

TRABAJO DE GRADO

**“MODELO COMPUTACIONAL DEL EFECTO COMBINADO DE LA
TEMPERATURA Y LA FRECUENCIA DE CARGA SOBRE EL CRECIMIENTO DE
GRIETA EN LA FATIGA DEL POLICLORURO DE VINILO CLORADO (CPVC)
UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO”**

Realizado por:
Ing. Eudi Blanco Sánchez

Presentado ante la ilustre

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Para optar al Título de

MAGISTER SCIENTIARUM EN INGENIERÍA MECÁNICA

Caracas, Noviembre de 2007

© Blanco Sánchez, Eudi, 2007
Hecho el depósito de Ley
Depósito Legal lft4872007620621

APROBACIÓN DEL TUTOR

En carácter de tutor del Trabajo de Grado de Maestría, presentado por el Ing. Eudi Blanco Sánchez, C.I. 13.886.599, para optar al título de Magíster Scientiarum en Ingeniería Mecánica, titulado “*Modelo Computacional del Efecto Combinado de la Temperatura y la Frecuencia de carga sobre el Crecimiento de Grieta en la Fatiga del Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC) utilizando el Método de los Elementos de Contorno*” considero que dicho trabajo cuenta con los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y la evaluación por parte del jurado examinador designado.

En Caracas, a los 15 días del mes de Noviembre 2007

Prof. Marco González, MSc.



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería y por el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado presentado por el Ing. **Eudi Vicente Blanco Sánchez**, portador de la Cédula de Identidad 13.886.599, bajo el título: **“MODELO COMPUTACIONAL DEL EFECTO COMBINADO DE LA TEMPERATURA Y LA FRECUENCIA DE CARGA SOBRE EL CRECIMIENTO DE GRIETA EN LA FATIGA DEL POLICLORURO DE VINILO CLORADO (CPVC) UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO”**, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **MAGISTER SCIENTIARUM EN INGENIERÍA MECÁNICA**, dejan constancia de lo siguiente:


1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 20 de Noviembre de 2007, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en el Aula 213, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado; todo conforme a lo dispuesto en los Artículos 44, 49, 50, 51 y 52 del Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa pública del trabajo, el Jurado decidió por unanimidad **APROBARLO** por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Para dar este veredicto, el Jurado estimó que la obra examinada representa un aporte significativo en el estudio de la mecánica de fractura computacional aplicada a materiales poliméricos, contribuyendo a consolidar trabajos de investigación en esta área.

En fe de lo cual se levanta la presente acta, a los veinte días del mes de noviembre de 2007, dejándose también constancia de que conforme a lo dispuesto en la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el profesor MSc. Marco González.


Profa. MSc. María de los Ángeles Rodríguez
C.I.: 10.781.504
Miembro Principal




Prof. PhD. Carlos Graciano
C.I.: 13.735.197
Miembro Principal


Prof. MSc. Marco González
C.I.: 5.577.476
COORDINADOR

AGRADECIMIENTOS

A Dios y a la Virgen.

A mis Padres, mi Hermana y el resto de mi Familia por el apoyo y la motivación.

A la Universidad Central de Venezuela y su Escuela de Ingeniería Mecánica, por la oportunidad brindada para cursar mis estudios de Postgrado.

Al Profesor Manuel Martínez por la confianza, la orientación y el apoyo brindado en todo momento y también por permitirme trabajar a su lado.

Al Profesor Marco González por su apoyo y valiosos aportes a este Trabajo.

Al resto del Staff de Profesores de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la UCV por el apoyo brindado a través del Proyecto de Grupo No. 080056732004, titulado “Estudio Numérico y Experimental de Defectos y Grietas en Elementos de Máquinas”.

Al Ing. MSc. Rafael Balderrama por su valiosa ayuda y el apoyo prestado en todo momento para lograr este Trabajo.

Al Ing. Johane Bracamonte por su amistad y valiosa ayuda.

A mis Amigos y Compañeros de estudios.

A todos quienes aportaron un granito de arena para que pudiera alcanzar tan importante logro para mí.

GRACIAS.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
POSTGRADO

**“MODELO COMPUTACIONAL DEL EFECTO COMBINADO DE LA
TEMPERATURA Y LA FRECUENCIA DE CARGA SOBRE EL CRECIMIENTO DE
GRIETA EN LA FATIGA DEL POLICLORURO DE VINILO CLORADO (CPVC)
UTILIZANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO”**

Autor: Ing. Eudi Blanco Sánchez

Tutor: Prof. Marco González, MSc.

RESUMEN

El fenómeno de fatiga se define como la disminución de la resistencia mecánica de los materiales al someterlos a esfuerzos repetidos que favorecen el crecimiento estable de una grieta. La propagación de grieta por fatiga de muchos polímeros es sensible a las condiciones de ensayo, tales como la frecuencia y la temperatura. En este estudio, se evaluó el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia sobre la velocidad de crecimiento de grieta en la fatiga del Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC), el cual es un homopolímero de PVC que ha sido sujeto a una reacción de cloración. El modelo de crecimiento de grieta propuesto por los investigadores Kim y Wang (1994) fue aplicado para simular el comportamiento en estudio empleando el Método Dual de los Elementos de Contorno para el análisis de grietas tridimensionales como herramienta numérica desarrollada computacionalmente, la cual permitió calcular los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada incremento de la grieta, aplicando la ecuación integral de tracción y flujo en una de las superficies de la grieta y la ecuación integral de desplazamiento y temperatura en la otra. Como estrategia de discretización, en las superficies de la grieta se emplearon elementos discontinuos, en los bordes de la grieta elementos semidiscontinuos y en el resto de la pieza elementos continuos. En este trabajo, los factores de intensidad de esfuerzo en la punta de la grieta, en comparación con la metodología experimental desarrollada por Kim y Wang, fueron determinados computacionalmente a través de un programa desarrollado para tal fin, implementando la integral J y la dirección de propagación de la grieta fue determinada por el Criterio del Esfuerzo Principal Máximo. Se estudiaron cuatro ejemplos en un rango de temperatura entre 23 y 70°C y un rango de frecuencias entre 0.1 y 10 Hz. Bajo estas condiciones se aplicó el modelo de Kim y Wang basado en el factor de intensidad de esfuerzo, la temperatura, la frecuencia de carga y la energía de activación de la ecuación de Arrhenius, en comparación con el modelo de Paris y Erdogan que no incluye los tres últimos parámetros antes mencionados. Los resultados obtenidos, a través de la simulación computacional, confirman que la velocidad de crecimiento de grieta aumenta con la temperatura de ensayo y con la disminución de la frecuencia. Así mismo, se demostró que el modelo de crecimiento de Kim y Wang es compatible con el modelo de Paris y Erdogan, por lo tanto genera resultados con una buena aproximación a los resultados experimentales.

Palabras claves: Método de los Elementos de Contorno, Mecánica de la Fractura, Propagación de grietas por Fatiga, Polímeros, CPVC, Temperatura y Frecuencia.

Índice General

	Pág.
1. Introducción	17
1.1 Alcance de la investigación.....	19
1.2 Antecedentes.....	19
1.3 Objetivos.....	25
1.3.1 Objetivo general.....	25
1.3.2 Objetivos específicos.....	25
2. Fundamento Teórico	26
2.1 Los Polímeros y sus Propiedades mecánicas.....	26
2.2 El Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC).....	29
2.3 Termoelasticidad.....	30
2.3.1 Termoelasticidad en Estado Estacionario.....	31
2.4 Mecánica de Fractura.....	32
2.4.1 Campos termoelásticos en el frente de grieta.....	40
2.4.2 Razón de Energía de Deformación Relajada.....	43
2.4.3 La Integral J	44
2.5 Análisis de Crecimiento de Grietas.....	46
2.5.1 Crecimiento de grieta por Fatiga.....	46
2.5.2 Modelos matemáticos de Crecimiento de grieta por Fatiga.....	49
3. Método de Elementos de Contorno	53
3.1 Método Dual de Elementos de Contorno.....	55
3.2 Ecuaciones Integrales de Contorno.....	56
3.3 Soluciones Fundamentales.....	59
4. Metodología	61
4.1 Estrategia de Discretización.....	64
4.2 Discretización del MDEC.....	68
4.3 Ensamble del Sistema de Ecuaciones.....	70
4.4 Tratamiento de las Integrales Singulares.....	72
4.5 Cálculo de Variables de Postproceso.....	73
4.5.1 Puntos Internos.....	73
4.5.2 Puntos sobre el Contorno.....	74

4.6 Cálculo de Factores de Intensidad de Esfuerzo.....	76
4.6.1 Método de Integrales de Contorno.....	77
4.6.2 Método de Energía de Dominio.....	78
4.6.3 La Integral M_I	84
4.7 Implementación numérica de las integrales J y M_I	86
4.8 Cálculo de la Velocidad de Crecimiento de Grieta.....	89
4.9 Cálculo de la Dirección de Propagación de Grieta.....	90
5. Ejemplo y Resultados	93
5.1 Probeta con grieta lateral.....	95
5.1.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	97
5.1.2 Efecto de la frecuencia de la carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	101
5.2 Placa rectangular con orificio.....	105
5.2.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	107
5.2.2 Efecto de la frecuencia de la carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	110
5.3 Cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.....	114
5.3.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	116
5.3.2 Efecto de la frecuencia de la carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	120
5.4 Probeta con grieta lateral inclinada.....	124
5.4.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	125
5.4.2 Efecto de la frecuencia de la carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN).....	128
5.5 Dirección de propagación de la grieta y la energía relajada.....	131
6. Análisis de Resultados	133
Conclusiones	136
Recomendaciones	138
Bibliografía	139
Anexo A: Reportes de resultados de la simulación del crecimiento y propagación de grieta aplicando el método dual de los elementos de contorno.....	145
Anexo B: Gráficos de mallas deformadas para los cuatro casos estudiados.....	158

Índice de Figuras

	Pág.
2.1.1 Dibujo esquemático de la estructura amorfa y cristalina de un polímero.	27
2.4.1 Esquema representativo de dos redes cristalinas unidas entre sí por las macromoléculas de gran longitud muy entrelazadas, formando la zona amorfa y donde se producen, en un caso, una deformación dúctil, con extendido de las macromoléculas y en otro caso una ruptura frágil con el desgarro de las macromoléculas entrelazadas.	33
2.4.2 Serie de “Crazes” producidos en el cuerpo de una probeta de Poliestireno. . .	33
2.4.3 Modos de Fractura (a) y Sistema de coordenadas local en el frente de grieta (b).	34
2.4.4 a) Placa semi infinita con grieta central de longitud $2a$ (doble punta), sometida a tensión; b) media placa con grieta sencilla de longitud a , sometida a tensión.	36
2.4.5 Campo de tensiones próximo a la punta de la grieta.	39
2.4.6 Contorno de la integral J alrededor del vértice de la grieta.	44
2.4.7 Extensión virtual de grieta en un continuo bidimensional.	46
2.5.1 Etapas del proceso de Fatiga.	48
3.2.1 Superficie ficticia semiesférica alrededor del punto x' ubicado en el contorno.	57
4.1 Diagrama de Flujo del proceso.	63
4.1.1 Estrategia de discretización.	65

4.1.2	Transformación de un sistema de coordenadas global a uno local.	66
4.1.3	Elementos discontinuo y semidiscontinuo.	67
4.2.1	Cuerpo general de la grieta con condiciones de borde mecánicas y térmicas. .	69
4.5.1	Sistema de coordenadas intrínseco (ξ_1, ξ_2) y sistema de coordenadas local x_i^o . .	75
4.6.1	Área y Contorno para la evaluación de la integral J en el frente de grieta. . . .	78
4.6.2	a) Frente de grieta, b) Extensión virtual del frente de grieta.	79
4.6.3	a) Dominio de integración encerrado por las superficies S_b , S^+ , S^- y S_l . b) Esquema de la entalla de altura h	81
4.6.4	Discretización del contorno y dominios de integración para la evaluación de la integral J	83
4.6.5	Formas de la función q bicuadrática y optimizada.	84
4.6.6	Tipos de celdas: a) Continuas, b) Semidiscontinuas.	87
4.6.7	Vector propagación de grieta en el punto P.	91
5.1.1	Probeta mallada con grieta lateral.	96
5.1.2	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral.	97
5.1.3	Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. T a la frecuencia de carga de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la probeta con grieta lateral.	100
5.1.4	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral.	101
5.1.5	Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. $\text{Log}(f)$ a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la probeta con grieta lateral.	103
5.1.6	Logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta versus el logaritmo de la frecuencia a diferentes temperaturas.	104

5.1.8	Logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta versus el logaritmo de la frecuencia a diferentes temperaturas.	106
5.2.1	Malla de la Placa con agujero cuadrado en el centro.	106
5.2.2	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la placa rectangular con orificio.	107
5.2.3	Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. T a la frecuencia de carga de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la placa con agujero central.	110
5.2.4	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la placa rectangular con orificio.	111
5.2.5	Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Log(f) a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la placa con agujero central.	113
5.3.1	Grieta circular contenida en una barra cilíndrica.	114
5.3.2	Discretización de una porción de la barra cilíndrica.	115
5.3.3	Discretización cerca de la grieta.	116
5.3.4	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan al cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.	117
5.3.5	Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Temperatura (T) a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso del cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.	119
5.3.6	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a un cuerpo cilíndrico con grieta circular.	120
5.3.7	Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Log (f) a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso del cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.	123
5.4.1	Probeta con grieta lateral inclinada.	124

5.4.2	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral inclinada.	126
5.4.3	Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. Temperatura a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso la probeta con grieta lateral inclinada.	128
5.4.4	Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a una probeta con grieta lateral inclinada.	129
5.4.5	Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. $\text{Log}(f)$ a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso la probeta con grieta lateral inclinada.	131

Índice de Tablas

	Pág.
2.2.1 Propiedades físicas del PVC y CPVC.	30
5.1 Constantes m y C del modelo de Paris para el CPVC a diferentes frecuencias y temperaturas.	94
5.1.1 Valores del Log (da/dN) a $T = 23^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	99
5.1.2 Valores del Log (da/dN) a $T = 50^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	99
5.1.3 Valores del Log (da/dN) a $T = 70^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	99
5.1.4 Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	102
5.1.5 Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	102
5.1.6 Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral.	103
5.2.1 Valores del Log (da/dN) a $T = 23^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	108
5.2.2 Valores del Log (da/dN) a $T = 50^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	108
5.2.3 Valores del Log (da/dN) a $T = 50^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	109

5.2.4	Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	112
5.2.5	Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	112
5.2.6	Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.	112
5.3.1	Valores del Log (da/dN) a $T = 23^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	118
5.3.2	Valores del Log (da/dN) a $T = 50^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	118
5.3.3	Valores del Log (da/dN) a $T = 70^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	118
5.3.4	Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	121
5.3.5	Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	121
5.3.6	Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna. .	122
5.4.1	Valores del Log (da/dN) a $T = 23^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.	126
5.4.2	Valores del Log (da/dN) a $T = 50^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.	127
5.4.3	Valores del Log (da/dN) a $T = 70^{\circ}\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.	127
5.4.4	Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.	129
5.4.5	Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.	130

5.4.6 Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada. 130

Nomenclatura

a Longitud de grieta

ξ Coordenada local

E Módulo de elasticidad

f Función genérica

G tasa de liberación de energía por avance de grieta

G_c tasa de liberación de energía por avance de grieta crítica

J Parámetro fractomecánico o Jacobiano de la transformación de coordenadas

\bar{J} Valor promedio de J

K Factor de intensidad de esfuerzo

k Parámetro de discontinuidad

q Flujo de calor o función de la extensión virtual de grieta

q^* Solución fundamental de flujo de calor

t_i Tracción en la dirección i

T_g Temperatura de transición vítrea del material

u_i Desplazamiento en la dirección i

P Tensor de momentum

r Distancia entre dos puntos o radio de un círculo

S Superficie

x_i Coordenada cartesiana en la dirección i

Y Parámetro adimensional

W Densidad de energía elástica

α Coeficiente de expansión térmica

β Parámetro de la función optimizada

δ Tensor identidad

Δa Área de extensión virtual de la grieta o diferencial de extensión de grieta

ε Deformación o radio esférico

ψ Función de forma para elementos bidimensionales

Γ Contorno o energía superficial
 γ Energía local o coordenada local
 η Coordenada local
 λ Coeficiente de conducción de calor
 μ Módulo de corte
 U Energía potencial elástica
 θ Temperatura o ángulo
 θ^* Solución fundamental de la temperatura
 ρ Radio de la entalla
 σ Esfuerzo
 Ω Dominio
 w_i Factor de peso para integración por puntos de Gauss en el punto i o parámetro de la función optimizada.
 Φ Función de forma para elementos tridimensionales
 ϕ, φ Coordenadas esféricas
 φ_p Ángulo de propagación del punto P del frente de grieta

Capítulo 1

Introducción

Una tendencia importante en el diseño de ingeniería durante la década pasada ha sido el concentrado interés en los así llamados *polímeros de ingeniería*, que pueden ser sustitutos de metales estructurales tradicionales. Quizás los ejemplos más importantes de esto se pueden encontrar en la industria automotriz y en la industria de las tuberías.

Un sinónimo común de los polímeros es “plásticos”, nombre que deriva de la propiedad de deformación asociada con la fabricación de la mayor parte de los productos poliméricos. Para algunos críticos, “plástico” es sinónimo de modernidad. Exacto o no, representa el impacto que esta compleja familia de materiales de ingeniería ha tenido en nuestra sociedad.

Los estudios realizados en los materiales poliméricos, en los últimos años, han generado un campo de investigación que se encuentra en pleno desarrollo y este auge está caracterizado por las aplicaciones que tienen estos materiales en diferentes áreas. Es así como el presente trabajo logra dar un aporte al estudio de las propiedades mecánicas de los polímeros, debido a la importancia de correlacionar la respuesta de estos materiales bajo un rango de condiciones con el objeto de predecir su desempeño en aplicaciones prácticas que permitan optimizar el diseño en determinada área.

Uno de los enfoques principales de esta investigación, es diseñar una metodología computacional que sirva de herramienta en el análisis de grietas en polímeros sometidos a cargas fluctuantes y con características isotrópicas y termoelásticas cuando se propaga una grieta. También esta metodología permite predecir el comportamiento fractomecánico del material bajo condiciones no ambientales de temperatura y variación de frecuencia de la carga, aplicando el modelo matemático para la velocidad de crecimiento de grieta desarrollado Kim y Wang (1994) y comparándolo con el criterio de Paris-Erdogan, tomando

como base el análisis de grietas en problemas termoelásticos realizado por Balderrama (2004).

El material polimérico empleado para este estudio fue el Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC), el cual por su bajo índice de cristalinidad puede considerarse un polímero altamente amorfo, lo cual lo hace merecedor de características altamente isotrópicas y elásticas. Y su alta resistencia térmica le da un buen desempeño en aplicaciones que demanden altas temperaturas.

Durante las últimas décadas el desarrollo de los métodos numéricos ha surgido como una poderosa herramienta de diseño e investigación en problemas relacionados con propagación de grietas, debido a que han resultado ser más económicos y flexibles por su adaptabilidad a diversas situaciones. Así mismo, gracias al desarrollo de los métodos numéricos en análisis de esfuerzos y a la disponibilidad de recursos computacionales de gran capacidad, se pueden realizar cálculos de una forma rápida y eficaz. Es por esta razón, que la metodología numérica es la herramienta principal de análisis de esta investigación a través del *Método de los Elementos de Contorno*. Esta herramienta computacional ha demostrado ser una alternativa eficaz en el estudio de la mecánica de fractura tanto en la precisión de sus resultados como en la disminución de tiempo de preproceso y construcción del modelo, lo que lo hace sobresalir por encima de otros métodos computacionales de análisis como el método de los elementos finitos o diferencias finitas.

Recientemente, el *Método Dual de los Elementos de Contorno (MDEC)* ha sido desarrollado como una versátil herramienta para modelar problemas de análisis de grietas. En este método, la ecuación integral de contorno para desplazamiento es aplicada en una de las superficies de la grieta y la ecuación integral de contorno para tracción en la otra, permitiendo resolver problemas de grietas de modo mixto. Esta estrategia de discretización permite adaptar el modelo numérico a medida que cambia la geometría de la grieta y establecer los campos tridimensionales de esfuerzo-deformación en el modelo y como postproceso permite calcular los parámetros involucrados en el crecimiento de grietas, para posteriormente determinar la velocidad de propagación de la grieta bajo condiciones de temperatura y frecuencia de carga específicas, empleando los criterios de Kim y Wang (1994) y de Paris-Erdogan.

Finalmente, la validación de este estudio descansa en la comparación realizada con resultados experimentales obtenidos y publicados en el trabajo de Saghir *et al.* (2005).

1.1 Alcance de la investigación

El siguiente estudio está limitado al análisis del crecimiento de grieta por efecto de la fatiga del CPVC bajo condiciones no ambientales de temperatura y variación en la frecuencia de la carga aplicada, usando el método Dual de Elementos de Contorno (MDEC) en tres dimensiones.

Esta investigación también compara dos modelos matemáticos utilizados para estimar la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga en las mismas condiciones de carga y temperatura, utilizando el MDEC, fundamentado en el método de análisis incremental tridimensional y en la propagación de grieta propuesto por Dell'Erba y Aliabadi (2002), así como en el análisis de grietas en problemas termoelásticos tridimensionales realizado por Balderrama (2004).

Además, en dicho análisis se considera que el CPVC es un material polimérico isotrópico con características termoelásticas al ser reblandecido por efecto de la aplicación de calor.

1.2 Antecedentes

La mecánica de fractura como disciplina nace a principios del siglo XX, teniendo su origen en las investigaciones llevadas a cabo por Griffith en 1920, quien formuló la teoría de fractura frágil y encontró que la falla frágil de un material elástico podía ser caracterizada por una variable, llamada más tarde *razón de energía relajada*, cuyo valor crítico, independiente de la geometría de la estructura, es una propiedad mecánica del material. Se observó que el fenómeno de concentración de esfuerzos esencialmente ocurría en la vecindad del vértice de la grieta y es posible estudiarlo desde un punto de vista

macroscópico con la ayuda de variables intrínsecas como la geometría, sollicitaciones y propiedades del material. En elasticidad lineal esta respuesta se representa como una singularidad en el campo de esfuerzos. Fue Irwin quien realizó el estudio de esta singularidad y en 1956 definió los factores de intensidad de esfuerzo en grietas para casos particulares. Este investigador sugirió que la teoría de Griffith podía aplicarse a materiales metálicos, sustituyendo el trabajo plástico realizado por una energía superficial, la cual representa la resistencia de propagación de una grieta. De esta forma, Irwin utilizando el método de análisis de tensiones propuesto por Westergaard, realizó el análisis de esfuerzo en la punta de la grieta para los tres modos de desplazamiento, en cuerpos homogéneos lineal elástico y los relacionó con los fenómenos de fatiga en metales y con la fractura a través de los factores de intensidad de esfuerzo K . Irwin también describió la magnitud del campo de esfuerzos en términos de la razón de energía G , que está asociada con la variación de energía de deformación elástica que acompaña el incremento de la longitud de la grieta. Debido a que el comportamiento es lineal elástico, existe una relación directa entre K y G . Estos trabajos consolidaron los principios de la mecánica de fractura elástica lineal (LEFM).

En la mecánica de fractura lineal los campos del frente de grieta se caracterizan por un factor de intensidad de esfuerzos K , este valor depende de la configuración de carga del cuerpo, de la forma de la grieta y del modo de sollicitación. Este factor se puede obtener por distintos métodos aproximados, tales como: extrapolación de desplazamientos y esfuerzos (Cruse, 1975), elementos especiales en el vértice de la grieta (Jia *et. al.*, 1989), la técnica de substracción de singularidad (Aliabadi, 1987) y por relajación de energía de deformación (Cruse *et. al.*, 1977). El método de integrales independientes del camino de integración está basado en principios energéticos y proveen una alternativa en el cálculo de la razón de energía relajada por avance del frente de grieta. La más conocida es la integral J (Moran *et. al.*, 1987) basado en el tensor de *momentum de energía* de Eshelby. Esta integral representa la variación de energía potencial que bajo un estado de esfuerzo dado acompañaría al crecimiento de la grieta de una determinada longitud, aún cuando la zona plástica frente a la punta de la grieta fuese considerable. Esta integral es la generalización del parámetro G de Irwin, con el que coincide cuando el régimen es elástico. En el análisis de grietas tridimensionales con termoelasticidad (Aliabadi *et. al.*, 2002) se aplica la integral J como

una integral compuesta por una parte que se integra sobre una línea y otra sobre una superficie. Una formulación distinta en el cálculo de la razón de energía relajada en el frente de grieta fue propuesto por Moran y Nakamura (1986) utilizando la integral de energía de dominio; esta aproximación es versátil, ya que puede ser aplicada a problemas estáticos o cuasiestáticos con elasticidad, elastoplasticidad o viscoplasticidad (Cisilino *et. al.*, 1999) y termoelasticidad. En el 2004, Balderrama R., se basa en el método de los Elementos de Contorno para analizar grietas en problemas termoelásticos implementando la integral J .

A pesar que muchos modelos de investigación se enfocan en modelos bidimensionales, existen aplicaciones de ingeniería que demandan un modelo tridimensional. La investigación del fenómeno de fractura se realiza en el campo experimental y computacional. Entre estas dos opciones los métodos numéricos han resultado ser más económicos y flexibles por su adaptabilidad a diversas situaciones. Una técnica numérica que está consolidándose actualmente es el *método de los Elementos de Contorno (MEC)* debido a que resulta ser adecuado en el análisis de fractura y ventajoso respecto al método de elementos finitos y adecuado en el análisis de fractura. En elementos finitos la formulación requiere continuidad de bajo orden para soluciones que son de un orden mayor, para obtener resultados precisos la malla debe ser muy refinada en la región donde las variables de campo presentan gradientes, en termoelasticidad estas regiones están situadas alrededor del vértice de grieta debido a que los esfuerzos y la temperatura teóricamente tienden al infinito en esa región; otro inconveniente es el remallado del modelo para cada incremento en el tamaño de la fisura lo que resulta en una gran demanda de recurso computacional.

El método de los elementos de contorno ha adquirido gran importancia a partir de los años 1970. Si bien las bases matemáticas del método se desarrollaron en las primeras décadas del siglo XX, el método ganó popularidad hasta que aparecieron los procesadores de gran velocidad. El MEC reduce la situación considerada a un problema en la frontera del cuerpo estudiado, al transformar las ecuaciones que describen el comportamiento de la variable interior y en el contorno del dominio, en integrales referidas solamente al contorno.

Una de las ventajas principales del método de los elementos de contorno es que solo se requiere la discretización del contorno, lo que significa una reducción en el modelo y

tamaño de los sistemas de ecuaciones que se generan. La malla del contorno puede ser fácilmente ensamblada alrededor de la fisura y de acuerdo a la complejidad del problema se puede ensayar con una buena aproximación de mallas gruesas. La formulación de elementos de contorno está basada en la teoría de ecuaciones integrales y representa en forma natural el comportamiento singular en el vértice de la grieta; además que relaciona variables físicas del problema de forma directa.

En la aplicación en mecánica de fractura, fue Cruse (1972) quien demostró que las ecuaciones integrales resultaban en sistemas matemáticos inconsistentes debido a la coincidencia de las superficies de la grieta. Se propusieron diferentes metodologías para sobrellevar este problema, por ejemplo, se modelaron problemas con simetría de cargas y geometría. Otra técnica propuesta fue la formulación por subregiones de Blanford, Ingraffea y Liggett (1981), en este método el dominio es dividido en múltiples regiones en la dirección de la grieta creando unos contornos artificiales que no son únicos, lo que representa una desventaja en el análisis de propagación. Otro método utilizado fue el de discontinuidad de desplazamientos desarrollado por Crouch como lo cita Cisilino (2000), así la grieta es tratada como una superficie simple en la cual la diferencia de desplazamientos es la única incógnita a determinar (Aliabadi *et al.*, 1992). En este trabajo se aplica el método Dual de Elementos de Contorno que consiste en la utilización de dos tipos de ecuaciones en las superficies de fractura resolviendo el problema de la inconsistencia matemática, de esta manera el problema es resuelto en una región simple y única. El método Dual de Elementos de Contorno bidimensional fue reportado por Portela, Aliabadi y Rooke en sus publicaciones de los años 1992 y 1993; luego éste se extendió a tres dimensiones por Mi y Aliabadi en sus publicaciones de los años 1992 y 1993. En los últimos años ha sido implementado en elastoplasticidad por Leitao, en elastodinámica por Fedelinski, en termoelasticidad por Balderrama (2004) y en concreto por Saleh y Aliabadi.

Las bases teóricas del método Dual de Elementos de Contorno fueron presentadas por Hong y Chen (1988), en una formulación integral que incorporaba la ecuación integral de contorno de tracción sobre una de las superficies de la grieta y la ecuación integral de desplazamiento en la otra superficie. Por lo que las ecuaciones integrales serán distintas, a pesar de que la ruta de integración es la misma para los puntos coincidentes sobre las

superficies de la grieta.

En 1963, Paris y Erdogan aplicaron los principios de la mecánica de la fractura lineal elástica en la caracterización de la propagación de grietas por fatiga y propusieron un modelo matemático para el crecimiento de la grieta. Los materiales homogéneos isotrópicos lineal elásticos fueron extensamente estudiados por Paris y Sih en 1965. En 1968, Irwin, describió en término de los esfuerzos y la geometría del cuerpo agrietado el campo de esfuerzo que se produce alrededor de la punta de la grieta considerando el material lineal elástico y que la propagación de la grieta puede ser lenta (intermitente pero subcrítica) o rápida. La transición de lenta a rápida de la propagación de grieta es una característica importante del comportamiento y frecuentemente es asociada con el punto de carga máxima.

Paris y Sih en 1965 y otros; han estudiado los materiales homogéneos anisotrópicos lineal elásticos, considerándolo inicialmente como un material anisotrópico rectilíneo y luego como materiales compuestos considerando dos materiales homogéneos isotrópicos lineal elástico.

Posteriormente la mecánica de fractura fue desarrollada para varios tipos de materiales con comportamiento no lineal. Irwin en 1965, Rice en 1967, entre otros; estudiaron los materiales no lineales, elastoplásticos y los endurecidos por deformación, homogéneos isotrópicos.

El efecto de la temperatura sobre la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga (VCG) de diversos polímeros ha sido ampliamente estudiado. En general, se ha obtenido que un incremento de la temperatura está asociado con un aumento de la velocidad de propagación de grieta.

Kim y Mai (1993) estudiaron el *efecto de la temperatura sobre la resistencia al crecimiento de grieta del Policloruro de Vinilo no plastificado (uPVC)* en un rango de temperatura entre -30 y 50°C. Ellos obtuvieron que la resistencia al crecimiento de grieta disminuye con el incremento de la temperatura y que el “*crazing*” es la mecánica de fractura dominante a *altas temperaturas*, mientras que *la fluencia al corte* es dominante a *bajas temperaturas*. Resultados similares obtuvieron Irfan-ul-Haq y Merah (2003) para el CPVC a temperaturas de ensayo entre -10 y 70°C.

Hertzberg y Manson (1980), mostraron resultados obtenidos a *temperatura ambiente*

los cuales reflejan que un *aumento en la frecuencia está asociado con una disminución de la velocidad de propagación de grieta*. Este resultado ha sido obtenido para el PVC y otros materiales poliméricos. Estos investigadores también reportaron que el poliestireno (PS) y la polisulfona (PSF) son sensibles a la frecuencia a bajas temperaturas de ensayo, mientras que el polimetilmetacrilato (PMMA) es menos sensible a la frecuencia a bajas temperaturas.

Mientras muchos polímeros son sensibles a la frecuencia de ensayo a temperatura ambiente otros, tales como el policarbonato (PC) y la polisulfona (PSF), no muestran una aparente sensibilidad de la velocidad de propagación de grieta con la frecuencia de ensayo a temperatura ambiente.

Kim y Wang (1994) estudiaron el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia sobre el crecimiento de grieta en el uPVC. Ellos propusieron un modelo matemático basado en la ecuación de Arrhenius y la energía de activación para predecir la velocidad de propagación de grieta d_a/d_N como una función de la temperatura y la frecuencia. Aquí “ d_a ” es el incremento de la longitud de grieta cuya longitud inicial “ a ” y “ d_N ” es el incremento del número de ciclos “ N ”.

Parson (2002) estudió el efecto de la temperatura y la frecuencia sobre la velocidad de propagación de grieta del PVC y además de obtener que un aumento de la temperatura de ensayo y una disminución de la frecuencia causan, por separado, un incremento de la velocidad de crecimiento de grieta, llegó a la conclusión de que a bajas frecuencias (0.01 Hz) y altas temperaturas el crecimiento de grieta por “creep” es el mecanismo dominante. Similares resultados se obtuvieron para el polietileno de alta densidad (PEAD).

Saghir *et al.* (2005) modelaron el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia sobre el crecimiento de grieta en la fatiga del CPVC, empleando el modelo matemático propuesto por Kim y Wang (1994) basado en la ecuación de Arrhenius y obtuvieron una buena predicción de las velocidades de crecimiento de grieta en el CPVC a varias temperaturas y frecuencias.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Modelar el efecto de los cambios de temperatura y frecuencia de carga sobre el crecimiento de grieta en el proceso de fatiga del Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC) utilizando el Método de los Elementos de Contorno.

1.3.2 Objetivos Específicos

1.3.2.1 Establecer las diferencias entre los modelos matemáticos para la determinación de la velocidad de propagación de grietas en un material polimérico termoelástico e isotrópico, propuesto por Paris y Erdogan (1963) y el propuesto por Kim y Wang (1994).

1.3.2.2 Desarrollar una metodología para aplicar el método Dual de Elementos de Contorno en el análisis numérico del problema planteado.

1.3.2.3 Evaluar el efecto que tiene la temperatura y la frecuencia de aplicación de la carga sobre el proceso de propagación de la grieta por fatiga de un material polimérico.

1.3.2.4 Validar los resultados obtenidos a través de la simulación computacional, mediante la comparación con resultados experimentales.

1.3.2.5 Evaluar mediante criterios comparativos los resultados con el método Dual de Elementos de Contorno, entre los modelos matemáticos escogidos, para la velocidad de crecimiento de grieta a diferentes temperaturas y frecuencias.

Capítulo 2

Fundamento teórico

2.1 Los Polímeros y sus Propiedades mecánicas

Los *Polímeros* son macromoléculas (generalmente orgánicas) formadas por la unión de moléculas más pequeñas llamadas monómeros. Estos materiales forman parte de la familia de materiales ingenieriles y son llamados comúnmente “plásticos”.

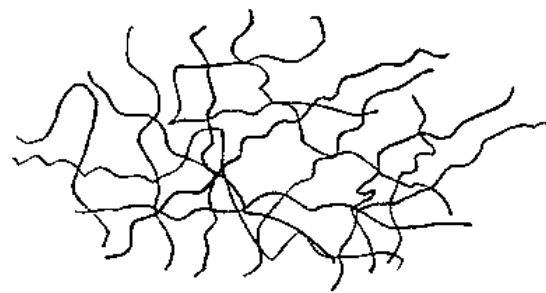
Uno de las características más importantes de los materiales en general, son aquellas relacionadas con su uso final. En ese sentido, el estudio de las *propiedades mecánicas* es una de las más interesantes, pues restringe la aplicación específica de un material; así, uno con poca deformación plástica (pensemos en el vidrio) difícilmente se podrá emplear como protector, como es el caso de los parachoques de autos, y en vez de eso se preferirá un material del tipo elastomérico (con una alta capacidad de absorber energía). Lo anterior es válido también para el caso de los *materiales poliméricos*, los cuales por sus características, tales como los tiempos de relajación, morfología, temperatura de transición vítrea, etc., han presentado serias dificultades para su análisis en lo referente a sus propiedades mecánicas.

El estudio de las propiedades mecánicas se refiere a la respuesta de un cuerpo cuando se le somete a una fuerza externa, la cual genera relaciones del tipo tensorial con la deformación que sufre este material (en general válidas para la zona elástica),(Palza, 1998). Normalmente, el incentivo de estudios de las propiedades mecánicas de los polímeros, así como de cualquier otro material, es la necesidad de correlacionar la respuesta de estos materiales, bajo un rango de condiciones, con el objeto de predecir su desempeño en aplicaciones prácticas.

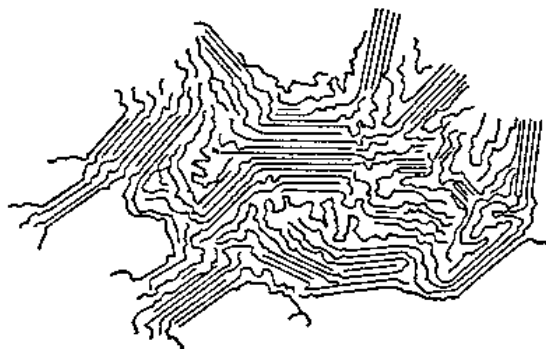
Las propiedades mecánicas de los materiales poliméricos son una consecuencia directa de su composición, así como también de su estructura molecular. Actualmente, estas

propiedades han de ser mejoradas mediante la modificación de la composición o morfología para, por ejemplo, cambiar la temperatura a la que los polímeros se ablandan y recuperan el estado de sólido elástico o también mediante el grado global del orden tridimensional, mejorar otras propiedades tales como la resistencia química, la resistencia a la abrasión, entre otras.

Los polímeros, de acuerdo a su arreglo tridimensional, se pueden separar en dos clases: *amorfos* y *cristalinos*. Los primeros caracterizados por tener un ordenamiento de corto alcance, por lo que no presentan un proceso de fusión, y los segundos caracterizados por tener un orden definido, por lo cual presentan fusión. Sin embargo, no existen los polímeros 100% cristalinos, y siempre se presentará una fase amorfa en unión con la fase cristalina, por lo que también se habla de polímeros *semicristalinos*. El comportamiento mecánico dependerá de si se trata de un polímero amorfo o semicristalino (*Figura 2.1.1*).



Polímero de estructura amorfa



Polímero de estructura cristalina

Figura 2.1.1: Dibujo esquemático de la estructura amorfa y cristalina de un polímero.

En el campo elástico, los materiales poliméricos, al igual que los metales, tienden a deformarse instantáneamente mientras dure la aplicación del esfuerzo y una vez que cede dicha aplicación el material regresa a su estado o forma inicial, es decir, que el material almacena energía bajo un esfuerzo, por lo que cuando cesa la fuerza externa, “expulsa” la energía acumulada. El mecanismo físico que describe este comportamiento elástico de los polímeros, es el desenredo de cadenas macromoleculares que ocurre como consecuencia de una rotación sobre los lazos de la cadena principal por acción del esfuerzo aplicado y que una vez que se elimina este esfuerzo, las cadenas vuelven a enredarse nuevamente volviendo a su estado de equilibrio. La rotación y movimiento de las cadenas de polímero ocurre sin necesidad de aplicar esfuerzo sólo por encima de una temperatura adecuada, denominada *Temperatura de transición vítrea (T_g)*, cuyo valor depende de la detallada forma molecular del polímero. Esta temperatura caracteriza el movimiento de las cadenas macromoleculares de la fase amorfa de los polímeros.

Por debajo de la T_g , el material es un sólido vítreo de gran rigidez, que se manifiesta por altos módulos que generalmente alcanzan los 10^6 psi., la única deformación posible se debe al estiramiento y doblamiento de los enlaces covalentes que unen a los átomos en la cadena, y al estiramiento de los enlaces intermoleculares. Esta deformación no es permanente ni puede ser muy pronunciada.

A temperaturas superiores a la T_g , la deformación es más extensa y más dependiente del tiempo, porque las moléculas ya tienen mayor libertad y cambian continuamente su forma y hasta cierto punto su posición. La aplicación del esfuerzo tiende a orientar a las moléculas en favor de configuraciones que tiendan a hacer trabajo. Por ejemplo, un esfuerzo de tensión extiende a las moléculas y las orienta en la dirección del esfuerzo aplicado porque así se produce una elongación de la muestra.

Si la temperatura es mayor, pero muy cercana a T_g , la deformación es prácticamente reversible y se debe al reordenamiento de segmentos cortos de las cadenas.

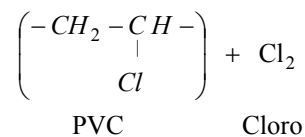
Una de las grandes dificultades que presentan los polímeros desde el punto de vista mecánico, es la gran dependencia que tienen sus propiedades con la temperatura y la velocidad de deformación, esto se debe a su comportamiento *viscoelástico*, que en primera aproximación es producto de altos tiempos de relajación de los procesos microscópicos,

debido al alto peso molecular de ellos.

El efecto de la temperatura sobre las propiedades mecánicas de los polímeros, va a estar determinada por la T_g del material, es decir, si la evaluación de la propiedad se realiza por encima o por debajo de la T_g del polímero. Por ejemplo, en tracción los polímeros semicristalinos poseen una deformación a la ruptura muy pequeña a bajas temperaturas (por debajo de la T_g) e incluso el material no presenta fluencia, por lo que es muy frágil. A medida que se va incrementando la temperatura (sin pasar la T_g) la deformación a la ruptura aumenta y aparece la fluencia, aunque vuelve a descender cuando el material es suave (por sobre la T_g). La tensión a la fluencia disminuye en la medida que aumenta la temperatura. Por otro lado, a velocidades de deformación altas el polímero es muy frágil bajo esfuerzos de tensión, mientras que a velocidades de deformación bajas, se comporta como un material dúctil.

2.2 El Policloruro de Vinilo Clorado (CPVC)

El CPVC es un homopolímero de PVC que ha sido sujeto a una reacción de cloración.



El aumento en el contenido de cloro está entre el 56,7 y el 74%. Los CPVC comerciales contienen entre 63 y 69% de cloro. Este incremento en la cantidad de cloro del PVC, causa un aumento significativo de su temperatura de transición vítrea (T_g) y mejora sustancialmente algunas de sus propiedades mecánicas (*Tabla 2.2.1*).

Tabla 2.2.1: Propiedades físicas del PVC y CPVC, Young (1991).

Propiedad	PVC	CPVC	Unidades	ASTM No.
Gravedad específica	1,40	1,55	g/cm ³	D 792
Resistencia a la tensión (23 °C)	7000	8000	psi	D 638
Módulo de elasticidad en tensión (23 °C)	414000	360000	psi	D 638
Resistencia a la flexión (23 °C)	14000	15100	psi	D 790
Impacto Izod (entallado a 23 °C)	0,75	1,5	ft lb/in	D 256
Dureza (Durómetro D)	80 ± 3	-		D 2240
Dureza (Rockwell R)	110 - 120	119		D 785
Resistencia a la compresión (23 °C)	9600	10100	psi	D 695
Coefficiente de expansión lineal	2,8 x 10 ⁵	3,4 x 10 ⁵	in/in/°F	D 696
Temp. de distorsión por calor a 264 psi	160	217	°F	D 648
Coefficiente de conductividad térmica	1,2	0,95	BTU/hr/ft ² /°F/ in	C 177
Calor específico	0,25	-	cal/°C/gm	D 2766

Las características más resaltantes del CPVC son: alta resistencia química, bajo coeficiente de fricción, bajo peso, no sufre corrosión, no se oxida y es inerte bajo uso.

El CPVC contiene entre un 10 y 15% de grado de cristalinidad, por lo que se considera muy poco cristalino y altamente amorfo, razón por la cual se puede considerar como un material isotrópico.

Desde el punto de vista industrial, el CPVC es el preferido y el más adecuado, por sus propiedades, para la fabricación de tuberías y accesorios para tuberías, tales como válvulas, codos, acoples, adaptadores, etc.

2.3 Termoelasticidad

El estudio en termoelasticidad permite determinar los esfuerzos producidos por un campo de temperatura y también calcular la distribución de temperatura debido a la acción de fuerzas internas que varían con el tiempo (Prasad, 1995). La termoelasticidad contiene la teoría de conducción de calor y la teoría de los esfuerzos y deformaciones debidas al flujo de calor cuando se acoplan los campos de temperatura y deformaciones.

La deformación total en cada punto de un cuerpo considerando el efecto de la temperatura está compuesta de dos partes: una debido a las deformaciones requeridas para mantener la continuidad del cuerpo, como las producidas por cargas actuando en el

contorno, y otra parte debido a la expansión proporcional a la temperatura

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.1)$$

donde E es el módulo de Young, ν es el módulo de Poisson y α es el coeficiente lineal de expansión térmica. Se puede observar de lo anterior que las deformaciones por corte no dependen de la variación de la temperatura, debido a que la expansión libre no produce distorsión angular en un material isotrópico.

Las deformaciones están relacionadas a los esfuerzos por medio de la Ley de Hooke para elasticidad en caso isotérmico. La ecuación 2.1 se puede expresar en términos de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1+\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.2)$$

2.3.1 Termoelasticidad en Estado Estacionario

Para un sólido elástico el estado de equilibrio se expresa como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

donde b_i son las fuerzas de cuerpo y la ecuación (2.3) es la ecuación de equilibrio.

Las deformaciones se pueden representar por el tensor de deformaciones infinitesimal de Cauchy como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

donde u_i son los desplazamientos. A través de la ecuación de equilibrio (2.3), la Ley de Hooke y la ecuación (2.4) se puede definir una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden que expresa la condición de equilibrio conocida como la ecuación de Navier:

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + b_i = \frac{2\mu\nu(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \theta_{,i} \quad (2.5)$$

donde θ es la temperatura, b_i son las fuerzas de volumen y μ la constante de Lamé. Según la convención de suma u_i representa un tensor de primer orden, donde i toma los valores 1, 2 y

3 y $u_{i,j}$ representa la derivada parcial de la componente i del tensor u_i en la dirección j .

2.4 Mecánica de Fractura

La mecánica de fractura y particularmente la mecánica de fractura lineal elástica (“Linear Elastic Fracture Mechanics”, LEFM) es una ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de grietas en sólidos, así como la distribución de tensiones y deformaciones que ocurren en un material agrietado o con discontinuidades, sometido a cierta tensión externa. Esta ciencia surgió con los trabajos fundamentales de Griffith sobre criterios de propagación de grietas en sólidos, basados en conceptos de transformación de energía elástica en energía de superficie y por esta razón se conoce como una formulación energética de la mecánica de fractura.

Se puede definir la fractura como la culminación del proceso de deformación plástica en un cuerpo sometido a carga que se manifiesta como la separación o fragmentación de un cuerpo sólido en dos o más partes.

Existen dos tipos de fractura: dúctil y frágil. En la primera, los materiales sometidos a un ensayo de tracción presentarán una restricción en la zona central de la probeta para romper finalmente con valores de reducción de área de hasta 100% en algunos casos. Por otro lado, la fractura frágil se caracteriza por pequeñas cantidades de deformación plástica, con fisuras propagándose rápidamente a lo largo de planos cristalográficos bien definidos que poseen baja energía superficial. Ambos casos se diferencian al tener en cuenta la deformación localizada en el material que rodea el vértice de fisura durante la propagación de la grieta.

Los polímeros pueden presentar fracturas del tipo dúctil a través del mecanismo llamado “*Shear yielding*” fluencia por cizalla; y fracturas del tipo frágil a través del mecanismo llamado “*Crazing*” o crecimiento de microgrietas. La primera ocurre a volumen constante y la segunda origina un aumento en el volumen del material (*Figuras 2.4.1 y 2.4.2*).

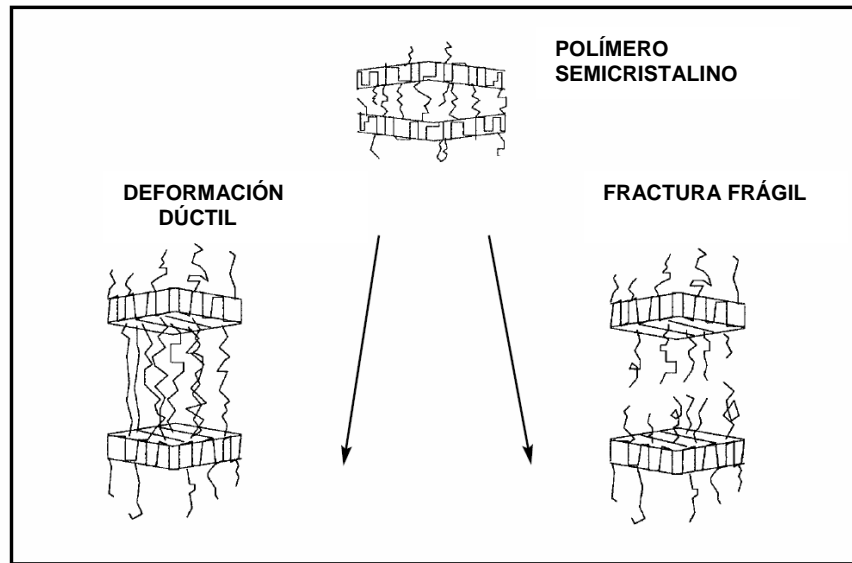


Figura 2.4.1: Esquema representativo de dos redes cristalinas unidas entre sí por las macromoléculas de gran longitud muy entrelazadas, formando la zona amorfa y donde se producen, en un caso, una deformación dúctil, con extendido de las macromoléculas y en otro caso una ruptura frágil con el desgarro de las macromoléculas entrelazadas.

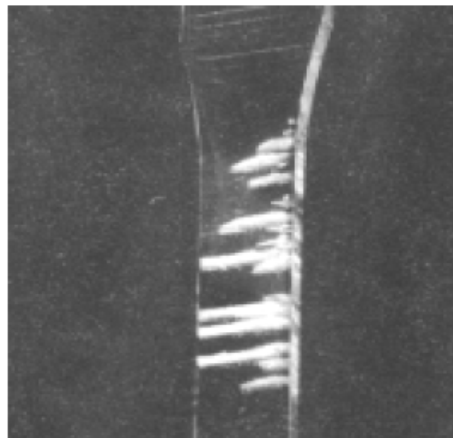


Figura 2.4.2: Serie de "Craze" producidos en el cuerpo de una probeta de Poliestireno.

Para analizar la fractura de los componentes poliméricos una aproximación común y relativamente simple es utilizar la Mecánica de la Fractura Elástico-lineal (LEFM). La primera hipótesis que se realiza es que el material se comporta como un sólido lineal y elástico. Sin embargo, el mismo análisis se ha demostrado que es también aplicable a

aquellos materiales que aunque exhiben deformaciones inelásticas en torno a la vecindad de la grieta muestran un comportamiento global de tipo elástico en el que las deformaciones plásticas quedan confinadas en una región muy pequeña y localizada (Sánchez, 2000).

Por otra parte, la LEFM no es apropiada para modelar el fenómeno de la fractura en medios donde existe una deformación plástica extensiva, es decir, para aquellos materiales en los que la propagación de la grieta se produce fuera del límite de linealidad entre tensión y deformación. En estos casos debe recurrirse a la denominada Mecánica de la Fractura Elasto-plástica (EPFM).

La separación de las caras de una fisura están asociadas con tres modos de deformación, (Figura 2.4.3a). Estos modos de carga están referidos en números romanos I, II y III, descritos como: modo I de apertura o tensión en el plano, modo II debido a cargas cortantes paralelas al plano de la grieta (modo de deslizamiento) y modo III provocado por cargas cortantes perpendiculares al plano de la grieta (modo de desgarramiento o antiplano). Considerando un sistema de coordenadas esférico centrado en la posición η en el frente de la grieta, figura (Figura 2.4.3b), el campo de tensiones está constituido por los esfuerzos en las direcciones normal, tangencial, binormal y combinaciones, siendo función del ángulo θ y de la distancia r desde el vértice de la grieta, (Broek, 1986).

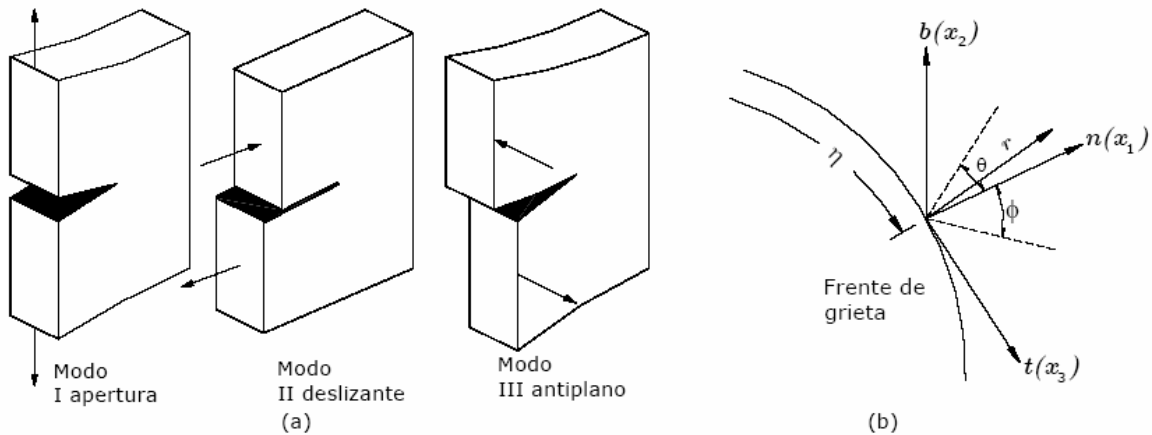


Figura 2.4.3: Modos de Fractura (a) y Sistema de coordenadas local en el frente de grieta (b).

La situación más compleja corresponde a una combinación de estos modos de aplicación de carga, denominado modo mixto. Sin embargo, generalmente la fractura en materiales está asociado predominantemente al Modo I.

El aspecto fundamental de la mecánica de fractura es poder definir si una grieta existente en un material de cierta estructura permanecerá estable o si por el contrario se prolongará bajo ciertas condiciones de tensión. Para poder predecir este comportamiento hay dos enfoques básicos, el primero en términos de balance de energía y el segundo en término del campo de tensiones.

El criterio energético de la propagación de grietas constituye la base de la mecánica de fractura y fue planteado por Griffith (1920) a partir de la solución del problema elástico de tensiones en el vértice de una cavidad elipsoidal en un medio semi infinito. Griffith postula que “una grieta puede propagarse cuando la disminución de energía elástica es por lo menos igual a la energía necesaria para formar la superficie de la grieta”. La solución elástica indica que a medida que los vértices de la elipse se hacen más agudos, las tensiones en ese punto tienden a infinito independientemente que el valor de la tensión aplicada sea muy bajo. Como este caso es similar al de una grieta en un medio semi infinito, Griffith concluyó que debido a tal singularidad, no podría utilizarse la tensión como criterio de extensión de grietas sino que el problema debía plantearse en términos de balance de energía.

Para analizar la formulación de Griffith considérese una placa semi infinita homogénea e isotrópica, de modo elástico E , de espesor unitario, con una grieta central de forma elíptica de longitud $2a$, que es deformada elásticamente por tensiones de tracción σ (*Figura 2.4.4a*). En este caso, a partir de la solución de Inglis, Griffith encontró que la energía elástica U almacenada en la placa por unidad de espesor es:

$$U = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (2.6)$$

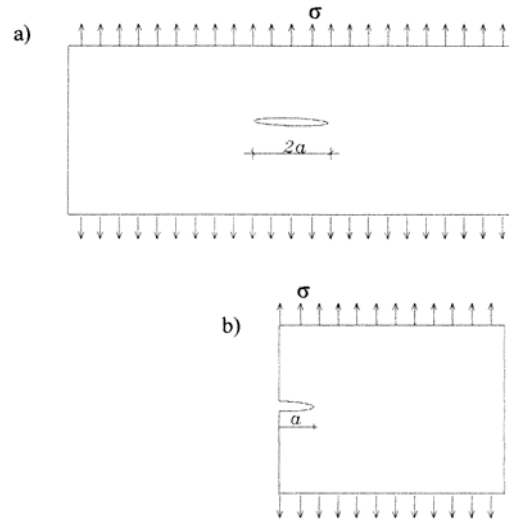


Figura 2.4.4: a) Placa semi infinita con grieta central de longitud $2a$ (doble punta), sometida a tensión; b) media placa con grieta sencilla de longitud a , sometida a tensión.

y definió la energía de superficie Γ como:

$$\Gamma = 4a\gamma_s \quad (2.7)$$

Donde γ_s es la energía específica de superficie y $4a$ corresponde al área de la superficie de agrietamiento (en este caso se considera un espesor unitario de longitud $2a$ y se multiplica por 2 debido a que ese es el número de caras que tiene la grieta).

Cuando la grieta comienza a incrementar su longitud, entra en un estado de equilibrio inestable bajo las tensiones aplicadas y el sistema mecánico transfiere energía de la zona no fracturada a la fractura, a través de un proceso de conversión de energía elástica en energía de superficie. Esta equivalencia de energía se puede expresar matemáticamente como:

$$\frac{dU}{da} = \frac{d\Gamma}{da} \quad (2.8)$$

Derivando las ecuaciones (2.6) y (2.7) con respecto a la longitud de grieta se tiene:

$$\frac{dU}{da} = \frac{2\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.9)$$

$$\frac{d\Gamma}{da} = 4\gamma_s \quad (2.10)$$

Reemplazando (2.9) y (2.10) en (2.8) se puede despejar la tensión, que en este caso corresponde a una tensión para la cual se inicia la propagación de la grieta y se conoce como *tensión de fractura de Griffith* σ_c :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi a}} \quad (2.11)$$

De manera general, se puede decir que de acuerdo con el criterio de Griffith, para que una grieta se prolongue a una longitud da , es necesario que la energía elástica liberada por tal prolongación sea igual o mayor a la energía de superficie que se requiere para que la grieta se prolongue, si la energía liberada es inferior a la energía necesaria para la propagación, entonces la grieta permanecerá estable.

Para el caso de una sola punta de grieta (condición usualmente analizada), sólo se tendría la mitad de la placa (*Figura 2.4.4b*) y por lo tanto las ecuaciones (2.9) y (2.10) quedan de la siguiente forma respectivamente:

$$\frac{dU}{da} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\Gamma}{da} = 2\gamma_s \quad (2.13)$$

La ecuación (2.11) de tensión a la fractura no se ve afectada, pues por simetría es igual analizar la placa completa o la mitad de ella. Esta ecuación establece una relación entre el esfuerzo de fractura y el tamaño de la grieta. Esta concentración de esfuerzo en el vértice de la grieta es suficiente para romper los enlaces atómicos, en un sólido perfectamente elástico. Pero no así, en otros materiales que experimentan alguna deformación plástica, debido a que ésta hace disminuir la concentración de esfuerzo. Orowan e Irwin modificaron la ecuación de Griffith, para cuando la zona plástica a nivel del vértice de la grieta es muy pequeña. Orowan (1949), escribió que “el trabajo plástico, γ_p , por unidad de área debe sumarse a la energía de superficie γ_s en la ecuación de Griffith”, por lo que modificó la ecuación (2.11) introduciendo un término, γ_p . De esta manera, el criterio de Griffith-Orowan se expresa como:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (2.14)$$

Posteriormente, G. R. Irwin, en los años 50, introduce el parámetro G , tasa de liberación de energía, el cual se define como:

$$G = \left. \frac{dU}{da} \right|_s \quad (2.15)$$

y representa el cambio de energía potencial de un material elástico con respecto al área de la grieta, donde dU es la energía disponible, da es la propagación de la grieta y s el desplazamiento. Al realizar el balance energético en función de la variación promedio de la energía elástica por unidad de longitud de grieta, de espesor unitario, se demuestra que

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2EG}{\pi a}} \quad (2.16)$$

de allí que

$$G = 2(\gamma_s + \gamma_p) \quad (2.17)$$

Irwin (1957) introdujo un avance muy importante en la mecánica de fractura ya que planteó el análisis de grietas en término de tensiones (formulación tensional). Para su formulación Irwin plantea que el proceso de fractura no puede concentrarse en un solo punto, como se deduciría en un análisis netamente elástico, sino que se presenta en una zona pequeña pero finita, que se denomina *zona plástica* en la cual, las tensiones ya dejan de ser infinitas porque parte la energía elástica se consume en la deformación plástica del material próximo a la punta. El concepto principal introducido aquí es el de *factor de intensidad de esfuerzo* (K), de gran aplicación en la mecánica de fractura y se puede definir como:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.18)$$

donde σ es el esfuerzo, a es la longitud de la grieta y Y es un número adimensional que depende de la geometría de la pieza. Este factor es una herramienta efectiva para caracterizar los campos elásticos en la región del vértice de la grieta.

Para la condición de inicio de grieta se considera que K adquiere un valor crítico y por tal razón se denomina factor de intensidad de esfuerzo crítico o *tenacidad a la fractura*, K_{IC} .

Con el fin de determinar la distribución de tensiones alrededor de la punta de la grieta,

en una placa como la de la (Figura 2.4.4a), Irwin acudió a la función de tensión de Airy (ψ), que es una función especial y que en este caso debe satisfacer simultáneamente las condiciones particulares de tensiones, deformaciones y de compatibilidad de tensión deformación que se presenta en ese sector.

Para la solución de la función de tensión de Airy se pueden usar diferentes funciones complejas. Si el agrietamiento es del modo I, resulta conveniente usar la solución propuesta por Westergaard, en cuyo caso el campo de tensiones alrededor de la punta de la grieta (Figura 2.4.5) está dado por:

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] \quad (2.19)$$

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \quad (2.21)$$

O de forma general por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\varphi) \quad (2.22)$$

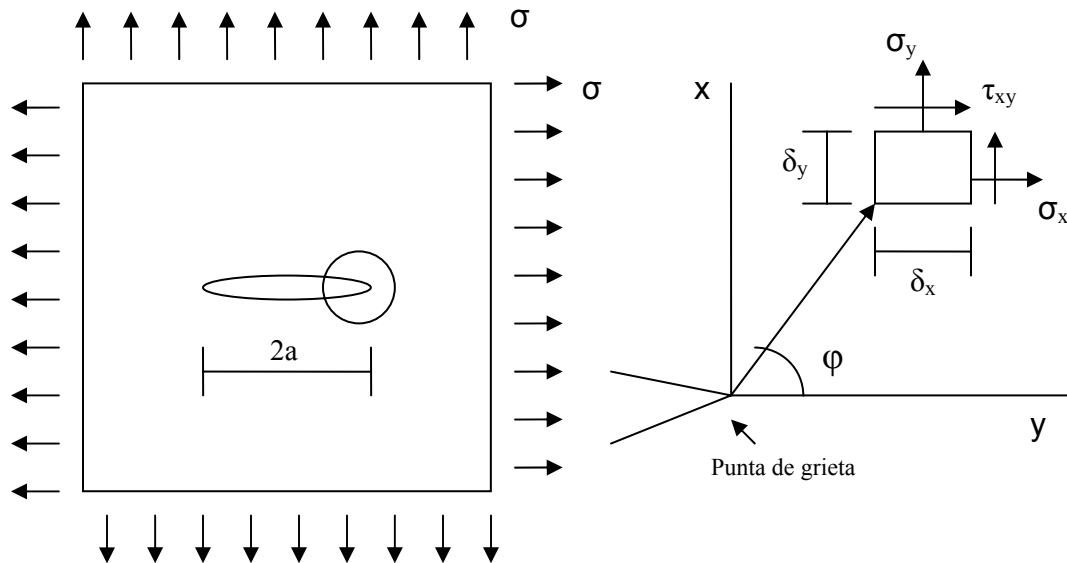


Figura 2.4.5: Campo de tensiones próximo a la punta de la grieta.

donde σ_{ij} es el tensor esfuerzo en las coordenadas ij , r y φ son las coordenadas polares del elemento de volumen a una cierta distancia del vértice de la grieta (*Figura 2.4.5*), $f_{ij}(\varphi)$ son funciones conocidas de φ y K es el factor de intensidad de esfuerzo, que relaciona la intensidad del esfuerzo cerca de la grieta con la carga, el tamaño de la grieta y su forma geométrica.

2.4.1 Campos termoelásticos en el frente de grieta

Sih (1962), a través del método de variable compleja en dos dimensiones en un cuerpo infinito, demostró que la característica singular de los esfuerzos térmicos son similares a los mecánicos. Los campos de desplazamientos y esfuerzos en el sistema de coordenadas local en el frente de grieta (*Figura 2.4.3*) fueron dados por Hartranf y Sih (1977), ellos demostraron que en ciertos planos los campos bidimensionales y tridimensionales coinciden.

El campo de desplazamientos en el plano (n,b) está dado por:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \cos \frac{\varphi}{2} \left[(1-2\nu) + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right] + K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2(1-2\nu) + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right\} + O(r) \\
 u_b &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2(1-2\nu) + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] + K_{II} \cos \frac{\varphi}{2} \left[(1-2\nu) + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right\} + O(r) \quad (2.23) \\
 u_t &= 2 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{III} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + O(r)
 \end{aligned}$$

y para esfuerzos:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_t &= \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_{bt} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} + O(1)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

donde (r, φ, ϕ) corresponden a un sistema de coordenadas esféricas, K_i son los factores de intensidad en el punto Q , $O(r)$ corresponde a términos de orden mayor que tienden a cero a medida que $r \rightarrow 0$ y $O(1)$ son términos globales.

Aplicando análisis geométrico y expandiendo en series las expresiones anteriores, Hartranf y Sih generalizaron el campo de esfuerzos para puntos fuera del plano (n, b) . Los resultados obtenidos fueron:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_t &= \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_{bt} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} + O(1)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Existen dos características importantes de estos campos: los desplazamientos tienen un orden de variación $O(\sqrt{r})$ en el plano perpendicular al frente de grieta y los esfuerzos

presentan una singularidad del orden $O(1/\sqrt{r})$.

El factor de intensidad de esfuerzos K depende del modo en que están aplicadas las tensiones (modo de tensión en el plano o modo I, modo de corte en el plano o modo II y modo de corte antiplano o modo III), de la posición a lo largo del frente de grieta, del tamaño y forma geométrica de la grieta, de los parámetros del material y de la geometría de la pieza. Si dos cuerpos con grietas de formas distintas y bajo cargas diferentes tienen el mismo valor del factor de intensidad de esfuerzos alrededor del frente de grieta, entonces los campos elásticos cerca del frente serán los mismos. Generalizando las ecuaciones (2.25), el campo de esfuerzos en la vecindad del frente de grieta puede ser expresado como:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, \phi) = \sum_{M=I}^{III} \frac{K_M}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\varphi, \phi) + O(1) \quad (2.26)$$

Los factores de intensidad de esfuerzos se pueden expresar explícitamente de las ecuaciones (2.25) como los valores de esfuerzo en el límite cuando se aproxima el frente de grieta. Sustituyendo $\varphi = 0$ en las ecuaciones (2.25), tenemos que:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_b(r, 0, 0) \quad (2.27)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{nb}(r, 0, 0) \quad (2.28)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{bt}(r, 0, 0) \quad (2.29)$$

donde los términos $O(1)$ han sido omitidos.

Los factores de intensidad de esfuerzos representan una medida de la resistencia de la singularidad $1/\sqrt{r}$ del campo de esfuerzos en el vértice de la grieta. Si la zona plástica es pequeña en comparación con las dimensiones del componente, el campo de tensiones y deformaciones en el frente de grieta depende exclusivamente del factor de intensidad de esfuerzos K . Una vez conocidos los factores de intensidad de esfuerzos K y la tenacidad a la fractura K_{IC} , es posible determinar el tamaño máximo de grieta tolerable para un determinado nivel de tensiones y la resistencia residual del sólido en función del tamaño de grieta.

2.4.2 Razón de Energía de Deformación Relajada

La razón de energía de deformación relajada fue definida anteriormente en la ecuación (2.15) como la tasa de liberación de energía, G , y corresponde al trabajo por unidad de área necesario para el crecimiento de la grieta y suele designarse fuerza impulsora crítica representada con el símbolo G_c . De acuerdo al balance energético de Griffith, para que la fisura se torne inestable y comience a propagarse, la disminución de la energía elástica almacenada o energía potencial por relajación de tensiones U , durante el avance de la fisura, debe ser mayor o igual que el aumento de energía superficial Γ , siendo esta última la energía mínima necesaria para el crecimiento de la grieta.

$$\frac{dU}{da} \geq \frac{d\Gamma}{da} \quad (2.30)$$

Por lo tanto, dU/da es la *razón de energía de deformación relajada* (G) y $d\Gamma/da$ es la resistencia de la grieta (R), por lo cual la relación anterior también se puede expresar como

$$G \geq R$$

Este criterio también puede expresarse en términos del factor de intensidad de esfuerzo K y la tenacidad a la fractura o fractotenacidad K_c la cual es una propiedad del material, tal que $K \geq K_c$,

$$K_c^2 = EG_c \quad (2.31)$$

Para cuerpos lineales elásticos la energía potencia relajada G está relacionada con los factores de intensidad de esfuerzo K a través de la fórmula siguiente:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.32)$$

Los factores de intensidad de esfuerzo y la razón de energía relajada son equivalentes en el campo lineal elástico en fractura mecánica, sin embargo es muy común en ingeniería usar los valores de K como referencia.

2.4.3 La Integral J

Consideremos un cuerpo homogéneo con un material elástico lineal o no lineal, libre de fuerzas de volumen y sujeto a un estado bidimensional de esfuerzos σ_{ij} que dependen solamente de las coordenadas x_1 y x_2 , supongamos que el cuerpo contiene una entalla o fisura paralela al eje x_1 como se muestra en la figura (2.4.6). La densidad de energía de deformación o densidad de energía elástica está dada por

$$W = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.33)$$

Consideremos ahora la integral J definida como:

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma \quad (2.34)$$

donde Γ es un contorno que rodea el vértice de la grieta en sentido antihorario, n_1 es el vector normal exterior al contorno, t_i son las componentes de tracción, $u_{i,1}$ son la derivada de desplazamiento u_i con respecto a la dirección del eje x_1 y $d\Gamma$ es un elemento de arco a lo largo de Γ .

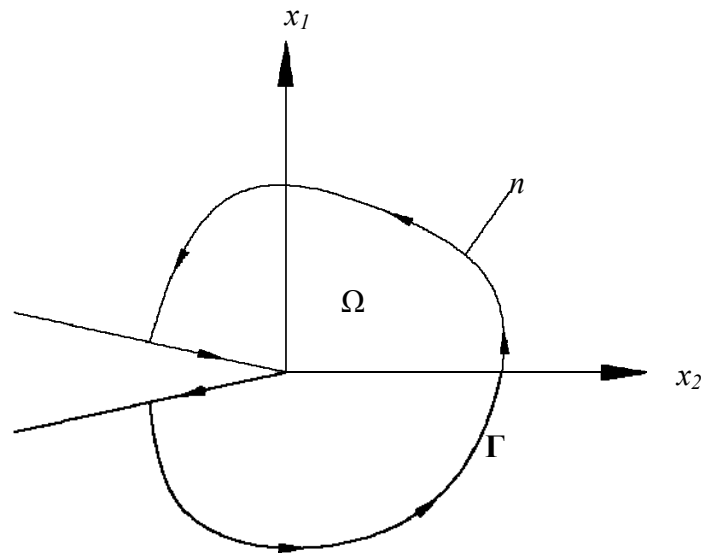


Figura 2.4.6: Contorno de la integral J alrededor del vértice de la grieta.

Eshelby (1956) fue el primero en derivar la integral J y fue Rice (1968) el primero en reconocer su potencial uso en la mecánica de fractura. Rice además demostró que dicha integral es independiente del camino de integración, para materiales elásticos (lineales o no lineales) y es igual al cambio en la energía potencial U debido a la extensión virtual de grieta da :

$$J = -\frac{dU}{da} \quad (2.35)$$

Si se selecciona una curva arbitrariamente pequeña Γ alrededor del vértice de fisura, la independencia del valor de la integral de la curva elegida nos dice que J puede considerarse un parámetro de caracteriza el campo de esfuerzos y deformaciones en dicho vértice.

Consideremos el caso en que una fisura sufre una extensión da llevando consigo el contorno de integración como se muestra en la figura (2.4.7)

$$Jda = \int_{\Gamma} (Wn_1 da - t_i u_{i,1} da) d\Gamma \quad (2.36)$$

Se puede interpretar que el primer término de la integral representa el incremento neto de energía de deformación elástica dentro del contorno Γ . Este incremento se produce porque al moverse el contorno una distancia da se produce un flujo positivo de energía en el frente del contorno y un flujo negativo en la parte posterior del mismo. Es importante destacar que la variación de energía en este caso está referida por unidad de espesor. Analizando el segundo término de la ecuación (2.36), éste representa el trabajo elemental realizado por los vectores tracción que actúan sobre el elemento de contorno $d\Gamma$, durante el desplazamiento da , por unidad de espesor, siendo el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre el contorno a medida que éste se desplaza; dado que este trabajo es un trabajo gastado, surge que del producto de $J da$, para continuos elásticos (lineales o no), es la energía neta que entra al contorno y está disponible para la extensión de la fisura, entonces se encuentra la correspondencia entre la razón de energía relajada G y la integral J .

$$J = G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.37)$$

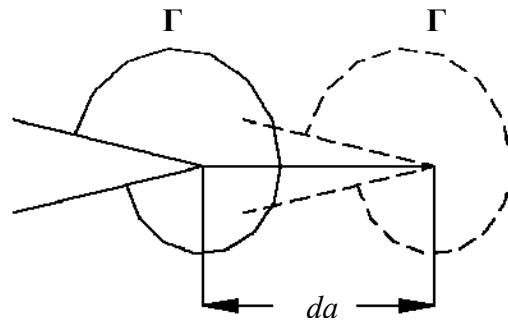


Figura 2.4.7: Extensión virtual de grieta en un continuo bidimensional

2.5 Análisis de Crecimiento de Grietas

El fenómeno de la propagación de grietas bajo cargas mecánicas ha recibido una amplia atención y muchos trabajos han sido publicados con la utilización de metales y recientemente también se ha estudiado este fenómeno con una nueva generación de materiales tales como cerámicas y polímeros.

Las discontinuidades o defectos del material, introducidos en su mayoría durante el proceso de producción, constituyen el punto de inicio para el origen y propagación de grietas, bajo el efecto tanto de cargas estáticas como de cargas cíclicas, así como también de cargas térmicas producidas por cambios de temperatura. De allí la importancia de estudiar y analizar este fenómeno, en la mayoría de los casos, con el fin de estimar y garantizar el tiempo de vida útil de un determinado componente.

2.5.1 Crecimiento de grieta por Fatiga

Cuando los materiales están solicitados a cargas dinámicas, pueden sufrir *fatiga*, fenómeno asociado con la disminución de la resistencia mecánica de un material en el tiempo.

La ASTM (*American Society of Testing Materials*) define el fenómeno de fatiga como “el proceso de cambio estructural permanente, progresivo y localizado que ocurre en un

punto del material sujeto a tensiones y deformaciones de amplitudes variables y que produce grietas que conducen a una fractura total luego de un cierto número de ciclos”.

La fatiga tiene su origen en los defectos, impurezas o discontinuidades del material, que actúan como concentradores de esfuerzos localizados y que pueden sobrepasar la capacidad de resistencia del material en dichas zonas.

La mecánica de fractura estudia como se generan y se propagan las grietas. Aplicando esta teoría, es posible evaluar el efecto de una grieta sobre la resistencia de un componente considerando sus propiedades. Por lo que es necesario conocer el nivel de esfuerzos en el componente, los cuales dependen de su geometría y las condiciones de cargas.

La iniciación y propagación de grietas por fatiga, se debe a la acción simultánea de esfuerzos cíclicos, esfuerzos a tracción y deformación plástica. Los esfuerzos cíclicos actúan iniciando la grieta, mientras que los esfuerzos a tracción producen el crecimiento o propagación de la grieta.

El factor de intensidad de esfuerzo K , parámetro definido por la mecánica de fractura es quien relaciona el tamaño de un defecto o grieta y el nivel de esfuerzos a que se somete al material.

El análisis del fenómeno de la fatiga a través de formulaciones dadas por la mecánica de la fractura, exige considerar los valores de esfuerzo máximo σ_{\max} , esfuerzo mínimo σ_{\min} y la razón de esfuerzo definido como:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (2.38)$$

La velocidad de crecimiento o propagación de grieta da/dN en función del rango de intensidad de esfuerzo ΔK definido como:

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \quad (2.39)$$

es representada en la *Figura (2.5.1)*, en la cual se puede diferenciar tres etapas del proceso de fatiga: inicio, crecimiento (propagación lenta o estable) y finalmente una propagación rápida que conduce a la fractura del componente.

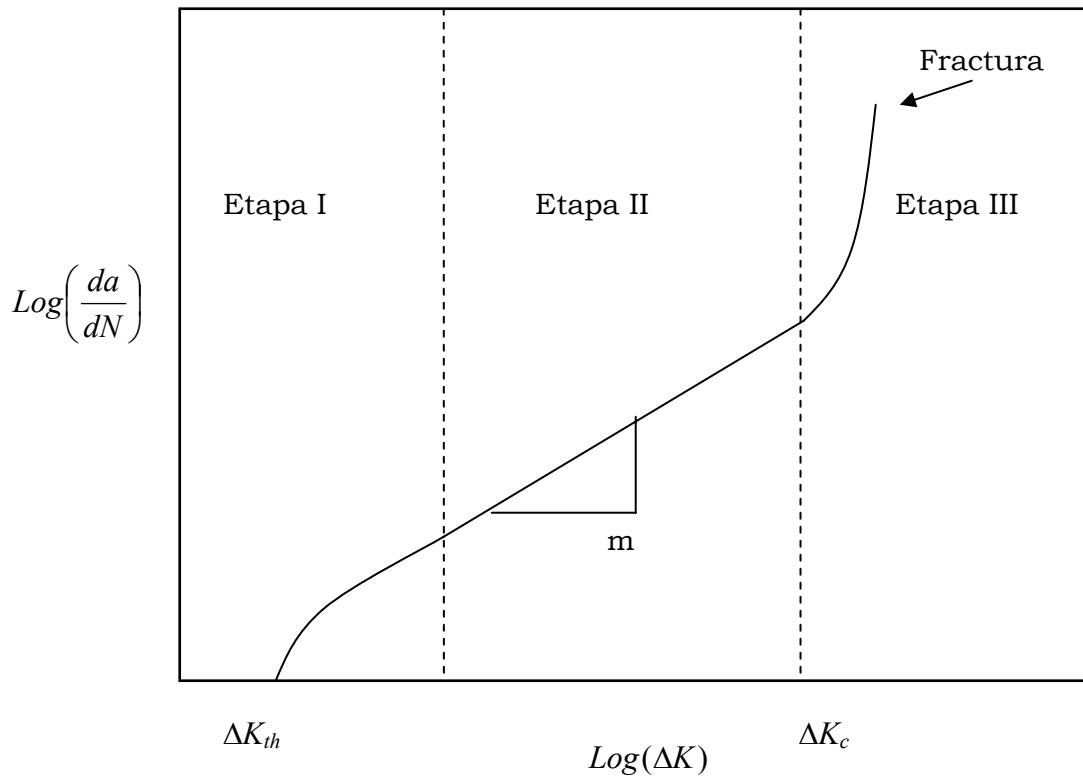


Figura 2.5.1: Etapas del proceso de Fatiga.

La nucleación de la grieta o etapa I, aparece en los defectos superficiales del material y se propagan a lo largo de los planos de deslizamiento del material, es decir, formando un ángulo de 45° con la dirección de la tracción, por lo que se presenta en la grieta el modo mixto I y II. La grieta no crecerá hasta alcanzar un valor determinado de ΔK denominado umbral de fatiga y es simbolizado por ΔK_{th} (threshold), el cual depende del material, medio ambiente y la relación entre la carga máxima y mínima del ciclo. El umbral de fatiga se debe al fenómeno conocido como cierre de la grieta. Si las cargas en el ciclo son pequeñas la grieta no llega a abrirse, en consecuencia no crece. Las causas más frecuentes del cierre de grietas son: la formación de óxidos, la rugosidad de las superficies de la grieta y las tensiones residuales inducidas en la zona plástica frente a la punta de la grieta.

Superado el valor del umbral de fatiga, bien sea porque la grieta ha alcanzado un tamaño lo suficientemente grande o el nivel de esfuerzo ha llegado al valor mínimo requerido, la grieta crece a una velocidad muy lenta pero con una razón de cambio alta.

Luego de haber atravesado unos pocos granos en el material, la grieta se orienta perpendicularmente al campo de tracción (Modo I), estableciéndose una propagación estable de la grieta entrando en la etapa II o etapa de propagación. El crecimiento de la grieta se ajusta a una ley potencial en el factor de intensidad de esfuerzo. Esta etapa es la más importante, ya que el tamaño de grieta alcanzado comienza a ser detectado por las técnicas de inspección no destructivas.

Diferentes investigadores han propuesto modelos matemáticos para describir este comportamiento de propagación estable de la grieta, siendo el más utilizado el desarrollado por Paris y Erdogan en 1963 y establece que a medida que aumenta el tamaño de la grieta hasta alcanzar un tamaño crítico, la velocidad de crecimiento da/dN aumenta potencialmente en función del rango de intensidad de esfuerzo ΔK . Este régimen de crecimiento también es llamado régimen de Paris, dicho modelo se describe más adelante.

La fractura repentina ocurre en la etapa III. Al alcanzar la grieta el tamaño crítico en las proximidades del factor de intensidad de esfuerzo ΔK_c , la velocidad de crecimiento se acelera aún más y la propagación se convierte en catastrófica al no poder soportar la sección transversal remanente la amplitud de la carga aplicada. Esta última etapa de la fatiga, carece de interés práctico, puesto que la velocidad de crecimiento es tan grande que el número de ciclos aplicado en esta etapa apenas cuenta en la vida del componente. Además, la sensibilidad del crecimiento de la grieta a la microestructura, a la razón entre las cargas y el estado de carga (plano de esfuerzo o plano de deformación) es muy pronunciada. Sin embargo, las velocidades de propagación en esta etapa son tan elevadas como para ser afectadas fuertemente por las condiciones de ensayo.

2.5.2 Modelos matemáticos de Crecimiento de grieta por Fatiga

Muchos han sido los estudios desarrollados por diversos investigadores para describir la etapa de propagación de grieta (etapa II en la figura 2.5.1). En general, las leyes de propagación relacionan la longitud de la grieta a con el número de ciclos aplicados, con el

rango de esfuerzos σ y la constante del material C_i .

$$\frac{da}{dN} = f(\sigma, a, C_i)$$

Paris, Gómez y Anderson (1961) desarrollaron una fórmula empírica basada en el concepto de que el factor de intensidad de esfuerzo K refleja el efecto de las cargas externas y la configuración del campo de esfuerzo alrededor del frente de grieta. Por lo tanto, es razonable pensar que la intensidad del campo de esfuerzos en el frente de la grieta podría tener un control sobre la velocidad de extensión de la misma. La fórmula desarrollada por estos investigadores toma la siguiente forma:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$$

siendo $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$.

Diversas variaciones con esta forma han sido presentadas por otros investigadores. La más simple fue propuesta por Paris y Erdogan (1963), la cual fue presentada como:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (2.40)$$

donde da/dN es el cambio de longitud de la grieta por ciclo de carga, C y m son constantes empíricas que dependen de las propiedades del material y la microestructura, de la frecuencia, la razón y el modo de carga, del estado de esfuerzo y de la temperatura de ensayo, (Suresh, 1991). Este modelo es conocido normalmente como la *Ley de Paris* y es la forma más usada para caracterizar el crecimiento de grieta por fatiga para un amplio espectro de materiales y condiciones de ensayo. Además, esta ley representa una de las más usadas aplicaciones de la teoría de la mecánica de fractura lineal elástica.

Desde que Paris y Erdogan presentaron su modelo matemático para determinar la velocidad de propagación de grietas, han proliferado muchos modelos teóricos que intentan explicar el comportamiento de la propagación y crecimiento estable de una grieta por fatiga, tales como: Klesnil *et al.* (1972), Rice (1967), Kim *et al.* (1995) entre otros. Estos modelos también permiten estimar a partir de un valor inicial de longitud de grieta a_i , el número de ciclos de fatiga necesarios para llegar al valor de longitud de grieta crítica a_c , para determinar la vida útil o remanente de un componente bajo ciertas sollicitaciones.

El modelo de Rice propone que la energía absorbida en el ciclo de histéresis del diagrama esfuerzo-deformación proporciona la energía superficial necesaria para el incremento de la extensión de grieta por ciclo. Estos modelos predicen un exponente de 4 en la ecuación de Paris.

Klesnil *et al.* introducen el factor de intensidad de esfuerzos en el umbral de fatiga ΔK_{th} en el modelo de Paris, permitiendo así describir la propagación de la grieta por fatiga para las etapas I y II.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (2.41)$$

Se ha estudiado que para un número de materiales poliméricos, el aumento de la frecuencia de la carga causa una disminución de la velocidad de propagación de la grieta a una temperatura de ensayo fija, pero también se ha comprobado que la velocidad de propagación de grieta, a una frecuencia específica, disminuye al disminuir la temperatura de ensayo. Por todo esto se ha llegado a una conclusión de que existe una equivalencia entre la temperatura y la frecuencia.

Para investigar dicha relación entre la temperatura y la frecuencia, Kim *et al.* (1994) propusieron un modelo para la velocidad de propagación de grieta da/dN basado en la ecuación de Arrhenius, el cual fue probado por Saghir *et al.* (2005) en el estudio de la fatiga del policloruro de vinilo clorado (CPVC). Dicho modelo se presenta como:

$$\frac{da}{dN} = f^{-nm} A \exp\left[-\frac{\Delta H_{th} - \gamma \log \Delta K}{RT}\right] \quad (2.42)$$

donde

da/dN : velocidad de crecimiento de grieta

f : frecuencia de la carga,

ΔH_{th} : energía de activación aparente (independiente de ΔK),

ΔK : rango de intensidad de esfuerzo, (MPa · m^{1/2})

R : constante universal de los gases (=8,31 J/mol°K),

T : temperatura absoluta.

n, m, γ y A : constantes,

La ecuación (2.42) es equivalente a la Ley de Paris (ecuación 2.40) donde la expresión para el exponente m es:

$$m = \frac{\gamma}{RT \ln 10} \quad (2.43)$$

y la constante C se expresa como:

$$\log C = \log f^{-nm} + \log A - \frac{\Delta H_{th}}{RT \ln 10} \quad (2.44)$$

Es importante resaltar que el modelo propuesto por Kim *et al.* fue desarrollado para describir la etapa de propagación de grietas (etapa II) donde justamente también es válida la Ley de Paris. Este modelo permite evaluar el efecto de la temperatura y la frecuencia de aplicación de la carga sobre la velocidad de crecimiento de grietas por fatiga.

Capítulo 3

Método de Elementos de Contorno

El método de los elementos de contorno (MEC) consiste en la solución de ecuaciones integrales, o en forma más específica, en la solución de ecuaciones integrales singulares. Se fundamenta en la transformación de ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento de las incógnitas, dentro de un dominio y sobre el contorno del mismo, en una ecuación integral que relaciona solamente las variables del contorno. La forma del método como se le conoce hoy, es el resultado de muchos aportes realizados por otros investigadores en los últimos años. Las primeras investigaciones en esta área fueron publicadas por Betti (1872), quien formuló el teorema de trabajo recíproco al considerar el trabajo realizado por los esfuerzos en un estado de solución realizando trabajo en las deformaciones de un estado solución distinto, que puede concluirse es un trabajo con sentido matemático. En otras palabras, el Teorema de los recíprocos de Betti expresa: *“el desplazamiento en un punto B sobre una estructura debido a una carga unitaria que actúa en el punto A es igual al desplazamiento del punto A cuando la carga unitaria actúa en B”*. Somigliana (1885) fue el primero en utilizar el teorema de Betti para derivar una forma de las identidades integrales.

La disponibilidad de recursos computacionales de gran capacidad hizo posible implementar el proceso algebraico mediante la discretización tal que una solución numérica es alcanzable.

Existen dos aproximaciones básicas en la formulación de ecuaciones integrales dependiendo de las incógnitas. La más conocida es la *formulación directa* donde las variables desconocidas son las variables físicas del problema, por ejemplo, temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones en el análisis termoelástico. En oposición se

tiene la *formulación indirecta* en la cual las variables desconocidas son representadas mediante funciones ficticias de densidad, que para muchos casos no tienen sentido físico, pero a partir de las cuales las variables físicas pueden derivarse.

Fue necesario relacionar la capacidad numérica del método de elementos de contorno (MEC) con el método de elementos finitos, muy bien conocido en la comunidad de ingeniería. La terminología del MEC indica el carácter de discretización de superficies. Hoy día el MEC está bien establecido y se utiliza con gran interés en muchas aplicaciones en ingeniería, así lo muestran algunos autores de libros como Brebbia y Domínguez (1992), Brebbia, Telles y Wroble (1984), entre otros.

El análisis de grietas por el MEC se realiza considerando un estado *elástico-estático* del cuerpo, dicho estado está definido por las ecuaciones de equilibrio, las relaciones deformación-desplazamiento y las ecuaciones de compatibilidad junto con las condiciones de contorno preestablecidas.

La ecuación integral de contorno que relaciona los desplazamientos y las tracciones en el contorno del cuerpo está dada por:

$$C_{ij}u_j + \int_{\Gamma} u_i T_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i U_{ij}^* d\Gamma \quad (3.1)$$

donde, Γ representa la superficie del cuerpo, u_i y t_i los desplazamientos y las tracciones en la superficie, respectivamente. U_{ij}^* representa una función de Green o solución fundamental para los desplazamientos de la dirección i debido a una fuerza unitaria en la dirección j . C_{ij} es una matriz de constantes que dependen de la geometría local del punto bajo consideración. Si Γ tiene un plano tangente único en el punto $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Para resolver numéricamente la ecuación integral de contorno, el contorno Γ es discretizado en elementos lineales en el caso bidimensional y en elementos de superficie en el caso tridimensional. Sobre estos elementos, la geometría, los desplazamientos y las tracciones varían de forma polinomial. Como resultado del proceso de discretización se obtiene un sistema de ecuaciones en términos de valores de desplazamientos y tracciones nodales. Luego de sustituir los valores nodales conocidos y resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de desplazamientos y tracciones desconocidas sobre el

contorno del cuerpo. Como postproceso, se pueden calcular desplazamientos y tracciones en puntos internos.

3.1 Método Dual de Elementos de Contorno

En el análisis de mecánica de fractura computacional, una grieta se modela como dos superficies coplanares, esto hace la aplicación del MEC en las superficies de la grieta lleve una degeneración numérica de la formulación (matriz singular) por la aplicación de un mismo tipo de ecuación integral a dos superficies coincidentes, tal como lo demostró Cruse (1972).

Algunas estrategias para sobrellevar esta dificultad han sido propuestas: el método con funciones de Green presentado por Snyder y Cruse (1946), el método de discontinuidad de desplazamientos por Crouch (1976), el método de subregiones de Blandford, Ingraffea y Liggett (1981) y el método dual de elementos de contorno desarrollado por Portela, Aliabadi y Rooke (1992).

El método de funciones de Green utiliza soluciones fundamentales que incluyen una solución exacta para una grieta libre de tracciones en un dominio infinito, por lo tanto no se requiere el modelo de la grieta, la técnica es exacta pero limitada a problemas bidimensionales con grietas rectas.

El método de discontinuidad de desplazamientos reemplaza cada par de puntos coincidentes de la grieta por un punto fuente único. En esta técnica, la única incógnita sobre la grieta son las diferencias de desplazamientos entre las superficies de la grieta, la desventaja de esta metodología es que para calcular los valores de desplazamiento absolutos sobre la grieta, debe llevarse a cabo cálculos extras y no es tan general en problemas con tracciones o desplazamientos en las superficies de la grieta.

El método de subregiones ha sido ampliamente utilizado para tratar el problema de las superficies coplanares de la grieta. Con esta metodología se consideran los puntos coincidentes sobre la grieta, integrables sobre curvas distintas. El problema principal consiste en la creación de superficies nuevas a partir del vértice de la grieta, las cuales no

tienen por qué ser únicas dificultando el proceso de mallado para propagación.

El método dual de elementos de contorno (MDEC) sobrelleva el problema de modelado al considerar los puntos coincidentes sobre la grieta pero introduciendo una ecuación integral adicional (la ecuación de flujo de calor y tracciones en termoelasticidad). Todas las ecuaciones tienen el mismo camino de integración sobre el contorno, por lo tanto el problema se resuelve en una región simple. El MDEC ha sido aplicado en problemas bidimensionales por Prasad, Aliabadi y Rooke (1994) y en problemas tridimensionales por dell'Erba, Aliabadi y Rooke (1998)

En este capítulo se presentan las ecuaciones utilizadas en el método dual de elementos de contorno en tres dimensiones para termoelasticidad en problemas de fractura lineal elástica. Se presenta la estrategia de discretización para satisfacer las condiciones de continuidad de las integrales singulares, así como su tratamiento dependiendo del grado de singularidad.

3.2 Ecuaciones Integrales de Contorno

A continuación se escriben las ecuaciones integrales de contorno para termoelasticidad en estado estacionario obtenidas a partir de la ecuación de Laplace:

$$\theta_{,ii} = 0 \quad (3.2)$$

y la ecuación de Navier (2.5).

La ecuación de Laplace (3.2) expresa que la temperatura solo es función escalar de posición y no depende del tiempo.

Las propiedades (temperatura, flujo, desplazamiento y tracción) en el contorno Γ , se obtienen moviendo el punto interno x a x' . Cuando el punto de integración x se mueve hacia el contorno donde está x' , la distancia entre estos puntos es $r = 0$. Para corregir este problema de singularidad, una pequeña sección del contorno (Γ_ε) que contiene a x' es removida desde el contorno y reemplazada por una superficie semiesférica (Γ_ε^*) centrada en x' , de radio ε como se muestra de la *Figura 3.2.1*.

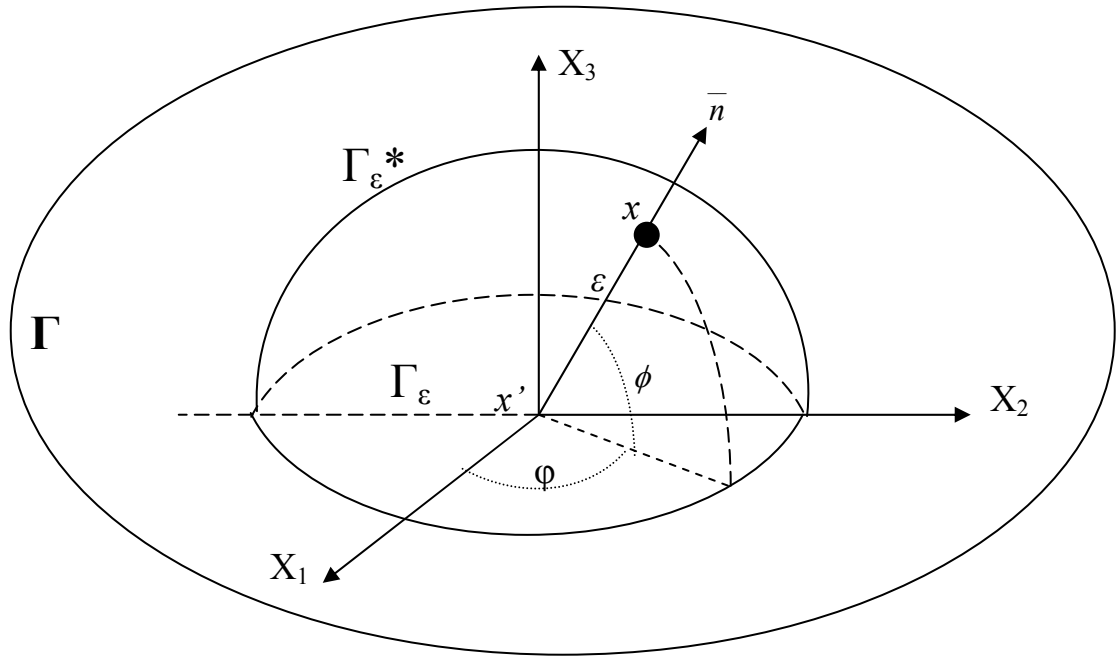


Figura 3.2.1: Superficie ficticia semiesférica alrededor del punto x' ubicado en el contorno.

A partir del sistema de coordenadas esféricas de la *Figura 3.2.1* son deducidas las siguientes relaciones:

$$r_1 = \varepsilon \cos \phi \cos \varphi \quad \text{y} \quad r_{,1} = n_1 = \cos \phi \cos \varphi \quad (3.3a)$$

$$r_2 = \varepsilon \cos \phi \sin \varphi \quad \text{y} \quad r_{,2} = n_2 = \cos \phi \sin \varphi \quad (3.3b)$$

$$r_3 = \varepsilon \sin \phi \quad \text{y} \quad r_{,3} = n_3 = \sin \phi \quad (3.3c)$$

$$r_{,i} n_i = 1 \quad \text{y} \quad d\Gamma = \varepsilon^2 \cos \phi d\phi d\varphi \quad (3.3d)$$

Después de esta modificación, el nuevo contorno del problema puede ser escrito como $\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^*)$. Tomando en cuenta este análisis, es posible deducir las integrales de contorno en termoelasticidad y elasticidad.

La *ecuación integral de temperatura* para un punto x' que se encuentra en el contorno de un dominio Ω , se escribe como:

$$c(x')\theta(x') - \int_{\Gamma} q^*(x', x)\theta(x)d\Gamma = - \int_{\Gamma} \theta^*(x', x)q(x)d\Gamma \quad (3.4)$$

donde θ y q denotan las temperaturas y flujo respectivamente, Γ es el contorno de integración, θ^* y q^* son las soluciones fundamentales y $c(x')$ depende de la posición de x' en el contorno y es igual a $1/2$ si el contorno es suave.

La definición de flujo está dada por la siguiente ecuación:

$$q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i = -\lambda \theta_{,i} n_i \quad (3.5)$$

Entonces, la *ecuación integral de flujo* para un punto x' en el contorno, obtenida a partir de la ecuación (3.4), se escribe como:

$$c(x')q(x') + n_i(x') \int_{\Gamma}^{CPV} \theta_i^{**}(x', x)q(x)d\Gamma = n_i(x') \int_{\Gamma}^{HPV} q_i^{**}(x', x)\theta(x)d\Gamma \quad (3.6)$$

donde las integrales están en función de los valores principales de Hadamar (*HPV*) y Cauchy (*CPV*), siendo $n_i(x')$ el vector normal al contorno en el punto de colocación, θ^{**} y q^{**} las soluciones fundamentales.

La *ecuación integral de desplazamiento* se escribe como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma}^{CPV} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{P}_i(x', x)\theta(x)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_i(x', x)q(x)d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde u_j y t_j representan los valores de desplazamiento y tracción en el contorno, respectivamente, $c_{ij}(x')$ es igual a $1/2\delta_{ij}$ si el contorno donde está x' es suave y T_{ij} , P_i , U_{ij} , Q_i son las soluciones fundamentales de elasticidad y termoelasticidad.

La *ecuación integral de tracción* se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_i(x') + n_j(x') \int_{\Gamma}^{HPV} T_{kij}(x', x)u_k(x)d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma}^{CPV} \bar{P}_{ij}(x', x)\theta(x)d\Gamma + \\ \frac{\mu(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha n_i(x')\theta(x') = n_j(x') \int_{\Gamma}^{CPV} U_{kij}(x', x)t_k(x)d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma} \bar{Q}_{ij}(x', x)q(x)d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde T_{ijk} , P_{ij} , U_{ijk} , Q_{ij} son las soluciones fundamentales de elasticidad y termoelasticidad para la ecuación de tracción.

3.3 Soluciones Fundamentales

Un campo fundamental elástico es un campo exacto definido en un espacio Ω_∞ rodeado por un contorno Γ_∞ , en el cual un sistema de fuerzas externas está dado por una carga unitaria en un punto arbitrario, $x \in \Omega_\infty$. Esta carga unitaria se puede representar como una fuerza de cuerpo en función del Delta de Dirac. En potencial la solución corresponde a la ecuación de Laplace considerando una fuente de calor concentrada de magnitud unitaria en un punto. Una de las características de estas soluciones es que dependen de la distancia r entre el punto fuente x' y el punto de dominio x (Figura 3.2.1), y son continuamente diferenciables; sin embargo, cuando la distancia entre este par de puntos es muy pequeña algunas soluciones presentan un comportamiento singular y se clasifican como singulares suaves, singulares fuertes, o hipersingulares $\left[O\left(\frac{1}{r^n}\right), n = 0,1,2,3 \right]$.

Las soluciones fundamentales en elasticidad y termoelasticidad son:

$$\theta^*(x', x) = \frac{1}{4\pi\lambda r} \quad (3.9a)$$

$$q^*(x', x) = \frac{r_{,k} n_k}{4\pi r^2} \quad (3.9b)$$

$$\theta_i^{**}(x', x) = \frac{r_{,i}}{4\pi\lambda r^2} \quad (3.9c)$$

$$q_i^{**}(x', x) = -\frac{\lambda}{4\pi r^3} [3r_{,i} r_{,k} n_k - n_i] \quad (3.9d)$$

$$\bar{P}_i(x', x) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)r} \left(n_i - \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} \right) \quad (3.9e)$$

$$\bar{Q}_i(x', x) = \frac{-\alpha(1+\nu)}{8\pi\lambda(1-\nu)} r_{,i} \quad (3.9f)$$

$$\bar{P}_{ij}(x', x) = \frac{E\alpha}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ n_k r_{,k} \left[\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 3r_{,i} r_{,j} \right] + n_i r_{,j} + n_j r_{,i} \right\} \quad (3.9g)$$

$$\bar{Q}_{ij}(x', x) = \frac{-\alpha(1+\nu)}{8\pi\lambda(1-\nu)} \left(r_{,i} r_{,j} - \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \right) \quad (3.9h)$$

$$T_{ij}(x', x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (3.9i)$$

$$U_{ij}(x', x) = \frac{-1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (3.9j)$$

$$T_{kij}(x', x) = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} r_{,k} + \nu(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + 3\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (3.9k)$$

$$U_{kij}(x', x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (3.9l)$$

donde r es la distancia entre los puntos x y x' , λ es la conductividad térmica, n es el vector normal a la superficie ficticia centrada en x' (*Figura 3.2.1*), E es el módulo de elasticidad, α es el coeficiente de dilatación térmica, μ módulo de corte y ν el módulo de Poisson.

Capítulo 4

Metodología

Con la finalidad de determinar la velocidad de crecimiento de grieta en la fatiga de un material polimérico sometido a cambios de temperatura y de frecuencia en la carga, aplicando el modelo de Kim y Wang (1994) y el análisis de grietas en problemas termoelásticos tridimensionales desarrollado por Balderrama (2004) y por la complejidad natural de las ecuaciones diferenciales asociadas al problema, se aplica el Método Dual de Elementos de Contorno (MDEC) como aproximación numérica en contraste a la solución analítica.

Los problemas de ingeniería por ecuaciones diferenciales, pueden ser resueltos por métodos numéricos que se aproximan a la solución exacta sólo en puntos discretos llamados nodos. El componente o dominio geométrico a calcular, es dividido en un número finito de subdominios llamados elementos. Dependiendo de las características geométricas y mecánicas del dominio y la interconectividad de las partes en que se han dividido, se genera una relación matemática entre los nodos, puntos de unión entre los elementos que forman el dominio global. La resolución matemática da lugar a la solución del problema modelado.

En la *Figura 4.1* se ilustra las tres etapas básicas del MDEC a saber, las cuales son:

Etapa I: *Preproceso*. Consiste en la preparación del modelo a ser analizado, de los datos geométricos, la propiedades del material y condiciones de contorno que permitan aproximarse lo mejor posible al hecho físico. Aquí se realiza la discretización del contorno. El objetivo de esta etapa es preparar los datos necesarios y suficientes para resolver el problema.

La definición exacta de las formas complejas de un contorno en un problema particular requiere de la especificación de la ubicación (relativa al origen de coordenadas) de un

número de puntos sobre la superficie. Estos puntos son entrelazados mediante funciones continuas aproximadas llamadas *funciones de forma*. Una vez representada la estructura o un componente como modelo informático, es decir, discretizada la superficie o contorno se obtiene una respuesta al conjunto de condiciones impuestas. Este trabajo utiliza elementos cuadráticos cuadrilaterales de ocho nodos del tipo *isoparamétrico*, es decir, las mismas funciones de forma son utilizadas para la interpolación de las variables y de la geometría.

Etapa II: *Proceso*. En esta etapa se realizan todos los cálculos inherentes al método, utilizando los datos, y condiciones de contorno para determinar las variables desconocidas, para eso se sigue la lógica de un algoritmo de cálculo fundamentado, en este caso, en el método de elementos de contorno. Se resuelve el conjunto de ecuaciones para obtener resultados nodales, tal como los valores de temperatura, desplazamientos y tracciones.

Etapa III: *Postproceso*. En esta etapa se utilizarán los resultados de la etapa anterior, para el cálculo de esfuerzos, deformación, derivadas de desplazamiento y temperatura en puntos en el dominio, para luego poder evaluar la integral de energía de dominio J y posteriormente obtener los valores de los factores de intensidad de esfuerzo (K_I , K_{II} y K_{III}).

Una vez establecidos los resultados del postproceso, éstos son empleados para el cálculo del rango del factor de intensidad de esfuerzos ΔK , la dirección de propagación de la grieta, los esfuerzos residuales y la velocidad de crecimiento de la grieta aplicando tanto el modelo tradicional de Paris como el de Kim y Wang.

Inmediatamente se extiende un incremento en la longitud de la grieta, con nuevos elementos de contorno, en la dirección establecida en el paso anterior y se repiten todos los pasos anteriores secuencialmente hasta que un número especificado de incrementos de extensión de grieta es alcanzado.

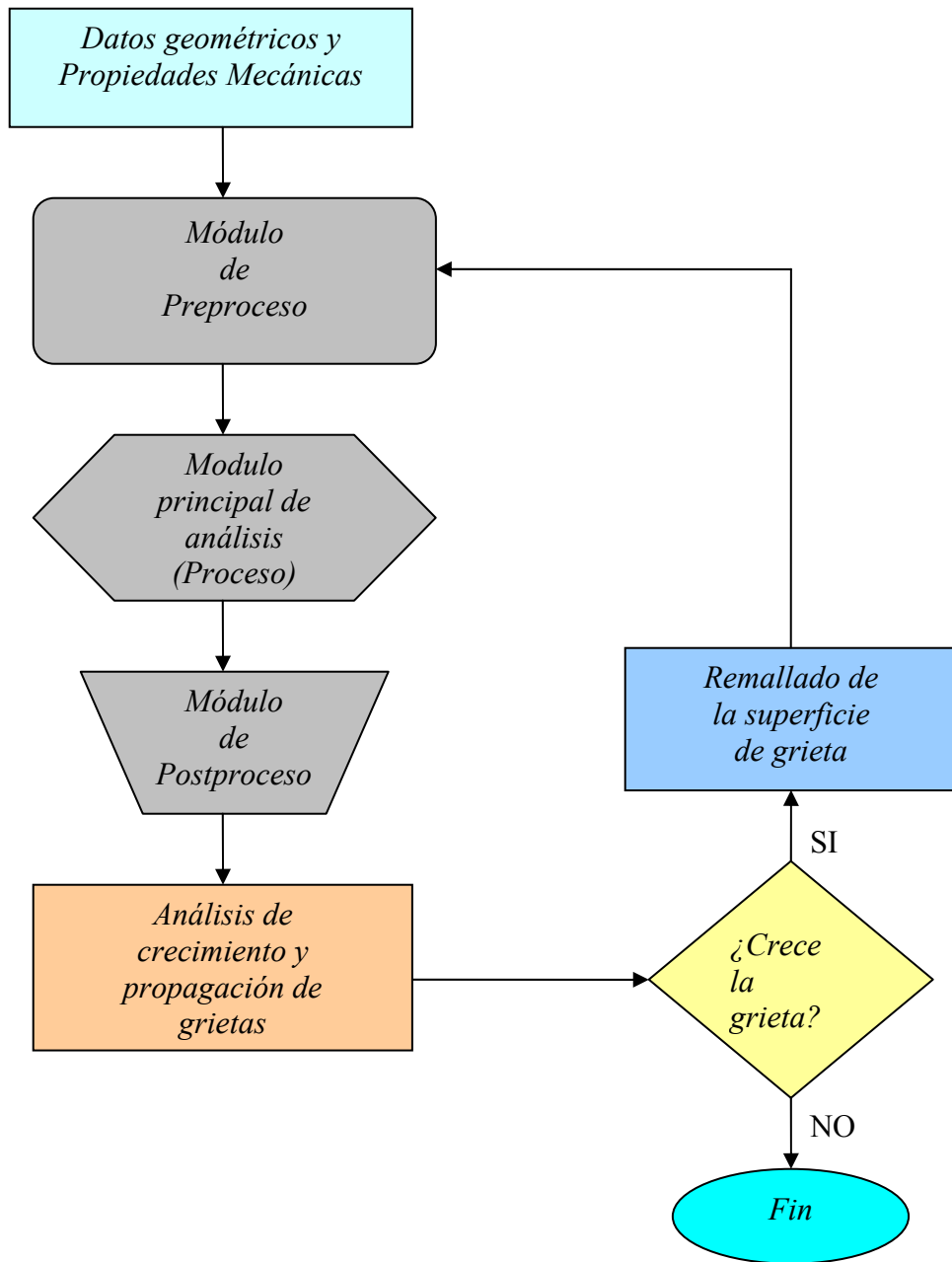


Figura 4.1: Diagrama de Flujo del proceso

4.1 Estrategia de Discretización

La solución para problemas termoelásticos consiste en determinar los campos de temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones relacionadas a través de las ecuaciones (3.4), (3.6), (3.7) y (3.8). Estas variables son calculadas a través de un proceso de discretización de las ecuaciones anteriores sobre el contorno. De esta forma, se genera un sistema de ecuaciones lineal que al ser resuelto algebraicamente definen todas las incógnitas. La estrategia general de modelado de un problema con el método de elementos de contorno puede resumirse de la manera siguiente:

- El contorno es discretizado en una serie de elementos sobre los cuales los campos θ , q , u_i y t_i son interpolados utilizando las funciones de forma y un número finito de valores nodales.
- Los campos termoelásticos aproximados θ , q , u_i y t_i son expresados como combinación lineal de funciones básicas en un sistema local de coordenadas.
- Los campos termoelásticos aproximados son sustituidos en las ecuaciones integrales (3.4), (3.6), (3.7) y (3.8) y el punto de colocación x' es situado sobre un nodo del contorno. Después de integrar elemento por elemento, se obtiene un sistema de ecuaciones lineal con valores nodales.
- El procedimiento se repite para todos los nodos formando un sistema lineal de ecuaciones.
- Finalmente, con las condiciones de contorno preescritas, el sistema de ecuaciones es resuelto y todos los valores nodales incógnita se determinan. Este proceso se lleva a cabo para puntos internos x utilizando las ecuaciones integrales correspondientes en una etapa de postproceso.

Se debe tener especial cuidado en las ecuaciones integrales de flujo y tracción, debido a los requerimientos de continuidad de los campos, lo cual se describe a continuación.

La estrategia de modelado del MDEC puede resumirse como lo implementaron Prasad *et al.* (1994) y dell'Erba *et al.* (1998) para los casos bidimensional y tridimensional, respectivamente.

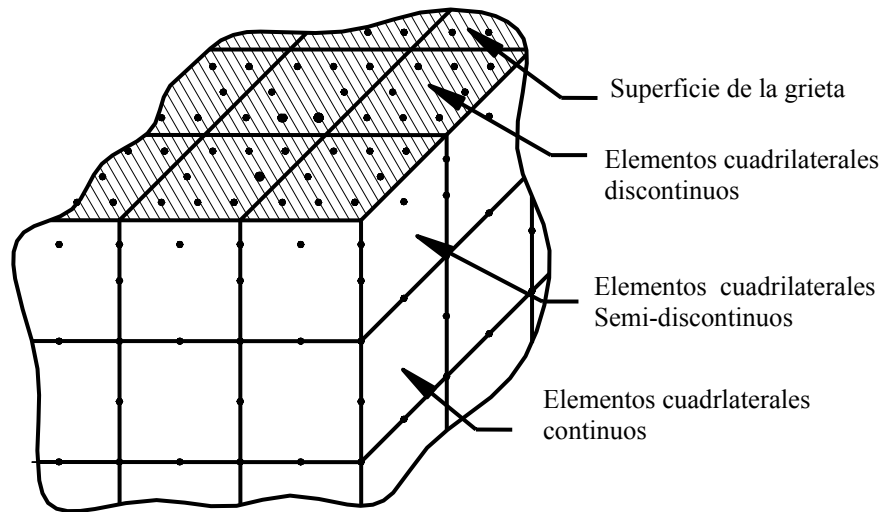


Figura 4.1.1: Estrategia de discretización.

- Las superficies de la grieta se discretizan con elementos cuadriláteros cuadráticos discontinuos.
- Los bordes de la grieta se discretizan con elementos cuadriláteros cuadráticos semidiscontinuos.
- Todas las demás superficies se modelan con elementos continuos cuadriláteros cuadráticos.
- La ecuación integral de desplazamiento (3.7) y temperatura (3.4) son aplicadas a puntos de colocación en una de las superficies de la grieta.
- La ecuación integral de tracción (3.8) y flujo (3.6) son aplicadas a puntos de colocación en la otra superficie de la grieta.
- La ecuaciones integrales de desplazamiento (3.7) y temperatura (3.4) son aplicadas en los puntos de colocación de todas las demás superficies (ver *Figura 4.1.1*)

En este trabajo se utilizarán elementos isoparamétricos, lo cual significa que la geometría y las variables son interpoladas utilizando las mismas funciones. De acuerdo a la representación isoparamétrica la variación de temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones sobre un elemento se aproximan como:

$$\begin{aligned}
 \theta^n &= \sum_{\alpha=1}^N \Psi^\alpha(\xi, \eta) \theta^{n\alpha} & q^n &= \sum_{\alpha=1}^N \Psi^\alpha(\xi, \eta) q^{n\alpha} \\
 u^n &= \sum_{\alpha=1}^N \Psi^\alpha(\xi, \eta) u^{n\alpha} & t^n &= \sum_{\alpha=1}^N \Psi^\alpha(\xi, \eta) t^{n\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

donde Ψ^α son las funciones de interpolación para el elemento n , en un sistema de coordenadas local (ξ, η) , N es el número de nodos del elemento n , α es el valor nodal en el elemento n . En este trabajo se hacen uso de elementos cuadráticos cuadriláteros de 8 nodos (Figura 4.1.2). Las funciones de forma para elementos continuos son:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) & \Psi_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) & \Psi_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 \Psi_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) & \Psi_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 \Psi_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) & \Psi_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

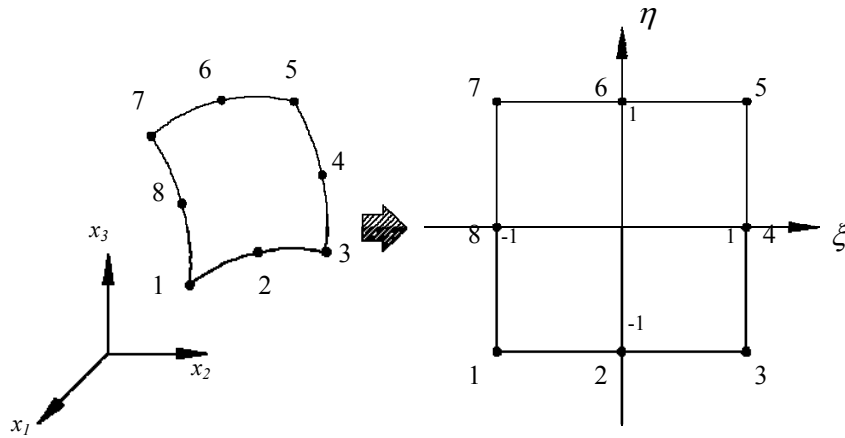


Figura 4.1.2: Transformación de un sistema de coordenadas global a uno local.

Para los elementos semidiscontinuos y totalmente discontinuos se puede distinguir que los nodos de colocación, también llamados *nodos funcionales*, están colocados dentro del elemento (*Figura 4.1.3*), la suavidad del punto fuente es entonces garantizada y por lo tanto el requerimiento de continuidad de las variables de contorno para la existencia de la solución de las ecuaciones integrales de termoelasticidad. Las variables de contorno dentro de un elemento discontinuo son interpoladas con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 \Psi^1 &= \frac{1}{4k^3} (k - \xi)(k - \eta)(-\xi - \eta - k) & \Psi^2 &= \frac{1}{2k^3} (k^2 - \xi^2)(k - \eta) \\
 \Psi^3 &= \frac{1}{4k^3} (k + \xi)(k - \eta)(\xi - \eta - k) & \Psi^4 &= \frac{1}{2k^3} (k + \xi)(k^2 - \eta^2) \\
 \Psi^5 &= \frac{1}{4k^3} (k + \xi)(k + \eta)(\xi + \eta - k) & \Psi^6 &= \frac{1}{2k^3} (k^2 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 \Psi^7 &= \frac{1}{4k^3} (k - \xi)(k + \eta)(-\xi + \eta - k) & \Psi^8 &= \frac{1}{2k^3} (k - \xi)(k^2 + \eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

donde k es un parámetro de posición para los nodos de colocación que varía entre $0 < k \leq 1$. El valor de $k = 0.5$ es utilizado en este trabajo, ya que permite una distribución homogénea de los puntos de colocación en las superficies de la grieta (ver *Figura 4.1.3*).

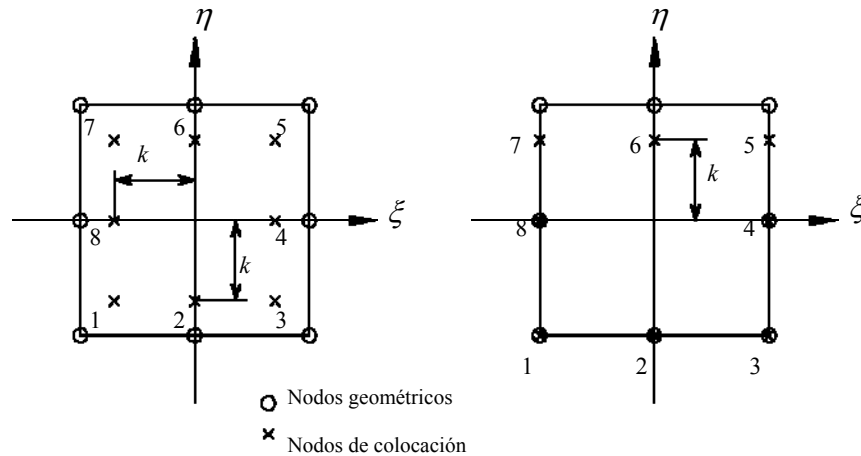


Figura 4.1.3: Elementos discontinuo y semidiscontinuo.

La transición entre elementos continuos y discontinuos en la boca de la fisura se produce con elementos semidiscontinuos, las funciones de forma para este tipo de elementos

son:

$$\begin{aligned}
\Psi^1 &= \frac{1}{2(k+1)}(1-\xi)(k-\eta)(-\xi-\eta-1) & \Psi^2 &= \frac{1}{(k+1)}(1-\xi^2)(k-\eta) \\
\Psi^3 &= \frac{1}{2(k+1)}(1+\xi)(k-\eta)(\xi-\eta-1) & \Psi^4 &= \frac{1}{2k}(1+\xi)(k-\eta)(1-\eta) \\
\Psi^5 &= \frac{1}{2k(k+1)}(1+\xi)(1+\eta)(k\xi+\eta-k) & \Psi^6 &= \frac{1}{2k^3}(1-\xi^2)(k+\eta) \\
\Psi^7 &= \frac{1}{(k+1)}(k-\xi)(k+\eta)(-\xi+\eta-k) & \Psi^8 &= \frac{1}{2k}(1-\xi)(k-\eta)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2 Discretización del MDEC

Siguiendo el procedimiento de la sección anterior las ecuaciones integrales pueden presentarse en forma discretizada. Para la ecuación integral de temperatura (3.4) y desplazamiento (3.7) aplicadas en un punto x^ω en el contorno Γ^n (ver *Figura 4.2.1*), se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
C(x^\omega)\theta(x^\omega) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^*(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^*(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.5}$$

y

$$\begin{aligned}
C_{ij}(x^\omega)u_i(x^\omega) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_i(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.6}$$

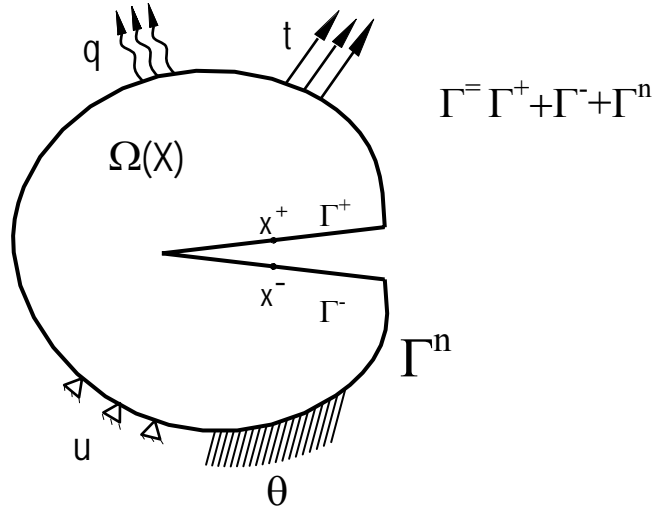


Figura 4.2.1: Cuerpo general de la grieta con condiciones de borde mecánicas y térmicas.

Para la ecuación integral de temperatura (3.4) y desplazamiento (3.7) aplicadas en un punto $x^{+\omega}$ en el contorno Γ^+

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta(x^{+\omega}) + \frac{1}{2}\theta(x^{-\omega}) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^*(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^*(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.7)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(x^{+\omega}) - \frac{1}{2}u_i(x^{-\omega}) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &+ \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_i(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{Q}_i(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para la ecuación integral de flujo (3.6) y tracción (3.8) aplicadas en un punto $x^{-\omega}$ en el contorno Γ^-

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q(x^{-\omega}) + \frac{1}{2}q(x^{+\omega}) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^{**}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &+ \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^{**}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.9)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_i(x^{-\omega}) - \frac{1}{2}t_i(x^{+\omega}) &= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ijk}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ijk}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &+ \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_{ij}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{Q}_{ij}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \frac{E}{2(1-2\nu)} \alpha \theta(x^{-\omega}) n_i(x^{-\omega}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde N_E es el número total de elementos, N es el número de nodos por elemento, $\omega = 1$ y J^n es el jacobiano de la transformación del sistema de coordenada global al sistema de coordenadas local y está definido como:

$$J^n(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial x^n(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial x^n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right| \quad (4.11)$$

4.3 Ensamble del Sistema de Ecuaciones

Las ecuaciones integrales de contorno al ser integradas sobre todos los nodos del contorno, generan un sistema algebraico de ecuaciones que se puede expresar en forma matricial:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (4.12)$$

El método utilizado en resolver casos de termoelasticidad no acoplada consiste en resolver primero el problema de potencial y luego el problema elástico asociado. Sin embargo, el campo térmico no depende del campo de esfuerzos. Ambos tipos de ecuaciones pueden ser acoplados en un solo sistema para resolverse simultáneamente. Con este esquema se requiere un menor recurso computacional para llevar a cabo la integración numérica, entonces se puede expresar el sistema como:

$$[H^\alpha] \{u_\alpha\} = [G^\alpha] \{t_\alpha\} \quad (4.13)$$

donde

$$\{u_\alpha\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \{t_\alpha\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ q \end{Bmatrix}$$

y

$$[H^\alpha] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{1\theta} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{2\theta} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{3\theta} \\ 0 & 0 & 0 & H_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad [G^\alpha] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{1\theta} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{2\theta} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{3\theta} \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de las matrices G^α y H^α se obtienen al integrar la ecuación (4.6), donde: los términos de U_{ij} van desde G_{11} a G_{33} y los de T_{ij} van desde H_{11} a H_{33} . De igual forma, los términos de P_i van desde $H_{1\theta}$ a $H_{3\theta}$ y los de Q_i van desde $G_{1\theta}$ a $G_{3\theta}$. A partir de la integración de la ecuación (4.5) los términos θ^* y q^* están en $G_{\theta\theta}$ y $H_{\theta\theta}$, respectivamente. Los vectores u y t contienen las condiciones de contorno del sistema de ecuaciones. Como los problemas a analizar son tridimensionales el tamaño de las matrices es $4N_T \times 4N_T$ donde N_T es el número total de nodos de la geometría discretizada y en consecuencia el tamaño de los vectores u y t , para cada nodo, es $4N_T$.

Al aplicar las condiciones de contorno, el sistema de ecuaciones se reordena de forma

tal que todas las incógnitas están del lado izquierdo de la igualdad y todos los valores conocidos del lado derecho, quedando un sistema

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.14)$$

donde la matriz \mathbf{A} contiene los coeficientes de G^α y H^α , el vector \mathbf{b} es evaluado desde las condiciones de contorno conocidas y el vector \mathbf{x} contiene los valores de variables desconocidas. Por lo que al obtener los valores de \mathbf{x} , se obtienen todos los valores del contorno en estudio. El sistema de ecuaciones puede resolverse utilizando métodos de eliminación Gausiana y resolvidores iterativos. Como el método de eliminación Gausiana no depende de un criterio de convergencia, satisface los requerimientos de precisión en los resultados y es utilizado en este trabajo.

4.4 Tratamiento de las Integrales Singulares

La evaluación de los coeficientes de las matrices mencionadas anteriormente se realiza al tomar en las ecuaciones integrales los nodos de colocación e integrar sobre todos los elementos del modelo. Muchas de estas integrales son regulares y se pueden llevar a cabo con un proceso de integración de cuadratura de Gauss, que para una cierta función en un espacio bidimensional es de la forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} f(\xi_i, \eta_j) \omega_i \omega_j \quad (4.15)$$

donde ω_i y ω_j son los factores de peso, (ξ_i, η_j) son las coordenadas paramétricas y g_1 y g_2 son el número de puntos de Gauss en las direcciones ξ y η , respectivamente. Sin embargo, dependiendo de la naturaleza y posición relativa del punto de colocación y el elemento sobre el que se lleva a cabo la integración, existen cuatro tipos de integrales singulares:

- *Integrales cuasi singulares:* En este caso, el nodo de colocación no pertenece al elemento de integración, pero la proximidad introduce un error cuando la variación del integrando es acentuada.
- *Integrales singulares suaves:* Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al

elemento de integración y la singularidad del núcleo es $O(1/r)$. Este es el caso de las funciones $\theta^*(x^n, x), U_{ij}(x^n, x), \bar{P}_i(x^n, x)$ y $\bar{Q}_i(x^n, x)$.

- *Integrales singulares fuertes*: Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al elemento y la singularidad es del orden $O(1/r^2)$. Este es el caso de las funciones $q^*(x^n, x), \theta^{**}(x^n, x), T_{ij}(x^n, x), U_{kij}(x^-, x)$ y $\bar{P}_{ij}(x^-, x)$.
- *Integrales hipersingulares*: Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al elemento y la singularidad es del orden $O(1/r^3)$. Este es el caso de las funciones $q^{**}(x^-, x)$ y $T_{kij}(x^-, x)$.

4.5 Cálculo de Variables de Postproceso

4.5.1 Puntos Internos

Las derivadas de desplazamientos en puntos internos son calculadas a partir de la ecuación integral de contorno obtenida al derivar analíticamente la ecuación integral de desplazamiento (3.7):

$$\begin{aligned} u_{i,k}(x') + \int_{\Gamma} T_{ij,k}(x', x) u_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{P}_{i,k}(x', x) \theta(x) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(x', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_{i,k}(x', x) q(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $T_{ij,k}(x', x), U_{ij,k}(x', x), \bar{P}_{i,k}(x', x)$ y $\bar{Q}_{i,k}(x', x)$ son las derivadas de los campos fundamentales. Las derivadas de temperaturas, en forma análoga, se obtienen al derivar la ecuación integral de temperatura (3.4):

$$\theta_{,k}(x') - \int_{\Gamma} q_{,k}^*(x', x) \theta(x) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \theta_{,k}^*(x', x) q(x) d\Gamma \quad (4.17)$$

donde $q_{,k}^*(x', x)$ y $\theta_{,k}^*(x', x)$ son las derivadas de las soluciones fundamentales de la ecuación de temperatura.

Una vez que son conocidas las derivadas de desplazamiento, los esfuerzos y deformaciones pueden ser calculados utilizando las relaciones básicas de mecánica del medio continuo, ecuaciones (2.2) y (2.4), respectivamente.

4.5.2 Puntos sobre el Contorno

Las derivadas parciales de desplazamientos y temperatura en puntos sobre el contorno se obtienen a partir de las ecuaciones (4.16) y (4.17), respectivamente, en forma similar que para puntos internos, llevando el punto del dominio al contorno. Sin embargo, utilizando las ecuaciones integrales se presenta el problema de hipersingularidad de los integrandos de la ecuación, para sobrellevar esta dificultad se calculan, a partir de los desplazamientos, temperaturas y las tracciones en el contorno mediante la derivación numérica. Considérese un sistema local de coordenadas x_i^o tal que el vector normal unitario al elemento de contorno es x_3^o (Figura 4.5.1). Si $u_i^o, \varepsilon_{ij}^o, \sigma_{ij}^o$ y t_i^o son desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones, respectivamente, en el sistema de coordenadas local y θ la temperatura, los componentes de esfuerzo pueden expresarse como:

$$\sigma_{3i}^o = t_i^o \quad \text{para } i = 1,2,3 \quad (4.18)$$

y la Ley de Hooke para termoelasticidad,

$$\sigma_{ij}^o = 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^o + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^o \delta_{ij} - \frac{(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (4.19)$$

haciendo

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^o &= t_3^o \\ \varepsilon_{33}^o &= \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1-2\nu}{2\mu} t_3^o - \nu (\varepsilon_{11}^o + \varepsilon_{22}^o) + (1+\nu) \alpha \theta \right] \end{aligned}$$

eliminando ε_{33}^o de la ecuación (4.19)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^o &= \frac{1}{1-\nu} \left\{ \nu t_3^o + 2\mu [\varepsilon_{11}^o + \nu \varepsilon_{22}^o - (1+\nu) \alpha \theta] \right\} \\ \sigma_{22}^o &= \frac{1}{1-\nu} \left\{ \nu t_3^o + 2\mu [\varepsilon_{22}^o + \nu \varepsilon_{11}^o - (1+\nu) \alpha \theta] \right\} \\ \sigma_{12}^o &= 2\mu \varepsilon_{12}^o \end{aligned}$$

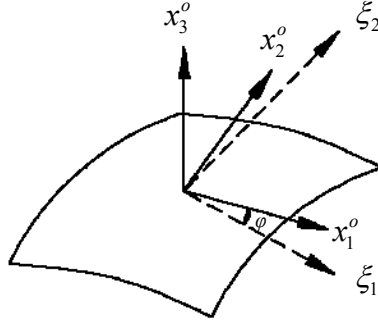


Figura 4.5.1: Sistema de coordenadas intrínsecas (ξ_1, ξ_2) y sistema de coordenadas local x_i^o .

Las deformaciones ε_{ij}^o pueden calcularse a partir de la ecuación (2.4) aplicada en el sistema de coordenadas local. Debe destacarse que las derivadas de desplazamiento y la temperatura están calculadas inicialmente en las direcciones intrínsecas sobre un elemento (ξ_1, ξ_2) y son transformadas al sistema local de coordenadas x_i^o . Finalmente, las nueve componentes de derivadas de desplazamiento en el sistema global están relacionadas a las derivadas respecto a las direcciones intrínsecas del elemento de contorno $\partial u_i / \partial \xi_j$ como sigue

$$\frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i^o}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (4.20)$$

donde $\partial x_k / \partial \xi_j$ es la matriz del Jacobiano de la transformación.

$$\frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_j} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \psi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} u_i^{o,\alpha} \quad (4.21)$$

Se puede observar de la ecuación (4.20) una vez expandida produce un sistema de seis ecuaciones con nueve derivadas como incógnitas. Tres de estas incógnitas, $u_{1,1}, u_{2,2}$ y $u_{3,3}$ pueden calcularse directamente del tensor de deformaciones $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ y ε_{33} , respectivamente utilizando la ecuación (2.4). Esto deja el sistema con seis incógnitas, que pueden ser reducidas a tres si los valores de $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$ y ε_{23} son sustituidos en la ecuación (2.4) y luego

reemplazados en el sistema de ecuaciones. Finalmente, las tres restantes incógnitas son calculadas utilizando un grupo de tres ecuaciones tomadas del sistema generado por la ecuación (4.20). Debe notarse que una o más derivadas pueden ser cero simultáneamente dependiendo de la orientación del elemento y su forma, la selección de estas tres ecuaciones no pueden ser arbitraria, siendo necesario hacer una selección especial en cada caso. El tensor deformación en el sistema de coordenadas local se expresa como:

$$\varepsilon_{ij}^o = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^o}{\partial x_j^o} + \frac{\partial u_j^o}{\partial x_i^o} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j^o} + \frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j^o} + \frac{\partial u_j^o}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i^o} + \frac{\partial u_j^o}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i^o} \right)$$

En forma análoga, para las derivadas de temperatura en puntos del contorno, se lleva a cabo una estrategia similar a la expuesta para las derivadas de desplazamiento

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \psi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \theta^{\alpha} \quad (4.23)$$

donde $\psi(\xi_1, \xi_2)$ son las funciones de forma para los elementos de contorno.

4.6 Cálculo de Factores de Intensidad de Esfuerzo

Desde su introducción como parámetro fractomecánico los factores de intensidad de esfuerzo han ganado gran aceptación como una clave para determinar el comportamiento en la Mecánica de Fractura Lineal y Elástica. Se pueden aplicar algunas metodologías en la determinación de estos factores, por ejemplo, el criterio de apertura de desplazamientos (COD), que consiste en la extrapolación de desplazamientos en la vecindad del frente de grieta tanto en dos como en tres dimensiones, pero con la desventaja de que se requiere una discretización muy fina de la malla en la grieta. Otra técnica que resulta prominente son las integrales independientes de camino basadas en leyes de conservación. Una de las más conocidas es la integral J de Rice en la cual la densidad de energía de deformación y el trabajo realizado por las tracciones son integradas a lo largo de un contorno cerrado que

rodea el vértice de la grieta.

La implementación de la integral J mediante elementos de contorno fue presentada por Aliabadi (1992) para elasticidad bidimensional y tridimensional. Recientemente dell'Erba (2002) presentó una formulación de la integral J con termoelasticidad utilizando el método de los elementos de contorno. La integral está compuesta por una integral de contorno más una integral de área y los factores de intensidad de esfuerzo se descomponen calculando campos termoelásticos simétricos y antisimétricos en una región definida alrededor del frente de grieta. La descomposición hace posible obtener los modos I, II y III para los factores de intensidad de esfuerzo fundamentado en que la integral J se convierte en la suma de tres integrales (J^I , J^{II} y J^{III}) asociada con los tres modos.

La intensidad de los campos de esfuerzo y deformaciones en la vecindad de un frente tridimensional de grieta está dada por valores a trozos de J sobre ese frente. En grietas tridimensionales, los campos bidimensionales en deformación plana son solamente aproximaciones asintóticas en el frente de grieta, por lo tanto una integral J de línea bidimensional puede ser usada muy cerca del vértice de fisura. En análisis mediante elementos finitos el cálculo de los campos cerca de esta zona es muy difícil, es por ello que Shih *et al.*(1986) proponen la metodología de una integral J de dominio (área/volumen) para el cálculo de energía relajada.

4.6.1 Método de Integrales de Contorno

La metodología de las integrales de contorno se basa en la aplicación del teorema de la divergencia a la ecuación (2.34) la cual produce una integral remota de línea J_C definida sobre un contorno en el plano principal en el punto η , (*Figura 4.6.1*), complementado por una integral J_A definida sobre la superficie encerrada por el contorno.

$$\bar{J} = J_C + J_A$$

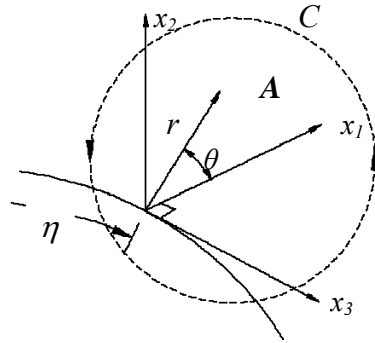


Figura 4.6.1: Área y Contorno para la evaluación de la integral J en el frente de grieta.

Una integral de este tipo es la propuesta por Kishimoto *et al.* como lo citan Prasad (1995) y dell'Erba (2002) para termoelasticidad.

$$\bar{J} = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_i u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} \alpha \sigma_{kk} \theta_{,1} d\Omega \quad (4.24)$$

La evaluación numérica de la parte correspondiente a J_A requiere la integración sobre elementos del vértice de la grieta, presentado problemas de singularidad.

4.6.2 Método de Energía de Dominio

Los métodos para integrales de dominio fueron desarrollados por Moran y Shih, Shih *et. al* y Nikishkov y Atluri como los cita Cisilino (2000), así en las integrales de contorno y las integrales de dominio se derivan a partir del teorema de la divergencia a la integral J de Rice (ecuación 2.34), lo que produce una integral definida sobre un dominio finito encerrando cierta porción del frente de grieta. Esta metodología es equivalente a la técnica de avance virtual del frente de grieta y está mejor adaptada para su implementación numérica que las integrales de contorno. En esta sección se trata en detalle su desarrollo e implementación.

Dentro de la teoría de termoelasticidad no acoplada cuasiestática, las deformaciones se pueden escribir como la suma de una parte elástica más una parte debido al campo de temperatura

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0 \quad (4.25)$$

La integral J de Rice se deriva del tensor de momentum de Eshelby P_{ij} , como lo cita dell'Erba (2002). Este tensor está definido como:

$$P_{ij} = W\delta_{kj} - \sigma_{ij}u_{i,k}^e \quad (4.26)$$

donde W es la densidad de energía de deformación y $u_{i,k}^e$ es el campo de derivadas de desplazamiento elástico. Una propiedad importante de este tensor, es que su divergencia es cero.

$$P_{ij,j} = 0 \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la integración sobre un dominio finito será nula, quedando expresada la independencia de camino de la siguiente integral:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (W\delta_{kj} + \sigma_{ij}u_{i,k}^e) d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

donde Ω es el dominio de integración rodeado por un contorno cerrado C que excluye el vértice de la grieta.

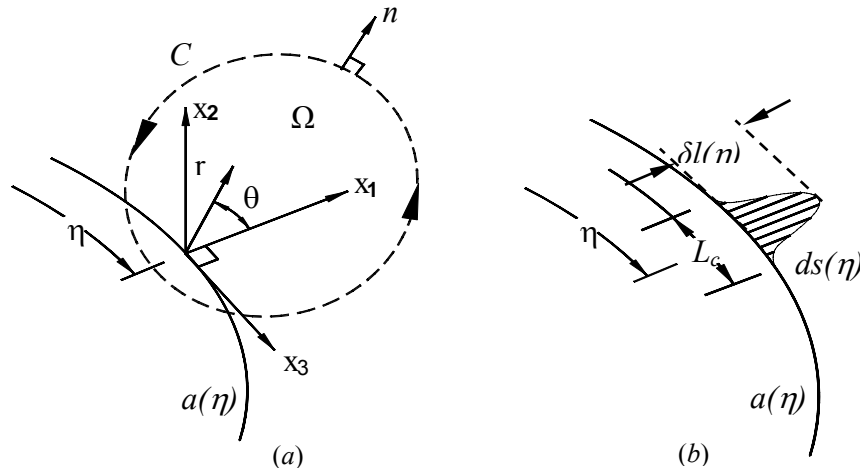


Figura 4.6.2: a) Frente de grieta, b) Extensión virtual del frente de grieta.

Considérese un frente tridimensional de grieta con un vector tangente a lo largo del frente como se muestra en la *Figura (4.6.2a)*. En la posición η donde se evalúa la razón de

energía relajada, se define un sistema de coordenadas local tal que x_1 esta en la dirección normal al frente, x_2 en la dirección normal a la fisura y x_3 en la dirección tangente al frente de grieta.

Denotemos por $\delta l(\eta)$ el avance local y arbitrario del frente de grieta en el punto η en la dirección normal al frente y contenido en el plano de la grieta, y sea $ds(\eta)$ la longitud elemental de arco a lo largo del frente como se muestra en la *Figura (4.6.2b)*. Tomando términos de primer orden en δl .

$$-\delta U = \bar{J} \Delta a = \int_{L_c} J(\eta) \delta l(\eta) ds \quad (4.29)$$

donde L_c denota el segmento de línea del frente de grieta en consideración y δU es el descenso de la energía potencial y \bar{J} es por lo tanto la energía relajada por unidad de avance del frente de grieta. De esta forma, el valor de $J(\eta)$ puede ser pesado a lo largo de un frente tridimensional. Debe notarse que a pesar que la ecuación (2.34) proviene de un análisis bidimensional se aplica al caso tridimensional, ya que en el límite cuando $r \rightarrow 0$, la condición de deformación plana prevalece y por lo tanto los planos tridimensionales aproximan un problema plano.

Consideremos que la fisura tiene un espesor h como se muestra en la *Figura (4.6.3a)* y argumentamos que cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene la configuración de grieta de interés. La superficie de la entalla está compuesta por las caras S_A y S_B , con normales en la dirección x_2 , y una cara S_t cuya normal m_k está en el plano $x_1 - x_3$. Ahora, dejemos que la entalla con cara S_t avance una distancia $\Delta a l_k$ en la dirección x_k , por ejemplo:

$$\Delta a l_k m_k = \delta l(\eta) \quad (4.30)$$

Más aún, restringimos a l_k moverse sobre S_t y que sea una función de x_1 y x_3 solamente; por lo tanto $l_2 = 0$ y se obtiene que:

$$\bar{J} \Delta a = \Delta a \int_{L_c} (\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ki}) m_i ds \quad (4.31)$$

Cuando $\Delta a l_k$ corresponde a una traslación, l_k puede ser sacado del signo de la integral y se obtiene que $\bar{J} = J_k l_k$

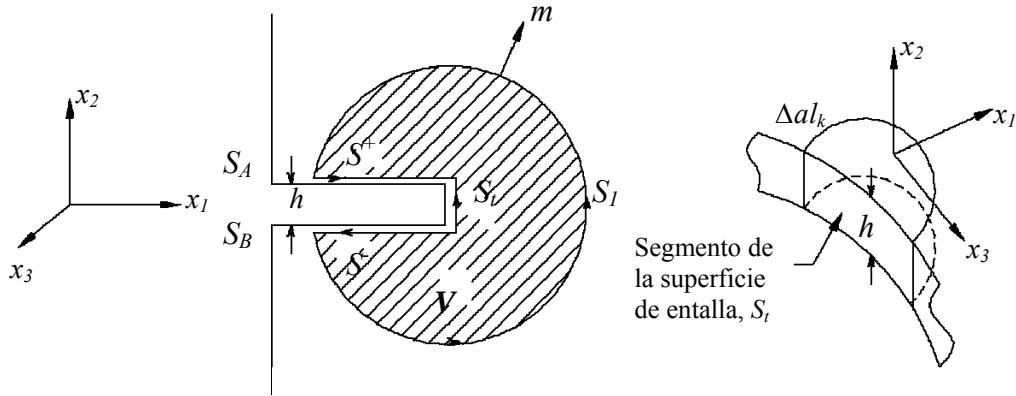


Figura 4.6.3: a) Dominio de integración encerrado por las superficies S_b , S^+ , S^- y S_l .
b) Esquema de la entalla de altura h .

Para desarrollar una integral de dominio (volumen), se considera un volumen encerrado por las superficies S_b , S^+ , S^- y S_l como se muestra *Figura (4.6.3a)*. Seguidamente se establece una función q_k definida como:

$$q_k = \begin{cases} l_k & \text{en } S_l \\ 0 & \text{en } S_1 \end{cases} \quad (4.32)$$

la cual es lo suficientemente suave en el volumen. Por lo tanto, se puede reestructurar la ecuación (4.31) integrada sobre la superficie cerrada ($S=S^+ + S^- + S_l - S_1$) y considerando las caras de la grieta libres de tracciones.

$$\bar{J} = \int_S (\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ki}) q_k m_i dS \quad (4.33)$$

Para llegar a esta expresión se considera que $m_1 = 0$, $m_3 = 0$ y $m_2 = \pm 1$ en las caras de la grieta. Aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie cerrada (4.33), utilizando la ecuación (4.25) y considerando que $h \rightarrow 0$ para la configuración real, se obtiene la integral de dominio.

$$\bar{J} = \int_V \{ (\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ki}) q_{k,i} + \sigma_m \alpha_{\theta,k} q_k \} dV \quad (4.34)$$

Consistente con la independendencia de camino de la integral J , la ecuación (4.34) es independiente del dominio de integración, por lo tanto cualquier volumen V puede ser

considerado para el cálculo de \bar{J} .

Como una aproximación la razón de energía relajada está dada por:

$$J(\eta) = \frac{\bar{J} \Delta a}{\Delta a \int_{L_c} l_k(\eta) m_k(\eta) d\eta} \quad (4.35)$$

donde el término del denominador es el incremento del área de la grieta debido a un avance virtual del frente.

La función auxiliar q_k introducida en la ecuación (4.33) sirve para modelar el avance virtual del frente de grieta. A pesar que la función puede adoptar cualquier forma arbitraria el único requerimiento para la función es que sea lo suficientemente suave dentro del dominio V de integración, ya que la integral de energía de dominio requiere además su derivada.

Shih *et al.* (1986) demostraron que para la integral de energía de dominio el valor de J es insensible a la forma asumida de la función. Sin embargo, se ha encontrado que la forma de la función es relevante en el cálculo de la integral M_I que se desarrolla más adelante para el desacople de los factores de intensidad de esfuerzo. El tipo de función que se utiliza en este trabajo es la función q_k con variación bicuadrática y optimizada. Esta función varía en forma bicuadrática en las direcciones tangencial y nodal al frente de grieta. Considerando que la evaluación se lleva a cabo en el punto η que está en el medio de un segmento del frente de grieta L_c con r_o como el radio del camino de integración, la función q se escribe como:

$$q(x) = \left\| 1 - \left(\frac{x_3}{L_c/2} \right)^2 \right\| \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (4.36)$$

donde r es la distancia desde el frente de grieta en el plano $x_1 - x_3$ como se observa en la *Figura (4.6.2a)*.

Saliva *et al.* (2000) proponen una forma optimizada de la función q que bajo ciertas consideraciones asegura la convergencia de la integral de energía de dominio. La función propuesta es:

$$q(x) = \frac{w^p \|x\|^{-\beta}}{w^p \|x\|^{-\beta} + \sum_{i=1}^N w_j^{np} \|x - z_i\|^{-\beta}} \quad (4.37)$$

donde w^p , w^{np} y β son unos parámetros a escoger, y z_i son las posiciones de los N puntos con valor q prescrito nulo. Estos puntos son dados en este trabajo como aquellos nodos de celdas localizados en la superficie S_I , la superficie externa del volumen de integración que encierra parte de la grieta (ver *Figura 4.6.4*).

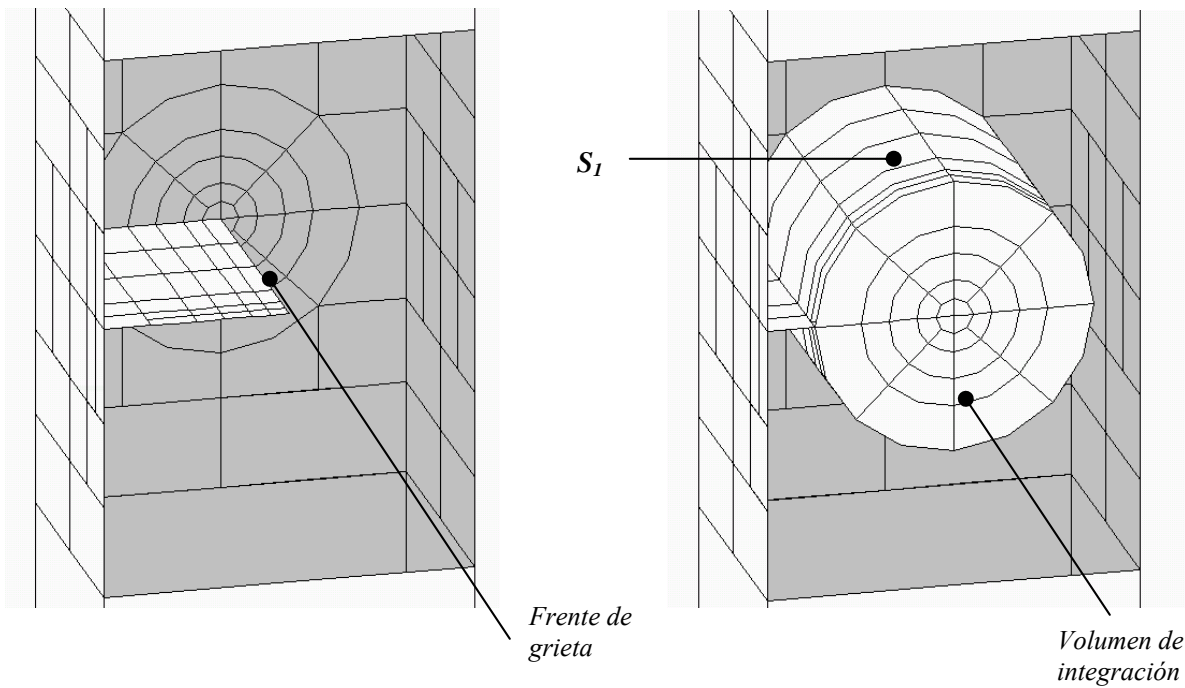


Figura 4.6.4: Discretización del contorno y dominios de integración para la evaluación de la integral J .

Utilizando los parámetros w^p , w^{np} y β es posible controlar que parte del dominio contribuye significativamente a la integral. En particular β está asociado con la suavidad de q . Valores grandes inducen gradientes aproximadamente nulos alrededor del frente de grieta, donde los valores no nulos de q están prescritos. En contraste, los campos presentan cambios abruptos fuera de estas regiones. Con w^p y w^{np} , la región con gradientes no nulos

pueden ser trasladados cerca del frente de grieta o cerca del contorno del volumen de integración donde los valores nulos de q están prescritos. En la *Figura 4.6.5* se presenta la influencia de estos parámetros en función de r/r_o .

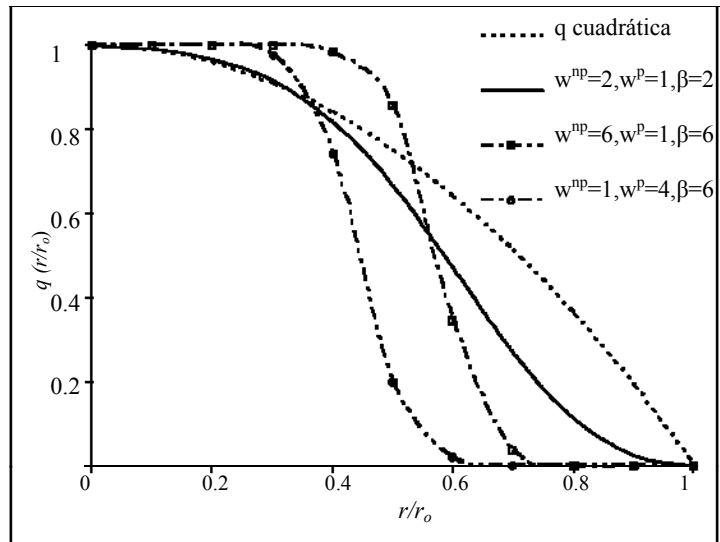


Figura 4.6.5: Formas de la función q bicuadrática y optimizada.

4.6.3 La Integral M_I

Entre los métodos disponibles para calcular los parámetros fractomecánicos, la integral de energía de dominio ha surgido como una buena herramienta para problemas de fractura elástica y termoelástica. El proceso de transformar una integral de contorno en una de dominio es ventajoso para propósitos numéricos debido a que se pueden obtener parámetros fractomecánicos precisos sin necesidad de resolver con gran precisión los campos singulares en la vecindad de la fisura.

La integral M_I es una metodología para desacoplar los factores de intensidad de esfuerzo en modo mixto tridimensional. Consideremos dos estados en equilibrio denotados por los superíndices (1) y (2), la superposición de estos generan un nuevo estado (1+2) con $K_j^{(1+2)}$.

$$K_j^{(1+2)} = K_j^{(1)} + K_j^{(2)} \quad (4.38)$$

Los factores están relacionados con la integral J a partir de la ecuación (2.37):

$$J = J_I + J_{II} + J_{III} = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (4.39)$$

En condiciones de deformación plana, $E^* = E/(1-\nu^2)$ y en condiciones de esfuerzo plano, $E^* = E$.

La integral J para el estado superpuesto (1+2) en condiciones de esfuerzo plano queda como:

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \frac{1}{E} \left[(K_I^{(1+2)})^2 + (K_{II}^{(1+2)})^2 \right] + \frac{(K_{III}^{(1+2)})^2}{2\mu} \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E} [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{\mu} \end{aligned} \quad (4.40)$$

y la integral M_I queda definida como:

$$M_I = J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} = \frac{2}{E} [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{\mu} \quad (4.41)$$

A partir de la ecuación (4.34) se determinan los valores de $J^{(1+2)}$, $J^{(1)}$ y $J^{(2)}$, donde el estado de equilibrio (1) se obtendrá del análisis por elementos de contorno y el estado (2) a través de las soluciones asintóticas conocidas para condiciones de deformación plana. Luego de obtener el valor de la integral M_I se calculan los factores de intensidad de esfuerzo considerando los siguientes tres casos para el estado (2):

$$\begin{aligned} K_I^{(2)} &= 1, K_{II}^{(2)} = 0, K_{III}^{(2)} = 0 \\ K_I^{(2)} &= 0, K_{II}^{(2)} = 1, K_{III}^{(2)} = 0 \\ K_I^{(2)} &= 0, K_{II}^{(2)} = 0, K_{III}^{(2)} = 1 \end{aligned}$$

Entonces, es posible obtener los factores de intensidad de esfuerzo por separado:

$$K_I^{(1)} = \frac{M_I^a E}{2} \quad K_{II}^{(1)} = \frac{M_I^b E}{2} \quad K_{III}^{(1)} = M_I^c \mu \quad (4.42)$$

La forma de la integral M_I en función de las variables de campo y los estados superpuestos es:

$$M_I = \int_V \left\{ \left(\sigma_{ij}^{(1)} u_{j,k}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,k}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{ki} \right) q_{k,i} + \sigma_{mn}^{(2)} \alpha \theta_{,k}^{(1)} q_k \right\} dV \quad (4.43)$$

Debe tenerse en cuenta que el campo elástico (2) corresponde a las soluciones asintóticas para las cuales no existe gradiente de temperatura, con lo cual se puede asumir que la integral M_I aún de esta forma contempla los efectos térmicos producidas por el estado (1).

Esta metodología es aplicable a grietas rectas y circulares (radio de curvatura constante). Sin embargo, como cita Gosz *et al.* (1998), deben considerarse otros términos para caso de grietas con frente curvo con curvatura variable.

4.7 Implementación numérica de las integrales J y M_I

La porción del dominio del modelo en la que se evalúa la integral de dominio, es discretizada mediante elementos de volumen o celdas de 20 nodos, sobre los cuales las variables son aproximadas por el producto de las funciones de interpolación de las celdas y los valores nodales de σ_{ij} , u_{ij} , ε_{ij} y θ_k . En la *Figura (4.6.6)* se muestran dos tipos de celdas, las continuas y las semidiscontinuas, las últimas se utilizan en las posiciones sobre las superficies de la grieta para evitar calcular las variables de los campos sobre los elementos de la grieta.

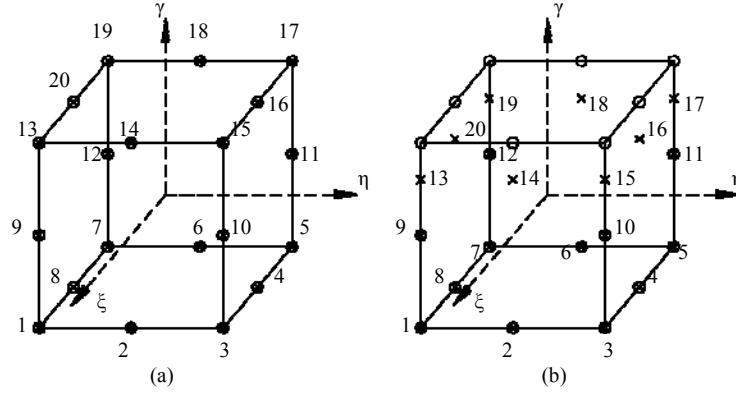


Figura 4.6.6: Tipos de celdas: a) Continuas, b) Semidiscontinuas.

Las funciones de forma para las celdas continuas son:

$$\begin{aligned}
 \Phi^1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\gamma)(\xi-\eta-\gamma-2) & \Phi^{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\gamma^2) \\
 \Phi^2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\gamma) & \Phi^{12} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\gamma^2) \\
 \Phi^3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\gamma)(\xi+\eta-\gamma-2) & \Phi^{13} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(\xi-\eta+\gamma-2) \\
 \Phi^4 &= \frac{1}{4}(1+\xi^2)(1-\eta)(1-\gamma) & \Phi^{14} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma) \\
 \Phi^5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\gamma)(-\xi+\eta-\gamma-2) & \Phi^{15} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(\xi+\eta+\gamma-2) \\
 \Phi^6 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\gamma) & \Phi^{16} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\gamma) \\
 \Phi^7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\gamma)(-\xi-\eta-\gamma-2) & \Phi^{17} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(-\xi+\eta+\gamma-2) \\
 \Phi^8 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\gamma) & \Phi^{18} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma) \\
 \Phi^9 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\gamma^2) & \Phi^{19} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(-\xi+\eta+\gamma-2) \\
 \Phi^{10} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\gamma^2) & \Phi^{20} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\gamma)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Para las celdas semidiscontinuas las funciones de forma son:

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (\xi - \eta - \gamma - 2) & \Phi^{11} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^2 &= \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)(k-\gamma)}{(k+1)} & \Phi^{12} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^3 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (\xi + \eta - \gamma - 2) & \Phi^{13} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (k\xi - k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^4 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} & \Phi^{14} &= \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^5 &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (-\xi + \eta - \gamma - 2) & \Phi^{15} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (k\xi + k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^6 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)(k-\gamma)}{(k+1)} & \Phi^{16} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^7 &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (-\xi - \eta - \gamma - 2) & \Phi^{17} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (-k\xi + k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^8 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} & \Phi^{18} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^9 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} & \Phi^{19} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (-k\xi - k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^{10} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} & \Phi^{20} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\gamma)}{(k+1)} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

donde k es un parámetro de discontinuidad que varía entre $0 < k \leq 1$.

La discretización del volumen forma una red alrededor del frente de grieta, donde los volúmenes de integración coinciden con los distintos anillos de celdas. Esto se ilustra en la *Figura 4.6.4*, donde una de las caras del modelo ha sido removida para Mostar la grieta y los dominios de integración.

Saliva *et al* (2000) establecen especificar el valor de la función q independientemente de la malla. En este trabajo, los valores de q son interpolados utilizando las funciones de forma de las celdas. Consistente con la formulación isoparamétrica, los valores de q_i están dados por:

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{20} \Phi^\alpha(\xi, \eta, \gamma) Q_i^\alpha \quad (4.46)$$

donde $\Phi^\alpha(\xi, \eta, \gamma)$ son las funciones de forma definidas sobre cada volumen y Q_i^α son los valores nodales para el nodo n -ésimo, de la definición de q_k (ecuación (4.32)) $Q_i^\alpha = 0$ si el α -ésimo nodo está en S_I . Si la propagación de la grieta se restringe a ser en la dirección normal del frente, Q_2^α y Q_3^α se desvanecen idénticamente.

Siguiendo las manipulaciones estándar:

$$q_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{20} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} Q_i^\alpha \quad (4.47)$$

donde ξ_k , con $k = 1, 2, 3$ son las coordenadas locales en la celda isoparamétrica.

El modelo de integración gaussiana utilizado es el siguiente:

$$J = \sum_{cel.Vol} \sum_{p=1}^m \left\{ \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - W \delta_{ki} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sigma_{nm} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} q_k \right] \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p \quad (4.48)$$

donde m es el número de puntos de Gauss por celda, y w_p son los factores de peso. En forma análoga la integral de interacción M_I presenta el esquema siguiente:

$$M_I = \sum_{cel.Vol} \sum_{p=1}^m \left\{ \left[\left(\sigma_{ij}^{(1)} u_{j,k}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,k}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{ki} \right) q_{k,i} + \sigma_{nm}^{(2)} \alpha \theta_{,k}^{(1)} q_k \right] \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p \quad (4.49)$$

4.8 Cálculo de la Velocidad de Crecimiento de Grieta

Una vez definidos los valores del Factor de Intensidad de Esfuerzo en sus tres modos K_I , K_{II} y K_{III} es posible determinar el rango equivalente de dicho factor (ΔK_{eq}), a través de la siguiente ecuación propuesta por Gerstle (1985)

$$(\Delta K_{eq})^2 = (\Delta K_I + B |\Delta K_{III}|)^2 + 2(\Delta K_{II})^2 \quad (4.50)$$

donde B es un factor determinado empíricamente y en este trabajo se utilizó $B = 1$. Este

valor arroja resultados satisfactorios en la simulación de crecimiento de grietas por fatiga en tres dimensiones, según el trabajo realizado por Gerstle (1985).

Es importante señalar que este rango de factor de intensidad de esfuerzo equivalente es el análogo al señalado por la ecuación (2.39) en el proceso de fatiga.

El tamaño del incremento de extensión de la grieta (Δa) fue fijado como $0.1a$ y los resultados que se presentan en este trabajo corresponden a 7 incrementos de extensión de grieta.

La evaluación de la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga se obtuvo al calcular el rango del factor de intensidad de esfuerzo equivalente ΔK_{eq} , a través de la ecuación (4.50) para cada condición de temperatura y frecuencia. Para ello se utilizó el modelo de Kim y Wang (1994) descrito en la ecuación (2.42)

$$\frac{da}{dN} = f^{-nm} A \exp \left[-\frac{\Delta H_{th} - \gamma \log \Delta K_{eq}}{RT} \right]$$

y los resultados fueron comparados con los valores obtenidos al aplicar el modelo matemático presentado por Paris y Erdogan (1963) descrito en la ecuación (2.40)

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m$$

Los valores obtenidos por el modelo de Paris y Erdogan, corresponden a resultados experimentales del proceso de fatiga del CPVC a diferentes temperaturas (23, 50 y 70°C) y frecuencias de carga (0.1, 1 y 10Hz).

4.9 Cálculo de la Dirección de Propagación de Grieta

La grieta en cada paso de crecimiento adquiere una dirección de extensión, la cual, en este trabajo, fue calculada empleando el *Criterio del Esfuerzo Principal Máximo*. Este criterio, según cita Savelli (2006), postula que la fractura ocurre cuando uno de los tres esfuerzos principales alcanza o supera el esfuerzo de fractura, y la dirección que tomará la grieta es perpendicular al esfuerzo máximo principal. Este criterio fue propuesto por

Erdogan y Sih (1963) para dos dimensiones y extendido a tres dimensiones por Gerstle (1985) por consideración del factor de intensidad de esfuerzo equivalente K_{Ieq} el cual combina los modos I y III como:

$$K_{Ieq} = K_I + B|K_{III}|$$

donde de B es un factor empírico.

Considerando el sistema de coordenadas local en el frente de grieta como se ilustra en la *Figura 4.6.7* y tomando el sistema de coordenadas polar en el plano (n,b) perpendicular al frente de grieta, los esfuerzos $\sigma_{\varphi\varphi}$ y $\sigma_{r\varphi}$ puede ser escrita como:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[K_{Ieq} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \varphi \right] \quad (4.51a)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[K_{Ieq} \sin \varphi - K_{II} (3 \cos \varphi - 1) \right] \quad (4.51b)$$

Entonces, el esfuerzo $\sigma_{\varphi\varphi}$ será máximo en un ángulo φ para el cual $\sigma_{r\varphi} = 0$. A partir de la ecuación (4.51b) la siguiente expresión puede ser escrita:

$$K_{Ieq} \sin \varphi - K_{II} (3 \cos \varphi - 1) = 0 \quad (4.52)$$

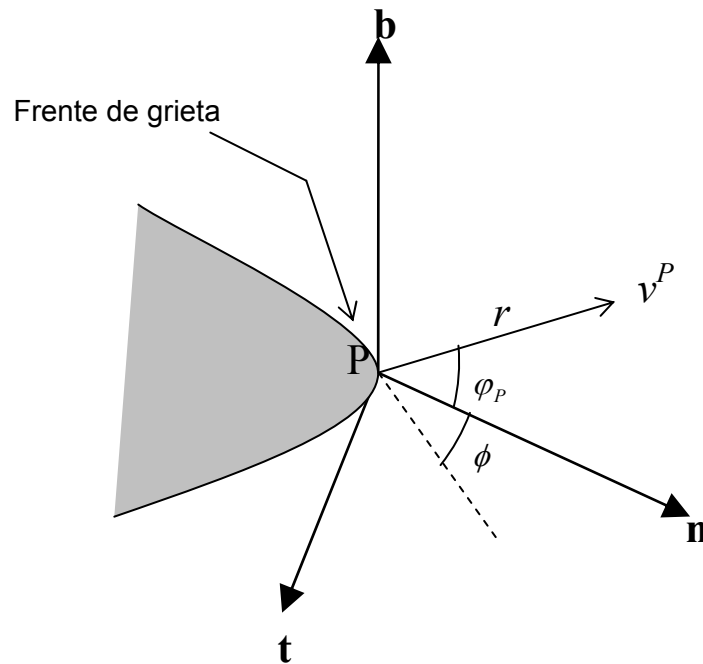


Figura 4.6.7: Vector propagación de grieta en el punto P.

Por lo tanto, el ángulo de propagación φ_P en el punto frontal P con vector unitario de propagación v^P (ver *Figura 4.6.7*) está definido por la siguiente ecuación:

$$\varphi_P = 2 \tan^{-1} \left[\frac{K_{Ieq}}{4K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_{Ieq}}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (4.53)$$

donde el signo en la ecuación (4.53) dependerá del signo de K_{III} , siendo positivo cuando K_{II} es negativo y viceversa. Desde este punto de vista del uso de esta ecuación, puede causar problemas en los cálculos numéricos si $K_{II} \approx 0$, sin embargo, la misma puede ser escrita de una manera más conveniente como:

$$\varphi_P = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-2K_{II}}{K_{Ieq} + \sqrt{(K_{Ieq})^2 + 8(K_{II})^2}} \right] \quad (4.54)$$

donde los signos de la ecuación (4.53) han sido tomados en consideración.

Capítulo 5

Ejemplos y Resultados

En este capítulo se muestra la aplicación del modelo matemático de crecimiento de grieta por fatiga, presentado por Kim y Wang (1994), el cual nos permite obtener analíticamente un valor de la velocidad de crecimiento de grieta cuando el componente es sometido a fatiga a una determinada temperatura y frecuencia de carga. Para el desarrollo de cada uno de los ejemplos, se ha empleado un análisis incremental de problemas tridimensionales de crecimiento de grietas en modo mixto en materiales isotrópicos y con comportamiento termoelástico, mediante el Método Dual de Elementos de Contorno implementando la integral J de dominio y la integral M_I para la determinación del factor de intensidad de esfuerzo, el cual es necesario para la aplicación del modelo. Para cada caso se comparan los resultados con los obtenidos aplicando el modelo tradicional de propagación de grieta propuesto por Paris y Erdogan (1963), siendo éste el más empleado por excelencia en los análisis de crecimiento de grieta por fatiga de materiales.

Para todos los ejemplos fueron consideradas las siguientes características:

- El material utilizado es el CPVC (policloruro de vinilo clorado), el cual es un material polimérico que presenta las siguientes propiedades mecánicas: módulo de elasticidad $E = 2482.11 \text{ MPa}$, esfuerzo a la fluencia $\sigma_y = 53.779 \text{ MPa}$, módulo de Poisson $\nu = 0.43$, coeficiente de expansión térmica $\alpha = 3.4 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ y conductividad térmica $\lambda = 0.95 \text{ W}^\circ\text{C}\cdot\text{m}$. En ningún caso se considera la influencia de la temperatura en la variación de estos parámetros.
- El tamaño del incremento de extensión de la grieta (Δa) fue fijado como $0.1a$ y los resultados que se presentan en este trabajo corresponden a 7 incrementos de extensión de grieta.
- Los parámetros C y m del modelo de Paris y Erdogan (ecuación (2.40)) fueron obtenidos experimentalmente para el CPVC a partir del ajuste de las curvas de fatiga

($\text{Log } da/dN$ vs. $\text{Log } \Delta K$) a temperaturas de 23, 50 y 70°C y frecuencias de carga 0.1, 1 y 10 Hz. Estos resultados se presentan en el trabajo realizado por Saghir *et al.* (2005), los cuales se muestran a continuación en la *Tabla 5.1*.

Tabla 5.1: Constantes m y C del modelo de Paris para el CPVC a diferentes frecuencias y temperaturas

Temperatura (°C)	Frecuencia (Hz)	Exponente m	Parámetro C
23	0.1	2	1.00×10^{-6}
	1	2.3979	9.00×10^{-7}
	10	2.292	8.00×10^{-7}
50	0.1	2.5702	6.00×10^{-6}
	1	2.465	2.00×10^{-6}
	10	2.2665	1.65×10^{-6}
70	0.1	2.8074	1.00×10^{-5}
	1	2.4022	5.00×10^{-6}
	10	2.0205	3.82×10^{-6}

- Los parámetros nm , γ , ΔH_{th} y A del modelo de Kim y Wang (ecuación (2.42)) fueron obtenidos para el CPVC por Saghir *et al.* (2005), dichos valores son: $nm = 0.2027$, $\gamma = 12.7$, $\Delta H_{th} = 33300 \text{ J/mol}$ y $A = 6.976$. Así mismo, la constante de energía de activación aparente ΔH_{th} se considera independiente del rango del factor de intensidad de esfuerzo ΔK .
- Se considera que el proceso de deformación de la pieza a la mayor temperatura (70°C) no afecta las propiedades del material debido a que esta última temperatura está muy por debajo de la temperatura de transición vítrea del material, en este caso, $T_g \cong 135^\circ\text{C}$.
- En la aplicación del método Dual de los Elementos de Contorno para la determinación de los factores de intensidad de esfuerzo K , se considera que las ecuaciones integrales obedecen al principio de la *mecánica del continuo*, la cual

establece que el análisis realizado empleando un modelo matemático, como una aproximación válida en la mayoría de situaciones macroscópicas. Ocurre que la microestructura asociada a la naturaleza atómica de la materia puede ser ignorada, es por ello que tales ecuaciones integrales no incluyen términos o parámetros que representen la estructura molecular del material (Brebbia y Domínguez, 1992).

5.1 Probeta con grieta lateral

Este primer ejemplo corresponde a una probeta rectangular que se modela en condiciones de esfuerzo plano cuya longitud de grieta inicial es $a_i = 10 \text{ mm}$, el ancho de la probeta es $W = 20 \text{ mm}$, altura $h = 120 \text{ mm}$ y espesor $t = 15 \text{ mm}$. La grieta se encuentra en $h = 60 \text{ mm}$. El modelo discretizado se muestra en la *Figura 5.1.1* y está compuesto inicialmente por 1127 nodos y 228 elementos de contorno, de los cuales 560 nodos y 70 elementos de contorno pertenecen a las superficies de la grieta.

Para el cálculo de J se construyeron 4 anillos de celdas con radios que varían entre 20 y 75% de la longitud de la grieta, compuestos por 216 celdas y 1278 nodos de celda.

El proceso de simulación de crecimiento de grieta fue generado por un ciclo de carga de amplitud constante con una relación $R (= \sigma_{\min}/\sigma_{\max})$ de 0.20, un rango de esfuerzo $\Delta\sigma (= \sigma_{\max} - \sigma_{\min})$ de 13.3 MPa. Las temperaturas θ del medio isotérmico fueron 23, 50 y 70°C y las frecuencias de carga 0.1, 1, 10 Hz.

La probeta es sometida a fatiga por tracción uniforme en la dirección perpendicular a la grieta.

Los factores de intensidad de esfuerzo K_I , K_{II} y K_{III} obtenidos a través del método dual de los elementos de contorno, fueron normalizados utilizando la siguiente expresión:

$$K_i^* = \frac{K_i}{\alpha E \theta \sqrt{W}} \quad \text{con } i = I, II \text{ y } III \quad (5.1)$$

donde α , E , θ y W son el coeficiente de expansión térmica, el módulo de elasticidad, la temperatura y el ancho de la probeta, respectivamente.

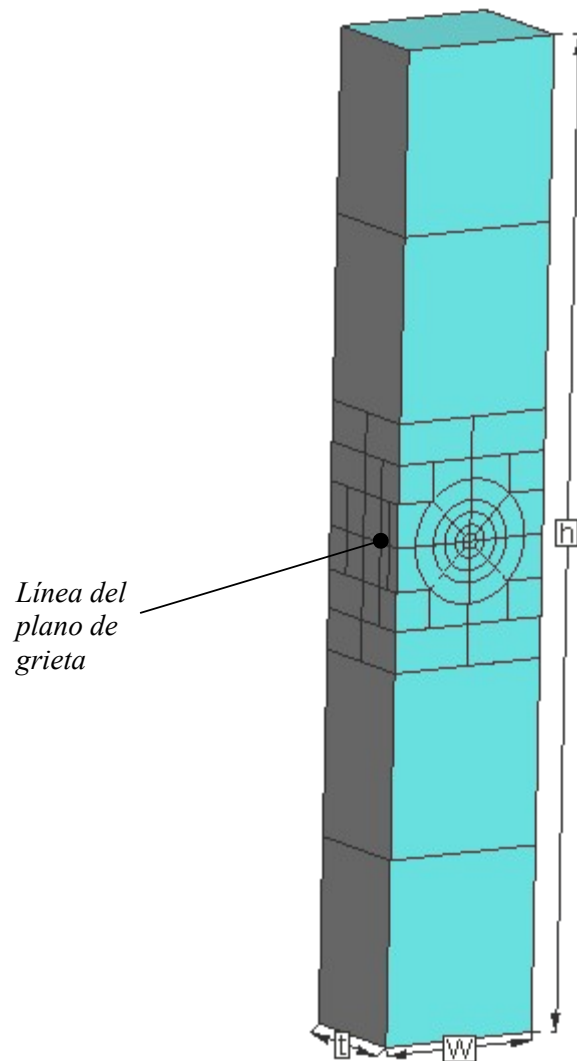


Figura 5.1.1: Probeta mallada con grieta lateral.

Con este primer ejemplo, se pretende validar el algoritmo propuesto y los resultados obtenidos computacionalmente, a través del Método Dual de los Elementos de Contorno y el modelo matemático propuesto por Kim y Wang, realizando una comparación de éstos últimos con los valores de referencia provenientes del trabajo experimental realizado por Saghir et al. (2005), quienes también analizaron el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia de carga en el proceso de fatiga del CPVC a las mismas condiciones de ensayo empleadas en este trabajo.

5.1.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Para esta primera geometría, el efecto de la temperatura del medio ambiente sobre la velocidad de extensión de la grieta durante el proceso de fatiga del CPVC, se puede observar claramente en la *Figura 5.1.2* donde se grafican los datos de da/dN vs. ΔK en escala logarítmica a diferentes temperaturas ajustados por el modelo tradicional de Paris y Erdogan (ecuación 2.40) para una frecuencia de carga fija de 1 Hz, donde los valores de ΔK y da/dN corresponden a los obtenidos computacionalmente.

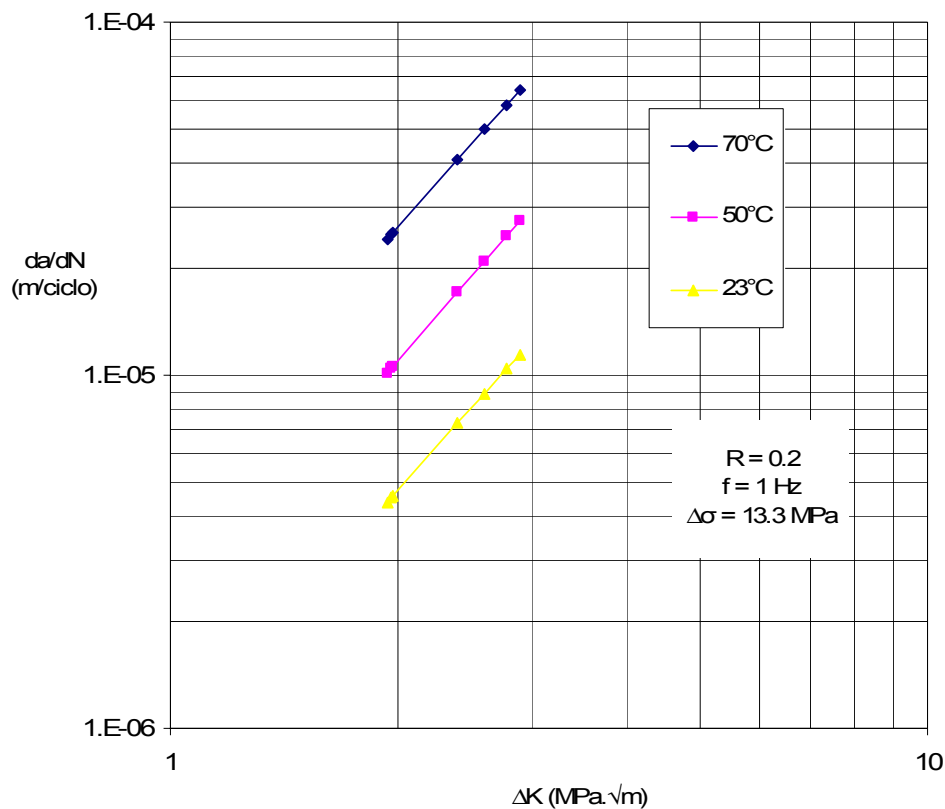


Figura 5.1.2: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral.

En esta gráfica, se observa que la velocidad de crecimiento de grieta aumenta con la temperatura a un valor fijo de ΔK , es decir, que la resistencia del material al crecimiento de grieta disminuye al aumentar la temperatura del medio, lo cual concuerda con lo obtenido en los trabajos realizados por Kim y Mai (1993), Irfan-ul-Haq y Merah (2003) y Parsons *et al.* (2002).

El modelo matemático propuesto por los investigadores Kim y Wang (ec. 2.42) basado en la ecuación de Arrhenius, evalúa directamente el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga de un material polimérico al incluir, en la misma ecuación, las variables temperatura (T) y frecuencia de carga (f), así como también una serie de constantes propias del material. Este modelo matemático principalmente se diferencia del modelo de Paris por no contener las constantes C y m , las cuales cambian con la temperatura y la frecuencia de carga y cuya determinación es necesaria para emplear el modelo de Paris. Sin embargo, el modelo de Kim presenta una alternativa para determinar analíticamente dichas constantes al establecer una equivalencia entre un modelo y otro a través de las ecuaciones 2.43 y 2.44.

Con el fin de validar los resultados de la simulación computacional obtenidos para este primer ejemplo, empleando el modelo de Kim y Wang bajo ciertas condiciones de temperatura y frecuencia de carga fija, a continuación en las *Tablas 5.1.1* a la *5.1.3* se comparan dichos resultados con valores de referencia provenientes del trabajo experimental realizado por Saghir *et al.* (2005). Dichos valores se ajustan al modelo tradicional de Paris (modelo de referencia). Los resultados expresados en las tablas corresponden al logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta obtenido para cada temperatura a una frecuencia fija de 1 Hz.

Tabla 5.1.1: Valores del Log (da/dN) a T = 23°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.32624219	-5.03514587	5.465
2	-5.22409180	-5.03513519	3.617
3	-5.14192835	-5.03513080	2.077
4	-5.07318802	-5.03493610	0.754
5	-5.01409134	-5.03485786	-0.414
6	-4.96226078	-5.03479317	-1.462
7	-4.91610276	-5.03475437	-2.414

Tabla 5.1.2: Valores del Log (da/dN) a T = 50°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.95932063	-4.54372949	8.380
2	-4.85431179	-4.54371971	6.398
3	-4.76984918	-4.54371569	4.741
4	-4.69918530	-4.54353726	3.312
5	-4.63843492	-4.54346556	2.047
6	-4.58515400	-4.54340627	0.910
7	-4.53770435	-4.54337072	-0.125

Tabla 5.1.3: Valores del Log (da/dN) a T = 70°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.58022443	-4.22959657	7.655
2	-4.47789086	-4.22958736	5.545
3	-4.39558008	-4.22958357	3.776
4	-4.32671648	-4.22941555	2.249
5	-4.26751382	-4.22934803	0.894
6	-4.21559032	-4.22929220	-0.325
7	-4.16934953	-4.22925872	-1.437

Como se puede ver en las tablas anteriores, el modelo propuesto por Kim en este caso da valores aproximados a los valores de referencia. A la temperatura de 23°C se logra una mejor aproximación a los valores reales ya que el error relativo promedio es de 1.09%, mientras que a las temperaturas de 50 y 70°C los errores relativos promedios son 3.67 y 2.62%, respectivamente. La *Figura 5.1.3* muestra un gráfico comparativo que ilustra lo anterior.

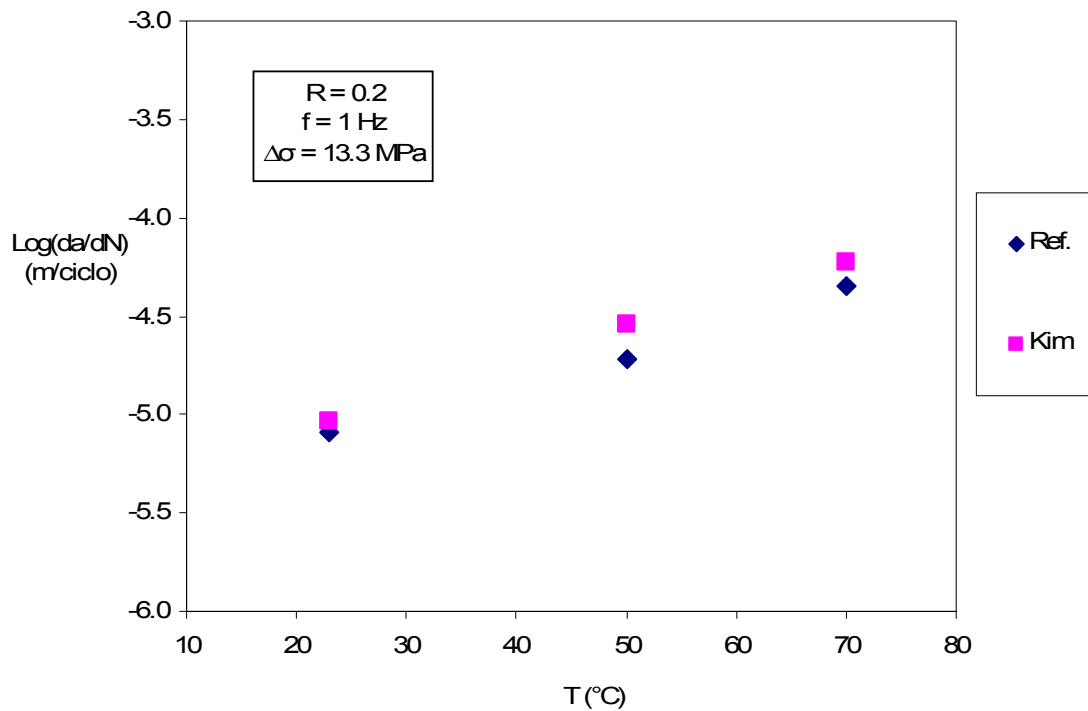


Figura 5.1.3: Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. T a la frecuencia de carga de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la probeta con grieta lateral.

La malla deformada como resultado de la simulación en cada caso, se puede observar en el Anexo B1. Allí se observa que la deformación de la probeta y la apertura de grieta son más pronunciadas en el análisis a 70°C.

5.1.2 Efecto de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Para ilustrar este efecto, se tomaron los datos de velocidad de crecimiento de grieta obtenidos empleando el modelo de Paris y los valores de ΔK computacional. En la *Figura 5.1.4* se grafican los datos de da/dN vs. ΔK en escala logarítmica a diferentes frecuencias para una temperatura fija de 50°C y se aprecia claramente que al aumentar la frecuencia de la carga durante el proceso de fatiga a una temperatura fija, la velocidad de crecimiento de grieta disminuye, lo cual concuerda con lo reportado por Merah *et al.* (2005).

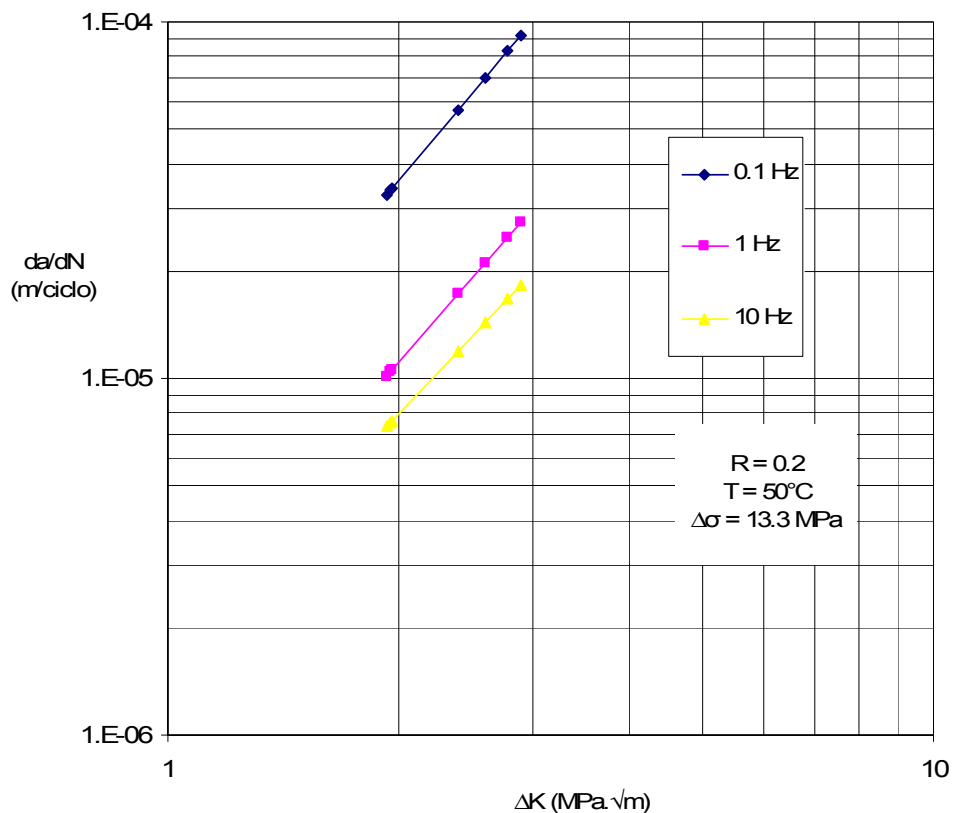


Figura 5.1.4: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral.

Con la finalidad de validar los resultados de la simulación computacional empleando el modelo de Kim y Wang para evaluar el efecto del cambio de frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta en la fatiga del CPVC a una temperatura fija, se muestra a continuación en las *Tablas 5.1.4* a la *5.1.6*, una comparación entre los valores computacionales de la velocidad de crecimiento de grieta obtenidos con el modelo de Kim y los valores de referencia ajustados al modelo de Paris.

Tabla 5.1.4: Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.45063300	-4.34102949	2.463
2	-4.34114265	-4.34101971	0.003
3	-4.25307539	-4.34101569	-2.068
4	-4.17939575	-4.34083726	-3.863
5	-4.11605270	-4.34076556	-5.459
6	-4.06049788	-4.34070627	-6.901
7	-4.01102320	-4.34067072	-8.219

Tabla 5.1.5: Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.95932063	-4.54372949	8.380
2	-4.85431179	-4.54371971	6.398
3	-4.76984918	-4.54371569	4.741
4	-4.69918530	-4.54353726	3.312
5	-4.63843492	-4.54346556	2.047
6	-4.58515400	-4.54340627	0.910
7	-4.53770435	-4.54337072	-0.125

Tabla 5.1.6: Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.0000000	0.0000000	0.000
1	-5.10242871	-4.74642949	6.977
2	-5.00587596	-4.74641971	5.183
3	-4.92821490	-4.74641569	3.689
4	-4.86324140	-4.74623726	2.406
5	-4.80738309	-4.74616556	1.273
6	-4.75839274	-4.74610627	0.258
7	-4.71476409	-4.74607072	-0.664

Estos resultados reflejan que los valores de la velocidad de crecimiento de grieta calculados con el modelo de Kim y Wang se aproximan más a los valores reales ajustados al modelo de Paris cuando la frecuencia de carga es de 10 Hz, ya que el error relativo promedio es de 2.73% mientras que a 0.1 y 1 Hz es de -3.44 y 3.67%, respectivamente.

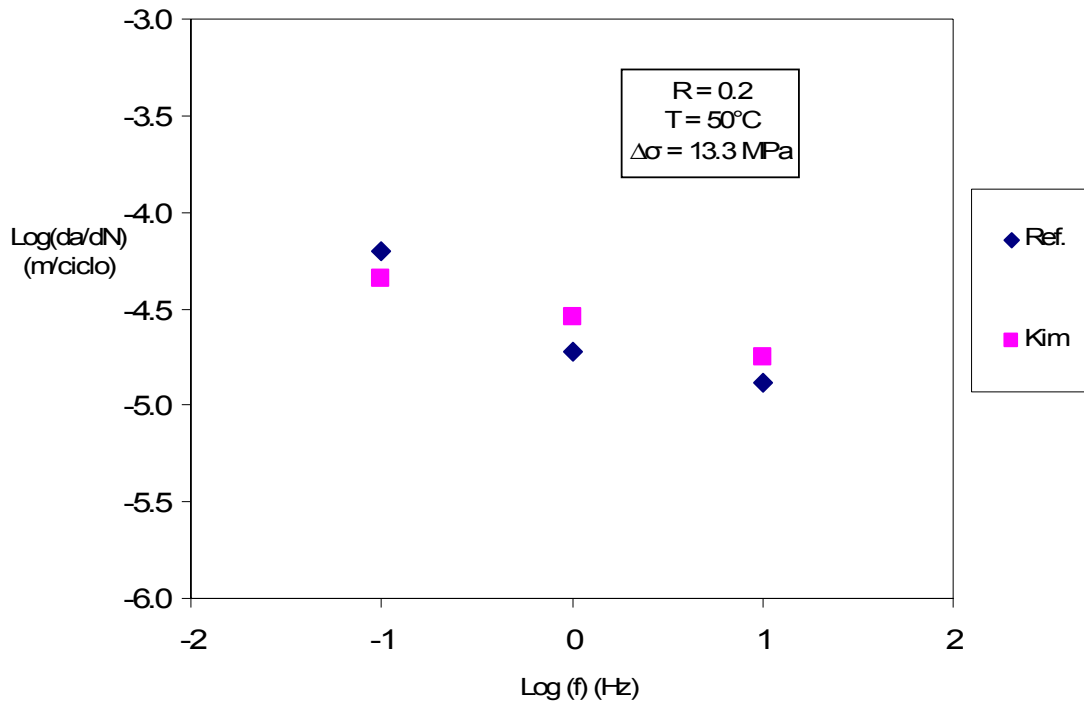


Figura 5.1.5: Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. $\text{Log}(f)$ a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la probeta con grieta lateral.

En la *Figura 5.1.5* se puede apreciar de manera ilustrativa la comparación entre la velocidad de crecimiento de grieta promedio para cada frecuencia, obtenida computacionalmente con el modelo de Kim y la de referencia correspondiente al modelo de Paris. La velocidad de propagación de grieta disminuye con el aumento de la frecuencia de carga y se nota que la aproximación entre un valor y otro es bastante apreciable, por lo cual se pudiera afirmar, para este primer ejemplo, que el modelo de Kim permite determinar con un buen grado de aproximación la velocidad de propagación de grieta por fatiga cuando varía la frecuencia de la carga aplicada a una temperatura fija.

Un efecto importante que se puede también deducir de la data obtenida a través de la simulación y aplicación del modelo de Kim y Wang, es que la velocidad de crecimiento de grieta es más sensible a los cambios de frecuencia a altas temperaturas que a bajas temperaturas. Este efecto concuerda con lo obtenido en el trabajo de Saghir *et al.* (2005) y se muestra en la gráfica de la *Figura 5.1.6*.

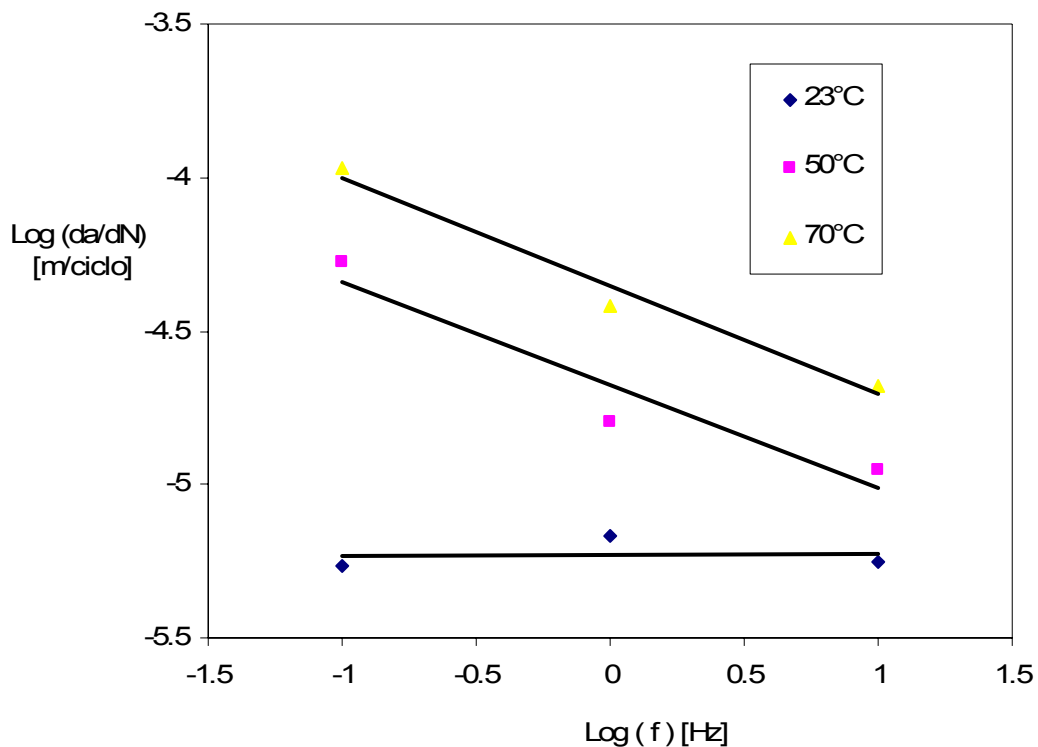


Figura 5.1.6: Logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta versus el logaritmo de la frecuencia a diferentes temperaturas.

Con este primer ejemplo se simuló computacionalmente el efecto que tiene el cambio de temperatura y de frecuencia sobre la velocidad de crecimiento de grieta en el proceso de fatiga del CPVC. Al mismo tiempo se validó, para este caso, el modelo matemático propuesto por Kim y Wang a través de un análisis comparativo con una data experimental ajustada al modelo de Paris y Erdogan, pudiéndose apreciar con este ejemplo que el algoritmo computacional propuesto en este trabajo y el modelo matemático de propagación de grieta propuesto por Kim y Wang, permiten simular el crecimiento de una fisura por fatiga al obtener de manera analítica valores de la velocidad de crecimiento de grieta para el CPVC con un buen grado de aproximación a los valores experimentales, sobre todo si el rango de temperaturas es de 23 a 70°C y el rango de frecuencia de carga de 0.1 a 10 Hz. En tal sentido, también se demostró, con este primer ejemplo, la eficacia del método dual de los elementos de contorno como herramienta numérica para obtener los parámetros fractomecánicos necesarios para la aplicación del modelo matemático propuesto por Kim y Wang.

A continuación se ensayan otros ejemplos, los cuales permitirán validar la aplicación del modelo de Kim y Wang a geometrías diferentes a la analizada en este primer ejemplo.

5.2 Placa rectangular con orificio

Este segundo ejemplo se trata de una pequeña placa gruesa rectangular en cuyo centro posee un agujero de forma cuadrada, el cual contiene una grieta recta en su borde derecho con $a_i = 10 \text{ mm}$, tal y como se muestra a continuación en la *Figura 5.2.1*. Donde $h_1 = h_3 = 45 \text{ mm}$, $h_2 = 30 \text{ mm}$, $w_1 = w_2 = 20 \text{ mm}$, $w_3 = 30 \text{ mm}$ y $t = 15 \text{ mm}$. El modelo discretizado está compuesto inicialmente por 1206 nodos y 258 elementos de contorno, de los cuales 560 nodos y 70 elementos de contorno pertenecen a las superficies de la grieta.

El proceso de simulación de crecimiento de grieta fue generado por un ciclo de carga de amplitud constante con una relación $R = 0.70$, un rango de esfuerzo $\Delta\sigma = 15 \text{ MPa}$. Las temperaturas θ del medio isotérmico fueron 23, 50 y 70°C y las frecuencias 0.1, 1, 10Hz.

Para el cálculo de J se construyeron 4 anillos de celdas con radios que varían entre 20 y 75% de la longitud de la grieta, compuestos por 216 celdas y 1278 nodos de celda.

La probeta es sometida a fatiga por tracción uniforme en la dirección perpendicular al plano de la grieta.

Los factores de intensidad de esfuerzo K_I , K_{II} y K_{III} obtenidos a través del método dual de los elementos de contorno, fueron normalizados utilizando la expresión (5.1).

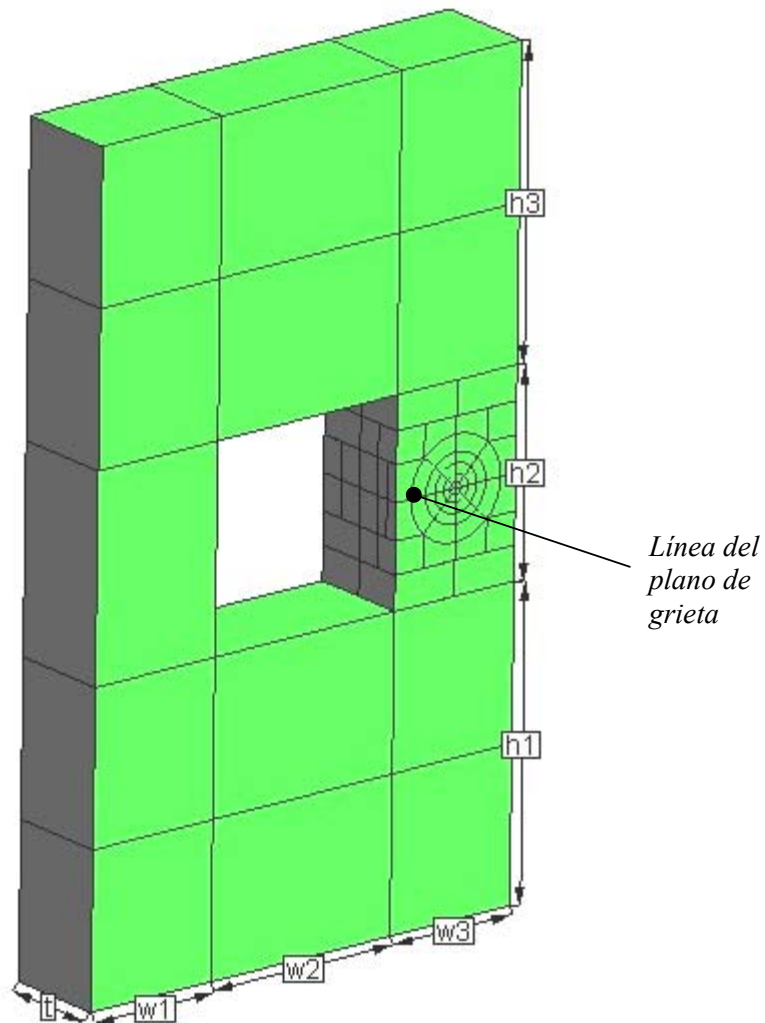


Figura 5.2.1: Malla de la Placa con agujero cuadrado en el centro.

5.2.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Para esta geometría, el efecto de la temperatura del medio ambiente sobre la velocidad de extensión de la grieta durante el proceso de fatiga, se puede observar claramente en la *Figura 5.2.2* donde se grafican los resultados computacionales de da/dN vs. ΔK en escala logarítmica a diferentes temperaturas ajustados por la Ley de Paris para una frecuencia fija de 1 Hz.

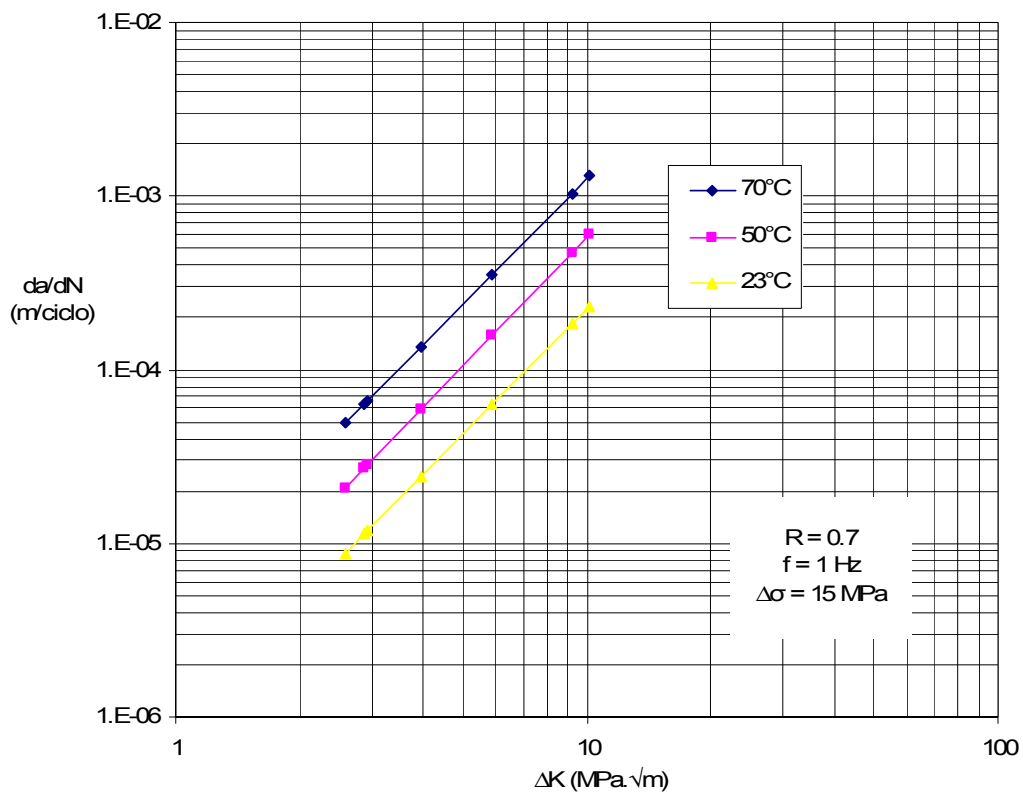


Figura 5.2.2: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la placa rectangular con orificio.

En esta gráfica, se observa que el efecto de la temperatura sobre la velocidad de crecimiento de grieta descrito en el ejemplo anterior, se cumple también para esta geometría.

A partir de los resultados tabulados en el Anexo A2, se muestra a continuación en las *Tablas 5.2.1 a 5.2.3*, los valores de $\text{Log}(da/dN)$ aplicando el modelo de crecimiento de grieta propuesto por Kim y Wang a esta nueva geometría, dichos resultados son comparados con los obtenidos empleando el modelo tradicional de Paris y Erdogan.

Tabla 5.2.1: Valores del $\text{Log}(da/dN)$ a $T = 23^\circ\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	$\text{Log}(da/dN)$ [m/ciclo]	$\text{Log}(da/dN)$ [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.05593705	-5.03486229	0.417
2	-4.94622871	-5.03475970	-1.790
3	-4.92302060	-5.03473800	-2.269
4	-4.61390174	-5.03444894	-9.115
5	-4.20315222	-5.03406484	-19.769
6	-3.73563362	-5.03362766	-34.746
7	-3.63375992	-5.03353239	-38.521

Tabla 5.2.2: Valores del $\text{Log}(da/dN)$ a $T = 50^\circ\text{C}$ y $f = 1$ Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	$\text{Log}(da/dN)$ [m/ciclo]	$\text{Log}(da/dN)$ [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.68145160	-4.54346962	2.947
2	-4.56867331	-4.54337560	0.554
3	-4.54481577	-4.54335571	0.032
4	-4.22704690	-4.54309082	-7.477
5	-3.80480344	-4.54273883	-19.395
6	-3.32420235	-4.54233819	-36.644
7	-3.21947794	-4.54225089	-41.087

Tabla 5.2.3: Valores del Log (da/dN) a T = 70°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.30943457	-4.22935185	1.858
2	-4.19952950	-4.22926332	-0.708
3	-4.17627977	-4.22924459	-1.268
4	-3.86660659	-4.22899514	-9.372
5	-3.45512050	-4.22866367	-22.388
6	-2.98676352	-4.22828640	-41.567
7	-2.88470714	-4.22820419	-46.573

De acuerdo a las tablas anteriores, los errores relativos resultantes de la comparación entre el logaritmo de las velocidades de crecimiento obtenidas con el modelo de Paris y con el modelo de Kim, tienden a aumentar con el incremento de la longitud de la grieta.

La *Figura 5.2.4* muestra un gráfico comparativo entre los valores promedios del *Log (da/dN)* para cada temperatura empleando ambos modelos. En principio podemos apreciar que la resistencia al crecimiento de la grieta disminuye al aumentar la temperatura aplicando ambos modelos matemáticos a esta geometría. Sin embargo, existe una diferencia entre los valores de la velocidad de crecimiento de grieta promedio obtenidos con el modelo de Kim y los obtenidos con el modelo tradicional de Paris. Los errores porcentuales en la gráfica señalan que la diferencia es más o menos constante para cada temperatura, observándose una mayor diferencia entre los resultados obtenidos con cada modelo a la temperatura de 70°C, ya que el error porcentual resultante es de -25.56%.

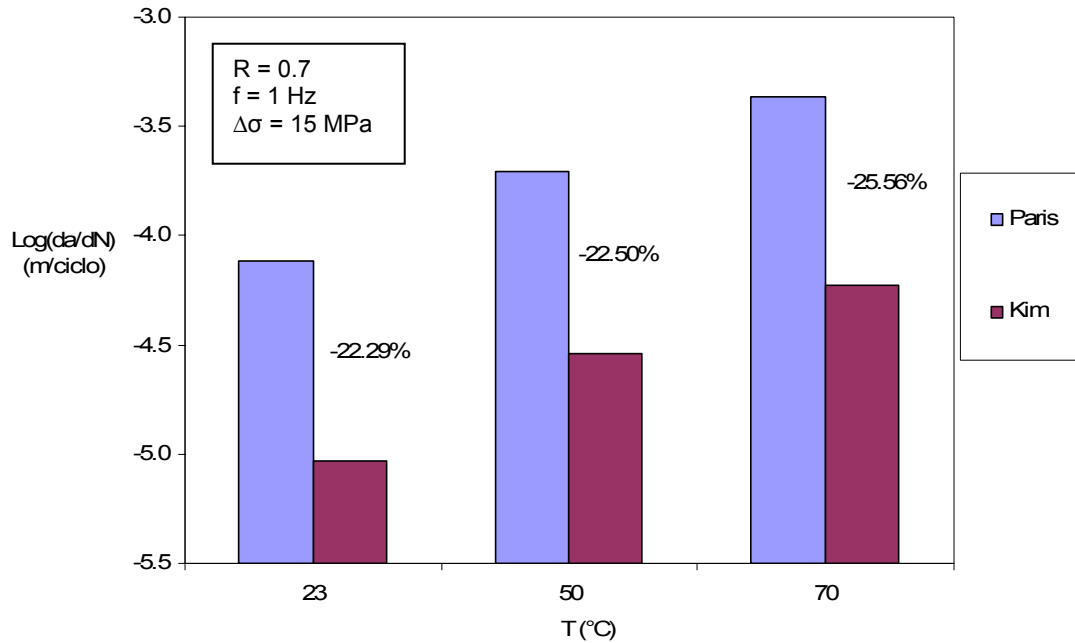


Figura 5.2.3: Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. T a la frecuencia de carga de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la placa con agujero central.

En el Anexo B2 se puede observar la malla deformada para esta geometría producto de las condiciones de contorno impuestas para la simulación. Se puede apreciar que la apertura de la grieta y la deformación de la pieza por fatiga se hace más notoria cuando la temperatura del medio es de 70°C.

5.2.2 Efecto de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Para ilustrar este efecto, se tomaron los valores de la velocidad de crecimiento de grieta obtenidos computacionalmente, con ambos modelos, al variar la frecuencia de carga a una temperatura fija, parte de dichos resultados se presentan a continuación en la *Figura 5.2.5* donde se grafican los datos de da/dN vs. ΔK en escala logarítmica a diferentes frecuencias ajustados por la Ley de Paris para una temperatura fija de 50°C.

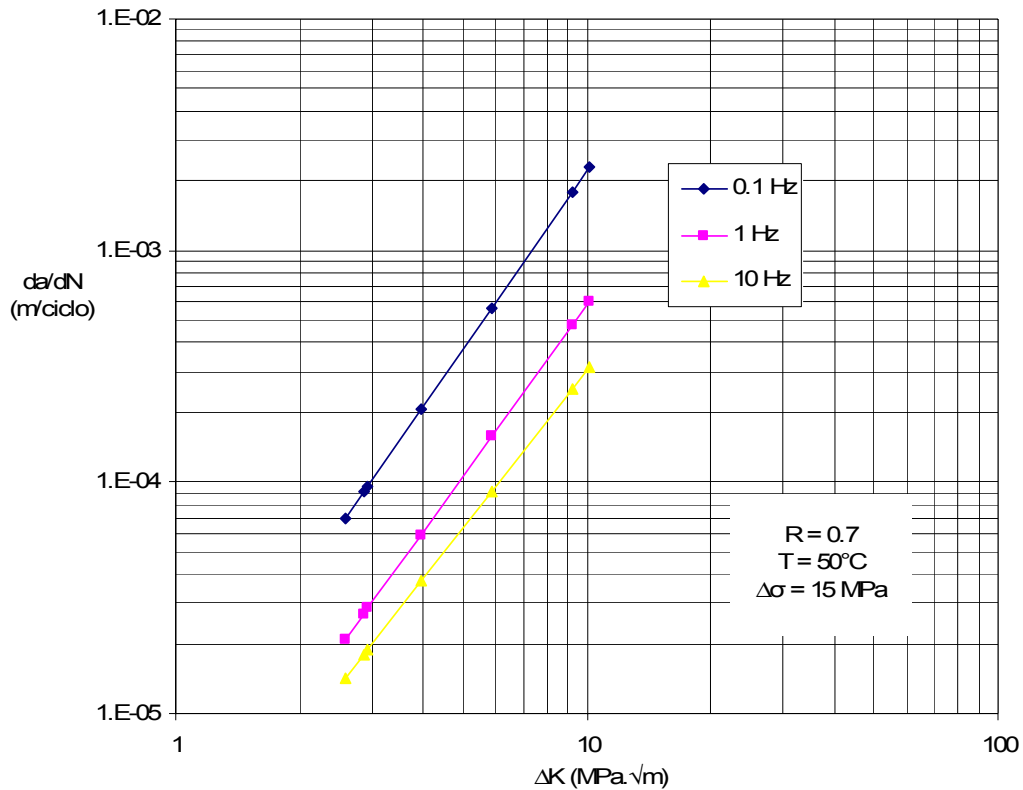


Figura 5.2.4: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la placa rectangular con orificio.

Tal y como se puede apreciar en la gráfica anterior, también con este ejemplo se cumple que la resistencia al crecimiento de la grieta disminuye con la frecuencia.

El análisis comparativo se muestra a continuación a través de las *Tablas 5.2.4 a 5.2.6*, en donde se muestran el $\text{Log}(da/dN)$ a partir de los resultados obtenidos para cada modelo variando la frecuencia de la carga a una temperatura fija de 50°C.

Tabla 5.2.4: Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.1609052	-4.3407696	-4.323
2	-4.0433138	-4.3406756	-7.354
3	-4.0184381	-4.3406557	-8.018
4	-3.6871077	-4.3403908	-17.718
5	-3.2468439	-4.3400388	-33.669
6	-2.7457320	-4.3396382	-58.050
7	-2.6365382	-4.3395509	-64.593

Tabla 5.2.5: Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.68145160	-4.54346962	2.947
2	-4.56867331	-4.54337560	0.554
3	-4.54481577	-4.54335571	0.032
4	-4.22704690	-4.54309082	-7.477
5	-3.80480344	-4.54273883	-19.395
6	-3.32420235	-4.54233819	-36.644
7	-3.21947794	-4.54225089	-41.087

Tabla 5.2.6: Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la placa rectangular con orificio.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-4.84693575	-4.74616962	2.079
2	-4.74323920	-4.74607560	-0.060
3	-4.72130284	-4.74605571	-0.524
4	-4.42912306	-4.74579082	-7.150
5	-4.04088177	-4.74543883	-17.436
6	-3.59898223	-4.74503819	-31.844
7	-3.50269100	-4.74495089	-35.466

Para este caso, donde se mide el efecto de los cambios de la frecuencia de carga en el proceso de fatiga del CPVC, vemos que el modelo de Kim y Wang predice valores de la velocidad de crecimiento de grieta con una buena aproximación a los obtenidos con el modelo de Paris entre el primer y el cuarto incremento de la longitud de la grieta, debido a los bajos errores porcentuales en comparación con los sucesivos incrementos donde el error tiende a incrementarse.

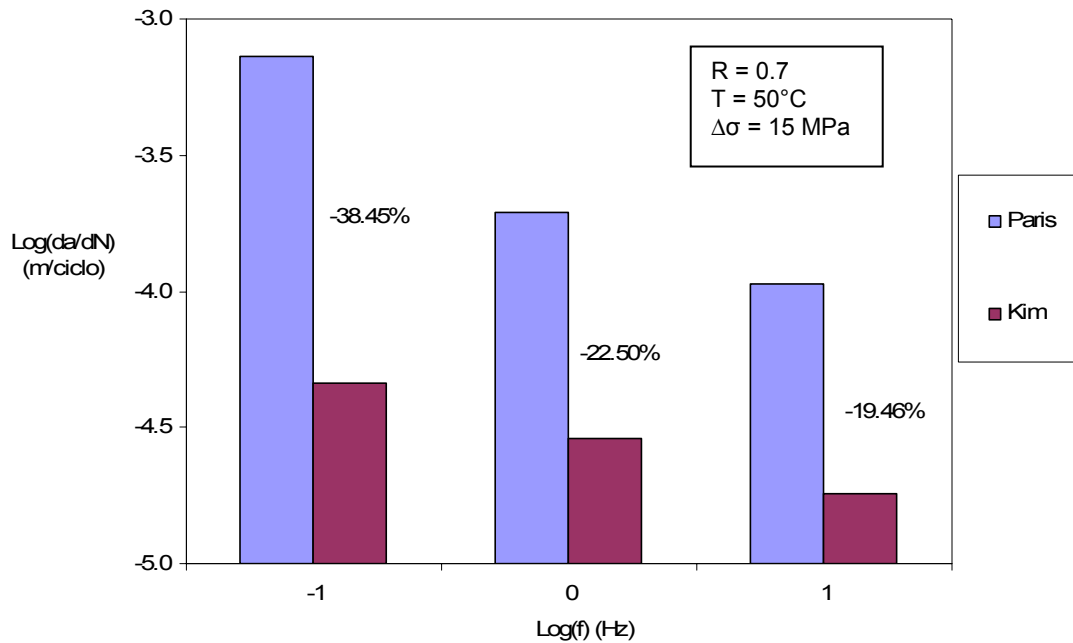


Figura 5.2.5: Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Log(f) a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso de la placa con agujero central.

En la *Figura 5.2.5* se aprecia nuevamente el efecto del cambio de la frecuencia de carga sobre la rapidez con la que una grieta se propaga por fatiga y vemos que ésta es mayor a bajas frecuencias de carga. Evaluando este efecto, la velocidad promedio de crecimiento obtenida en cada caso utilizando el modelo de Kim da valores menores a los obtenidos con el modelo de Paris, siendo a 10Hz (Log(f) = 1) donde se obtiene un menor error relativo en comparación con las frecuencias de 0.1 y 1 Hz.

5.3 Cuerpo cilíndrico con grieta circular interna

Este ejemplo se trata de una barra de sección circular con una grieta interna también de forma circular sometida a fatiga por cargas de tracción, como se observa en la *Figura 5.3.1*. El cilindro posee un radio $R = 100 \text{ mm}$ y altura $h = 600 \text{ mm}$. La grieta circular localizada en el eje de la barra se encuentra en el plano $z = h/2$ y tiene un radio inicial $r = 10 \text{ mm}$. La malla está compuesta por 1434 nodos y 224 elementos de contorno, de los cuales 152 elementos pertenecen a la grieta. Para el cálculo de la integral J se construyeron 4 caminos de integración compuestos por 4352 nodos y 832 celdas. En la *Figura 5.3.2* se muestra la discretización de una porción de 1/4 de la barra cilíndrica y en la *Figura 5.3.3* se hace un acercamiento a la zona de la grieta para mostrar su discretización y los caminos de integración en los alrededores de la punta de grieta.

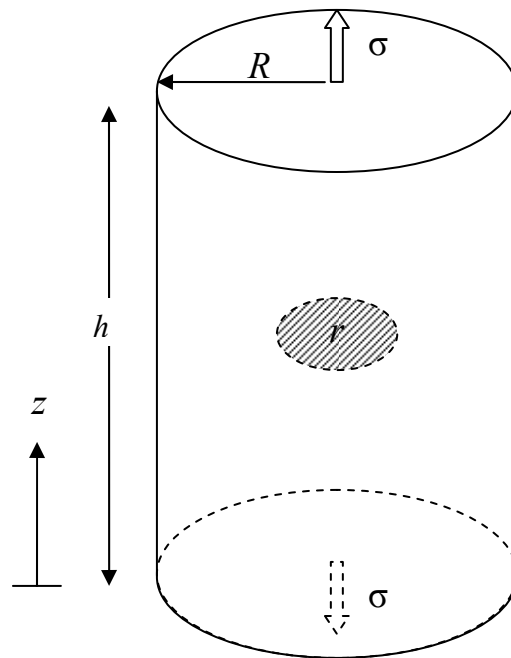


Figura 5.3.1: Grieta circular contenida en una barra cilíndrica.

El proceso de simulación de crecimiento de grieta fue generado por un ciclo de carga de amplitud constante con una relación $R = 0.66$, un rango de esfuerzo $\Delta\sigma = 16.32 \text{ MPa}$. Las temperaturas θ del medio isotérmico fueron 23, 50 y 70°C y las frecuencias 0.1, 1, 10 Hz.

La probeta es sometida a tracción uniforme en la dirección perpendicular al plano de la grieta.

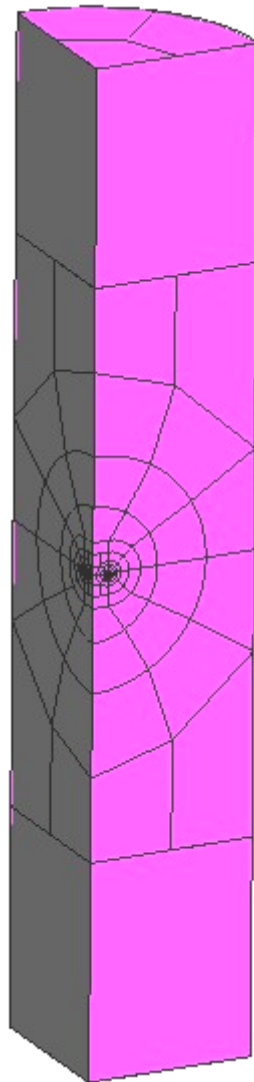


Figura 5.3.2: Discretización de una porción de la barra cilíndrica.

Los factores de intensidad de esfuerzo K_I , K_{II} y K_{III} obtenidos computacionalmente a través del método dual de los elementos de contorno, fueron normalizados utilizando la siguiente expresión:

$$K_i^* = \frac{K_i(1-\nu)}{(0.9418)\alpha E \theta \sqrt{r/\pi}} \quad \text{con } i = I, II \text{ y } III \quad (5.2)$$

donde α , E , θ , ν y r son el coeficiente de expansión térmica, el módulo de elasticidad, la temperatura, el módulo de Poisson y el radio de la grieta, respectivamente.

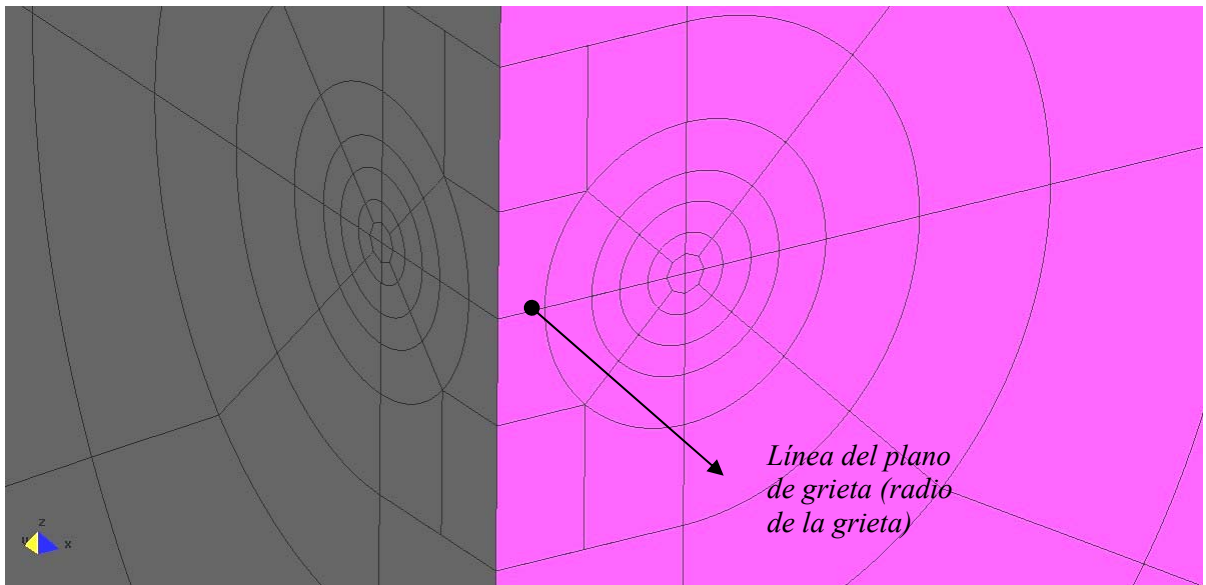


Figura 5.3.3: Discretización cerca de la grieta.

5.3.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

El efecto de la temperatura sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN) a la frecuencia de carga de 1 Hz en la fatiga de esta geometría cilíndrica, se ilustra en la *Figura 5.3.4* donde se grafican los datos de da/dN versus ΔK en escala logarítmica, resultados de la

simulación computacional y la aplicación del modelo de crecimiento de grieta de Paris y Erdogan. Al igual que en los ejemplos anteriores, es evidente que el aumento en la temperatura resulta en una disminución de la resistencia al crecimiento de grieta por fatiga del CPVC.

La velocidad de crecimiento de grieta por fatiga de esta geometría cilíndrica también se simuló computacionalmente empleando el modelo matemático propuesto por Kim y Wang, variando la temperatura y manteniendo el término de frecuencia fija en 1 Hz. Los resultados se comparan a continuación con los obtenidos empleando el modelo de Paris y Erdogan en las Tablas 5.3.1 a la 5.3.3.

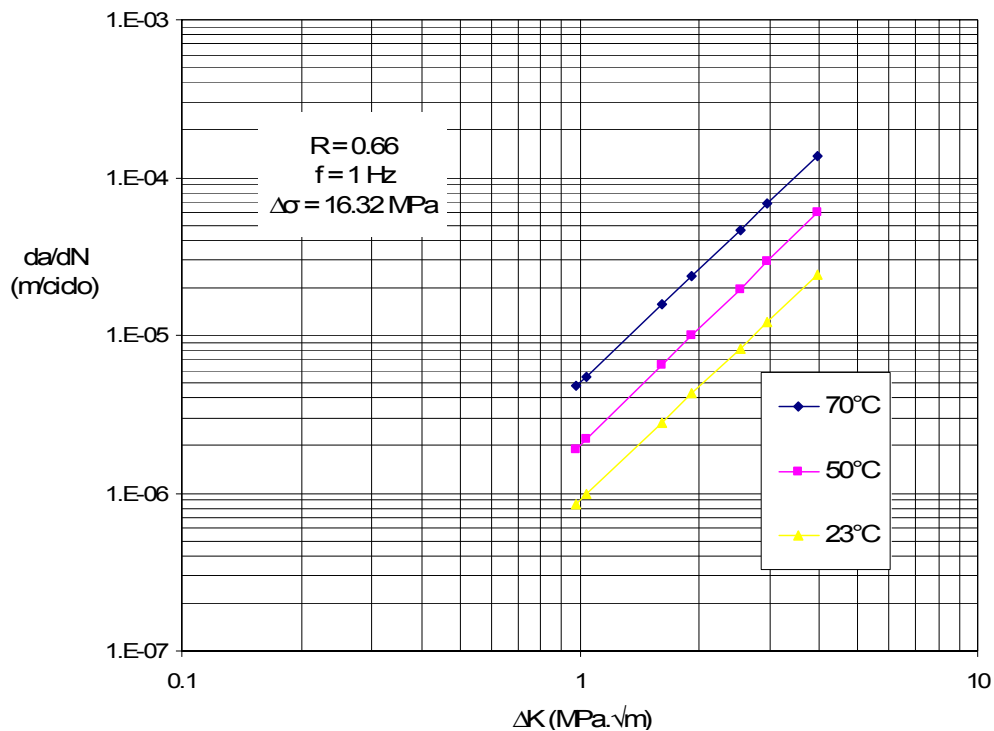


Figura 5.3.4: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan al cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Así mismo, en el Anexo B3 se puede apreciar la apertura de la grieta interna como resultado dicha simulación para cada temperatura de ensayo. En estas representaciones se puede apreciar una mayor deformación en la zona de la grieta cuando la temperatura es de $70^\circ C$.

Tabla 5.3.1: Valores del Log (da/dN) a T = 23°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-6.06764139	-5.03580835	17.006
2	-6.00347537	-5.03574834	16.119
3	-5.55147794	-5.03532568	9.298
4	-5.36892264	-5.03515497	6.217
5	-5.08028733	-5.03488506	0.894
6	-4.91333433	-5.03472894	-2.471
7	-4.61059135	-5.03444584	-9.193

Tabla 5.3.2: Valores del Log (da/dN) a T = 50°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.72146628	-4.54433659	20.574
2	-5.65550471	-4.54428161	19.649
3	-5.19085912	-4.54389427	12.464
4	-5.00319540	-4.54373783	9.183
5	-4.70648327	-4.54349048	3.463
6	-4.53485845	-4.54334741	-0.187
7	-4.22364387	-4.54308798	-7.563

Tabla 5.3.3: Valores del Log (da/dN) a T = 70°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.32295314	-4.23016828	20.530
2	-5.25867206	-4.23011649	19.559
3	-4.80586408	-4.22975174	11.988
4	-4.62298142	-4.22960442	8.509
5	-4.33382852	-4.22937150	2.410
6	-4.16657613	-4.22923677	-1.504
7	-3.86329026	-4.22899247	-9.466

Los resultados anteriores indican que los valores de da/dN obtenidos por Kim se aproximan a los obtenidos por modelo tradicional de Paris a medida que avanza la grieta, dicha tendencia se deduce al apreciar los valores del error relativo en cada tabla.

En la *Figura 5.3.5* se compara el logaritmo de da/dN promedio obtenido para cada temperatura y con cada uno de los modelos matemáticos, obteniéndose unos errores relativos promedios de 1.52, 4.02 y 3.12% para las temperaturas de 23, 50 y 70°C, respectivamente. En este caso, los valores promedio del logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta obtenidos con el modelo de Kim son mayores que los obtenidos con el modelo de Paris, el cual actúa como modelo de referencia. A 23°C se obtuvo una mejor aproximación entre ambos modelos de crecimiento de grieta, ya que el menor error relativo promedio (1.52%) se obtuvo a esta temperatura.

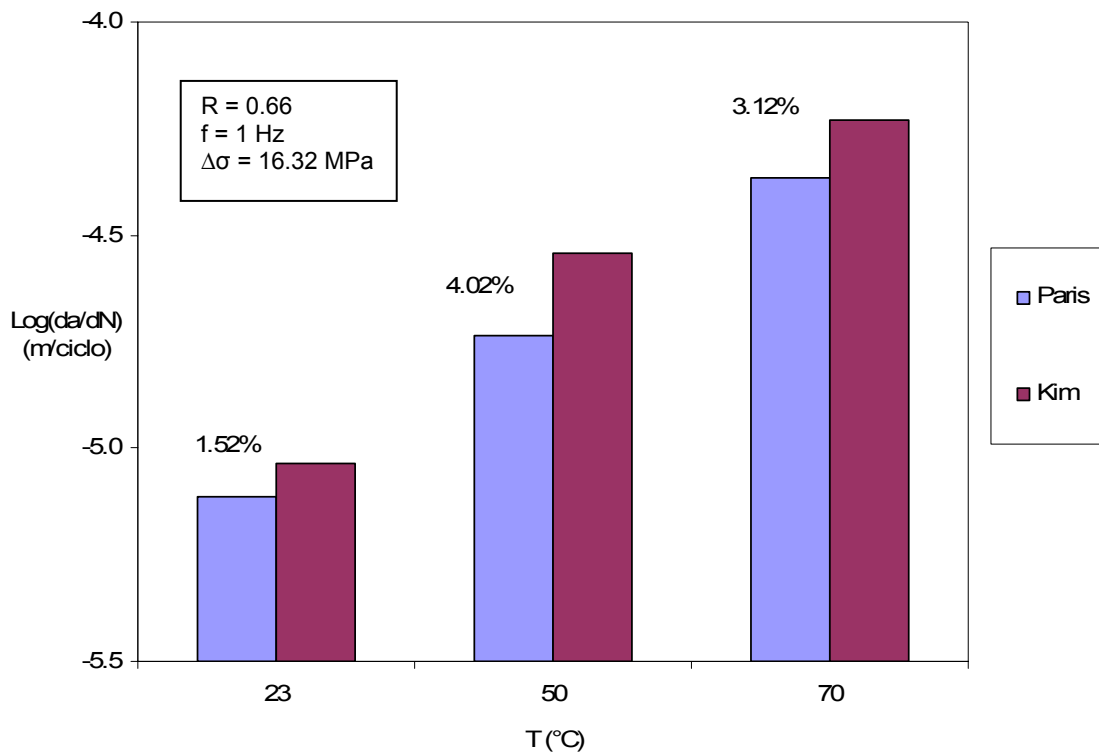


Figura 5.3.5: Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Temperatura (T) a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso del cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

La deformación de la malla originada por el proceso de fatiga sobre la probeta cuando la temperatura del medio es 23, 50 y 70°C, se muestra en el Anexo B3.

5.3.2 Efecto de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Para ilustrar este efecto de la frecuencia sobre la velocidad de crecimiento de grieta se tomaron los datos obtenidos a partir de la aplicación del algoritmo computacional y el modelo de crecimiento de Paris, a una temperatura fija de 50°C y variamos la frecuencia a 0.1, 1 y 10 Hz, dichos datos se muestran en el anexo A3 y la gráfica resultante se muestra a continuación en la *Figura 5.3.6*. En esta gráfica se evidencia el efecto de la frecuencia sobre la resistencia al crecimiento de la grieta, y tal como ha ocurrido en los anteriores ejemplos, aquí también se cumple que la grieta crece de manera estable y con mayor rapidez cuando la frecuencia de aplicación de la carga es baja.

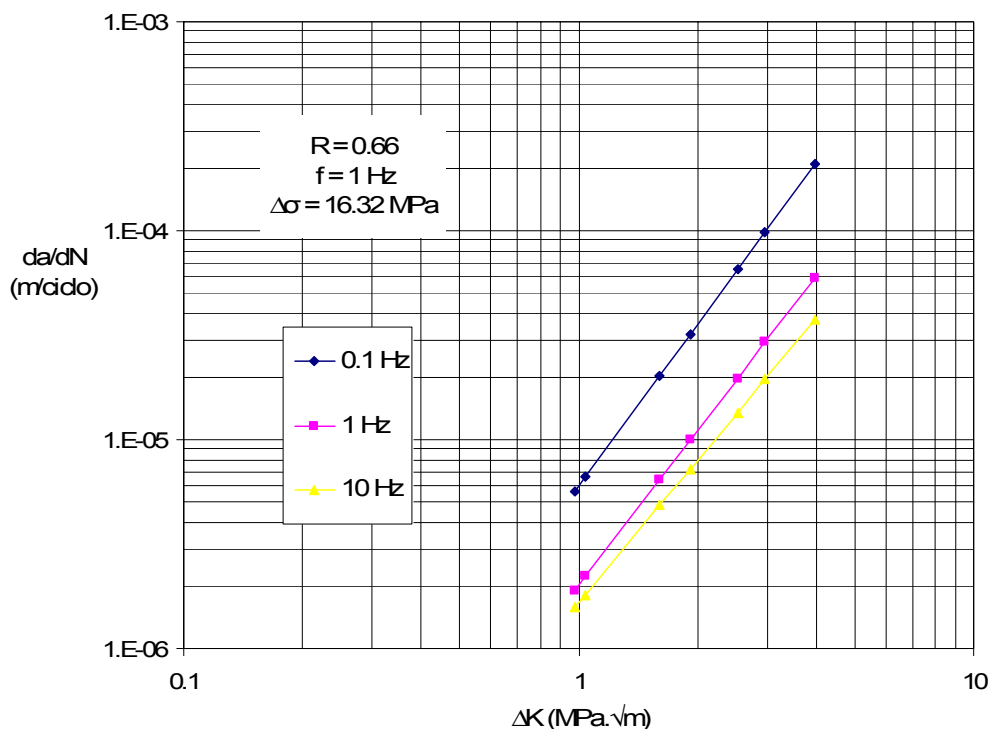


Figura 5.3.6: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a un cuerpo cilíndrico con grieta circular.

Evaluando el efecto del cambio de frecuencia de carga sobre la extensión de la grieta por fatiga en esta geometría cilíndrica, los resultados obtenidos de la simulación computacional y de la aplicación de ambos modelos de crecimiento de grieta son presentados en las *Tablas 5.3.4 a 5.3.6*. Así mismo, en la *Figura 5.3.7* se muestra de manera ilustrativa una comparación entre los promedios del logaritmo de la velocidad de crecimiento de grieta obtenidos con ambos modelos para cada frecuencia de carga.

Tabla 5.3.4: Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.24530511	-4.34163659	17.228
2	-5.17652847	-4.34158161	16.129
3	-4.69205297	-4.34119427	7.478
4	-4.49638024	-4.34103783	3.455
5	-4.18700518	-4.34079048	-3.673
6	-4.00805585	-4.34064741	-8.298
7	-3.68355941	-4.34038798	-17.831

Tabla 5.3.5: Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^{\circ}\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.72146628	-4.54433659	20.574
2	-5.65550471	-4.54428161	19.649
3	-5.19085912	-4.54389427	12.464
4	-5.00319540	-4.54373783	9.183
5	-4.70648327	-4.54349048	3.463
6	-4.53485845	-4.54334741	-0.187
7	-4.22364387	-4.54308798	-7.563

Tabla 5.3.6: Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en el cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.80320076	-4.74703659	18.200
2	-5.74255091	-4.74698161	17.337
3	-5.31532201	-4.74659427	10.700
4	-5.14277036	-4.74643783	7.707
5	-4.86995168	-4.74619048	2.541
6	-4.71214736	-4.74604741	-0.719
7	-4.42599407	-4.74578798	-7.225

De acuerdo a los resultados expresados en las tablas anteriores, el error relativo tiende a ir disminuyendo a medida que se incrementa la longitud de la grieta por fatiga, lo que quiere decir que la velocidad de crecimiento de grieta obtenida por el modelo de Kim se aproxima a la obtenida con el modelo de Paris a medida que incrementamos la longitud de la grieta.

En la Figura 5.3.7 se observa que a la frecuencia de carga de 0.1 Hz ($\text{Log}[f] = -1$) el valor del error relativo promedio entre ambos modelos de crecimiento en estudio es el más bajo (-3.19%) en comparación con los obtenidos en las demás frecuencias, por lo tanto en este caso, es a la frecuencia de carga de 0.1 Hz donde los valores obtenidos con el modelo de Kim se aproximan más a los obtenidos con el modelo de Paris, siendo este el último el modelo matemático utilizado como el de referencia.

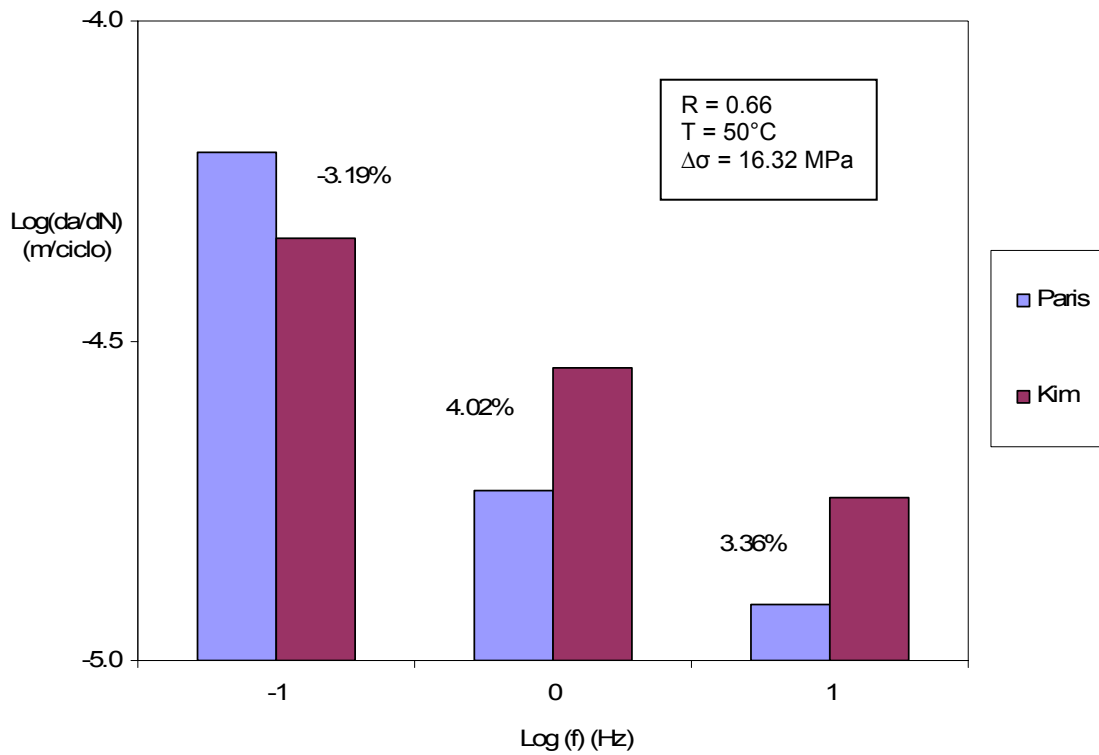


Figura 5.3.7: Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. $\text{Log}(f)$ a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso del cuerpo cilíndrico con grieta circular interna.

5.4 Probeta con grieta lateral inclinada

Este ejemplo se trata de una probeta rectangular con una grieta lateral con una inclinación de 45° , ancho $W = 20 \text{ mm}$, espesor $t = 15 \text{ mm}$ y altura $h = 80 \text{ mm}$ (ver Figura 5.4.1).

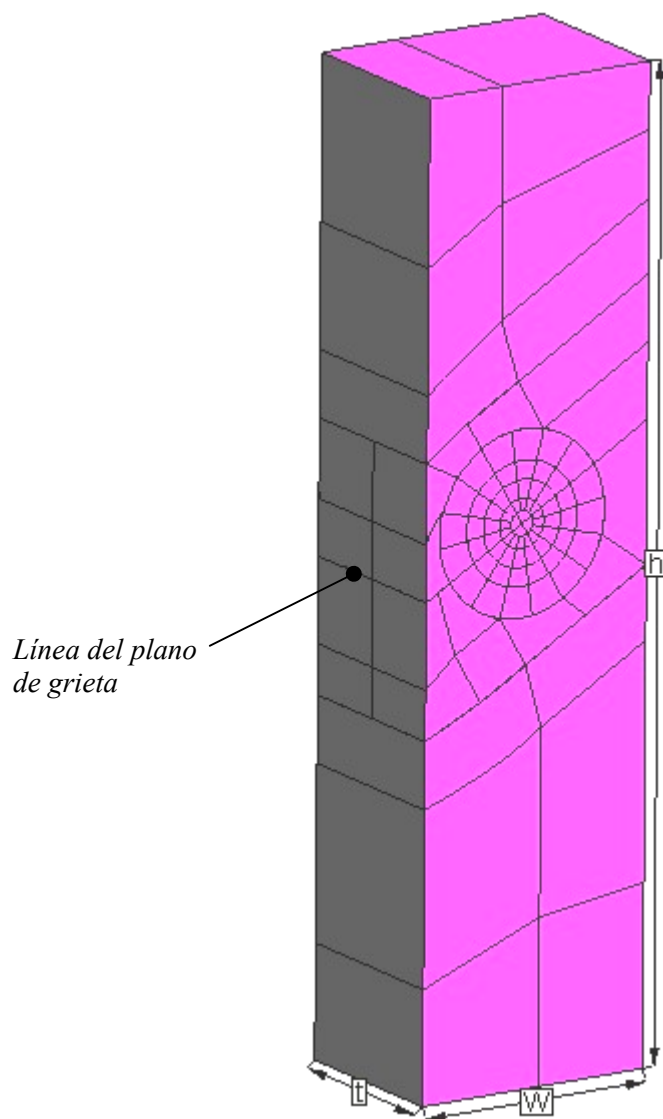


Figura 5.4.1: Probeta con grieta lateral inclinada.

El modelo discretizado se muestra en la figura anterior y está compuesto inicialmente por 1313 nodos y 288 elementos de contorno, de los cuales 560 nodos y 70 elementos de

contorno pertenecen a la grieta.

Para el cálculo de J se construyeron 4 anillos de celdas con radios que varían entre 20 y 75% de la longitud de la grieta, compuestos por 408 celdas y 2302 nodos de celda.

El proceso de simulación de crecimiento de grieta fue generado por un ciclo de carga de amplitud constante con una relación $R = 0.20$, un rango de esfuerzo $\Delta\sigma = 13.3 \text{ MPa}$. Las temperaturas θ del medio isotérmico fueron 23, 50 y 70°C y las frecuencias 0.1, 1, 10 Hz.

La probeta es sometida a fatiga por tracción uniforme en la dirección perpendicular al plano de la grieta.

Los factores de intensidad de esfuerzo K_I , K_{II} y K_{III} obtenidos a través del método dual de los elementos de contorno, fueron normalizados utilizando la expresión (5.1).

5.4.1 Efecto de la temperatura de ensayo sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

Al igual que en los ejemplos anteriores, se observó un aumento de la velocidad de propagación de grieta con la temperatura, la *Figura 5.4.2* así lo demuestra.

La deformación de la malla originada por el proceso de fatiga sobre la probeta cuando la temperatura del medio es 23, 50 y 70°C, se muestra en el Anexo B4.

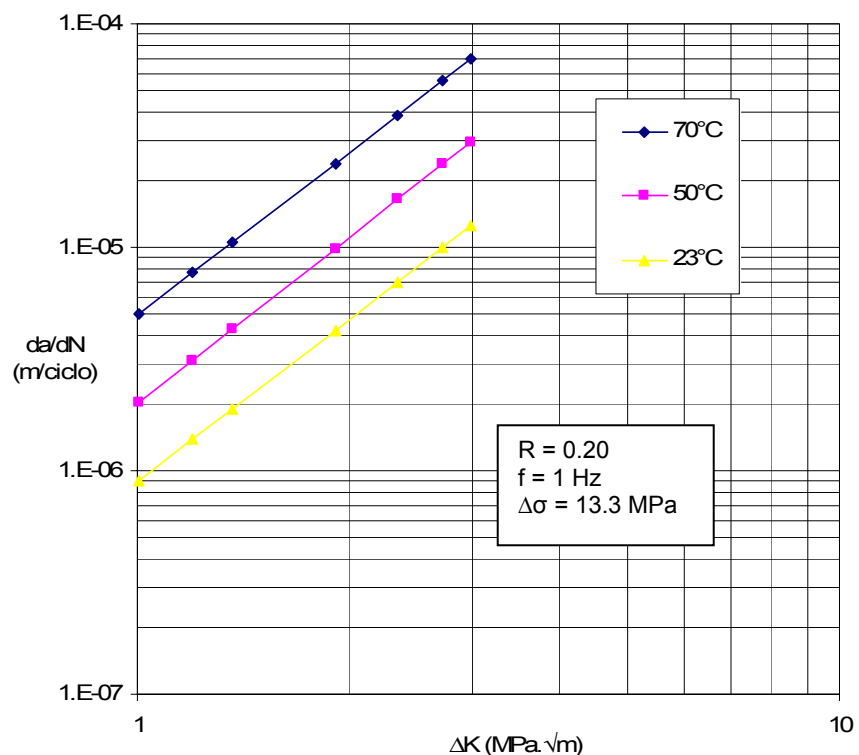


Figura 5.4.2: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes temperaturas para el CPVC a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Paris y Erdogan a la probeta con grieta lateral inclinada.

En las *Tablas 5.4.1 a 5.4.3*, se muestra una comparación numérica entre los dos modelos aplicados a este ejemplo.

Tabla 5.4.1: Valores del Log (da/dN) a $T = 23^\circ\text{C}$ y $f = 1 \text{ Hz}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-6.04176651	-5.03578415	16.650
2	-5.85946755	-5.03561368	14.060
3	-5.72058905	-5.03548381	11.976
4	-5.36999918	-5.03515597	6.235
5	-5.15809289	-5.03495782	2.387
6	-5.00366584	-5.03481341	-0.622
7	-4.90583356	-5.03472193	-2.627

Tabla 5.4.2: Valores del Log (da/dN) a T = 50°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.69486735	-4.54431442	20.203
2	-5.50746715	-4.54415820	17.491
3	-5.36470244	-4.54403919	15.297
4	-5.00430207	-4.54373875	9.203
5	-4.78646604	-4.54355716	5.075
6	-4.62771769	-4.54342482	1.821
7	-4.52714779	-4.54334099	-0.358

Tabla 5.4.3: Valores del Log (da/dN) a T = 70°C y f = 1 Hz, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.29703186	-4.23014740	20.141
2	-5.11440599	-4.23000028	17.292
3	-4.97527845	-4.22988821	14.982
4	-4.62405989	-4.22960529	8.530
5	-4.41177360	-4.22943429	4.133
6	-4.25706963	-4.22930967	0.652
7	-4.15906191	-4.22923072	-1.687

De acuerdo a los resultados anteriores, se puede decir, que el modelo de Kim predice mejor la velocidad de crecimiento de la grieta inclinada a partir del quinto incremento de la grieta, ya que el error relativo comienza a hacerse pequeño a partir de entonces. Esta tendencia se observa en los resultados obtenidos con todas las temperaturas.

A continuación la *Figura 5.4.3* muestra la comparación gráfica entre los valores promedios de la velocidad de crecimiento de grieta obtenidos con ambos modelos.

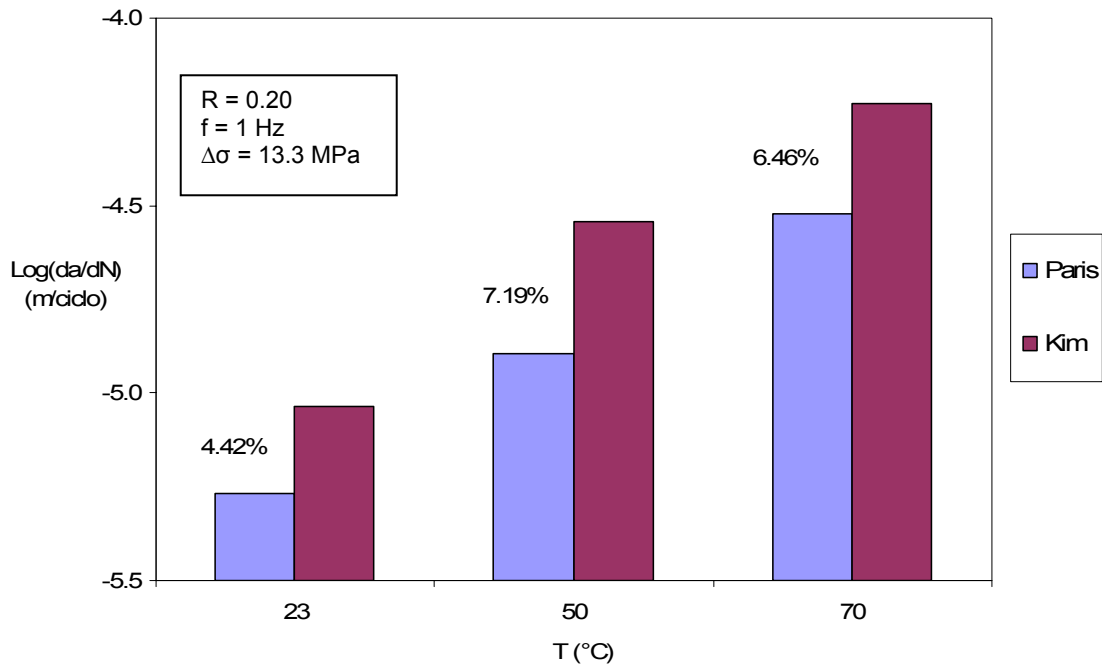


Figura 5.4.3: Gráfico comparativo Log(da/dN) promedio vs. Temperatura a la frecuencia de 1 Hz aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso la probeta con grieta lateral inclinada.

A la temperatura de 23°C se logra una mayor aproximación entre los resultados obtenidos con ambos modelos, ya que el error relativo promedio obtenido a esta temperatura es el más bajo en comparación con las temperaturas de 50 y 70°C.

5.4.2 Efecto de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta (da/dN)

En este ejemplo, al igual que los casos anteriores, hay un efecto marcando de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta que radica en la disminución de dicho parámetro con el aumento de la frecuencia de carga. La data obtenida con la simulación computacional y el modelo de Paris refleja este efecto en la *Figura 5.4.4*.

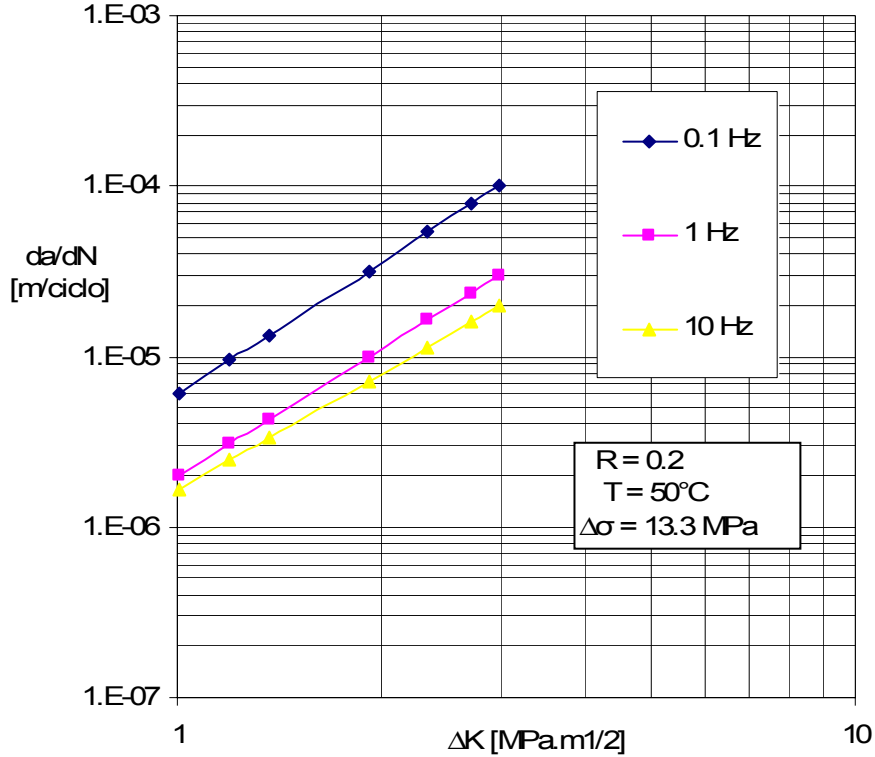


Figura 5.4.4: Velocidades de crecimiento de grieta por fatiga a diferentes frecuencias para el CPVC a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Paris y Erdogan a una probeta con grieta lateral inclinada.

Una comparación entre ambos modelos de crecimiento midiendo el efecto de la frecuencia, se muestra en las *Tablas 5.4.4 a 5.4.5*.

Tabla 5.4.4: Valores del Log (da/dN) a $f = 0.1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.21757100	-4.34161442	16.789
2	-5.02217303	-4.34145820	13.554
3	-4.87331548	-4.34133919	10.916
4	-4.49753413	-4.34103875	3.480
5	-4.27040141	-4.34085716	-1.650
6	-4.10487808	-4.34072482	-5.746
7	-4.00001611	-4.34064099	-8.516

Tabla 5.4.5: Valores del Log (da/dN) a $f = 1$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.69486735	-4.54431442	20.203
2	-5.50746715	-4.54415820	17.491
3	-5.36470244	-4.54403919	15.297
4	-5.00430207	-4.54373875	9.203
5	-4.78646604	-4.54355716	5.075
6	-4.62771769	-4.54342482	1.821
7	-4.52714779	-4.54334099	-0.358

Tabla 5.4.6: Valores del Log (da/dN) a $f = 10$ Hz y $T = 50^\circ\text{C}$, obtenidos con el modelo de Paris y el modelo de Kim en la probeta con grieta lateral inclinada.

Número de Incremento	Paris	Kim	Error relativo (%)
	Log (da/dN) [m/ciclo]	Log (da/dN) [m/ciclo]	
0	0.00000000	0.00000000	0.000
1	-5.77874378	-4.74701442	17.854
2	-5.60643442	-4.74685820	15.332
3	-5.47516618	-4.74673919	13.304
4	-5.14378791	-4.74643875	7.725
5	-4.94349365	-4.74625716	3.990
6	-4.79752889	-4.74612482	1.071
7	-4.70505762	-4.74604099	-0.871

Los resultados anteriores expresan una mejor aproximación entre ambos modelos a medida que se incrementa la longitud de la grieta, el error relativo obtenido en cada uno de los casos así lo demuestra.

En la *Figura 5.4.5* se puede observar que la coincidencia entre ambos modelos es bastante buena a la frecuencia de carga de 0.1 Hz donde el error relativo promedio es de 0.84% el más bajo en comparación con los valores obtenidos para las demás frecuencias de carga.

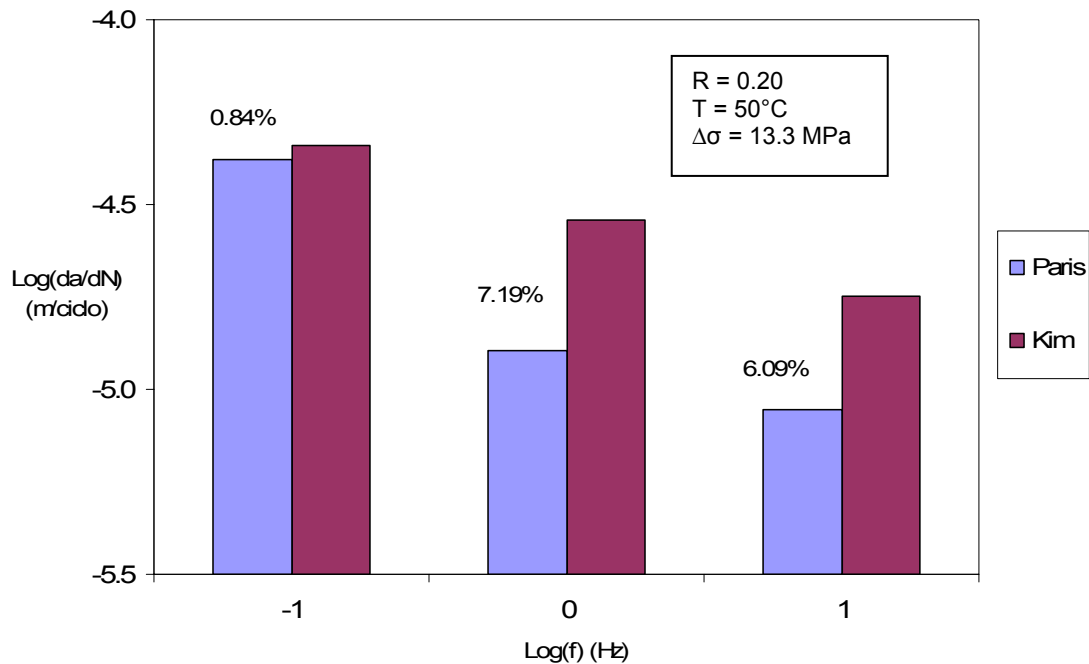


Figura 5.4.5: Gráfico comparativo $\text{Log}(da/dN)$ promedio vs. $\text{Log}(f)$ a la temperatura de 50°C aplicando el modelo de Kim y el modelo de Paris (referencia) en el caso la probeta con grieta lateral inclinada.

5.5 Dirección de propagación de la grieta y la energía relajada

Con el fin de complementar este análisis, en cada uno de los ejemplos anteriores se calculó la dirección de propagación de la grieta a través del *Criterio del Esfuerzo Principal Máximo* representado por la ecuación (4.54). Estos resultados se muestran en el Anexo A. Así mismo, también se muestran los resultados obtenidos de la energía relajada para cada incremento de grieta, la cual se muestra en la ecuación (2.37).

La dirección en que la grieta se propagará y la energía relajada fueron calculadas para cada incremento de la longitud de la grieta, mostrando en ambos modelos de crecimiento resultados iguales, ya que la aplicación de un modelo u otro en la evaluación de la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga no afecta a dichos parámetros.

La energía relajada determinada en cada uno de los ejemplos, dada por la ecuación (2.37), se puede ver en las tablas del Anexo A, disminuye con el incremento de grieta, lo cual concuerda con la teoría.

Capítulo 6

Análisis de Resultados

El análisis de los resultados obtenidos para los cuatro casos estudiados en esta investigación, determinados a partir de la aplicación del Método Dual de los Elementos de Contorno, en la evaluación del efecto de la temperatura y la frecuencia de carga sobre el crecimiento estable de grieta por fatiga del CPVC, utilizando el modelo matemático propuesto por Kim y Wang, y teniendo como referencia los valores obtenidos a partir del modelo tradicional de Paris y Erdogan, arrojó lo siguiente:

- En función de los errores relativos promedio obtenidos, el modelo de crecimiento de grieta propuesto por Kim y Wang, que permitió evaluar la velocidad de propagación de una grieta por fatiga a una determinada temperatura y frecuencia de carga, en este trabajo, arrojó resultados satisfactorios en los siguientes casos:

Ejemplo 1: Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 1 Hz
Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 10 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 0.1 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 10 Hz
Temperatura = 70°C y Frecuencia de carga = 1 Hz

Ejemplo 2: Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 0.1 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 1 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 10 Hz
Temperatura = 70°C y Frecuencia de carga = 10 Hz

Ejemplo 3: Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 1 Hz
Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 10 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 0.1 Hz
Temperatura = 70°C y Frecuencia de carga = 0.1 Hz

Ejemplo 4: Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 1 Hz
Temperatura = 23°C y Frecuencia de carga = 10 Hz
Temperatura = 50°C y Frecuencia de carga = 0.1 Hz

- Para el resto de las condiciones de ensayo empleadas en este trabajo, se obtuvieron resultados con un grado de coincidencia menor a los valores obtenidos con el modelo de referencia dado por el de Paris y Erdogan, lo cual se puede justificar ya que se trata de un proceso de simulación y como tal se generan errores que indican qué tan cerca de la realidad está o no el modelo numérico en estudio a unas condiciones de temperatura y frecuencia de carga dadas.
- Las gráficas correspondientes a la velocidad de propagación de grieta (da/dN) versus el rango del factor de intensidad (ΔK), donde se evidencia el efecto de la temperatura y de la frecuencia de carga, presentan el mismo comportamiento en los cuatro ejemplos estudiados. Los valores obtenidos con el modelo de Kim y Wang, en la mayoría de los casos, son mayores a los obtenidos por el modelo de Paris y Erdogan.
- Desde el punto de vista de la microestructura del material, el hecho de que la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga aumente con la temperatura del medio ambiente, se debe al fácil desplazamiento y desenredo de las cadenas poliméricas, como resultado de una disminución de la fuerza de enlace y un incremento en la actividad molecular a altas temperaturas. También se ha demostrado experimentalmente que la propagación de grieta por fatiga en el CPVC a altas temperaturas está caracterizado por la formación de una zona plástica o “crazing”, de acuerdo a los trabajos realizados por Saghir *et. al* (2005).
- La contribución energética se ve representada en el modelo de Kim y Wang (ecuación 2.42) por la energía de activación ΔH , la cual no es más que la mínima cantidad de energía que se requiere para iniciar el proceso de difusión de las macromoléculas de polímero como consecuencia del aumento de la temperatura. Este proceso de difusión es controlado por la temperatura y en consecuencia se logrará una mayor difusión o movilidad de cadena polimérica cuando la temperatura es alta tomando como referencia la temperatura ambiente promedio (23°C). Es por ello que observamos en las gráficas mostradas en resultados, que el aumento de la temperatura produce un aumento en la velocidad de crecimiento de la grieta.
- El efecto de la frecuencia de carga sobre la velocidad de crecimiento de grieta por

fatiga pudiera asociarse con la capacidad de respuesta del CPVC ante la intensidad de aplicación de la carga, ya que si se aumenta la frecuencia de carga durante la fatiga, la estructura macromolecular del CPVC no se puede relajar lo suficiente como para permitir una mayor movilidad entre las cadenas poliméricas y el rompimiento de enlaces, y así permitir que la grieta avance a una mayor velocidad. En cambio, si la frecuencia de aplicación de la carga es más pequeña, las cadenas macromoleculares absorben esa energía de deformación de una manera más eficiente permitiéndole así una mayor movilidad y desplazamiento entre ellas ocasionando que la grieta se extienda con una mayor velocidad.

- A partir de los reportes de salida generados del proceso de simulación (Anexo A) se observa en todos los casos estudiados, que la energía relajada disminuye con el incremento de grieta, esto es porque existe una disminución de la energía potencial por relajación de tensiones durante el avance de la fisura, para contribuir con la energía necesaria para la creación de las nuevas superficies de fractura en cada avance de la grieta.
- Al comparar las mallas iniciales (ver Anexo B) de los modelos discretizados con las mallas finales es posible constatar las deformaciones y apertura de la grieta ocurridas en cada espécimen en estudio al finalizar el proceso de simulación. Se observa que las deformaciones son mayores cuando la temperatura es de 70°C, esto se debe a que el aumento de la temperatura reblandece el material en mayor grado, permitiendo que se deforme más fácilmente, y por ende permite que la grieta tenga una apertura mucho más pronunciada que en los casos en que la temperatura es menor.

Conclusiones

Una vez terminado el desarrollo de esta investigación, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Se cumplió el objetivo propuesto en este trabajo, ya que se logró simular el crecimiento de grieta a través de un algoritmo que permitió, primeramente, la determinación de los parámetros fractomecánicos (deformaciones, esfuerzos y factor de intensidad de esfuerzo), a través de la implementación del método dual de los elementos de contorno. Dichos parámetros fueron el punto de partida para la aplicación del modelo matemático de crecimiento de grieta propuesto por los investigadores Kim y Wang, cuyo modelo incluye la temperatura y la frecuencia de carga como variables independientes que afectan directamente las velocidades de crecimiento de grieta.
- En este sentido, la herramienta computacional en conjunto con el método dual de los elementos de contorno jugaron un papel fundamental, ya que permitió en un tiempo prudencial, determinar los factores de intensidad de esfuerzo y la integral J para cada uno de los casos estudiados, dando un aporte al trabajo netamente experimental realizado por Saghir *et al.* (2005).
- Con la realización de este trabajo, se logró comprobar la validación de un modelo matemático de crecimiento de grieta en función de la temperatura, la frecuencia y la energía de activación aparente, dichos parámetros no están incluidos en el modelo de Paris y Erdogan.
- La velocidad de crecimiento de grieta por fatiga, se ve influenciada por las condiciones de ensayo: temperatura y frecuencia de carga. La resistencia al crecimiento de grieta por fatiga se va incrementando con el aumento de la frecuencia, y disminuye con el aumento de la temperatura.
- La variación de la temperatura y la frecuencia afecta principalmente a los parámetros de la Ley de Paris: C incrementa su valor con la temperatura, mientras que el

exponente m permanece inalterado por la temperatura.

- La velocidad de crecimiento de grieta es más sensible a los cambios de frecuencia a altas temperaturas que a bajas temperaturas.
- El análisis comparativo realizado entre los resultados obtenidos aplicando el modelo de crecimiento de grieta propuesto por Kim y Wang, y los resultados conocidos aplicando el modelo de Paris y Erdogan, permiten concluir que el modelo de crecimiento propuesto por Kim y Wang funciona bastante bien para predecir las velocidades de extensión de grieta en ensayos de fatiga, sobre todo a altas frecuencias (10 Hz en este caso) y una determinada temperatura (23, 50 o 70°C, en este caso)
- La dirección en que la grieta se propagará y los factores de intensidad de esfuerzo en modo I, II y III fueron calculados para cada incremento de la longitud de la grieta, mostrando en ambos modelos de crecimiento resultados iguales, ya que la aplicación de un modelo u otro en la evaluación de la velocidad de crecimiento de grieta por fatiga no afecta a dichos parámetros.
- Trabajos realizados por otros investigadores han estudiado experimentalmente el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia en el crecimiento de grietas por fatiga en varios polímeros. Sin embargo, este trabajo representa un aporte importante a la mecánica de materiales poliméricos, ya que permitió aplicar el método dual de los elementos de contorno tridimensional para simular el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia en el crecimiento de grietas por fatiga empleando un modelo matemático diferente al modelo tradicional de Paris y Erdogan.

Recomendaciones

Para posteriores Trabajos en la línea de investigación de análisis de crecimiento de grietas, se recomienda lo siguiente:

- Estudiar el efecto combinado de la temperatura y la frecuencia sobre la propagación de grieta por fatiga en otros polímeros o en metales, empleando el modelo de Kim y Wang (1994).
- Ampliar el rango de temperaturas y de frecuencias para ver cómo se comporta el modelo.
- Incluir en el programa computacional J-Thermo en 3D una subrutina que permita realizar el remallado automático de las superficies de la grieta en cada incremento y calcular la velocidad de crecimiento de grieta como parte de los archivos de salida.
- Seguir validando otros modelos de crecimiento de grieta que sean diferentes al modelo de Paris y Erdogan, empleando varios tipos de materiales.

Bibliografía

Aliabadi, M.H., *An enhanced boundary element method for determining fracture parameters*, in: Proceedings of Fourth International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, San Antonio, Texas, Peneridge Press, Swansea, UK, 27-39, 1987.

Aliabadi, M.H., dell'Erba, D., Prasad, N.V., *Thermomechanical Fatigue and Fracture, Thermomechanical crack growth using boundary elements*, Wit Pres, UK, 2002.

Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., *Numerical Fracture Mechanics*, Computational Mechanics publications, Southampton, UK; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

Balderrama, R., *Implementación de la Integral J de Dominio para el Análisis Tridimensional de Grietas en Problemas Termoelásticos Utilizando el Método de Elementos de Contorno*, Tesis de Maestría, Universidad Central de Venezuela, Mayo (2004).

Beer, G., *Programming the Boundary Element Method, an introduction for Engineers*, Wiley, 2001.

Betti, E., *Teoria dell'elasticita*. Il Nuovo Cimento, 2, 7-10 (1872).

Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. y Liggett, J.A., *Two-dimensional stress intensity factor computation using boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in engineering, 17, 387-404, 1981.

Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. y Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Brebbia, C.A., y Dominguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton and McGraw-Hill Company, London, 1992.

Broek, D., *Elementary engineering fracture mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

Cisilino A.P., *Linear and Nonlinear Crack Growth using Boundary Elements*, PhD Thesis, Southampton, UK, 2000.

Cisilino, A.P., Aliabadi, M.H., Otegui, J.L., *Energy domain applied to solve center and double edge crack problems en three-dimensions*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 29, 181-194, 1998.

- Cisilino, A.P., Aliabadi, M.H., *Three dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems*, Eng. Fracture Mechanics, 63, 713-733, 1999.
- Crouch, S.L., *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*, International Journal for Numerical Methods in engineering, 10, 301-342, 1976.
- Cruse, T.A. and Rizzo, F.J. , *A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. I*, J. Math.Anal.Appl.,22,244-259, 1968.
- Cruse, T.A., *Boundary-integral equation in fracture mechanics analysis*, in: Proceedings of Applied Mechanics Conference, Troy, New York, 1975.
- Cruse, T.A., Meyers, G.J., *Three-dimensional fracture mechanics analysis*, ASCE J. Struc. Divn. 103, 309-320, 1977.
- Cruse, T.A., *Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method*, in The surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, Edited by J. L. Swedlow, 153-170, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1972.
- Das, B.R., *Thermal Stresses in a long Cylinder Containing a Penny-Shaped Crack*, Int. J. Engng. Sci., 6, 497-516, 1968.
- de Vedia, L., *Mecánica de Fractura*, Proyecto Multinacional de Metalurgia OEA- CNEA, Buenos Aires, 1976.
- dell'Erba, D.N., Aliabadi, M.H. y Rooke, D.P., *Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems*. International Journal of Fracture, 94, 89-101 (1998).
- dell'Erba, D.N., *Thermoelastic Fracture Mechanics using Boundary Elements*, PhD Thesis, Southampton, UK, 2002.
- Erdogan, F. y Sih, G.C., *On the crack extension in plates Under plane loading and transverse shear*. ASME Journal of Basic Engineering, 85, 519-527. (1963).
- Eshelby, J.D., *The Continuum Theory of Lattice Defects*. Solid State Physics, 3, 79-141. (1956).
- Fredholm I. *Solución de un problema fundamental de la Teoría de Elasticidad*. Arkiv für Mathematik Astronomie und Fysik, 2, 1-8 (1905).
- Gerstle, W.H., *Finite and Boundary Element Modelling of Crack Propagation in Two and Three Dimensions Using Interactive Computer Graphics*. PhD Thesis, Cornell University, New York, (1985).

Gosz, M., Dolbow, J. y Moran, B., *Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks*, Int. J. solid Structures, 35, 1753-1783, 1998.

Griffith A.A, *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A 221, 163-197. (1920).

Guggiani, M. y Gigante, A., *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 906-915, 1990.

Habib, I. S., *Engineering Analysis Methods*, Lexington Books, Lexington, New York, 1975.

Hartranft, R.J., y Shi, G.C., *Stress singularity for crack with an arbitrarily curved front*. Journal of Engineering Fracture Mechanics, 9, 705-718, 1977.

Hertzberg, W.R., Manson J.A. y Skibo, M., *Frequency sensitivity of fatigue processes in polymeric solids*, Fatigue of Engineering Plastics, Academia, New Cork, 1980.

Hong, H. y Chen, J., *Derivations of Integral Equations of Elasticity*. Journal Engineering Mechanics, v. 114. 1028-1044.

Irfan-ul-Haq, N. Merah, *Effect of Temperature on Fatigue Crack Growth in CPVC*, J. Pressure Vessel Technol. 125 (No. 1) (2003) 71-77.

Irwin, G.R., *Linear Fracture Mechanics, Fracture Transition and Fracture Control*, Engineering Fracture Mechanics, 1, No. 2, (1968).

Jaswon, M. and Ponter, A.R., *An integral equation in potential theory I*, Proc.Roy. Soc., A275, 23-32, 1963.

Jaswon, M.A., *Integral equation methods in potential theory I*, Proc.Roy.Soc., A275, 23-32, 1963.

Jia, Z.H., Shipy, D.J., Rizzo, F.J., *Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements*, Int.J.Numer.MethodsEng.,28, 2257-2273, 1989.

Kim, H.S., Mai, Y.M., *Effect of temperature on fatigue crack growth in unplasticized polyvinyl chloride*, J. Mater. Sci, 28 (1993) 5479-5485.

Kim, H.S., Wang, X.M., *Temperature and frequency effects on fatigue crack growth in acrylonitrile-butadiene-styrene (ABS)*, J. Appl. Polym. Sci. 57 (1995) 811-817.

Kim, H.S., Wang, X.M., *Temperature and frequency effects on fatigue crack growth of uPVC*, J. Mater. Sci. 29 (12) (1994) 3209-3214.

Klesnil, M. y Lukas, P., *Influence of Strength and Stress History on Growth and Stabilisation of Fatigue Cracks*. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 4, 77-92, (1972).

Kupradze, V.D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Daniel Davey&Co., New York, 1965.

Lachat, J.C., y Watson, J.O., *Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatic*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, 991-1005, 1976.

Love, A.E.H., *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.

Mai, Y.M., Williams, *Temperature and enviromental effects on the fatigue fracture in polystyrene*, J.G., J. Mater. Sci. 14 (1979) 1933-1940.

Martin, G.C., Gerberich, W.W., J. Mater. Sci. 15 (7) (1975) 500-506.

Martínez, M., *A boundary sensitivity formulation for bone remodeling*. Tesis Doctoral, Wessex Institute of Technology University of Wales, United Kingdom, (1998)

Martínez, M., Aliabadi, M.H., *Fracture Mechanics of bone using the duall Boundary element method*, Simulation Modelling in Bioengineering, Editors: M. Cerrolaza, D.Jugo, C.A. Brebia, 175-185, 1996.

Martínez, M., *Identificación de defectos en componentes estructurales mediante técnicas numéricas*, Jornadas de Investigación, Facultad de ingeniería, U.C.V., Caracas, Venezuela, 2002.

Merah, N., Saghir, F., Khan, Z., Bazoune, *A study of frequency and temperature effects on fatigue crack growth resistance of CPVC*, A., J. Eng. Fracture Mech. 72 (11) (2005) 1691-1701.

Mi, Y. and Aliabadi, H., *Dual Boundary Element Method for three dimensional fracture mechanics analysis*, Eng. Analysis whit Boundary Elements, 10, 161-17, 1992.

Mi, Y. and Aliabadi, H., *Three-Dimensional crack growth simulation using BEM*, Computers & Structures, 52, 871-878, 1993.

Moran, B. and Shih, C.F., *Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance*, Eng. Fracture Mechanics, 27, 615-642, 1987.

Muskhelishvili, N.I., *Some Basics problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, leyden, 1953.

Nowacki, M., *Thermoelasticity*, Wroclawska Drukarnia Naukowa, Polonia, 1962.

- Orowan, E. *Fracture Strength of Solid*, In Report on Progress. Physics, Vol. 12, Physical Society of London, (1949).
- Paris, P.C. y Sih, G.C., *Stress Analysis of Cracks, In Fracture Toughness Testing and Its Applications*, ASTM STP, No. 381, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, (1965).
- Paris, P.C., Erdogan, F., J. Basic Eng. 85 (1960) 528-534.
- Paris, P.C., Gomez, M.P. y Anderson, W.P., *A rational analytic theory of fatigue*. The Trend in Engineering, 13, 9-14 (1961).
- Paris, P.C. y Erdogan, F., *A Critical Analysis of Cracks Propagation Laws*, ASME, Journal of Basic Engineering, 85, 528-534 (1963).
- Pearsons, M., Stepanov, E.V., A. Hiltner, Baer, E., *Effect of strain rate on stepwise fatigue and creep slow crack growth in high density polyethylene*, J. Mater. Sci. 35 (8) (2000) 1857-1866.
- Pearsons, M., Stepanov, E.V., A. Hiltner, Baer, E., Proc. ANTEC 13 (2002) 426-430.
- Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*, in Advances in BEM for Fracture Mechanics, Edited by M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science Publications, 1992.
- Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *Dual Boundary element incremental analysis of crack propagation*, Computers & Structures, 46, 237-247, 1993.
- Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *The dual boundary element method: efective implementation for crack problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 33, 1269- 1287, 1992.
- Portela, A., *Dual Boundary Formulation Analysis of Crack Growth*, PhDthesis, Southampton, UK, 1993.
- Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *Incremental crack growth in thermoelastic problems*, Int. J. frac., 66, R45-R50, 1994.
- Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. *The dual boundary element method for thermoelastic crack problems*, Int. Journal of Fracture, 66, 255-272, 1994.
- Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. *The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems*, Int. J. Solids & Structures. 33, 2695-2718, 1996.
- Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. *Thermo-mechanical fatigue crack growth*, Int. J. Fatigue, 18, 349-361, 1996.

- Prasad, N.N.V., *Thermomechanical Crack Growth: Boundary Element Analysis*, PhD Thesis, Southampton, UK, 1995.
- Rice, J.R., *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, No. 35, 379-386 (1968).
- Rizzo, F.J., *An integral equation approach to boundary problems of classical elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics, 25, 83-96, 1967.
- Saghir, F., Merah, N., Khan, Z., Bazoune, A., *Modeling the combined effects of temperature and frequency on fatigue crack growth of chlorinated polyvinyl chloride (CPVC)*, Journal of Materials Processing Technology, 164-165 (2005) 1550-1553.
- Saliva, R., Vénere, M.J., Padra, C., Taroco, E. y Feijoo, R.A., *Shape sensitivity analysis and energy release rate of planar cracks embedded in three-dimensional bodies*, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, 188, 649-664, 2000.
- Sánchez Soto, M.A., *Comportamiento Mecánico y Fractura de Mezclas de Poliestireno y Microesferas de Vidrio*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, España (2000).
- Savelli, L., *Evaluación del Crecimiento de Grietas y Vida Remanente bajos Carga de Fatiga Aplicando el Método Dual de los Elementos de Contorno*. Tesis de Maestría, UNEXPO Antonio José de Sucre, Mayo (2006).
- Shih, C.F., Moran, B. and Nakamura, T., *Energy release rate along a three dimensional crack front in a thermally stressed body*, Int. J. of Fracture, 30, 79-102, 1986.
- Sih, C.H. *On the singular character of thermal stress near a crack tip*, Journal of Applied Mechanics, 29, 587-589, 1962.
- Snider, M.D. y Cruse, T.A., *Boundary integral equations analysis of cracked anisotropic plates*, International Journal of Fracture, 11, 315-328, 1946.
- Somigliana, C., *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo*. Il Nuovo Cimento, 3, 17-20. (1885).
- Suresh, S., *Fatigue of materials*, Cambridge Solid State. 1 (1991) 157 – 158.
- Symm, G.T., *Integral equation methods in potential theory II*, Proc. Roy. Soc., A275, 33-46, 1963.
- Timoshenko S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3ra Edición, MacGraw- Hill, New York, 1985.

ANEXO A

**REPORTES DE RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN
DEL CRECIMIENTO DE GRIETA APLICANDO EL
MÉTODO DUAL DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

ANEXO A1: PROBETA CON GRIETA LATERAL

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	3.73800E-06	3.26625E-05	6.36522E-05	1
1.954701625	3.82086E-06	3.35959E-05	6.56416E-05	2
1.963526823	3.85544E-06	3.39871E-05	6.64770E-05	3
2.398105346	5.75091E-06	5.68184E-05	1.16531E-04	4
2.598730036	6.75340E-06	6.98506E-05	1.46016E-04	5
2.777234291	7.71303E-06	8.28560E-05	1.75953E-04	6
2.890114138	8.35276E-06	9.17899E-05	1.96776E-04	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	4.37329E-06	1.01580E-05	2.43650E-05	1
1.954701625	4.48977E-06	1.04362E-05	2.50152E-05	2
1.963526823	4.53853E-06	1.05528E-05	2.52873E-05	3
2.398105346	7.33042E-06	1.72745E-05	4.08780E-05	4
2.598730036	8.88788E-06	2.10580E-05	4.95803E-05	5
2.777234291	1.04227E-05	2.48048E-05	5.81589E-05	6
2.890114138	1.14675E-05	2.73644E-05	6.40000E-05	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	3.62522E-06	7.35237E-06	1.44734E-05	1
1.954701625	3.71746E-06	7.53734E-06	1.47976E-05	2
1.963526823	3.75604E-06	7.61468E-06	1.49329E-05	3
2.398105346	5.93947E-06	1.19800E-05	2.23659E-05	4
2.598730036	7.14040E-06	1.43728E-05	2.63080E-05	5
2.777234291	8.31476E-06	1.67083E-05	3.00872E-05	6
2.890114138	9.10976E-06	1.82872E-05	3.26093E-05	7

ANEXO A1: PROBETA CON GRIETA LATERAL (cont.)

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	1.47080E-05	4.56006E-05	9.39947E-05	1
1.954701625	1.47084E-05	4.56016E-05	9.39967E-05	2
1.963526823	1.47085E-05	4.56020E-05	9.39975E-05	3
2.398105346	1.47151E-05	4.56208E-05	9.40339E-05	4
2.598730036	1.47178E-05	4.56283E-05	9.40485E-05	5
2.777234291	1.47200E-05	4.56345E-05	9.40606E-05	6
2.890114138	1.47213E-05	4.56383E-05	9.40679E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	9.22262E-06	2.85937E-05	5.89391E-05	1
1.954701625	9.22284E-06	2.85944E-05	5.89403E-05	2
1.963526823	9.22294E-06	2.85946E-05	5.89409E-05	3
2.398105346	9.22707E-06	2.86064E-05	5.89637E-05	4
2.598730036	9.22873E-06	2.86111E-05	5.89728E-05	5
2.777234291	9.23011E-06	2.86150E-05	5.89804E-05	6
2.890114138	9.23093E-06	2.86173E-05	5.89850E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.933390371	5.78301E-06	1.79296E-05	3.69576E-05	1
1.954701625	5.78315E-06	1.79300E-05	3.69584E-05	2
1.963526823	5.78321E-06	1.79302E-05	3.69587E-05	3
2.398105346	5.78581E-06	1.79375E-05	3.69730E-05	4
2.598730036	5.78685E-06	1.79405E-05	3.69787E-05	5
2.777234291	5.78771E-06	1.79429E-05	3.69835E-05	6
2.890114138	5.78823E-06	1.79444E-05	3.69863E-05	7

ANEXO A1: PROBETA CON GRIETA LATERAL (cont.)

Factores de intensidad de Esfuerzo Normalizados				
ΔK_I^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{II}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{III}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{eq} (MPa.m ^{1/2})	Incremento
0.000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000	0
1.933390374	2.1729426E-03	-5.4959177E-06	1.93339037	1
1.954701309	2.3719180E-03	-6.3350143E-06	1.95470162	2
1.963526119	6.2499048E-03	-4.4444566E-05	1.96352682	3
2.398105235	1.4407338E-03	-1.8979619E-06	2.39810535	4
2.598730036	-8.7879962E-03	-6.6861347E-05	2.59873004	5
2.777234137	-2.3139499E-02	-4.3375796E-04	2.77723429	6
2.890114237	-2.7265764E-02	-5.7888937E-04	2.89011414	7

Dirección de Propagación de la grieta	
Incremento	Dirección (grados)
0	0.0000000000
1	-1.2833656E-01
2	-1.4096499E-01
3	-3.6472782E-01
4	-6.8922743E-02
5	3.8555512E-01
6	9.5460506E-01
7	1.0808851E+00

Incremento	Energía Relajada (J/m ²)
0	0.00000000000
1	3.20200628E-01
2	2.96425425E-01
3	2.85242464E-01
4	2.49021447E-01
5	2.11276587E-01
6	1.77496274E-01
7	1.63401546E-01

ANEXO A2: PLACA RECTANGULAR CON ORIFICIO

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	6.69226E-06	6.90390E-05	1.44164E-04	1
2.87434049	8.26183E-06	9.05078E-05	1.93776E-04	2
2.93911600	8.63840E-06	9.58433E-05	2.06287E-04	3
3.95484120	1.56408E-05	2.05538E-04	4.74657E-04	4
5.86711456	3.44230E-05	5.66443E-04	1.43640E-03	5
9.19167340	8.44869E-05	1.79584E-03	5.06564E-03	6
10.13629249	1.02744E-04	2.30920E-03	6.66661E-03	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	8.79150E-06	2.08232E-05	4.90417E-05	1
2.87434049	1.13180E-05	2.69977E-05	6.31641E-05	2
2.93911600	1.19393E-05	2.85223E-05	6.66377E-05	3
3.95484120	2.43275E-05	5.92861E-05	1.35954E-04	4
5.86711456	6.26394E-05	1.56746E-04	3.50655E-04	5
9.19167340	1.83809E-04	4.74021E-04	1.03095E-03	6
10.13629249	2.32402E-04	6.03284E-04	1.30405E-03	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	7.06637E-06	1.42254E-05	2.60674E-05	1
2.87434049	8.99621E-06	1.80618E-05	3.22508E-05	2
2.93911600	9.46766E-06	1.89975E-05	3.37361E-05	3
3.95484120	1.86943E-05	3.72286E-05	6.14558E-05	4
5.86711456	4.61657E-05	9.10161E-05	1.36353E-04	5
9.19167340	1.29179E-04	2.51778E-04	3.37755E-04	6
10.13629249	1.61646E-04	3.14274E-04	4.11569E-04	7

ANEXO A2: PLACA RECTANGULAR CON ORIFICIO (cont.)

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	1.47176E-05	4.56279E-05	9.40477E-05	1
2.87434049	1.47211E-05	4.56378E-05	9.40669E-05	2
2.93911600	1.47218E-05	4.56399E-05	9.40709E-05	3
3.95484120	1.47316E-05	4.56677E-05	9.41250E-05	4
5.86711456	1.47447E-05	4.57047E-05	9.41968E-05	5
9.19167340	1.47595E-05	4.57469E-05	9.42787E-05	6
10.13629249	1.47628E-05	4.57561E-05	9.42966E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	9.22864E-06	2.86108E-05	5.89723E-05	1
2.87434049	9.23082E-06	2.86170E-05	5.89843E-05	2
2.93911600	9.23128E-06	2.86183E-05	5.89869E-05	3
3.95484120	9.23743E-06	2.86358E-05	5.90208E-05	4
5.86711456	9.24560E-06	2.86590E-05	5.90658E-05	5
9.19167340	9.25491E-06	2.86855E-05	5.91172E-05	6
10.13629249	9.25694E-06	2.86912E-05	5.91284E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
2.58694009	5.78679E-06	1.79403E-05	3.69784E-05	1
2.87434049	5.78816E-06	1.79442E-05	3.69859E-05	2
2.93911600	5.78845E-06	1.79450E-05	3.69875E-05	3
3.95484120	5.79230E-06	1.79560E-05	3.70088E-05	4
5.86711456	5.79743E-06	1.79705E-05	3.70370E-05	5
9.19167340	5.80326E-06	1.79871E-05	3.70692E-05	6
10.13629249	5.80454E-06	1.79907E-05	3.70763E-05	7

ANEXO A2: PLACA RECTANGULAR CON ORIFICIO (cont.)

Factores de intensidad de Esfuerzo Normalizados				
ΔK_I^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{II}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{III}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{eq} (MPa.m ^{1/2})	Incremento
0.000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000	0
2.586089	-2.531444E-03	-5.539650E-04	2.58694009	1
2.865403	-2.921517E-03	-6.288953E-04	2.87434049	2
2.938092	-2.300669E-03	-1.026204E-03	2.93911600	3
3.953751	-2.543246E-03	-1.091595E-03	3.95484120	4
5.865521	-1.926092E-03	-1.593994E-03	5.86711456	5
9.190048	-2.079367E-03	-1.626032E-03	9.19167340	6
10.134084	4.663703E-02	-2.423614E-03	10.13629249	7

Dirección de Propagación de la grieta	
Incremento	Dirección (grados)
0	0.0000000
1	0.112194
2	0.116861
3	0.089762
4	0.073731
5	0.037639
6	0.025932
7	-0.527449

Incremento	Energía Relajada (J/m ²)
0	0.00000000000
1	9.08258421E-02
2	8.79699392E-02
3	8.69987654E-02
4	8.63763546E-02
5	8.51222765E-02
6	8.43874609E-03
7	8.30086543E-03

ANEXO A3: CUERPO CILÍNDRICO CON GRIETA CIRCULAR INTERNA

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	9.58843E-07	5.68453E-06	9.42712E-06	1
1.04143694	1.08459E-06	6.65996E-06	1.12073E-05	2
1.60742300	2.58381E-06	2.03211E-05	3.79044E-05	3
1.91540890	3.66879E-06	3.18874E-05	6.20042E-05	4
2.52715300	6.38650E-06	6.50122E-05	1.35004E-04	5
2.96658098	8.80060E-06	9.81622E-05	2.11744E-04	6
3.96743288	1.57405E-05	2.07224E-04	4.78912E-04	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	8.55773E-07	1.89904E-06	4.75387E-06	1
1.04143694	9.92030E-07	2.21052E-06	5.51224E-06	2
1.60742300	2.80881E-06	6.44378E-06	1.56364E-05	3
1.91540890	4.27639E-06	9.92669E-06	2.38242E-05	4
2.52715300	8.31214E-06	1.96570E-05	4.63630E-05	5
2.96658098	1.22086E-05	2.91838E-05	6.81434E-05	6
3.96743288	2.45137E-05	5.97525E-05	1.36997E-04	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	7.62382E-07	1.57326E-06	3.66120E-06	1
1.04143694	8.78021E-07	1.80904E-06	4.14659E-06	2
1.60742300	2.37433E-06	4.83814E-06	9.96665E-06	3
1.91540890	3.54841E-06	7.19829E-06	1.42028E-05	4
2.52715300	6.69763E-06	1.34911E-05	2.48645E-05	5
2.96658098	9.67166E-06	1.94023E-05	3.43761E-05	6
3.96743288	1.88310E-05	3.74978E-05	6.18517E-05	7

ANEXO A3: CUERPO CILÍNDRICO CON GRIETA CIRCULAR INTERNA (cont.)

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	1.46856E-05	4.55369E-05	9.38711E-05	1
1.04143694	1.46876E-05	4.55427E-05	9.38823E-05	2
1.60742300	1.47019E-05	4.55833E-05	9.39611E-05	3
1.91540890	1.47077E-05	4.55997E-05	9.39930E-05	4
2.52715300	1.47169E-05	4.56257E-05	9.40434E-05	5
2.96658098	1.47221E-05	4.56407E-05	9.40726E-05	6
3.96743288	1.47317E-05	4.56680E-05	9.41256E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	9.20856E-06	2.85538E-05	5.88616E-05	1
1.04143694	9.20983E-06	2.85574E-05	5.88686E-05	2
1.60742300	9.21880E-06	2.85829E-05	5.89180E-05	3
1.91540890	9.22242E-06	2.85932E-05	5.89380E-05	4
2.52715300	9.22816E-06	2.86095E-05	5.89696E-05	5
2.96658098	9.23147E-06	2.86189E-05	5.89879E-05	6
3.96743288	9.23749E-06	2.86360E-05	5.90211E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
0.97920523	5.77420E-06	1.79045E-05	3.69090E-05	1
1.04143694	5.77500E-06	1.79068E-05	3.69134E-05	2
1.60742300	5.78062E-06	1.79228E-05	3.69444E-05	3
1.91540890	5.78289E-06	1.79293E-05	3.69569E-05	4
2.52715300	5.78649E-06	1.79395E-05	3.69767E-05	5
2.96658098	5.78857E-06	1.79454E-05	3.69882E-05	6
3.96743288	5.79234E-06	1.79561E-05	3.70090E-05	7

ANEXO A3: CUERPO CILÍNDRICO CON GRIETA CIRCULAR INTERNA (cont.)

Factores de intensidad de Esfuerzo Normalizados				
ΔK_I^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{II}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{III}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{eq} (MPa.m ^{1/2})	Incremento
0.000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000	0
0.97524636	3.956769E-04	-3.959027E-03	0.97920523	1
1.04138017	1.007261E-03	-5.774204E-05	1.04143694	2
1.60865203	-8.831498E-04	1.228543E-03	1.60742300	3
1.91540968	-1.854628E-03	-1.015765E-06	1.91540890	4
2.52852171	1.021999E-03	1.368300E-03	2.52715300	5
2.96658079	-1.225525E-03	-6.882697E-07	2.96658098	6
3.96960888	9.786483E-04	2.175757E-03	3.96743288	7

Dirección de Propagación de la grieta	
Incremento	Dirección (grados)
0	0.0000000
1	-0.046492
2	-0.110837
3	0.062911
4	0.110955
5	-0.046316
6	0.047339
7	-0.028251

Incremento	Energía Relajada (J/m ²)
0	0.00000000000
1	9.86836589E-02
2	9.81663491E-02
3	8.90053412E-02
4	8.85432244E-02
5	8.80746533E-02
6	8.79956453E-02
7	8.70754654E-02

ANEXO A4: PROBETA CON GRIETA LATERAL INCLINADA

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	1.00769E-06	6.05939E-06	1.01082E-05	1
1.195883257	1.43014E-06	9.50226E-06	1.65236E-05	2
1.366487000	1.86729E-06	1.33870E-05	2.40270E-05	3
1.913429876	3.66121E-06	3.18028E-05	6.18245E-05	4
2.345223100	5.50007E-06	5.36536E-05	1.09460E-04	5
2.720101540	7.39895E-06	7.85456E-05	1.65979E-04	6
2.988025270	8.92830E-06	9.99963E-05	2.16070E-04	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	9.08309E-07	2.01898E-06	5.04624E-06	1
1.195883257	1.38208E-06	3.10837E-06	7.68412E-06	2
1.366487000	1.90288E-06	4.31815E-06	1.05857E-05	3
1.913429876	4.26580E-06	9.90143E-06	2.37651E-05	4
2.345223100	6.94876E-06	1.63506E-05	3.87460E-05	5
2.720101540	9.91595E-06	2.35658E-05	5.53261E-05	6
2.988025270	1.24213E-05	2.97065E-05	6.93327E-05	7

Modelo de Paris y Erdogan				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	8.07058E-07	1.66439E-06	3.84969E-06	1
1.195883257	1.20546E-06	2.47495E-06	5.48319E-06	2
1.366487000	1.63643E-06	3.34837E-06	7.17884E-06	3
1.913429876	3.54001E-06	7.18145E-06	1.41731E-05	4
2.345223100	5.64355E-06	1.13895E-05	2.13806E-05	5
2.720101540	7.92792E-06	1.59394E-05	2.88498E-05	6
2.988025270	9.83265E-06	1.97216E-05	3.48801E-05	7

ANEXO A4: PROBETA CON GRIETA LATERAL INCLINADA (cont.)

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 0.1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	1.46864E-05	4.55392E-05	9.38756E-05	1
1.195883257	1.46922E-05	4.55556E-05	9.39074E-05	2
1.366487000	1.46966E-05	4.55681E-05	9.39316E-05	3
1.913429876	1.47077E-05	4.55996E-05	9.39928E-05	4
2.345223100	1.47144E-05	4.56187E-05	9.40298E-05	5
2.720101540	1.47193E-05	4.56326E-05	9.40568E-05	6
2.988025270	1.47224E-05	4.56414E-05	9.40739E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 1 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	9.20907E-06	2.85552E-05	5.88644E-05	1
1.195883257	9.21269E-06	2.85655E-05	5.88843E-05	2
1.366487000	9.21544E-06	2.85733E-05	5.88995E-05	3
1.913429876	9.22240E-06	2.85931E-05	5.89379E-05	4
2.345223100	9.22661E-06	2.86051E-05	5.89611E-05	5
2.720101540	9.22968E-06	2.86138E-05	5.89780E-05	6
2.988025270	9.23162E-06	2.86193E-05	5.89888E-05	7

Modelo de Kim y Wang				
Frecuencia = 10 Hz				
da/dN (m/ciclo)				
ΔK (MPa.m ^{1/2})	T = 23°C	T = 50°C	T = 70°C	Incremento
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
1.003839690	5.77452E-06	1.79055E-05	3.69107E-05	1
1.195883257	5.77679E-06	1.79119E-05	3.69232E-05	2
1.366487000	5.77851E-06	1.79168E-05	3.69328E-05	3
1.913429876	5.78288E-06	1.79292E-05	3.69568E-05	4
2.345223100	5.78552E-06	1.79367E-05	3.69714E-05	5
2.720101540	5.78744E-06	1.79422E-05	3.69820E-05	6
2.988025270	5.78866E-06	1.79456E-05	3.69887E-05	7

ANEXO A4: PROBETA CON GRIETA LATERAL INCLINADA (cont.)

Factores de intensidad de Esfuerzo Normalizados				
ΔK_I^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{II}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{III}^* (MPa.m ^{1/2})	ΔK_{eq} (MPa.m ^{1/2})	Incremento
0.000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000	0
1.003837250	7.43251E-03	-9.54556E-02	1.003839690	1
1.195883358	4.59474E-02	-8.34874E-02	1.195883257	2
1.366483010	3.10769E-02	7.80794E-02	1.366487000	3
1.913429240	1.81187E-02	-3.46699E-01	1.913429876	4
2.345210800	2.28368E-02	-4.16909E-01	2.345223100	5
2.720103250	1.19996E-02	7.86460E-02	2.720101540	6
2.988043600	-9.07804E-03	-3.32989E-01	2.988025270	7

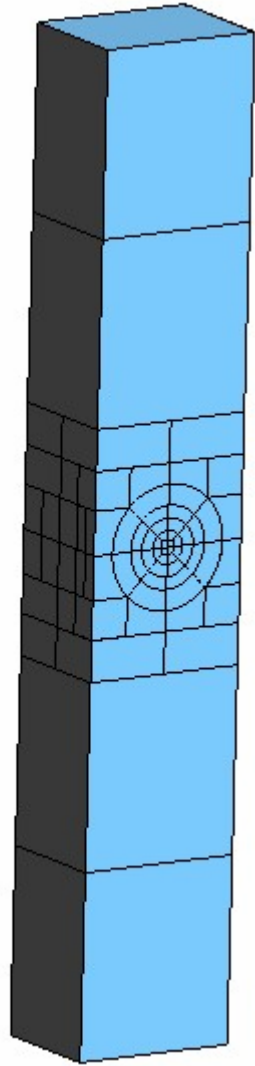
Dirección de Propagación de la grieta	
Incremento	Dirección (grados)
0	0.0000000
1	-0.848335009
2	-4.387678115
3	-2.602917856
4	-1.084862228
5	-1.115593293
6	-0.505490278
7	0.34813706

Incremento	Energía Relajada (J/m ²)
0	0.00000000000
1	4.1234365E-01
2	4.0152434E-01
3	3.9876452E-01
4	3.9520022E-01
5	3.9165438E-01
6	3.8976354E-01
7	3.8735405E-01

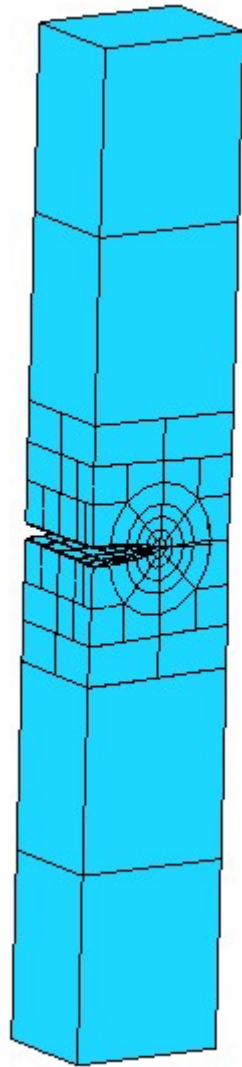
ANEXO B

**GRÁFICO DE LAS MALLAS DEFORMADAS PARA LOS
CUATRO EJEMPLOS ESTUDIADOS**

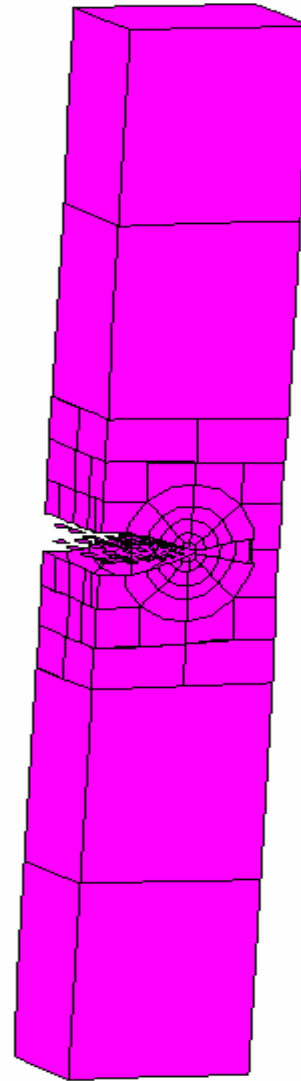
Anexo B1: Deformación por fatiga de la Probeta con grieta lateral.



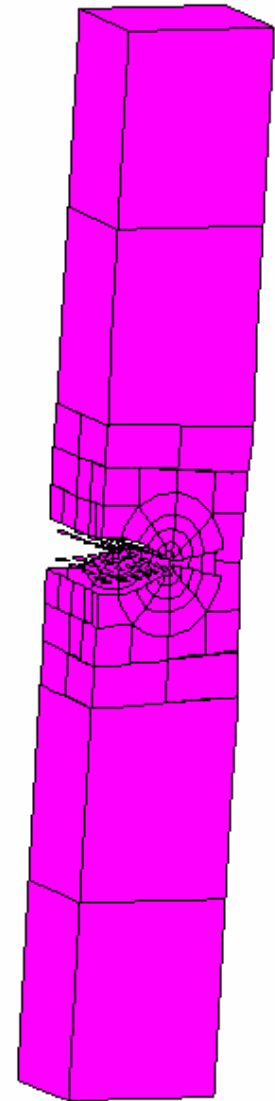
Pieza mallada



Fatiga a T = 23°C

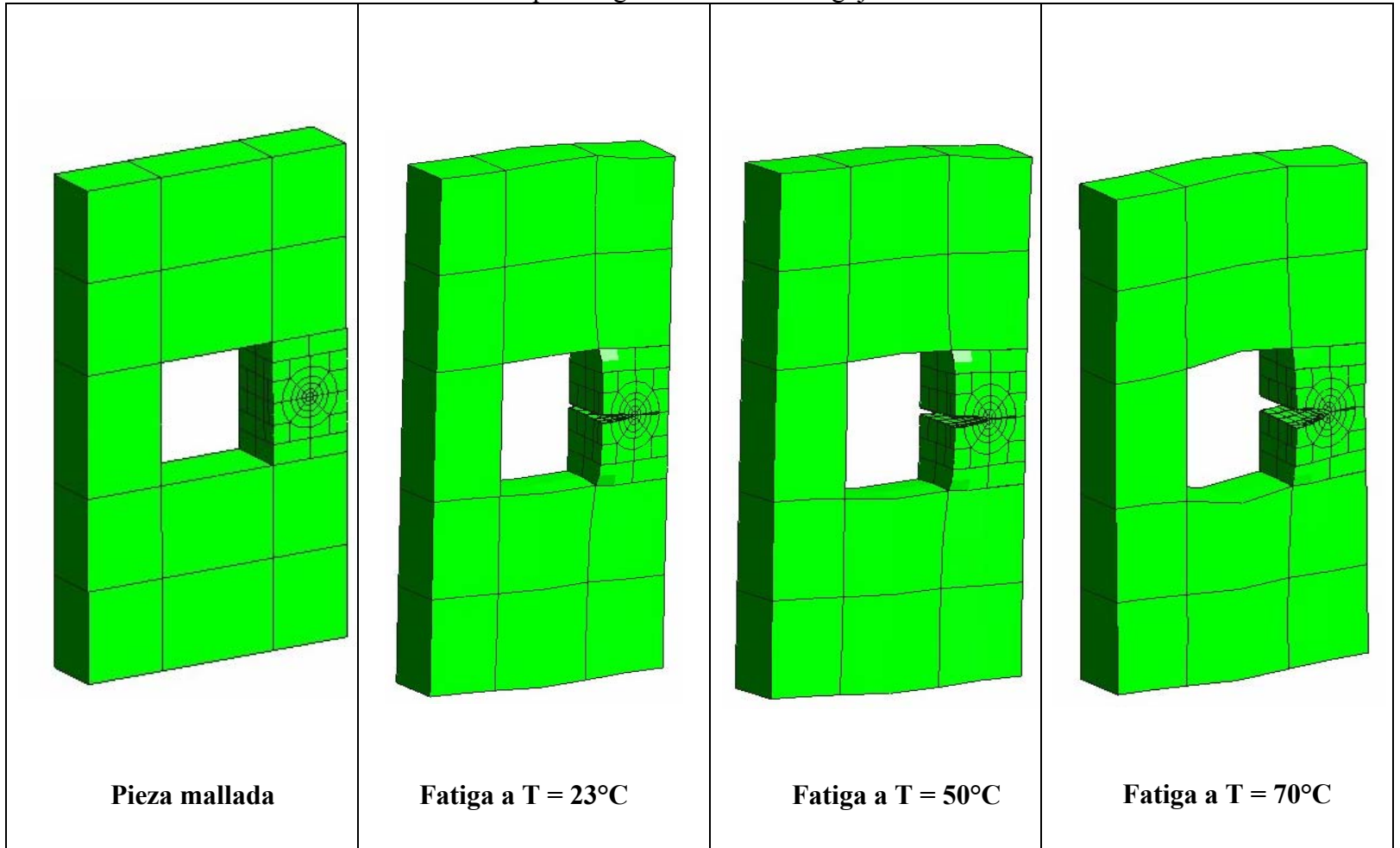


Fatiga a T = 50°C

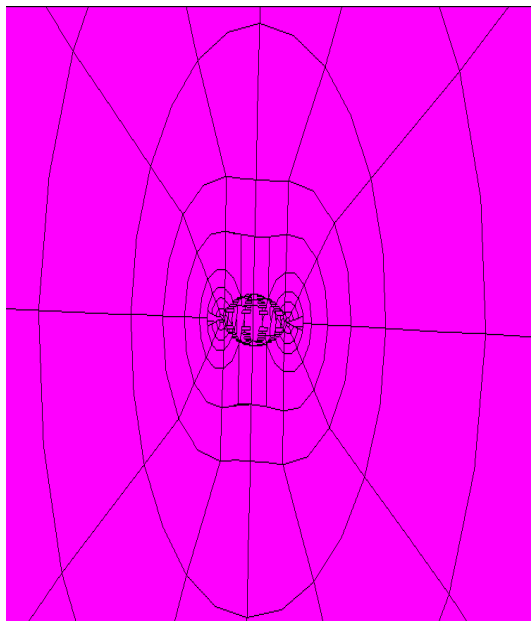


Fatiga a T = 70°C

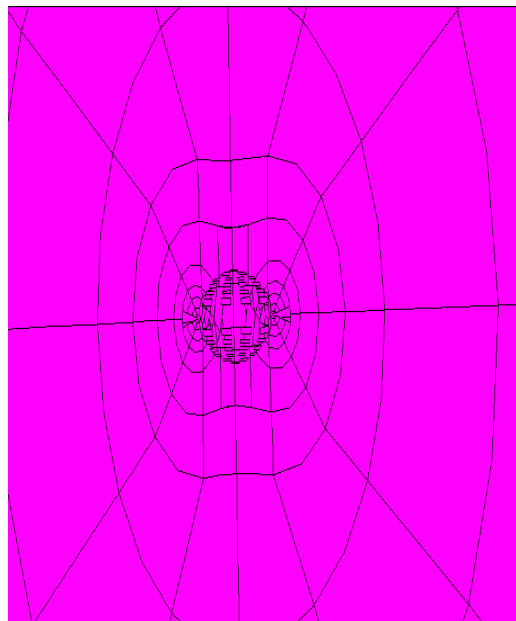
Anexo B2: Deformación por fatiga de la Placa con agujero cuadrado en el centro.



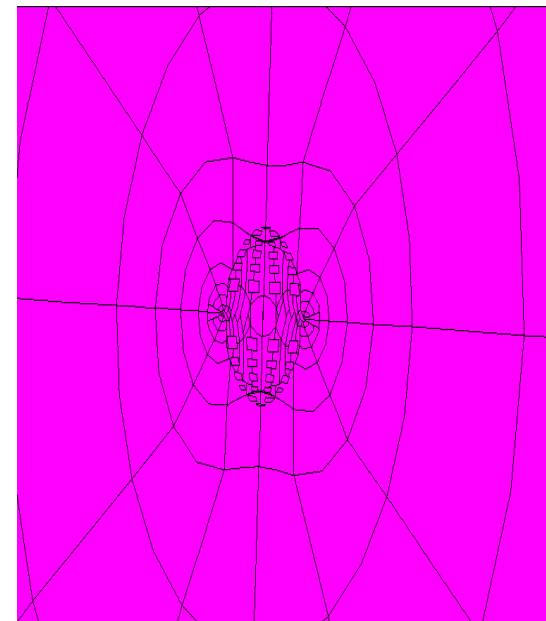
Anexo B3: Apertura de grieta interna circular por fatiga de la barra cilíndrica



Fatiga a T = 23°C

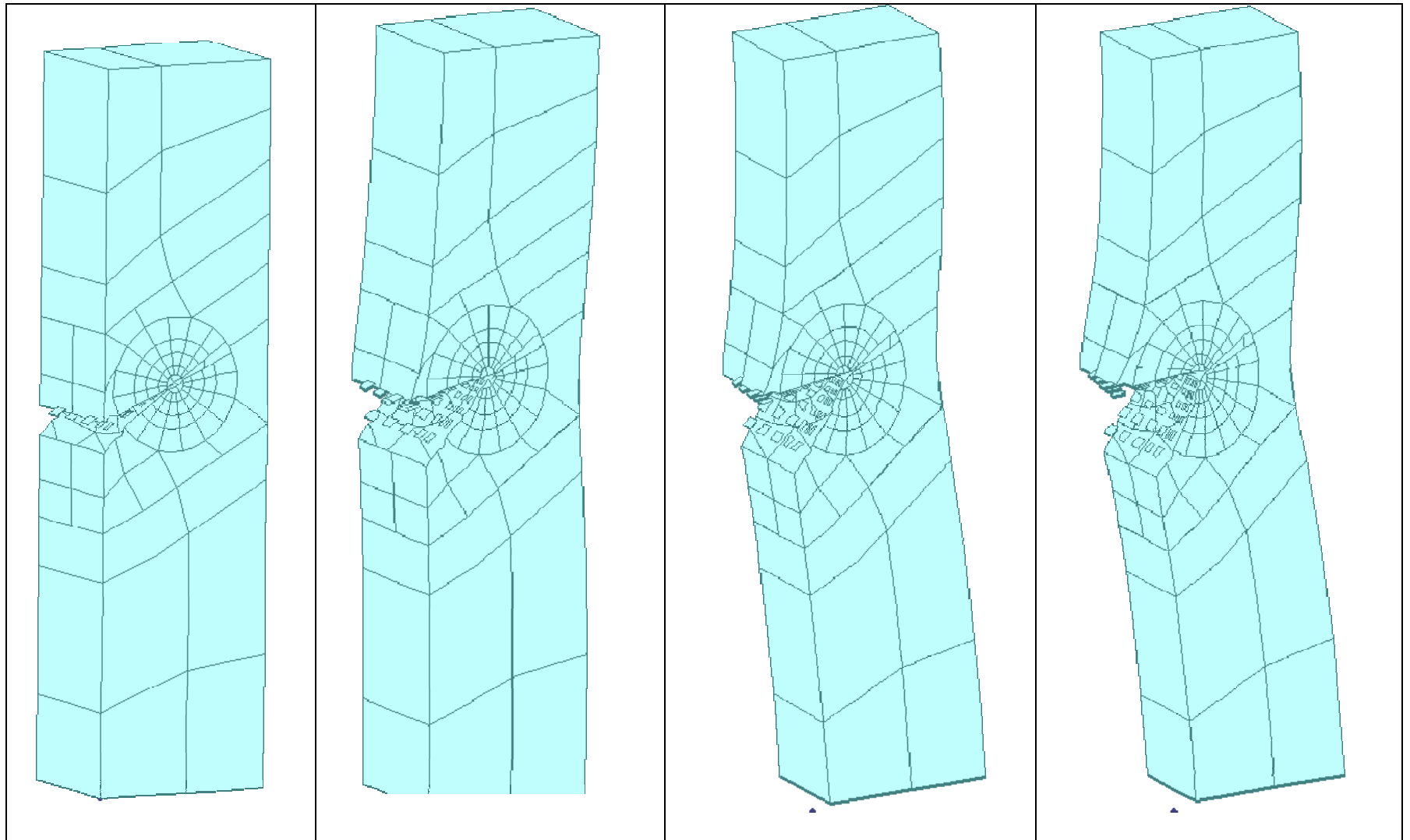


Fatiga a T = 50°C



Fatiga a T = 70°C

Anexo B4: Deformación por Fatiga de la probeta con grieta lateral inclinada.



Pieza mallada

Fatiga a 23°C

Fatiga a 50°C

Fatiga a 70°C