UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE FARMACIA
CATEDRA DE MATEMATICA-FISICA

GUÍA N°5 : Derivadas n-ésimas y aplicaciones de la derivada

I. Para cada una de las siguientes funciones calcular la derivada del orden pedido y simplificarlas.

1. $y = \dfrac{2+3x}{2-3x}$; Hallar y''. Sol. $72(2-3x)^{-3}$
2. $y = \sqrt{4+x^2}$; Hallar y''. Sol. $\dfrac{4\sqrt{4+x^2}}{(4+x^2)^2}$
3. $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$; Hallar y''. Sol. $\dfrac{8(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$
4. $y = tgx + \sec x$. Hallar y''. Sol. $(1+senx)^2 \sec^3 x$
5. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Hallar y'''. Sol. $-\dfrac{12}{(1+x)^4}$
6. $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 8$ .Hallar y'''. Sol. 6
7. $y = sen(3x)$. Hallar $y'''(\pi)$. Sol. 27
8. $y = sen^2(\pi x)$. Hallar $y''(2)$. Sol. $2\pi^2$
9. $y = x\cos(\pi x)$. Hallar $y''(2)$. Sol. $-2\pi^2$
10. $y = x\cos^2(x + \dfrac{\pi}{2})$. Hallar y'''. Sol. $4xsen(2x+\pi) - 6\cos(2x+\pi)$

II. DERIVADAS N-ÉSIMAS: Calcular las siguientes derivadas n-ésimas.

1. $y = xe^x$ Sol. $(x+n)e^x$
2. $y = \dfrac{1}{a+bx}$ Sol. $\dfrac{(-1)^n b^n n!}{(a+bx)^{n+1}}$
3. $y = x\ln x$ Sol. $(-1)^n (n-2)!x^{-(n-1)}$
4. $y = sen(ax)$ Sol. $a^n sen(ax + \dfrac{n\pi}{2})$
5. $y = \ln(x+1)$ Sol. $(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$
6. $y = \log x$ Sol. $(-1)^{n-1}.(n-1)!\log e\, x^{-n}$

7. $y=\cos x$ Sol. $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

8. $y=\frac{1}{x^2}$ Sol. $\frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}}$

9. $y=\frac{1}{3x+2}$ Sol. $\frac{(-1)^n 3^n n!}{(3x+2)^{n+1}}$

10. $y=\frac{2}{1-x}$ Sol. $\frac{2n!}{(1-x)^{-n+1}}$

III. PROBLEMAS DE MOVIMIENTO

1. Las posiciones de dos partículas P_1 y P_2 que se mueven sobre una línea recta al cabo de t segundos son, respectivamente, $S_1(t)=3t^3-12t^2+18t+5$ y $S_2(t)=-t^3+9t^2-12t$. ¿Cuándo tienen la misma velocidad? (Sol. t=5/2 seg. o t=1 seg.)
2. Dos partículas se mueven sobre una línea recta y al cabo de t segundos sus distancias en metros respecto al origen están dadas por $S_1(t)=4t-3t^2$ y $S_2(t)=t^2-2t$, respectivamente.

a) ¿Cuando tienen la misma velocidad? (Sol. t=3/4 seg.)
b) ¿Cuando tienen la misma rapidez? (Sol. t_1=1/2 seg. y t_2=3/4 seg.)
c) ¿Cuando tienen la misma posición? (Sol. t_1=0 seg. y t_2=3/2 seg.)

3. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura de $S(t)=-16t^2+48t+256$ metros después de t segundos.

a) ¿Cuál es su velocidad inicial? (Sol. 48 m/seg.)
b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima? (1.5 seg.)
c) ¿Cuál es su altura máxima? (Sol. 292 m)
d) ¿Cuándo llega nuevamente al piso? (Sol. 5.77 seg.)
e) ¿Con qué velocidad llega al piso? (Sol. 136.7 m/seg.)

4. Un punto recorre en línea recta la distancia $S(t)=\frac{1}{3}t^3-16t$. Determinar la aceleración en el punto en el cual su velocidad se anula. (Sol. a=8 m/seg^2)

5. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba hasta alcanzar la altura $S(t)=6+24t-5t^2$ al cabo de t segundos. ¿Hasta cuándo subirá? ¿Cuál es el punto más alto alcanzado? ¿Qué velocidad y aceleración tiene cuando t=2 seg? (Sol. t=2,4 seg., h=34.8 m, v=4 m/seg. y a=–10 m/seg^2)

IV. PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO

1. El radio de un círculo crece 2 cm cada minuto. Hallar la razón de cambio del área para:

a) R= 6 cm (Sol. 24π cm^2/min)
b) R=24 cm (Sol. 96π cm^2/min)

2. Un globo esférico se hincha a razón de 20 cm^3 por minuto. Cómo varía el radio en el instante en el cual su radio es:

a) 1 cm (Sol. $5/\pi$ cm/min)

b) 2 cm (Sol. $5/4\pi$ cm/min)

3. Todas las aristas de un cubo crecen a razón de 3 cm/seg. ¿con qué rapidez cambia el volumen cuando cada arista mide 10 cm? (Sol. 900 cm^3/seg.)

4. Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada en una pared. Si la base resbala a razón de 2 pies/seg, ¿a qué velocidad baja su extremo superior cuando la base está a 24 pies de la pared? (Sol. −48/7 pies/seg.)

5. Un globo asciende verticalmente a razón de 10 pies/seg. desde un punto A que se encuentra a 100 pies de un observador. Hallar la razón de cambio del ángulo de elevación del globo respecto al observador, cuando éste se encuentra a 100 pies de altura. (Sol. 1/20 rad/seg.)

6. El ancho de un rectángulo es la mitad del largo. ¿A qué razón aumenta su área cuando el ancho mide 10 cm y varía a razón de 0.5 cm/seg. (Sol. 20 cm^2/seg.)

7. Se derrama petróleo de un tanque roto formando una mancha circular. Si el radio del círculo aumenta a razón de 1.5 pies/seg. ¿con qué rapidez aumenta el área cubierta al término de 2 horas? (Sol. 32.400π $pies^2$/seg.)

8. Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas/seg. ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando el radio sea 1.8 pulgadas? (Sol. 0.072π $pulg.^2$/seg.)

V. TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

A. Hallar la ecuación de la tangente y la normal a la curva en los puntos que se indican.

1. $y = x^3$, en P(1,1) — Sol. $3x - y - 2 = 0$; $x + 3y - 4 = 0$
2. $y = x^3 - x^2 + 3$, en M de abscisa x=1 — Sol. $-x + y - 2 = 0$; $x + y - 4 = 0$
3. $\dfrac{x - y}{x - 2y} = 2$, en H(3,1) — Sol. $-x + 3y = 0$; $3x + y - 10 = 0$
4. $y^2 + 2xy - x^2 - 4 = 0$, en T(4,2) — Sol. $x - 3y + 2 = 0$; $3x + y - 14 = 0$
5. $x^2 - xy - y^2 - 2x = 0$, en N(2,0) — Sol. $x - y - 2 = 0$; $x + y - 2 = 0$

B. Hallar los puntos en los cuales la tangente a la curva $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - y = 0$ sea horizontal. (Sol. (−1, 10); (3, −22))

C. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y = x^3 - 2x - 1$ en los cuales la tangente tiene una inclinación de 45°. (Sol. (1, −2); (−1, 0))

D. Hallar los puntos en los cuales la función $y = x^4 - 3x^2 + 2$ tiene tangente horizontal.

(Sol. (0,2); $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{4})$; $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{4})$)

VI. CRECIMIENTO, MÁXIMO, MÍNIMO, PUNTO DE INFLEXIÓN Y CONCAVIDAD

Para cada una de las funciones indicadas hallar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos locales, puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

1. $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
2. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$
3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$
4. $y = x^4 - 2x^2 - 8$
5. $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$
6. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
7. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$
8. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$

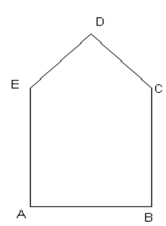
Para las respuestas, ver página siguiente.

Respuestas del ejercicio VI:

#	Crecimiento	Decrecimiento	Máx.	Mín.	Inflexión	Concavidad
1	$(-2,-1/2)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-2)\cup(-1/2,1)$	$(-1/2,81/16)$	$(-2,0)$ $(1,0)$	$(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{9}{4})$ $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{9}{4})$	Hacia arriba: $(-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\infty)$ Hacia abajo: $(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2})$
2	$(-\infty,2)\cup(4,\infty)$	$(2,4)$	$(2,13)$	$(4,9)$	$(3,11)$	Hacia arriba: $(3,\infty)$ Hacia abajo: $(-\infty,3)$
3	$(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$	$(-2,3)$	$(-2,69)$	$(3,-56)$	$(1/2,13/2)$	Hacia arriba: $(-\infty,1/2)$ Hacia abajo: $(1/2,\infty)$
4	$(-1,0)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-1)\cup(0,1)$	$(0,-8)$	$(-1,-9)$ $(1,-9)$	$(-\sqrt{\frac{1}{3}},-\frac{77}{9})$ $(\sqrt{\frac{1}{3}},-\frac{77}{9})$	Hacia arriba: $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt{\frac{1}{3},\infty})$ Hacia abajo: $(-\sqrt{\frac{1}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}})$
5	$(-1/2,0)\cup(1/2,\infty)$	$(-\infty,-1/2)\cup(0,1/2)$	$(0,-2)$	$(-1/2,-33/16)$ $(1/2,-33/16)$	$(-\sqrt{\frac{1}{12}},-\frac{293}{144})$ $(\sqrt{\frac{1}{12}},-\frac{293}{144})$	Hacia arriba: $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{12}})\cup(\sqrt{\frac{1}{12}},\infty)$ Hacia abajo: $(-\sqrt{\frac{1}{12}},\sqrt{\frac{1}{12}})$
6	$(-\infty,1)\cup(3,\infty)$	$(1,3)$	$(1,5)$	$(3,1)$	$(2,3)$	Hacia arriba: $(2,\infty)$ Hacia abajo: $(-\infty,2)$
7	$(-\infty,2)\cup(3,\infty)$	$(2,3)$	$(2,29)$	$(3,28)$	$(5/2,114/4)$	Hacia arriba: $(-\infty,5/2)$ Hacia abajo: $(5/2,\infty)$
8	$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$	$(-1,2)$	$(-1,22)$	$(2,-5)$	$(1/2,17/2)$	Hacia arriba: $(1/2,\infty)$ Hacia abajo: $(-\infty,1/2)$

VII. PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. Encontrar dos números reales positivos tales que su suma sea 50 y su producto sea tan grande como sea posible. (Sol. 25, 25)
2. Con 600 m de alambrada se quiere encerrar un corral rectangular adyacente a un río rectilíneo, el cual actuará como lado, bordeando la alambrada los lados restantes. ¿Cual será el área máxima a encerrar? (Sol. 45.000 m^2)
3. Un rectángulo cuyo perímetro es 36 m, gira alrededor de uno de sus lados generando un cilindro circular recto. ¿Cual es el máximo volumen generado? (Sol. 864π m^3)
4. Compruebe que el rectángulo de máximo perímetro que se puede inscribir en un círculo es un cuadrado.
5. La suma de dos números reales no negativos es 16. Encontrar el valor máximo posible y el mínimo posible de la suma de sus raíces cúbicas. (Sol. max:4, min: $\sqrt[3]{16}$)
6. Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada usando 108 m² de material. ¿Qué dimensiones deben tomarse para que resulte una caja de volumen máximo? (Sol. 6x6x3)
7. Con una hoja de papel cuadrada de “a” centímetros de lado se desea construir una caja sin tapa que tenga un volumen máximo, recortando para ello un cuadrado en cada uno de sus vértices. Determine la longitud del lado de los cuadrados recortados. (Sol. L=a/6 cm)
8. Un triángulo rectángulo gira alrededor de uno de sus catetos, engendrando un cono circular recto. ¿Cuál será el volumen del mayor cono que puede formarse con un triángulo cuya hipotenusa sea de 6 cm? (Sol. R= $2\sqrt{6}$ cm, V=$16\pi\sqrt{3}$ cm^3)
9. Para hacer un filtro cónico se pliega un papel circular de radio R. ¿Cuál será la altura h y el radio r del cono para que resulte un filtro de volumen máximo? (Sol. $h=\frac{1}{3}\sqrt{3}R$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{6}R$)
10. Un terreno tiene la forma de pentágono ABCDE. Si su perímetro es 850 m y se cumple que $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DE}$, calcular las dimensiones para que el área resulte máxima. (Sol. $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DE}=199.16$; $\overline{EA}=\overline{CB}=126,26$)



VIII. REGLA DE L´HÔPITAL

Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L´Hôpital.

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - senx}$ (Sol. 16)

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{senx - x}{x^3}$ (Sol. −1/6)

3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(1 - sen2x)\sec^2 x}{1 + \cos 4x}$ (Sol.1/2)

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x + senx - 1}{\ln(1+x)}$ (Sol. 2)

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ (Sol. 1/a)

6. $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{sen^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right]$ (Sol. 1/3)

7. $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$ (Sol. −1/2)

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{sen2x}$ (Sol.1/2)

9. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos(\pi x)}$ (Sol. $-1/\pi^2$)

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{e^x - \cos x}$ (Sol.0)

11. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x - 5} - x$ (Sol. 0)