa de transferencia de calor por unidad de longitud (Btu/hr-pie).
- ♦ v: velocidad del fluido (pie/seg).

Durante la inyección, cada término exceptuando la tasa (Q) en la ecuación (99), cambia de signo. Podemos generalizar la ecuación de balance de energía para los sistemas de producción e inyección como:

$$\frac{dH}{dz} + \frac{g \sin \varpi}{Jg_c} + \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} = \pm \frac{Q}{w} \quad (100)$$

Donde el signo negativo al lado derecho aplica a la producción y el signo positivo a la inyección en la ecuación (100) g_c y J representan factores de conversión apropiados.

Para un cambio de fluido no hay cambio de fase, es decir, cuando el calor se efectúa debido a la evaporación/condensación, la solución y la mezcla son insignificantes. La entalpía es una función de presión y temperatura y esta dada de acuerdo a las relaciones termodinámicas de Maxwell por:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp = c_p dT - C_j c_p dp \quad (101)$$

Donde:

- ♦ C_j representa el coeficiente Joule-Thompson
- ♦ c_p es el medio con capacidad de calor del fluido a presión constante.

Debemos ver que debido a la evaporación/condensación durante la inyección de vapor la (Ec. 101) es inaplicable. Al usar la (Ec. 101) en la (Ec.100) podemos escribir la expresión para la temperatura del fluido de la tubería como una función de profundidad como:

$$\frac{dT_f}{dz} = C_j \frac{dp}{dz} + \frac{1}{c_p} \left[\pm \frac{Q}{w} - \frac{g \sin \varpi}{Jg_c} - \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} \right] \quad (102)$$

$$T_D \equiv -\frac{2\pi ke}{Q} (T_{wb} - T_{ei}) \quad (94)$$

$$T_D = \text{Ln} \left[e^{-0.2t_D} + (1.5 - 0.3719 e^{-t_D}) \sqrt{t_D} \right] \quad (97)$$

Combinando la (Ec. 102) con las (Ec. 94) y (Ec. 97), podemos llegar a una expresión para T_f . Sin embargo para eliminar T_{wb} de la expresión resultante uno debe usar el coeficiente global de la transferencia de calor para el pozo.

1.10. Coeficiente de Transferencia de Calor para Pozos

La transferencia de calor radial ocurre entre el fluido del pozo y los alrededores, superando resistencias ofrecidas por la pared de la tubería, aislamiento de la tubería, el revestidor, la pared del revestidor y el cemento como lo muestra la **Figura 17**. Estas resistencias son en serie y excepto por el anular, el único mecanismo de transporte de energía es la conducción de la transferencia de calor.

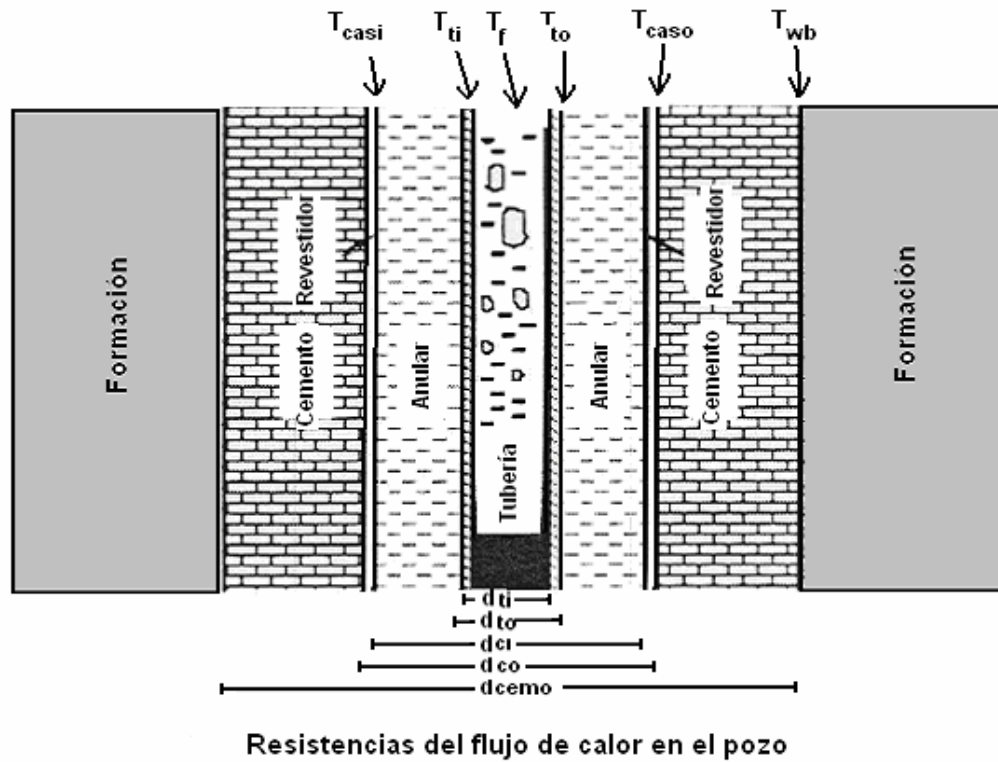


Figura 17

En estado estacionario, el índice de la corriente de calor a través de una tubería por unidad de longitud del pozo (Q) puede ser expresado como:

$$Q = -2\pi r_{to} U_{to} (T_f - T_{wb}) \quad (103)$$

donde:

- ♦ U_{to} : coeficiente global de transferencia de calor de la tubería del pozo.
- ♦ r_{to} : radio externo de la tubería del pozo.
- ♦ $T_f - T_{wb}$: diferencia de temperatura entre el fluido en la tubería de producción y la interfase pozo/formación (pared).

De esta manera, el coeficiente global de transferencia de calor para un pozo dado es un parámetro importante.

Cuando la transferencia de calor sucede en estado estacionario, el calor, y la corriente a través de cada uno de los elementos (**ver Figura 17**) debe ser la misma. La transferencia de calor en estado estacionario nos permite derivar la expresión para el coeficiente global de transferencia de calor dada por:

$$\frac{1}{U_{to}} = \underbrace{\frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}}}_{1} + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_f}}_{2} + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{k_{ins}}}_{3} + \underbrace{\frac{r_{to}}{r_{ins} (h_c + h_r)}}_{4} + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c}}_{5} + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{wb}}{r_{co}}\right)}{k_{cem}}}_{6}$$

(104)

donde:

- ◆ k_c : conductividad en el revestidor (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_{cem} : conductividad del cemento (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_t : conductividad entre el anular y el fluido de la tubería. (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_{ins} : conductividad del aislante. (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ h_{to} : coeficiente de transferencia de calor por convección de la tubería (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ h_c : coeficiente de transferencia de calor por convección (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ h_r : coeficiente de transferencia de calor por convección entre el anular y el fluido de la tubería (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ r_{to} : radio externo de la tubería del pozo. (pies)
- ◆ r_{co} : radio externo del revestidor (pies)
- ◆ r_{ti} : radio interno de la tubería del pozo (pies)
- ◆ r_{ci} : radio interno del revestidor (pies)

- ♦ r_{ins} : radio del aislante térmico (pies)
- ♦ r_{wb} : radio del pozo (pies)

Al derivar la expresión del coeficiente global de transferencia de calor cada término en su ecuación representará los elementos presentes en un pozo específico, es decir, como se encuentra constituido dicho pozo. Entre los términos descritos por la ecuación (104) podemos nombrar:

- ♦ Término 1: representa la tubería presente en el pozo.
- ♦ Término 2: representa el espacio anular en el pozo.
- ♦ Término 3 y 4: representa las características del aislante en el pozo.
- ♦ Término 5: representa las condiciones del revestidor en el pozo.
- ♦ Término 6: representa las características del cemento utilizado.

En el caso de la inyección de vapor o producción geotérmica la gran diferencia de temperatura entre los fluidos de la tubería y el anular pueden causar radiación y convección natural.

1.11. Pérdida de Calor en la Formación

Podemos escribir la expresión para T_D (Ec. 94) dada por:

$$T_D \equiv -\frac{2\pi k_e}{Q}(T_{wb} - T_{ei}) \quad (94)$$

en transferencia de calor desde la formación a la interfase de pozo/ formación como la ecuación:

$$Q \equiv -\frac{2\pi k_e}{T_D} (T_{wb} - T_{ei}) \quad (105)$$

donde:

- ◆ k_e : conductividad de la formación (Btu/hr-ft-°F)
- ◆ Q : tasa de flujo de calor por unidad de longitud de la formación (Btu/hr-ft)
- ◆ T_{wb} : temperatura en la interfase pozo/formación (°F)
- ◆ T_{ei} : temperatura de la formación a condiciones iniciales (°F)

Combinando las ecuaciones (103) y (105) para eliminar T_{wb} tenemos lo siguiente:

$$T_f + \frac{Q}{2\pi r_{to} U_{to}} = T_{ei} - \frac{QT_D}{2\pi k_e} \Rightarrow T_f - T_{ei} = -\frac{QT_D}{2\pi k_e} - \frac{Q}{2\pi r_{to} U_{to}}$$

$$\Rightarrow T_f - T_{ei} = -\frac{QT_D r_{to} U_{to} - Qk_e}{2\pi k_e r_{to} U_{to}} \Rightarrow (T_f - T_{ei}) 2\pi k_e r_{to} U_{to} = -Q(T_D r_{to} U_{to} + k_e)$$

$$Q = -2\pi \frac{k_e r_{to} U_{to}}{(T_D U_{to} r_{to}) + k_e} (T_f - T_{ei})$$

obtenemos la ecuación:

$$Q \equiv -L_R w c_p (T_f - T_{ei}) = -\frac{w c_p}{A} (T_f - T_{ei}) \quad (106)$$

donde L_R es el parámetro llamado longitud de relajación y está definido por la ecuación:

$$L_R \equiv \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \quad (107)$$

nótese que el parámetro L_R , es inverso del parámetro A , el cual es definido por Ramey como la ecuación:

$$A \equiv \frac{c_p w}{2\pi} \left[\frac{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)}{r_{to} U_{to} k_e} \right] \quad (108)$$

1.11.1. Parámetro de Relajación ($L_R = 1/A$)

La ecuación (106) muestra que la pérdida de calor (o ganancia) por el fluido en el pozo a la formación es directamente proporcional a $(T_f - T_{ei})$ y el parámetro L_R .

Así, L_R puede ser vista como un tipo de coeficiente global de transferencia de calor para el sistema formación/pozo teniendo las unidades de $1/\text{longitud}$, pie^{-1} , m^{-1} .

Podemos ver que la expresión para L_R contiene propiedades térmicas de la formación y el pozo. También incluye la función de temperatura adimensional, T_d , la cual varía con el tiempo. Sin embargo, T_d es una función débil de tiempo,

especialmente en los tiempos finales. Consecuentemente la suposición de la constante L_R es conveniente en muchas aplicaciones prácticas.

El coeficiente global de transferencia de calor para el sistema de tubería puede variar con la profundidad del pozo debido al cambio de configuración del pozo. Adicionalmente, como sugiere la Ecuación de Balance de Materiales, la convección natural en el espacio anular puede contribuir significativamente en el valor de U .

La diferencia de temperatura, que es la fuerza impulsora de la convección natural, varía con la profundidad del pozo, causando que L_R sea una función de la profundidad. Sin embargo la variación de L_R con profundidad es pequeña y generalmente ignorada por que U_{to} aparece en el numerador y denominador de la (Ec. 108). La suposición de L_R constante tiene importantes consecuencias para la solución de la ecuación diferencial que representa la temperatura del fluido en el pozo.

1.12. Transporte de Calor en Tubería de Producción Costa Afuera

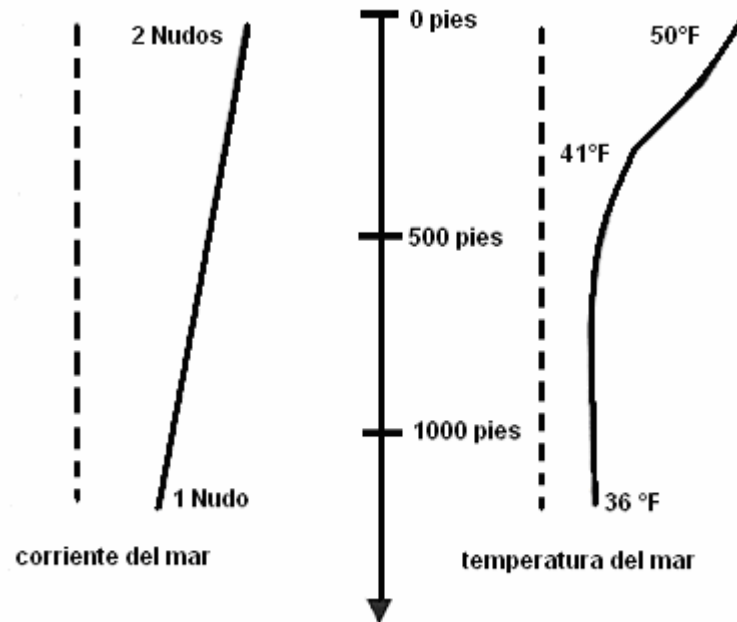
Calcular la temperatura del fluido en un ambiente costa afuera es una tarea exigente, esto es debido a que el transporte de energía a través del agua de mar y el aire deben ser tomadas en cuenta en la tubería de producción costa afuera. Dependiendo de la longitud de la tubería de producción y la temperatura del agua, la temperatura del fluido en la tubería puede afectarse significativamente.

Para la producción a través del agua de mar se asume una configuración tubería/revestidor sin el cemento alrededor del revestidor. La tasa de transferencia de calor (Q), a través de capas sucesivas de resistencias cilíndricas esta dada por la ecuación:

$$Q = -2\pi r_{to} U_{to} (T_f - T_{ei}) \quad (109)$$

Donde T_{ei} representa la temperatura estática del agua de mar lejos del pozo a una profundidad dada.

La variación de temperatura del agua de mar con profundidad se necesita para aplicar la ecuación (109). En la mayoría de los casos, la temperatura del agua disminuye con la profundidad de una forma no lineal. Una representación clara de estos casos puede ser vista a través de la (ver **Figura 18**), donde se puede observar que para variaciones de profundidad menores a 500 pies, ya se establece un cambio en la temperatura del agua por mas de 8 grados Fahrenheit, dibujando un comportamiento no lineal para el agua.



Medidas de la temperatura del mar y perfiles de velocidad

Figura 18

El coeficiente global de transferencia de calor, U_{to} , basado en la tubería fuera del área de la superficie se describe por la ecuación:

$$\frac{1}{U_{to}} = \underbrace{\frac{r_{to}}{r_{ti} h_t}}_1 + \underbrace{\frac{1}{h_a}}_2 + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_t}}_3 + \underbrace{\frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c}}_4 + \underbrace{\frac{r_{to}}{r_{co} h_c}}_5 \quad (110)$$

donde cada término representa:

- ◆ Término 1: representa la tubería presente en el pozo.
- ◆ Término 2: representa las condiciones del fluido en la tubería
- ◆ Término 3: representa el espacio anular en el pozo.
- ◆ Término 4: representa las condiciones del revestidor en el pozo.
- ◆ Término 5: representa el mecanismo de transferencia de calor presente en el pozo

La ecuación (109) puede reorganizarse de la misma manera que la ecuación (108), comparando estas 2 ecuaciones para el caso de producción/inyección a través de tuberías sumergidas, derivamos la expresión para el parámetro relajado, L_{RC} , como la ecuación:

$$L_{RC} = \frac{2\pi r_{to} U_{toc}}{c_p w} \quad (111)$$

Durante la producción a través del agua de mar, la corriente natural hará una convección forzada que es el modo más probable de transferencia de calor, especialmente cerca de la interfase aire agua.

Fishenden y Saunders han estudiado convecciones forzadas y recomiendan la correlación siguiente para flujo a través de tuberías verticales sumergidas en agua de mar:

$$Nu = 0.26(Re)^{0.6} (Pr)^{0.3} \quad (112)$$

donde los números Nusselt y Prandtl están dados por $Nu = \frac{h_c d}{k_e}$ y $Pr = \frac{c_p \mu_c}{k_e}$.

Gebhart presenta una correlación ligeramente distinta con la ecuación:

$$Nu = \left[0.35 + 0.56(Re)^{0.52} \right] (Pr)^{0.3} \quad (113)$$

En el rango de parámetros de valores de interés, las ecuaciones (112) y (113) dan resultados muy similares. Estas correlaciones son también aplicables al pozo expuesto a las corrientes de aire.

1.13. Temperatura del Fluido en el Pozo

Relacionando la temperatura del fluido a la profundidad del pozo sustituyendo la expresión para la pérdida de calor a la formación, (Q), ecuación (106). En la ecuación de balance de energía ecuación (102):

$$\frac{dT_f}{dz} = \pm (T_f - T_{ei}) L_R - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} - \frac{v}{c_p J g_c} \frac{dv}{dz} + c_j \frac{dp}{dz} \quad (114)$$

Donde el signo positivo se aplica a la producción y el negativo a la inyección. Suponemos que la temperatura de la formación sin alteraciones (condición inicial) T_{ei} , varía linealmente con la profundidad, en consecuencia, uno puede escribir una expresión para T_{ei} para un pozo desviado de longitud, L , como:

$$T_{ei} = T_{eibh} - (L - z)g_G \sin \alpha \quad (115)$$

Donde g_G representa el gradiente geotérmico en términos de profundidad vertical, y T_{eibh} es la temperatura estática de la tierra en el fondo. Nótese que la z es positiva en dirección descendente. Aun cuando la temperatura de la tierra no es lineal con la profundidad, esta puede ser razonablemente bien representada por unas pocas ecuaciones lineales.

La ecuación (114) puede ser escrita entonces como la ecuación:

$$\frac{dT_f}{dz} = \pm L_R (T_f - T_{ei}) - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} + \phi \quad (116)$$

Donde ϕ representa la siguiente ecuación:

$$\phi = - \frac{v}{c_p J g_c} \frac{dv}{dz} + c_j \frac{dp}{dz} \quad (117)$$

Como era de esperarse la ecuación (116) muestra que el cambio en la temperatura del fluido con la profundidad depende de la diferencia en la temperatura del fluido dentro de la tubería y la formación de los alrededores.

Durante la producción cuando T_f es mayor que T_{ei} , la temperatura del fluido disminuye a medida que el fluido se mueve hacia la superficie (ΔZ negativo).

1.13.1. Temperatura del Fluido en Producción. Flujo de una Sola Fase (líquido)

Los líquidos siendo esencialmente incompresibles, permiten un sin número de simplificaciones a la ecuación (116) para petróleo monofásico o producción de agua. Por ejemplo, el cambio de la velocidad del fluido con la profundidad (dv/dz), se hace insignificante. Además como la variación de densidad del líquido con la presión es usualmente muy pequeña, y por la definición de entalpía de un sistema representada por:

$$H = E + pV \quad (118)$$

donde:

- ♦ H: entalpía de un sistema.
- ♦ E: energía interna.
- ♦ p: presión del sistema.
- ♦ V: volumen del sistema

Es necesario entonces considerar el cambio de la entalpía cuando un sistema experimenta un proceso infinitesimal desde un estado de equilibrio inicial a otro estado de equilibrio final, obteniendo así entonces:

$$dH = dE + pdV + Vdp \Rightarrow dH = dE + d(pV) \quad (119)$$

permitiendo entonces escribir la ecuación como:

$$dH = dQ + Vdp = c_p dT + Vdp \quad (120)$$

conociendo que por definición :

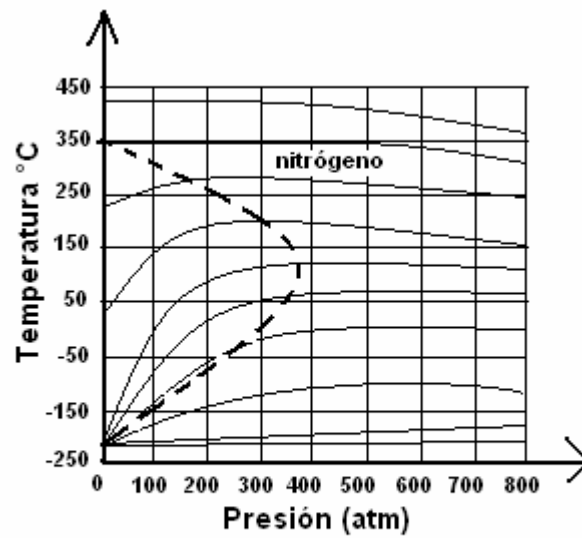
$$dQ = mc_p dT \quad (4)$$

y definiendo el coeficiente Joule-Thompson por la ecuación :

$$C_j \equiv \frac{1}{c_p} \left[\frac{\partial H}{\partial p} \right]_T = \frac{V}{c_p} = \frac{1}{\rho c_p} \quad (121)$$

donde $m = 1$

Cabe destacar que para la solución de estas ecuaciones es necesario incluir la definición del Coeficiente Joule-Thompson, el cual es el resultado del valor numérico de la pendiente en un punto cualquiera de una curva isentálpica sobre un diagrama T-P definiendo curva isentálpica como el lugar de todos los puntos que representan estados de equilibrio de la misma entalpía. (ver ejemplo para el nitrógeno de la **Figura 19**).



Curvas isentálpicas y curvas de inversión para el nitrógeno

Figura 19

Por consiguiente para líquidos se tendrá la ecuación:

$$\phi \equiv -\frac{v}{c_p J g_c} \frac{dv}{dz} + C_j \frac{dp}{dz} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dz} \quad (122)$$

Sin embargo, para flujo líquido, una sola fase, la pérdida de presión estática es aproximadamente igual al gradiente de presión. En otras palabras $\frac{dp}{dz} \approx \rho \left(\frac{g}{g_c} \right) \sin \alpha$, así la ecuación (116) se reduce a la ecuación:

$$\frac{dT_f}{dz} = L_R (T_f - T_{ei}) = L_R (T_f - T_{eih} + (L - z) g_G \sin \alpha) \quad (123)$$

También se puede llegar a la ecuación (123) sabiendo que, para los líquidos, el balance de energía de la ecuación (100) puede simplificarse utilizando:

$$\frac{c_p dT}{dz} = -\frac{Q}{w} = (T_f - T_{ei}) L_R \quad (124)$$

Si la longitud de relajación, L_R , se asume invariable con la profundidad del pozo, la ecuación (123) se convierte en una ecuación diferencial lineal de primer orden, la cual puede resolverse con el método del factor de integración.

Resolviendo la ecuación (123), obtenemos:

$$\frac{dT_f}{dz} = -L_R T_f = -L_R T_{eih} + L_R (L) g_G \sin \alpha + -z L_R g_G \sin \alpha$$

$$\mu(z) = e^{-L_R z} \quad (\text{factor integrante})$$

entonces sustituyendo en ambos lados de la ecuacion el factor integrante tenemos:

$$e^{-L_R z} \frac{dT_f}{dz} - L_R e^{-L_R z} T_f = L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} - z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} (e^{-L_R z} T_f(z)) = L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} - z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha$$

integrando entonces en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-L_R z} T_f &= \int L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} dz - \int z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha dz + A \\ &= -\frac{(L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) L_R}{L_R} e^{-L_R z} + L_R g_G \sin \alpha \left(\frac{z e^{-L_R z}}{L_R} - \int \frac{e^{-L_R z} dz}{L_R} \right) + A \end{aligned}$$

$$T_f(z) = -(L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) + g_G \sin \alpha \left(z + \frac{1}{L_R} \right) + A e^{L_R z}$$

$$T_f(z) = T_{eibh} - L g_G \sin \alpha + \frac{g_G \sin \alpha}{L_R} + (g_G \sin \alpha) z + A e^{L_R z}$$

asumiendo A como constante tenemos:

$$A = I C e^{-L_R} \Rightarrow A e^{L_R z} = I C e^{-L_R} e^{L_R z}$$

asumiendo entonces que T_{ei} varia linealmente con la profundidad sabemos entonces que:

$$T_{ei} = T_{eibh} - (L - z)g_G \sin \alpha$$

sustituyendo entonces y aplicando la constante a la ecuación anterior tenemos:

$$T_f = T_{ei} + \left(\frac{g_G \sin \alpha}{L_R} \right) + ICe^{(z-L)L_R} \quad (125)$$

Donde IC_e , representa la constante de integración y es evaluada sabiendo que en el fondo ($Z = L$), la temperatura del fluido es igual a la temperatura de la formación ($T_f = T_{eibh}$).

En consecuencia, tendremos la ecuación:

$$T_f = T_{ei} + g_G \sin \alpha \left(\frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \right) = T_{eibh} - g_G \sin \alpha \left[(L - z) - \frac{(1 - e^{(z-L)L_R})}{L_R} \right] \quad (126)$$

La ecuación (126) muestra que la temperatura del fluido decrece exponencialmente desde el fondo ($z = L$) al cabezal del pozo. También muestra que mientras la temperatura del fluido y la formación son la misma en el fondo, la temperatura del fluido es mayor que la temperatura de formación en cualquier otra ubicación en el pozo.

La diferencia en temperaturas entre el fluido del pozo y la formación gradualmente aumenta mientras que el fluido asciende en el pozo. Para pozos profundos $(z-L)L_R$ puede convertirse en un número grande y negativo encabezando la expresión para la diferencia de temperaturas entre el fluido del pozo y la formación, se puede escribir así:

$$T_f - T_{ei} = \frac{g_G \sin \alpha}{L_R} \quad (127)$$

Las ecuaciones (126) y (127) muestran que para los pozos muy profundos, la diferencia de temperatura ($T_f - T_{ei}$) puede alcanzar un valor asintóticamente constante.

La magnitud de esta diferencia de temperaturas depende del valor de L_R . Así, si el enfoque asintótico se sostiene, los registros de temperatura pueden ser usados para calcular el valor de L_R .

Cuando las propiedades térmicas que se necesitan para calcular L_R (Ec. 107) están disponibles, uno puede usar registros de temperaturas para calcular tasas de flujo desde varias zonas de producción.

Esta estimación es posible porque L_R es inversamente proporcional a la tasa de flujo másico. Sin embargo, varias suposiciones, inherentes a este enfoque, frecuentemente dan estos estimados muy aproximados.

1.13.1.1. Flujo de gas una fase

Los pozos de gas presentan un poco mas de complicación que los pozos de petróleo porque el cabezal estático no se cancela por el término ϕ , sin embargo, para gases a bajas presiones, ϕ es usualmente pequeño y puede ser ignorado. En ese caso, con el procedimiento usado para resolver la (Ec. 111), la expresión siguiente para la temperatura de fluido puede derivarse de la (Ec. 116)

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] \quad (128)$$

A altas presiones, cuando la densidad de los gases es comparable a la de los líquidos, la ecuación (127) será más apropiada que la ecuación (128).

1.13.2.2. Flujo de gas / líquido

Para los pozos que producen fluidos multifásicos, y para algunos pozos de gas, la ecuación (116) debe resolverse completamente. Si asumimos que ϕ y L_R son independientes de la profundidad del pozo, la ecuación (116) se convierte en una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución a la ecuación (116), con $T_f = T_{eibh}$ en el fondo, es

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] \quad (129)$$

Nótese que la ecuación (129) es general y se aplica a las corrientes de líquido y gas monofásico y a los fluidos bifásicos. Para las corrientes de líquidos bifásicos cuando ϕ iguala al cabezal hidrostático $\left(= g \sin \alpha / J g_c \right)$, la ecuación (129) se reduce a la ecuación (126) mientras que la corriente de gas monofásica con ϕ ignorado se reduce a la ecuación (128).

El valor del parámetro ϕ , necesario en la ecuación (129) depende de muchas variables tales como la rata de flujo, el radio gas/líquido y la presión del pozo. Hassan y Kabbir usaron la expresión empírica para ϕ , desarrollado por Sagar y colaboradores, la cual es válida para índices de corriente menores de 5 lbm/seg.

$$\phi = -0.002978 + 1.006 \times 10^{-6} p_{wh} + 1.906 \times 10^{-4} w - 1.047 \times 10^{-6} RGL + 3.229 \times 10^{-5} API + 0.004009 \gamma_g - 0.3551 g_G \quad (130)$$

donde:

- ♦ p_{wh} : es la presión de la tubería
- ♦ w : es flujo masico del fluido
- ♦ RGL : es la relación gas - líquido
- ♦ γ_g : es la gravedad específica del gas
- ♦ g_G : es el gradiente geotérmico

Para índices de corrientes mayores a 5 lbm/seg Sagar y colaboradores colocan el $\phi = 0$.

Una alternativa a este enfoque empírico es el uso del coeficiente Joule–Thompson (C_j) para corrientes monofásicas la cual se deriva de principios de termodinámica y esta dada por:

$$C_j \equiv \frac{1}{c_p} \left[\frac{x}{\rho_g} \left(-\frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) + \frac{1-x}{\rho_L} \right] \quad (131)$$

donde:

- ♦ x : es la fracción molar de la fase de vapor.
- ♦ ρ_g : es la densidad del gas
- ♦ ρ_L : es la densidad del líquido
- ♦ T : es la temperatura

- ♦ Z : es la profundidad del intervalo considerado
- ♦ c_p : es el calor específico

Se recomienda el uso de la ecuación (131) la cual tiene una aplicación más general. El parámetro, ϕ , calculado de C_j variará algo con la profundidad del pozo para los fluidos de gas y multifásico. El uso de un valor promedio evaluado en el punto medio del pozo ofrece suficiente exactitud en la mayoría de los casos.

1.14. Temperatura del Fluido en Pozos de Inyección

Los pozos de inyección son comunes en las operaciones de los campos petroleros algunas veces parte del agua o del gas es inyectado a la formación para el mantenimiento de presión.

Esquemas de recuperación secundaria y terciaria también exigen inyecciones de fluido. Inyectando vapor a la formación ayuda a reducir la viscosidad del fluido del yacimiento aumentando su temperatura.

En estas y otras aplicaciones uno debe ser capaz de calcular la temperatura del fluido de inyección mientras este desciende por la tubería hacia el fondo del pozo.

La ecuación diferencial que describe la temperatura del fluido fluyendo en los pozos, es la ecuación (116) con el signo negativo y es válida para pozos de inyección sin evaporación/condensación.

La ecuación (116) es integrada para un pozo de inyección con las temperaturas, T_{fwh} , fluido en el cabezal y T_{es} temperatura de la superficie de la tierra, son usadas como condiciones de frontera para dar origen a la ecuación

$$T_f = T_{ei} - \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] + e^{-zL_R} (T_{fwh} - T_{es}) \quad (132)$$

1.15. Gradiente Geotérmico Variable

A veces, uno puede encontrar formaciones geológicas con diferentes características en la transferencia de calor, conduciendo a un gradiente geotérmico variable. En tal caso, la ecuación (116) debe integrarse dividiendo el pozo en un número de intervalos, con gradientes geotérmicos constantes que son aplicables a cada intervalo.

La temperatura del fluido calculada al final del intervalo (1) se usa como la temperatura del fluido de entrada para el intervalo (2) que se encuentra por encima o por debajo del intervalo (1). En consecuencia, para la producción con 2 valores de gradientes geotérmicos, G_{g1} y G_{g2} , la expresión para la temperatura del fluido en el intervalo del fondo es todavía dado por la ecuación:

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_{G_2} \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] + e^{zL_R} (T_{f1} - T_{ei1}) \quad (133)$$

Donde T_{f1} y T_{ei1} representan las temperaturas del fluido y de la tierra en la interfase de los 2 intervalos. El procedimiento por supuesto, puede extenderse a un número infinito de intervalos.

1.16. Perfiles de Temperatura en Pozo con Sartas de Tuberías Múltiples

Ordinariamente, las soluciones de la mayoría de los problemas de flujo de calor y fluido en un pozo tienen que ver con flujo de fluido unidireccional en una sola sarta de producción.

Sin embargo la producción de petróleo envuelve más el escenario tradicional de una sola tubería. Necesidad económica dicta la coproducción de fluidos a través del anular y la tubería, a través de sartas independientes, una de inyección y una de producción en el mismo pozo. El asunto de transferencia de calor se hace complicado cuando la producción se hace en agua marinas y aire como en operaciones costa-fuera. Estas y otras configuraciones complejas demandan del conocimiento de los perfiles de temperatura y de presión para optimizar la producción e inyección en cada sarta.

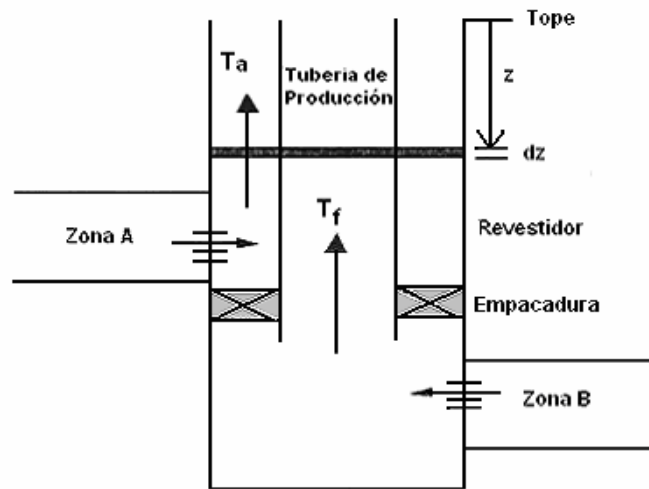
Estimar la temperatura de fluido en tuberías puede ser necesario en ambientes de producción de aguas profundas donde puede ocurrir considerable transferencia de calor. Para atacar estos puntos presentaremos soluciones analíticas para perfiles de temperatura cuando ocurre el flujo simultáneamente en sartas múltiples.

Esto es debido también a que los perfiles de temperatura pueden tener efectos significativos sobre las propiedades del fluido y a su vez en los cálculos de las caídas de presión. Además podemos ver como ésta se utiliza para la interpretación de registros de temperatura, lo cual presenta retos interesantes debido a la compleja transferencia de calor en el sistema de sartas múltiples

1.16.1. Producción a Través de la Tubería y el Anular

1.16.1.1. Modelo matemático

Para segregar fluidos, la producción de dos horizontes geológicamente diferentes, a menudo ocurre a través de completaciones separadas. La **Figura 20** muestra esquemáticamente que la producción primaria ocurre a través de la tubería, (T_f), mientras que la producción secundaria ocurre a través del anular (T_a).



Producción a través de la tubería y el anular

Figura 20

El pozo ilustrado en la **Figura 20** produce a través de la tubería y el anular tubería/revestidor. Las medidas de campo se hicieron en la sarta de producción durante condiciones de flujo a varias profundidades, llamadas estaciones. En cada estación, se permitieron 15 minutos para que ocurriese equilibrio térmico entre la temperatura externa de la prueba con los fluidos vecinos.

El balance de energía para un elemento diferencial del fluido en el anular (dz) envuelve transferencia de calor al fluido anular de la formación, del fluido anular al fluido en la tubería, Q_{ta} , cambio de entalpía en el fluido anular y las energías estática y cinética relacionados al fluido. Así que, un balance de energía en una unidad de tasa de flujo para el fluido anular contenido en un elemento diferencial, dz , es definido por:

$$\begin{aligned}
 H_a(z) + \frac{zg \sin \alpha}{g_c J} + \frac{v^2(z)}{g_c J} + \frac{Q_{ta}}{w_a} dz \\
 = H_a(z + dz) + \frac{(z + dz)g \sin \alpha}{g_c J} + \frac{v^2(z + dz)}{g_c J} + \frac{Q}{w_a} dz
 \end{aligned}
 \tag{134}$$

donde:

- ◆ H: entalpía del fluido (Btu/lbm)
- ◆ z: variable de profundidad del pozo desde la superficie (ft)
- ◆ g: aceleración gravitacional (ft/sec²)
- ◆ α : ángulo de inclinación desde la horizontal (grados)
- ◆ v: velocidad del fluido (ft/sec)
- ◆ Q: tasa de flujo de calor por unidad de longitud de la formación (Btu/hr-ft)
- ◆ Q_{ta} : tasa de flujo de calor del fluido anular al fluido de la tubería (Btu/hr-ft)
- ◆ w_a : tasa de flujo másico (lbm/sec)
- ◆ J: factor de conversión adimensional (ft-lbf/Btu)

Reacomodando la ecuación tenemos

$$\frac{Q_{ta} - Q}{w_a} = \frac{dH_a}{dz} + \frac{g \sin \alpha}{g_c J} + \frac{v_a}{g_c J} \frac{dv_a}{dz} \quad (135)$$

El calor transferido del fluido anular al fluido en la tubería por unidad de longitud está dado por:

$$Q_{ta} = 2\pi r_t U_t (T_a - T_t) = \frac{C_{pa}}{B_a} (T_a - T_t) \quad (136)$$

donde:

- ♦ T_a : temperatura del fluido anular (°F)
- ♦ T_t : temperatura del fluido en la tubería (°F)
- ♦ U_t : coeficiente global de transferencia de calor de la sarta (Btu/(hr-ft²-°F))
- ♦ C_{pa} : capacidad de calor del fluido anular (Btu/lbm-°F).

donde el parámetro B_a se define como:

$$B_a = \frac{w_a C_{pa}}{2\pi r_t U_t} \quad (137)$$

$$dH = c_p dT - C_j c_p dp \quad (101)$$

$$L_R \equiv \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \quad (107)$$

Combinando ecuaciones (135), (136), (101) y (107) y expresando los cambios en entalpías en términos de cambios en temperatura y presión

Obtenemos:

$$c_{pa} \frac{dT_a}{dz} - \frac{C_j c_{pa}}{J} \frac{dp_a}{dz} + \frac{g \sin \alpha}{g_c J} + \frac{v_a}{g_c J} \frac{dv_a}{dz} = -L_R c_{pa} (T_{et} - T_a) + \frac{c_{pa}}{B_a} (T_t - T_a), \quad (138)$$

sea

$$c_{pa} \frac{dT}{dz} + D_a = -L_R c_{pa} (T_{et} - T_a) + \frac{c_{pa}}{B_a} (T_t - T_a) \quad (139)$$

Usamos D_a para combinar aquellos términos cuya contribución total en (Ec. 139) es pequeña y cuyo valor permanece relativamente constante a través de la longitud total del pozo.

D_a esta dado por:

$$D_a = \frac{C_j c_{pa}}{J} \frac{dp_a}{dz} + \frac{g \sin \alpha}{g_c J} + \frac{v_a}{g_c J} \frac{dv_a}{dz} \quad (140)$$

El balance de energía para el fluido en la tubería se puede escribir similarmente como:

$$c_{pt} \frac{dT}{dz} + D_t = \frac{w_a c_{pa}}{w_t B_a} (T_t - T_a) \quad (141)$$

Donde D_t es el termino análogo a D_a para el fluido en la tubería. La (Ec. 141) puede ser usada para escribir T_a en términos de T_t por sustitución en (Ec. 139) como:

$$T_a = T_t - B' \frac{dT_t}{dz} - B' \frac{D_t}{c_{pt}} \quad (142)$$

donde el parámetro B' se define como:

$$B' = \frac{w_t c_{pt}}{2\pi r_t U_t} \quad (143)$$

Combinando las ecuaciones (139) y (142), encontramos la ecuación diferencial que gobierna la temperatura del fluido, la cual se escribe así:

$$-\frac{B'}{L_R} \frac{d^2 T_t}{dz^2} + B'' \frac{dT_t}{dz} - T_t + T_{es} + g_G \sin \alpha + D' = 0 \quad (144)$$

donde el parámetro B'' se define como:

$$B'' = B' + \frac{B'}{BL_R} + \frac{1}{L_R} \quad (145)$$

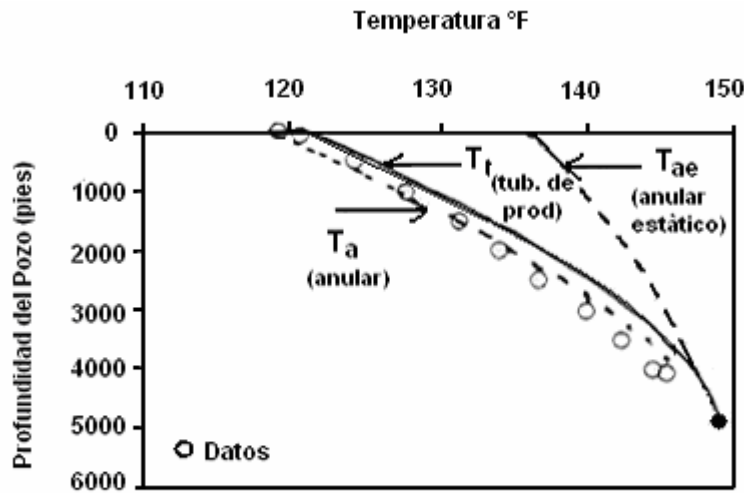
y

$$D' = B' \frac{D_t}{c_{pt}} + B' \frac{D_t}{c_{pt}} \frac{1}{B_a L_R} - \frac{D_a}{L_R c_{pa}} \quad (146)$$

La solución de la (Ec.144) conduce a la expresión para la temperatura de los fluidos en el anular y la tubería sobre la zona A, las cuales se escriben así

$$T_t = \alpha^t e^{\lambda_1 z} + \beta e^{\lambda_2 z} + g_G z \sin \alpha + B'' g_G \sin \alpha + T_{es} + D' \quad (147)$$

$$T_a = (1 - \lambda_1 B') \alpha^t e^{\lambda_1 z} + (1 - \lambda_2 B') \beta e^{\lambda_2 z} + g_G \sin \alpha (B'' - B') + g_G z \sin \alpha + T_{es} + D' \quad (148)$$



Representación de datos durante el flujo tubería/anular del pozo

Figura 21

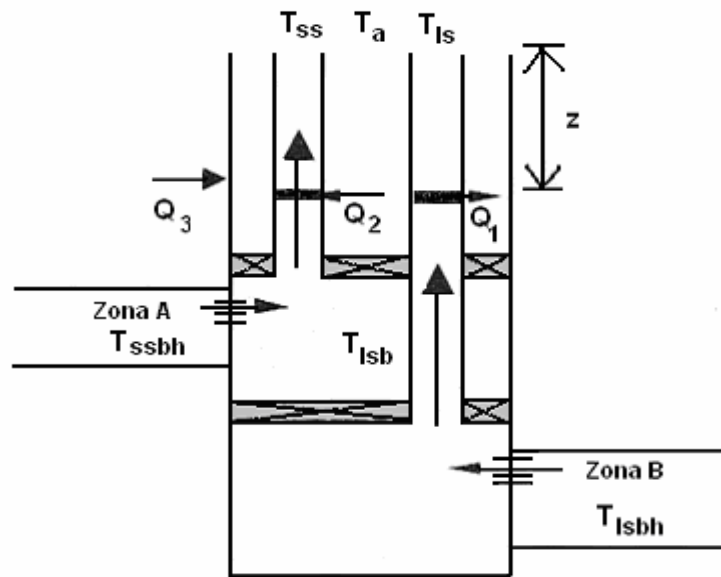
La **Figura 21** muestra que la (Ec.147) representada por una línea sólida, reproduce la temperatura del fluido en la tubería, medida dentro de una tolerancia aceptable.

La diferencia de temperatura entre la tubería y el anular es pequeña porque el flujo en ambas sartas promueve transferencia de calor. Podemos ver también que la producción del fluido anular causa una disipación mayor de calor debido a la convección forzada que la que hubiese en el caso de si el flujo anular fuese

estacionario, como se muestra por la línea punteada en **Figura 21** (anular estático). La diferencia de temperatura entre los dos casos es grande, indicando fuertemente la necesidad de una modelación más rigurosa.

1.16.2. Producción a Través de Dos Sartas de Tubería

1.16.2.1. Modelo matemático



Producción a través de dos sartas de tubería

Figura 22

La **Figura 22** muestra el esquema para el caso donde dos sartas son utilizadas para producir de dos zonas separadas con fluido estacionario en el anular. Pongamos ls para la sarta larga produciendo de la zona más profunda (zona B) y los subíndices ss para la sarta corta, produciendo de la zona superior (zona A). Al escribir el balance de energía para este caso, llamemos Q_2 a la energía que entra a la sarta corta del anular, mientras que Q_1 es la energía entrando al anular de la sarta larga.

El calor ganado del anular a la formación es designado como Q_3 . El balance de energía para el anular es como sigue:

$$Q_2 = Q_1 + Q_3 \quad (149)$$

Estos términos de transferencia de energía Q_1, Q_2, Q_3 se pueden expresar en términos de fuerzas impulsoras de diferencias de temperaturas y coeficientes de transferencia de calor como:

$$Q_1 = 2\pi r_1 U_1 (T_{ls} - T_a) \quad (150)$$

$$Q_2 = 2\pi r_2 U_2 (T_a - T_{ss}) \quad (151)$$

$$Q_3 = w_{ls} C_{pls} (T_{es} - T_a) L_R \quad (152)$$

El balance de energía para el fluido anular, dado por la (Ec.149) se puede describir como:

$$(T_{ls} - T_a)(2\pi r_{ls} U_{ls}) = (T_a - T_{ss})(2\pi r_{ss} U_{ss}) + (T_a - T_{et})(w_{ls} c_{pls} L_R) \quad (153)$$

El Balance de energía para la sarta larga esta dado por:

$$\frac{dT_{ls}}{dz} = (T_{ls} - T_a) \frac{2\pi r_{ls} U_{ls}}{c_{pls} w_{ls}} - \frac{g \sin \alpha}{c_{pls}} + \phi_{ls} \quad (154)$$

Similarmente para la Sarta corta, el balance de energía es:

$$\frac{dT_{ss}}{dz} = (T_a - T_{ss}) \frac{2\pi r_{ss} U_{ss}}{c_{pss} w_{ss}} - \frac{g \sin \alpha}{c_{pss}} + \phi_{ss} \quad (155)$$

Donde los parámetros ϕ_{ls} y ϕ_{ss} , se definen como:

$$\phi_{ls} = \left\{ C_{Jls} \left(\frac{dp}{dz} \right)_{ls} - \frac{v_{ls}}{c_{pls}} \frac{dv_{ls}}{dz} \right\} \quad (156)$$

y

$$\phi_{ss} = \left\{ C_{Jls} \left(\frac{dp}{dz} \right)_{ss} - \frac{v_{ss}}{c_{pss}} \frac{dv_{ss}}{dz} \right\} \quad (157)$$

De la ecuación (153) a la ecuación (155), se tienen 3 incógnitas T_{ls}, T_{ss}, T_a ; por consiguiente, ellas pueden ser resueltas fácilmente.

Estas ecuaciones son escritas de nuevo usando los parámetros $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1 T_{ls} + a_2 T_a + a_3 T_{ss} + a_4 (L - z) + a_5 = 0 \quad (158)$$

$$\frac{dT_{ls}}{dz} = -a(T_{ls} - T_a) + \phi_{ls} - \frac{g \sin \alpha}{c_{pls}} \quad (159)$$

y

$$\frac{dT_{ss}}{dz} = a(T_{ss} - T_a) + \phi_{ss} - \frac{g \sin \alpha}{c_{pss}} \quad (160)$$

Las Soluciones generales para temperatura en las sartas larga y corta están dada por:

$$T_{ls} = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + \frac{b_4}{b_3} z + \frac{b_3 b_5 - b_2 b_4}{b_3^2} \quad (161)$$

y

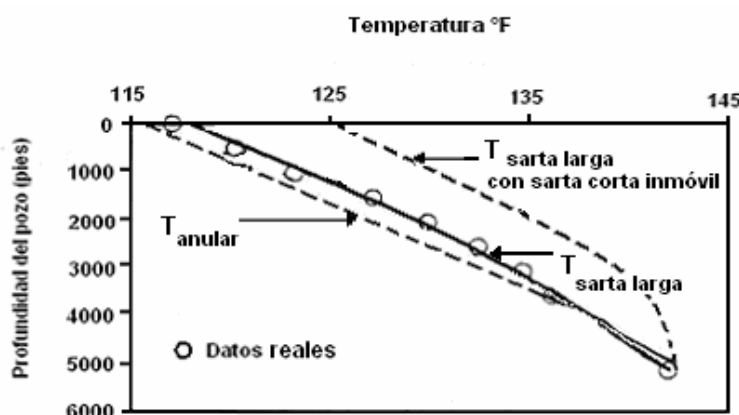
$$T_{ss} = d_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + d_2 c_2 e^{\lambda_2 z} + d_3 z + d_4 \quad (162)$$

Las expresiones para la temperatura del fluido anular está dada por:

$$\begin{aligned} T_a = & d_1 c_1 e^{\lambda_1 z} \left(1 - \frac{w_{ls} c_{pls} \lambda_{ls}}{2\pi r_{ss} U_{ss}} \right) + d_3 z + d_4 \\ & + d_2 c_2 e^{\lambda_2 z} \left(1 - \frac{w_{ss} c_{pss} \lambda_{ss}}{2\pi r_{ss} U_{ss}} \right) + \frac{w_{ss} c_{pss}}{2\pi r_{ss} U_{ss}} (\phi_{ss} - d_3) \end{aligned} \quad (163)$$

Por ejemplo del Campo en la **Figura 23**. Los fluidos son producidos a través de dos sartas separadas en este pozo. Hasan y Kabir intentaron reproducir el perfil de

temperatura “grabado” en la sarta larga. La **Figura 23** muestra (Ec.148) en línea sólida, la cual es el perfil de temperatura de la sarta larga. Como en el caso anterior, la diferencia de temperatura entre la sarta de producción (tubería) y el fluido anular es pequeña. Sin embargo, no como en el caso anterior, ocurre una diferencia de temperatura de cerca de 8 °F en el cabezal del pozo cuando la sarta corta permanece inmóvil, sugiriendo el menos dominio del fluido anular en el control de la transferencia de calor correctiva. La producción a través de la sarta corta y manteniendo la larga inmóvil produce una traza de temperatura muy similar en la sarta corta.



Representación de datos durante el flujo en 2 sargas de tuberías independientes

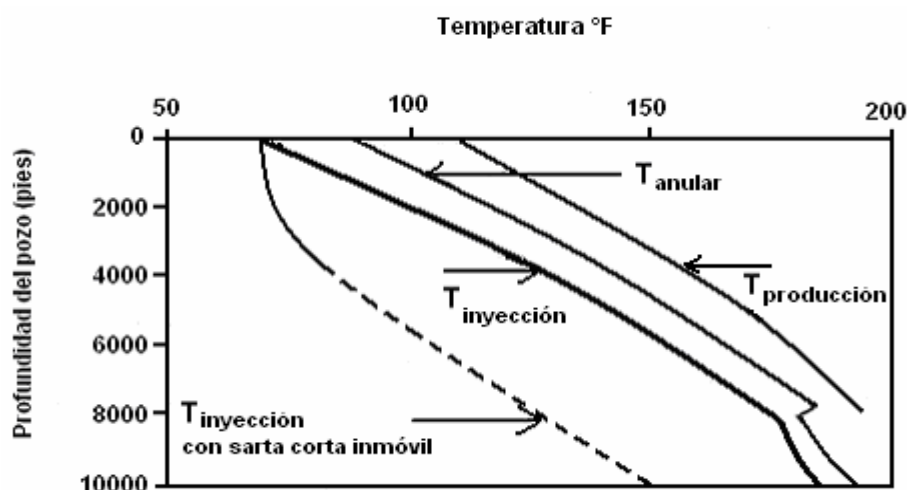
Figura 23

1.16.3. Producción e Inyección a Través de un Mismo Pozo

1.16.3.1. Modelo matemático

Cuando ocurre simultáneamente producción e inyección a través de un mismo pozo, surgen preguntas como que si la inyección de agua fría promueve la formación de hidratos durante la producción de gas o de parafina o asfaltenos durante la producción de petróleo.

Los saltos en la **Figura 24** (parte inferior derecha) que se ven en las temperaturas del fluido anular e inyectado a 800 pies son una reflexión directa de la abrupta entrada de fluido.



Perfiles de temperatura durante el escenario producción/inyección

Figura 24

Las ecuaciones diferenciales para este caso, obtenidas de los balances de energía, son exactamente aquellas para el último caso. Luego las ecuaciones (153), (154), (155) se aplican para el caso de producción e inyección a través de las dos sarts.

Las soluciones para estas ecuaciones son las mismas; las cuales pueden ser vistas en las (Ec.161) a la (Ec.163) representan temperatura de fluido de las tuberías de este caso. Sin embargo, diferencias en la dirección de flujo en este caso, comparado con el caso previo causan una pequeña diferencia en las condiciones de frontera para los dos casos, la cual conduce a una expresión algo diferente para los varios parámetros en las ecuaciones de temperatura.

Un ejemplo Ilustrativo es representado en la **Figura 24** para mostrar la variación en perfiles de temperatura cuando ocurre la operación simultánea de inyección y producción a través de dos sarts en un mismo pozo

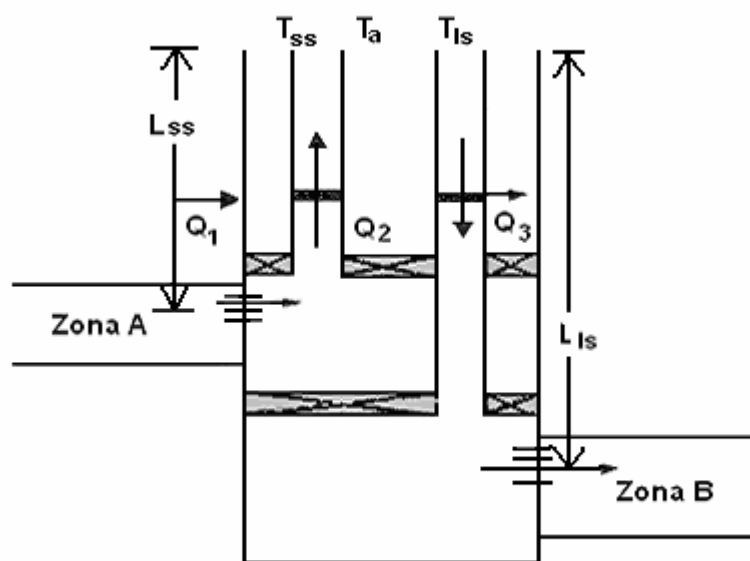
Aquí se inyecta agua fría a 10000 pies, mientras que la producción de petróleo ocurre en el intervalo de 8000 pies.

Debemos ver que el fluido inyectado asume un perfil de temperatura mucho más bajo en ausencia de producción de petróleo, por consiguiente sugiriendo pobre convección de calor en el anular.

En otras palabras, mientras el comportamiento de fase de fluido produciendo puede ser favorable durante la operación simultánea, pueden aparecer problemas durante el arranque si no se planifican contingencias.

Estos tipos de cálculos son necesarios durante el diseño de la completación para evitar potenciales problemas de producción en el momento que se realizan las operaciones.

La **Figura 25** muestra un esquema dual de producción/inyección. En este caso, un fluido es inyectado en el horizonte más profundo (sarta larga, ls), mientras que la producción ocurre a través del intervalo superior (sarta corta, ss), a través de dos sartas independientes, apartir de una zona A y una zona B.



Producción e inyección a través de dos sartas independientes

Figura 25

2. Metodología

La Metodología aplicada se basa principalmente en ejecutar el desarrollo de un programa para la obtención de la temperatura de formación en pozos, bajo un diseño de programación en Visual Basic 6.0, bajo el ambiente de Windows.

La Metodología empleada en este estudio fue dividida en las siguientes partes:

Recopilación de Información: además de recopilar información con referencia a la transferencia de calor por distintos autores en libros de texto, y documentación extraída a por medio de la consulta de páginas Web, se documentaron Archivos Técnicos de la Sociedad Americana de Ingenieros Petroleros (SPE) y se resumieron algunos de ellos.

Desarrollo del Modelo Matemático Utilizado por Hasan y Kabir: se realizó un desarrollo matemático a partir de un Balance de Energía inicial para pozos bajo regímenes de flujo monofásico y bifásico con el fin de comprobar la ecuación diferencial parcial de transferencia de calor por convección obtenida para el cálculo de temperatura del fluido producido.

Diseño del Programa Bajo el Ambiente de Windows (Visual Basic 6.0) para el Modelo Teórico: se definió el desarrollo de la programación partiendo de la demostración y comprobación de la exactitud del modelo planteado por Hassan y Kabir para el cálculo de temperatura del fluido las cuales se desarrollan en pozos bajo producción o inyección de gas, producción de líquido y producción de flujos bifásicos de gas/líquido.

Evaluación del Modelo Teórico para su Aplicación en Pozos en Regímenes de Flujo Monofásico y Bifásico: para la evaluación de dicho modelo se utilizaron 3

perfiles de temperatura de pozos escogidos al azar, a los cuales se les realizó el cálculo de la temperatura del fluido para distintas profundidades e intervalos de tiempo de medición con la data suministrada por cada uno de ellos. Cabe destacar que dicha data debe ser específica con relación a los datos que se requieren en las ecuaciones de temperatura del fluido.

2.1. Recopilación de Información

Se desarrollo un esquema basado en la información obtenida a través de libros de texto de transferencia de calor, calor y termodinámica, consulta de páginas Web y documentación bibliográfica proveniente de un resumen de Archivos Técnicos de la SPE, para ser utilizados en el diseño y evaluación del programa del modelo teórico planteado por Hasan y Kabir para el cálculo de temperatura del fluido a distintas profundidades en un pozo en particular.

El esquema está dividido en las siguientes partes:

Transferencia de Calor: se incluyeron conceptos importantes que serán tomados en cuenta al momento de iniciar el desarrollo matemático de las ecuaciones diferenciales de Balance de Energía en la Formación y Balance de Energía en un sistema de Producción/Inyección, así como también las ecuaciones de Transferencia de Calor en la interfase pozo/formación y coeficiente global de transferencia de calor.

Predicción de Temperaturas en Pozos: se fijaron procedimientos necesarios para el conocimiento general en la historia de predicción de temperaturas de formación, documentando diferentes escenarios de cálculos desarrollados por autores y profesionales en el área de ingeniería de petróleo, entre los más destacados se pueden nombrar: Rajiv Sagar, D. R. Doty, Zelimir Schmidt, Ramey, H. J. Jr., A.R. Hasan y C.S. Kabir.

Modelo y Estructura Teórico-Matemático del Diseño del Modelo Planteado por Hasam y Kabir: se identificaron los procedimientos más resaltantes que caracterizan el desarrollo y evaluación del programa para el cálculo de temperatura del fluido en los casos de producción o inyección de gas, producción de líquido y producción de flujos bifásicos de gas/líquido, con la finalidad de obtener mediciones óptimas de temperatura que minimicen el tiempo y costos operativos en el estudio de las características del pozo.

Adquisición de Data: esta sección comprende la identificación de muestreo y evaluaciones realizadas para pozos seleccionados al azar, señalando los datos y las diferencias existentes con el programa desarrollado para el cálculo de temperatura del fluido con respecto a las medidas realizadas directamente en pozos en producción o inyección bajo las mismas condiciones iniciales de prueba.

Bibliografía Disponible: adicionalmente se indicó al final del esquema una bibliografía disponible (Archivos Técnicos de la SPE) para ser empleada en futuros proyectos de cálculo de temperatura del fluido.

2.2. Desarrollo del Modelo Matemático Utilizado por Hasan y Kabir

Distribución de Temperatura en la Formación: se utilizó la información obtenida por la definición de la ecuación de difusividad para presentar la formación como un sólido homogéneo, con simetría alrededor del pozo, realizando un enfoque que reduce el problema de 3D a 2D. Cabe destacar que para dicho enfoque se deberán tomar en cuenta las condiciones de frontera definidas por la Ley de Fourier que serán indispensable para obtener la solución de la ecuación de continuidad.

Balance de Energía para el Fluido del Pozo: se recopiló la información correspondiente suministrada por el balance de energía como resultado del intercambio de calor entre el fluido del pozo y la formación para asumir corrientes monofásicas del fluido, que al considerar un volumen de control a lo largo del pozo, e introducir el concepto básico de entalpía por termodinámica, podemos obtener expresiones de temperatura de formación en función de la profundidad.

Coefficiente de Transferencia de Calor para Pozos: se utilizó la información perteneciente a la transferencia de calor por unidad de longitud para establecer una ecuación genérica, la cual podría ser utilizada en cualquier pozo productor o inyector, puesto que este coeficiente es consecuencia de la transferencia de calor radial producida entre el fluido del pozo y los alrededores, tomando en cuenta la resistencia de las paredes de las tuberías de producción como el revestidor y la pared de cemento, e introduciendo una expresión para el coeficiente global de transferencia de calor.

Pérdida de Calor en la Formación: con el fin de establecer una relación entre la diferencia de temperaturas en un pozo específico la cual varía con la profundidad, se utilizó la información establecida por la pérdida de calor en la interfase pozo/formación, introduciendo la definición del parámetro de relajación propuesta por Ramey. El mismo es tomado como constante acorde para la práctica, y es incluido previamente en muchos casos prácticos de la producción.

Temperatura del Fluido en el Pozo: se utilizó la información del balance de energía de un estado de equilibrio inicial para enfatizar como la temperatura de la formación varía linealmente con la profundidad y la temperatura del fluido depende de su posición dentro de la tubería y los alrededores. Así mismo se introdujo el concepto de gradiente geotérmico y el coeficiente Joule-Thompson en la ecuación general de temperatura de formación, se puede simplificar la ecuación para cada tipo de régimen

de flujo que pueda estar presente en la producción o inyección de un fluido en particular.

2.3. Diseño del Programa Bajo el Ambiente de Windows (Visual Basic 6.0) para el Modelo Teórico

Se ha propuesto un método numérico que refleja el cálculo de temperaturas de formación en un modelo simplificado de un software obtenido a partir de las descripciones del programa Visual Basic 6.0. El modelo refleja las características fundamentales del cálculo de temperaturas de formación, características que no se recogen en el estudio de yacimientos ya que el formato sólo refleja la estructura del código.

El modelo considera de forma explícita los parámetros que reflejaran la transferencia de calor en tuberías registradas mediante pruebas de campo previamente medidas. El modelo sólo toma consideraciones y simplificaciones que facilitan en gran medida el cálculo de temperaturas de formación. Las simplificaciones de mayor impacto consisten en el cálculo de variables como lo son el parámetro de relajación y el coeficiente global de calor, así como las condiciones de programación para el cálculo de la temperatura adimensional que depende del tiempo.

Estas consideraciones influyen, como es lógico, sobre la precisión del modelo y las medidas basadas en él, influencia que se ha valorado para la exactitud de los cálculos manuales.

La ventaja fundamental del modelo es que simplifica en gran medida los algoritmos en el cálculo de las mediciones realizadas en campo.

Por otro lado, el modelo puede ser utilizado como punto de partida para desarrollar herramientas que necesiten considerar la temperatura de formación en el intercambio de calor que puede afectar a los fluidos en la formación.

El programa incluye funcionalidad añadida con objeto de mejorar la calidad del proceso de producción en la industria petrolera, además este incluye funciones para gestionar cómodamente las versiones del diseño y gestionar la biblioteca de diseño para el cálculo de otros parámetros.

2.4. Evaluación del Modelo Teórico para su Aplicación en Pozos en Regímenes de Flujo Monofásico y Bifásico

Utilizando el programa desarrollado, se ha realizado un conjunto de pruebas con objeto de evaluar la precisión del modelo numérico de medidas tomadas en campo. Para ello se han utilizado diferentes datas de pozos de origen académico e industrial, desarrollados tanto dentro como fuera de distintos campos prácticos de la industria petrolera.

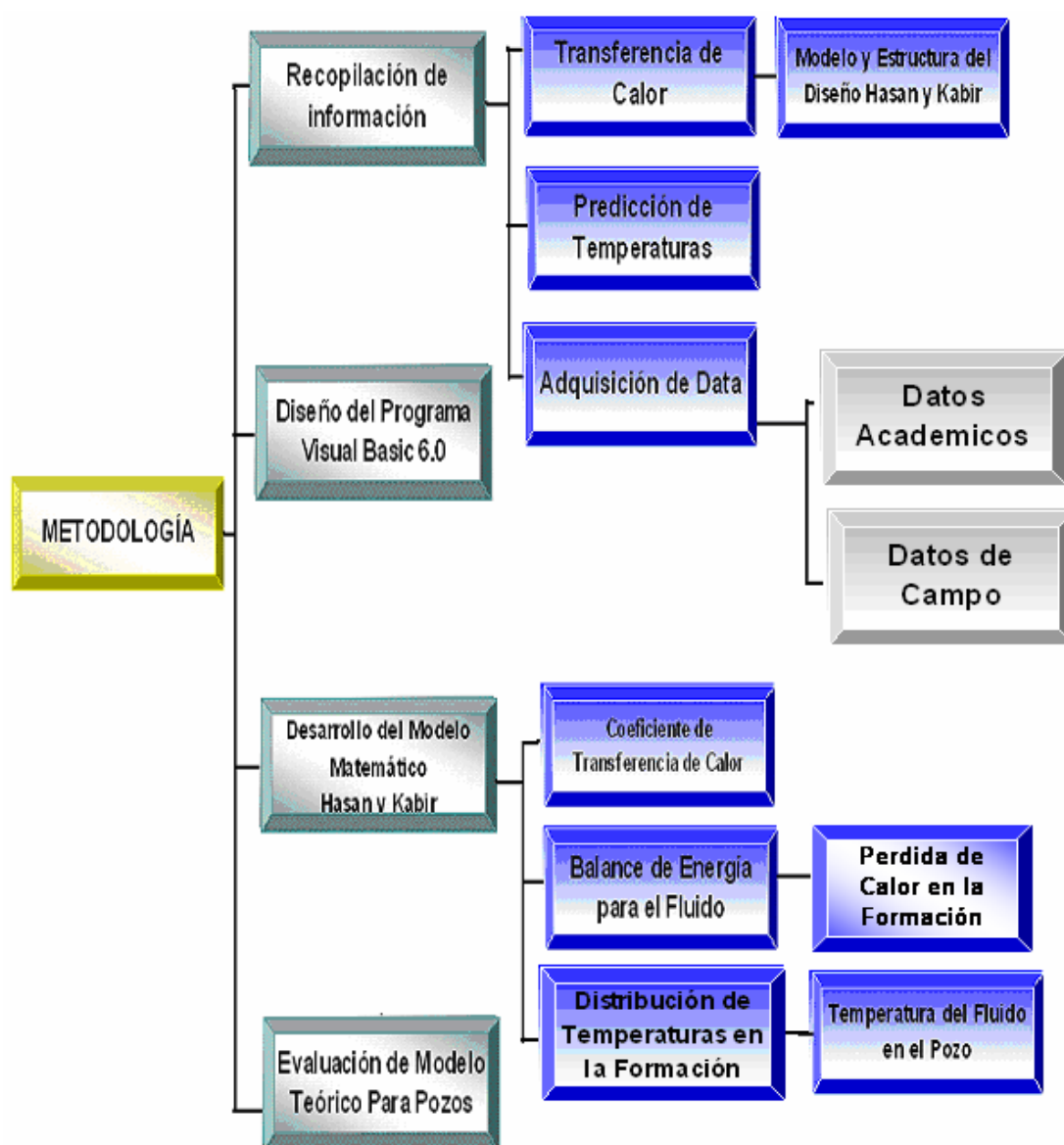
A través del programa desarrollado se establecieron relaciones entre los tiempos medidos y los tiempos adimensionales evaluados bajo prueba. Así mismo, se han analizado las coberturas de error obtenidas para diferentes tipos de prueba, como por ejemplo producción en flujos monofásicos y bifásicos. Para realizar esta caracterización, se han elaborado una serie de pruebas sobre un conjunto de diseños académicos y de aplicación industrial, que han proporcionado datos suficientes para extraer conclusiones.

De dichas evaluaciones se concluye que, aunque los resultados no sean exactos en algunas situaciones, el conjunto de medidas y el modelo son adecuados para medir la calidad del diseño numérico, sobre todo si se considera la relación entre el costo de aplicación y los beneficios potenciales.

La metodología aplicada puede ser vista a través de un esquema modular que define la organización y distribución del proceso de construcción del diseño

computacional, así como el desarrollo del modelo matemático realizado por Hasan y Kabir y es ilustrado en el diagrama de flujo 1.

Diagrama de Flujo N° 1



3. Análisis de Resultados

3.1. Producción de Líquido

Los resultados obtenidos en la evaluación del modelo matemático de Hasan y Kabir indican una versatilidad en el cálculo de temperaturas de los fluidos presentes en la formación para pozos en producción e inyección, en comparación con los cálculos manuales realizados para distintos datos: tanto académicas como reales tomadas al azar sin ninguna particularidad.

3.1.1. Primera Evaluación

Los primeros datos académicos utilizados fueron obtenidos del texto *Fluid Flow and Transfer in Wellbores* de los autores Hasan y Kabir, la cual suministró información restringida utilizable solo para el cálculo de temperaturas del fluido bajo producción de líquido y gas, los cuales arrojaron los siguientes resultados:

Cálculos manuales:

Datos:

$r_{ti} = 0,1197 \text{ ft}$	$k_a = 0,383 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$w = 8676 \text{ lbm/hr}$
$R_{to} = 0,125 \text{ ft}$	$k_e = 1,40 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,947 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$R_{wb} = 0,375 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 5355 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,2691 \text{ ft}$	$h_c = 9,62 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 158 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,2916 \text{ ft}$	$k_{cem} = 4,021 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 108 \text{ }^\circ\text{F}$

Como $t_D > 1,5 \text{ hr}$ utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D} \right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(158) \left(1 + \frac{0,6}{158} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_D = 2,947$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{to}}{r_{ti}} \right)}{k_t} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)}{k_c} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{wb}}{r_{co}} \right)}{k_{cem}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = \frac{0,125}{0,1197 \times 8,51} + \frac{0,125 \text{Ln} \left(\frac{0,125}{0,1197} \right)}{0,383} + \frac{0,125 \text{Ln} \left(\frac{0,2916}{0,2691} \right)}{1,40} + \frac{0,125 \text{Ln} \left(\frac{0,375}{0,2916} \right)}{4,021}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,108 + 1,41 \times 10^{-2} + 7,169 \times 10^{-3} + 7,819 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,152 \rightarrow U_{to} = 6.58 \frac{BTU}{hr - ft^2 - ^\circ F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,947 \times 8676} \left[\frac{0,125 \times 6,58 \times 1,40}{1,40 + (0,125 \times 6,58 \times 2,947)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 2,3 \times 10^{-4}$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA LIQUIDOS: (Tomamos solo una profundidad al azar = 3000 ft)

$$T_f = T_{eibh} - g_G \sin \alpha \left[(L - z) - \frac{(1 - e^{(z-L)L_R})}{L_R} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 108 - \frac{108}{3000} \sin 90^\circ \left[(5355 - 3000) - \frac{(1 - e^{(3000-5355)2,3 \times 10^{-4}})}{2,3 \times 10^{-4}} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 88,67^\circ F$$

Cálculo realizados por el Programa:

The screenshot shows the 'CalcTemp' software window with the following input fields and values:

Category	Parameter	Value
Producción de Líquido	[Teibh] - Temp. Est. Fondo Tierra	108
	[cp] - Calor Específico a Pres. Ctte.	0,947
LR	[w] - Flojo Másico del Fluido	8676
	[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,125
	[ke] - Conductividad Formación	1,40
TD	[tD] - Tiempo de medición de temp.	158
	[z] - Profundidad	3000
LR	[L] - Profundidad Total	5355
	[gG] - Gradiente Geotérmico	0,036
	[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
Uto	[rti] - Radio Interno Tub. Pozo	0,1197
	[hto] - Cof. por Trans. de Calor Con.	8,51
	[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,383
	[rins] - Radio del Aislante	0
	[kins] - Cond. Aislante	0
	[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	0
	[hr] - C. de T de Calor Anular-Fluido	0
	[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,2916
	[rci] - Radio Interno Revestidor	0,2691
	[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
	[rwb] - Radio del pozo	0,375
[kcem] - Cond. del Cemento	4,021	

At the bottom of the window, the calculated results are displayed:

Uto	LR	Theta
6,58582995 $\frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$	2,302734744	0

Al observar los resultados obtenidos por los cálculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 2,2% para el caso de producción de líquidos.

$$\% \text{ error } 1 = \frac{\text{datos Exp} - \text{datos T}}{\text{datos E}} \Rightarrow \% \text{ error } 1 = \frac{90,71 - 88,7}{90,71} \Rightarrow \% \text{ error } 1 = 2,2\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de los datos anteriores.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	Tf (para Liq)°F
2000	9,03	6,907	58,20
2500	8,79	6,759	78,32
3000	8,51	6,586	90,71
3500	8,09	6,585	98,49
4000	7,56	5,978	103,5
4500	6,78	5,459	106,4
5000	5,42	4,508	107,7
5355	0,89	0,831	108

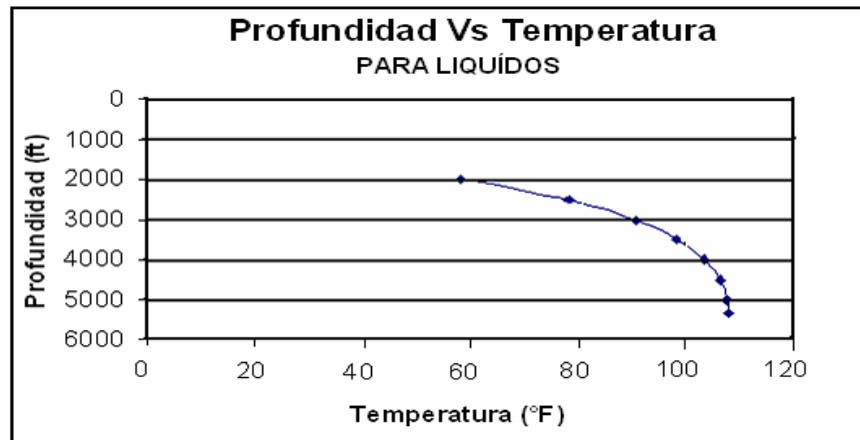


Figura 26

3.1.2. Segunda Evaluación

Cálculos manuales:

En la segunda evaluación para producción de líquidos se utilizó datos de campo como una muestra representativa estadística entre los que podemos nombrar:

Datos:

$r_{ti} = 0,083 \text{ ft}$	$k_a = 0,383 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$w = 7833 \text{ lbm/hr}$
$r_{to} = 0,108 \text{ ft}$	$k_e = 1,40 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,947 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$r_{wb} = 0,5 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 5938 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,371 \text{ ft}$	$h_c = 9,62 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 174 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,442 \text{ ft}$	$k_{cem} = 4,021 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 95 \text{ }^\circ\text{F}$

Como $t_D > 1,5 \text{ hr}$ utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D} \right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(174) \left(1 + \frac{0,6}{174} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_D = 2,994$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{to}}{r_{ti}} \right)}{k_t} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{co}}{r_{ci}} \right)}{k_c} + \frac{r_{to} \text{Ln} \left(\frac{r_{wb}}{r_{co}} \right)}{k_{cem}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = \frac{0,108}{0,083 \times 9,62} + \frac{0,108 \text{Ln} \left(\frac{0,108}{0,083} \right)}{0,383} + \frac{0,108 \text{Ln} \left(\frac{0,442}{0,371} \right)}{1,40} + \frac{0,108 \text{Ln} \left(\frac{0,5}{0,442} \right)}{4,021}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,135 + 7,42 \times 10^{-2} + 1,35 \times 10^{-2} + 3,31 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,226 \rightarrow U_{to} = 4,42 \frac{BTU}{hr-ft^2-^{\circ}F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,947 \times 7833} \left[\frac{0,108 \times 4,42 \times 1,40}{1,40 + (0,108 \times 4,42 \times 2,994)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 2 \times 10^{-4}$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA LIQUIDOS: (Tomamos solo una profundidad al azar = 3500 ft)

$$T_f = T_{eibh} - g_G \sin \alpha \left[(L - z) - \frac{(1 - e^{(z-L)L_R})}{L_R} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 95 - \frac{95}{3500} \sin 90^{\circ} \left[(5938 - 30500) - \frac{(1 - e^{(3500-5938)2 \times 10^{-4}})}{2 \times 10^{-4}} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 81,2^{\circ}F$$

Cálculo realizados por el Programa:

The screenshot shows the 'CalcTemp' software window with the following data:

Category	Parameter	Value
Producción de Líquido	[Teibh] - Temp. Est. Fondo Tierra	95
	[cp] - Calor Específico a Pres.Cte.	0,947
LR	[w] - Flujo Másico del Fluido	7833
	[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,108
	[ke] - Conductividad Formación	1,40
TD	[tD] - Tiempo de medición de temp.	174
	[z] - Profundidad	3500
	[L] - Profundidad Total	5938
	[gG] - Gradiente Geotérmico	0,027
	[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
	Uto	4,41844065 $\frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$
Uto	[rti] - Radio Interno Tub. Pozo	0,083
	[hto] - Coef. por Trans. de Calor Con.	9,62
	[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,383
	[rins] - Radio del Aislante	0
	[kins] - Cond. Aislante	0
	[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	0
	[hr] - C. de T de Calor Anular-Fluido	0
	[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,442
	[rci] - Radio Interno Revestidor	0,371
	[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
	[kcem] - Cond. del Cemento	4,021
Theta	0,27777122	

The 'Calcular' button is highlighted in red, and the result '82,7272' is displayed next to it.

Al observar los resultados obtenidos por los cálculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 1,83% para el caso de producción de líquidos.

$$\% \text{ error 1 relativo} = \frac{\text{DatosExp} - \text{DatosT}}{\text{DatosExp}} \Rightarrow \% \text{ error 2 relativo} = \frac{82,72 - 81,2}{82,72} \Rightarrow \% \text{ error 1 relativo} = 1,83\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de los datos anteriores.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	T _f (para Liq)°F
2500	8,79	6,759	76,27
3500	8,09	6,585	82,72
4000	7,56	5,978	88,48
4500	6,78	5,459	91,29
5000	5,42	4,508	93,37

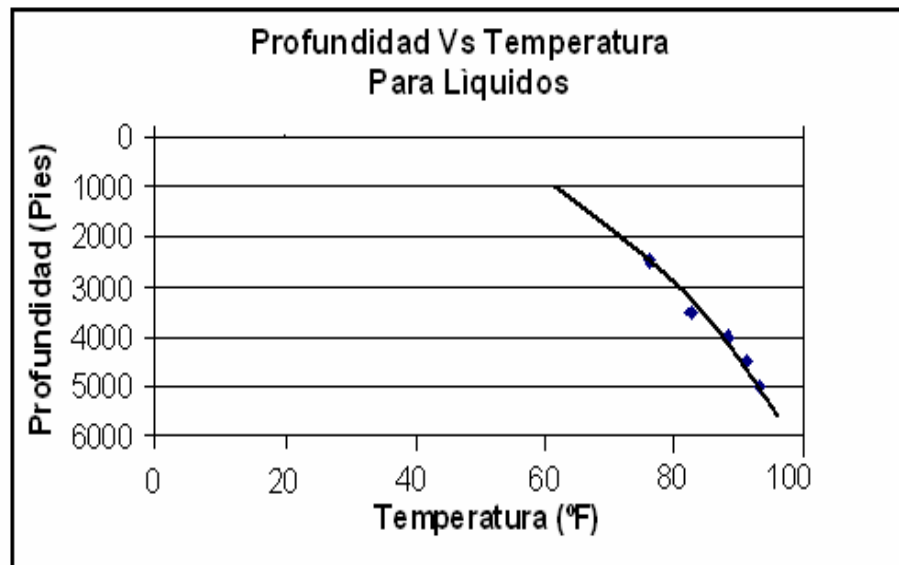


Figura 27

Sin embargo es necesario resaltar que los cálculos realizados a través del programa computacional poseen algunas restricciones al obtener la temperatura de los fluidos al iterar con distintas profundidades, generadas por el tipo de ecuación en el modelo matemático utilizado. Específicamente para el caso de la producción de líquidos, podemos nombrar:

- En cálculos a la profundidad de cero (0) pies el resultado obtenido no corresponde con el comportamiento correcto o mas bien teórico de las temperaturas a lo largo del pozo (**ver Figura 26**), puesto que el valor obtenido es superior al de una temperatura a mayor profundidad, destacando que se evaluó en pozos verticales esto se considera un resultado erróneo. Este error es generado por las mediciones previamente realizadas que generan los datos para la realización de las evaluaciones y es observado por las medidas de los gradientes térmicos que contienen los datos utilizados.

Por otro lado el comportamiento de las restantes evaluaciones con profundidades escogidas al azar cumple con los cálculos realizados manualmente, además de presentar valores lógicos característicos de los fluidos de producción, es decir, a medida que se aumenta la profundidad para cada evaluación también aumenta la temperatura del fluido presente en el pozo.

3.2. Producción de Gas

3.2.1. Primera Evaluación

Para el tercer y cuarto estudio realizado es para el caso de producción de gas realizada a través de los datos de campo dados por una compañía operadora en el país.

Cálculos manuales:

Datos:

$r_{ti} = 0,145 \text{ ft}$	$k_a = 0,356 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$w = 11667 \text{ lbm/hr}$
$r_{to} = 0,166 \text{ ft}$	$k_e = 1,40 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,826 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$r_{wb} = 0,5 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 4624 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,371 \text{ ft}$	$h_c = 8,09 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 2,58 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,442 \text{ ft}$	$k_{cem} = 3,612 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 93 \text{ }^\circ\text{F}$

Como $t_D > 1,5 \text{ hr}$ utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D}\right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(2,58) \left(1 + \frac{0,6}{2,58}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_D = \mathbf{0,99}$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_t} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{wb}}{r_{co}}\right)}{k_{cem}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = \frac{0,166}{0,145 \times 8,09} + \frac{0,166 \text{Ln}\left(\frac{0,166}{0,145}\right)}{0,356} + \frac{0,166 \text{Ln}\left(\frac{0,442}{0,371}\right)}{1,40} + \frac{0,166 \text{Ln}\left(\frac{0,5}{0,442}\right)}{3,612}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,141 + 6,306 \times 10^{-2} + 2,07 \times 10^{-2} + 5,66 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,2304 \rightarrow U_{to} = 4,33 \frac{BTU}{hr-ft^2-^{\circ}F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,826 \times 11667} \left[\frac{0,166 \times 4,33 \times 1,40}{1,40 + (0,166 \times 4,33 \times 0,99)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 3,106 \times 10^{-4}$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA GAS: (Tomamos solo una profundidad al azar = 3500 ft)

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right]$$

$$\rightarrow T_f = 93 + \frac{1 - e^{(3000-4547)3,106 \times 10^{-4}}}{3,106 \times 10^{-4}} \left[\frac{98}{3000} \sin 90 - \frac{32,2 \sin 90}{0,826 \times 778 \times 32,2} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 116,7^{\circ}F$$

Cálculo realizados por el Programa:

The screenshot shows the CalcTemp software interface with the following data:

Category	Parameter	Value
Producción de Gas	[Tei] - Temp Formación a Cond. I.	93
	[cp] - Calor Específico a Pres. Cte.	0,826
	Uto	3,04946175 $\frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$
	Theta	0
LR	[w] - Flujo Másico del Fluido	11667
	[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,166
	[ke] - Conductividad Formación	1,40
	[z] - Profundidad	3500
	[L] - Profundidad Total	4624
	[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
Uto	[rti] - Radio Interno Tub. Pozo	0,124
	[hto] - Coef. por Trans. de Calor Con.	8,09
	[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,356
	[rins] - Radio del Aislante	0
	[kins] - Cond. Aislante	0
	[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	0
	[hr] - C. de T de Calor Anular-Fluido	0
	[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,442
	[rci] - Radio Interno Revestidor	0,371
	[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
	[kcm] - Cond. del Cemento	3,612

Calculated Results:

Parameter	Value
Uto	3,04946175 $\frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$
LR	2,370539639
Theta	0

Al observar los resultados obtenidos por los cálculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 0,68 % para el caso de producción de gas.

$$\% \text{ error } 1: \frac{\text{datos } T - \text{datos Exp}}{\text{datos } T} \Rightarrow \% \text{ error } 1: \frac{116,7 - 115,9}{116,7} \Rightarrow \% \text{ error } 1: = 0,68\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de los datos anteriores.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	Tf (para Gas)°F
1328	9,03	2,54	101,5
2600	8,79	2,55	104,8
3015	8,51	2,55	113,8
3500	8,09	5,31	115,9
4020	7,56	6,3	118,4

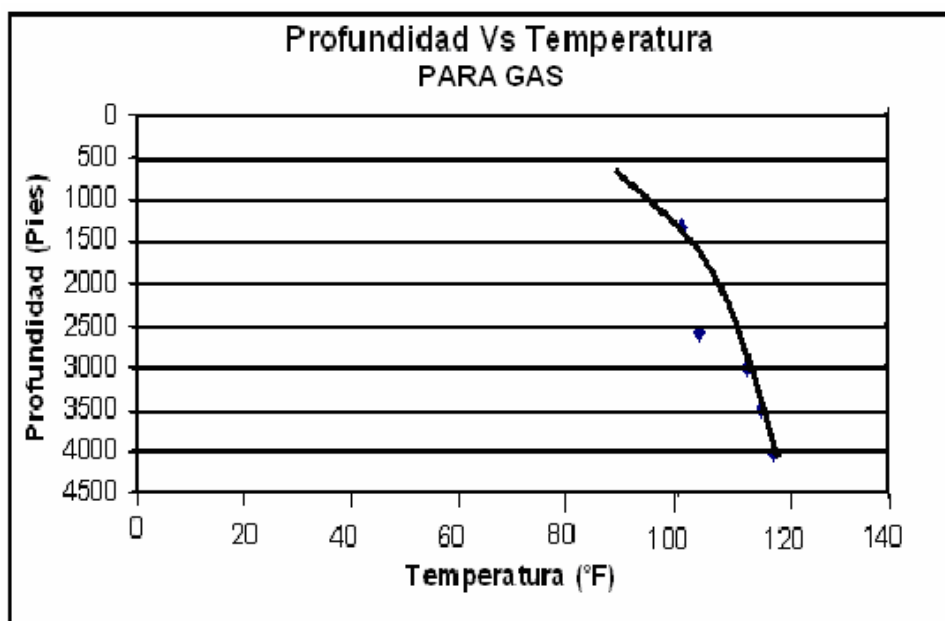


Figura 28

3.2.2. Segunda Evaluación

Cálculos manuales:

Datos:

$r_{ti} = 0,124 \text{ ft}$	$k_a = 0,356 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$W = 9306 \text{ lbm/hr}$
$r_{to} = 0,156 \text{ ft}$	$k_e = 1,40 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,826 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$r_{wb} = 0,5 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 4547 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,371 \text{ ft}$	$h_c = 8,09 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 4,25 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,442 \text{ ft}$	$k_{cem} = 3,612 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 98 \text{ }^\circ\text{F}$

Como $t_D > 1,5 \text{ hr}$ utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D} \right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(4,25) \left(1 + \frac{0,6}{4,25} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_D = 1,23$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_t} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c} + \frac{r_{to} \text{Ln}\left(\frac{r_{wb}}{r_{co}}\right)}{k_{cem}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = \frac{0,156}{0,124 \times 8,09} + \frac{0,156 \text{Ln}\left(\frac{0,156}{0,124}\right)}{0,356} + \frac{0,156 \text{Ln}\left(\frac{0,442}{0,371}\right)}{1,40} + \frac{0,156 \text{Ln}\left(\frac{0,5}{0,442}\right)}{3,612}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,155 + 0,100 + 1,95 \times 10^{-2} + 5,32 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,280 \rightarrow U_{to} = 3,56 \frac{BTU}{hr-ft^2-^{\circ}F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,826 \times 9306} \left[\frac{0,156 \times 3,56 \times 1,40}{1,40 + (0,156 \times 3,56 \times 1,23)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 3,05 \times 10^{-4}$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA GAS: (Tomamos solo una profundidad al azar = 3000 ft)

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right]$$

$$\rightarrow T_f = 98 + \frac{1 - e^{(3000-4547)3,05 \times 10^{-4}}}{3,05 \times 10^{-4}} \left[\frac{98}{3000} \sin 90 - \frac{32,2 \sin 90}{0,826 \times 778 \times 32,2} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_f = 136,36^{\circ}F$$

Cálculo realizados por el Programa:

The screenshot shows the 'CalcTemp' software window with the following input parameters:

Category	Parameter	Value
Producción de Gas	[Tej] - Temp Formación a Cond. I.	98
	[cp] - Calor Específico a Pres. Ctte.	0,826
LR	[w] - Flujo Másico del Fluido	9306
	[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,156
	[ke] - Conductividad Formación	1,40
TD	[tD] - Tiempo de medición de temp.	4,25
	[z] - Profundidad	3000
	[L] - Profundidad Total	4547
	[gG] - Gradiente Geotérmico	0,032
	[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
	Uto	[rit] - Radio Interno Tub. Pozo
	[hto] - Coef. por Trans. de Calor Con.	8,09
	[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,356
	[rins] - Radio del Aislante	0
	[kins] - Cond. Aislante	0
	[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	0
	[hr] - C. de T. de Calor Anular-Fluido	0
	[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,442
	[rci] - Radio Interno Revestidor	0,371
	[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
	[rwb] - Radio del pozo	0,5
	[kcem] - Cond. del Cemento	3,612
	Uto	
LR		3,003140146
Theta		0

The 'Calcular' button is highlighted in red, and the result '133,399' is displayed next to it.

Al observar los resultados obtenidos por los cálculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 2,17 % para el caso de producción de gas.

$$\% \text{ error } 1: \text{ relativo} = \frac{\text{datos}T - \text{datos}Exp}{\text{datos}T} \Rightarrow \% \text{ error } 1: \text{ relativo} = \frac{136,36 - 133,4}{136,4} \Rightarrow \% \text{ error } 1: \text{ relativo} = 2,17\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de los datos anteriores.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	Tf (para Gas)°F
1900	9,03	2,54	130,6
2600	8,79	2,55	132,2
3000	8,51	2,55	133,4
3500	8,09	5,31	141,4
4200	7,56	6,3	144,3

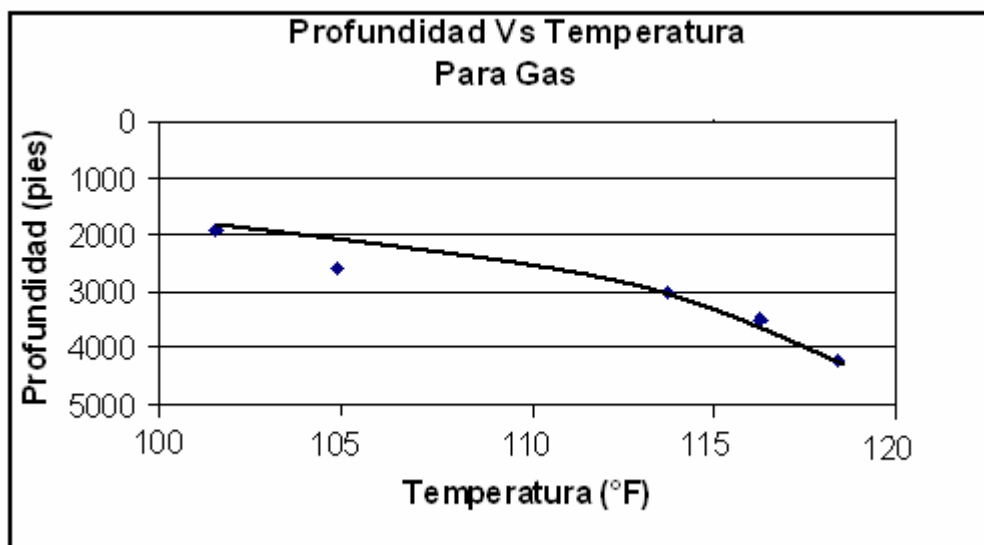


Figura 29

Al observar los cálculos realizados para la producción de gas se puede verificar la confiabilidad del programa computacional, en comparación con los resultados manuales.

Sin embargo cabe destacar que los cálculos presentan errores a altas profundidades (profundidad total del pozo) y muy bajas profundidades (sobre la superficie), errores que son característicos de las mediciones que generan los datos, como por ejemplo las medida de los gradientes de temperatura y los valores de los

coeficientes de transferencia de calor para cada profundidad, los cuales generan variaciones hasta de un 2% en los cálculos obtenidos por el programa computacional ejecutable.

Por otro lado, en el análisis del comportamiento de las temperaturas con la profundidad resultó ideal, es decir, cumple con los principios básicos de la Ley de Gases Ideales demostrando que a distintos valores de presión la temperatura se comporta directamente proporcional a ellos, verificando que a mayor profundidad, mayores son las temperaturas.

3.3. Inyección

La quinta evaluación realizada fue para el caso de inyección a través de datos académicos suministrados por los archivos de la SPE en el documento N° 19702 de Rajiv Sagary Zelimir Schmidt.

Cálculos manuales:

Datos:

$r_{ti} = 0,083\text{ft}$	$k_a = 0,504 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$w = 288 \text{ lbm/hr}$
$r_{to} = 0,108\text{ft}$	$k_e = 1,4 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,826 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$r_{wb} = 0,3125 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 6792 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,206\text{ft}$	$h_c = 5,4225 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 3 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,252 \text{ ft}$	$k_{cem} = 4,021 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 148 \text{ }^\circ\text{F}$
$API = 35$	$GLR = 375$	$P_{wf} = 174 \text{ psi}$
$\gamma_G = 0,75$	$T_{fwh} = 237,2^\circ\text{F}$	$T_{es} = 188 \text{ }^\circ\text{F}$

Como $t_D > 1,5$ hr utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D} \right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \text{Ln}(3) \left(1 + \frac{0,6}{3} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_D = \mathbf{1,06}$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{0,108}{0,083 \times 5,4225} + \frac{0,108 \text{Ln}\left(\frac{0,108}{0,083}\right)}{0,504} + \frac{0,108 \text{Ln}\left(\frac{0,252}{0,206}\right)}{1,4} + \frac{0,108 \text{Ln}\left(\frac{0,3125}{0,252}\right)}{4,021}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,239 + 5,64 \times 10^{-2} + 1,55 \times 10^{-2} + 5,77 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,317 \rightarrow U_{to} = 3,14 \frac{BTU}{hr - ft^2 - ^\circ F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,826 \times 288} \left[\frac{0,108 \times 3,14 \times 1,40}{1,40 + (0,108 \times 3,14 \times 1,06)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 7,12 \times 10^{-3}$$

$$\phi = -0.002978 + 1.006 \times 10^{-6} p_{wh} + 1.906 \times 10^{-4} w - 1.047 \times 10^{-6} GLR + 3.229 \times 10^{-5} API + 0.004009 \gamma_g - 0.3551 g_G$$

$$\phi = -0,002978 + 1,006 \times 10^{-6} x174 + 1,906 \times 10^{-4} x288 - 1,047 \times 10^{-6} x375 + 3,229 \times 10^{-5} x35 + 0,004009 x0,75 - 0,3551 x0,0274$$

$$\phi = 0,046$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA INYECCIÓN: (Tomamos solo una profundidad al azar = 5000 ft)

$$T_f = T_{ei} \pm \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] + e^{-zL_R} (T_{fwh} - T_{es})$$

$$T_f = 148 \pm \frac{1 - e^{(5000-6792)7,12 \times 10^{-3}}}{7,12 \times 10^{-3}} \left[0,0274 \sin 90 + 0,046 - \frac{32,2 \sin 90}{0,826 \times 778 \times 32,2} \right] + e^{-5000 \times 7,12 \times 10^{-3}} (237,2 - 188)$$

$$T_f = 158,09^\circ F$$

Cálculo realizados por el Programa:

The screenshot shows the CalcTemp software interface with the following input parameters and calculated results:

Parameter	Value
[Tei] - Temp Formación a Cond. I.	148
[Tfwh] - Temp del Fluido Cabezal	237,2
[Tes] - Temp Superficie de la Tierra	188
[cp] - Calor Específico a Pres.Ctte.	0,826
[pwh] - Presión de Fondo del Pozo	174
[GLR] - Relación Gas-Líquido	375
[API] - Grados API	35
[psig] - Gravedad Esp. del Gas	0,75
[w] - Flojo Másico del Fluido	288
[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,108
[ke] - Conductividad Formación	1,40
[TD] - Tiempo de medición de temp.	3
[z] - Profundidad	5000
[L] - Profundidad Total	6792
[gG] - Gradiente Geotérmico	0,0274
[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
[rti] - Radio Interno Tub. Pozo	0,083
[hto] - Coef. por Trans. de Calor Con.	5,4225
[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,504
[rins] - Radio del Aislante	0
[kins] - Cond. Aislante	0
[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	0
[hr] - C. de T de Calor Anular-Fluido	0
[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,252
[rci] - Radio Interno Revestidor	0,206
[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
[rwb] - Radio del pozo	0,3125
[kcem] - Cond. del Cemento	4,021
Uto	3,14751272 $\frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$
LR	7,022957270
Theta	0,046104379
Calculated T _f	157,854

Al observar los resultados obtenidos por los cálculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 0,002 % para el caso de inyección.

$$\% \text{ error } 1_{\text{relativo}} = \frac{\text{datos } T - \text{datos } Exp}{\text{datos } T} \Rightarrow \% \text{ error } 1_{\text{relativo}} = \frac{158,09 - 157,85}{158,09} \Rightarrow \% \text{ error } 1_{\text{relativo}} = 0,002\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de los datos anteriores.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	Tf (para Gas)°F
3000	8,79	4,62	155,3
4000	8,51	4,00	156,8
4500	8,09	3,708	157
5000	7,56	3,14	158,09
6792	6,78	0,423	237,2

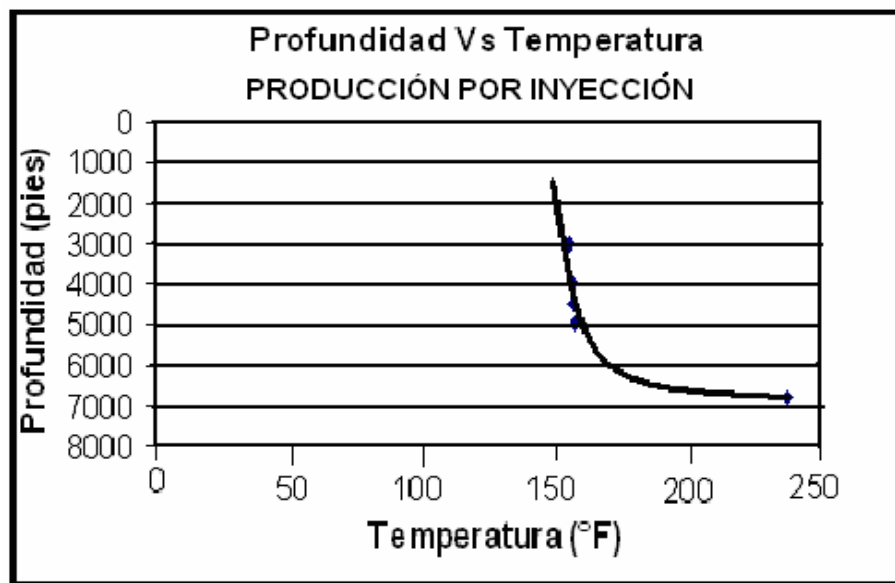


Figura 30

En el caso de inyección se pudo observar que las evaluaciones no presentaron ninguna restricción, mostrando resultados óptimos correspondientes tanto para los cálculos manuales como para el comportamiento teórico del fluido inyectado en este caso gas lift, es necesario destacar que los datos suministrados son de carácter académico y pedagógica para un proceso ideal de un pozo vertical específico sin aislante, por el cual los resultados se hacen viables y confiables en su totalidad.

Será necesario para futuras evaluaciones hacer énfasis en parámetros que revelan la alteración de las medidas del diseño matemático como lo son el flujo másico del fluido que muestra la cantidad de fluido inyectado, la profundidad a la cual se realizará la inyección y los gradientes de temperatura según la profundidad de la medición en el pozo dependiendo del grado de inclinación del mismo.

3.4. Producción Bifásica Gas /Líquido

La sexta y última evaluación realizada fue para el caso de producción de flujo bifásico gas/líquido a través de datos de campo dados por una compañía operadora en el país.

Cálculos manuales:

Datos:

$r_{ti} = 0,145 \text{ ft}$	$k_a = 0,603 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$w = 1500 \text{ lbm/hr}$
$r_{to} = 0,166 \text{ ft}$	$k_e = 1,40 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$c_p = 0,839 \text{ BTU/lbm-}^\circ\text{F}$
$r_{wb} = 0,5 \text{ ft}$	$k_f = 0,1 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$L = 4620 \text{ ft}$
$r_{ci} = 0,371 \text{ ft}$	$h_c = 7,56 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$t_D = 80 \text{ hr}$
$r_{co} = 0,442 \text{ ft}$	$k_{cem} = 4,021 \text{ BTU/hr-ft-}^\circ\text{F}$	$T_{eibh} = 106 \text{ }^\circ\text{F}$
$API = 31$	$\gamma_G = 0,83$	$p_{wf} = 204 \text{ psi}$
$GLR = 262$	$r_{ins} = 0,177$	$k_{ins} = 0,0192$
$h_r = 4,931$		

Como $t_D > 1,5 \text{ hr}$ utilizamos:

$$T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \ln(t_D) \left(1 + \frac{0,6}{t_D} \right) \rightarrow T_D = 0,4063 + \frac{1}{2} \ln(80) \left(1 + \frac{0,6}{80} \right) \rightarrow$$

$$T_D = 2,613$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_t} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{k_{ins}} + \frac{r_{to}}{r_{ins} (h_c + h_r)} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{wb}}{r_{co}}\right)}{k_{cem}}$$

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{0,166}{0,145 \times 7,56} + \frac{0,166 \ln\left(\frac{0,166}{0,145}\right)}{0,603} + \frac{0,166 \ln\left(\frac{0,177}{0,166}\right)}{0,0192} + \frac{0,166}{0,177 (7,56 + 4,931)} +$$

$$+ \frac{0,166 \ln\left(\frac{0,442}{0,371}\right)}{1,40} + \frac{0,166 \ln\left(\frac{0,5}{0,442}\right)}{4,021}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,141 + 2,02 \times 10^{-2} + 2,07 \times 10^{-2} + 5,66 \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{U_{to}} = 0,84 \rightarrow U_{to} = 1,18 \frac{BTU}{hr - ft^2 - ^\circ F}$$

$$L_R = \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow L_R = \frac{2\pi}{0,839 \times 1500} \left[\frac{0,166 \times 1,18 \times 1,40}{1,40 + (0,166 \times 1,18 \times 2,613)} \right]$$

$$\rightarrow L_R = 7,16 \times 10^{-4}$$

$$\phi = -0.002978 + 1.006 \times 10^{-6} p_{wh} + 1.906 \times 10^{-4} w - 1.047 \times 10^{-6} GLR + 3.229 \times 10^{-5} API + 0.004009 \gamma_g - 0.3551 g_G$$

$$\phi = -0,002978 + 1,006 \times 10^{-6} \times 204 + 1,906 \times 10^{-4} \times 1500 - 1,047 \times 10^{-6} \times 262 + 3,229 \times 10^{-5} \times 31 + 0,004009 \times 0,83 - 0,3551 \times 0.0265$$

$$\phi = 0,296$$

Ahora sustituimos los datos suministrados y los valores de los parámetros faltantes previamente calculados para cada ecuación de temperatura del fluido correspondiente:

PARA GAS/LÍQUIDO : (Tomamos solo una profundidad al azar = 4000 ft)

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right]$$

$$T_f = 106 + \frac{1 - e^{(4000 - 4620) 7,16 \times 10^{-4}}}{7,16 \times 10^{-4}} \left[0,0265 \sin 90 + 0,296 - \frac{32,2 \sin 90}{0,839 \times 778 \times 32,2} \right]$$

$$T_f = 266,7 \text{ } ^\circ\text{F}$$

Cálculo realizado por el Programa:

The screenshot shows the CalcTemp software interface with the following input parameters and results:

Category	Parameter	Value
Producción de Gas-Líquido	[Tei] - Temp Formación a Cond. l.	106
	[cp] - Calor Específico a Pres. Ctte.	0,839
	[pwh] - Presión de Fondo del Pozo	204
	[GLR] - Relación Gas-Líquido	262
Theta	[API] - Grados API	31
	[psig] - Gravedad Esp. del Gas	0,83
	Calcular	256,856
LR	[w] - Flujo Másico del Fluido	1500
	[rto] - Radio Externo Tub Pozo	0,166
	[ke] - Conductividad Formación	1,40
TD	[TD] - Tiempo de medición de temp.	80
Uto	[rti] - Radio Interno Tub. Pozo	0,145
	[hto] - Coef. por Trans. de Calor Con.	7,56
	[kt] - Cond. Anular-Fluido	0,603
	[rins] - Radio del Aislante	0,177
Uto	[kins] - Cond. Aislante	0,0192
	[hc] - Coef. Trans. Calor por Conv.	7,56
	[ht] - C. de T de Calor Anular-Fluido	4,931
	[rco] - Radio Ext. Revestidor	0,442
Uto	[rci] - Radio Interno Revestidor	0,371
	[kc] - Cond. en el Revestidor	1,4
	[rwb] - Radio del pozo	0,5
	[kcem] - Cond. del Cemento	4,021
Uto	[z] - Profundidad	4000
	[L] - Profundidad Total	4620
	[gG] - Gradiente Geotérmico	0,0265
	[alpha] - Angulo Resp Horizontal	90
Uto $1,18436394 \frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot ^\circ F}$ LR $7,177921168$ Theta $0,27777122$		

Al observar los resultados obtenidos por los calculos manuales y compararlos con los resultados obtenidos por el programa computacional, se demuestra la versatilidad del diseño del programa, presentando un error de 0,2 % para el caso de producción bifásica líquido/gas.

$$\% \text{ error 1 relativo} = \frac{\text{datos}T - \text{datosExp}}{\text{datos}T} \Rightarrow \% \text{ error 1 relativo} = \frac{266,7 - 256,856}{266,7} \Rightarrow \% \text{ error 1 relativo} = 3,7\%$$

A continuación presentamos una tabla que refleja el cálculo de las temperaturas de los fluidos obtenida con el programa computacional para distintas profundidades tomadas al azar, utilizando la información de la data anterior.

Profundidad (ft)	hc (BTU/hr-ft ² -°F)	U _{to} (BTU/hr-ft ² -°F)	Tf (para Gas)°F
2000	8,79	0,82	202,755
2450	8,51	0,87	213,203
3000	8,09	0,95	218,417
3400	7,56	0,96	247,716
4000	6,78	1,184	256,856

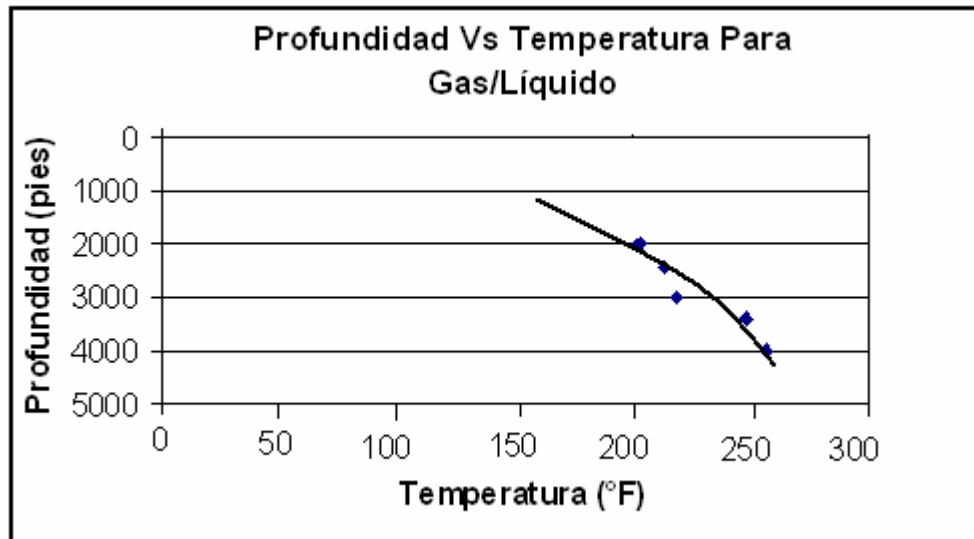


Figura 31

En las evaluaciones realizadas para la producción de un fluido bifásico se presentaron un conjunto de consideraciones para cada una de ellas, puesto que los resultados obtenidos mostraron variaciones incorrectas en el comportamiento teórico de un fluido con variaciones de profundidad, entre las cuales podemos mencionar:

- La relación gas- líquido (RGP) se asumió constante para toda profundidad.
- Se varió el flujo másico del fluido para cada cálculo de temperatura a distintas profundidades.

Al establecer estas consideraciones se pudo corregir los errores de las evaluaciones realizadas, los cuales son característicos de la poca precisión que aporta la data del perfil de temperaturas, obteniendo así un comportamiento ideal de los cambios de temperatura con la profundidad en la producción de un pozo.

Tabla Comparativa de Resultados Manuales y Resultados Experimentales para Distintos Regímenes de Flujo

Regímenes de flujo	Pozos	Cálculos Manuales	Cálculos Experimentales
Líquido	1 (Datos Académicos)	$U_{to}=6,58$ $L_R=2,3 \times 10^{-4}$ $T_f=88,67 (^{\circ}F)$	$U_{to}=6,58$ $L_R=2,3 \times 10^{-4}$ $T_f=90,71 (^{\circ}F)$
	2 (Datos de Campo)	$U_{to}=4,42$ $L_R=2 \times 10^{-4}$ $T_f=81,2$	$U_{to}=4,418$ $L_R=1,99 \times 10^{-4}$ $T_f=82,72$
Gas	1 (Datos de Campo)	$U_{to}=4,33$ $L_R=3,106 \times 10^{-4}$ $T_f=116,7 (^{\circ}F)$	$U_{to}=3,049$ $L_R=2,370 \times 10^{-4}$ $T_f=115,93 (^{\circ}F)$
	2 (Datos de Campo)	$U_{to}=3,56$ $L_R=3,05 \times 10^{-4}$ $T_f=136,36 (^{\circ}F)$	$U_{to}=3,559$ $L_R=3 \times 10^{-4}$ $T_f=133,39 (^{\circ}F)$
Inyección	1 (Datos Académicos)	$U_{to}=3,14$ $L_R=7,12 \times 10^{-3}$ $T_f=158,09 (^{\circ}F)$	$U_{to}=3,147$ $L_R=7,02 \times 10^{-3}$ $T_f=157,85 (^{\circ}F)$
Gas/líquido	1 (Datos de Campo)	$U_{to}=1,18$ $L_R=7,16 \times 10^{-4}$ $T_f=266,7 (^{\circ}F)$	$U_{to}=1,18$ $L_R=7,17 \times 10^{-4}$ $T_f=256,85$

Conclusiones

1. Los cálculos realizados con el programa computacional ejecutable, han resultado ser confiables ya que corresponden con los cálculos manuales presentando un mínimo margen de error.
2. El programa permite la posibilidad de decidir el tipo de producción según el fluido contenido en el yacimiento.
3. El método matemático representa una técnica efectiva para la determinación de la temperatura del fluido la cual puede encontrarse bajo régimen de producción o inyección en el pozo.
4. La solución numérica del cálculo de la transferencia de calor permite predicciones del valor de la temperatura del fluido en la formación.
5. Para el caso de inyección o producción de fluidos bifásicos se deberá comprobar el valor de la tasa de producción, puesto que para valores superiores a 5 lb-seg de la variable (ϕ) en el diseño del programa computacional ofrecerá resultados significativos.

Recomendaciones

1. Ampliar el programa para el cálculo de temperaturas según el comportamiento y transición del flujo de fluidos.
2. Se recomienda la aplicación de este modelo para pozos donde se emplee inyección de vapor.
3. Es recomendable probar las bondades de este modelo con datos reales de los pozos perforados o próximos a perforar en la Plataforma Deltana.
4. Se recomienda la utilización de este modelo en pozos de la Faja Petrolífera del Orinoco que se encuentre bajo régimen de inyección de vapor.

Bibliografía

1. Carslaw, H.S. y J.C. Jaeger. **Conduction of Heat in Solids**. Segunda Edición. Oxford Science Publications, 1959. Capítulo 1, 1-38.
2. Craft, B.C. y M.F. Hawkins. **Ingeniería Aplicada de Yacimientos Petrolíferos**. Editorial Tecnos. 1977.
3. Incropera, F. P. y De Witt, D.P. **Fundamentos de Transferencia de Calor**. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México 1999. 2-29, 44-63, 452-490.
4. Holman, J.P. **Transferencia de Calor**. Octava Edición. Editorial Mc Graw-Hill/Interamericana de España. Madrid 1998. 1-11, 229-239.
5. Edwards, Jr. Y Penney, D.E. **Ecuaciones Diferenciales Elementales**. Tercera Edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. 1993.
6. Zemansky, Mark W. **Calor y Termodinámica**. Tercera Edición. Ediciones Juan Bravo. Madrid-España. 1968. 97-118, 296,297.
7. Rincon, Adafel C. **Manual de Recuperación Térmica**. Universidad Central de Venezuela.
8. A.R. Hasan y C.S. Kabir. **Fluid Flow and Heat Transfer in Wellbores**. SPE. Capítulo 5, 64-72. Capítulo 6, 74-78.

9. A.R. Hasan y C.S. Kabir. **Heat Transfer During Two-Phase Flow in Wellbores.** Archivo Técnico de la SPE 22866, presentado en la 66° Conferencia Técnica Anual y Exibido en la Sociedad de Ingenieros de Petróleo en Dallas, Texas, 6 al 9 de Octubre de 1991.
10. Sagar Rajiv, Doty, D.R. y Schmidt Relimar. **Predicting Temperatura Profiles in a Flowing Well.** Archivo Técnico de la SPE 19702, presentado en la 64° Conferencia Anual en San Antonio, Texas, 8 al 11 de octubre de 1989.
11. Ramey Jr., H.J. **Wellbore Heat Transmisión.** JPT. Abril de 1962. Trans., AIME, 225.

Apéndice 1. Desarrollo Matemático de las Ecuaciones para el Cálculo de la Temperatura de Formación

A partir de un Balance de Energía en la Formación Obtenemos:

ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL (Coordenadas Cilíndricas)

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_e}{\partial r} = \frac{C_e \rho_e}{k_e} \frac{\partial T_e}{\partial t}$$

donde:

- ♦ T_e : es la temperatura de formación en una profundidad arbitraria en el tiempo t
- ♦ r : distancia medida desde el centro de la tubería.
- ♦ C_e : capacidad de calor de la superficie
- ♦ ρ_e : densidad
- ♦ k_e : conductividad

La Ecuación Diferencial en derivadas parciales muestra la variación de temperatura de formación con distancia radial del pozo y el tiempo de producción, basado en la ecuación de difusividad aplicada a la conducción de calor.

Tomando en cuenta los cambios de variable adimensional de:

$$r_D = \frac{r}{r_{wD}} \quad t_D = \frac{k_e T_e}{\rho_e C_e r_{wD}^2}$$

Las cuales son necesarias para resolver la Ecuación Diferencial Parcial y representar el flujo de calor hacia el pozo de forma más sencilla obteniendo así:

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_D}{\partial r_D} \quad (1)$$

donde:

- ♦ r_D : distancia adimensional
- ♦ t_D : tiempo adimensional
- ♦ T_D : temperatura adimensional

Al comenzar a presentar su solución conviene realizar el cambio de variables:

$$T(r_D, t_D) = \frac{r_D^a}{t_D^b} G\left(\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}\right)$$

pero al efectuarlo se deduce que el caso más fácil es cuando $a = 0$ y $b = 0$, quedando sólo

$$T(r_D, t_D) = G\left(\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}\right) \quad (2)$$

Utilizando el cambio de variable:

$$w = \frac{r_D}{\sqrt{t_D}} \quad (3)$$

Se llega a una ecuación diferencial ordinaria sencilla sustituyendo (2) en (3)

$$T(r_D, t_D) = G(w) \Rightarrow T = G(w)$$

Derivando entonces obtenemos:

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} = G'(w) \frac{\partial w}{\partial t_D} \Rightarrow \frac{\partial T_D}{\partial t_D} = G'(w) \left(\frac{-r}{2t_D^{3/2}} \right) \Rightarrow \frac{\partial T_D}{\partial t_D} = \left(\frac{-r}{2\sqrt{t_D}^3} \right) G'(w)$$

I

$$\frac{\partial T_D}{\partial r_D} = G'(w) \frac{\partial w}{\partial r_D} \Rightarrow \frac{\partial T_D}{\partial r_D} = \frac{1}{\sqrt{t_D}} G'(w) \Rightarrow \frac{\partial T_D}{\partial r_D} = \frac{1}{\sqrt{t_D}} G'(w)$$

II

$$\frac{\partial^2 T_D}{\partial r_D^2} = G''(w) \frac{\partial^2 w}{\partial r_D^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_D}{\partial r_D^2} = G''(w) \left(\frac{1}{\sqrt{t_D}} \right)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 T_D}{\partial r_D^2} = \frac{1}{t_D} G''(w)$$

III

sustituyendo I, II y III en (1) obtenemos:

$$\frac{-r}{2t_D^{3/2}} G'(w) = \frac{1}{t_D} G''(w) + \frac{1}{r_D} \frac{1}{\sqrt{t_D}} G'(w)$$

Al multiplicar por t todos los términos (y se agrupan a la derecha) obtenemos:

$$0 = G''(w) + \left(\frac{r_D}{2t_D^{1/2}} + \frac{\sqrt{t_D}}{r_D} \right) G'(w)$$

introduciendo el cambio de variable representado por la Ec. (3), obtenemos:

$$G''(w) + \left(\frac{w}{2} + \frac{1}{w} \right) G'(w) = 0 \quad (4)$$

la Ecuación Diferencial Ordinaria Ec. (4) se puede resolver por separación de variables, aplicando el cambio de variable:

$$G'(w) = U \quad (5)$$

Obteniendo así una Ecuación Diferencial de primer orden expresada como:

$$U'(w) + \left(\frac{w}{2} + \frac{1}{w}\right)U(w) = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dw} = -\left(\frac{w}{2} + \frac{1}{w}\right)U \Rightarrow \frac{dU}{U} = -\left(\frac{w}{2} + \frac{1}{w}\right)dw$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int -\left(\frac{w}{2} + \frac{1}{w}\right)dw \Rightarrow \ln|U| = -\frac{w^2}{4} - \ln(w) + C_1$$

Al despejar la resultante de esta ecuación obtenemos:

$$U(w) \Rightarrow U = e^{-\frac{w^2}{4} - \ln(w) + C_1}$$

donde: (C_1 es ctte de integración)

regresando el cambio de variable de la Ec.5 obtenemos:

$$G'(w) = e^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1}{w} e^{C_1}$$

Definiendo $A \equiv e^{C_1}$ y sutituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$G'(w) = A \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w}$$

Al realizar la integración en ambos lados se obtiene:

$$G(w) = A \int \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw + B$$

siendo A y B dos constantes de la solución general que se adaptarán a las condiciones de frontera establecidas por Fourier para la Ley de Conducción de Calor condiciones (a),(b) y (c).

$$T(r_D, t_D) = G\left(\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}\right) = A \int_r^{\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw + B \quad (6)$$

Al evaluar las condiciones iniciales, de frontera y adimensionalizando cada una de ellas como sigue:

$$a) \lim_{t \rightarrow 0} T_e = T_{ei} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} T(r_D, t_D) = T_{ei} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} G\left(\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}\right) = T_{ei}$$

$$b) \quad Q = 2\pi k e \left. \frac{r \partial T_e}{\partial r} \right|_{r=r_{wb}} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi k e} = \left. \frac{r \partial T_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi k e} = \frac{\partial T_D}{\partial r_D}$$

$$c) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial T_e}{\partial r_D} = 0$$

Se puede obtener de cada una de ellas las siguientes condiciones:

De la condición de frontera (c) obtenemos:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \frac{\partial T_e}{\partial r_D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_e}{\partial r_D} = \frac{A e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}} \frac{1}{\sqrt{t_D}} \Rightarrow \frac{\partial T_e}{\partial r_D} = \frac{A}{r_D} e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}} \quad (7)$$

De la condición de borde (a) obtenemos:

$$\lim_{t_D \rightarrow 0} T_e = T_{ei} \Rightarrow \lim_{t_D \rightarrow 0} A \int_r^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw + B = T_{ei} \Rightarrow B = T_{ei} - A \int_r^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (6) obtenemos:

$$T(r_D, t_D) = A \int_r^{\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw + T_{ei} - A \int_r^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(r_D, t_D) = A \int_r^{\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw - A \int_r^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw$$

$$\Rightarrow T(r_D, t_D) = T_{ei} + A \int_{\infty}^{r_D/\sqrt{t_D}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw \quad (8.1)$$

De la condición de frontera (b) obtenemos:

$$\left. \frac{\partial T_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = \frac{Q}{2\pi ke} \Rightarrow A \frac{e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{\frac{r_D}{\sqrt{t_D}}} \frac{1}{\sqrt{t_D}} \bigg|_{r_D=1} = \frac{Q}{2\pi ke} \Rightarrow A e^{-\frac{1}{4t_D}} = \frac{Q}{2\pi ke}$$

$$A = \frac{Q e^{\frac{1}{4t_D}}}{2\pi ke} \quad (9)$$

sustituyendo (9) en (8.1) obtenemos:

$$T(r_D, t_D) = T_{ei} + \frac{Q e^{\frac{1}{4t_D}}}{2\pi ke} \int_{\infty}^{r_D/\sqrt{t_D}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{w} dw \quad (10)$$

Partiendo de la Ecuación de Bessel representada a través de la matriz:

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix}$$

y representada por las ecuaciones:

$$X^2 Y'' + XY' + (\lambda^2 X^2 - \beta^2) Y = 0 \Rightarrow Y(x) = C_1 J_\beta(\lambda x) + C_2 Y_\beta(\lambda x)$$

$$\begin{aligned} W(J_0, Y_0) &= J_0 Y_0' - J_0' Y_0 \\ &= J_0(x)(-Y_1(x)) - (-J_1(x))Y_0(x) \\ &= -J_0(x)Y_1(x) + J_1(x)Y_0(x) \end{aligned}$$

Al Sustituir en (10) obtenemos:

$$T_{wb} = T_{ei} + \frac{Q}{2\pi k_e} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 t_D}}{u^2} \frac{Y_1(u)J_0(u) - J_1(u)Y_0(u)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du$$

(11)

donde:

- ◆ J_0, J_1 : funciones de Bessel de 1er orden
- ◆ Y_0, Y_1 : funciones de Bessel de 2do orden

Posteriormente definiendo temperatura adimensional por la condición de frontera (b) de la Ley de Fourier obtenemos:

$$T_D \equiv -\frac{2\pi k_e}{Q} (T_{wb} - T_{ei}) \quad (12)$$

donde:

- ♦ k_e : conductividad de la formación (Btu/hr-ft-°F)
- ♦ Q : tasa de flujo de calor por unidad de longitud de la formación (Btu/hr-ft)
- ♦ T_{wb} : temperatura en la interfase pozo/formación (°F)
- ♦ T_{ei} : temperatura de la formación a condiciones iniciales (°F)

A partir de datos experimentales realizados por Hassan y Kabbir, introduciendo el tiempo adimensional (t_D) en la temperatura adimensional obtenemos:

$$T_D = \left[0.4063 + \frac{1}{2} L n t_D \right] \left[1 + \frac{0.6}{t_D} \right], \text{ donde } t_D > 1.5 \quad (12.1)$$

$$T_D = 1.1281 \sqrt{t_D} (1 - 0.3 \sqrt{t_D}) , \text{ donde } t_D \leq 1.5 \quad (12.2)$$

Reduciendo (12.1) y (12.2) para tiempos muy largos obtenemos:

$$T_D = 0.4063 + \frac{1}{2} L n t_D \quad (12.3)$$

Tomando entonces ($t_D = 1.5$) se observa como las expresiones 12.1 y 12.2 varían a partir de su segunda cifra decimal como:

$t_D=1.5 \Rightarrow$	$T_D=$	Ec.12.1	Ec. 12.2
		0,85264557	0,87398968

Tomando así a $t_D = 1.5$ como el punto de inflexión para tiempos muy largos.

Reemplazando el término T_{wb} (desconocido) por T_f partimos entonces del Balance de energía para un sistema de producción/inyección definido como:

$$\frac{dH}{dz} + \frac{g \sin \alpha}{Jg_c} + \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} = \pm \frac{Q}{w} \quad (13)$$

donde:

- ♦ w : flujo másico del fluido (libras/hr).
- ♦ g : aceleración de gravedad (pie/seg²).
- ♦ g_c : factor de conversión (32.17 (libra-pie/libra-seg²))
- ♦ J : factor de conversión para el balance de energía
- ♦ Q : tasa de transferencia de calor por unidad de longitud (Btu/hr-pie).
- ♦ v : velocidad del fluido (pie/seg).

Donde la entalpía esta dada por:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp$$

Donde: $\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = c_p \rightarrow$ definición de calor específico a presión constante

y $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = -C_j c_p \rightarrow C_j$ es el coeficiente Joule-Thompson

Entonces:

$$dH = c_p dT - C_j c_p dp$$

donde:

- ♦ C_j : representa el coeficiente Joule-Thompson
- ♦ c_p : es el medio con capacidad de calor del fluido a presión constante.
- ♦ H: entalpía del fluido

Al resolver dividiendo entre dz para obtener una relación en función de la profundidad obtenemos:

$$\frac{dH}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - C_j c_p \frac{dp}{dz} \Rightarrow c_p \frac{dT}{dz} = \frac{dH}{dz} + C_j c_p \frac{dp}{dz} \quad (14)$$

Despejando $\frac{dH}{dz}$ de (13) y sustituyendo en (14) obtenemos que:

$$c_p \frac{dT}{dz} = \pm \frac{Q}{w} - \frac{g \sin \alpha}{Jg_c} - \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} + C_j c_p \frac{dp}{dz} \quad \text{despejando}$$

$$\frac{dT_f}{dz} = C_j \frac{dp}{dz} + \frac{1}{c_p} \left[\pm \frac{Q}{w} - \frac{g \sin \alpha}{Jg_c} - \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} \right] \quad (15)$$

Introduciendo el Coeficiente Global de Calor incluido por definición en la ecuación de cantidad de calor transferido en cada unidad de tiempo por convección a la pared en una corriente dada por:

$$Q = hA \Delta T \Rightarrow Q = hLA (T_{ei} - T_f) \rightarrow \text{corriente (A)}$$

$$\text{y} \quad Q = hL' A (T_{wb} - T_{ei}) \rightarrow \text{corriente (B)}$$

donde el calor transferido será:

$$\left(\frac{1}{hL} + \frac{1}{hL'} \right) Q = A (T_{wb} - T_f) \Rightarrow \frac{1}{U_{to}} Q = -2\pi r_{to} (T_f - T_{wb})$$

$$\Rightarrow Q = -2\pi r_{to} U_{to} (T_f - T_{wb}) \quad (16)$$

donde:

- ♦ U_{to} : coeficiente global de transferencia de calor de la tubería del pozo.
- ♦ r_{to} : radio externo de la tubería del pozo.
- ♦ $T_f - T_{wb}$: diferencia de temperatura entre el fluido en la tubería de producción y la interfase pozo/formación (pared).

$\frac{1}{U_{to}}$ (coeficiente global de calor) para cada elemento esta dado por:

En primer lugar, inicialmente se consideró transferencia de calor bajo condiciones de flujo continuo, obteniendo:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q = AU(T_s - T_a)$$

Además, notando que:

Del aislante hacia el medio ambiente existe convección y radiación, luego:

$$Q_4 = 2\pi r_{ins} (h_c + h_r) (T_{surf} - T_a) \Delta L \quad (A)$$

Del fluido en movimiento a la pared interna de la tubería existe convección forzada, por lo que la tasa de flujo de calor viene dada por:

$$Q_1 = 2\pi r_{ti} h_{to} (T_s - T_{ti}) \Delta L \quad (B)$$

y además:

$$(T_s - T_a) = (T_s - T_{ti}) + (T_{ti} - T_{to}) + (T_{to} - T_{surf}) + (T_{surf} - T_a)$$

resolviendo las ecuación (A) – (B) para las respectivas diferencias de temperatura y sustituyendo estas en la ecuación anterior, resulta:

$$(T_s - T_a) = \frac{Q}{2\pi \Delta L} \left[\frac{1}{r_{ti} h_{to}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{K_t} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{K_{ins}} + \frac{1}{r_{ins} (h_c + h_r)} \right] \quad (C)$$

Las áreas características comúnmente utilizadas son: el área interior ($2\pi r_{ti}\Delta L$), el área exterior ($2\pi r_{to}\Delta L$) de la tubería y el área exterior de aislante ($2\pi r_{ins}\Delta L$), de esto se obtiene:

$$Q = 2\pi r_{to} U_{to} (T_s - T_a) \Delta L$$

Al sustituir el valor de $(T_s - T_a)$ por su expresión en la ecuación (C), y despejando U_{to} , resulta

$$U_{to} = \frac{\frac{Q}{A}}{(T_s - T_a)} = \frac{\frac{Q}{2\pi r_{to} \Delta L}}{\frac{Q}{2\pi \Delta L}} \left[\frac{1}{r_{ti} h_f} + \frac{\ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{K_t} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{K_{ins}} + \frac{1}{r_{ins}(h_c + h_r)} \right]^{-1}$$

Y luego de simplificar:

$$U_{to} = \left[\frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{K_t} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{K_{ins}} + \frac{r_{to}}{r_{ins}(h_c + h_r)} \right]^{-1}$$

Si se utiliza el área interior de la tubería, junto con el área del pozo obtenemos entonces:

$$\frac{1}{U_{to}} = \frac{r_{to}}{r_{ti} h_{to}} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{to}}{r_{ti}}\right)}{k_t} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{ins}}{r_{to}}\right)}{k_{ins}} + \frac{r_{to}}{r_{ins} (h_c + h_r)} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{co}}{r_{ci}}\right)}{k_c} + \frac{r_{to} \ln\left(\frac{r_{wb}}{r_{co}}\right)}{k_{cem}}$$

donde:

- ◆ k_c : conductividad en el revestidor (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_{cem} : conductividad del cemento (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_t : conductividad entre el anular y el fluido de la tubería. (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ k_{ins} : conductividad del aislante. (BTU/(hr-pie-°F))
- ◆ h_{to} : coeficiente de transferencia de calor por convección de la tubería (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ h_c : coeficiente de transferencia de calor por convección (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ h_r : coeficiente de transferencia de calor por convección entre el anular y el fluido de la tubería (BTU/(°F-hr-pie))
- ◆ r_{to} : radio externo de la tubería del pozo. (pies)
- ◆ r_{co} : radio externo del revestidor (pies)
- ◆ r_{ti} : radio interno de la tubería del pozo (pies)
- ◆ r_{ci} : radio interno del revestidor (pies)
- ◆ r_{ins} : radio del aislante (pies)
- ◆ r_{wb} : radio del pozo (pies)
- ◆ T_{surf} : temperatura en la superficie exterior de la tubería o aislante

Conociendo entonces el parámetro de relajación L_R definido como:

$$L_R \equiv \frac{2\pi}{c_p w} \left[\frac{r_{to} U_{to} k_e}{k_e + (r_{to} U_{to} T_D)} \right]$$

Se despeja de la (Ec. 16) T_{wb} obteniendo así:

$$\Rightarrow T_{wb} = T_f + \frac{Q}{2\pi r_{to} U_{to}}$$

Igualmente de la (Ec. 12) obtenemos

$$\Rightarrow T_{wb} = \frac{T_D Q}{-2\pi k_e} + T_{ei} \Rightarrow T_{wb} = T_{ei} - \frac{T_D Q}{2\pi k_e}$$

Igualando en tonces las ultimas 2 expresiones se obtiene:

$$T_f + \frac{Q}{2\pi r_{to} U_{to}} = T_{ei} - \frac{T_D Q}{2\pi k_e} \Rightarrow T_f - T_{ei} = -\frac{T_D Q}{2\pi k_e} - \frac{Q}{2\pi r_{to} U_{to}}$$

$$\Rightarrow T_f - T_{ei} = -\frac{Q T_D r_{to} U_{to} - Q k_e}{2\pi k_e r_{to} U_{to}} \Rightarrow (T_f - T_{ei}) 2\pi k_e r_{to} U_{to} = -Q (T_D r_{to} U_{to} + k_e)$$

$$Q = -2\pi \frac{k_e r_{to} U_{to}}{(T_D U_{to} r_{to}) + k_e} (T_f - T_{ei})$$

$$Q = -L_R w c_p (T_f - T_{ei}) \quad (17)$$

Relacionando la Ec.(15) y la Ec.(17) obtenemos:

$$(1) \quad \frac{dT_f}{dz} = C_j \frac{dp}{dz} + \frac{1}{c_p} \left[\pm \frac{Q}{w} - \frac{g \sin \alpha}{Jg_c} - \frac{v}{Jg_c} \frac{dv}{dz} \right]$$

$$(2) \quad Q \equiv -L_R w c_p (T_f - T_{ei})$$

Desarrollando (1) tenemos:

$$\frac{dT_f}{dz} = C_j \frac{dp}{dz} + \frac{1}{c_p} \frac{Q}{w} - \frac{g \sin \alpha}{c_p Jg_c} - \frac{v}{c_p Jg_c} \frac{dv}{dz}$$

Sustituyendo (2) en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{dT_f}{dz} = \frac{C_j dp}{dz} \pm \frac{L_R w c_p (T_f - T_{ei})}{c_p w} - \frac{g \sin \alpha}{c_p Jg_c} - \frac{v}{c_p Jg_c} \frac{dv}{dz}$$

$$\frac{dT_f}{dz} = \pm L_R (T_f - T_{ei}) - \frac{g \sin \alpha}{c_p Jg_c} - \frac{v}{c_p Jg_c} \frac{dv}{dz} + \frac{C_j dp}{dz}$$

Si decimos que:

$$\phi = - \frac{v}{c_p Jg_c} \frac{dv}{dz} + C_j \frac{dp}{dz}$$

Entonces

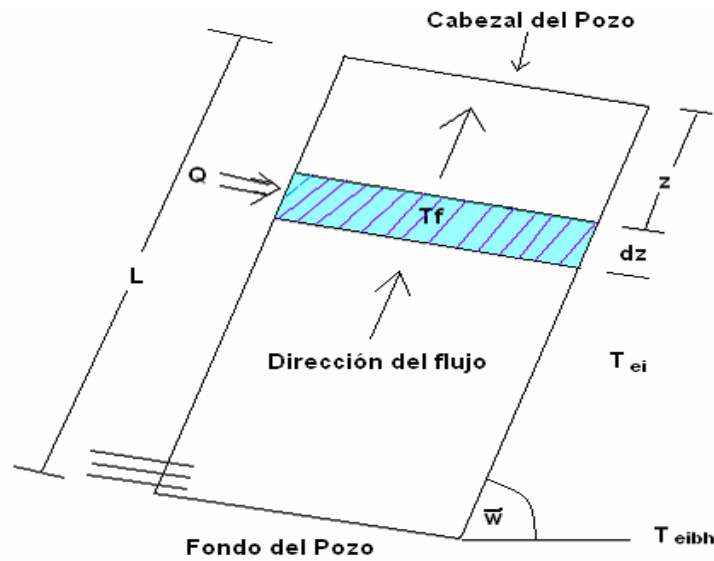
$$\frac{dT_f}{dz} = \pm L_R (T_f - T_{ei}) - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} + \phi \quad (18)$$

Asumiendo que T_{ei} varía linealmente con la profundidad, sabemos:

$$T_{ei} = T_{eibh} - (L - z) g_G \sin \alpha \quad (19)$$

donde:

- ◆ T_{ei} : temperatura de la formación a condiciones iniciales (°F)
- ◆ T_{eibh} : temperatura estática de la tierra en el fondo (°F)
- ◆ g_G : gradiente geotérmico (°F/pies)
- ◆ L : profundidad total del pozo (pies)
- ◆ z : profundidad tomada desde el cabezal del pozo (pies)
- ◆ ϖ ángulo de inclinación con respecto a la horizontal (grados)



Balance de Energía para el Fluido del Pozo

Por consiguiente:

$$\phi = -\frac{v}{c_p J g_c} \frac{dv}{dz} + c_j \frac{dp}{dz} \quad \text{donde} \quad \frac{dv}{dz} \approx 0$$

Tenemos que:

$$\phi \equiv \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dz} \quad (20) \quad \text{donde} \quad C_j = \frac{1}{c_p \rho} \rightarrow \text{coeficiente Joule-Thompson}$$

La ecuación (18) se reduce puesto que la pérdida estática del cabezal es aproximado al gradiente total de presión, como:

$$\frac{dp}{dz} \approx \frac{\rho g}{g_c} \sin \alpha$$

Sustituyendo en la Ec.(20) obtenemos que:

$$\phi = \frac{1}{c_p \rho} \left(\frac{\rho g}{g_c} \sin \alpha \right) \Rightarrow \phi = \frac{g \sin \alpha}{c_p g_c} \quad (21)$$

Sustituyendo la Ec.(21) en la Ec.(18) se reduce la ecuación a:

$$\frac{dT_f}{dz} = \pm L_R (T_f - T_{ei}) - \frac{g \sin \alpha}{c_p g_c} + \frac{g \sin \alpha}{c_p g_c}$$

Entonces:

$$\frac{dT_f}{dz} = \pm L_R (T_f - T_{ei}) \quad (22)$$

Sustituyendo la Ec.(19) en la Ec. (22) obtenemos

$$\frac{dT_f}{dz} = -L_R T_f = -L_R T_{eibh} + L_R (L) g_G \sin \alpha + -z L_R g_G \sin \alpha$$

donde:

$$\mu(z) = e^{-L_R z} \quad (\text{representando el factor integrante})$$

$$e^{-L_R z} \frac{dT_f}{dz} - L_R e^{-L_R z} T_f = L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} - z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha$$

$$\frac{d}{dz} (e^{-L_R z} T_f(z)) = L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} - z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha$$

$$e^{-L_R z} T_f = \int L_R (L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) e^{-L_R z} dz - \int z e^{-L_R z} L_R g_G \sin \alpha dz + A$$

$$= -\frac{(L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) L_R}{L_R} e^{-L_R z} + L_R g_G \sin \alpha \left(\frac{z e^{-L_R z}}{L_R} - \int \frac{e^{-L_R z} dz}{L_R} \right) + A$$

$$T_f(z) = -(L g_G \sin \alpha - T_{eibh}) + g_G \sin \alpha \left(z + \frac{1}{L_R} \right) + A e^{L_R z}$$

$$T_f(z) = T_{eibh} - Lg_G \sin \alpha + \frac{g_G \sin \alpha}{L_R} + (g_G \sin \alpha)z + Ae^{L_R z}$$

$$A = ICe^{-L_R} \Rightarrow Ae^{L_R z} = ICe^{-L_R} e^{L_R z}$$

$$T_{ei} = T_{eibh} - (L - z)g_G \sin \alpha$$

$$T_f = T_{ei} + \left(\frac{g_G \sin \alpha}{L_R} \right) + ICe^{(z-L)L_R} \quad (23)$$

En particular si:

$$z=L \quad \text{entonces} \quad T_f = T_{ei}$$

Obteniendo así la ecuación que representa la:

TEMPERATURA DE FORMACIÓN PARA LIQUIDOS (Ec.24)

$$T_f = T_{ei} + g_G \sin \alpha \left(\frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \right) = T_{eibh} - g_G \sin \alpha \left[(L - z) - \frac{(1 - e^{(z-L)L_R})}{L_R} \right] \quad (24)$$

Para gases la (Ec. 24) se transforma en:

TEMPERATURA DE FORMACIÓN PARA GAS (Ec.25)

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] \quad (25)$$

Para flujo gas/líquido utilizamos el término ϕ como:

$$\phi = -0.002978 + 1.006 \times 10^{-6} p_{wh} + 1.906 \times 10^{-4} w - 1.047 \times 10^{-6} GLR + 3.229 \times 10^{-5} API + 0.004009 \gamma_g - 0.3551 g_G$$

donde:

- ◆ ϕ : factor de corrección promedio por intervalo de longitud
- ◆ p_{wh} : es la presión de la tubería
- ◆ w : es flujo masico del fluido
- ◆ RGL : es la relación gasl - líquido
- ◆ γ_g : es la gravedad específica del gas
- ◆ g_G : es el gradiente geotérmico

Transformando la (Ec. 24) y (Ec. 25), obteniendo así:

TEMPERATURA DE FORMACIÓN PARA FLUJO BIFASICO GAS/LIQUIDO

$$T_f = T_{ei} + \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right]$$

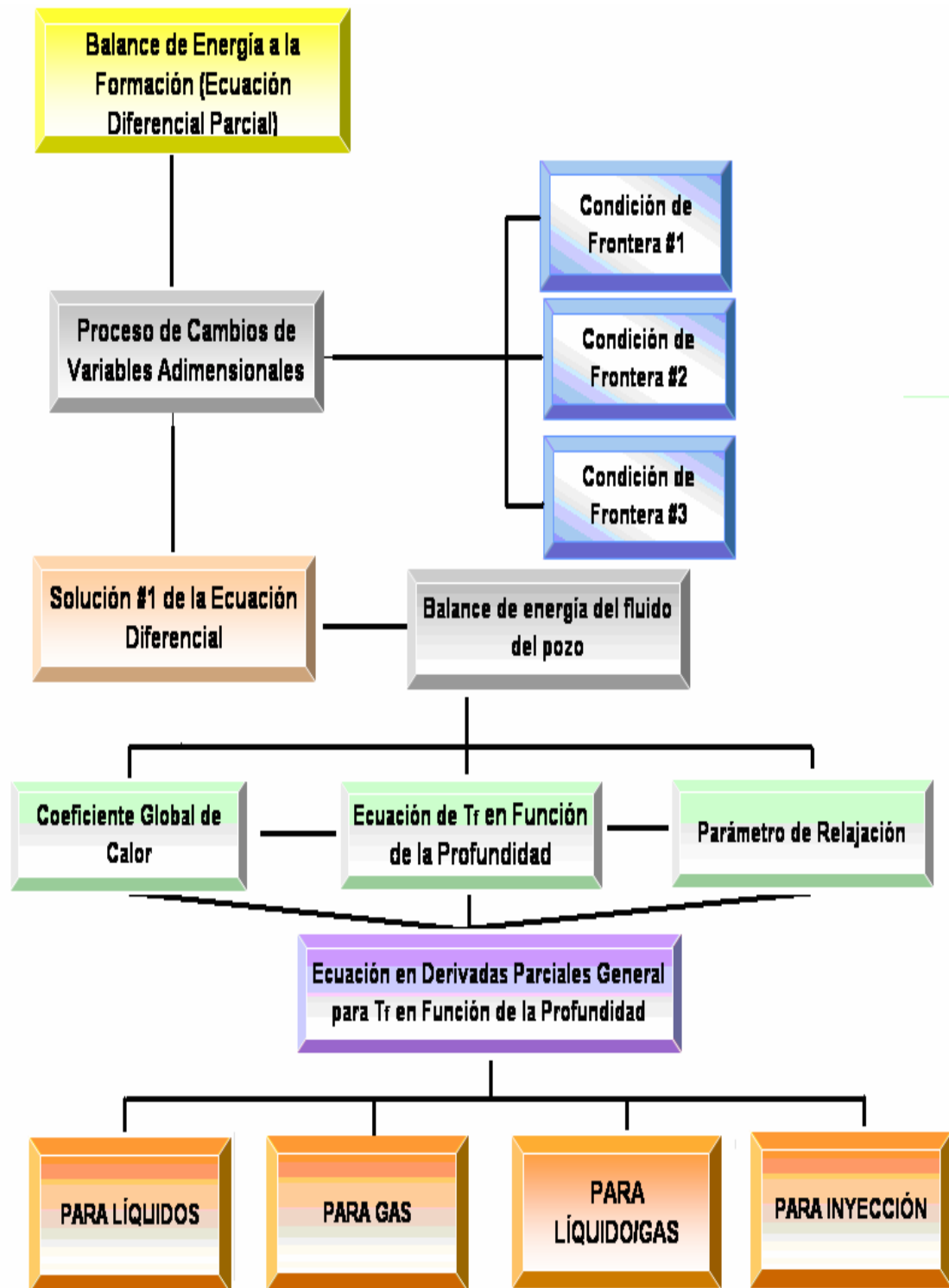
Finalmente para la medición de T_f bajo inyección tenemos:

TEMPERATURA DE FORMACIÓN MEDIDA EN INYECCIÓN

$$T_f = T_{ei} - \frac{1 - e^{(z-L)L_R}}{L_R} \left[g_G \sin \alpha + \phi - \frac{g \sin \alpha}{c_p J g_c} \right] + e^{-zL_R} (T_{fwh} - T_{es})$$

Diagrama de Flujo N° 2

A partir del balance de energía en la formación y tomando en cuenta la Ecuación Diferencial Parcial derivada en coordenadas cilíndricas para la variación de la temperatura de formación con distancia radial desde el pozo, se procede a la adimensionalización de la ecuación y de las condiciones de frontera definidas por la Ley de Fourier, obteniéndose así la primera solución de la ecuación diferencial. Con la información del balance de energía del fluido en el pozo, el coeficiente global de calor (U_{io}) y el parámetro de relajación (L_R), utilizamos las ecuaciones dadas para el cálculo de la temperatura del fluido dependiendo del tipo de proceso que se este realizando



Apéndice 2. Descripción del Programa

```
Public fMainForm As frmMain
```

```
Sub Main()
```

```
    frmSplash.Show
```

```
    frmSplash.Refresh
```

```
    ' Establecer una duración de 1 segundo.
```

```
    Duration! = Timer + 0.5
```

```
    ' Esperar a que termine el intervalo.
```

```
    Do Until Timer > Duration!
```

```
        dummy = DoEvents()
```

```
    Loop
```

```
    Set fMainForm = New frmMain
```

```
    Load fMainForm
```

```
    Unload frmSplash
```

```
    fMainForm.Show
```

```
End Sub
```

```
' *****
```

```
' * Funciones *
```

```
' *****
```

```
' Temp
```

```
Function T_f_inyect(Tei As Double, z As Double, L As Double, LR As Double, gg  
As Double, alpha As Double, Theta As Double, g As Double, cp As Double, J As  
Double, gc As Double, TfwH As Double, Tes As Double) As Double
```

```
    T_f_inyect = Tei + ((1 - Exp((z - L) * LR)) / LR) * (gg * Sin(alpha) + Theta -  
        (g * Sin(alpha)) / (cp * J * gc)) + (Exp(-z * LR)) * (TfwH - Tes)
```

```
End Function
```

```
Function T_f_prod(Teibh As Double, gg As Double, z As Double, L As Double, LR  
As Double, alpha As Double) As Double
```

```
    T_f_prod = Teibh - gg * Sin(alpha) * ((L - z) - ((1 - Exp((z - L) * LR)) / LR))
```

```
End Function
```

```
Function T_f_prodgas(Tei As Double, z As Double, L As Double, LR As Double, gg
As Double, alpha As Double, cp As Double, J As Double, gc As Double) As Double
```

```
    T_f_prodgas = Tei + ((1 - Exp((z - L) * LR)) / LR) * (gg * Sin(alpha) -
        ((g * Sin(alpha)) / (cp * J * gc)))
```

```
End Function
```

```
Function T_f_prodgasliq(Tei As Double, z As Double, L As Double, LR As Double,
gg As Double, alpha As Double, Theta As Double, cp As Double, J As Double, gc
As Double) As Double
```

```
    T_f_prodgasliq = Tei + ((1 - Exp((z - L) * LR)) / LR) * (gg * Sin(alpha) + Theta
        - ((g * Sin(alpha)) / (cp * J * gc)))
```

```
End Function
```

' Parametros

```
Function L_R(cp As Double, w As Double, rto As Double, Uto As Double, ke As
Double, tD As Double) As Double
```

```
    L_R = ((2 * 3.14159265359) / (cp * w)) * ((rto * Uto * ke) / (ke + (rto *
        Uto * tD)))
```

```
End Function
```

```
Function U_to(rto As Double, rti As Double, hto As Double, kt As Double, rins As
Double, kins As Double, hc As Double, hr As Double, rco As Double, rci As Double,
kc As Double, rwb As Double, kcem As Double) As Double
```

```
    If ((rins = 0) Or (kins = 0)) Then
```

```
        U_to = 1 / ((rto / (rti * hto)) + (rto * Log(rto / rti) / kt) + (rto * Log(rco / rci) / kc)
            + (rto * Log(rwb / rco) / kcem))
```

```
    Else
```

```
        U_to = 1 / ((rto / (rti * hto)) + (rto * Log(rto / rti) / kt) + (rto * Log(rins / rto) / kins)
            + (rto / (rins * (hc + hr))) + (rto * Log(rco / rci) / kc) + (rto * Log(rwb / rco)
                / kcem))
```

```
    End If
```

```
End Function
```

Function T_D(tD As Double)

 If (tD > 1.5) Then

$$T_D = (0.4063 + \text{Log}(tD) / 2) * (1 + (0.6 / tD))$$

 Else

$$T_D = 1.1281 * \text{Sqr}(tD) * (1 - 0.3 * \text{Sqr}(tD))$$

 End If

End Function

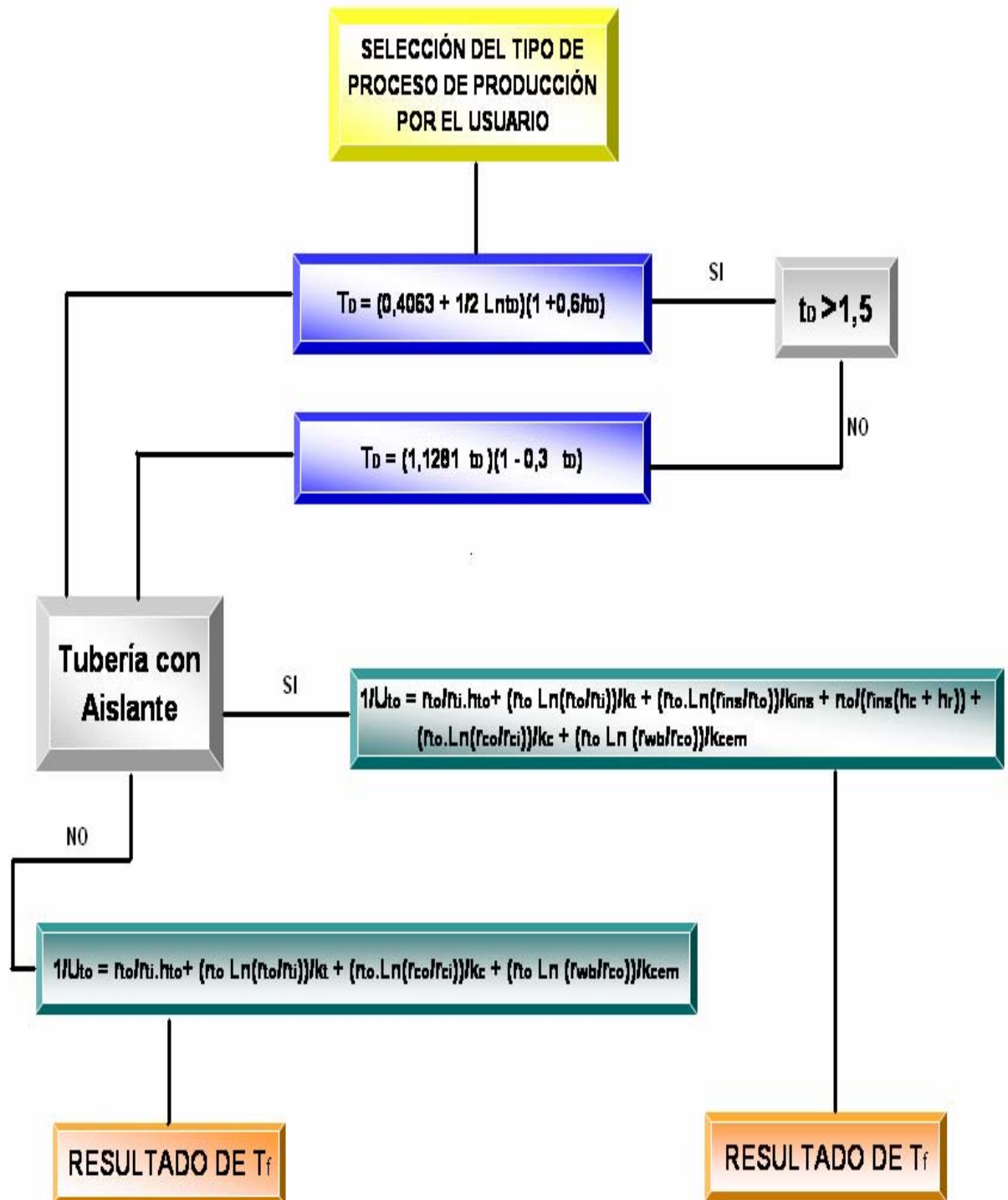
Function Theta(Pwh As Double, w As Double, GLR As Double, API As Double, psig
As Double, gg As Double) As Double

$$\begin{aligned} \text{Theta} = & -0.002978 + 0.000001006 * \text{Pwh} + 0.0001906 * w - 0.000001047 * \text{GLR} \\ & + 0.00003229 * \text{API} + 0.004009 * \text{psig} - 0.3551 * \text{gg} \end{aligned}$$

End Function

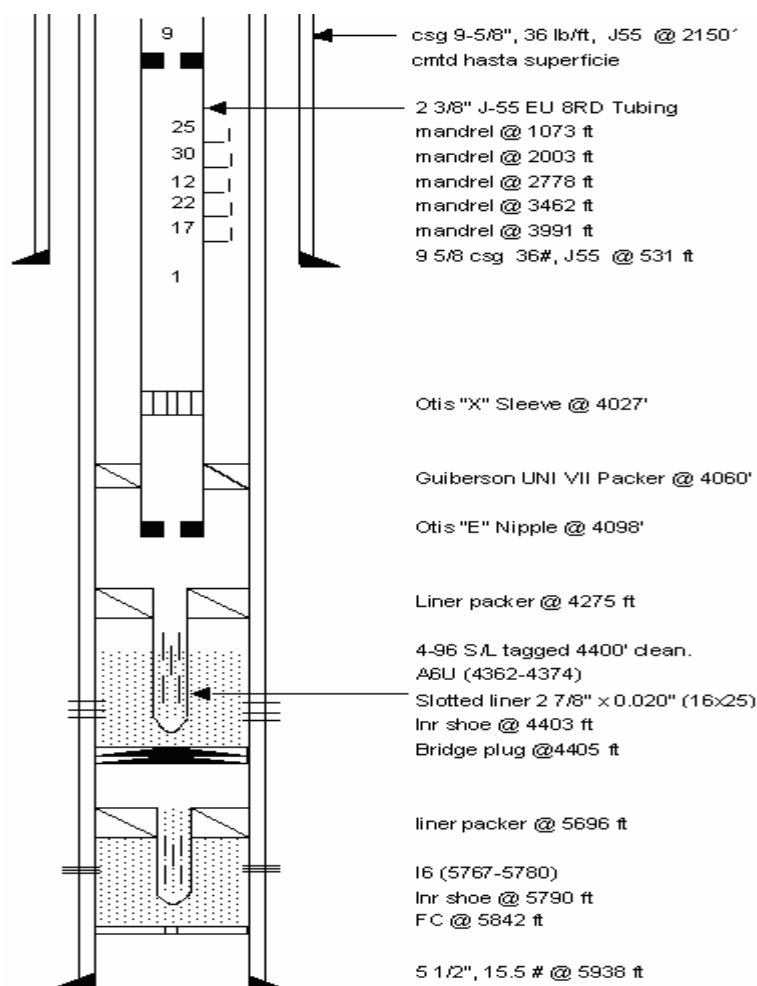
Diagrama de Flujo N° 3

Una breve explicación del algoritmo utilizado en la programación comienza con el cálculo de la temperatura adimensional (T_D) dependiendo del valor del tiempo (t_D) utilizado. Luego se calcula el valor del coeficiente global de transferencia de calor (U_o) tomando en cuenta si existe o no la presencia de aislante en la tubería y se procede a calcular el parámetro de relajación (L_R) el cual es utilizado en las ecuaciones matemáticas para obtener un valor de la temperatura del fluido que es la incógnita.



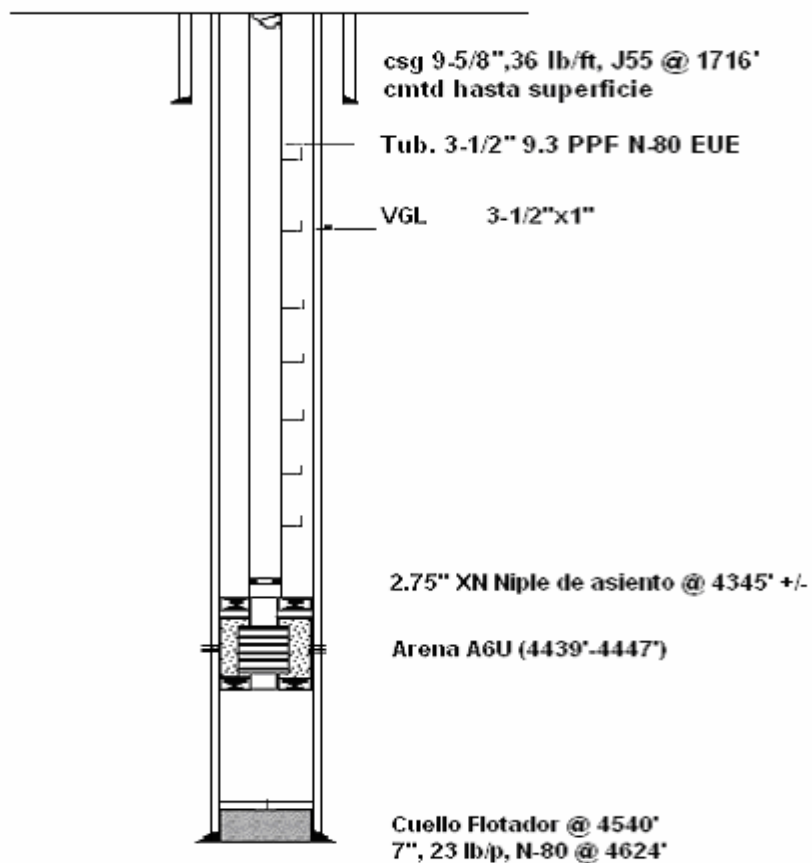
Apéndice 3. Perfiles de Temperatura

Perfil de Temperatura en pozo con Producción de Líquido



DATOS DE GRADIENTES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA						
PROF.	PRESIÓN	GRAD.	TEMP.	GRAD.	TUB.	REV.
(TVD)	PSIA	PSIA/ft.	deg. F	deg. F/ft.	Press.	Press.
4000	1144.2	0.397	156.1	0.011	200	50
3500	948.7	0.391	146.2	0.020	200	50
3000	752.4	0.393	134.2	0.024	200	50
2000	357.2	0.395	114.3	0.020	200	50
1000	179.0	0.178	101.0	0.013	200	50
0	174.9	0.004	96.9	0.004	200	50

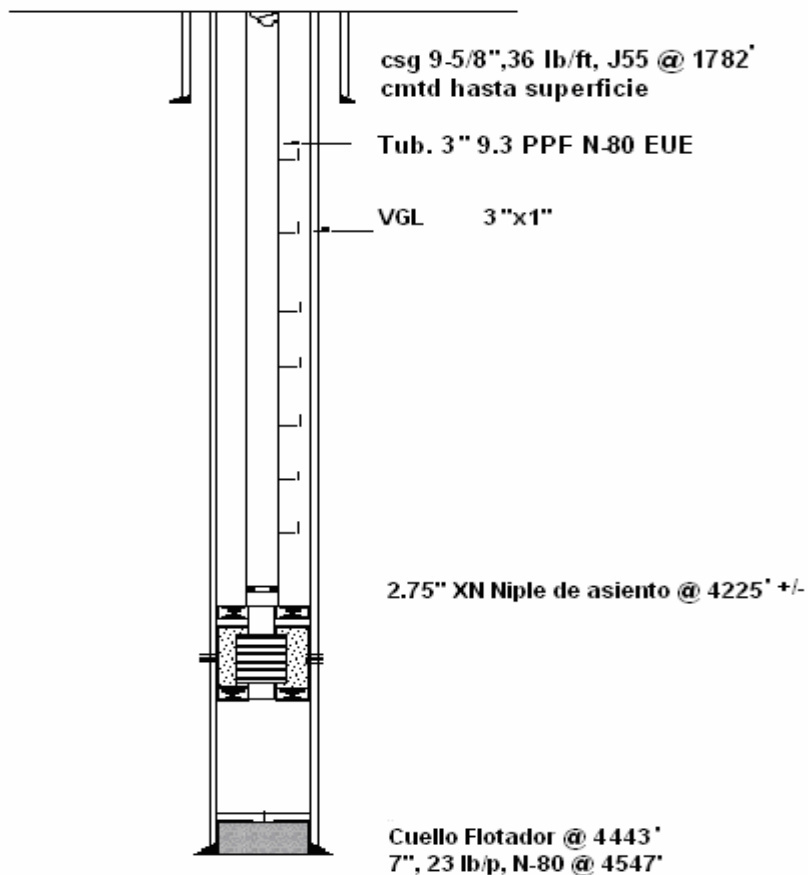
Perfil de Temperatura en pozo con Producción de Gas



DATOS DE GRADIENTES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA

PROF. (TVD)	PRESIÓN PSIA	GRAD. PSIA/ft.	TEMP. deg. F	GRAD. deg. F/ft.	TUB. Press.	REV. Press.
1500	587,9	0,220	143,1	0,046	260	1030
2447	691,1	0,109	152,9	0,010	260	1030
2547	749,1	0,578	154,4	0,015	260	1030
3464	896,0	0,160	159,3	0,005	260	1030
3555	973,0	0,847	161,2	0,021	260	1030
4112	1022,9	0,090	162,7	0,003	260	1030
4177	1057,2	0,530	163,2	0,008	260	1030

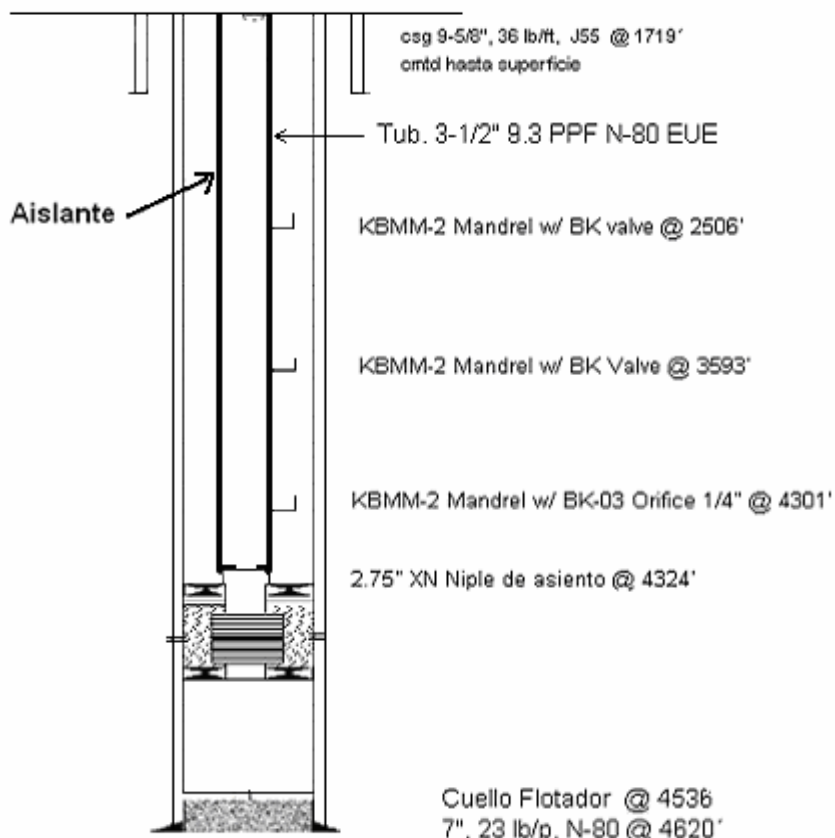
Perfil de Temperatura para producción de Gas



DATOS DE GRADIENTES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA

PROF. (TVD)	PRESIÓN PSIA	GRAD. PSIA/ft.	TEMP. deg. F	GRAD. deg. F/ft.	TUB. Press.	REV. Press.
800	299,8	0,138	125,0	0,028	160	555
1400	385,9	0,143	134,4	0,016	160	555
2000	475,8	0,150	141,3	0,012	160	555
2450	546,4	0,157	147,2	0,013	160	555
2510	557,4	0,183	149,5	0,038	160	555
3000	716,5	0,325	152,8	0,007	160	555
3400	856,0	0,349	155,6	0,007	160	555
3660	949,0	0,352	157,5	0,007	160	555
3740	975,4	0,350	158,3	0,007	160	555
4000	1067,5	0,353	159,2	0,006	160	555
4330	1184,2	0,351	160,6	0,005	160	555

Perfil de Temperatura en pozo con Producción Bifásica Gas/Líquido



DATOS DE GRADIENTES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA						
PROF	PRESIÓN	GRADIENTE	TEMP	GRADIENTE	TUB	REV
(TVD)	PSIA	PSIA/R.	deg. F	deg. F/ft.	Press.	Press.
1228	275,7	0,121	136,9	0,036	110	670
1328	288,2	0,125	138,2	0,013	110	670
2046	375,4	0,121	143,9	0,008	110	670
2145	388,6	0,133	146,3	0,025	110	670
2600	451,0	0,137	150,1	0,008	110	670
2697	466,1	0,156	152,1	0,021	110	670
2922	501,9	0,159	154,1	0,009	110	670
3015	521,5	0,212	155,7	0,017	110	670
3361	633,3	0,323	157,7	0,006	110	670
3714	742,8	0,310	159,6	0,005	110	670
4020	843,8	0,330	161,5	0,006	110	670

Glosario

A

Adimensional: Que no posee dimensiones totalmente definidas.

Anular: Espacio comprendido entre dos tubos concéntricos.

C

Cabezal del Pozo: Ensamblaje superficial utilizado principalmente para regular la presión del pozo, compuesto por válvulas de control, medidores de presión, reductores de flujo, etc.

Conductividad Térmica: Magnitud que representa la capacidad con la cual un material conduce calor y produce por consiguiente variación de temperatura.

Conducción: Proceso que se lleva a cabo sin movimiento relativo de las partículas que componen a los cuerpos en cuestión, y es el caso de los cuerpos sólidos en contacto.

Calor: Calor es la transferencia de energía de una parte a otra de un cuerpo, o entre diferentes cuerpos, en virtud de una diferencia o gradiente de temperatura

Calor Específico: Cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de una sustancia un grado Celsius.

Convección: Transferencia que se realiza con movimiento relativo de las partículas que componen los cuerpos, como en el caso de los flúidos líquidos o gaseosos.

D

Densidad: Propiedad de una sustancia que mide la cantidad de masa por unidad de volumen.

Difusividad Térmica: es la relación entre la conductividad térmica y el calor específico multiplicado por su densidad.

E

Empacadura: Herramienta usada como equipo de subsuelo que sirve de sello entre dos conductos. Generalmente el anular entre el revestimiento de producción y eductor, está sellado por una empacadura.

Energía Cinética: Energía que posee la materia debido a su movimiento.

Energía Potencial: Energía que posee la materia debido a su posición, condición o composición.

F

Fluido: Sustancia cuyas moléculas pueden moverse unas respecto a las otras.

Formación: Se refiere a estratos rocosos homogéneos de cualquier tipo, usado particularmente para describir zonas de roca penetrada durante la perforación.

G

Gradiente Geotérmico: Incremento de la temperatura con la profundidad.

Gravedad API: La escala utilizada por el Instituto Americano del Petróleo para expresar la gravedad específica de los hidrocarburos.

Gravedad Específica: La relación de la densidad de una sustancia a determinada temperatura con la densidad de agua a 4°C.

I

Isotropía: Calidad de la uniformidad direccional en material tales que las características físicas no varían en diversas direcciones.

Inyección: Envío de algún tipo de fluido por el pozo al yacimiento, a presión, para lograr un fin determinado.

P

Pozo: Hoyo que ha sido terminado apropiadamente con los aditamentos requeridos, para elevar hasta superficie la producción de gas y/o petróleo desde un yacimiento.

Pozo de Inyección: Pozo a través del cual se inyecta fluido para mantener la presión

de un yacimiento en la operación de recuperación secundaria, y así incrementar el recobro de petróleo. El fluido a inyectar puede ser agua, gas natural, vapor, etc.

Pozo de Producción: Pozo a través del cual se extrae hidrocarburos en volumen comercialmente explotable.

Presión: El esfuerzo ejercido por un cuerpo sobre otro cuerpo, ya sea por peso (gravedad) o mediante el uso de fuerza. Se le mide como fuerza entre área, tal como newtons por metro cuadrado.

Presión Atmosférica: El peso de la atmósfera sobre la superficie de la tierra. A nivel del mar, ésta es aproximadamente 1,013 bars, 101.300 Newtons/m², 14,7 lpc ó 30 pulgadas de mercurio.

Presión Hidrostática: Es la presión de un yacimiento a condiciones estáticas, es decir, cuando no existe movimiento de fluidos dentro del mismo y todas las fases se encuentran en equilibrio. Esta presión se mide en el fondo de un pozo a nivel de la zona de disparos, cuando éste se ha permanecido cerrado durante el tiempo suficiente hasta estabilizarse.

Producción: Volumen de hidrocarburos originalmente en los depósitos de una cuenca que han sido extraído y no reinyectado.

R

Radiación: Es el proceso por el cual el calor es transferido por ondas electromagnéticas

Radio de Drenaje: Es el área drenada por un pozo en el yacimiento.

Revestidor: Tubería con la cual se realiza la completación de un pozo.

S

Sarta: Tubería de acero con las cuales se llevan a cabo operaciones de producción, inyección o perforación.

T

Transferencia de calor: Proceso mediante el cual se intercambia energía en forma de calor entre distintos cuerpos, o entre diferentes partes de un mismo cuerpo que están a distinta temperatura.

Temperatura: Magnitud física descriptiva de un sistema que caracteriza la transferencia de energía térmica, o calor, entre ese sistema y otros

Tubería: Línea o conducto para transportar fluidos. Generalmente se especifica que tipo de tubería , de revestimiento, de perforación, etc.

V

Viscosidad: Resistencia de un líquido al movimiento o flujo; normalmente se abate al elevar la temperatura.

W

Watio: El vatio o watt (símbolo: W) es la unidad derivada del SI para la medida de potencia, trabajo o energía desplazada por unidad de tiempo. Es el equivalente a 1 julio por segundo (1 J/s).

Y

Yacimiento: Acumulación de hidrocarburos en roca porosa tal como arenisca. Un yacimiento petrolero normalmente contiene tres fluidos (petróleo, gas y agua) que se separan en secciones distintas debido a sus gravedades variantes. El gas siendo el más ligero ocupa la parte superior del yacimiento, el petróleo la parte intermedia y el agua la parte inferior.

Símbolos y Abreviaturas

A	Área transversal
C_a	Capacidad de calor en el anular
C_e	Capacidad de calor de la superficie
C_j	Coefficiente Joule Thompson
c_p	Calor específico a presión constante
c_{pa}	Capacidad calórica del fluido anular
c_{pt}	Capacidad calórica del fluido en la tubería
D	Diámetro del hoyo o la tubería
E_{ij}	Tensor de esfuerzo
E	Emisividad de la superficie
Gr	Número de Grashoff
G	Aceleración de gravedad
g_c	Factor de conversión 32,17(lbm-ft)/(lbf-sec ²)
g_G	Gradiente geotérmico
H	Entalpía del fluido
h_c	Coefficiente de transferencia de calor por convección
h_r	Coefficiente de transferencia de calor por convección entre el anular y la tubería
h_{to}	Coefficiente de transferencia de calor por convección en la tubería
I	Integral definida adimensionalmente
J	Factor de conversión 778 (ft-lbf/Btu)
J_0, J_1	Funciones de Bessel de primer orden
K	Conductividad térmica
k	Constante de proporcionalidad

κ	Difusividad de la sustancia
K_a	Conductividad del Fluido anular
k_c	Conductividad en el revestidor
k_{cem}	Conductividad del cemento
k_e	Conductividad de la superficie
k_{ins}	Conductividad del aislante
k_t	Conductividad entre el anular y el fluido de la tubería
L	Profundidad del pozo
L_R	Parámetro de longitud de relajación
Nuf	Número de Nusselt para convección forzada
P_D	Presión adimensional
Pr	Número de Prandlt
P_{wh}	Presión de cabezal
P_{ws}	Presión estática de fondo
P	Presión
p_{wh}	Presión de fondo del pozo
Q	Tasa de transferencia de calor por unidad de longitud
Q_c	Tasa de flujo de calor por conducción
Q_r	Tasa de flujo de calor por radiación
Q_{ta}	Tasa de flujo de calor del fluido anular al fluido de la tubería
R	Resistencia del flujo de calor
Re	Número de Reynolds
RGL	Relación gas/liquido
R	Radio del hoyo o la tubería
r_{ci}	Radio interno del revestidor

r_{co}	Radio externo del revestidor
r_{ins}	Radio del aislante
S	Superficie o área del cuerpo
SPE	Sociedad de Ingenieros de Petróleo
T	Temperatura del cuerpo
T_a	Temperatura del medio ambiente
Te	Temperatura de la formación
T_{ei}	Temperatura de la formación a condiciones iniciales
Teibh	Temperatura estática del fondo del pozo
TD	Temperatura Adimensional
T_f	Temperatura de formación modificada
T_{fwh}	Temperatura del fluido en el cabezal
T_s	Temperatura de la superficie de la tierra
To	Temperatura del entorno
T_∞	Temperatura de la corriente no perturbada
Twb	Temperatura en la interfase pozo/formación
td	Tiempo Adimensional
U_t	Coefficiente global de transferencia de calor de la tubería
U_{to}	Coefficiente global de transferencia de calor
U_{toc}	Coefficiente global de calor fuera del área de superficie
U_∞	Velocidad de la corriente
V	Volumen
V	Velocidad del fluido
v_o	Temperatura superficie inferior

ν_1	Temperatura superficie superior
W	Potencia total radiada
W	Flujo másico del fluido
x_i	Fuerza por unidad de masa
Y_0, Y_1	Funciones de Bessel de segundo orden
Z	Profundidad del intervalo considerado
Z	Profundidad del volumen de control
dQ	Cantidad de calor
dT/dx	Gradiente de temperatura
$wH _z$	Suma de calor
α	Difusividad térmica
β	Coefficiente de dilatación térmica
ϕ	Ángulo respecto al plano xy en coordenadas esféricas y cilíndricas
ϕ	Factor de corrección promedio por intervalo de longitud
γ_g	Gravedad específica del gas
γ_o	Gravedad específica del petróleo
ρ_e	Densidad de la superficie
θ	Ángulo respecto al plano yz en coordenadas esféricas y cilíndricas
Ω	Coefficiente de intercambio de calor
$\mathcal{G}$	Coefficiente de expansión térmica lineal
σ	Constante de Stefan-Boltzmann
μ	Coefficiente de viscosidad
ϖ	Ángulo de inclinación respecto a la horizontal
ls (sub-índice)	Sarta larga
ss (sub-índice)	Sarta corta