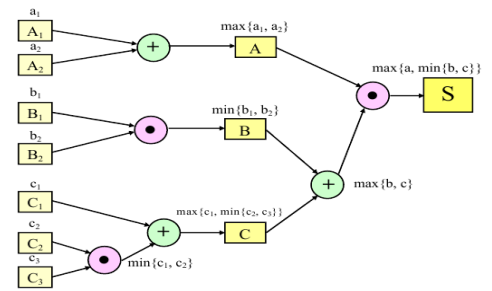
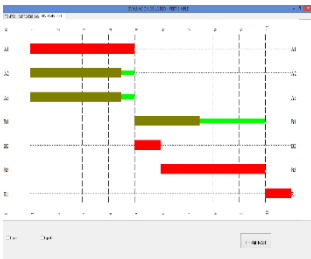


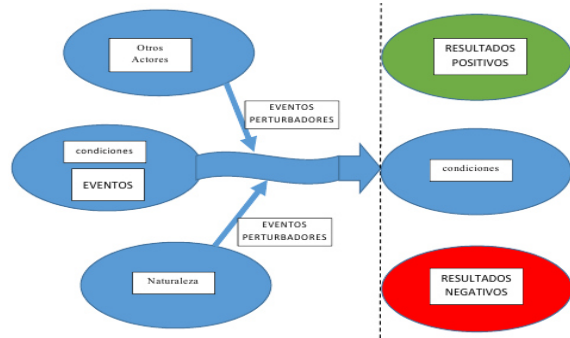
\geq \wedge

\otimes \gg σ

LÓGICA Y PRAXIS



| | | | | |
|----------|---|----------|---|---|
| | | q | | |
| | | V | I | F |
| p | V | V | I | F |
| | I | V | V | I |
| | F | V | V | V |



Por: HENRI THONON

TERCERA EDICIÓN

Abril, 2026

| | |
|---|----|
| PREÁMBULO | 1 |
| INTRODUCCIÓN | 4 |
| PARTE I: FUNDAMENTOS | 8 |
| 1) Lógica | 9 |
| 2) Praxeología | 11 |
| Acciones, actos, conductas, comportamiento. | 25 |
| 3) Decisiones | 28 |
| 3.1.- La Teoría de Decisiones | 28 |
| 3.2.- Principios fundamentales de la Teoría de Decisiones. | 32 |
| 3.3.- Esquema del proceso de decisión | 37 |
| 3.4.- Metadecisiones, decisiones y acciones | 39 |
| 3.5.- El proceso de decisión | 41 |
| 3.6.- Acciones y decisión | 43 |
| 3.7.- Principales componentes de la Teoría de Decisiones. | 44 |
| 4) Investigación de Operaciones | 53 |
| 4.1.- Recuento histórico | 53 |
| 4.2.- Definición de I.O. | 54 |
| 4.3.- Necesidades de la I.O. en las empresas | 57 |
| 4.4.- Naturaleza y metodología de la I.O. | 58 |
| 4.5.- Relación con teoría de decisiones | 65 |
| 4.6.- La I.O. como herramienta de planificación | 66 |
| 5) Modelos | 68 |
| 5.1.- Conceptualización de los intervinientes en la definición de modelo. | 69 |
| 5.2.- Representaciones. | 70 |
| 5.2.1.- Homomorfismos | 72 |
| 5.2.2.- Tipos de representaciones | 73 |
| 5.3.- Taxonomía de los modelos | 74 |
| 5.4.- Los modelos de simulación | 78 |
| 5.4.1.- Definiciones de simulación | 78 |
| 5.4.2.- Técnicas de simulación | 79 |
| 5.4.3.- Metodología de la simulación | 80 |
| 5.4.4.- Técnicas digitales de simulación de sistemas | 81 |

| | |
|--|------------|
| 5.5.- Modelaje y visión de sistemas | 82 |
| PARTE II: LÓGICA | 84 |
| 6) Lógica de Proposiciones | 85 |
| 6.1.- Operadores | 85 |
| 6.1.1.- Operadores primarios | 85 |
| 6.1.2.- Los otros operadores | 86 |
| 6.2.- Tautologías, contradicciones y contingencias. | 87 |
| 6.3.- Aplicaciones | 90 |
| 6.4.- Representación de condiciones lógicas en los problemas de Investigación de Operaciones. | 97 |
| 6.5.- Lógica y evaluaciones | 97 |
| EJERCICIOS | 102 |
| 7) Lógica de Predicados y Cuantificadores | 104 |
| 7.1.- Generalización del cuantificador existencial. | 107 |
| 7.2.- Relaciones | 108 |
| 7.3.- Aplicaciones | 110 |
| <u>APENDICE SOBRE CONJUNTOS</u> | 113 |
| Propiedades y operaciones de los conjuntos | 113 |
| Relación entre lógica de predicados y conjuntos | 116 |
| Cardinalidad de conjuntos y cuantificadores existenciales generalizados. | 117 |
| 8) Lógica de Enunciados Trivalentes. | 119 |
| 8.1.- Operadores | 119 |
| 8.2.- Operadores modificados. | 121 |
| 8.3.- Tautologías. | 122 |
| 9) Lógicas Normativa y Modal, y Operadores Temporales. | 125 |
| 9.1.- Las preguntas fundamentales de la toma de decisiones | 125 |
| 9.2.- Las lógicas normativa y modal | 125 |

| | | |
|-------------------|---|------------|
| 9.3.- | Los operadores normativos (referidos a acciones o programas). | 126 |
| 9.4.- | Los operadores modales (referidos a resultados de programas) | 127 |
| 9.5.- | Aplicaciones a la toma de decisiones. | 128 |
| 9.6.- | El factor tiempo. | 129 |
| 9.7.- | Aplicaciones | 129 |
| 10) | Lógica Probable | 133 |
| 10.1.- | La lógica probable como un refinamiento de la lógica modal. | 134 |
| 10.2.- | Aplicaciones | 135 |
| 11) | Principios Lógicos de la Causalidad | 142 |
| 11.1.- | Causas y efectos | 142 |
| 11.2.- | Tipología de las Causas | 143 |
| 11.3.- | Eventos perturbadores, atenuantes e inhibidores | 145 |
| 11.4.- | Situaciones o condiciones y sus tipos | 147 |
| 11.5.- | Principio de la Rapidez de Respuesta. | 148 |
| 11.6.- | Notas Conclusivas | 149 |
| 11) | Lógica Vaga O Imprecisa | 152 |
| 12.1.- | Axiomas de los conjuntos difusos | 152 |
| 12.2.- | Veracidad de un enunciado | 152 |
| 12.3.- | Otras formulaciones | 153 |
| 12.4.- | La implicación y doble implicación. Sus formulaciones | 154 |
| 12.5.- | Aplicaciones | 157 |
| ANEXOS | | |
| A.- | LÓGICA Y REFERENTES | 160 |
| A.1.- | Lógica de Predicados | 161 |
| A.2.- | Lógica Modal | 162 |
| A.3.- | Lógica Normativa | 163 |
| A.4.- | Referentes y Sentencias sin sentido | 164 |
| A.5.- | Referentes y Falacias | 164 |
| A.6.- | El Referente Universal | 164 |
| A.7.- | Intersección de Referentes | 165 |

| | |
|---|-----|
| A.8.- Inclusión de un referente en otro | 167 |
| A.9.- Unión de Referentes | 170 |
| A.10.- Aclaratoria Final | 171 |
| Conclusión | 171 |
| Lista de Símbolos | 172 |
| B.- LA VERDAD | 173 |
| B.1.- Conceptos de Verdad | 173 |
| B.2.- Comprobación y refutación | 175 |
| B.3.- Verdad y ciencia | 176 |
| B.4.- Verdad Probable o Verdad de una probabilidad. | 176 |
| B.5.- Verdades aproximadas | 177 |
| C.- REFLEXIONES SOBRE ENUNCIADOS INCOMPATIBLES. | 178 |
| PARTE III: NORMAS | 179 |
| 13) Acercamiento a una Teoría Racionalista de las Normas | 180 |
| 13.1 Conceptos iniciales | 181 |
| 13.2 Normas útiles | 182 |
| 13.3 Racionalidad de las normas | 186 |
| 13.4 Algunas deducciones e implicaciones | 187 |
| 14) Normas y Entorno | 191 |
| 14.1 Normas contraproducentes | 191 |
| 14.2 ¿Útiles para quién? | 192 |
| 14.3 Normas y circunstancias. | 194 |
| 14.4 Normas y temporalidades intra e inter generacionales. | 195 |
| 14.5 Normas y libre albedrío | 196 |
| 15) Normas y Política | 198 |
| 15.1.- Normas y tiranías | 198 |

| | | |
|------------------------------|--|------------|
| 15.2- | Normas y populismo y demagogia | 199 |
| 15.3- | Normas y acuerdos | 200 |
| PARTE IV: PRAXEOLÓGÍA | | 210 |
| 16) | Principios | 211 |
| 16.1.- | Eficiencia y productividad | 212 |
| 16.2.- | Praxeología, sostenibilidad y sustentabilidad | 215 |
| 16.3.- | Eficiencia y utilidad de las normas y prescripciones | 216 |
| 16.4.- | Normas, procedimientos y praxeología | 217 |
| 16.5- | Lógica y Praxeología. | 218 |
| 16.5.1.- | Formulación. | 218 |
| 16.5.2.- | La relación de eficiencia. | 219 |
| 16.5.3.- | Acciones y causalidad | 220 |
| 16.5.4.- | Lógica de las acciones. | 222 |
| 16.5.5- | Prevención y Praxeología | 223 |
| 17) | Algunas Herramientas para la Praxeología | 224 |
| 17.1.- | Praxeología y programación dinámica | 224 |
| 17.2.- | Programación por metas | 228 |
| 17.2.1.- | Pasos para la programación por metas | 228 |
| 17.2.2.- | Técnicas | 228 |
| | EJEMPLO | 233 |
| 17.3.- | PERT/CPM | 240 |
| 17.3.1.- | Obtención de los pasos críticos. | 245 |
| 17.3.2.- | Un algoritmo más “computacional” | 246 |
| 17.3.3.- | Modelo de programación lineal | 247 |
| 17.3.4.- | Tiempos inciertos (el PERT) | 248 |
| 17.3.5.- | Tiempos difusos | 249 |
| 17.3.6.- | CPM/COSTOS | 255 |
| 17.3.7.- | CPM/RECURSOS | 257 |
| 18) | Funciones de Producción | 259 |
| | Introducción | 259 |
| 18.1.- | Conceptos de básicos | 260 |
| 18.1.1.- | Propiedades de una Función de Producción. | 260 |
| 18.1.2.- | Las "Buenas" Funciones de Producción. | 262 |
| 18.1.3.- | Funciones de Producción Generalizadas. | 263 |

| | |
|--|------------|
| 18.2.- La programación económica | 264 |
| 18.2.1.- Análisis de las soluciones | 266 |
| 18.3.- Función Factor-Producto. | 267 |
| 18.2.1.- Propiedades | 268 |
| 18.4.- Función de Cobb-Douglas. | 270 |
| 18.3.1.- Propiedades | 271 |
| 18.3.2.- Otras Propiedades Adicionales de la Función de Cobb-Douglas. | 272 |
| 18.5.- Función Elasticidad de Sustitución Constante (CES) | 274 |
| 18.4.1- Propiedades | 275 |
| 18.4.2.-Otras propiedades adicionales de la función CES. | 276 |
| 18.6.- Factores de producción con saturación | 277 |
| 18.6.- Descuentos en los insumos | 278 |
| 19) El Riesgo, La Incertidumbre y Lo Difuso | 279 |
| 19.1.- Costo de oportunidad | 279 |
| 19.2.- El riesgo | 281 |
| 19.3.- La incertidumbre | 281 |
| 19.4.- Lo difuso | 284 |
| 19.5.- Obtención de Soluciones | 284 |
| 20) Algunas Herramientas de IO | 287 |
| 20.1.- La Programación lineal | 287 |
| 20.2.- La Teoría de juegos | 290 |
| 20.3.- La Teoría de Colas | 290 |
| 20.4.- La Teoría de Inventarios | 292 |
| 20.5.- Los Procesos Estocásticos | 292 |
| 21) Praxeología Normativa y Praxeología Positivista | 294 |
| 21.1.- El Uso Del Análisis Causal En El Análisis Histórico. | 295 |
| ANEXOS | |
| D.- ÓPTIMO PARETO | 297 |
| D.1.- Relación (de) Pareto | 297 |

| | | |
|------------|---|------------|
| D.2.- | Óptimo (de) Pareto | 297 |
| E.- | PROGRAMACIÓN ECONÓMICA | 299 |
| E.1.- | El problema de optimización clásico | 299 |
| E.2.- | El problema clásico con restricciones | 299 |
| E.3.- | El problema de programación económica sin restricciones | 300 |
| E.4.- | El problema de programación económica restringido | 300 |
| E.5.- | Problema de Programación Lineal. (PL) | 302 |
| E.6.- | Programación Cuadrática (PQ) | 302 |
| E.7.- | Programación geométrica (PG) | 303 |
| F.- | ALGORITMOS | 305 |
| F.1.- | El algoritmo dual simplex | 305 |
| F.2.- | Algoritmo de pivoteo | 306 |
| F.3.- | Algoritmo del pivote complementario | 307 |
| G.- | INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN CONDICIONES BORROSAS | 308 |
| G.1.- | Introducción | 308 |
| G.2.- | Definiciones Borrosas (o Difusas) | 309 |
| G.3.- | Conceptos Fundamentales | 310 |
| G.4.- | Planteamiento General de los Problemas de I.O. | 314 |
| G.5.- | Resolución de Problemas de I.O. con Condiciones Borrosas | 315 |
| | EPÍLOGO | 322 |
| | BIBLIOGRAFÍA | 324 |

PREÁMBULO

a la 3ra edición

A esta tercera edición, además de realizarle unas correcciones menores a la segunda edición se le anadió en la parte de Lógica un capítulo (capítulo 8) sobre la Lógica Trivalente y un anexo sobre los opuestos (anexo C) y a la parte de Praxeología se le añadió un anexo (anexo G) sobre Investigación de Operaciones en Condiciones Borrosas

PREÁMBULO

a la 2da edición

Si bien, esta segunda edición, es muy parecida a la primera, tiene los siguientes cambios respecto a la primera:

1. Se corrigieron varios errores de redacción.
2. Se añadió el capítulo 20 **Praxeología Normativa y Praxeología Positiva**.
3. El capítulo 10, **Principios Lógicos de la Causalidad**, se actualizó en base al artículo publicado **CAUSALIDAD Y DECISIONES**. En base a este mismo artículo se actualizó la sección 15.5.3.- **Acciones y causalidad**
4. Se adicionó al final un **EPÍLOGO**.
5. Se adicionó en la lista de libros dedicados a la Praxeología el de **Heinrich Wilhelm Schäfer**.

Espero, que al igual que la primera edición, sea útil para todos los que requieran consultarla.

INTRODUCCIÓN

Este libro es producto de un largo camino de investigación, de varios años dedicado a estos temas. Si bien esta basado en gran parte en trabajos publicados: Trabajos de ascensos, ensayos publicados, monografías, material de apoyo elaborado para los estudiantes, en diversas épocas¹. Su elaboración final no fue sencilla, ya que trata uno de evitar las redundancias, reordenar temas, dar un estilo único y también evitar ser demasiado extenso. De hecho hay temas que se dejaron para la elaboración de otro libro (u otros libros).

-
- ¹ La lista, a posible excepción de alguna omisión es la siguiente:
- **Praxeología de los Servicios Sociales Públicos** (Tesis Doctoral en Ciencias Sociales, UCV, 1992).
 - **Conceptos, Teorías y Modelos. Un enfoque sistémico.** (Trabajo de ascenso para la categoría de Prof. Asociado, UCV, 2014).
 - **Normas y Praxeología. Una propuesta para unas normas útiles para acciones eficientes con resultados sustentables.** (Trabajo de ascenso para la categoría de Prof. Titular, UCV, 2017).
 - *La Función de Cobb-Douglas y sus usos en la Programación Económica.* Publicación aparecida en la revista "Investigación y Gerencia". Vol.II-No. 4. Octubre-Diciembre 1985.
 - **Decisión, conocimiento, información y acción.** Cuadernos de Postgrado N° 22. Temas Actuales en Ciencias Administrativas: Organización y Entorno. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2005
 - **Lo normativo y lo prescriptivo en la Gerencia.** Cuadernos de Postgrado N° 23. Ética y Praxis Administrativa. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2005
 - **La Administración Científica y la Investigación de Operaciones.** Cuadernos de Postgrado N° 25. Tópicos, Métodos y Problemas de Investigación en Ciencias Administrativas. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2007.
 - **Decisiones: Teoría y Práctica.** Cuadernos de Postgrado N° 26. La Gestión en Escenarios de Transformación. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2008.
 - **El derecho de las generaciones futuras: un reto.** Cuadernos de Postgrado N° 28. Gerencia y Condición Humana. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2008.
 - **Gerencia y Mitos.** Cuadernos de Postgrado N° 30. Gerencia y Nuevas Realidades Sociales. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2013.
 - **¿Decisiones Colectivas o Acuerdos de Colectivos?,** A publicarse en RELEA #39
 - **Lógica y Análisis de Decisiones.** Edición multigráfica.
 - **Funciones de Producción y Programación Económica.** Edición multigráfica.
 - **Metodos de Optimización.** (Material de apoyo)
 - **Decisiones Bajo Riesgo e Incertidumbre.** (Material de Apoyo)
 - **Programación Dinamica.** (Material de Apoyo)
- Copia de los mismos se pueden localizar mediante el www.hthonon.blogspot.com.

. Pero también se desarrollaron temas nuevos tales como **PRINCIPIOS LÓGICOS DE LA CAUSALIDAD** y **PRINCIPIOS LÓGICOS DEL LIBRE ALBEDRÍO**

El libro se divide en cuatro partes:

La primera parte trata de los fundamentos de la lógica, de la praxeología con un recuento histórico de la misma, de las decisiones, de la investigación de operaciones y por último de los modelos.

La segunda parte está dedicada a la lógica, empezando por la lógica proposicional, pasando por las lógicas de predicado y cuantificadores, la lógica trivalente, las lógicas normativa y modal, el uso de operadores temporales, la lógica probable, los principios lógicos de la causalidad y del libre albedrío y la lógica vaga o imprecisa. Además de tres anexos, uno sobre **Lógica y Referentes**, otro sobre **La Verdad** y uno respecto a **Reflexiones Sobre los Opuestos**

La tercera parte está dedicada a las **normas**, en donde se comienza con un **acercamiento a una teoría racionalista de las normas**, para proseguir con la relación entre **normas y entorno** y terminar con el tema de **normas y política**.

Y por último, la cuarta parte está dedicada a la **praxeología**. Empezando por sus **principios** - entre los cuales se encuentran los conceptos de eficiencia y productividad, sustentabilidad y sostenibilidad y las relaciones de la praxeología con las normas y la lógica en general - , para proseguir con algunas **herramientas** como la programación dinámica, la programación por metas y el PERT/CPM. Se tiene un capítulo dedicado a **las funciones de producción**, para luego adentrarse en la problemática del **riesgo, la incertidumbre y lo difuso**. Para

terminar se señalan de manera resumida algunas herramientas de investigación de operaciones y unas reflexiones sobre la praxeología positivista o descriptiva.

Esta última parte tiene adicionalmente cuatro anexos, uno respecto al **óptimo Pareto**, el segundo trata de manera resumida lo que es la **programación económica**, el tercero sobre los **algoritmos** referidos en el anexo anterior y por último el **I.O. en Condiciones Borrosas**-

Se culmina el libro con un **epílogo**.

Es de notar que el programa utilizado para resolver los problemas de programación económica fue el GLQIP, igualmente para el desarrollo del ejemplo de decisiones bajo riesgo se utilizó el DRI, para el ejemplo del Pert el PBPERTCPM, todos desarrollados por el autor de este libro y los cuales se pueden descargar del blog www.hthonon.blogspot.com.

PARTE I

FUNDAMENTOS

CAPITULO 1

LÓGICA

El tema central de la lógica como disciplina es el estudio del razonamiento en cuanto a su validez. Esto es, trata de contestar la siguiente pregunta ¿Cuál es el grado de validez de un razonamiento en base a sus componentes, estructura y forma?

Pero que un razonamiento sea válido no implica que sus conclusiones sean verdaderas. Para determinar la veracidad de una afirmación además de analizar su validez es necesario analizar el contexto en la cuál ha sido enunciada, para lo cuál se expone en el anexo II-A un ensayo titulado LÓGICA Y REFERENTES.

Existen varios tipos de lógica entre la cuales cabe mencionar las siguientes:

1-. Lógica de Proposiciones.

Esta es una de las lógicas clásicas y para la misma su elemento básico de análisis son las proposiciones, esto es enunciados susceptibles de ser verdaderos o falsos.

2-. Lógica de Predicados y Cuantificadores.

Esta es otra de las lógicas clásicas y la misma considera que las proposiciones constan de sujeto y predicado. Además considera si el predicado se puede aplicar a todos los sujetos, a ninguno o a algunos.

3.- Lógica Normativa

La lógica normativa trata sobre las acciones a realizar, esto es si una determinada acción o un conjunto de acciones se deben realizar obligatoriamente, si estas acciones están permitidas llevarse a cabo o si al contrario, están prohibidas ejercerlas.

4.- Lógica Modal

Mientras que la lógica modal trata sobre la posibilidad de la ocurrencia de algún hecho. Esto es si algo necesariamente debe ocurrir, si solo es posible que ocurra o si es imposible que ocurra.

5.- Lógicas Divergentes

Incluye lógicas de múltiples valores tales como la **lógica trivalente**, la **lógica difusa o borrosa**, la **lógica probable** y lógicas con operadores de diversos tipos tales como el temporal y el referencial.

Gran parte de estas lógicas serán desarrolladas en la parte I, ya que están involucradas en la toma de decisiones y en la praxeología en general.

CAPÍTULO 2

PRAXEOLOGÍA

El término praxeología fue introducido por primera vez en 1890 por el sociólogo francés Alfred Espinas, en su obra *Les Origines de la Technologie: étude sociologique*. La primera obra sobre praxeología fue escrita por el matemático soviético Eugenio Slutski en 1926.

Pero también, vale recordar a Daniel Folkmar, el cual tanto en su tesis doctoral titulada *L'ANTHROPOLOGIE PHILOSOPHIQUE CONSIDÉRÉE COMME BASE DE LA MORALE*, publicada en 1899, y en su libro *LEÇONS D'ANTHROPOLOGIE PHILOSOPHIQUE: SES APPLICATIONS A LA MORALE POSITIVE*, publicado en 1900, se refiere a la praxeología, definiéndola como: “la ciencia que estudia las acciones humanas.” Pero también establece la metodología de la practica mediante los siguientes pasos: “1° Las ideas de un fin; 2° el deseo de alcanzarlo; 3° idea de los medios para alcanzarlo, materiales, medios, procesos; 4° escogencia de los medios; 5° volición al estado completo o acción.” Y en el caso de acciones repetitivas: “6° El acostumbramiento”.²

Una de las elaboraciones más sistemática sobre esta ciencia se debe al sabio polaco Tadeus Kortabinski en 1955, quien ya había planteado ideas sobre la misma en 1913. G.Kalinowski, en un artículo sobre Kortabinski³, cita las siguientes definiciones utilizadas por este:

a) Como ciencia:

(²) Es de notar, que estos pasos coinciden en gran parte con los que se plantea, hoy en día, en la Investigación de Operaciones.

(3) Kalinowski, Georges: La praxéologie de T. Kotarbinski. En: Archives de Philosophie, Tome 43, Cahier 3, 1980, Págs. 453- 463.

- "la ciencia de la acción eficaz o racional",
 - "la ciencia dirigida a convertir la acción en eficaz",
 - "la ciencia de las condiciones de la eficacia de la acción" y
 - "la ciencia de los métodos de acción";
- b) Como teoría:
- "la teoría de la organización de la acción" y
 - "teoría general de la acción eficaz".
- c) Como técnica:

"(...) los praxeólogos se dan como objetivo la investigación de las generalizaciones más amplias de carácter técnico. Se trata aquí de la técnica del buen trabajo en tanto que tal (...). Que nace un conjunto racionalmente ordenado de directivas justificadas - positivas o negativas - validas en todos los dominios del trabajo y en todas las especialidades."

Este término fue utilizado mucho por el economista austriaco Ludwig Von Mises, aunque de manera equívoca ya que lo confundió e identificó con la Economía Política. En los años 1965-1967 Oscar Lange retoma el término definiéndolo como "La Ciencia de la actividad racional", distinguiendo dentro de ésta dos ramas: La Investigación de Operaciones y la Ciencia de la Programación. Y en 1973 J. Ostrowski consagra un libro a la historia de la misma.⁴

En su diccionario de Ciencias Sociales, Paul Foulquié la define como:

(4) Parte del resumen histórico fue hecho en base a las notas sobre praxeología en los libros de Oscar Lange: Teoría General de la Programación, ediciones Ariel, Barcelona, 1971 y Economía Política, F.C.E., México, 1966, y en La Théorie du Système Général. Théorie de la Modélisation por Jean-Louis Le Moigne, P.U.F., 1984.

"Ciencia de la acción. Investigación consistente en determinar cuál es el mejor método para resolver problemas prácticos que se plantean en las empresas humanas"⁵.

De igual manera L. Apostel usa el término como Sinónimo de "teoría general de la acción"⁶ al igual que L.M. Morfaux⁷ que le da las siguientes dos acepciones:

- a) "Ciencia o teoría de la acción";
- b) "conocimiento de las leyes de la acción humana que conduce a conclusiones operatorias".

y el Diccionario de Filosofía ubica la praxeología en la

"esfera de las investigaciones sociológicas, que estudia la metodología del análisis de las distintas acciones o los conjuntos de ellas desde el punto de vista del establecimiento de su eficiencia"⁸.

Así la praxeología es la ciencia de las decisiones y actividades racionales cuyos resultados se miden a través de la eficacia y eficiencia de las mismas. De esta manera la praxeología abarca la Investigación de Operaciones, la Programación y Planificación Estratégica, la Toma de Decisiones, pero correlativamente trata también los problemas de medición de eficacia, eficiencia y productividad, etc.⁹

(5) Foulquié, Paul: Vocabulaire des Sciences Sociales. P.U.F. Paris. 1978. Pág. 269.

(6) Apostel, Léo: Sintaxis, Semántica y Pragmática. En Tratado de Lógica y Conocimiento Científico, dirigido por Jean Piaget. Paidós. Buenos Aires. 1979. Vol. II, Pág. 157.

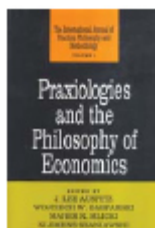
(7) Morfaux, Louis-Marie: Diccionario de Ciencias Humanas. Ediciones Grijalbo, S.A.. Barcelona. 1985. Pág. 272.

(8) Diccionario de Filosofía. Editorial Progreso. Moscú. 1984. Pág. 345.

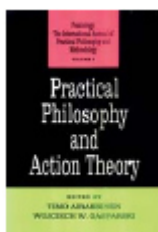
(9) Aunque M. Bunge considera que "La praxeología estudia la acción humana en general, sea racional o irracional, buena o malvada", pero sí considera que "El estudio de la acción racional esta mejor encajinado".
Bunge, Mario: Epistemología. Editorial Ariel, S.A.. Barcelona. Pág. 227.

Entre algunas obras recientes en praxeología que es importante mencionar se destacan las siguientes:

La serie: **Praxiology: The International Annual of Practical Philosophy and Methology**, que se publica desde 1992 por la editorial **Transaction Publisher of Record in International Social Science** y cuyo editor es Wojciech W. Gasparski¹⁰, que está compuesto por los siguientes volúmenes:



- 1) Praxiologies and the Philosophy of Economics. Editores: J. Lee Auspitz, Wojciech W. Gasparski, Marek K. Mlicki, y Klemens Szaniawski. (1992)



- 2) Practical Philosophy and Action Theory. Editores: Timo Airaksinen and Wojciech W. Gasparsk. (1993)



- 3) Design and Systems. General Applications of Methodology. Editores: Arne Collen and Wojciech W. Gasparsk. (1994)

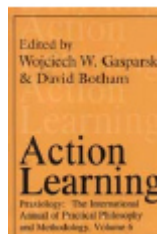
¹⁰ **Wojciech Władysław Gasparski** (nacido [el 10 de octubre de 1936](#) en [Varsovia](#) , fallecido [el 18 de mayo de 2022](#) allí ^[1] - [profesor](#) , uno de [los precursores polacos](#) de la praxeología, teoría de sistemas, ciencia, organización y gestión, ética de la vida económica ^{[2][3]}. Nota Tomada de Wikipedia.



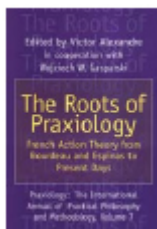
- 4) Social Agency. Dilemmas and Education. Editores: Wojciech Gasparski, Marek K. Mlicki, y Bela H. Banathy. (1995)



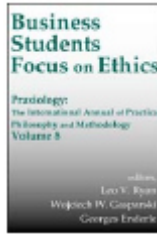
- 5) Human Action in Business. Praxiological and Ethical Dimensions. Editores: Wojciech W. Gasparski y Leo V. Ryan. (1996)



- 6) Action Learning. Editores: Wojciech W. Gasparski y David Botham (1998)



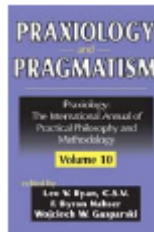
- 7) The Roots of Praxiology. French Action Theory from Bourdeau and Espinas to Present Days. Editores: Victor Alexandre y Wojciech W. Gasparski. (1999)



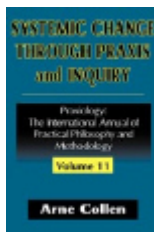
8) Business Students Focus on Ethics. Dedicado a 2000 World ISBEE Congress. Editores: Leo V. Ryan, Georges Enderle, y Wojciech W. Gasparski. (2000)



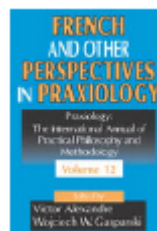
9) Ethics and the Future of Capitalism. Editores: László Zsolnai y Wojciech W. Gasparski. (2002)



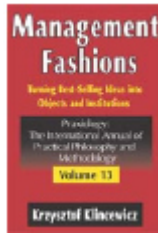
10) Praxiology and Pragmatism Praxiology. Editores: Leo V. Ryan, CSV, Wojciech W. Gasparski, yF. Byron Nahser. (2002)



11) Systemic Change through Praxis and Inquiry. Autor: Arne Collen.(2003)



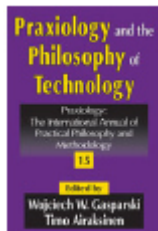
12) French and Other Perspectives in Praxiology. Editores: Victor Alexandre y Wojciech W. Gasparski. (2005)



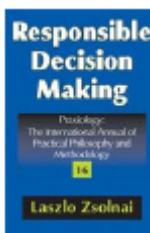
- 13) Management Fashions. Turning Best-Selling Ideas into Objects and Institutions. Autor: Krzysztof Klineciewicz. (2006)



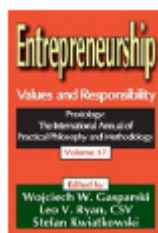
- 14) Positive Ethics in Economics. Editores: Jérôme Ballet y Damien Bazin. (2006)



- 15) Praxiology and the Philosophy of Technology. Editores: Wojciech W. Gasparski y Timo Airaksinen. (2007)



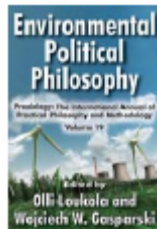
- 16) Responsible Decision Making. Autor: Laszlo Zsolnai. (2008)



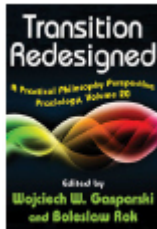
- 17) Entrepreneurship. Values and Responsibility. Editores: Wojciech W. Gasparski, Leo V. Ryan, CSV, y Stefan Kwiatkowski. (2009)



- 18) Whistleblowing. In Defense of Proper Action. Editores: Marek Arszulowicz, y Wojciech W. Gasparski. (2010)



- 19) Environmental Political Philosophy. Editores: Olli Loukola y Wojciech W. Gasparski. (2012)



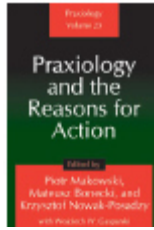
- 20) Transition Redesigned. A Practical Philosophy Perspective. Editores: Wojciech W. Gasparski y Boleslaw Rok. (2013)



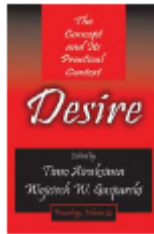
- 21) A Treatise on Good Robots. Editores: Krzysztof Tchon y Wojciech W. Gasparski. (2013)



- 22) Designology. Studies on Planning for Action. Editores: Wojciech W. Gasparski y Tufan Orel. (2014)



23) Praxiology and the Reasons for Action. Editores: Piotr Makowski, Mateusz Bonecki, Krzysztof Nowak-Posadzy y Wojciech W. Gasparski. (2015)



24) Desire. The Concept and Its Practical Context. Editores: Timo Airaksinen y Wojciech W. Gasparski. (2016)



25) Praxiological Essays. Texts and Contexts. Editor: Wojciech W. Gasparski. (2017)

La mayoría de estos volúmenes de pueden comprar por google.

Otro libro que vale la pena mencionar es **PRAXIOLOGICAL STUDIES. Polish Contributions to the Science of Efficient Action**, cuyos editores fueron WOJCIECH GASPASKI y TADEUSZ PSZCZOŁOWSKI, publicado por D. REIDEL PUBLISHING COMPANY en 1982, en el cual se tienen artículos y material de los siguientes autores:

TADEUSZ KOTARBIIJSKI, JAN OSTROWSKI, EUGENIUSZ GEBLEWICZ, WOJCIECH GASPASKI, KLEMENS SZANIAWSKI, TADEUSZ PSZCZOŁOWSKI, TADEUSZ WOJCIK, MARIA NOWAKOWSKA, JO-

ZEF KONIECZNY, HENRYK GRENIEWSKI, OSKAR LANGE, EDWARD LENIEWICZ, JAROSLAW RUDNIAN-SKI, JAN ZIBLIEWSKI, BOHDAN WALENTYNOWICZ, ZBIGNIEW WASIUTYNSKI.

Pero un libro más reciente, publicado (en el 2003), sobre praxeología corresponde a Victor Alexandre, titulado: **ÉLÉMENTS DE PRAXÉOLOGIE. Contribution à une science des actes.**

Aunque anteriormente dos autores franceses también publicaron libros sobre praxeología:

- Arnold Kaufmann¹¹ con su libro publicado en **L'homme d'action et la science. Introduction élémentaire à la praxéologie. 1968.** Y traducido al español como **La ciencia y el hombre de acción. Introducción a la praxeología. 1967.** Ediciones Guadarrama.
- Roger Daval, publica en 1981 el libro titulado **Logique de l'action individuelle.**

Libros, estos, con enfoques diferentes, ya que el primero proviene de un autor que es ingeniero y el segundo de un sociólogo.

Y mas recientemente la editorial CEPL en su colección LES DICTIONNAIRES DU SAVOIR MODERNE publicaron una enciclopedia titulada: **LES SCIENCES DE L'ACTION. Theories et Practique.** En la misma definen praxeología de la siguiente manera:

La praxéologie se base sur une analyse matérialiste des actions, orientée vers l'idée d'efficience séparant de façon distincte la créativité, la production, le résultat matériel.

Elle analyse, elle prévoit une théorie des événements et a construit toute une terminologie, reprenant, sous des termes plus modernes, la philosophie de l'action pour fonder une science des actions.

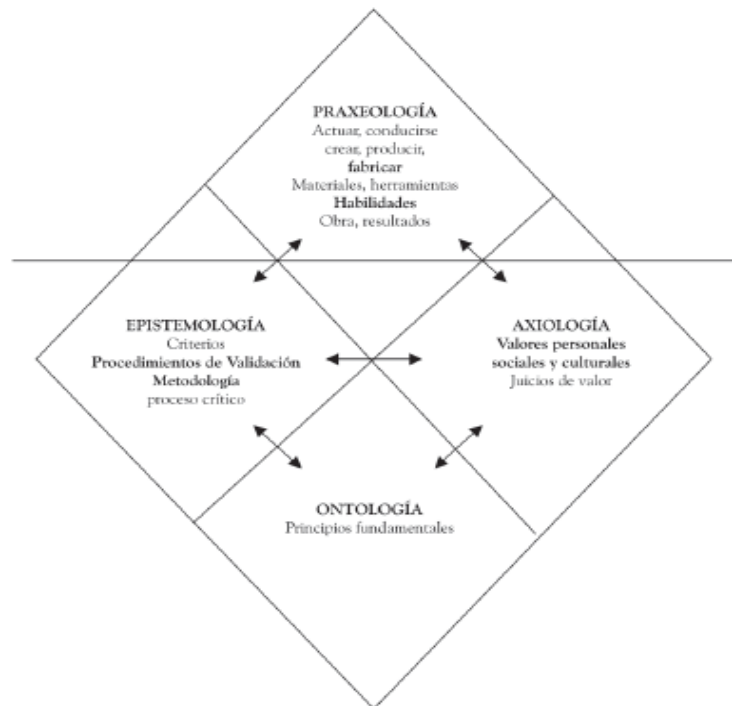
C.Z¹²

¹¹ Arnold Kaufmann (18 de agosto de 1911 – 15 de junio de 1994), fue un ingeniero francés, profesor mecánica aplicada e Investigación de operaciones en l'École nationale supérieure des mines de Paris ; en l'Université Polytechnique de Grenoble ; y en l'université de Louvain en Belgique. Escribió numerosos libros, además del citado, en el área de matemáticas, investigación de operaciones y conjuntos difusos.

Otro autor de interés es Adam Knott, es cual tiene el sitio praxeology.org en la WEB desde el año 2013 y ha publicado, entre otros, los siguientes libros: *Praxeology and the Rothbardians* (2012), *A Preliminary Critique of Hans-Hermann Hoppe's Argumentation Ethics* (2007, revised 2013), *Hayek and Praxeology* (2013), *Some Thoughts on Praxeology, Thymology, and the A Priori* (2014), and *Introduction to the Theory of Interpersonal Action* (2014), los cuales se pueden obtener gratis en Amazon.com, Barnesandnoble.com y Kobobooks.com

Otro autor, que es importante mencionar es Renée Bédard, que en dos artículos: 1- EL ROMBO Y LAS CUATRO DIMENSIONES FILOSÓFICAS; 2- LA TRILOGÍA ADMINISTRATIVA; publicados en AD-MINISTER, Universidad EAFIT, Medellín, Número 3, Jun-Dic 2003 y Número 4, Ene-Dic 2004; Desarrolla el siguiente rombo:

¹² La praxeología se basa en un análisis materialista de las acciones, orientada a la idea de eficiencia separando de manera distinta la creatividad, la producción, el resultado material. Ella analiza, ella prevee una teoría de eventos y ha construido toda una terminología, retomando, bajo formas más modernas, la filosofía de la acción para fundar una ciencia de las acciones.



También, es importante mencionar, en el ámbito latinoamericano, al padre Carlos Germán Juliao Vargas, el cual en sus tres libros: **La Praxeología: Una Teoría De La Práctica** (2002) , **El Enfoque Praxeológico** (2011) y **Una Pedagogía Praxeológica** (2013), además de hacer una buen recuento histórico de la praxeología, la enfoca en el ámbito socio-educativo. He aquí que vale la pena citar al mismo cuando afirma respecto a la praxeología:

“En general podemos observar, hasta una fecha muy reciente, un silencio casi general de los científicos e incluso una desconfianza por este concepto, sobre todo en español. Se encuentra un poco más de bibliografía en francés, inglés, alemán y polaco (país, donde al parecer, continúa existiendo el único centro de investigación praxeológica).”¹³

¹³ Juliao Vargas, Carlos Germán: **La Praxeología: Una Teoría De La Práctica**. Pág. 47.

Otro religioso que vale la pena mencionar es **Heinrich Wilhelm Schäfer**, con su obra en dos tomos *HabitusAnalysis*, cuyo segundo tomo se titula *Praxeology and Meaning*, publicado en el 2020

Pero hay varios autores, que aunque no han utilizado el término *praxeología*, sino de *teoría de la acción* o *ciencia de la acción*, de deben considerar también en como autores en el campo de la praxeología, entre los mismos cabe mencionar a:

- 1) Talcott Parsons, el cual en su obra *The Structure of Social Action*¹⁴ desarrolla una teoría positivista de la acción social, la cual retoma en su obra *The Social System*¹⁵. Además editó junto con Edward A. Shils *Toward A General Theory of Action*¹⁶ y con Robert F. Bales y E. Shils *Working Papers in the Theory of Action*¹⁷.
- 2) Ingmar Pörn, en su libro *Action Theory and Social Science. Some formal models*¹⁸. Cuyo contenido es: Modalidades de Acción; Intensiones y Razones; Actividades y Procedimientos; Control, Influencia e Interacción: Dinámica Social; Acción-Explicación.

¹⁴ Parsons, Talcott: *The Structure of Social Action*. Second Edition. The Free Press, New York. 1937, 1949.

¹⁵ Parsons, Talcott: *The Social System*. The Free Press of Glencoe, New York. 1951, 1954. Se consigue también en Español: *El Sistema Social*. Revista de Occidente. Madrid. 1966, 1976

¹⁶ Parsons, Talcott – Shils, Edward A.: *Toward A General Theory of Action*. Harvard University Press, Cambridge, 1962. Se consigue también en Español: *Hacia Una Teoría General de la Acción*. S/E

¹⁷ Parsons, Talcott – Bales, Robert F. - Shils, Edward A.: *Working Papers in the Theory of Action*. The Free Press, New York. 1953. Se consigue también en Español: *Apuntes sobre la Teoría de la Acción*. Amorrortu Editores. Buenos Aires. 1970.

¹⁸ Pörn, Ingmar: *Action Theory and Social Science. Some formal models*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1977

- 3) Raimo Tuomela, entre sus libros se puede mencionar los siguientes: HUMAN ACTION AND ITS EXPLANATION¹⁹, A THEORY OF SOCIAL ACTION²⁰ y SCIENCE, ACTION, AND REALITY²¹.
- 4) Chris Argyris, el cual define en su página www.actionscience.com como Ciencia de la acción:

Ciencia de la acción es una estrategia para aumentar las habilidades y la confianza de los individuos en grupos para crear cualquier tipo de organización y fomentar a largo plazo la eficacia individual y de grupo. Esta estrategia se aplica a cualquier forma de relaciones humanas, ya sea de la organización, grupo, o contextos interpersonales donde los individuos trabajan en tareas difíciles juntos.²²

Y cuyo objetivo básico es:

La ciencia de la acción es una estrategia para el diseño de situaciones que fomentan la administración eficaz de cualquier tipo de organización. Es un marco para el aprendizaje de cómo ser más eficaz en grupos. Su objetivo es ayudar a las personas, grupos y organizaciones para desarrollar una buena disposición y la capacidad de cambiar para satisfacer las necesidades de un entorno a menudo cambiante.²³

¹⁹ Tuomela, Raimo: *Human Action And Its Explanation*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1977.

²⁰ Tuomela, Raimo: *A Theory Of Social Action*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1984.

²¹ Tuomela, Raimo: *Science, Action, And Reality*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1985.

²² Tomado de <http://www.actionscience.com/acting.htm>, traducido (con correcciones) por el traductor google.

²³ Idem

Acciones, actos, actuaciones, conductas, comportamientos²⁴.

Los términos anteriores aunque se suelen a veces confundir y a veces usar hasta como sinónimos tienen (con excepción acto y acción) significados diferentes, empecemos por revisar las definiciones que de ellas realiza el DRAE, en su página web.

acción

Del lat. *actio*, *-ōnis*.

1. f. Ejercicio de la posibilidad de hacer.
2. f. Resultado de hacer.

acto

Del lat. *actus*.

1. m. acción (|| ejercicio de la posibilidad de hacer).
2. m. acción (|| resultado de hacer).

conducta

Del lat. *conducta* 'conducida, guiada'.

1. f. Manera con que las personas se comportan en su vida y acciones.

²⁴

La idea de aclarar estos términos me vino de la lectura del libro de Roger Daval: *Logique de L'action individuelle*. PUF. Paris. 1981

En las páginas de la 12 a la 20, de este libro, R Daval trata de dilucidar el significado del término "acción" y diferenciarlo del de "comportamiento".

comportamiento

1. m. Manera de comportarse.

Comportar

Del lat. *comportāre*.

4. prnl. Actuar de una manera determinada.

actuación

1. f. Acción y efecto de actuar.

Actuar

Del lat. *mediev. actuare*.

1. intr. Dicho de una persona o de una cosa: Ejercer actos propios de su naturaleza.

4. intr. Obrar, realizar actos libres y conscientes.

Obrar

Del lat. *operāri*.

1. tr. Hacer algo, trabajar en ello.

2. tr. Ejecutar o practicar algo no material.

3. tr. Construir, edificar, hacer una obra.

De esta manera que aquí vamos a utilizar las siguientes definiciones:

Acción (o acto): Lo que se ha hecho, se hace o se va o debe hacer.

Conducta: La forma o manera de realizar las acciones por parte de las personas o grupos.

Comportamiento: La caracterización de las acciones o sus resultados en función del tiempo.

Obra: El resultado de un conjunto de acciones

De esta manera, aunque una obra es el resultado de un conjunto de acciones, no todo conjunto de acciones culmina con una obra. Además una obra tendrá unas caracterizaciones entre ellas su comportamiento. Mientras que las acciones con las cuales se realizan las obras estarán caracterizadas por su conducta.

CAPITULO 3

DECISIONES

"Decidir no decidir es una decisión. Dejar de decidir es un fracaso."

Fox, Joe: Trapped in the Organization. Price/Stern/Sloan Publishers, Inc. Los Angeles, CA, 1980. Citado en: Bloch, Arthur: Ley de Murphy III. Razones equivocadas de por qué las cosas salen mal. Editorial Diana. 1988. Pág. 36.

3.1.- LA TEORIA DE DECISIONES

Para empezar vamos a tratar de definir la teoría de decisiones:

La teoría de decisiones "permite evaluar la eficacia de una decisión al medir el grado en el que sus resultados satisfacen el objetivo u objetivos especificados de antemano por la persona o grupo de personas, que tomaron la decisión."²⁵ O también como "el estudio de la decidibilidad en situaciones problemáticas."²⁶

Así que como primer problema se nos plantea definir decisión y decidibilidad, aunque se corra el riesgo de no lograr un acuerdo sobre la validez o no de estas definiciones. Así podemos definir como decisión a un proceso racional y consciente que ante la existencia de un estado de

(25) Rheault, Jean Paul: Introducción a la Teoría de Decisiones, con aplicaciones a la administración. LIMUSA. México. 1973. Pág. 17.

(26) White, D.J.: Teoría de la Decisión, AU # 16, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1972. Pág. 190.

ambigüedad, culmina en la elección de una alternativa. Y por decidibilidad a la existencia de criterios de decisión.

Para resaltar lo extenso del campo de estudio de la teoría de decisiones vamos a hacer una taxonomía de la misma.

Así tenemos la siguiente clasificación:

1. Según el decisor:
 - a) Individuales: Cuando es una sola persona quien decide.
 - b) Colectivas: Cuando la decisión la toma un grupo o una colectividad.

2. Según la duración:
 - a) De una sola etapa: Cuando el decisor procede a efectuar una sola decisión a la vez.
 - b) Secuenciales: Cuando la conclusión del proceso de decisión se puede considerar como el inicio de otro.

Estas secuencias pueden ser de dos etapas, de n etapas, de un número aleatorio de ellas o depender de las decisiones intermedias.

3. Según la información sobre el contorno:

Aquí existen varias tipologías, vamos a mencionar tres de ellas:

A. Tipos de Situaciones:

- a) Programables: Son aquellas que están bien definidas, muy repetitivas y para las cuales existe una información adecuada.
 - b) No-programables: Estas son mal definidas, ocurren muy pocas veces y para ellas no existe una información suficientemente estructurada para decidir.
- B. Por las condiciones de:
- a) Certidumbre: Si cada curso de acción posible conduce invariablemente hacia un resultado específico.
 - b) Riesgo: Si cada alternativa posible conduce hacia una gama conocida de resultados específicos con probabilidades conocidas.
 - c) Incertidumbre: Cuando las probabilidades de los varios resultados específicos son totalmente desconocidos o carecen de sentido.
- C. Por la calidad de la Información:
- a) Información Nítida: Cuando la información que maneja no es ambigua, ésta significa su valor.
 - b) Información Borrosa: Cuando la información a considerar no es exacta, es cualitativa, aproximada.

4. Según las consecuencias producidas:
 - a) Cualitativas: Si la prescripción del objetivo es una cualidad tal como la estabilidad, el crecimiento, el equilibrio, etc., del sistema.
 - b) Cuantitativas: Si las metas están dadas en parámetros cuantitativos a través de índices, niveles de eficiencia, productividad, etc.
5. Según la cantidad de objetivos:
 - a) Con un solo objetivo: Cuando se especifica un solo objetivo.
 - b) Con múltiples objetivos:
 - i) Complementarios: cuando los diversos objetivos se complementan los unos con los otros.
 - ii) Competitivos (o contradictorios): cuando el alcance de unos objetivos impide, el alcance de otros.
6. Según la cantidad de recursos:
 - a) Con recursos ilimitados: Cuando no hay problema en la obtención de recursos.
 - b) Con recursos restringidos: Cuando hay limitaciones en la disposición y existencia de los recursos.

Por la taxonomía anterior, tenemos $2*4*2*3*2*2*3*2 = 1152$ problemas diferentes de toma de decisiones, en cuanto a la Teoría de Decisiones Normativa o Prescriptiva, la cual hay que diferenciar de la Teoría

psicosociológica de decisiones, aunque las dos se influyen mutuamente.

3.2.- Principios fundamentales de la Teoría de Decisiones.

Se puede considerar que la Teoría de Decisiones esta basada en tres principios fundamentales: **Racionalidad, Maximización de la Utilidad e Información Completa**. Principios éstos que individual y en su conjunto están muy cuestionados hoy. Claro que hay otros principios sobre los cuáles ésta basada la Teoría de Decisiones, tales como **la causalidad, el libre albedrío y un mundo de sistemas**, los cuales no suelen estar cuestionados.

Veamos, brevemente, los tres primeros de estos principios:

1) Principio de Racionalidad:

Esto es, el ser humano es un animal cuyas acciones son productos del razonamiento o mejor dicho del raciocinio. Esto es: el hombre cuando emprende una acción es que ya razonó sobre las consecuencias de esta acción, y las consecuencias de la misma son las que entre múltiples opciones, de las cuales también conoce sus consecuencias, es la que más le satisface ya que las puede ordenar todas en orden de preferencias.

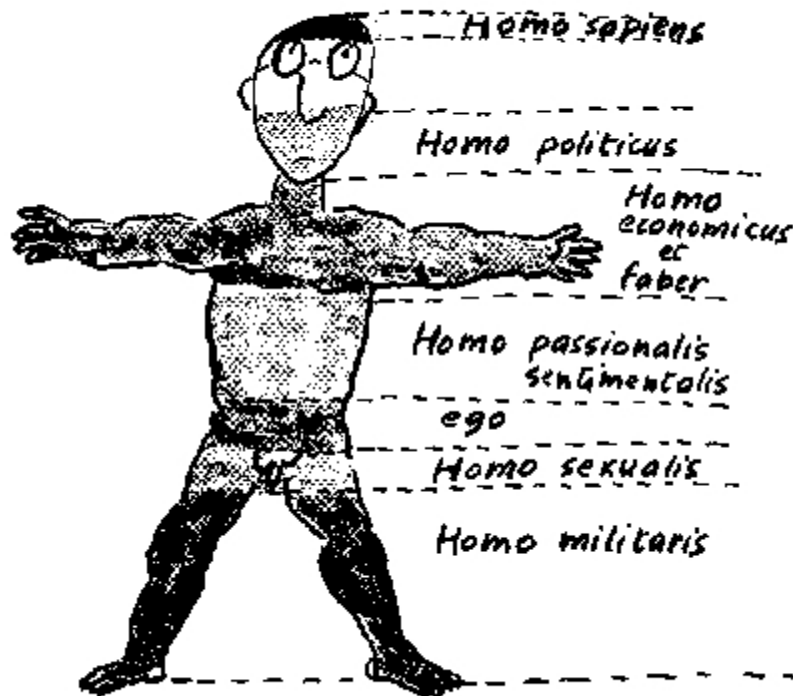
2) Principio de Maximización de la Utilidad:

El humano tiene una función de Utilidad la cual es capaz de calcular, y en base a este cálculo es también capaz de maximizarla. Y esta maximización de su utilidad es su único objetivo.

3) Principio de Información Completa:

El humano cuenta en todo momento con la información necesaria y suficiente para poder dirigir sus cursos de acción. Esto es, el hombre es un ser omnisciente.

Estos principios están hoy en día cuestionados por la mayoría de los autores, ya que el hombre se considera un ser multidimensional, no solo guiado por la racionalidad, sino también por instintos, pasiones, etc. (ver dibujo)



Tomado de J.Attali-M.Guillaume. L'anti-économique

Además siendo, la disponibilidad de datos casi infinita, seleccionar cuales de estos realmente contiene información relevante es un proceso complejo, pero lo que tiene un humano (o grupo de humanos) es una parte de la información necesaria y una gran cantidad de datos, y a veces ni siquiera de la calidad requerida, y el costo de obtener información adicional puede llegar a ser mayor que los costos y/o beneficios involucrados en la decisión.

Además, en la mayoría de los casos el decisor no conoce su función de utilidad de manera explícita, y si es la de la organización o colectivo por la cual el toma decisiones, menos todavía. Ojo, no confundir esta afirmación que lo decisores no

conocen sus preferencias, pero el pasar de unas preferencias a unas funciones de utilidad no es nada sencillo, es mas bien complejo, ya que implica poder relacionar el universo de bienes entre si, darles un valor de sustitución, darle forma a la función (ésto es calcular la primera y segunda derivadas de la misma). En fin todo el mundo necesitaría un experto a su lado para que lo ayude. Pero en el caso organizaciones o colectivos vienen preguntas más complejas tales como: ¿Son sumables las utilidades individuales para obtener la utilidad colectiva?, ¿las utilidades de los miembros de este colectivo tienen el mismo peso?, ¿Cómo evaluamos las utilidades (y en general las opiniones y votos) de los no nacidos?.

De esta manera en la vida real, tanto a nivel individual como a nivel organizacional realmente lo que se busca es mejorar (y no optimizar) los resultados respecto a la situación actual, y este mejoramiento, no es necesariamente la búsqueda de un máximo (o mínimo), sino un aumento (o disminución) y muchas veces un punto de equilibrio, de manera tal que no necesariamente se maximiza la utilidad, sino que se evita una caída de cierta magnitud de la misma.

Puntualizando, en la práctica, lo que se busca es mejorar y no optimizar.²⁷ Pero esto no significa que los modelos de optimización no tengan su importancia, ya que los óptimos locales de los mismos, siempre que no degraden debido a impactos colaterales significativos a las demás partes de la organización, empresa o de manera más general al sistema, sirven para mejorar el estado actual. Esto es, al aplicar los modelos de optimización una restricción implícita o explícita de los mismos debe ser su no afectación negativa de manera significativa a los demás componentes del sistema en donde estos se aplican.

²⁷ Optimizar algo significa que hay que demostrar que no hay nada mejor de lo que se encontró, mientras que mejorar solo implica que lo que se halló es mejor de lo que esta.

Simbólicamente: X^* es un optimo si no existe X , tal que $X \succ X^*$; mientras que X^* es un mejoramiento respecto a X^0 si: $X^* \succ X^0$.

Nota: El símbolo \succ significa preferible a, de esta manera $A \succ B$, significa que **A** es preferible a **B**.

Así, a manera de resumen, se puede esquematizar lo dicho anteriormente en el siguiente cuadro:

| DECISIONES | |
|--------------------------------------|--|
| TEORIA | PRACTICA |
| PRINCIPIOS | |
| Principio de Racionalidad | Ser humano multidimensional: Racionalidad, Instintos, Sentimientos, etc |
| Maximización de la Utilidad | No sabe de manera cierta cual es su utilidad. Busca equilibrios |
| Información completa | Información parcial |
| OBJETIVOS | |
| Optimización | Mejoramiento |
| Maximización (o Minimización) | Aumento (o disminución) Equilibrio |

¿Significa esto que los cursos de Toma de Decisiones (o Teoría de Decisiones) no tienen su importancia?

La respuesta es SI la tienen, lo importante es vincularlos con la práctica. Esto es establecer los límites y alcances de la teoría, y a ver como se adaptan a la práctica. Veamos en la siguiente parte unos ejemplos:

Ahora bien, hablemos de los principios no tan cuestionados, mencionados anteriormente:

a) La causalidad:

El principio de causalidad nos dice que toda acción (causa) genera al menos un efecto, y todo evento (efecto) es producto de al menos una causa.²⁸

²⁸ No necesariamente las relaciones causa efecto son de certeza, de hecho pueden (la gran mayoría) ser probabilísticas. Es más a veces realmente lo que uno busca es cambiar las probabilidades de éxito a nuestro favor.

Es obvio, que el si no se creyera en este principio no tendría sentido tomar decisiones. De hecho uno toma decisiones porque piensa que las acciones producto de estas decisiones van en alguna manera generar unos efectos. De hecho, se toman decisiones respecto a los cursos de acción para generar efectos favorables.

Ahora bien, las relaciones causas-efectos bien estar bien sustentadas o no. Y se dice que una relación causas-efectos esta bien sustentada si obedece a un conocimiento científico, a un conocimiento valedero. De manera tal que en la medida en que se toman las decisiones en base a este tipo de conocimiento, se tendrán buenas decisiones.

b) El libre albedrío:

Este principio nos dice que no todo esta determinado, de hecho esta relacionado con el principio anterior (realmente es su complemento). Esto es: de nosotros depende hacer nuestro futuro. Tenemos libertad para hacerlo. Las cosas no están determinadas de manera cierta.

Lo anterior no quiere en manera alguna decir que somos totalmente libres para tomar decisiones. Nuestra libertad esta restringida por normas, valores, costumbres, etc., lo que Lucien Sfez llama el *Sobrecódigo*.

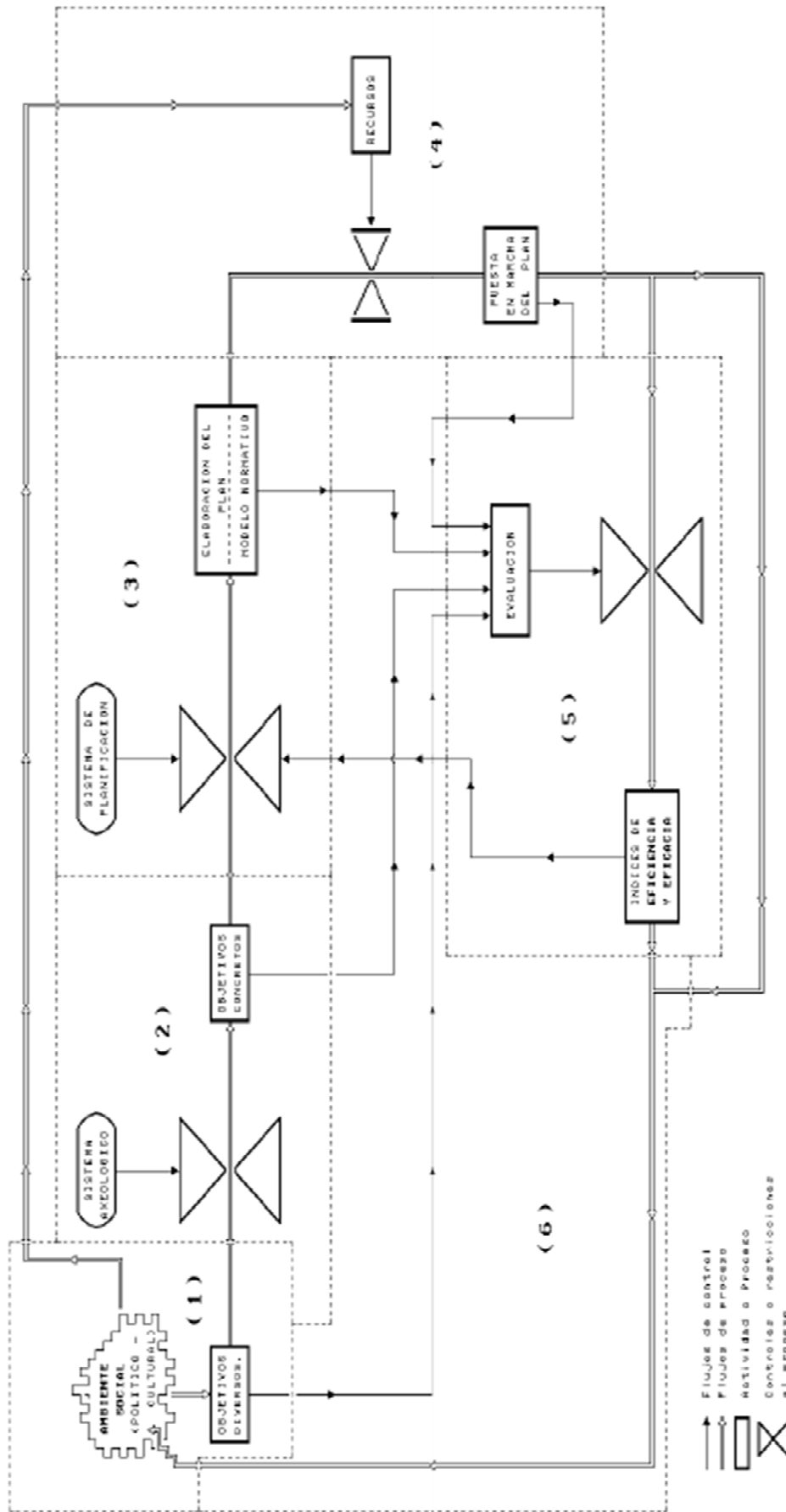
c) Un Mundo de Sistemas:

Este principio nos dice que estamos en un mundo de sistemas, en donde todos pertenecemos a por lo menos algún sistema, y un cambio en cualquier parte de un sistema afectará de alguna manera a otra parte de él o al sistema como un todo. De ahí la importancia, cuando se toman decisiones en una organización, de evaluar las consecuencias colaterales de las mismas.

3.3.- ESQUEMA DEL PROCESO DE DECISION

El esquema del proceso de decisión, ilustrado en el diagrama 3-1, se explica de la siguiente manera:

- 1) El ambiente social (político-cultural), por un lado fija los diversos objetivos y por otro lado facilita o restringe el uso de los recursos tanto de su propio ambiente como del ambiente físico.
- 2) Un sistema axiológico, explícito o implícito, se encarga, mediante valores, de filtrar los objetivos fijados por el ambiente social (punto 1), para obtener unos objetivos concretos.
- 3) El sistema de planificación, a partir de los objetivos concretos fijados en el punto 2, elabora un plan en forma de modelo normativo.
- 4) Con el plan del punto anterior y con los recursos facilitados por el ambiente social (punto 1) se pone en marcha el plan.
- 5) La puesta en marcha del plan (punto 4), es evaluada en base a los objetivos diversos (punto 1), objetivos concretos (punto 2), al modelo normativo (punto 3) para obtener índices de eficiencia y eficacia, los cuales a su vez permiten revisar la política de elaboración de planes.



- 6) Los planes puestos en marcha y sus evaluaciones revierten en el ambiente social, para según el resultado de éstos respecto a sus metas, nuevas necesidades, nuevos desiderata, etc., fijar nuevos objetivos y facilitar o reasignar, otra vez, recursos (punto 1).

Como se puede observar, este esquema es un diseño con retroalimentación mediante control de los resultados.

3.4.- METADECISIONES, DECISIONES Y ACCIONES

Como se definió al principio, una decisión es un proceso racional y consciente, por lo tanto es el resultado de una serie de acciones, pero por otro lado también el resultado es la elección de una alternativa, o sea es una acción. Lo cual no significa que toda acción es el resultado de una decisión. Pero también puede haber decisiones para escoger el método de decisión, es lo que vendría a ser una metadecisión, por ejemplo: cuando se discute el tipo de votación para escoger representantes ante un organismo, o si cierto tipo de leyes para su aprobación necesitan de mayoría simple o de unanimidad, o cuando se decide que tipo de modelo utilizar para tomar una decisión. Pero este problema no es muy sencillo de analizar, ya que implica cierta complejidad. O como lo plantea H. Rombach:

"Una decisión nunca es solamente *una* decisión. Es representante de una multiplicidad de decisiones...En la situación de decisión se hacen copresentes decisiones *anteriores*....sólo a la luz de una decisión *actual*

aparecen las acciones anteriores como *predecisiones*, y las posteriores como *posdecisiones*...Las decisiones se presentan como interrelacionadas dentro de la consecuencia de la decisión fundamental, pero de tal manera que ellas se configuran como el camino en el que es buscada la decisión fundamental. La decisión fundamental provoca decisiones, las decisiones revocan la decisión fundamental por una repetición, modificación, corrección y renovación. La decisión fundamental es la medida de las decisiones."²⁹

Y termina diciendo:

"Uno se decide a la decisión y sigue la voz de la decisión fundamental."³⁰

Y quizás sea todo ésto - la trilogía acción, decisión, metadecisión y el encadenamiento de decisiones - , que no ha sido suficientemente dilucidado, analizado y estudiado como un sistema jerárquico con retroalimentaciones (Ver diagrama 3-2), por los teóricos de la decisión, lo que haga que existan todavía grandes controversias (y lagunas) en algunos aspectos de la Teoría de Decisiones, sobre todo en lo relativo a decisiones colectivas, decisiones bajo múltiples objetivos y decisiones secuenciales; y de las relaciones entre decisión y acción.

(29) Rombach, Heinrich: Decisión. En Conceptos Fundamentales de Filosofía. Colectivo. Editorial Herder. Barcelona. 1978. Tomo I. Págs. 481-487.

(30) Rombach, Heinrich: Op.Cit.. Pág. 490.

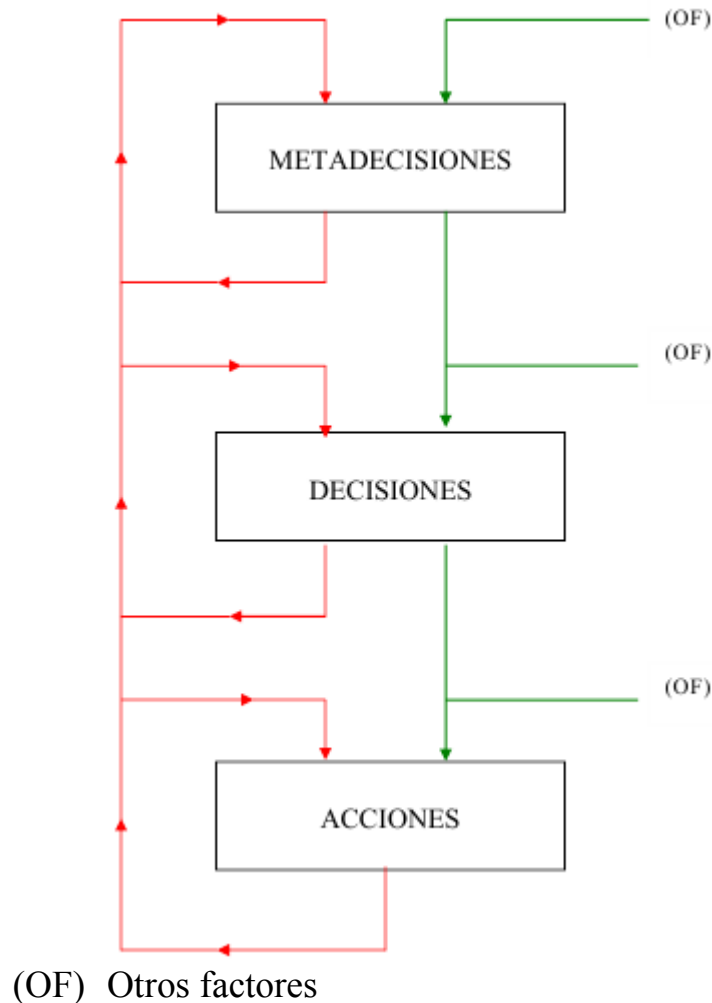


Diagrama 3-2

3.5.- EL PROCESO DE DECISIÓN

El proceso de Decisión se podría resumir en la búsqueda de un logro (llámese objetivo o meta) ejecutando ciertas acciones previamente evaluadas, y cuya realización permiten obtener este logro previamente establecido.

De hecho, cuando se realiza una acción como resultante de un proceso de Decisión se piensa que dicha acción nos va acercar al nuestro objetivo. Esto es que hay una relación causal entre nuestra acción y el resultado de esta, siendo

este resultado favorable en la obtención de nuestro objetivo. Esto es que nuestras que mediante nuestras acciones podemos influenciar de manera causal el devenir sobre el cuál tenemos acceso.

Veamos la cuestión un poco más de cerca:

Un proceso de decisión surge cuando uno tiene cierta situación, considerada como problemática o insatisfactoria (S), y una la quiere cambiar a otra situación considerada como *desiderata* (D); entonces surge la pregunta ¿Qué hacer - que acción o conjunto de acciones (A) emprender – para ir de S a D?

El plantearse ésta pregunta supone que uno es capaz mediante una acción o conjunto de acciones generar un efecto cuyo resultado es D, o sea que A, dado S, es una causa de D.

Aunque también es común que se esté consciente que estas acciones solo favorecen la propensión de que se obtenga los logros. Esto es:

$$\Pr(D|A) > P(D|\sim A)$$

Acotaciones finales

El ser humano - y quizás otros animales - toma la causalidad como el principio general de la vida. Ya que cuando realiza una acción en base a una *toma una decisión*, es pensando en que la acción que va a realizar tiene un efecto positivo a manera de lograr un objetivo o una meta.

Esto es, la praxeología, y en general todas las ciencias normativas, se basan en el principio de la causalidad, sea esta natural, inducida o legal. Y las lógicas que se le suele asociar al análisis causal son la lógica normativa y la lógica modal.

3.6.- ACCIONES Y DECISIÓN

¿Es toda acción el resultado de una decisión? ¿Obedece toda acción a una decisión?, de no ser así, ¿cómo distinguir las acciones resultantes de una decisión de las que no lo son?

La respuesta a la primera pregunta es no; de hecho se tiene que muchas acciones cotidianas son producto de reflejos condicionados, de emociones y de otros tipos de impulsos.

La respuesta a la otra pregunta es mucho más compleja, ya que implica una serie de respuesta a otras preguntas que a su vez no son triviales, cuando son relativas a otros individuos. Entre estas preguntas tenemos:

- ¿Es esta acción racional?
¿Cómo determinamos esto?, ¿Existe un solo tipo de racionalidad?,
¿Existen grados de racionalidad?
- 1) ¿Una acción aparentemente irracional, es producto de impulsos o es producto de una decisión mal tomada, o es una acción para confundir producto de una decisión bien tomada?
- 2) ¿Una acción aparentemente “buena”, es necesariamente producto de una decisión o es producto del azar, de la economía o de un programa supervivencia?
- 3) ¿Es posible establecer una correlación entre decisión y acción? ¿Cómo? Las acciones se ven, las decisiones no. Las decisiones las podemos conocer hasta cierto punto por los enunciados del decidor y de sus acciones

subsecuentes, pero estamos suponiendo que el decidor no esta tratando de engañarnos.

En fin, estos problemas anteriores sobre decisiones, nos conllevan a decisiones, esto es tenemos decisiones sobre decisiones, las decisiones nuestras respecto a las decisiones de otros.

Esto en cierta parte explica el porque la teoría de decisiones normativa esta mucha más desarrollada que la teoría de decisiones positivista (psicológica).

3.7.- PRINCIPALES COMPONENTES DE LA TEORÍA DE DECISIONES.

3.7.1.-Teoría del Óptimo y Modelos de Optimización

La teoría del óptimo se basa en buscar un punto que sea preferible a cualquier otro dependiendo tanto de la forma de la función objetivo como de la topología de la zona de factibilidad.

En general:

X^* es un óptimo si no existe X , tal
que $X \succ X^*$.

Pero las preguntas que vienen en seguida son: ¿Cuál es nuestra relación de preferencia? ¿Como logramos determinar una relación de preferencia para una empresa u organización cualquiera? ¿Las funciones de Utilidad ayudan o contribuyen a tal fin, o lo enturbiarían más todavía?

Contestemos estas preguntas:

Para muchos problemas prácticos la relación de preferencia viene dada por una función de costos, de beneficios, de ingresos, de riesgo, de calidad, de tiempo, etc..., siempre sujeto a una serie de condiciones: disponibilidad de recursos, cumplimiento de metas, de estándares, etc.

Y lo anterior es cierto para gran parte los problemas parciales de una empresa. Pero cuando se trata de problemas generales o problemas más vagos tal como problemas de imagen, de lealtad, aceptación, la cuestión es más problemática.

Además, en algunos casos, realmente construir las funciones establecidas anteriormente no es una tarea tan fácil.

Pero si podemos establecer lo que queremos, con que estaríamos contentos, con que estaríamos satisfechos. Pasaríamos de ser optimizadores a ser satisfactorios.³¹ Y esto lo podemos lograr mediante la programación por metas³².

Punto aparte merece hacer mención a la optimización por etapas cuyo algoritmo de solución se llama programación dinámica.

En estos tipos de problemas se tienen problemas de varias etapas en donde las entradas de cada una de las etapas son las salidas de la etapa anterior. Para estos problemas se utiliza el Principio de Optimalidad de Bellman:

*"Una política optimal tiene la propiedad de que cualesquiera que sean el estado y decisiones iniciales (es decir, el control), las decisiones restantes deben constituir una política optimal con respecto al estado resultante de la primera decisión."*³³

Este principio al final de cuenta lo que implica es:

- 1) Hay que empezar por un buen camino (nuestro primer paso debe ser en la dirección correcta).
- 2) Hay que seguir en base a los resultados ya obtenidos.

³¹ Realmente la diferencia entre un ser optimizador y un ser satisfactorio, si se ve desde un punto de vista de las funciones de utilidad no tendría ninguna diferencia si se pone dentro de la función de utilidad el esfuerzo y tiempo para buscar un óptimo.

³² Ver Programación por Metas en www.hthonon.blogspot.com

³³ Bellman, Richard: Dynamic Programming. Pág. 83.
En www.hthonon.blogspot.com puede conseguir un resumen sobre programación dinámica.

3.7.2.-Riesgo e Incertidumbre

Por lo general, la mayoría de los autores están de acuerdo en definir una situación bajo certeza cuando se tiene una relación causa efecto conocida y dada por alguna función, una situación bajo riesgo cuando se tiene una relación causa efecto dada por una distribución de probabilidades y una situación de incertidumbre cuando no se conoce esta distribución de probabilidad, o bien porque es una situación caótica o bien por falta de información.

Ahora bien, cuando se tienen situaciones bajo riesgo e incertidumbre las recomendaciones cambian de autor a autor (en esto influye hasta principios filosóficos) y los modelos también. Aunque cuando se trata de situaciones bajo riesgo siempre entra juego tanto el riesgo definido como la probabilidad de estar en una situación crítica (y en muchos casos utilizando la desviación típica como indicador del mismo) y el valor esperado de la utilidad.

Quizás, el principal problema en muchos casos es como determinar las probabilidades y cuán confiable pueden ser éstas. En muchos casos se utilizan las frecuencias históricas como representación de las mismas, pero de ahí surge la pregunta ¿Necesariamente el futuro se va a portar de manera similar al pasado?

En cuanto a la incertidumbre, realmente existen dos grandes corrientes. Por un lado la corriente que sugiere el uso del arrepentimiento o costo de oportunidad³⁴ y el uso del minmax³⁵, y por otro lado los que aconsejan el uso de probabilidades subjetivas, complementado con otras técnicas como el uso de expertos. Ahora bien el uso de probabilidades subjetivas aunque tiene como ventaja reducir el problema de incertidumbre a un problema de riesgo tiene la debilidad de cuán validas pueden

³⁴ El arrepentimiento o costo de oportunidad es la diferencia, una vez acaecido los hechos entre lo que se obtuvo y lo que podría haber obtenido de haberse tomado otra decisión. Por esto se dice que este es un criterio pre-ex-postfact. Ver mas detalles sobre el uso de este criterio en 18.1

³⁵ El minmax es una estrategia que consiste en escoger la acción que minimice el peor resultado posible. Esto es, es una estrategia precavida contra lo peor que pueda pasar. Más detalles sobre esta estrategia en www.hthonon.blogspot.com

ser estas probabilidades subjetivas, por no mencionar el problema de la coherencia de las mismas.

Lo que si pareciera ser cierto, sean cuáles sean los modelos que se utilicen, es que lo mejor que se puede hacer en caso de riesgo e incertidumbre es diversificar (¡no ponga todos los huevos en la misma canasta!).

De manera tal que a nivel práctico se tiene:

- a) Diversifique (en la medida de lo posible),
- b) Prepárese para lo peor, pero aproveche las oportunidades,
- c) Y por último, sea adaptativo a los cambios del entorno.

3.7.3.-Teoría de Juegos

La teoría de Juegos es una teoría basada en aquellas situaciones de decisiones en donde los resultados del decisor no solo depende de sus elecciones, sino que dependen también de al menos otro decisor cuyos objetivos no necesariamente coinciden con la de aquél. Los diversos decisores reciben el nombre de jugadores.

Toda la teoría de Juegos se basa en: a) Todos los jugadores son racionales y quieren maximizar su utilidad, b) cada uno de los jugadores además de conocer su función de utilidad, conoce la función de utilidad de los demás adversarios, y c) todos los jugadores van jugar el mismo juego con las mismas reglas.

Si además que es difícil que un jugador tenga claro su función de utilidad, es mucho más difícil que conozca la de los demás jugadores. Y en cuanto a la racionalidad: recordar lo afirmado al principio.

Pero además tenemos toda una tipología de juegos, así tenemos los juegos de suma constante (o cero), los cuales tienen que ser necesariamente competitivos, y los de suma variable que permiten la posibilidad de cooperación y negociación; de la misma manera tenemos los juegos de más de dos jugadores en los cuales se permiten alianzas o coaliciones, negociadas o no; así mismo, se tienen los juegos de una sola vez y los juegos repetitivos, y estos últimos pueden ser de duración y/o repeticiones conocidas o no.

Frente a esta tipología anterior se tiene que aunque los más estudiados y con soluciones conocidas son los juegos de suma constante y con duración conocida,

en la realidad la mayoría de los juegos son juegos de suma variable, y por lo tanto en ellos existe la posibilidad de la cooperación y negociación³⁶. Además, la mayoría de los juegos en los cuales participamos son juegos de duración no conocida (nadie sabe cuando va a morir). De hecho con la teoría de juegos con modelos de juegos de duración desconocida se pueden explicar el mercado sin la intervención de la famosa mano invisible.

Otro aspecto importante de los juegos, son los puntos de equilibrio y su estabilidad. La inestabilidad de los puntos de equilibrios “justos”, es lo que justifica un Estado Velador.

En conclusión, ante una situación de juego: a) Si piensa, que es de suma cero, revise su planteamiento; b) busque las formas de negociación, o directas o indirectas; c) recuerde que en la mayoría de las veces usted no sabe hasta cuando va tener que jugarlo, evite las trampas.

3.7.4.-Modelos de Pronósticos

Los modelos de pronóstico, con excepción de los modelos demográficos, están basados o en series de tiempos o en modelos econométricos, en donde el investigador está más pendiente de los errores del modelo y su ajuste al pasado, que en las relaciones teóricas entre las variables y las ideologías que sustentan a las mismas.

Estos modelos cuando son de corto plazo realmente suelen predecir bien el futuro, a menos de un cambio estructural revolucionario.

De hecho hoy en día se suele también trabajar con escenarios posibles. Aunque esta técnica suele tener componentes subjetivos. Pero puede ser útil, sobre todo si trabajamos en un esquema de decisiones bajo incertidumbre.

Claro que la solución está en:

- a) Buscar teorías que se ajusten a la realidad, y no seguir pidiéndole a la realidad que se adapte a las teorías.
- b) Mejorar los sistemas de estadísticas económicas y sociales.

³⁶ De hecho, en economía y política, casi siempre los juegos de suma cero son juegos mal planteados.

3.7.5.-Teoría de la Utilidad

La teoría de la utilidad se basa en la existencia de unas funciones U en base a un conjunto X de N bienes con las siguientes características³⁷:

| | | |
|----|--|---|
| 1) | <p>Si $\langle x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0 \rangle \succ \langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1 \rangle$,</p> <p>entonces</p> $U(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) > U(x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$ | Si una combinación de bienes es preferida a otra, entonces la utilidad de la primera será superior a la segunda. |
| 2) | <p>Si $\langle x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0 \rangle \approx \langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1 \rangle$,</p> <p>entonces</p> $U(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) = U(x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$ | Si se es indiferente entre dos combinaciones de bienes, las utilidades de las dos son iguales. |
| 3) | <p>Sea $\langle x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2 \rangle = \lambda \langle x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0 \rangle + (1 - \lambda) \langle x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1 \rangle$,</p> $0 < \lambda < 1$ <p>y $U(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) < U(x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$</p> <p>entonces</p> $U(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) < U(x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2) < U(x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$ | Si una combinación de bienes es el resultado de una combinación convexa de otras dos combinaciones de bienes, entonces la utilidad de dicha combinación estará comprendida entre las utilidades de éstas. |

Luego cada autor, añade propiedades adicionales a dichas funciones, tal como que sea cóncava, lineal, etc.

Pero veamos cuales son los problemas tanto teóricos como prácticos que representan dicha funciones:

- El primer problema teórico que se tiene respecto a estas funciones es su forma, la mayoría de los autores la presentan como una función lineal. Pienso que debería ser más bien una función de producción (y me inclino por una CES)³⁸. Esto a su vez conlleva al problema práctico de la evaluación de las mismas.

³⁷ Realmente debería escribirse, U_k ya que es una función de Utilidad para individuo el k .

³⁸ Ver: Sección 18.5

- Sabemos que el humano (y quizás la mayoría de los animales superiores) cambia según las circunstancias. Esto es, la definición debería aparecer también las circunstancias en que son evaluadas dichas funciones, o sea, se debería escribir: $U(c_1, c_2, \dots, c_L; x_1, x_2, \dots, x_N)$.
- El otro problema presente es la comparación de las Utilidades interpersonales; esto es, como se compara la Utilidad del individuo A con la del individuo B. Claro aquí habría dos vías: 1) Canonizarlas con una escala de -100 a 100, de tal manera que el -100 represente lo peor para cada individuo y el 100 represente su máximo anhelo. 2) Vía el mercado, pero esto es deificar el mercado. El mercado puede ser un indicador, pero recuérdese que el mercado es imperfecto.
- Lo anterior nos lleva directamente a otro problema, ¿es válida la suma de las Utilidades Individuales para evaluar la Utilidad Colectiva?
 Otra vez, se podría recurrir al mercado, y según el mercado determinar como es una función de Utilidad Promedio. Pero, como ya se aclaró antes, el mercado es imperfecto. Las elasticidades de demanda de los bienes esenciales suelen ser muy bajas. Además existen los monopolios y oligopolios, la cartelización de los precios, etc.
- Y por último, habiendo hoy en día una infinidad de bienes, ¿respecto a cuales de ellos vamos a obtener las funciones de utilidad? Y ¿cuáles son las circunstancias, de las múltiples posibles, que vamos a tomar en cuenta para la evaluación de estas funciones?

¿Implica esto abandonar la Teoría de la Utilidad? Sinceramente creo que no. Hay que seguir investigando en ella. Mejorarla. Y sobre todo recolectar los datos necesarios.

3.7.6.-Modelos de Simulación

Los modelos de simulación tienen por objetivo realizar experimentos con modelos de la realidad y no con la realidad misma.³⁹

Entre las principales técnicas de simulación tenemos:

- Los juegos operacionales: *Se refiere a aquellas situaciones que envuelven conflictos de intereses entre los jugadores o tomadores de decisiones con un marco de referencia de un ambiente simulado.*
- Método de Monte Carlo: *Consiste en la simulación a través de técnicas de muestreo, esto es, en vez de tomar muestras de la población real, estas son obtenidas de una contraparte teórica de la población real.*
- Simulación de sistema: *Consiste en un proceso en el cual los datos del mundo real son procesados mediante un modelo que reproduce el ambiente operacional.*

Las cuales se pueden usar conjuntamente, complementándose las unas a las otras.

Ahora bien, ni el Método de Monte Carlo y ni la Simulación de Sistema permiten comprobar hipótesis, ya que por construcción la simulación se va portar como las hipótesis implícitas en los modelos. Lo que permiten estas técnicas es *suponiendo que las hipótesis sobre las cuales están diseñados los modelos son correctas y que estos últimos están bien diseñados, definir como se va portar la realidad dependiendo de la variación de unos parámetros.*

Mientras que con los juegos operacionales, si se podría comprobar hipótesis. Lamentablemente, aquí en Venezuela no se suelen utilizar. Personalmente los he

³⁹ Para más detalles sobre definición de simulación consultar Sistemas y Simulación en 5.4

utilizado en clase y he propuesta a diversas instancias y centros de investigación crear un salón a tal fin, pero siempre la respuesta son negativas. Aquí es más fácil para los científicos sociales decir “en Ciencias Sociales no se pueden hacer experimento” que quemarse las neuronas diseñando y haciendo experimentos.

Ahora bien, en mis treinta años de vida profesional, realmente la herramienta que me ha sido de mayor utilidad, que me ha permitido resolver más problemas, dar más recomendaciones, es ésta, la simulación, tanto por el Método de Monte Carlo y como por la Simulación de Sistema. Y esto por una razón muy sencilla: la simulación, conociendo la teoría y los parámetros me permite reproducir de manera más o menos simple el escenario y su comportamiento. Escenarios estos que de manera analítica requerirían cálculos muy complejos y extensos, en donde es fácil cometer un error, si es que son posibles de elaborarse realmente.

CAPÍTULO 4

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La I.O. en el área gerencial es lo que se ha dado en llamar con el tiempo la Administración Científica (A.C.).

4.1.- RECUENTO HISTÓRICO

Para saber lo que es la I.O es saludable empezar por un recuento histórico de la actividad de la I.O.

El gran auge de la I.O se remonta a los días de la Segunda Guerra Mundial en Inglaterra, con problemas tales como la ubicación óptima de los radares, el vuelo de los bombarderos para obtener un máximo de destrucción de los objetivos, el tamaño de los convoys para minimizar sus riesgos de destrucción, etc. Aunque anteriormente a esta época cabe mencionar algunos trabajos hasta cierto punto aislado tales como los de:

- Quesnay, que empieza a usar modelos primitivos de programación matemática en el campo de la economía, en los años de 1759, seguido más tarde por otro economista, Walras, en el año de 1874.
- Frederick Taylor, en 1885 se plantea el problema del peso óptimo del material a cargar en una pala de manera de mover el máximo de material con un mínimo de fatiga laboral.
- K. Erlang, en 1917 estudia el problema de las esperas en los servicios telefónicos.
- Horace C. Levinson, en los años de 1930 empieza a aplicar el análisis científico a los problemas de mercadeo.

- Kantorovich, en el año de 1939, estudia los problemas de distribución.

Al finalizar la Segunda Guerra, se les plantea a los aliados la logística de distribución de sus recursos militares dispersos por el mundo. A este fin se creó la Rand Corporation en Estados Unidos, donde en 1946 George Dantzig inventa el algoritmo Simplex de Programación Lineal. A partir de entonces empieza la aplicación de la I.O. en las industrias- en Inglaterra en las grandes industrias nacionalizadas, en EE.UU. en las grandes corporaciones y en la U.R.S.S. en los esquemas de planificación centralizada-. A partir de los años cincuenta empieza a surgir gran variedad de Literatura sobre tópicos de I.O., pero no es sino hasta 1957 que surge el primer texto coherente de I.O. escrito por Churchman, Ackoff y Arnoff. Es de notar que a partir del principio de la década de los 70 los libros de textos más populares fueron los de: a) Hamdy Taha publicado en principio por la editorial MacMillan y luego por la Editorial Pearson; y b) Frederick Hillier y Gerald Lieberman publicado por Mc Graw-Hill. Ambos libros ya están por su decima edición.

4.2.- DEFINICIÓN DE I.O.

Las definiciones de I.O. han ido evolucionando, de acuerdo con los autores y el desarrollo de la misma. Así para Blackett, en 1941, el objetivo de la I.O. es

"...dar asistencia en la obtención de maneras de mejorar la eficiencia de las operaciones de guerra en progreso o planeadas para el futuro".⁴⁰

⁴⁰ Blackett, P.M.S., Studies of war: Nuclear and Conventional, Hill and Wang, New York. Citado en Hugh J. Miser, The History, Nature, and use of Operations Research. En Handbook

Esta definición como se puede notar fue hecha cuando la I.O era de uso exclusivamente militar, aunque si se le elimina la referencia a la guerra esta definición puede ser útil; y el mismo autor continua diciendo que para hacer esto

*"...las operaciones pasadas son estudiadas para determinar los hechos; teorías son elaboradas para explicar los hechos; y finalmente los hechos y teorías son usados para hacer predicciones sobre las operaciones futuras."*⁴¹

Como se puede notar, para esta definición la I.O. es eminentemente práctica.

Algunas definiciones más recientes hacen mayor énfasis en otros puntos de la metodología y objetivos de la I.O.

Así tenemos que Churchman, Ackoff y Arnoff señalan que

*"La I.O. es la aplicación de métodos, técnicas e instrumentos científicos a problemas que implican el funcionamiento de un sistema, con el fin de proporcionar soluciones óptimas a dichos problemas a aquellos encargados del control del sistema."*⁴²

Mientras que Ackoff y Sasieni consideran la I.O. como

"la aplicación del método científico por equipos interdisciplinarios a problemas que comprenden el control de sistemas organizados hombre-máquina, para dar soluciones que sirvan a los propósitos de la organización como un todo".⁴³

of Operations research, foundations and fundamentals, editado por Joseph J. Moder y Salah E. Elmaghraby, Van Nostrand Reinhold Company, 1978.

⁴¹ Idem.

⁴² Churchman, C. West- Ackoff, Russel L. - Arnoff, E. Leonard: Introducción a la Investigación Operativa, Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, 1973.

⁴³ Ackoff, Russel L. y Sasieni, Maurice W., Fundamentos de la Investigación de Operaciones, editorial Limusa, S.A., Mexico, 1977.

Mientras que otras definiciones se concretizan más, como la de Pekelis que define la I.O. como

*"la rama científica que estudia los problemas de la selección de soluciones referentes a la organización y mando de los procesos (operaciones) orientados a un objetivo determinado."*⁴⁴

O como la definición preferida de Saaty que afirma que

"la I.O. es el arte de dar malas respuestas a problemas, los cuales de otra manera repuestas peores les son dadas".⁴⁵

De estas definiciones podemos concluir lo siguiente:

- 1- La I.O. es una herramienta para solucionar problemas y tomar decisiones.
- 2- No es la única herramienta existente a este fin aunque si aparentemente la mejor y más objetiva.
- 3- Ella misma como disciplina, utiliza diferentes herramientas y métodos (Método científico, enfoque de sistemas, etc.)
- 4- Su trabajo y avance es través del trabajo en equipos interdisciplinarios.
- 5- Su área de aplicación es extensa, tan extensa como la actividad humana en si.

Sobre muchos de estos aspectos regresaremos y analizaremos con más detalle en los temas siguientes.

⁴⁴ Pékelis V., Pequeña Enciclopedia de la Gran Cibernética, Editorial MIR, Moscú, 1977.

⁴⁵ Saaty, Thomas L., Mathematical Methods of Operations Research. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1959.

4.3.- NECESIDADES DE LA I.O. EN LAS EMPRESAS

Para empezar definiremos lo que es una empresa, o más exactamente lo que para nosotros va a ser una empresa.

Una empresa se puede considerar como:

"una organización que, contando con unos recursos, transforma unos insumos en exsumos mediante algunos procesos o a través de algunos medios".

Cabe hacer algunas observaciones sobre esta definición:

- 1- No se especifica nada sobre tipo de Organización, pertenencia de la misma, características de los insumos y exsumos; ni de los procesos y medios de producción, por lo tanto abarca todo el espectro de empresas posibles, desde empresas manufactureras privadas hasta empresas públicas de servicios pasando por toda la gama de empresas intermedias, familiares y empresas de compra-venta y distribución.
- 2- En esta definición están circunscritos tres niveles operacionales:
 - a) Nivel Organizativo: En este nivel ocurren las operaciones de manejo de información, esquemas de mando en la empresa, definición de funciones, en fin todas aquellas operaciones relativas a las interrelaciones jerárquicas de personal.
 - b) Nivel administrativo: Este nivel se refiere a todas aquellas operaciones relativas a los recursos tales como mantenimiento, reemplazo de equipos, renovación de personal, aumento de eficiencia y productividad de los mismos, etc.
 - c) Nivel productivo: A este nivel corresponde la cadena insumo-exsumo en sus diferentes etapas: compra, almacenamiento, transformación, venta, etc.

Así, a partir de las observaciones anteriores la lista de aplicaciones de la I.O. en las empresas y en las organizaciones de cualquier tipo es imensa. Basta revisar tanto los libros como las revistas especializadas en el área⁴⁶.

Así que se puede afirmar sin lugar a dudas que la I.O. es una herramienta indispensable para el manejo eficaz de cualquier organización - cualquiera que sea sus fines, su modo de producción o su capital - en todas sus áreas y niveles.

4.4.- NATURALEZA Y METODOLOGIA DE LA I.O.

Partiendo de las definiciones que hemos anunciado de I.O. podemos ir determinando su naturaleza en sí.

Como señalado anteriormente la I.O. es una herramienta para solucionar problemas y tomar decisiones, pero como disciplina tiene sus características propias, entre las cuales cabe mencionar las siguientes:

- Usa un enfoque científico, esto es, comienza sus estudios con una observación de la realidad para luego hacer una formulación del problema para terminar elaborando un modelo científico (típicamente matemático) que trata de representar esta realidad (la metodología se describirá más adelante).
- usa un enfoque de sistema: los problemas no son aislados son parte de un todo más grande, que afecta y a su vez es afectado por este problema. La I.O. toma en cuenta estas relaciones a la hora de es-

⁴⁶ En el ensayo **La Administración Científica y la Investigación de Operaciones**. Cuadernos de Postgrado N° 25. Tópicos, Métodos y Problemas de Investigación en Ciencias Administrativas. Fondo Editorial Tropykos. Comisión de Postgrado. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Central de Venezuela. Caracas, 2007. Hay una lista bastante extensa de aplicaciones en las empresas.

tudiar los problemas, sobre todo si estos son relevantes e importantes, aunque esto no significa que vaya a resolver todos los problemas de una vez.

- Los problemas típicos de la I.O. son aquellos en los cuales se requiere lograr ciertos objetivos con una disposición limitada de recursos, a fin de escoger la mejor solución.

En cuanto a la METODOLOGIA DE LA I.O., podemos hacer las siguientes observaciones iniciales:

- Como toda ciencia en evolución la I.O. en sus aspectos metodológicos ha sufrido transformaciones debido tanto a su propio desarrollo como al de otras áreas tecnológicas y científicas.
- Cualquier metodología tiene que adaptarse al problema a ser resuelto y a los esquemas de la organización en el cual está planteado.

Tomando en cuenta las dos observaciones anteriores vamos a hacer una breve descripción de las etapas por las cuales son examinados los problemas de I.O.:

1- Definición de objetivos:

Esta tarea consiste en determinar lo que el "gerente" o el "usuario" espera lograr del proyecto. En otras palabras, que es lo que el proyecto pretende realizar. La definición de objetivos debería ser en términos de la decisión o decisiones a las cuales el estudio está orientado.

La principal dificultad de esta etapa es la obtención de los verdaderos objetivos del gerente y la relación de estos con los de la organización, por lo cual es recomendable:

- La existencia de un verdadero dialogo entre el gerente y el investigador.
- Que el investigador conozca y entienda bien la organización, no solo en su presente sino también en sus planes futuros.

2- Desarrollo del plan proyecto:

Operacionalmente un plan proyecto es un cronograma para el logro de las etapas proyectadas. El plan, usualmente, es presentado en términos de cuadro de Gantt. A menudo las etapas del proyecto son divididas adicionalmente en tareas. El desarrollo del plan proyecto en detalles bien descritos es esencial para determinar el tiempo y los recursos requeridos para completar un proyecto.

Además hay dos consideraciones adicionales sobre la importancia del plan proyecto que cabe mencionar.

La primera, es la importancia del plan para disciplinar al investigador, ya que lo obliga a permanecer dentro de un esquema. Y la segunda se refiere a la asignación de los recursos para el análisis de los datos recolectados durante el proyecto para propósitos no relacionados con el interés directo del mismo.

El principal problema de esta etapa es que muchas veces, sobre todo si el problema es nuevo y hay una carencia de experiencia en el área, es casi imposible determinar el tiempo y los recursos necesarios para cubrir cada una de las etapas de manera a priori.

3- Formulación del problema:

En esta etapa hay que decidir si el problema debe subdividirse en subproblemas más pequeños que puedan estudiarse en paralelo o secuencialmente.

También debe realizarse un programa de mantenimiento el cual es esencial para el éxito a largo plazo de un estudio de I.O. que envuelva la implementación de un nuevo sistema.

Seguidamente hay que determinar el grado de detalle con el cual el modelo se desarrollará. Para esto hay que considerar entre otros la disponibilidad del presupuesto, el esquema del proyecto y los objetivos del estudio.

Y como última fase de esta etapa se tiene la identificación del alcance y las dimensiones del modelo. Para realizar esto se recomiendan las cinco siguientes tareas:

- 1.- Determinación de las dimensiones del problema.
- 2.- Determinación de las variables de decisión controlables.
- 3.- Determinación de las variables no controlables
- 4.- Determinación de la tecnología.
- 5.- Determinación de las medidas de efectividad.

4- Desarrollo del modelo:

El modelo expresa la interacción entre las variables de decisión controlables, las no controlables, la tecnología y las medidas de efectividad. El desarrollo del modelo es un requisito clave para el éxito del proyecto. Hacerlo de manera apropiada o no, implica una contribución sus-

tancial al desempeño económico de la empresa o en la eficiencia operativa de una organización, o un engaño en su uso produciendo efectos no deseados.

El desarrollo de modelos válidos requiere de dos elementos esenciales por parte de los modelistas: Por un lado un conocimiento creativo dentro de la actividad que está siendo utilizada y por otro lado una cantidad sustancial de datos.

La primera tarea a realizar es determinar si es posible o no desarrollar los números o las relaciones requeridas.

Las relaciones que componen un modelo son generalmente de varios tipos:

- Relaciones de Definición: Son aquellas de convención contable o identidades físicas. Son fáciles de desarrollar y en muchos casos requieren poco o ningún análisis de datos.
- Relaciones Empíricas: Son las que están basadas en datos históricos, análisis ingenieril, evidencia empírica, prescripción legal o adivinanzas.
- Relaciones Normativas: Son las relaciones que expresan como deberán relacionarse las variables en lugar de como se relacionaban en el pasado. A menudo son el resultado de la investigación teórica en las técnicas de I.O.

Para concluir con esta etapa de desarrollo del modelo, debe hacerse una declaración analítica precisa del problema que se está solucionando.

En el siguiente capítulo seguiremos estudiando esta etapa desde el punto de vista del enfoque de sistemas.

5- Desarrollo de un enfoque computarizado:

Esta etapa, la cual se desarrolla simultáneamente con la del desarrollo del modelo, consiste en la determinación de los métodos de solución numérica al problema.

En esta etapa existen varias tareas que consisten en escoger una simulación o un enfoque calculado, si usar variables aleatorias o adaptar un enfoque determinístico, si reconocer ciertas no-linearidades o son suficientes las aproximaciones lineales, si utilizar métodos de solución ya establecidos o desarrollar nuevos métodos, en resumen:

Que suposiciones se deben hacer y qué métodos desarrollar de manera que sea práctico el uso del modelo computarizado.

En esta etapa también se debe hacer pruebas manuales de los enfoques computarizados propuestos para asegurar la factibilidad y la validez de los mismos.

Otro asunto a solucionar en esta etapa consiste en determinar si es factible un enfoque de optimización para la solución del modelo ó si es necesario un enfoque heurístico.

En fin, hay que seleccionar entre obtener:

- a) Una solución óptima para una versión simplificada del problema.
- b) Una solución aproximada para una formulación exacta del problema.

6- Desarrollo de las especificaciones del programa, programación y depuración:

En esta etapa se recomienda hacer diseños enfocados al usuario, esto es, que el manejo de los datos le sean sencillos al usuario. La tarea

de programación y depuración será por lo general realizado por otro departamento, aunque la participación del analista puede ayudar a acelerar el desarrollo de esta etapa.

7- Recolección de los Datos:

Es la etapa en la cual los datos son recolectados y analizados para la posterior prueba de validez e implementación. Muchas veces se hace un énfasis excesivo sobre la precisión de los datos, cuando lo correcto es primero determinar la sensibilidad de los mismos en el modelo para determinar luego su grado de precisión necesarios. El principal obstáculo de esta etapa suele ser la carencia de información -lo cual indica simplemente que las decisiones se toman en un vacío intelectual- y por otro lado el ocultamiento de la misma.

8- Validación:

En esta etapa dos aspectos son envueltos: Primero, determinar como validar un modelo, y segundo, la conducta de la validación.

La primera tarea envuelve especificaciones de análisis y experimentos diseñados para probar la consistencia, la sensibilidad, la plausibilidad y la funcionalidad del modelo. La conducta de la validación requiere el uso de los datos recolectados durante la etapa previa para una prueba completa del modelo.

9- Implementación:

La etapa final del estudio, consistente en implementación y mantenimiento, suele ser la más dificultosa, ya que envuelve diferentes niveles

de gerencias, así como la comprensión del modelo por parte de los gerentes al igual que la disposición de estos a usarlo.

Para esta etapa es muy necesaria la comunicación entre los analistas, los gerentes y los usuarios involucrados.

En esta etapa es recomendable realizar una buena documentación, preparar seminarios de orientación y el uso del estudio de aplicaciones realísticas.

4.5.- RELACIÓN CON TEORÍA DE DECISIONES

Ahora veamos como se relaciona la teoría de decisiones con la I.O.: señalamos que la I.O. es una herramienta de toma de decisiones, enfocada hacia la optimización de la eficiencia operativa de las organizaciones.

Claro esta que no todas las decisiones están relacionadas con problemas operacionales -serían las excepciones que confirman la regla-, ni encaminadas a la optimización de las mismas, pero la gran mayoría de ellas si atañen dicho aspecto, así que la relación entre I.O. y teoría de decisiones es evidente ya que la primera es una herramienta indispensable de la segunda, ya que es la que va a objetivizar el problema dando para diferentes situaciones posibles los niveles de eficiencia de las mismas. Lo anterior no significa que no es necesario complementar las decisiones con las metodologías adicionales como las de análisis de decisiones bajo incertidumbre, decisiones colectivas, etc, aunque estas a su vez puedan incluirse dentro del modelo de I.O. pertinente. Así que las teorías de decisiones y la I.O. se complementan dinamicamente en la toma de decisiones en la medida en la cual en la I.O. se incluyan los planteamientos de la teoría de decisiones en la elaboración de los modelos y las decisiones se tomen en base a los modelos desarrollados por la I.O.

4.6.- LA I.O. COMO HERRAMIENTA DE PLANIFICACION

Para entrar en materia, vamos primero a hacer un esbozo sobre el concepto de planificación.

"Planificar significa anticipar el curso de acción que ha de adoptarse con la finalidad de alcanzar una situación deseada.... La planificación es un medio para la distribución de los recursos disponibles y su utilización de manera progresiva y organizada, con sujeción a una línea de acción determinada, para alcanzar un objetivo dado... El proceso de planificación consiste en una secuencia determinada de actividades que conducen a la previsión de acciones que deberán ejecutarse en un período futuro".⁴⁷

"La planificación opera sobre la base de fijar previamente el estado de cosas deseable, contando con la actuación de un medio que contiene en sí mismo los elementos que pueden ayudar o hacer fracasar la actuación de la empresa. Una planificación es un conjunto de cursos de acción predeterminados, que implica su puesta en práctica en un medio de acontecimientos imprevisibles... La planificación eficaz es la que contempla la empresa y sus aspectos como un todo".⁴⁸

Respecto a la toma de decisiones hay tres aspectos fundamentales de la planificación a considerar:

- 1) La planificación como una toma de decisiones anticipada.
- 2) La planificación como un sistema de decisiones que surge cuando el estado futuro que se desea alcanzar implica un conjunto de decisiones interrelacionadas, es decir, cuando una decisión que se tome afecte a otra del conjunto.
- 3) La planificación como un proceso que se dirige a producir un estado futuro que se desea y que no puede alcanzarse a menos que antes se emprenda la acción correcta.

Así la planificación es un proceso que envuelve entre otros a los siguientes elementos: el agente de planificación, el receptor, la previsión, la información, los objetivos, los medios, los plazos, la coordinación, la eficiencia y la decisión; y cuyos objetivos son:

⁴⁷ B.I.D.- E.I.A.P.-F.G.V.: Proyectos de Desarrollo: planificación, Implementación y Control, Limusa, Mexico, 1979.

⁴⁸ Pozo Navarro, F., La Dirección por sistemas, Limusa, México, 1976.

- a) Servir de fuerza impulsora de la actividad empresarial a todos los niveles, trazando el camino a seguir en las operaciones en cada uno de los subsistemas de la empresa.
- b) Unida al control formar el par regulador que permite adaptar el sistema a su entorno, dentro de los márgenes que le son exigidos para mantener el equilibrio correcto.
- c) Buscar maximizar el beneficio de las oportunidades futuras de la empresa, a través de la previsión de medios y presupuestos económicos.
- d) Coordinar la acción de los miembros de la empresa a través del establecimiento de objetivos de toda índole, que definen las líneas de una acción común a la que deben ajustar su comportamiento.

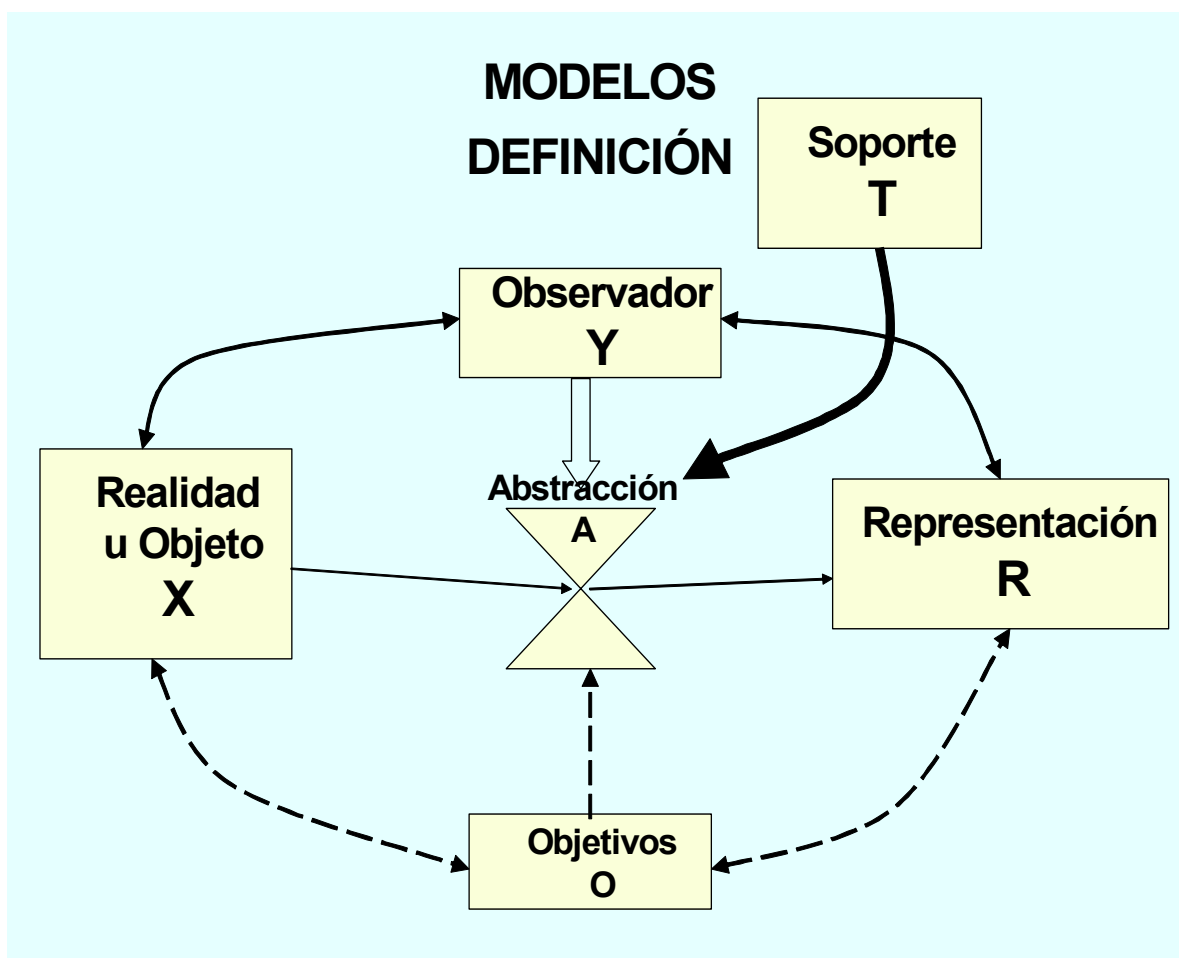
De lo expresado anteriormente respecto a la planificación es sencillo deducir que la I.O. es una herramienta de la planificación ya que son los modelos de la I.O. los que permiten asignar recursos, optimizar eficiencias y tomar decisiones de diferentes tipos en diferentes niveles. Pero también es necesario añadir que la I.O. en sí permite mediante técnicas como el PERT-CPM elaborar y controlar la planificación en sí.

CAPÍTULO 5

MODELOS

En este capítulo vamos a teorizar sobre modelos.

Vamos a empezar por definir lo que vamos a entender por modelo^{49,50}:



49

Esta definición es una extensión de la definición de Javier Aracil.

50

En mi trabajo de ascenso para profesor asociado "Conceptos, Teorías y Modelos. Un enfoque sistémico", hay un anexo (anexo VI) con 20 definiciones de modelo

De esta manera se puede definir como modelo M , de una realidad u objeto X , elaborada por un observador Y , a la representación R para unos objetivos O , que hace Y de X , mediante un proceso de abstracción A , sustentado con un soporte teórico, heurístico y semántico T .

Realmente la definición anterior es un metamodelo, ya que la definición de los mismos está hecho con un modelo.

5.1.- CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS INTERVINIENTES EN LA DEFINICIÓN DE MODELO.

5.1.1.- La Realidad u Objeto X.

La realidad u objeto X , es lo que se va a representar, siempre será un sistema (o subsistema) y/o un componente o parte de un sistema. Podrá ser material o conceptual, una realidad pasada, presente o futura deseable o no.

5.1.2.- El observador Y.

Aunque esta en singular, el observador puede ser un grupo de individuos, cuando ocurre esto último debe existir algún tipo de organización de los mismos. Ahora bien, el observador puede ser personas con experiencias, o no, con una trayectoria educativa y cultural, con conocimientos de diversos tipo respecto al objeto a modelar, y sobre el arte de modelar. Todo esto se reflejará en la calidad del modelo de alguna manera.

5.1.3.- El Proceso de Abstracción A.

El proceso de abstracción A , es un proceso mental que capta lo resaltante o importante del ente X a modelar, y depende entre otras cosas de los objetivos del modelo y del conocimiento y la experticia del observador.

5.1.4.- El Soporte Teórico, Heurístico y Semántico T.

El soporte teórico, heurístico y semántico T, son todas aquellas teorías, herramientas heurísticas y principios semánticos que intervienen tanto en el proceso de abstracción como en la representación R y dependerán en gran manera de los objetivos O y de los conocimientos y experticias del observador Y.

5.1.5.- Los Objetivos O.

Los objetivos O responden a las preguntas ¿Para qué se está haciendo el modelo? ¿Cuál es la finalidad del mismo?.

Entre los objetivos podemos tener, entre otros: analizar, prescribir, simular, pronosticar, diseñar, evaluar, etc., o simplemente divertirse.

5.1.6.- La Representación R.

La representación R es la concreción del modelo. O en otras palabras, el modelo se termina expresando mediante una representación. Pero la representación sola no es el modelo.

Por la importancia de las representaciones la siguiente sección va estar dedicada a las representaciones.

5.2.- REPRESENTACIONES.

Antes de proseguir vamos tratar de dilucidar el concepto de Representación.

El primer problema que uno se consigue con este término es que se utiliza en diversas disciplinas, y en cada una con un valor diferente.

El DRAE, tiene las siguientes aceptaciones de representación:

Representación

Del lat. *repraesentatio, -ōnis*.

1. f. Acción y efecto de representar.
2. f. Imagen o idea que sustituye a la realidad.
3. f. Conjunto de personas que representan a una entidad, colectividad o corporación.
4. f. Cosa que representa otra.
5. f. Categoría o distinción social. *Juan es hombre de representación en Madrid.*
6. f. Obra dramática que en la Edad Media trataba de temas varios, principalmente religiosos.
7. f. Der. Derecho de una persona a ocupar, para la sucesión en una herencia o mayorazgo, el lugar de otra persona difunta.
8. f. Psicol. Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior.
9. f. desus. Súplica o proposición apoyada en razones o documentos, que se dirige a un príncipe o superior.

Real Academia Española © Todos los derechos reservados

Voy a proponer la siguiente definición de representación:

R es una representación del ente X, si para ciertos fines O y bajo ciertas circunstancias o contextos C, X puede ser sustituido por R.

5.2.1.- Homomorfismos⁵¹

Una transformación $\alpha: M \rightarrow L$ se llama transformación homomorfa (u homomorfismo) de la relación⁵² $\langle A, M \rangle$ en la relación $\langle B, L \rangle$, si de xAx' se tiene $\alpha(x)B\alpha(x')$.

Una transformación $\alpha: M \rightarrow L$ se llama correlación de la relación $\langle A, M \rangle$ en la relación $\langle B, L \rangle$, si de $\alpha(x)B\alpha(x')$ se tiene xAx' .

Si α es un homomorfismo y es sobreyectiva, inyectiva, o biyectiva entonces el homomorfismo se llamará respectivamente epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo.

Si α es un homomorfismo (epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo) y es una correlación entonces se llamará k-homomorfismo (k-epimorfismo, k-monomorfismo, k-isomorfismo respectivamente).

De esta manera se considera que un modelo es una buena representación R de X , si R se obtiene mediante un k-homomorfismo de X . Lo ideal es que sea un k-isomorfismo.

⁵¹ Adaptado de Schreider, Julius A.: Equality, Resemblance and Order. Ed.MIR. Moscú. 1.975.

⁵² La definición de relación se dejó para el siguiente capítulo. Pág.

5.2.2.- Tipos de Representaciones

Las representaciones pueden ser de varios tipos, veamos algunos de ellas:

1) Representaciones físicas:

Son aquellas representaciones que recurren a un constructo físico para hacer la representación, entre ellas tenemos las analógicas tales como las duplicaciones a escala, el uso de análogos físicos, o los juegos conductuales controlados, y los icónicos o iconográficos en los cuales se recurre a ilustraciones.

2) Representaciones simbólicas:

Son todas aquellas en las cuales se recurren a símbolos, sean estos verbales, matemáticos o de cualquier otro tipo para realizar la representación.

3) Representación transversal (sincrónica) o longitudinal (diacrónica).

Según como se tome en cuenta el tiempo en la representación podemos tener: a) representaciones transversales o sincrónicas, cuando las representaciones son de un momento dado en el eje del tiempo; y b) representaciones longitudinales o diacrónicas, cuando las representaciones toman en cuenta el desarrollo o la dinámica de la realidad u objeto sujeto al modelaje.

5.3.- TAXONOMÍA DE LOS MODELOS

Existen diversas taxonomías y/o clasificaciones de los modelos:

Así M.Guillaume⁵³ hace la siguiente clasificación:

- A.- Modelos parciales y modelos generales.
- B.- Modelos microeconómicos y macroeconómicos.
- C.- Modelos descriptivos (o empíricos) y modelos analíticos.
- D.- Modelos de decisión y modelos de simulación.
- E.- Por el tratamiento del tiempo:
 - 1.- Modelos a horizonte fijo y modelos cinéticos.
 - 2.- Modelos estáticos y modelos dinámicos.

Mientras que A. Foxley R.⁵⁴ hace la siguiente tipología de modelos:

- Agregados o multisectoriales.
- Estáticos o dinámicos
- De consistencia o de optimización.
- Econométricos, de simulación o de programación.

R.E. Shannon⁵⁵ presenta el siguiente esquema de clasificación:

- a) Estático (de corte seccional) vs. dinámico (de series de tiempo)
- b) Determinístico vs. estocástico.
- c) Discreto vs. continuo.
- d) Icónico o físico vs. analógico vs. simbólico.

Mientras que Martínez y Requena⁵⁶ clasifican los modelos según su grado de formalización (más o menos detallado) de la siguiente manera:

- Modelos literarios (novela),
- Modelos plásticos (escultura y maqueta),
- Modelos geométricos (mapas), y
- Modelos matemáticos (ecuaciones).

⁵³ Guillaume, Marc: Modèles Economiques. P.U.F. Paris. 1971. Págs. 16 - 25

⁵⁴ Foxley R., Alejandro: Estrategia de Desarrollo y Modelos de Planificación. CEPLAN. Fondo de Cultura Economica. México. 1975. Págs. 30-47.

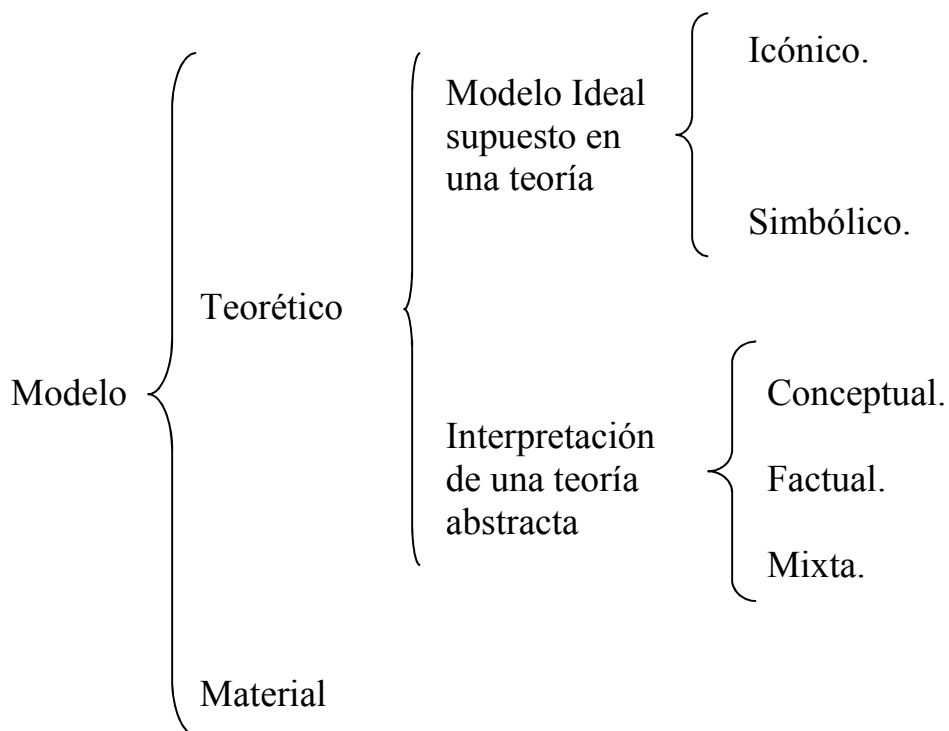
⁵⁵ Shannon, Robert E.: Simulación de Sistemas. Diseño, desarrollo e implantación. Trillas. 1988. Pág. 16.

⁵⁶ Martínez, Silvio y Requena, Alberto: Simulación Dinámica por ordenador. Alianza Editorial. Madrid. 1988. Pág. 33.

J.P. van Gigch⁵⁷ presenta los siguientes tipos de modelo según el objetivo de los mismos.:

- Modelos de medición,
- Modelos de decisión,
- Modelos de intercambio,
- Modelos multidimensional y de de atributos múltiples,
- Modelos de optimización,
- Modelos de evaluación y juicio,
- Los sistemas de investigación o modelos epistemológicos, y
- Modelos de diagnóstico.

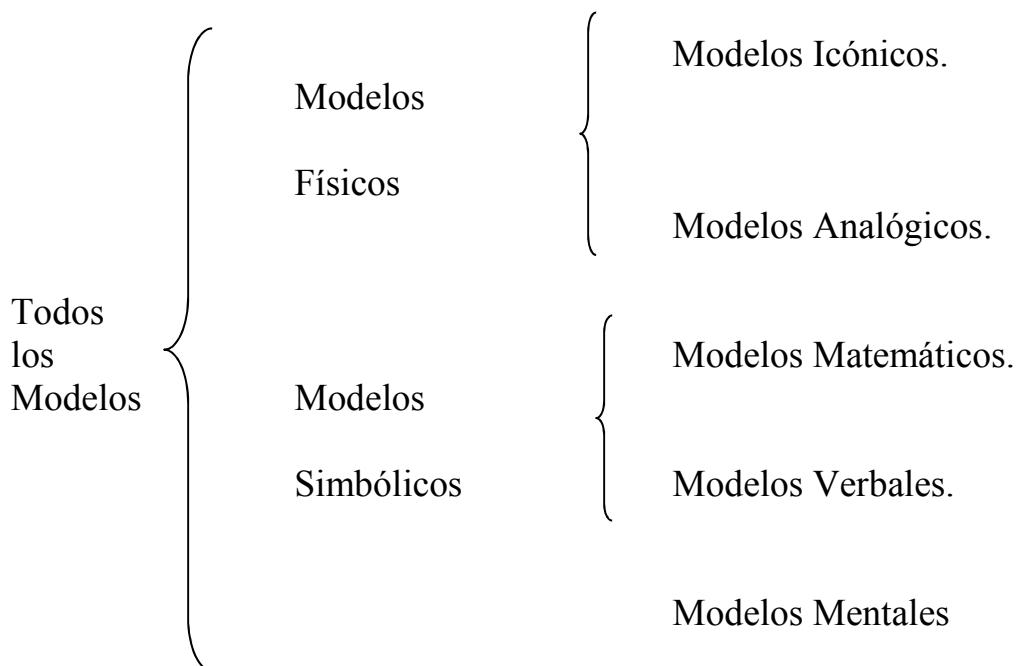
M. Bunge⁵⁸ hace la siguiente categorización de los sentidos de "modelo":



⁵⁵ Van Gigch, John P., Teoría General de Sistemas. Págs. 115-116

⁵⁸ Bunge, Mario: La Investigación Científica. Editorial Ariel. Barcelona. 1983. Pág. 456.

mientras que Springer-Herlihy-Beggs⁵⁹, de manera similar, hace la siguiente clasificación:



y a su vez clasifican los Modelos Matemáticos en:

- Cuantitativos / Cualitativos
- Determinados / Probabilísticos
- Confeccionados / Hechos de la Medida
- Descriptivos / Optimizadores
- Modo analíticos / Modo numéricos.

⁵⁹ Springer, Clifford H. - Herlihy, Robert E. - Beggs, Robert I.: Métodos Avanzados y Modelos, Serie de Matemáticas para la Dirección de Negocios. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. 1972. Págs. 8 y ss.

Ahora bien, personalmente, a mi, ninguna de las clasificaciones anteriores me satisface plenamente, ya que si se va hacer una clasificación de modelos habría que tomar los distintos factores integrantes de los mismos, esto es: la realidad X, el observador Y, la representación R, el objetivo O, el proceso de abstracción A y el soporte teórico, heurístico y semántico T. Si bien no todas las combinaciones son posibles, la cantidad de tipos de modelos diferentes es bastante elevada, y al final de cuenta no sé si clasificarlos ayuda en algo, mucho o nada. Pero de todos modos voy a proponer que para hacer una verdadera taxonomía hay que tomar en cuenta como mínimo los siguientes aspectos:

- 1) En base al tipo de realidad u objeto X a modelar.
 - Realidad presente existente.
 - Realidad pasada, que dejo de existir
 - Realidad futura, deseable o no.
- 2) El observador Y
 - Un solo observador.
 - Muchos observadores.
- 3) La representación R
 - Representación simbólica, gráfica, icónica o analógica.
 - Representación transversal (sincrónica) o longitudinal (diacrónica).
- 4) El objetivo o finalidad O
 - Diagnosticar
 - Evaluar
 - Simular
 - Analizar
 - Diseñar
 - Prescribir

- 5) El tipo de proceso de abstracción A.
- 6) El tipo de soporte teórico, heurístico y semántico.

5.4.- LOS MODELOS DE SIMULACIÓN

Un tipo de modelos muy especial es lo que se suele por llamar los modelos de simulación.

5.4.1.- Definiciones de Simulación

En base a un análisis de diversas definiciones⁶⁰ se puede constatar que todas tienen en común la existencia de un modelo y la experimentación con este modelo. Y aunque el uso del computador no es indispensable aparece como posibilidad, cuando no como herramienta casi necesaria cuando de modelos matemáticos se trata.

De esta manera, se puede definir un modelo de simulación como a aquellos modelos que permiten hacer experimentos con ellos en vez de hacerlo directo con la realidad.

O de manera más formal, se dice que un modelo M, de una realidad X, es un modelo de simulación, si uno de sus objetivos O es hacer experimentos, y su representación lo permite y dichos experimentos van a tener una respuesta similar a lo que ocurriría en la realidad si dichos experimentos se hubieran hecho en ella.

⁶⁰ En el trabajo de ascenso para el escalafón de Prof. Asociado, *Conceptos, Teorías y Modelos. Un enfoque sistémico*, al cual se puede acceder mediante mi blog, (www.hthonon.blogspot.com) en el anexo VII se enuncian trece (13) definiciones de simulación, las primeras ocho escuetas y concretas, y las restantes cinco descriptivas.

5.4.2.- Técnicas De Simulación

De hecho existen varias técnicas de simulación entre las cuales cabe destacar:

- Los juegos operacionales: Se refiere a aquellas situaciones que envuelven conflictos de intereses entre los jugadores o tomadores de decisiones con un marco de referencia de un ambiente simulado.
- Método de Monte Carlo: Consiste en la simulación a través de técnicas de muestreo, esto es, en vez de tomar muestras de la población real, estas son obtenidas de una contraparte teórica de la población real.
- Simulación de sistema: Consiste en un proceso en el cual los datos del mundo real son procesados mediante un modelo que reproduce el ambiente operacional.

Estas técnicas anteriores se pueden usar conjuntamente, complementándose las unas a las otras.

5.4.3.- Metodología de la Simulación

En cuanto a la metodología Donald Gaver⁶¹ propone las siguientes etapas en los estudios de simulación:

- 1) Definición del problema: identificación de los asuntos importantes.
- 2) Recolección de la información empírica y análisis de datos; establecimiento del contacto con el usuario.
- 3) Formulación del modelo: Estipulación sobre las abstracciones, simplificaciones aceptables y respuestas relevantes, y medidas de rendimientos.
- 4) Construcción o selección del modelo: documentación de los submodelos y determinación de los parámetros.

⁶¹ Gaver, Donald P., Simulation Theory, en Handbook of Operations research, foundations and fundamentals, editado por Joseph J. Moder y Salah E. Elmaghraby, Van Nostrand Reinhold Company, 1978.

- 5) Manipulación del modelo: Cómputos para determinar las respuestas cuando las condiciones del modelo varían; diseño experimental y "reducción de varianza".
- 6) Estudios de validación: ¿Están los resultados computacionales en conformidad con las entradas (ejemplo: ¿Hay errores de programación presentes?) y son los resultados computacionales consistentes con la experiencia del "mundo real"?
- 7) Comunicación de los resultados al usuario: repetición de las etapas anteriores, dependiendo de lo que se ha aprendido.

Muchas de las etapas anteriores son comunes a la mayoría de las resoluciones de los problemas de la I.O.. Lo que la diferencia es el esquema repetitivo y experimental.

Dentro de la simulación computarizada, obviamente, existen diferentes técnicas para resolver los distintos problemas, según estos sean discretos o continuos, determinísticos o aleatorios, estáticos o dinámicos, y según las necesidades del usuario. Pero en todo caso el aspecto más importante en la creación de modelos quizás sea la creatividad de los analistas-modelistas.

En cuanto al campo de aplicaciones podemos mencionar los siguientes: Mercadeo, distribución física, manufactura, ensamblaje, mantenimiento, almacenamiento, contabilidad, finanzas, etc. En fin, en todas las tareas donde puedan surgir problemas no resolubles analíticamente o que necesitan experimentos o interpretaciones numéricas o gráficas intermedias.

De lo dicho anteriormente podemos fácilmente inferir la importancia de la simulación ya que nos permite resolver problemas que de otra manera no serían posibles y además (en el caso de resultados gráficos) nos permite visualizar el problema de su funcionamiento.

5.4.4.- Técnicas Digitales de Simulación de Sistemas

En simulación digital de sistemas dinámicos existen dos técnicas las cuales se usan, o bien solas, o bien separadas:

- Por incremento fijo de intervalo

Sea $X^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_k^t)$ el Estado del sistema en el momento t definido por los parámetros x_1, x_2, \dots, x_k

Entonces se hallan X^t , $t = t_0 + n \cdot \Delta$, $n = 1, 2, \dots, N$.

en donde: Δ es el incremento.

X^0 es el estado inicial del sistema.

Esto es, dado el estado inicial del sistema caracterizado por unos parámetros, entonces se halla los nuevos estados del sistema, calculando los nuevos valores de los parámetros, incrementando el tiempo en una cantidad fija cada vez. Este método se utiliza cuando se tiene un sistema de ecuaciones en diferencias y/o diferenciales.

- Por ocurrencia de Eventos

En este caso se halla Δ_i de manera tal que:

- 1.- $X^{t_i} \neq X^{t_i + \Delta_i}$

- 2.- $X^t = X^{t_i}$, $t \in [t_i, t_i + \Delta_i)$

Esto es, se hallan los estados en los cuales ocurre algún cambio en los valores de los parámetros que describen dichos estados. Esta técnica se utiliza cuando hay una manera de estimar para los parámetros, cuando ocurrirá un cambio de valor.

5.5.- MODELAJE Y VISIÓN DE SISTEMAS

En este tema vamos a tratar de ver como una visión o enfoque de sistema esta relacionado con el modelaje.

Por visión de sistema entendemos a un enfoque interdisciplinario que trata visualizar los problemas como parte de un todo y cuya herramienta por excelencia es la analogía.

Veamos cada uno de los términos usados en esta definición:

- **Interdisciplinariedad:** Los problemas en su gran mayoría no son exclusivos, en cuanto a su alcance, de una sola disciplina. Por lo general implican distintas áreas del conocimiento científico, así que la intervención en la resolución de ellos de un grupo de individuos de distintas áreas del conocimiento y con diferentes formaciones disciplinares es un requisito necesario. Obviamente, a la hora del modelaje estos conocimientos no van a ser agregados de una forma desordenada, sino todo lo contrario, a base de discusiones se van a encajar armoniosamente en el modelo.

- **El Todo:** Los problemas no son aislados, son parte de un Todo con el cual inter-actúan. Además existe el dilema de cuales son los bordes o fronteras del problema, ya que al no estar aislados estos bordes suelen ser borrosos. esto obviamente no implica que se va a trabajar con el Todo de manera completa, sino que hay que tomarlo en cuenta para saber como va a afectar al problema y como a su vez la solución del problema va a afectar a este Todo.

- **Analogía:** Es el razonamiento que se basa en las semejanzas existentes entre diferentes tipos de problemas. Su máxima expresión son los isomorfismos, esto es que dado dos problemas, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de uno de los problemas con los del otro. Claro está que este tipo de razonamiento no está libre de errores, sobre todo si se desprecia características

típicas de los elementos primarios de los problemas, pero por otro lado suele ser un buen punto de partida para reflexiones posteriores sobre los problemas.

Estas características de la visión de sistema va a influir de manera determinante tanto la etapa de formulación del problema como la del desarrollo del modelo sobre todo en los puntos de alcance del problema, la definición del problema, la definición de las variables, las medidas de eficiencia y del desarrollo computacional.

PARTE II

LÓGICA

CAPÍTULO 6

LOGICA DE PROPOSICIONES.

Se considera una proposición a cualquier enunciado susceptible de ser verdadero o falso⁶². Se dirá que una proposición es una proposición simple, molecular o atómica si no está formada por otras proposiciones. De lo contrario se dirá que es una proposición compuesta. Se considera que proposiciones compuestas son equivalentes si toman el mismo valor de verdad cuando sus partes tienen también el mismo valor de verdad.

6.1.- Operadores

6.1.1.- Operadores primarios.

Son los operadores a partir de los cuales se pueden definir todos los demás operadores⁶³:

a) Negación:

Sea p una proposición, entonces $\neg p$ (no p), la negación de p , será falsa cuando p es verdadera y verdadera cuando p sea falsa.

b) Conjunción:

Sea p y q dos proposiciones, entonces $p \wedge q$ (p y q), la conjunción de p y q , será verdadera sólo cuando ambas sean verdaderas y de lo contrario (cuando alguna de las dos o ambas son falsas) será falsa.

⁶² En el anexo C se encuentra una disertación sobre la verdad.

⁶³ También se podría tomar como operadores primarios la negación y la disyunción, o la incompatibilidad ($p|p = \sim p$).

6.1.2.- Los otros operadores:

a) **Disyunción inclusiva**

$p \vee q$ (p o q), la disyunción inclusiva de p y q , será falsa sólo cuando ambas son falsas y de lo contrario (cuando alguna de las proposiciones o ambas son verdaderas) es verdadera, y es equivalente a: $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

b) **Disyunción exclusiva:**

$p \underline{\vee} q$ (ó p , ó q), la disyunción exclusiva de p y q , será verdadera cuando una de las dos proposiciones es verdadera y la otra falsa, mientras que es falsa cuando las dos son falsas o las dos son verdaderas simultáneamente, y es equivalente a: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ó también a $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$.

c) **Implicación**

$p \implies q$ (p implica q ó si p entonces q) es falsa sólo cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso, y de lo contrario es verdadera, y es equivalente a $\neg p \vee q$.

También en este caso se dice que p es condición suficiente de q , y q condición necesaria de p

d) **Doble implicación**

$p \iff q$ (p si y sólo si q) es verdadera cuando ambos (p y q) son verdaderos o ambos falsos, y es equivalente a: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

e) La incompatibilidad.

$p|q$ (p es incompatible con q) es falsa cuando ambos (p y q) son verdaderos, y es equivalente a $\neg p \vee \neg q$.⁶⁴

Los enunciados anteriores se pueden resumir en el siguiente cuadro:

| p | q | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \underline{\vee} q$ | $p \implies q$ | $p \iff q$ | $p q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|------------------------|----------------|------------|-------|
| V | V | F | V | V | F | V | V | F |
| V | F | F | F | V | V | F | F | V |
| F | V | V | F | V | V | V | F | V |
| F | F | V | F | F | F | V | V | V |

6.2.- Tautologías, Contradicciones y Contingencias.

Las tautologías son proposiciones que son verdaderas independientemente del valor de sus proposiciones atómicas. Las tautologías forman las leyes de la lógica proposicional.

Entre las principales tautologías se tienen:

| | <u>fórmula</u> | <u>nombre</u> | <u>interpretación</u> |
|----|-----------------------------|------------------|---|
| 1) | $p \implies p$ | Identidad | a) Si se da p , entonces p se da. b) Si una proposición es cierta entonces es cierta. |
| 2) | $p \iff p$ | Identidad | a) p es cierto si y sólo si p es cierto. b) Una proposición es idéntica a sí misma. |
| 3) | $\neg(p \wedge \neg p)$ | No contradicción | a) No se da p y no p simultáneamente. b) Una proposición y su negación no son ciertas simultáneamente. |
| 4) | $p \vee \neg p$ | Tercero excluido | a) p o su negación es cierta. b) Una proposición o su negación es cierta. |
| | $p \underline{\vee} \neg p$ | | |

⁶⁴ En el anexo C se encuentra una reflexiones sobre la incompatibilidad

| | <u>fórmula</u> | <u>nombre</u> | <u>interpretación</u> |
|-----|---|---|---|
| 5) | $p \iff \neg\neg p$ | Doble negación | a) p es equivalente a su doble negación b) Una proposición es idéntica a su doble negación |
| 6) | $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$ | Modus ponendo ponens | a) Si p implica q, y se tiene p, entonces se tiene q b) Dada una implicación y se cumple el antecedente, entonces se cumple el consecuente |
| 7) | $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$ | Modus tollendo tollens | a) Si p implica q, y q no se da, entonces tampoco se da p. b) Dada una implicación y no se cumple el consecuente, entonces no se cumple el antecedente. |
| 8) | $[(p \vee q) \wedge \neg p] \implies q$ | Modus tollendo ponens o Silogismo disyuntivo | a) Dado p o q, y no p, entonces q. b) Dada una disyunción de dos proposiciones y el hecho que una no se cumple, debe cumplirse la otra. |
| 9) | $p \wedge q \implies p$ | Simplificación. | a) Dado p y q, entonces p. b) Dado una conjunción, entonces debe cumplirse cada una de las proposiciones. |
| 10) | $p \implies p \vee q$ | Adición | a) Dado p, entonces p o q b) Dada una proposición, entonces se cumple la disyunción de esta proposición con cualquiera otra. |
| 11) | $p \implies (q \implies p)$ | A fortiori | a) Dado p, entonces, q implica p. b) Dado una proposición, entonces ésta es implicada por cualquiera otra proposición. |
| 12) | $[p \implies (q \implies r)] \implies [(p \implies q) \implies (p \implies r)]$ | Ley de Frege | a) Si p, implica que q implique r, entonces si p implica q, entonces p implica r. b) Si una proposición implica una implicación, entonces si esta proposición implica el antecedente de la implicación, entonces también implica el consecuente de la implicación. |
| 13) | $[p \implies (q \implies r)] \implies [(q \implies (p \implies r))]$ | Cambio del antecedente | a) Si p, implica que q implique r, entonces q implica que p implica r. b) Si una proposición implica una implicación, entonces el antecedente de la implicación implica que la proposición implica el consecuente de la implicación. |

| | <u>fórmula</u> | <u>nombre</u> | <u>interpretación</u> |
|-----|--|---|--|
| 14) | $[p \implies (q \implies r)] \iff [p \wedge q \implies r]$ | Importación-exportación de la implicación | <p>a) Que p implique que q implica r es equivalente a que p y q implique r.</p> <p>b) Que una proposición implique una implicación es equivalente a que la proposición y el antecedente de la implicación implique al consecuente de la implicación.</p> |
| 15) | $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies [p \implies r]$ | Silogismo hipotético | <p>a) Si p implica q y q implica r, entonces p implica r.</p> <p>b) Si se tienen dos implicaciones, en donde el consecuente de la primera es el antecedente de la segunda, entonces el antecedente de la primera implica el consecuente de la segunda.</p> |
| 16) | $[p \implies q] \iff [\neg q \implies \neg p]$ | Contraposición | <p>a) Que p implique q es equivalente a que no q implique no p</p> <p>b) Una implicación es equivalente a otra en donde la negación del consecuente implica la negación del antecedente</p> |
| 17) | $[p \implies q \wedge \neg q] \implies \neg p$ | Reducción al absurdo | <p>a) Si p implica q y no q, entonces se tiene no p.</p> <p>b) Si una proposición implica a otra y su negación, entonces se tiene la negación de la primera.</p> |
| 18) | $[(p \implies q) \implies p] \implies p$ | Ley de Peirce | <p>a) Del hecho que p implique q, implica a p, se tiene p.</p> <p>b) Si una implicación implica su antecedente, entonces se tiene el antecedente.</p> |
| 19) | $[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge (p \vee r)] \implies [q \vee s]$ | Dilema constructivo | <p>a) Si se tiene que p implica q, que r implica s y p o r, entonces se tiene q o s.</p> <p>b) De dos implicaciones, y la disyunción de sus antecedentes, se tiene la disyunción de sus consecuentes.</p> |
| 20) | $[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \implies [\neg p \vee \neg r]$ | Dilema destructivo | <p>a) Si se tiene que p implica q, que r implica s y no q o no s, entonces se tiene no p o no s.</p> <p>b) De dos implicaciones y la disyunción de las negaciones de sus consecuentes, se tiene la disyunción de las negaciones de sus antecedentes.</p> |

Además de las leyes conmutativas y asociativas de las disyunciones, la conjunción y la doble implicación, y la leyes distributivas; y de las leyes dadas a través de las definiciones.

Las contradicciones son proposiciones que son falsas independientemente del valor de sus proposiciones atómicas. Mientras que las proposiciones que no son ni tautologías ni contradicciones se dicen que son contingentes. Además, la negación de una tautología es una contradicción, y la negación de una contradicción, una tautología, mientras que la negación de una proposición contingente sigue siendo una proposición contingente.

Ejercicio

6.1.- Dadas las siguientes proposiciones:

p = Juan es un buen empleado.

q = Juan va a tener ascenso.

r = Juan va tener aumento de sueldo.

s = Juan va a ser despedido.

Construir cada una de las 20 tautologías indicadas anteriormente.

6.3.- Aplicaciones

A.- Análisis de Enunciados.

EJEMPLO 6.1

Sea por ejemplo el siguiente enunciado:

"Sí los métodos de trabajo son antieconómicos, entonces no son socialmente deseables. Si los métodos de trabajo son aburridos, entonces son nocivos para la iniciativa. Si los métodos de trabajo son nocivos para

la iniciativa, entonces son antieconómicos. Meramente el trabajo mecánico es aburrido. Por lo tanto, meramente el trabajo mecánico no es socialmente deseable".⁶⁵

Definamos:

A = "los métodos de trabajo son antieconómicos"

I = "los métodos de trabajo no son socialmente deseables"

B = "los métodos de trabajo son aburridos"

N = "los métodos de trabajo son nocivos para la iniciativa"

M = "el trabajo mecánico"

Así tenemos las siguientes premisas:

(P1) $A \implies I$

(P2) $B \implies N$

(P3) $N \implies A$

(P4) $M \implies B$

derivaciones

(D1) $M \implies N$ SH, P4, P2 (SH:Silogismo Hipotético)

(D2) $M \implies A$ SH, D1, P3

(D3) $M \implies I$ SH, D2, P1 (CONCLUSION)

Por lo tanto el argumento es válido ya que la conclusión se obtuvo a partir de las premisas aplicando las leyes.

B.- Redes lógicas.

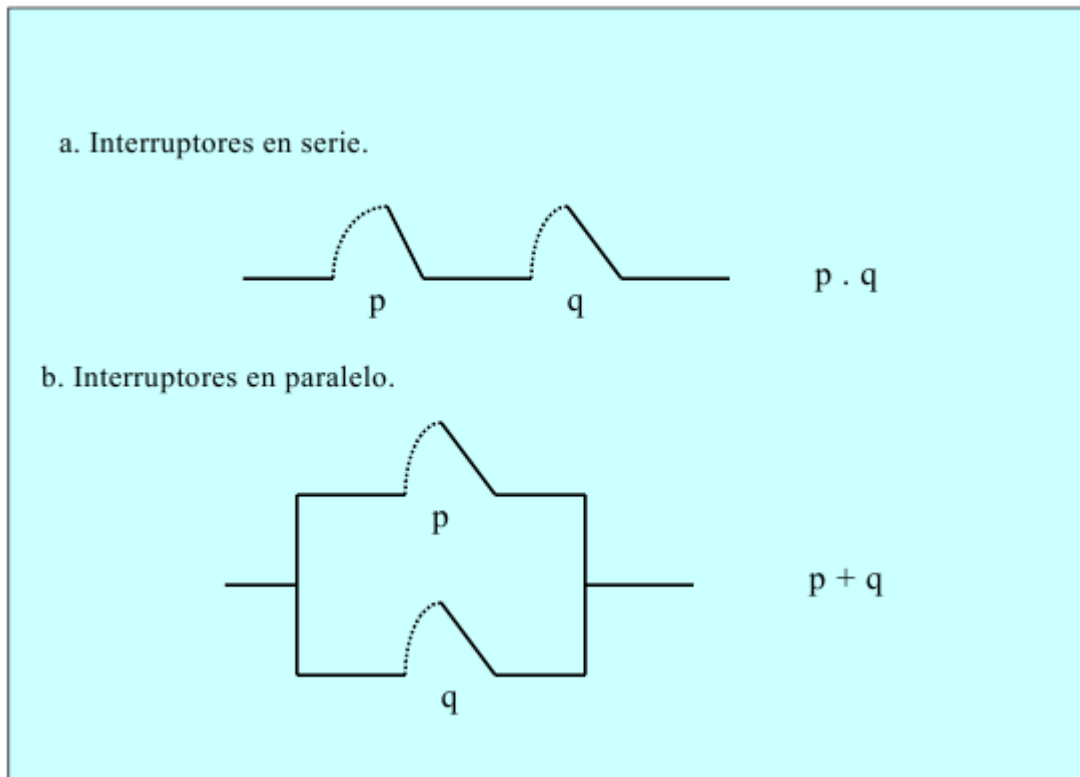
Cuando se tienen circuitos eléctricos o hidráulicos se considera que hay paso del fluido cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:

⁶⁵ Bishir, John W. & Drewes, Donald W.: Mathematics in the Behavioral and Social Sciences. Harcourt, Brace & world. 1970.

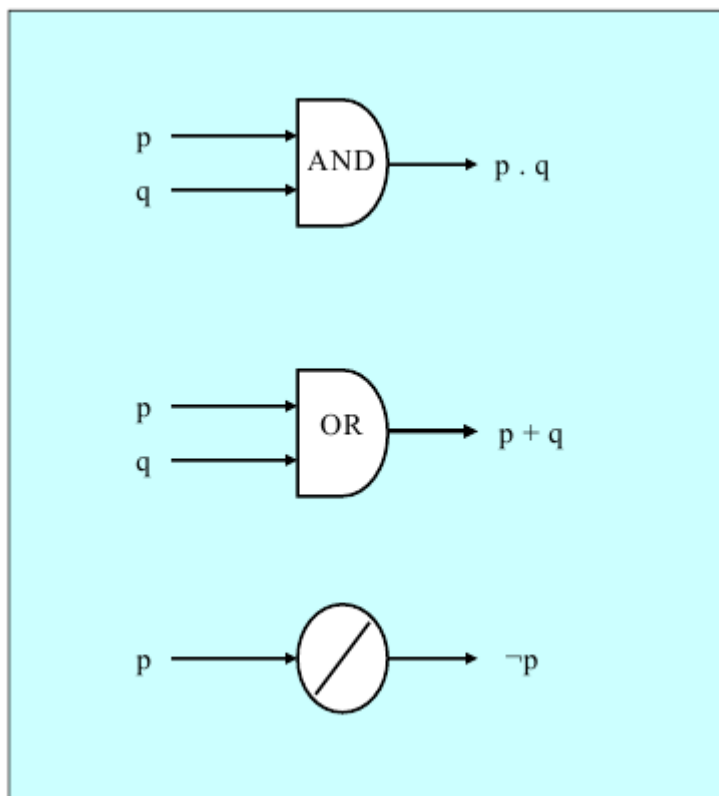
- 1.- Dos interruptores que están en serie están ambos abiertos.
- 2.- Dos interruptores que están en paralelo al menos alguno los dos está abierto.

(Ver figura 6.1.)

Figura 6.1



En los circuitos de computadores se consideran directamente tres tipos de compuertas: AND, OR y NOT los cuales tienen como salida 1 cuando todas las entradas son 1, cuando al menos una de ellas es 1 y cuando la entrada es falsa, respectivamente. (Ver figura 6.2)

Figura 6.2

En forma general cualquier sistema donde fluya algo (electricidad, dinero, información, etc) se puede representar de manera análoga a las descritas previamente.

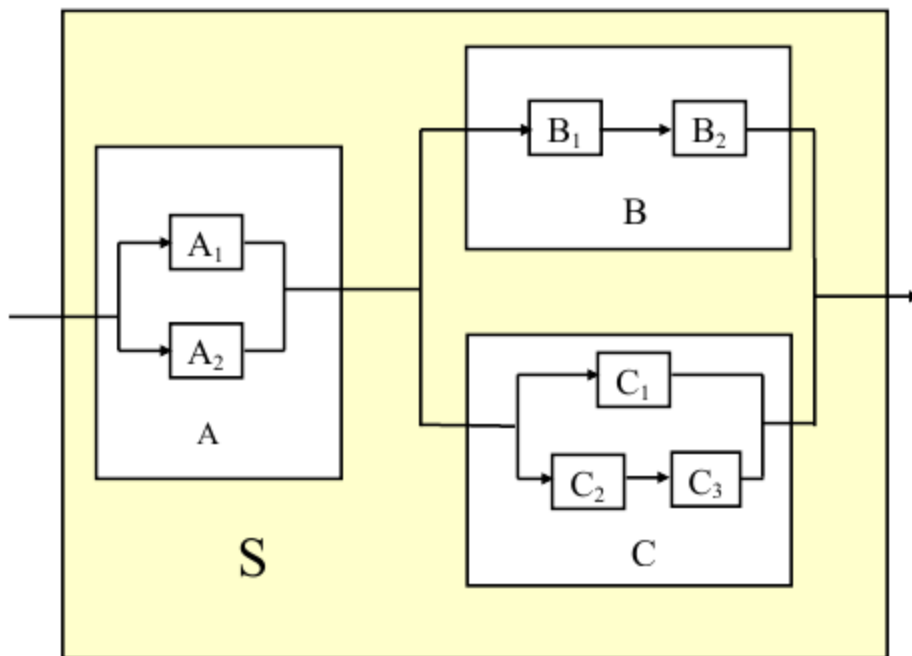
EJEMPLO 6.2

"Considérese un sistema formado por tres componentes mayores A, B y C. A está compuesto por dos componentes, cualquiera

de los cuales debe ser bueno para que lo sea A. B tiene dos componentes, que deben ser buenos para que lo sea B. C esta integrado por tres componentes; si C1 es bueno, C será bueno, aunque C2 y C3 sean malos. Si C1 es malo, deberán ser buenos tanto C2 como C3. Si A es malo, el sistema será malo, cualesquiera que sean los estados de los otros dos componentes mayores; no obstante, si A es bueno, el sistema será bueno si cualquiera B ó C es malo, pero no los dos."⁶⁶

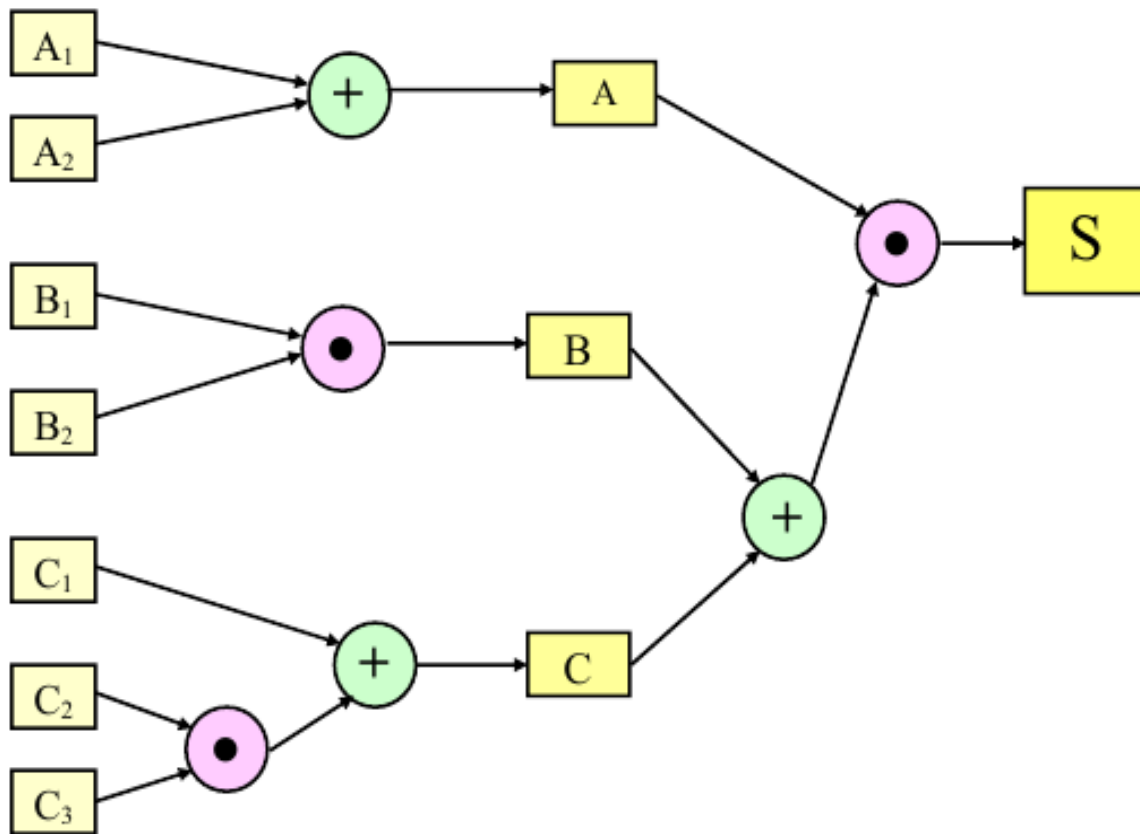
La representación gráfica del sistema descrito anteriormente está en las figuras 6.3 y 6.4.

Figura 6.3



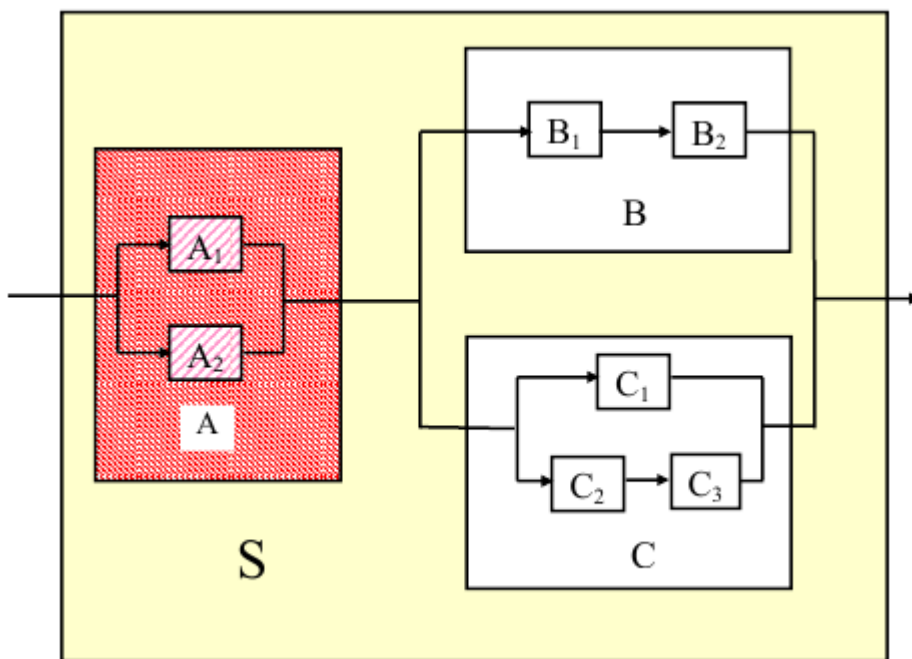
66 Braverman, Jerome D.: Probabilidad, lógica y decisiones gerenciales. Trillas. 1980.

Figura 6.4



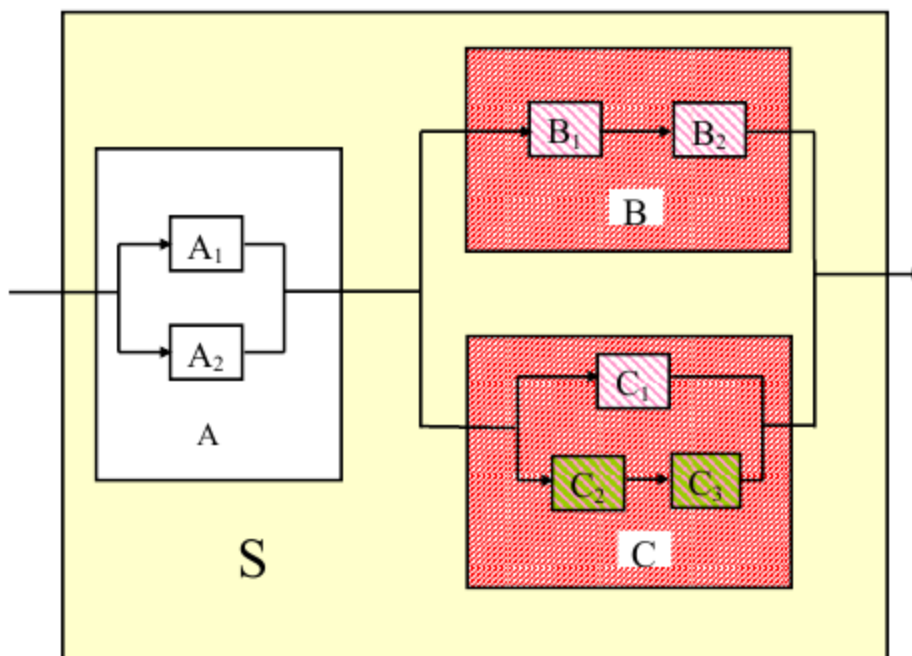
A partir de las figuras es fácil observar que para que el Sistema no funcione es suficiente que estén malos los componentes A1 y A2 simultáneamente (Ver figura 6.5) ó alguno de los componentes B1 ó B2 y el componente C1, simultáneamente con alguno de los dos componentes C2 ó C3 (Ver figura 6.6).

Figura 6.5



Si A está malo entonces S está malo. Para que A esté malo A₁ y A₂ tienen que estar malos también.

Figura 6.6



B y C malos \implies S malo.

$$B_1 \text{ o } B_2 \text{ malo} \implies B \text{ malo} \text{ y}$$

$$C_1 \text{ y } (C_2 \text{ o } C_3) \text{ malos} \implies C \text{ malo.}$$

De hecho estos resultados también se podrían obtener a partir de una tabla de verdad, pero esta misma tabla para este sistema debería tener 2^7 (128) filas, de las cuales habrían 59 casos que darían como resultado que el sistema no funcione, versus 69 casos en que si funciona.

6.4.- Representación de Condiciones Lógicas en los Problemas de Investigación de Operaciones.

En los problemas de investigación de operaciones las condiciones lógicas se pueden representar a través de ecuaciones con variables binarias que valgan 0 ó 1. Así se tiene:

| <u>Condición lógica</u> | <u>Ecuación</u> |
|----------------------------|--------------------|
| $X_1 \vee X_2$ | $X_1 + X_2 \geq 1$ |
| $X_1 \underline{\vee} X_2$ | $X_1 + X_2 = 1$ |
| $X_1 \implies X_2$ | $X_1 - X_2 \leq 0$ |
| $X_1 \iff X_2$ | $X_1 - X_2 = 0$ |

En la sección 15.3 se da un ejemplo en donde se usan estas condiciones lógicas.

6.5.- Lógica y evaluaciones

Una de las costumbres más usual en las diversas evaluaciones es el uso de las medias aritméticas ponderadas para realizar evaluaciones, desde evaluaciones de personal, eficiencia organizacional, evaluación de alternativas, hasta

las evaluaciones en todo el sistema educativo. ¿Has pensado si esto tiene sentido?. Afirmo que por lo general, la medias aritméticas ponderadas⁶⁷ no tienen sentido y más específicamente no generan buenas evaluaciones. El único mérito de ellas es que son fáciles de calcular. ¡Pero estamos en la era de la informática!.

- 1) Si un factor de evaluación debe cumplirse, este entrará en forma multiplicativa. Si la evaluación de este factor es nula, el resultado de la evaluación total también será nulo.
- 2) Si un hay factores que son reemplazables entre si entrarán en forma aditiva⁶⁸.

De esta manera, los factores que en la sentencia aparecen con el conectivo “o” se suman, mientras que los que aparecen con el conectivo “y” se multiplican.

Veamos un ejemplo:

Sea la evaluación **A** o **B**, y **C**, y **D** o **E**, entonces se tendrá como evaluación:

$$\text{Evaluación} = (p_A \mathbf{A} + p_B \mathbf{B})^{p_{AB}} \mathbf{C}^{p_C} (p_D \mathbf{D} + p_E \mathbf{E})^{p_{DE}}$$

En donde cada p_K es el peso de los respectivos factores, y como tal la suma de ellos debe valer uno: $p_A + p_B = 1$, $p_D + p_E = 1$ y $p_{AB} + p_C + p_{DE} = 1$

Asignemos valores a los pesos y a las evaluaciones, y veamos su cálculo en una hoja de EXCEL:

⁶⁷ Las medias no ponderadas son un caso especial de las medias ponderadas en donde todas tienen el mismo peso.

⁶⁸ También puede trabajarse con los operadores max, en vez de suma, para la disyunción y min, en vez multiplicación, para la conjunción.

Tabla 1.a
Valores Obtenidos con una Hoja Excel

| ITEM | PESO | VALORACION | PUNTAJE | PESO | PUNTAJE |
|-----------------|------|------------|---------|------------|--------------------|
| A | 0,5 | 75 | 37,5 | | |
| B | 0,5 | 90 | 45 | | |
| SUBTOTAL | | | 82,5 | 0,33333333 | 4,353293846 |
| C | | | 100 | 0,33333333 | 4,641588834 |
| D | 0,5 | 5 | 2,5 | | |
| E | 0,5 | 15 | 7,5 | | |
| SUBTOTAL | | | 10 | 0,33333333 | 2,15443469 |
| TOTAL | | | | | 43,53293846 |

Cuyos cálculos se hicieron con las siguientes formulas:

| Tabla 1 | | | | | |
|-----------------|------|------------|--------------|------|--------------------------|
| ITEM | PESO | VALORACION | PUNTAJE | PESO | PUNTAJE |
| A | 0,5 | 75 | =B2*C2 | | |
| B | 0,5 | 90 | =B3*C3 | | |
| SUBTOTAL | | | =SUMA(D2:D3) | =1/3 | =D4^E4 |
| C | | | 100 | =1/3 | =D6^E6 |
| D | 0,5 | 5 | =B8*C8 | | |
| E | 0,5 | 15 | =B9*C9 | | |
| SUBTOTAL | | | =SUMA(D8:D9) | =1/3 | =D10^E10 |
| TOTAL | | | | | =PRODUCTO(F4:F10) |

Si se compara los resultados de la tabla 1.a con los obtenidos en la tabla 2, en donde se utilizó el promedio aritmético, o el de la tabla 3 en donde se utilizó el promedio geométrico, se puede observar lo siguiente:

Tabla 2
Promedio aritmético

| ITEM | PESO | VALORACION | PUNTAJE | PESO | PUNTAJE |
|-----------------|------|------------|---------|------------|--------------------|
| A | 0,5 | 75 | 37,5 | | |
| B | 0,5 | 90 | 45 | | |
| SUBTOTAL | | | 82,5 | 0,33333333 | 27,5 |
| C | | | 100 | 0,33333333 | 33,33333333 |
| D | 0,5 | 5 | 2,5 | | |
| E | 0,5 | 15 | 7,5 | | |
| SUBTOTAL | | | 10 | 0,33333333 | 3,33333333 |
| TOTAL | | | | | 64,16666667 |

Tabla 2
Promedio geométrico

| ITEM | PESO | VALORACION | PUNTAJE | PESO | PUNTAJE |
|-----------------|------|------------|-------------|------------|--------------------|
| A | 0,5 | 75 | 8,660254038 | | |
| B | 0,5 | 90 | 9,486832981 | | |
| SUBTOTAL | | | 82,15838363 | 0,33333333 | 4,34727682 |
| C | | | 100 | 0,33333333 | 4,641588834 |
| D | 0,5 | 5 | 2,236067977 | | |
| E | 0,5 | 15 | 3,872983346 | | |
| SUBTOTAL | | | 8,660254038 | 0,33333333 | 2,053573307 |
| TOTAL | | | | | 41,43755982 |

- 1) El promedio mixto es mayor que el geométrico solo, pero menor que el aritmético.
- 2) Si se considera como evaluación aceptable 50, con el promedio aritmético se tiene una puntuación aceptable mientras que con el mixto no.

De esta manera, es importante tomar a la hora de realizar evaluaciones la relación entre los operadores matemáticos y su relación con la semántica de la evaluación, por lo cual debe recordarse que lo que en lenguaje cotidiano esta representado por el conector “y” (conjunción), en matemática debe representarse o por el operador “ \times ” (por) de la multiplicación o por el operador **min**, mientras que el conector “o” (disyunción), en matemática si puede representarse o por el operador “+” (más) de la suma o por el operador **max**. Si se toma el par de operadores \times , +, se tiene que la función de evaluación a utilizar es una Cobb-Douglas generalizada. (Ver capítulo 18)

EJERCICIOS:

6.1- Se tienen cinco (5) fábricas que producen productos de consumo similares. Los publicistas de las fábricas son mentirosos o no⁶⁹; se desea saber cuál de las cinco fábricas produce el mejor producto. Estas son las declaraciones de los publicistas:

(1) Nuestro producto es el mejor, el más barato, y el de mayor demanda.

(2) Nuestro producto es el mejor. No es el más barato. El de (4) es el de mayor demanda.

(3) Nuestro producto es el mejor, el más barato, y el de mayor demanda.

(4) Nuestro producto es el mejor. El de (3) es el más barato. El nuestro tiene menos demanda que el de (2).

(5) Nuestro producto es el mejor y el más barato. El de (1) es el de mayor demanda.

6.2- Demostrar la validez o no del siguiente argumento.

"Si la Compañía Bilge es capaz de comprar materia prima a un precio favorable o si la Compañía incrementa sus ventas, entonces la Compañía no va a tener pérdidas. Si hay escasez de materia prima, entonces la compañía Bilge no estará en capacidad de comprar materia prima a un precio favorable. El hecho es que no hay escasez de materia prima. Por lo tanto, la Compañía Bilge no va a tener pérdidas"⁷⁰.

⁶⁹ Si un publicista es mentiroso, miente en todas y cada una de sus afirmaciones.

⁷⁰ Bishir, John W. & Drewes, Donald W.: Op. Cit.

6.3- Demostrar la validez del siguiente argumento.

"Si el Candidato recibe apoyo de los liberales y el apoyo de los laboristas, entonces ganará. O el Candidato no ganará o introducirá un proyecto favorable al trabajador. El Candidato no introducirá un proyecto favorable al trabajador. Además el candidato recibirá el apoyo de los liberales. Por lo tanto, el Candidato no recibirá el apoyo de los laboristas."⁷¹

⁷¹ Bishir, John W. & Drewes, Donald W.: Op. Cit.

CAPÍTULO 7

LOGICA DE PREDICADOS Y CUANTIFICADORES

La lógica de predicados considera que las proposiciones constan de sujeto y predicado, y son de la forma:

$$Px$$

que se lee el sujeto x tiene la propiedad P ó x es P .

Los cuantificadores indican para cuantos sujetos se cumple Px .

Los cuantificadores son del tipo $(\forall x)$ que se lee todo x ⁷², y $(\exists x)$ que se lee existe algún x .

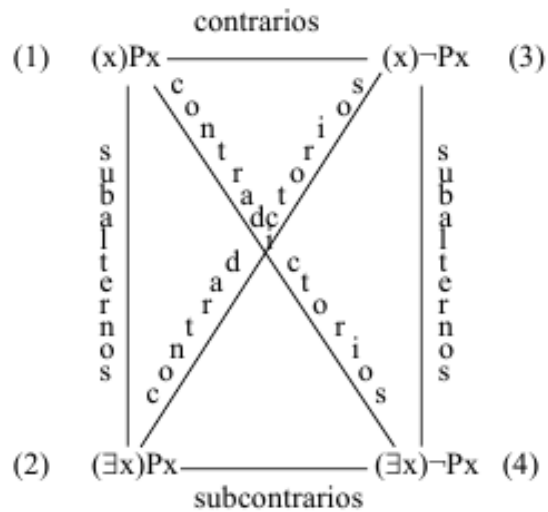
Así tenemos que:

| | Expresión | Se lee |
|-----|----------------------|---|
| (1) | $(\forall x)Px$ | Todo x tiene la propiedad P (ó todo x es P) |
| (2) | $(\exists x)Px$ | Existe algún x con la propiedad P (ó algún x es P) |
| (3) | $(\forall x)\neg Px$ | Ningún x tiene la propiedad P (ó ningún x es P) |
| (4) | $(\exists x)\neg Px$ | Existe algún x que no tiene la propiedad P (ó algún x no es P) |

Cuando una variable no está incluida en el alcance de ningún cuantificador se dice que es una variable libre. Además también están los nombres propios que son los casos particulares. Para representar los nombres propios se suele utilizar las primeras letras del alfabeto.

Si se supone la existencia de algún elemento en el Universo entonces se cumple:

⁷² Algunos autores, y nosotros por claridad, utilizaremos, algunas veces, para denotar todo x ($\forall x$).



- (2) es subalterno de (1), esto es, si (1) es verdadero (2) es necesariamente verdadero.
- (4) es subalterno de (3).
- (1) y (3) son contrarios, esto es, no pueden ser ambos verdaderos a la vez.
- (2) y (4) son subcontrarios, esto es, no pueden ser ambos falsos a la vez.
- (1) y (4) son contradictorios, esto es, si el uno es verdadero el otro es falso.
- (2) y (3) son contradictorios.

Lo cual nos da la siguiente tabla de verdad:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| V | V | F | F |
| F | | | V |
| F | F | V | V |
| | V | F | |

Aunque los juicios cuantitativos más generales hacen referencia a un marco de referencia M, así se tiene:

$$(1') (x)(Mx \implies Px)$$

$$(2') (\exists x)(Mx \wedge Px)$$

$$(3') (x)(Mx \implies \neg Px)$$

$$(4') (\exists x)(Mx \wedge \neg Px)$$

Los cuales se leen respectivamente como: todo elemento de M es P, existe un elemento de M que es P, ningún elemento de M es P y hay algún elemento en M que no es P. Y las relaciones entre (1'), (2'), (3') y (4'), si el marco de referencia no es vacío, son las mismas que las existentes entre (1), (2), (3) y (4).

Pero en el caso en el cual el marco de referencia es vacío, o sea $(\exists x)Mx$ es falso, se tiene que tanto (1') y (3') son verdaderos y (2') y (4') son falsos. Esto es importante ya que demuestra la necesidad (para una teoría legal) de que el marco de referencia no sea vacío, y cuando se lleva a la praxis o a la ciencia la necesidad de que exista un correlato real del marco de referencia.⁷³

Además se tienen las siguientes leyes:

$$(x)Px \wedge (x)Qx \iff (x)[Px \wedge Qx]$$

$$(x)Px \vee (x)Qx \iff (x)[Px \vee Qx]$$

$$(x)Px \wedge (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Px \wedge Qx]$$

$$(x)Px \vee (\exists x)Qx \iff (x)[Px \vee Qx]$$

$$(\exists x)Px \vee (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Px \vee Qx]$$

$$(\exists x)[Px \wedge Qx] \iff (\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx$$

$$(x)[Px \implies Qx] \iff (\exists x)Px \implies (\exists x)Qx$$

⁷³ Ver Anexo A sobre **LÓGICA Y REFERENTES**

Y si consideramos fórmulas con "nombre propios" tenemos:

$$Pa \implies (\exists x)Px$$

$$(\exists x)Px \implies Pa$$

$$Pa \wedge (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Pa \wedge Qx]$$

$$Pa \vee (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Pa \vee Qx]$$

$$Pa \wedge (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Pa \wedge Qx]$$

$$Pa \vee (\exists x)Qx \iff (\exists x)[Pa \vee Qx]$$

$$(\exists x)[Px \implies Qa] \iff (\exists x)Px \implies Qa$$

$$(\exists x)[Pa \implies Qx] \iff Pa \implies (\exists x)Qx$$

$$(\exists x)[Px \implies Qa] \iff (\exists x)Px \implies Qa$$

EJERCICIOS:

7.1.- Enunciar en palabras las leyes formuladas anteriormente.

7.2.- Si el universo del discurso son los empleados de una empresa, P y Q los predicados "es honrado" y "es eficiente" respectivamente, y a es el sujeto Juan Pérez, enunciar cada una de las leyes anteriores.

7.1.- Generalización del Cuantificador Existencial.

El cuantificador existencial se puede generalizar indicando: cuántos elementos existen, cuántos a lo más existen o cuántos al menos existen. Se representan de la siguiente manera: $(\exists_{=n}x)$, $(\exists_{\leq n}x)$ y $(\exists_{\geq n}x)$, y se leen: existen exactamente **n** elementos, existen a lo más **n** elementos y existen a lo menos **n** elementos, respectivamente.

Otro caso interesante es la conclusión a sacar a partir de:

$$(\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx.$$

Es claro que no se puede concluir $(\exists x)[Px \wedge Qx]$, sino que existe la posibilidad de que exista x tal $[Px \wedge Qx]$ siempre y cuando no se tiene $[Px \rightarrow \neg Qx]$, lo cual implica la necesidad del cuantificador de existencia posible $(\exists_p x)$.

7.2.- Relaciones

Cuando un predicado abarca más de un sujeto, se suele hablar de relaciones y se representa como Rxy ó xRy . Así, por ejemplo, si tenemos: Juan es más eficiente que Pedro, tendríamos que $x = \text{Juan}$, $y = \text{Pedro}$ y $R = \text{es más eficiente que}$.

7.2.1.- Tipos de relaciones:

Reflexividad:

- 1) Una relación R se dirá reflexiva si $(x)xRx$.
- 2) Una relación R se dirá areflexiva si $(x)\neg xRx$ o $\neg(x)xRx$.

Simetría:

- 3) Una relación R se dirá simétrica si $(x)(y)[xRy \implies yRx]$.
- 4) Una relación R se dirá asimétrica si $(x)(y)[xRy \implies \neg yRx]$.
- 5) Una relación R se dirá antisimétrica si $(x)(y)[xRy \wedge yRx \implies x=y]$

Transitividad:

- 6) Una relación R se dirá transitiva si $(x)(y)(z)[xRy \wedge yRz \implies xRz]$.

Circularidad:

- 7) Una relación R se dirá circular si $(x)(y)(z)[xRy \wedge yRz \implies zRx]$.

En base a las propiedades anteriores se pueden definir diversos tipos de relaciones:

a.- Relación de equivalencia

Una relación se dice que es de equivalencia, si es:

- 1.- Reflexiva.
- 2.- Simétrica.
- 3.- Transitiva.

b.- Relación de semejanza:

Una relación se dice que es de semejanza, si es:

- 1.- Reflexiva.
- 2.- Simétrica.

c.- Relación de orden débil:

Una relación se dice que es de orden débil, si es:

- 1.- Reflexiva.
- 2.- Antisimétrica.
- 3.- Transitiva.

d.- Relación de orden estricto:

Una relación se dice que es de orden estricto, si es:

- 1.- Areflexiva.
- 2.- Asimétrica.
- 3.- Transitiva.

7.3.- Aplicaciones

A.- Análisis de enunciados

Sea el siguiente enunciado:

"Si algo es costoso, es valioso y raro. Todo lo que es valioso es deseable y costoso. Por lo tanto, si algo es valioso o costoso, entonces debe ser valioso y costoso"⁷⁴

Se tienen las siguientes premisas:

$$(P1) \quad (x)[Cx \implies Vx \wedge Rx]$$

$$(P2) \quad (x)[Vx \implies Dx \wedge Cx]$$

Aplicando las leyes de deducción se tiene:

$$(D1) \quad Cx \implies Vx \wedge Rx \quad \text{De P1 eliminando el cuantificador}$$

$$(D2) \quad Vx \implies Dx \wedge Cx \quad \text{De P2 eliminando el cuantificador}$$

$$(D3) \quad Cx \implies Vx \quad \text{D1, Simplificación, SH}$$

$$(D4) \quad Vx \implies Cx \quad \text{D2, Simplificación, SH}$$

$$(D5) \quad Cx \implies Vx \wedge Cx \quad \text{D3, D4, leyes distributivas.}$$

$$(D6) \quad Vx \implies Cx \wedge Vx \quad \text{D3, D4, leyes distributivas.}$$

$$(D7) \quad Vx \vee Cx \implies Vx \wedge Cx \quad \text{D5, D6, DC.}$$

$$(D8) \quad (x)[Vx \vee Cx \implies Vx \wedge Cx] \quad \text{Reingresando el cuantificador.}$$

B.- Análisis de recepción/transcripción de datos.

Una de las técnicas en los sistemas de recepción/transcripción de datos es la consistencia lógica de los mismos.

74 Copy, Irving: Introducción a la Lógica. Eudeba Manuales.

Así si se tiene: $(x)[Px \implies \neg Qx]$ bastará con preguntar cuándo el dato es P, ¿si es Q? En caso afirmativo rechazar y en caso negativo aceptarlo.

C.- Construcción de teorías.

Veamos por ejemplo la construcción de la Teoría de Sistemas:

Sea $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Definición 1. Propiedad Emergente.

P es una propiedad Emergente de S sii⁷⁵:

$$PS \wedge \neg(\exists x)[Px \wedge x \in S]$$

Definición 2. Propiedad Agregada o resultante.

P es una propiedad Agregada de S sii no es Emergente.

Corolario 1.

P es una propiedad Agregada de S sii:

$$PS \implies (\exists x)[x \in S \wedge Px]$$

Definición 3. Sistema.

S es un sistema sii $\exists P$ tal que P es emergente.

Definición 4. Elemento Aislado.

$x \in S$ es un elemento aislado ssi para toda propiedad emergente

$$P: PS \implies P(S - \{x\})$$

Teorema 1.

Si x es un elemento aislado del sistema S, entonces $S - \{x\}$ es un sistema también.

75 ssi es la abreviación si y sólo si.

EJERCICIO:

1.- Analizar la validez del siguiente argumento.

"Una Persona P_i y una Persona P_j son amigos (P_iFP_j) si y solo si a P_i le gusta P_j (P_iLP_j) y a P_j le gusta P_i . Si P_i y P_j son amigos, entonces son similares en actitudes (P_iSP_j). Si a P_i le gusta P_j y a P_j le disgusta P_k , entonces a P_i le disgustará P_k . Si a P_i le gusta P_j y a P_j le gusta P_k , entonces a P_i le gustará P_k . Si a P_i le disgusta P_j y a P_j le gusta P_k , entonces a P_i le disgustará P_k . Suponga que es el caso que P_1 y P_3 son amigos y que a P_2 le gusta P_3 . Entonces, P_1 y P_2 son similares en actitudes.

Se asume que a P_i le gusta o le disgusta P_j , pero no ambas."⁷⁶

76 Bishir, John W & Drewes, Donald W.: Op. Cit.

APENDICE SOBRE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de elementos. Se pueden definir por intención, señalando las propiedades de los elementos que pertenecen al conjunto, o por extensión nombrando los elementos que pertenecen al conjunto. Por ejemplo si A es el conjunto de los naturales menores que seis, se puede escribir de la siguiente manera:

Por intención:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n < 6 \}.$$

y por extensión

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

Con el símbolo \in se indica que un elemento pertenece a un conjunto. Así $x \in A$, significa que el elemento x pertenece al conjunto A.

Propiedades y Operaciones de los conjuntos:

a.- Igualdad de conjuntos:

Dos conjuntos A y B se dice que son iguales si tienen los mismos elementos, o sea, si cada elemento de A es elemento de B, y cada elemento de B es elemento de A:

$$A = B \iff (x) [x \in A \iff x \in B].$$

b.- Subconjuntos.

Un conjunto B es subconjunto de un conjunto A, si todos los elementos de B son también elementos de A:

$$B \subseteq A \iff (x) [x \in B \implies x \in A].$$

b'.- Subconjuntos estrictos.

Un conjunto B es subconjunto estricto de un conjunto A, si todos los elementos de B son también elementos de A y hay al menos un elemento de A que no es elemento de B:

$$B \subset A \iff (x) [x \in B \implies x \in A] \wedge (\exists y) [y \in A \wedge y \notin B].$$

c.- Intersección de conjuntos:

La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los elementos que están tanto en A como en B:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

d.- Unión de conjuntos:

La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los elementos que están en alguno de los dos conjuntos:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

e.- Resta de conjuntos:

La sustracción (o resta) del conjunto B del conjunto A, es el conjunto de los elementos que están en A y no están en B.

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}.$$

f.- Resta simétrica de conjuntos:

El resultado de la resta simétrica de dos conjuntos A y B, es el conjunto de los elementos que están en uno solo de los conjuntos:

$$A \ominus B = \{ x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B \}.$$

A la resta simétrica también se le suele denominar como unión exclusiva.

g.- Conjunto vacío:

El conjunto vacío es el conjunto que no tiene elementos y se representa como \emptyset ó como $\{\}$:

$$\neg(\exists x) x \in \emptyset.$$

h.- Conjunto universal:

El conjunto universal es el conjunto que contiene todos los elementos:

$$(\forall x) x \in E.$$

i.- Complemento de un conjunto:

El complemento de un conjunto A, el conjunto de los elementos que no pertenece a A:

$$A^c = \{ x \mid x \in A \}.$$

j.- Tautologías:

- 1.- $(A) \emptyset \subseteq A$
- 2.- $(A) A \subseteq E$ (E conjunto universal)
- 3.- $A \subseteq B \implies A \cap B = A$
- 4.- $A \subseteq B \implies A \cup B = B$
- 5.- $A \cap A^c = \emptyset$
- 6.- $A \cup A^c = E$
- 7.- $(A^c)^c = A$

k.- Conjuntos disjuntos:

Dos conjuntos A y B son disjuntos, si la intersección de ambos es vacía:

$$A \text{ y } B \text{ disjuntos} \iff A \cap B = \emptyset$$

Relación entre lógica de predicados y conjuntos.

Definanse los siguientes conjuntos por intención:

$$A = \{ x \mid Px \}$$

$$B = \{ x \mid Qx \}$$

$$C = \{ x \mid Rx \}$$

Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} (x)[Px \implies Qx] & \equiv & A \subseteq B \\ (x)[Px \iff Qx] & \equiv & A = B \\ (\exists x) Px \wedge Qx & \equiv & A \cap B \neq \emptyset \\ \neg(\exists x) Px \wedge Qx & \equiv & A \cap B = \emptyset \\ (x) Px & \equiv & A = E \\ \neg(\exists x) Px & \equiv & A = \emptyset \\ (x) Px \vee Qx & \equiv & A \cup B = E \\ (x)[Px \wedge Qx \implies Rx] & \equiv & A \cap B \subseteq C \\ (x)[Px \vee Qx \implies Rx] & \equiv & A \cup B \subseteq C \\ (x)[\neg Px \iff Rx] & \equiv & C = A^c \end{array}$$

Pero por otro lado si se tiene un conjunto definido por extensión:

$$A = \{ a, b, c, \dots \}$$

Entonces se puede construir el predicado:

$$Px = x \in A.$$

Cardinalidad de conjuntos y cuantificadores existenciales generalizados.

La cardinalidad de un conjunto es la cantidad de elementos que tiene un conjunto. Así, si tenemos los conjuntos A, B y C definidos anteriormente y sus cardinalidades son:

$$\#A = k$$

$$\#B = l$$

$$\#C = m$$

se tendrá:

$$(\exists_{=k}x)Px$$

$$(\exists_{=l}x)Qx$$

$$(\exists_{=m}x)Rx$$

Además como se puede demostrar que:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) ,$$

se tiene también:

$$(\exists_{=k}x)Px \wedge (\exists_{=l}x)Qx \wedge (\exists_{=n}x) Px \wedge Qx \implies (\exists_{=k+l-n}x) Px \vee Qx$$

Conclusiones:

Como conclusión de lo expuesto anteriormente se tiene que cualquier argumento de lógica de predicados se puede analizar como una operación entre conjuntos y, viceversa, cualquier operación de conjuntos se puede trasladar, enunciar y analizar desde la perspectiva de la lógica de predicados.

Cualquier resultado sobre la cardinalidad de los conjuntos, puede interpretarse como un resultado sobre los operadores existenciales generales.

Cuando el resultado de una operación entre conjuntos da el conjunto Universal o el Conjunto vacío, el argumento de lógica de predicados, asociado a él, dará una Tautología o una Contradicción respectivamente.

CAPÍTULO 8

LÓGICA DE ENUNCIADOS TRIVALENTES.

Hay enunciados sobre los cuales no se puede afirmar ni su veracidad ni su falsedad, esto es que son indeterminados. Lukasewics planteo la necesidad de una lógica para la misma.

8.1.- Operadores

8.1.1.- Operadores primarios.

Si se dejan los mismos operadores primarios que en la lógica bivalente a partir de los cuales definir todos los demás operadores, se tiene:

a) Negación:

Sea p una proposición, entonces $\neg p$ (no p), la negación de p , será falsa cuando p es verdadera y verdadera cuando p sea falsa. Pero si una es indeterminada también lo será la otra.

b) Conjunción:

Sea p y q dos proposiciones, entonces $p \wedge q$ (p y q), la conjunción de p y q , será verdadera sólo cuando ambas sean verdaderas, si una es verdadera o indeterminada y la otra indeterminada será indeterminada. Mientras que si una es falsa será falsa.

8.1.2.- Los otros operadores:

a) **Disyunción inclusiva**

$p \vee q$ (p o q), la disyunción inclusiva de p y q , será falsa sólo cuando ambas son falsas y de lo contrario si una es verdadera será verdadera y si una es falsa y la otra indeterminada es indeterminada y es equivalente a: $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

b) **Disyunción exclusiva:**

$p \underline{\vee} q$ (ó p , ó q), la disyunción exclusiva de p y q , será verdadera cuando una de las dos proposiciones es verdadera y la otra falsa, mientras que es falsa cuando las dos son falsas o las dos son verdaderas simultáneamente. Si una de las dos es indeterminada también será indeterminada, y es equivalente a: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ó también a $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$.

c) **Implicación**

$p \implies q$ (p implica q ó si p entonces q) es falsa sólo cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso, y de lo contrario es verdadera cuando el consecuente es verdadero o el antecedente es falso, y es equivalente a $\neg p \vee q$. Mientras que será indeterminada si el antecedente es indeterminado y el consecuente falso o indeterminado, o el antecedente verdadero y el consecuente indeterminado

También en este caso se dice que p es condición suficiente de q , y q condición necesaria de p

d) **Doble implicación**

$p \iff q$ (p si y sólo si q) es verdadera cuando ambos (p y q) son verdaderos o ambos falsos, y es equivalente a: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

e) La incompatibilidad.

$p|q$ (p es incompatible con q) es falsa cuando ambos (p y q) son verdaderos, y es equivalente a $\neg p \vee \neg q$.

Los enunciados anteriores se pueden resumir en el siguiente cuadro:

| p | Q | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \underline{\vee} q$ | $p \implies q$ | $p \iff q$ | $p q$ |
|---|---|----------|--------------|------------|------------------------|----------------|------------|-------|
| V | V | F | V | V | F | V | V | F |
| V | I | F | I | V | I | I | I | I |
| V | F | F | F | V | V | F | F | V |
| I | V | I | I | V | I | V | I | I |
| I | I | I | I | I | I | I | I | I |
| I | F | I | F | I | I | I | I | V |
| F | V | V | F | V | V | V | F | V |
| F | I | V | F | I | I | V | I | V |
| F | F | V | F | F | F | V | V | V |

8.1.3.- Tautologías

En esta lógica trivalente no existen tautologías, todas las fórmulas serían contingentes.

8.2.- Operadores modificados.

Por lo anterior es que Lukasewics modifica la estructura de los operadores primarios, quedando la negación igual, pero sustituyendo la disyunción por la **implicación** con la siguiente tabla:

| | | q | | |
|----------|---|----------|---|---|
| | | V | I | F |
| p | V | V | I | F |
| | I | V | V | I |
| | F | V | V | V |

Y en base a esto se definen los demás operadores:⁷⁷

a) Disyunción inclusiva

$$p \vee q =_{\text{def}} (p \implies q) \implies q$$

b) Conjunción

$$p \wedge q =_{\text{def}} \neg(\neg p \vee \neg q)$$

c) Doble implicación

$$p \iff q =_{\text{def}} (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

d) Disyunción exclusiva

$$p \underline{\vee} q =_{\text{def}} (p \implies \neg q) \wedge (q \implies \neg p)$$

e) La incompatibilidad.

$$p|q =_{\text{def}} (p \implies \neg q)$$

Lo cual se puede resumir en la siguiente tabla:

| P | q | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \underline{\vee} q$ | $p \implies q$ | $p \iff q$ | $p q$ |
|---|---|----------|--------------|------------|------------------------|----------------|------------|-------|
| V | V | F | V | V | F | V | V | F |
| V | I | F | I | V | I | I | I | I |
| V | F | F | F | V | V | F | F | V |
| I | V | I | I | V | I | V | I | I |
| I | I | I | I | I | V | V | V | V |
| I | F | I | F | I | I | I | I | V |
| F | V | V | F | V | V | V | F | V |
| F | I | V | F | I | I | V | I | V |
| F | F | V | F | F | F | V | V | V |

8.3.- Tautologías.

En este caso se preservan algunas tautologías. Veamos a continuación cuales:

⁷⁷ Las tres primeras definiciones las tomé de Gladys Palau, Introducción Filosófica a las Lógicas No Clásicas, Editorial Gedisa, 2002, Pág. 139.

| | <u>Fórmula</u> | <u>nombre</u> | <u>Preservación</u> |
|-----|---|---|---------------------|
| 1) | $p \implies p$ | Identidad | Se preserva. |
| 2) | $p \iff p$ | Identidad | Se preserva. |
| 3) | $\neg(p \wedge \neg p)$ | No contradicción | No se preserva |
| 4) | $p \vee \neg p$ | Tercero excluido | No se preserva |
| | $p \underline{\vee} \neg p$ | | Se preserva |
| 5) | $p \iff \neg \neg p$ | Doble negación | Se preserva |
| 6) | $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$ | Modus ponendo ponens | No se preserva |
| 7) | $[(p \implies q) \wedge \neg q] \implies \neg p$ | Modus tollendo tollens | Se preserva |
| 8) | $[(p \vee q) \wedge \neg p] \implies q$ | Modus tollendo ponens o Silogismo disyuntivo | No se preserva |
| 9) | $p \wedge q \implies p$ | Simplificación. | Se preserva |
| 10) | $p \implies p \vee q$ | Adición | Se preserva |
| 11) | $p \implies (q \implies p)$ | A fortiori | Se preserva |
| 12) | $[p \implies (q \implies r)] \implies$ $[(p \implies q) \implies (p \implies r)]$ | Ley de Frege | Se preserva |
| 13) | $[p \implies (q \implies r)] \implies$ $[(q \implies (p \implies r))]$ | Cambio del antecedente | Se preserva |
| 14) | $[p \implies (q \implies r)] \iff$ $[p \wedge q \implies r]$ | Importación-exportación de la implicación | Se preserva |
| 15) | $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)]$ $\implies [p \implies r]$ | Silogismo hipotético | Se preserva |
| 16) | $[p \implies q] \iff$ $[\neg q \implies \neg p]$ | Contraposición | Se preserva |
| 17) | $[p \implies q \wedge \neg q] \implies \neg p$ | Reducción al absurdo | No se preserva |
| 18) | $[(p \implies q) \implies p] \implies p$ | Ley de Peirce | No se preserva |
| 19) | $[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge$ $(p \vee r)] \implies [q \vee s]$ | Dilema constructivo | No se preserva |
| 20) | $[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge$ $(\neg q \vee \neg s)] \implies [\neg p \vee \neg r]$ | Dilema destructivo | No se preserva |

Es de notar que en el caso de la tautología *tercero excluido* sustituyendo la disyunción inclusiva por la exclusiva, se preserva la tautología. Lo mismo pasa con los dilemas y con la paradoja de la implicación estricta $[q \implies (p \vee \neg p)]$. Por lo cual tendríamos las siguientes tautologías.

$$[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge (p \underline{\vee} r)] \implies [q \underline{\vee} s]$$

$$[(p \implies q) \wedge (r \implies s) \wedge (\neg q \underline{\vee} \neg s)] \implies [\neg p \underline{\vee} \neg r]$$

$$q \implies p \underline{\vee} \neg p$$

La cuestión es: En el habla común, cuando se utiliza el “o” ¿Se utiliza como disyunción inclusiva o exclusiva? Por esto, cuando puede haber dudas respecto a su uso, se escribe “y/o” para la disyunción inclusiva o también para la disyunción exclusiva se empieza cada alternativa por “o”.

Otra cosa interesante, si definimos el operador $\bar{\wedge}$ (falsa conjunción) de la siguiente manera:

$$p \bar{\wedge} q =_{\text{def}} \neg(\neg p \vee \neg q)$$

cuya tabla de verdad vendría dado por:

| | | q | | |
|----------|---|----------|---|---|
| | | V | I | F |
| p | V | V | I | F |
| | I | I | V | I |
| | F | F | I | V |

Y lo sustituimos en la tautología de *No contradicción*, se sigue teniendo una tautología. De igual manera si en la paradoja de la implicación estricta:

$(p \wedge \neg p) \implies q$, la cual no sigue siendo tautología hacemos la sustitución de \wedge por $\bar{\wedge}$ se preserva la tautología.

Por lo tanto las dos siguientes fórmulas:

$$\neg(p \bar{\wedge} \neg p) \text{ y } (p \bar{\wedge} \neg p) \implies q$$

Preservan la tautología.

CAPÍTULO 9

LOGICAS NORMATIVA Y MODAL, Y OPERADORES TEMPORALES

9.1.- Las Preguntas Fundamentales de la Toma de Decisiones

Los problemas de toma de decisiones suelen tomar una de las siguientes formas:

- (1) ¿Que hacer, dado una situación, para obtener un resultado?
- (2) De hacer algo, ¿Cuál va a ser el resultado?

La respuesta a la primera pregunta es obviamente alguna regla o norma, y responde al lenguaje normativo, mientras que la respuesta a la segunda pregunta se encuadra en el lenguaje modal, ambas respuestas afectadas por operadores temporales.

De ahí la importancia y necesidad de conocer y estudiar las lógicas normativa, modal y temporal en el contexto administrativo y gerencial.

9.2.- Las Lógicas Normativa y Modal

En principio las lógicas normativa y modal en base a las nociones: "debe", "puede" y "tiene que no" Y "necesidad", "posibilidad" e "imposibilidad" respectivamente son análogas, a la lógica de predicados cuantificada mediante las nociones "todo", "alguno" y "ninguno".

9.3.- Los Operadores Normativos (referidos a acciones o programas).

Los operadores normativos "debe", "puede", "tiene que no" y "puede no", representados respectivamente por:

$$[]Px, \langle \rangle Px, [/]Px \text{ y } \langle / \rangle Px$$

e interpretados como : "x debe ser P", "x puede ser P", "x no puede ser P" y "x puede no ser P", se pueden traducir, en un referente de acciones, como:

- | | | |
|-------|---|-------------------------------|
| (1'') | $[]Px = (x)(Ax \dashrightarrow Px)$ | (Para toda acción, ésta es P) |
| (2'') | $\langle \rangle Px = (\exists x)(Ax \wedge Px)$ | (Una acción es P) |
| (3'') | $[/]Px = (x)(Ax \implies \neg Px)$ | (Ninguna acción es P) |
| (4'') | $\langle / \rangle Px = (\exists x)(Ax \wedge \neg Px)$ | (Hay una acción que no es P) |

Esto es, los operadores normativos presuponen un marco referencial⁷⁸, el cual es el subconjunto de acciones. Pero además, comparando (1''), (2''), (3'') y (4'') con (1'), (2'), (3') y (4') se tiene, suponiendo el marco referencial no vacío, que:

- $\langle \rangle Px$ es subalterno de $[]Px$.
- $\langle / \rangle Px$ es subalterno de $[/]Px$.
- $[]Px$ y $[/]Px$ son contrarios.
- $\langle \rangle Px$ y $\langle / \rangle Px$ son subcontrarios.
- $[]Px$ y $\langle / \rangle Px$ son contradictorios.
- $\langle \rangle Px$ y $[/]Px$ son contradictorios.

De ahí, a nivel operativo, la analogía entre la lógica cuantitativa y la normativa.

78 Realmente la lógica normativa puede suponer otros referentes diferentes al de la acción.

9.4.- Los Operadores Modales (referidos a resultados de programas)

Los operadores modales "necesario", "posible", "imposible" y "contingente", se representarán por:

$$\mathbf{N}P_x, \mathbf{P}P_x, \mathbf{I}P_x \text{ y } \mathbf{C}P_x,$$

y se pueden traducir por:

$$(1''') \quad \mathbf{N}R_x = (x)(E_x \implies R_x) \quad (\text{Todos los resultados son } R)$$

$$(2''') \quad \mathbf{P}R_x = (\exists x)(E_x \wedge R_x) \quad (\text{Un resultado es } R)$$

$$(3''') \quad \mathbf{I}R_x = (x)(E_x \implies \neg R_x) \quad (\text{Ningún resultado es } R)$$

$$(4''') \quad \mathbf{C}R_x = (\exists x)(E_x \wedge \neg R_x) \quad (\text{Hay resultados diferentes de } R)$$

Esto es, los operadores modales presuponen un marco referencial de resultados. Además son operativamente análogos a los normativos y a los cuantitativos.

Pero además existe también el operador "Eventual", cuando un resultado puede ser posible o no: $\mathbf{E}R_x$, y representa a:

$$(5''') \quad \mathbf{E}R_x = (\exists x)(E_x \wedge R_x) \ \& \ (\exists x)(E_x \wedge \neg R_x),$$

y se traduce por: Hay resultados que son R y otros que no son R

y se relaciona con los demás de la siguiente manera:

$$(2''') \text{ y } (4''') \text{ son subalternos de } (5''').$$

$$(1''') \text{ y } (3''') \text{ son contrarios con } (5''').$$

9.5.- Aplicaciones A La Toma De Decisiones.

Las respuestas a nuestras preguntas iniciales, de manera simple son:

- (1) $\Box Px, \Diamond Px, \Box \neg Px$ ó $\Diamond \neg Px$
- (2) $\mathbf{N}Rx, \mathbf{P}Rx, \mathbf{I}Rx, \mathbf{C}Rx$ y $\mathbf{E}Rx,$

pero realmente las respuestas a los problemas de decisiones suelen ser más complejos:

Dada la situación S, se debe hacer P para obtener como resultados

R.

Lo cual se representa por:

- (3) $\{S \implies \Box Px\} \implies \mathbf{N}Rx$
 $(\{S \implies (x)(Ax \implies Px)\} \implies (x)(Ex \implies Rx))$

ó

- (4) $S \wedge \mathbf{N}Rx \implies \Box Px$
 $(S \wedge (x)(Ex \implies Rx) \implies (x)(Ax \implies Px))$

Según el enunciado se interprete como respuesta a las preguntas 2 ó 1 respectivamente.

También las respuestas, de manera más general, pueden estar dadas por cualquiera de las combinaciones de los operadores normativos y modales. De esta manera se puede tener veinte formas de respuestas básicas a las preguntas (1) y (2).

9.6.- El Factor Tiempo.

Todo programa de acción transcurre en un lapso de tiempo, esto es, si se está en el momento t_0 ó 0 , el resultado del programa será en un momento $t_r \geq t_p + t_0$, en donde t_p es el tiempo de realización del programa de acción. De hecho, sí $t_r = t_p + t_0$ se puede decir que el resultado es inmediato a la finalización del programa.

Así (3) y (4) quedarían de la siguiente manera:

$$(5) \quad \{St_0 \implies (x)(Ax \implies Px)\} \implies (x)(Et_x \implies Rt_x)$$

$$(6) \quad St_0 \wedge (x)(Et_x \implies Rt_x) \implies (x)(Ax \implies Px).$$

Pero esto implica que cualquier verdad o falsedad de una declaración en el problema de decisiones es en base a modelos teóricos que relacionan situaciones actuales y programas de acción con resultados futuros. En otras palabras un enunciado como (5) y (6) no pueden ser juzgados en base a una ideología empirista y/o fenomenalista, ya que la observación del futuro no es posible. Y por otro lado la situación actual St_0 debe estar claramente definida.

9.7.- Aplicaciones

1.- Los sistemas son dinámicos, estos es no permanecen inmutables con el tiempo sino que varían con el transcurso del mismo. Existe una variedad de propiedades tales como equilibrio, estabilidad, catástrofe, crecimiento que se definen en base a la variación de los estados del sistema respecto al tiempo.⁷⁹

⁷⁹ EJEMPLO:

- Estados y Procesos (y trayectorias)

Los estados se pueden definir como los valores de las propiedades de un sistema en un determinado momento, y se pueden representar mediante un funcional F n -dimensional:

$$F_{\sigma} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

A la lista de estados sucesivos en un periodo de tiempo τ es lo que se denomina por proceso durante el periodo τ :

$$P_{\sigma}(\tau) = (F_{\sigma}(t) \mid t \in \tau)$$

Mientras al conjunto de los estados en el mismo periodo τ se le denomina trayectoria del sistema en el periodo τ :

$$T_{\sigma}(\tau) = \{ F_{\sigma}(t) \mid t \in \tau \}$$

- Estabilidad, Equilibrio y Catástrofes.

Se dice que un sistema está en equilibrio si sigue una trayectoria cuyos estados cumplen ciertas relaciones deseadas entre los valores de sus propiedades. Así se tiene que la trayectoria $T_{\sigma}(\tau)$ del sistema σ está en equilibrio si $T_{\sigma}(\tau) \in E_R$, en donde $E_R = \{(Y_1, \dots, Y_n) \mid RY_1 \dots Y_n\}$ siendo R una relación respecto a la cual el sistema está en equilibrio).

Mientras que un sistema sigue una trayectoria estable si para desviaciones pequeña de ella el sistema vuelve a acercarse a ella, o sea si el sistema ha sido perturbado de su trayectoria tiende a regresar a ella.

Definamos primero $T[y_0]$ como la trayectoria que tiene el estado y_0 para el momento t_0 , y $P[y_0]$ el proceso que empieza en el estado y_0 en el momento t_0 :

$$T[y_0] = \{F(t_0) \mid F(t_0) = y_0 \ \& \ t > t_0\}$$

$$P[y_0] = (F(t) \mid t > t_0) \text{ con } F(t_0) = y_0$$

Entonces $T[y_0]$ es estable si $\exists \delta > 0$, $\forall \varepsilon < \delta$ se cumple que si $d(T[y_0], y') < \varepsilon$, entonces $d(T[y_0], y) < \delta$, $y \in T[y']$, $\& \lim_{t \rightarrow \infty} d(T[y_0], P[y']) = 0$

Y se dice que hay una catástrofe cuando el sistema pasa abruscamente de una trayectoria estable a otra trayectoria estable, esto es:

El punto y_c es un punto de catástrofe si $\forall \varepsilon > 0$, $d_1 \ \& \ d_2 < \varepsilon$, $P[y_c + d_1]_{t \rightarrow \infty} \rightarrow T^1 \ \& \ P[y_c + d_2]_{t \rightarrow \infty} \rightarrow T^2$ siendo $T^1 \ \& \ T^2$ dos trayectorias estables $T^1 \neq T^2$

Casos especiales de estas definiciones es cuando las trayectorias son puntuales, y en este caso se puede hablar de estado estacionario ($F(t) = \text{constante}$) y estado estable.

2.- Análisis de enunciados.

Sea el siguiente problema:

Para aumentar la productividad se puede (a) Automatizar los procesos o (b) mejorar los incentivos de los trabajadores.

Automatizar los procesos involucra problemas con el sindicato, es costoso y las posibilidades de éxito no son seguras.

Los incentivos de los trabajadores se pueden mejorar por (1) un simple aumento de sueldo o (2) por un mejoramiento general del ambiente laboral.

Un simple aumento de sueldo se sabe que produce un mejoramiento momentáneo de la productividad pero se desvanece pronto por los ajustes de la competencia, mientras que un mejoramiento general del ambiente laboral sin un aumento de sueldos no produce un aumento apreciativo de la productividad, pero per contra establece una relación estable.

Se da aumentar la productividad, manteniéndose ésta y a bajo costo. ¿Qué hacer?

Simbolizando tenemos:

$$\mathbf{N}P^*x \implies [](Ax \vee Ix)$$

$$Ax \implies \mathbf{C}P_x \wedge \mathbf{N}Q_x$$

$$Ix \implies Sx \vee Lx$$

$$Sx \wedge \neg Lx \implies (\exists t > 0)[\mathbf{N}(P_{\tau x} \geq P^*x, \tau < t) \wedge \mathbf{I}(P_{\tau x} \geq P^*x, \tau \geq t)]$$

$$Lx \wedge \neg Sx \implies (t)[(P_0x < P_{t x} < P^*x) \wedge (\tau)(P_{\tau} = P_t)]$$

Es fácil ver que Ax (la automatización) no produce los resultados deseados, ni tampoco Sx (incremento de salarios) y Lx (mejoramiento de las condiciones laborales) por si solos, pero Sx \wedge Lx si:

$$\neg(\exists t)[Ptx \langle P^*x \rangle \text{ ----} \rangle \neg Lx \vee Sx$$

$$(t)\mathbf{N}Ptx \text{ ===} \rangle \neg Sx \vee Lx$$

pero como: $\neg Sx \wedge \neg Lx \text{ ===} \rangle \neg Ix$

se tiene entonces: $(Sx \wedge Lx) \text{ ---} \rangle \mathbf{N}P^*x$

$$y \quad \mathbf{N}(P^*x \wedge \neg Qx) \text{ ===} \rangle [](Sx \wedge Lx)$$

CAPÍTULO 10

LÓGICA PROBABLE

La probabilidad de que un evento ocurra se considera como el número de casos favorables vs el número total de casos.

En general la teoría de probabilidades tiene los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. si $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(U) = 1$

en donde A y B son dos conjuntos, y U el conjunto Universal.

A partir de ahí, es claro que si se aplica la noción de probabilidad a la veracidad de un enunciado, se tiene:

1. $0 \leq P(p) \leq 1$
2. si $p \wedge q = F$, entonces $P(p \vee q) = P(p) + P(q)$
3. $P(T) = 1$.

En donde p y q son enunciados, T una tautología y F una contradicción.

De estos axiomas se obtiene en seguida los siguientes corolarios:

1. $P(\neg p) = 1 - P(p)$
2. $P(p \vee q) = P(p) + P(q) - P(p \wedge q)$.

Además se define la probabilidad condicional que es la probabilidad de que q sea verdadero dado que p es verdadero:

$$P(q|p) = P(p \wedge q)/P(p)$$

Mientras que para la implicación se tendría que una condición necesaria de que $P(p \implies q) = 1$ es que $P(q|p) = 1$; y de otra manera $P(p \implies q) = 0$.

El resultado anterior puede parecer paradójico, pero hay que recordar $p \implies q$ es una implicación lógica, que es verdadera siempre cuando no se de el

caso de que p es verdadero y q falso, mientras $q|p$ indica: que dado el caso de que p sea verdadero, q también lo sea⁸⁰.

10.1.- La lógica probable como un refinamiento de la lógica modal.

Anteriormente se vio que la lógica modal usa como operadores "necesario", "posible", "imposible", "contingente" y "eventual".

Es claro que la probabilidad evalúa el grado de posibilidad de un resultado, de hecho:

- (1) Si $\mathbf{N}Rx$ entonces $P(Rx) = 1$
- (2) Si $\mathbf{I}Rx$ entonces $P(Rx) = 0$
- (3) Si $\mathbf{P}Rx$ entonces $P(Rx) \geq 0$
- (4) Si $\mathbf{C}Rx$ entonces $P(\neg Rx) = 1 - P(Rx) \geq 0$
- (5) Si $\mathbf{E}Rx$ entonces $P(Rx) \geq 0$ y $P(\neg Rx) = 1 - P(Rx) \geq 0$

Además se tienen las siguientes relaciones:

- (6) Si $P(Rx) > 0$ entonces $\mathbf{P}Rx$, y
- (7) Si $P(\neg Rx) = 1 - P(Rx) > 0$ entonces $\mathbf{C}Rx$
- (8) Si $P(Rx) > 0$ y $P(\neg Rx) = 1 - P(Rx) > 0$ entonces $\mathbf{E}Rx$

⁸⁰ También se puede suponer que $P(p \wedge q) = P(p) \cdot P(q)$, de allí considera que $p \implies q \stackrel{\text{def}}{=} \neg p \vee q$. Por lo cual $P(p \implies q) = 1 - P(p) + P(p) \cdot P(q)$

10.2.- Aplicaciones

1.- Confiabilidad de un sistema:

La confiabilidad de un sistema o de un componente del mismo viene dada por uno menos la probabilidad de que el sistema o componente falle. O lo que es lo mismo la probabilidad de falla es uno menos la confiabilidad.

Sea por ejemplo el sistema del ejemplo 1.2, y supongamos que la probabilidad de que falle cualquier componente del sistema es independiente de la falla o no de cualquier otro componente, y representemos por a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 y c_3 , la confiabilidad de los componentes A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 y C_3 , respectivamente, entonces la probabilidad de falla del sistema S viene dada por:

$$P(\neg S) = P(\neg A) + P(\neg B).P(\neg C) - P(\neg A).P(\neg B).P(\neg C)$$

y

$$P(\neg A) = P(\neg A_1).P(\neg A_2) = (1-a_1)(1-a_2) = 1 - a_1 - a_2 + a_1a_2$$

$$\begin{aligned} P(\neg B) &= P(\neg B_1) + P(\neg B_2) - P(\neg B_1).P(\neg B_2) = \\ &= 1-b_1 + 1-b_2 - (1-b_1)(1-b_2) = 1 - b_1b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\neg C) &= P(\neg C_1).P(\neg C_2 \vee \neg C_3) \\ &= P(\neg C_1).[P(\neg C_2) + P(\neg C_3) - P(\neg C_2).P(\neg C_3)] \\ &= (1-c_1).[1-c_2 + 1-c_3 - (1-c_2).(1-c_3)] \\ &= 1 - c_1 - c_2c_3 + c_1c_2c_3 \end{aligned}$$

Así se tiene que:

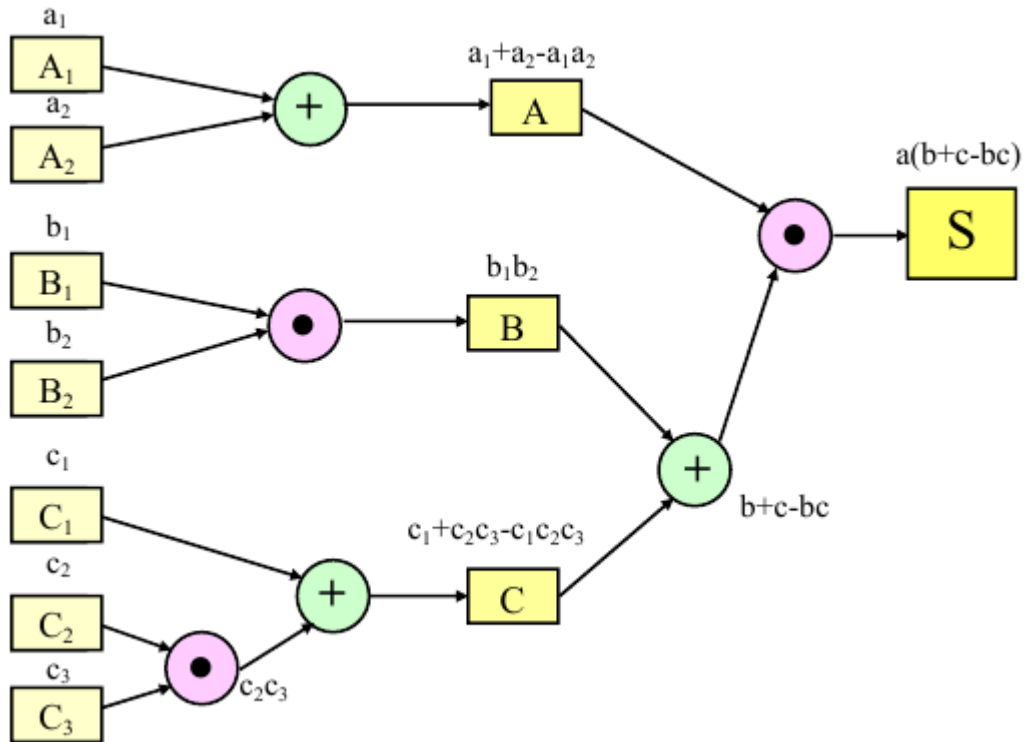
$$P(\neg S) = 1 - (a_1+a_2-a_1a_2)[(c_1+c_2c_3-c_1c_2c_3)(1-b_1b_2) + b_1b_2]$$

Mientras que la confiabilidad del sistema vendría dada por:

$$(a_1+a_2-a_1a_2)[(c_1+c_2c_3-c_1c_2c_3)(1-b_1b_2) + b_1b_2]$$

Ver figura 10.7.

Figura 10.7
Confiabilidad del sistema



2.- Análisis de Decisiones.

Ejemplo 10.2

Un fabricante de partes recibe el pedido de una cotización para 10000 partes de un ensamblador de productos terminados.

El gerente de proyectos determina que el prototipo de la parte puede costar \$1000, \$1500 ó \$2000, con probabilidades 0.2, 0.5 y 0.3 respectivamente, y así mismo los costos de producción de las 10000 partes según el costo del prototipo serían de \$ 12000, 18000 y 35000 respectivamente. El gerente de mercadeo determina que en estos casos se pueden realizar dos tipos de cotizaciones, una alta y otra baja. Las cotizaciones bajas serían de \$ 39000, \$44000 y \$ 48000; y las altas de \$45000, \$50000 y \$60000; dependiendo

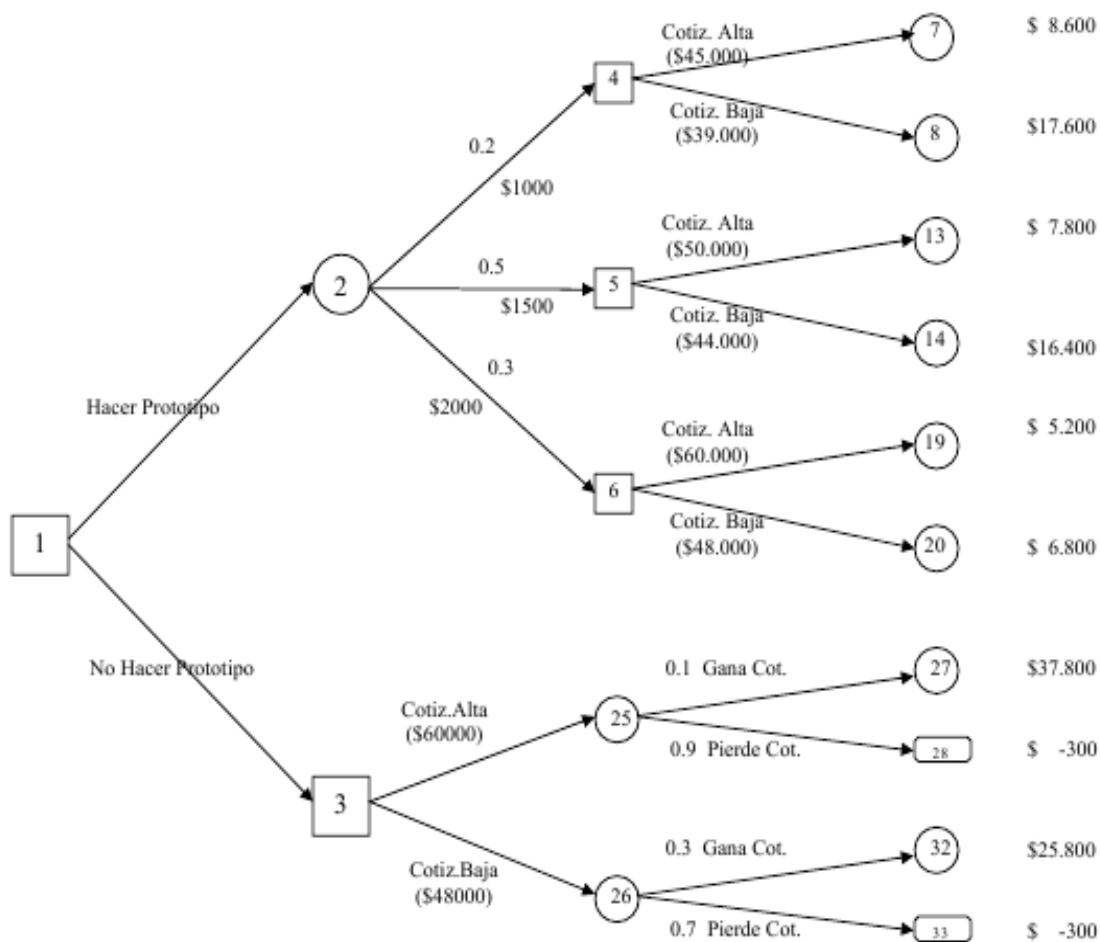
del costo de los prototipos. Siendo la probabilidad de ganar la licitación de 0.3 si la cotización es alta y de 0.7 si la cotización es baja. Además el costo de cotizar es de \$300.

Además el gerente de mercadeo, piensa que se puede presentar la cotización sin hacer los prototipos con una cotización baja de \$48000 y con una probabilidad 0.3 de ganar la licitación y una cotización alta de \$60000 con una probabilidad de 0.1 de ganar la licitación, siendo los costos de producción si se gana la licitación de \$12000, \$18000 ó \$35000 con probabilidades 0.2, 0.5 y 0.3 respectivamente. Siendo el costo de cotizar siempre los mismos \$300.⁸¹

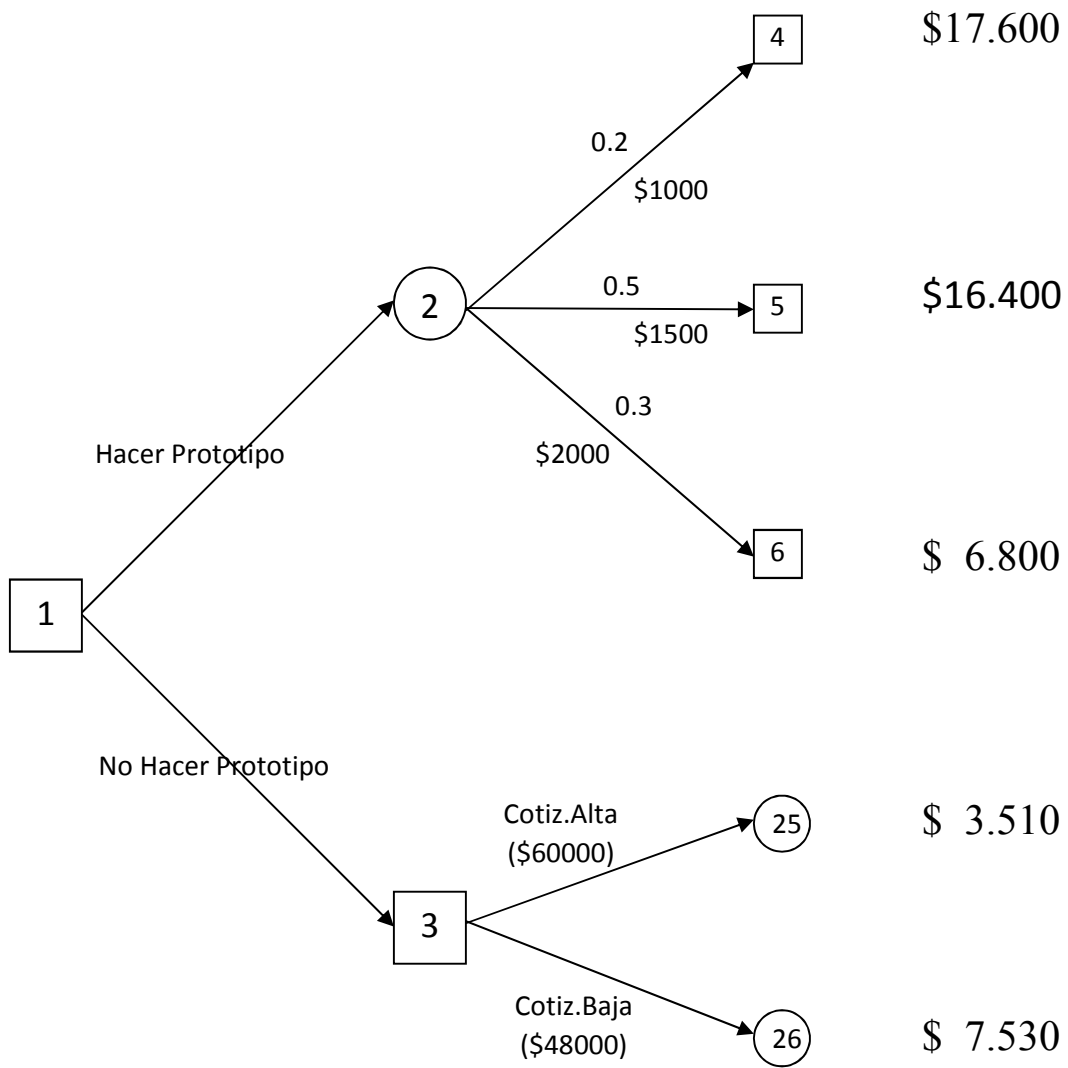
En la **gráfica siguiente** se presenta el árbol de decisiones del ejemplo, representando los cuadrados los nodos de decisión, los círculos los nodos de acción del azar y los ovalados los nodos terminales.

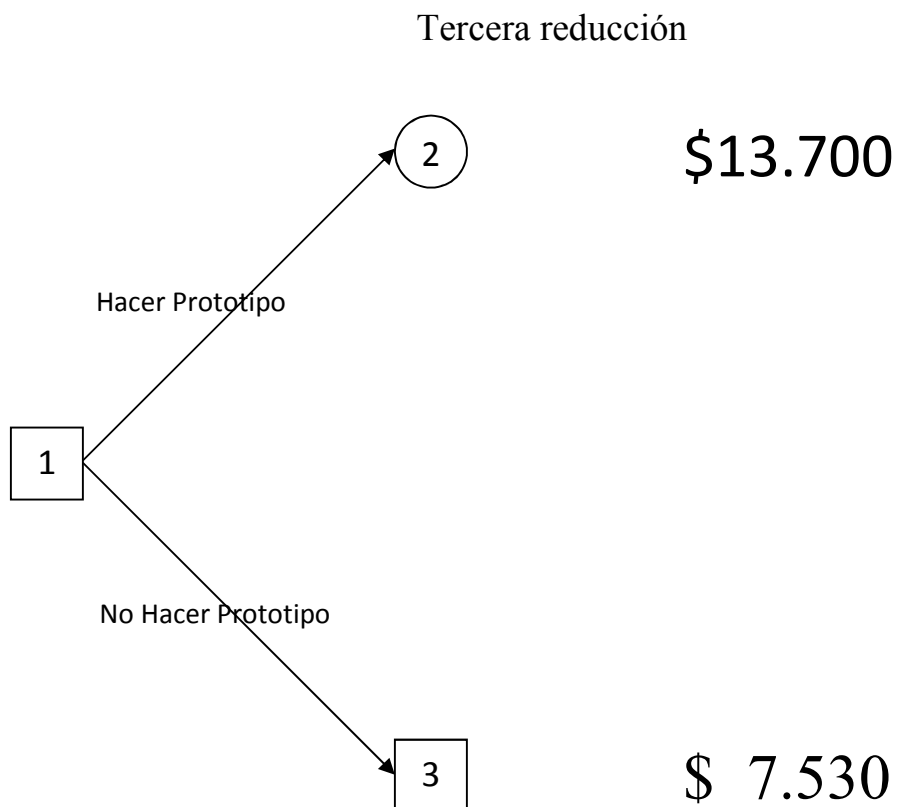
81 Problema adaptado de Shore Barry, Quantitative Methods for Business Decisions. Text and Cases. McGraw-Hill. 1978.

Primera reducción



Segunda Reducción





Así se llega después de tres reducciones a que la mejor alternativa es hacer prototipo y ofrecer la cotización baja, lo cual da un valor esperado de \$13760, con la siguiente distribución de probabilidad.

| Ganancia | Probabilidad |
|----------|--------------|
| 25700 | 0.14 |
| -1300 | 0.06 |
| 24200 | 0.35 |
| -1800 | 0.15 |
| 10700 | 0.21 |
| -2300 | 0.09 |

CAPÍTULO 11

PRINCIPIOS LÓGICOS DE LA CAUSALIDAD

En el presente capítulo se va a realizar un desarrollo en base a las lógicas anteriormente estudiadas del razonamiento causal.

11.1- Causas y Efectos⁸²

Definición 1

Sea $\mathbf{C}_{\tau_1} = \{C_{1\tau_1}, C_{2\tau_1}, \dots, C_{m\tau_1}\}$ un conjunto de eventos en un lapso $\tau_1 = [t_0, t_1]$, estos eventos son **causa** del conjunto de eventos $\mathbf{E}_{\tau_2} = \{E_{1\tau_2}, E_{2\tau_2}, \dots, E_{n\tau_2}\}$ y una situación nueva S_{τ_2} en un lapso posterior $\tau_2 = [t_2, t_3]$, $t_1 \leq t_2$ si existiendo unas condiciones o situaciones S_{τ_1} ⁸³ se tiene:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})^{84}$$

⁸² En esta sección y la siguiente hay mucha influencia, sobre todo en lo que se refiere a algunas nominaciones, de Patrick Suppes.

El enfoque de Patrick Suppes⁸² es un enfoque estadístico. En donde si $t' < t$, define:

1) Causa *prima facie*: El evento $E_{t'}$ es causa *prima facie* del Evento F_t si: $P(F_t | E_{t'}) > P(F_t)$

2) Causa *espuria*: El evento $E_{t'}$ es *causa espuria* del Evento F_t si existe otro evento $G_{t'}$ tal que:

$$P(F_t | E_{t'}, G_{t'}) = P(F_t | G_{t'})$$

3) Causa *genuina*: Una causa *prima facie* es *genuina* si y solo si no es *espuria*.

En general se tiene la siguiente terminología respecto a la causalidad:

Causa necesaria: El evento C es una causa necesaria de E si para que ocurra E debe ocurrir C.

Causa suficiente: El evento C es una causa suficiente de E si al ocurrir C, ocurre E.

Causa contribuyente: El evento C es una causa contribuyente de E si al ocurrir D y C, ocurre E. Pero E no ocurre si solo ocurre D.

⁸³ Es de notar que las condiciones pueden ser desde "cualquier situación" hasta unas "condiciones improbables que se den".

Una situación puede S_t puede describirse mediante un vector de variables de estado n dimensional (e_1, e_2, \dots, e_n). Los resultados o consecuencias dependen en gran medida de los valores de estas variables de estado.

⁸⁴ Cuando se habla de propensiones o probabilidades, son probabilidades sustentadas por una razón bien fundamentada, preferiblemente de leyes, y no sólo proveniente de muestreos estadísticos.

Aquí estamos tomando algunos principios enunciados por M. Bunge:

- 1.- La relación causal relaciona eventos.
- 3.- Hay al menos dos mecanismos de causación diferentes: *transferencia de energía fuerte* (o *generación de eventos* [completa]) y *transferencia de energía débil* (o *señal desencadenante*, o *desencadenamiento de eventos*)
- 4.- La generación causal de eventos es gobernada por leyes.
- 5.- Las causas pueden modificar propensiones, pero no son propensiones.
- 7.- Las propiedades y los estados, aunque hacen las diferencias, no generan eventos y no se pueden considerar como causas, aunque sí como determinantes.

Martin Mahner - Mario Bunge: *Fundamentos de Biofilosofía*. Capítulo 1, Sección 9: Causación. Siglo Veintiuno Editores. México. 2000

Esto es un conjunto de eventos son causa de otros eventos y condiciones bajo ciertas circunstancias si aumentan la propensión de la ocurrencia de estos últimos y se denotará como:

$$(\mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) \underset{\text{Pr}}{\Rightarrow} (\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$$

y la diferencia entre los dos momentos ($\tau_2 - \tau_1$) se denominará como **rapidez del resultado o consecuencias**.

Definición 2

Al conjunto de eventos \mathbf{E}_{τ_2} descrito anteriormente se le llama conjunto de **efectos** y al par ordenado $(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$ **consecuencias**.

Ejemplo

Una chispa produce una explosión si existe una mezcla de gas y oxígeno adecuados. El evento causal es la chispa, la circunstancia es la presencia de una mezcla de gas y oxígeno adecuados y la consecuencia es la explosión.

11.2.- Tipología de las Causas

Definición 3

Un evento $C_{i\tau_1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es una **causa espuria** de los eventos \mathbf{E}_{τ_2} si:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) = \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1} - \{C_{i\tau_1}\}; S_{\tau_1})$$

En otras palabras una causa es espuria si no contribuye en nada en la propensión de los efectos o consecuencias.

Realmente una causa espuria no es propiamente una causa. Si en un análisis inicial de causas-efectos un evento se tomó como una posible causa, una causa espuria, realmente fue mal identificada como tal.

Lamentablemente, en el discurso político es muy frecuente el uso de causas espurias para explicar los fracasos.

Definición 4

Sea \mathbf{E}_{τ_1} el conjunto de las causas espurias ($\mathbf{E}_{\tau_1} = \{C_{i\tau_1} \mid C_{i\tau_1} \text{ es causa espuria}\}$), el conjunto $\mathbf{G}_{\tau_1} = \mathbf{C}_{\tau_1} - \mathbf{E}_{\tau_1}$ es el conjunto de las **causas genuinas**.

Esto es las causas genuinas son las que realmente contribuyen al aumento de la propensión de los efectos o consecuencias.

En otras, palabras, las causas genuinas son las verdaderas causas, son las que se deben tomar realmente en cuenta en un análisis causas-efectos. De ahora en adelante supondremos que cuando nos referimos a causas siempre nos vamos referir a causas genuinas.

Definición 5

Un conjunto eventos $\mathbf{N}_{\tau_1} \subseteq \mathbf{C}_{\tau_1}$ es un conjunto de **causas necesarias** si se cumple:

- (1) $\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} \mid \mathbf{C}_{\tau_1} - \mathbf{N}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) = \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$
- (2) $\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} \mid \mathbf{N}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) \geq \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$
- (3) $\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} \mid \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$

Un conjunto de causas son necesarias si: sin ellas no se puede obtener los efectos o consecuencias.

Definición 6

Un conjunto eventos $\mathbf{S}_{\tau_1} \subseteq \mathbf{C}_{\tau_1}$ es un conjunto de **causas suficientes** si se cumple:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} \mid \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) \geq \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} \mid \mathbf{S}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$$

De manera tal que un conjunto de eventos en ciertas condiciones son causas suficientes si ellas por si solas permiten obtener un aumento de la propensión de los efectos o consecuencias.

Definición 7

Si existe un conjunto $\mathbf{D}_{\tau^*} \subseteq \mathbf{C}_{\tau_1}$, en donde $\tau^* = [t^* > t_0, t_1]$, y $\mathbf{D}_{\tau^*} \subseteq \mathbf{N}_{\tau_1}$, este conjunto de eventos se denominará conjunto de **causas desencadenantes**. Esto es, si las últimas causas en secuencia temporal son todas necesarias estas serán causas desencadenantes.

Ejemplo

Un camión cisterna viene a llenar un tanque de gas, la manguera entre camión y el tanque queda mal conectada, como consecuencia se produce una fuga. Hay alguna chispa y se produce una explosión.

En este caso, la chispa es el evento desencadenante de la explosión.

Definición 8

Un conjunto de eventos que disminuya el lapso en obtener los efectos o consecuencias se denominará conjunto de **causas acelerantes**.

Esto es: si $(\mathbf{C}_{\tau_1}; \mathbf{S}_{\tau_1}) \Rightarrow_{\text{Pr}} (\mathbf{E}; \mathbf{S})_{\tau_2}$

y $(\mathbf{C}_{\tau_1} \cup \mathbf{A}\mathbf{C}_{\tau_1}; \mathbf{S}_{\tau_1}) \Rightarrow_{\text{Pr}} (\mathbf{E}; \mathbf{S})_{\tau_3}$

con $\tau_3 < \tau_2$; entonces $\mathbf{A}\mathbf{C}_{\tau_1}$ es un conjunto de **causas acelerantes**.

11.3.- Eventos perturbadores, atenuantes e inhibidores**Definición 9**

Un conjunto de eventos \mathbf{D}_{τ_2} se consideran perturbadores si introducen desviaciones respecto a las consecuencias.

$$\Pr(\mathbf{E}'_{\tau_2}; \mathbf{S}'_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}, \mathbf{D}_{\tau_2}; \mathbf{S}_{\tau_1}) \geq \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; \mathbf{S}_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; \mathbf{S}_{\tau_1})$$

Así, por ejemplo, en el caso de un incendio de maleza, la aparición de un viento puede resultar en la expansión del mismo, mientras que una lluvia puede ayudar a su extinción. De igual manera se puede apreciar como la aparición de una pandemia, como la del COVID-19, fue un evento perturbador para gran parte de las actividades en el mundo.

Definición 10

Si en el mismo lapso $\tau_1 = [t_0, t_1]$, existe un conjunto de eventos $\mathbf{A}_{\tau_2} = \{A_{1\tau_2}, A_{2\tau_2}, \dots, A_{k\tau_2}\}$ que cumple con la condición:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}, \mathbf{A}_{\tau_2}; S_{\tau_1}) < \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1})$$

éste conjunto de eventos se denominará con el nombre de conjunto de **eventos atenuantes** del conjunto de eventos \mathbf{C}_{τ_1} . Esto es, los eventos atenuantes son los que disminuyen la propensión de unos hechos o consecuencias.

Definición 11

Si en el mismo lapso $\tau_1 = [t_0, t_1]$, existe un conjunto de eventos $\mathbf{I}_{\tau_2} = \{I_{1\tau_2}, I_{2\tau_2}, \dots, I_{k\tau_2}\}$ que cumple con la condición:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}, \mathbf{I}_{\tau_2}; S_{\tau_1}) \approx 0$$

éste conjunto de eventos se denominará con el nombre de conjunto de **eventos inhibidores**. Esto es, los eventos inhibidores son aquellos que imposibilitan unos hechos o consecuencias. Y su denotación vendrá dada por:

$$(\mathbf{I}_{\tau_1}; \mathbf{C}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) \xrightarrow[\text{Pr}=0]{} (\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$$

Definición 12

Sea $\mathbf{A}\mathbf{f}_{\tau_1} = \{Af_{1\tau_1}, Af_{2\tau_1}, \dots, Af_{m\tau_1}\}$ un conjunto de eventos en un lapso $\tau_1 = [t_0, t_1]$, este conjunto de eventos es **atenuante fuerte** del conjunto de eventos $\mathbf{E}_{\tau_2} = \{E_{1\tau_2}, E_{2\tau_2}, \dots, E_{n\tau_2}\}$ en un lapso posterior $\tau_2 = [t_2, t_3]$, $t_1 \leq t_2$ si existiendo unas condiciones o situaciones S_{τ_1} se tiene:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{A}\mathbf{f}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) < \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2})$$

Esto es un conjunto de eventos es atenuante fuerte de otros eventos y situaciones si, bajo ciertas circunstancias, se disminuyen la propensión de la ocurrencia de estos últimos independientemente de la existencia de eventos causantes.

Definición 13

Sea $\mathbf{I}\mathbf{f}_{\tau_1} = \{If_{1\tau_1}, If_{2\tau_1}, \dots, If_{m\tau_1}\}$ un conjunto de eventos en un lapso $\tau_1 = [t_0, t_1]$, este conjunto de eventos será **inhibidor fuerte** del conjunto de eventos $\mathbf{E}_{\tau_2} = \{E_{1\tau_2}, E_{2\tau_2}, \dots, E_{n\tau_2}\}$ y una situación S_{τ_2} en un lapso posterior $\tau_2 = [t_2, t_3]$, $t_1 \leq t_2$ si existiendo unas condiciones o situaciones S_{τ_1} se tiene:

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{I}\mathbf{f}_{\tau_1}; S_{\tau_1}) \approx 0$$

Esto es, un conjunto de eventos es inhibidor fuerte de otros eventos y situaciones si, bajo ciertas circunstancias, impiden la ocurrencia de estos últimos independiente de la posible existencia de eventos causantes.

Definición 14

Si existe un conjunto $\mathbf{B}_{\tau^*} \subseteq \mathbf{E}_{\tau_1}$, en donde $\tau^* = [t^* > t_0, t_1]$, y $\mathbf{B}_{\tau^*} \subseteq \mathbf{I}_{\tau_1}$, este conjunto de eventos se denominará conjunto de **eventos bloqueadores**. Esto es, si los últimos eventos en secuencia temporal son todos inhibidores fuertes estos serán bloqueadores.

11.4.- Situaciones o condiciones y sus tipos.

Definición 15

Una condición o situación F_{τ_1} es **facilitadora** de un conjunto de eventos \mathbf{E}_{τ_2} si para el mismo existe un conjunto de eventos causantes \mathbf{C}_{τ_1} de \mathbf{E}_{τ_2} :

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; F_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$$

Ejemplos

Una buena mezcla de oxígeno y gas es una condición facilitadora de una explosión en el caso que se dé el evento de una chispa.

El descontento de una población es una situación facilitadora para que se den ciertos tipos de eventos tales como manifestaciones.

Definición 16

Una condición o situación P_{τ_1} es **propiciadora** de unos eventos \mathbf{E}_{τ_2} y nuevas situaciones S_{τ_2} si aumenta la posibilidad de la existencia de un conjunto de eventos causantes \mathbf{C}_{τ_1} de $(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$, lo cual queda expresado con las siguientes dos condiciones:

- (1) $\Pr(\mathbf{C}_{\tau_1} | S_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{C}_{\tau_1})$
- (2) $\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{C}_{\tau_1}; P_{\tau_1}) > \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2})$

Ejemplo

Una población descontenta es una situación propiciadora para el surgimiento de un líder popular.

Definición 17

Una condición o situación C_{τ_1} es **catalizadora** de unos eventos \mathbf{C}_{τ_1} si aumenta la rapidez de las respuestas.

Definición 18

Una condición o situación A_{τ_1} es **atenuante** de unos eventos \mathbf{E}_{τ_2} y una situación S_{τ_2} si para el mismo y para cualquier conjunto de eventos \mathbf{E}_{τ_1} :

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{E}_{\tau_1}; A_{\tau_1}) < \Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2})$$

Esto es, una condición o situación atenuante disminuye la propensión de que unos eventos y situaciones determinados ocurran.

Definición 19

Una condición o situación I_{τ_1} es **inhibidora** de unos eventos \mathbf{E}_{τ_2} y una situación S_{τ_2} ocurran si para cualquier conjunto de eventos \mathbf{E}_{τ_1} :

$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; S_{\tau_2} | \mathbf{E}_{\tau_1}; I_{\tau_1}) \approx 0$$

Esto es, una condición o situación inhibidora impide que unos eventos y situaciones determinados ocurran.

De esta manera un enunciado en forma causal podría enunciarse de la siguiente manera:

Dado un conjunto de eventos \mathbf{E}_{τ_1} y una situación (o condición) S_{τ_1} , situación que puede ser **facilitadora, propiciadora, atenuante o inhibidora**, y de ocurrir eventos **perturbadores** se obtendrán las **consecuencias** $(\mathbf{E}_{1\tau_2}; S_{1\tau_2})$, $(\mathbf{E}_{2\tau_2}; S_{2\tau_2})$, ..., $(\mathbf{E}_{n\tau_2}; S_{n\tau_2})$, con las probabilidades Pr_1, Pr_2, \dots, Pr_n , respectivamente.

11.5.- Principio de la Rapidez de Respuesta.

Mientras más rápida sea la respuesta a un evento, menor posibilidad existe de la aparición de un evento perturbador.

Esto es: más inmediato sea la relación causa-efecto, más posibilidad tiene de realizarse. Y a la inversa, mientras más tiempo ocurre entre un evento y sus posibles consecuencias, más posibilidad existe de la aparición de eventos perturbadores.

11.6.- Notas Conclusivas.

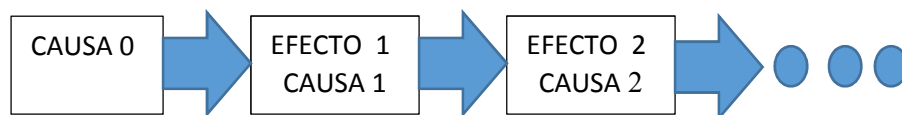
Es de notar:

- 1) Entre otras cosas, que para muchos autores, la relación de causalidad se reduce a que se dé en condición de certeza o casi certeza:

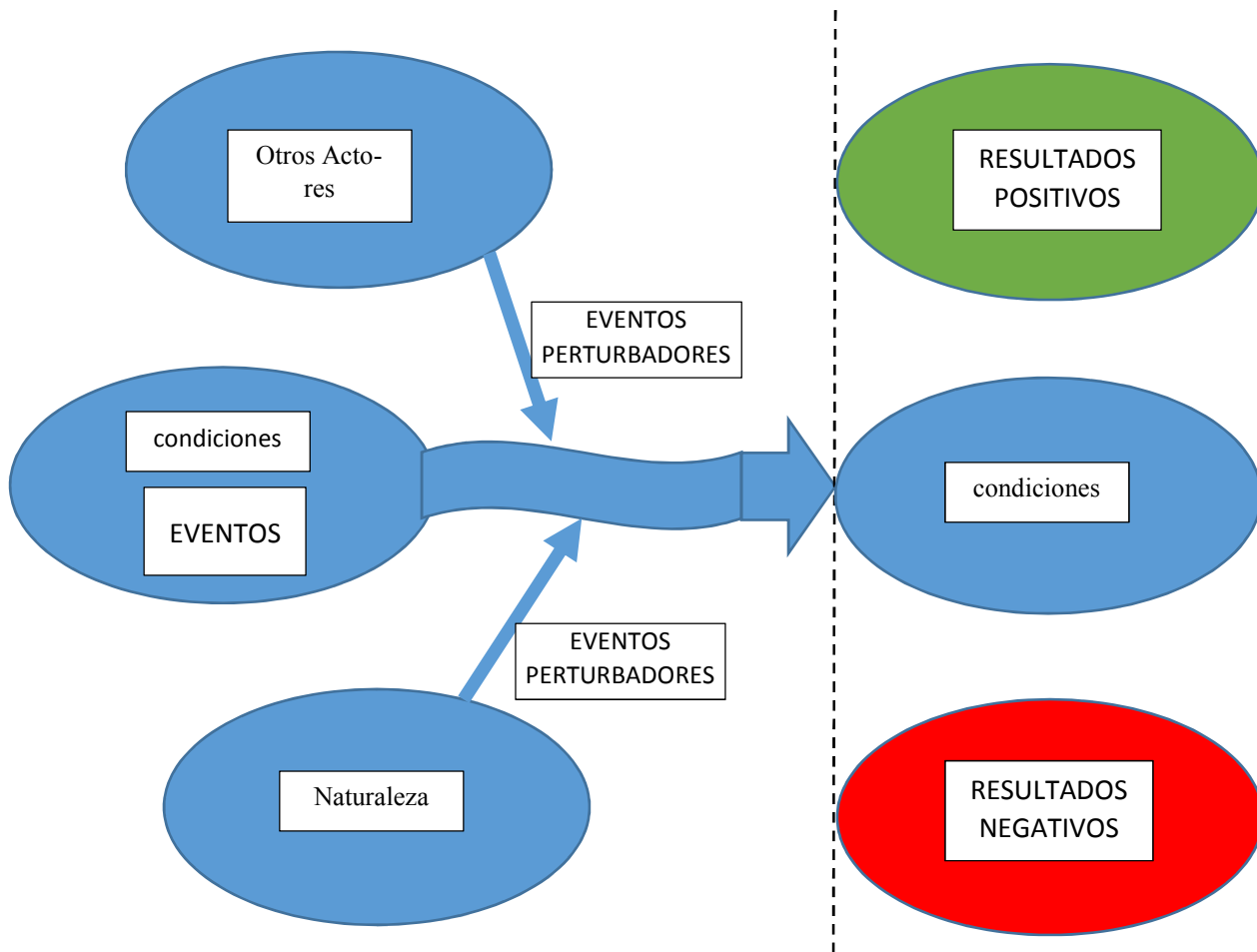
$$\Pr(\mathbf{E}_{\tau_2}; \mathbf{S}_{\tau_2} \mid \mathbf{C}_{\tau_1}; \mathbf{S}_{\tau_1}) \approx 1$$

Esto último se da en el mundo físico cotidiano, pero ni en el nano mundo físico, ni en los seres vivos y mucho menos en los grupos o sociedades de humanos.

- 2) El entramado de las relaciones causas-efectos es mucho más complejo del descrito por muchos autores porque:
 - a) No se reduce a relaciones entre eventos, también están las relaciones eventos-situaciones.
 - b) Además existen también conjuntos de eventos atenuantes, inhibidores y bloqueadores, además de situaciones atenuantes e inhibidoras.
 - c) De esta manera si el análisis tradicional de la causalidad venia representado por el siguiente diagrama:



Nuestra propuesta se puede representar con el diagrama siguiente:



- 3) En base a lo dicho anteriormente:
- a) No tiene mucho sentido la realización de cadenas muy largas, aunque sean casi ciertas, de relaciones causas-efectos, ya que a la medida que la cadena es larga siempre las probabilidades de obtener los resultados deseados irán disminuyendo, y habiendo posibilidad de que aparezcan tanto eventos como situaciones inhibidores.
 - b) Cuando se toman decisiones, tan importante es buscar acciones que generen los resultados deseados, como evitar eventos y situaciones que inhiban o bloqueen la consecución de los objetivos.
- 4) Así para cualquier programa de acción para lograr unos objetivos, se debe buscar acciones que:
- a) Maximicen la propensión acciones-efectos.

- b) De existir para estas acciones eventos o situaciones atenuantes o inhibidores, preparar otras cadenas de acciones alternativas.
- c) Son preferible, como lo señala K. Popper⁸⁵, las soluciones graduales a las de cambiar todo, ya que no podemos tener certeza de los resultados.

⁸⁵ Popper, Karl: *La Sociedad Abierta y sus Enemigos*.

CAPÍTULO 12

LÓGICA VAGA O IMPRECISA

La lógica vaga o imprecisa está basada en la teoría de los conjuntos vagos, imprecisos, borrosos o difusos (Fuzzy Sets).

12.1.- Axiomas de los Conjuntos Difusos

En general, la teoría de los conjuntos difusos o borrosos tiene los siguientes axiomas, en donde $G_A(x)$ se interpreta como el grado de pertenencia del elemento x al conjunto A :

| | | |
|----|--|--|
| 1. | $0 \leq G_A(x) \leq 1$ | El grado de pertenencia de los elementos a un conjunto toma valores entre 0 y 1. |
| 2. | $A = B \iff \forall x, G_A(x) = G_B(x)$ | Dos conjuntos son iguales, si los grados de pertenencia de todos sus elementos son iguales |
| 3. | $A \subseteq B \iff \forall x, G_A(x) \leq G_B(x)$ | Un conjunto es subconjunto de otro, si los grados de pertenencia de sus elementos son igual o menores que los del otro. |
| 4. | $G_{A \cap B}(x) = \min \{G_A(x), G_B(x)\}$ | El grado de pertenencia de un elemento a la intersección de dos conjuntos es igual al mínimo de los dos grados de pertenencia. |
| 5. | $G_{A \cup B}(x) = \max \{G_A(x), G_B(x)\}$ | El grado de pertenencia de un elemento a la unión de dos conjuntos es igual al máximo de los dos grados de pertenencia. |
| 6. | $G_{A'}(x) = 1 - G_A(x)$ | El grado de pertenencia al complemento de un conjunto es uno menos el grado de pertenencia al conjunto |

en donde A y B son dos conjuntos.

12.2.- Veracidad de un Enunciado

A partir de ahí, es claro que si se aplica la noción de grado de verdad a la veracidad de un enunciado, se tiene:

| | | |
|----|----------------------|--|
| 1. | $0 \leq G[p] \leq 1$ | El grado de veracidad de un enunciado toma valores entre 0 y 1 |
|----|----------------------|--|

| | | |
|----|---------------------------------------|---|
| 2. | $G[p \wedge q] = \min \{G[p], G[q]\}$ | El grado de veracidad de la conjunción de dos enunciados es el mínimo del grado de veracidad de los dos enunciados. |
| 3. | $G[p \vee q] = \max \{G[p], G[q]\}$ | El grado de veracidad de la disyunción de dos enunciados es el máximo del grado de veracidad de los dos enunciados. |
| 4. | $G[\neg p] = 1 - G[p]$ | El grado de veracidad de la negación de un enunciado es uno menos la veracidad del enunciado. |

en donde p y q son enunciados.

12.3.- Otras Formulaciones

Existen otras formulaciones de los conjuntos borrosos tales como la de Giles cuyos principios son los siguientes:

1. $0 \leq G_A(x) \leq 1$
2. $A = B \iff \forall x, G_A(x) = G_B(x)$
3. $A \subseteq B \iff \forall x, G_A(x) \leq G_B(x)$
4. $G_{A \cap B}(x) = \max \{0, G_A(x) + G_B(x) - 1\}$
5. $G_{A \cup B}(x) = \min \{1, G_A(x) + G_B(x)\}$
6. $G_{A'}(x) = 1 - G_A(x)$

Y la lógica correspondiente viene dada por:

1. $0 \leq G[p] \leq 1$
2. $G[p \wedge q] = \max \{0, G[p] + G[q] - 1\}$
3. $G[p \vee q] = \min \{1, G[p] + G[q]\}$
4. $G[\neg p] = 1 - G[p],$

12.4.- La Implicación y Doble Implicación.⁸⁶ Sus Formulaciones.

En cuanto a la implicación y doble implicación⁸⁶, hay varias formulaciones:

1.- Implicación Standard Strict.

Se obtiene considerando que la implicación lógica es el análogo a la inclusión de los conjuntos.

$$G[p \implies_s q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] \leq G[q] \\ 0, & \text{si } G[p] > G[q] \end{cases}$$

$$G[p \iff_s q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] = G[q] \\ 0, & \text{si } G[p] \neq G[q] \end{cases}$$

2.- Implicación de Gödel

$$G[p \implies_g q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] \leq G[q] \\ G[q], & \text{si } G[p] > G[q] \end{cases}$$

$$G[p \iff_g q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] = G[q] \\ \min\{G[p], G[q]\}, & \text{si } G[p] \neq G[q] \end{cases}$$

3.- Implicación de Goguen

$$G[p \implies q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] \leq G[q] \\ G[q]/G[p], & \text{si } G[p] > G[q] \end{cases}$$

$$G[p \iff q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] = G[q] \\ G[q]/G[p], & \text{si } G[p] > G[q] \\ G[p]/G[q], & \text{si } G[q] > G[p] \end{cases}$$

⁸⁶ La de doble implicación se obtienen a partir de: $(p \iff q) =_{\text{def}} (p \implies q) \wedge (q \implies p)$

4.-

$$G[p \implies q] = \begin{cases} 1, & \text{sí } G[p] = 0 \text{ ó } 1 - G[q] = 0 \\ \min\{1, G[q]/G[p], (1-G[p])/(1-G[q])\}, & \text{sí } G[p] > 0, 1 - G[q] > 0. \end{cases}$$

$$G[p \iff q] = \begin{cases} 1, & \text{sí } G[p] = G[q] \\ 0, & \text{si } G[p]=0, G[q] > 0 \text{ o } G[p]>0, G[q]=0 \\ 0, & \text{si } 1 - G[p]=0, 1 - G[q] > 0 \text{ o } 1 - G[p]>0, \\ & 1 - G[q]=0 \\ \min\{1, G[q]/G[p], G[p]/G[q], \\ & (1-G[p])/(1-G[q]), (1-G[q])/(1-G[p])\}, & \text{sí } G[p] > 0, G[q] > 0, 1 - G[p] > 0, \\ & 1 - G[q] > 0 \end{cases}$$

5.- Standard Sharp

$$G[p \implies q] = \begin{cases} 1, & \text{sí } G[p] < 1 \text{ ó } G[q] = 1 \\ 0, & \text{sí } G[p] = 1, G[q] < 1 \end{cases}$$

$$G[p \iff q] = \begin{cases} 1, & \text{sí } G[p] = G[q] = 1 \\ 0, & \text{sí } G[p] < 1 \text{ o } G[q] < 1 \end{cases}$$

6.-

$$G[p \implies^* q] = 1 - G[p] + G[p].G[q]$$

$$G[p \iff^* q] = \min\{1 - G[p] + G[p].G[q], 1 - G[q] + G[p].G[q]\}$$

7.- Implicación de Lee.

Se obtiene considerando que $(p \implies q) =_{\text{def}} \neg p \vee q$.

$$G[p \implies_c q] = \max\{1 - G[p], G[q]\}$$

$$G[p \iff_c q] = \min\{\max\{1 - G[p], G[q]\}, \max\{1 - G[q], G[p]\}\}$$

8.- Implicación de Lukaciewicz.

$$G[p \implies_1 q] = \min\{1, 1 - G[p] + G[q]\}$$

$$G[p \iff_1 q] = \min\{1, 1 - G[p] + G[q], 1 - G[q] + G[p]\}$$

9.-

$$G[p \implies q] = \max\{1 - G[p], \min\{G[p], G[q]\}\}$$

$$G[p \iff q] = \min\{\max\{1 - G[p], \min\{G[p], G[q]\}\}, \max\{1 - G[q], \min\{G[p], G[q]\}\}\}$$

10.-

$$\begin{aligned} G[p \implies_{\#} q] &= \max\{\min\{G[p], G[q]\}, \min\{1 - G[p], 1 - G[q]\}, \\ &\quad \min\{1 - G[p], G[q]\}\} \\ &= \min\{\max\{1 - G[p], G[q]\}, \max\{G[p], 1 - G[p]\}, \\ &\quad \max\{G[q], 1 - G[q]\}\} \end{aligned}$$

$$G[p \iff_{\#} q] = \min\{\max\{1 - G[p], G[q]\}, \max\{1 - G[q], G[p]\}, \max\{G[p], 1 - G[p]\}, \max\{G[q], 1 - G[q]\}\}$$

En general se tiene * es un operador de implicación difuso si se cumple, dado unas proposiciones difusas, las siguientes condiciones:

1) $G[p * q] \in [0, 1]$

2)
$$G[p * q] = \begin{cases} 1, & \text{si } G[p] = G[q] = 1 \text{ o } G[p] = 0 \\ 0, & \text{si } G[p] = 1, G[q] = 0 \end{cases}$$

3) Si $G[p] < G[q]$ entonces:

a) Si $G[p] < G[p']$ entonces $G[p * q] \leq G[p' * q]$

b) Si $G[q] < G[q']$ entonces $G[p * q] \geq G[p * q']$

En cuanto a sentencias con cuantificadores se tiene:

$$G[(x)Px] = \min_x \{G[Px]\}$$

y
$$G[(\exists x)Px] = \max_x \{G[Px]\}$$

12.5.- Aplicaciones⁸⁷

1.- Calidad de un sistema:

La calidad ("performance") de un sistema o de un componente viene dada por una medida entre 0 y 1.

Sea por ejemplo el sistema del ejemplo 1.2, y supongamos que la calidad de cualquier componente del sistema es independiente de la cualquier otro componente, y representemos por $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ y c_3 , la calidad de los componentes $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ y C_3 , respectivamente, entonces la calidad total del sistema S viene dada por:

$$G(S) = \min \{G(A), \max \{G(B), G(C)\} \}$$

y

$$G(A) = \max \{G(A_1), G(A_2)\} = \max \{a_1, a_2\}$$

$$G(B) = \min \{G(B_1), G(B_2)\} = \min \{b_1, b_2\}$$

$$\begin{aligned} G(C) &= \max \{G(C_1), G(C_2 \wedge C_3)\} \\ &= \max \{G(C_1), \min \{G(C_2), G(C_3)\} \} \\ &= \max \{c_1, \min \{c_2, c_3\} \} \end{aligned}$$

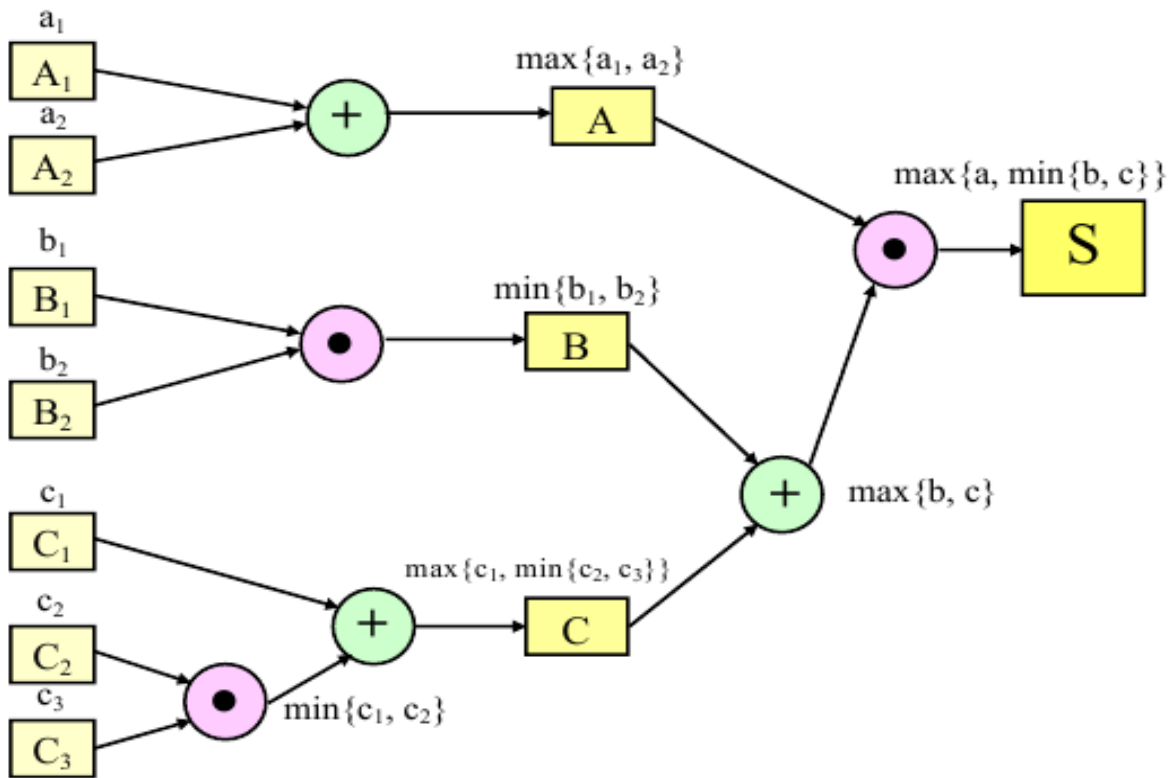
Así se tiene que:

$$\begin{aligned} G(S) &= \min \{ \max \{a_1, a_2\}, \max \{ \min \{b_1, b_2\}, \max \{c_1, \min \{c_2, c_3\} \} \} \} \\ &= \min \{ \max \{a_1, a_2\}, \max \{ \min \{b_1, b_2\}, c_1, \min \{c_2, c_3\} \} \} \end{aligned}$$

Ver figura 12-8.

⁸⁷ Otras aplicaciones se dan en la parte IV de este libro

Figura 12.8.
Calidad del sistema



ANEXOS

A.- LÓGICA Y REFERENTES⁸⁸

Henri Thonon: CEAP-FACES-UCV

En el presente ensayo me propongo a desmontar de que “es posible hablar de la verdad de una sentencia sea ésta del carácter que sea – predicativa, modal o normativa – sin tomar en cuenta el referente o marco referencial”.

Si bien siempre ha habido controversias sobre los enunciados normativos, veremos que lo mismo se da en las demás lógicas. De hecho, en el caso de la lógica normativa Carlos Alchourrón dice lo siguiente:

En muchos contextos la frase “p está permitido” se usa no con la intención de dictar una norma que permita que p, sino tan sólo con la intención de informar de que algún otro agente ha dictado una norma tal, es decir, que un agente determinado e identificado ha permitido que p. En muchas circunstancias, como ocurre a menudo entre juristas, decir que p está permitido es tan solo afirmar que una proposición normativa es verdadera. En tales situaciones “p está permitido” significa exactamente lo mismo **que** “NxPp”. Ciertamente, sería más claro y más informativo decir “x ha permitido p”, pero a menudo se omite la referencia a x, porque en el contexto es demasiado obvio quien es x. Por lo tanto, se dice simplemente “p está permitido”.⁸⁹

En otras palabras no se puede hacer análisis lógico sin tener en cuenta el marco referencial en el cual está inmerso el discurso. Esto es, ninguna de las siguientes expresiones: “algún x es P” – $(\exists x)Px$ –, “todo x es P” – $(\forall x)Px$ –, “ningún x es P” – $(\forall x)\neg Px$ –, de la lógica de predicados; “es obligatorio que x sea P” – $[]Px$ –, “está permitido que x sea P” – $\langle \rangle Px$ –, “está prohibido que x sea P” – $[/]Px$ –, de la lógica normativa; “es necesario que x sea P” – $\mathbf{N}Px$ –, “es posible que x sea P” – $\mathbf{P}Px$ –, “es imposible que x sea P” – $\mathbf{I}Px$ –, “es contingente que x sea P” – $\mathbf{C}Px$ –, “es eventual que x sea P” – $\mathbf{E}Px$ –, de la lógica modal; no tienen un valor veritativo (verdadero o falso) si no están definidos sus respectivos marcos referenciales o contextos.

⁸⁸ La idea de este ensayo se me reforzó cuando vi un capítulo de la serie de televisión **scorpion** en la cual uno de los protagonistas es un niño genio y en clase el maestro enseña en el pizarrón una serie de números: 212 124 336 117 564 y pregunta cuál de esto número no es divisible entre 4. El niño le contesta al maestro que todos son divisibles entre 4. Replica el maestro que el 117 no es divisible entre 4. Contesta el niño que 117 entre 4 es de hecho 29,25 y que todos los números son divisibles entre 4 con una representación de decimales y que pregunta fue mal hecha ya que hubiera tenido que especificar que su referente eran los números enteros.

⁸⁹ Alchourrón, Carlos E.: *Lógica de Normas y Lógica de Proposiciones Normativas*. En: Alchourrón, Carlos y Bulygin, Eugenio: *Análisis lógico y Derecho*. Centro de Estudios Constitucionales. Madrid. 1991. Pág. 31.

A.1.- Lógica de Predicados

De esta manera en la lógica de predicados los enunciados quedarían de la siguiente manera:

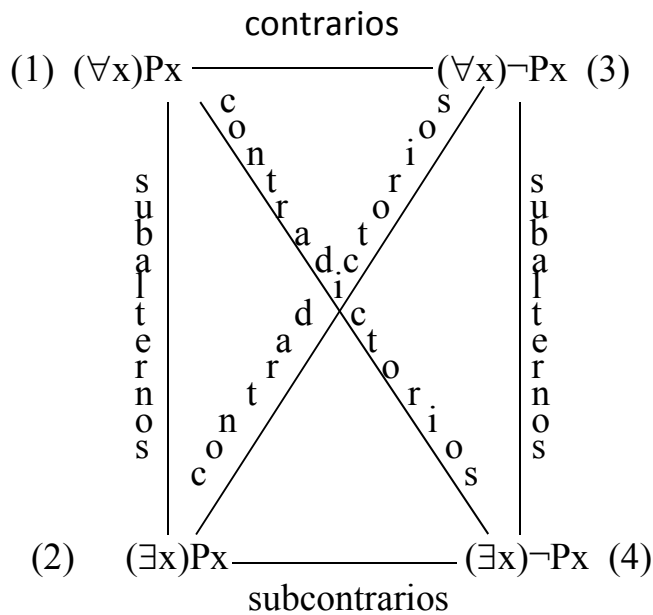
- (1) $(\forall x)(Mx \implies Px)$ todo elemento de M es P
- (2) $(\exists x)(Mx \wedge Px)$ algún elemento de M es P
- (3) $(\forall x)(Mx \implies \neg Px)$ ningún elemento de M es P
- (4) $(\exists x)(Mx \wedge \neg Px)$ algún elemento de M que no es P.

En donde M es el marco de referencia y las expresiones (1) a (4) se abreviaran de la siguiente manera:

- (1') $(\forall x)_M Px$ todo elemento de M es P
- (2') $(\exists x)_M Px$ algún elemento de M es P
- (3') $(\forall x)_M \neg Px$ ningún elemento de M es P
- (4') $(\exists x)_M \neg Px$ algún elemento de M que no es P.

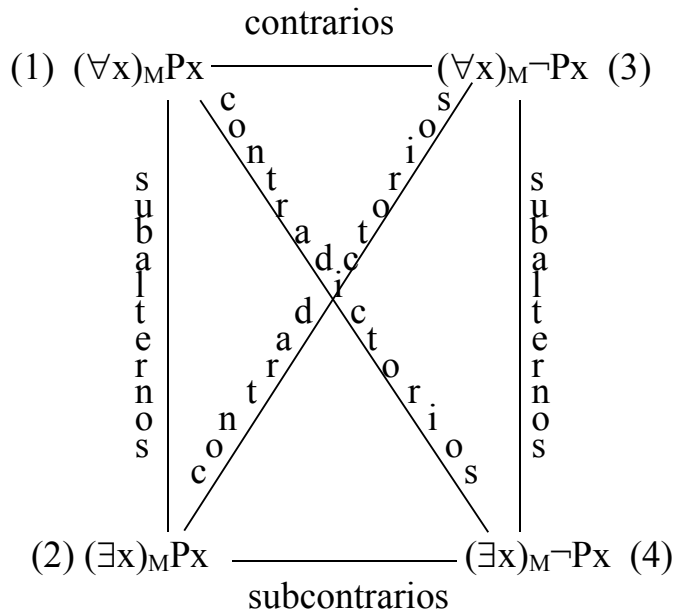
Este marco de referencia puede ser una realidad (material) bien definida – tanto espacial como temporalmente -, una teoría o una fantasía, o una combinación de las mismas. Lo importante es que no sea un conjunto vacío.

Así, el siguiente cuadro:



Es correcto solamente si las expresiones se refieren al mismo referente no vacío y lo correcto sería expresarlo de la siguiente manera:

Sea M un referente no vacío entonces:



A.2.- Lógica Modal

Mientras que en la lógica modal, en donde el marco referencial primario es el de los eventos, tendremos las siguientes expresiones:

- (5) $\mathbf{N}_{Rx} = (\forall x)_E Rx$ (Todos los eventos son R)
- (6) $\mathbf{P}_{Rx} = (\exists x)_E Rx$ (Un evento es R)
- (7) $\mathbf{I}_{Rx} = (\forall x)_E \neg Rx$ (Ningún evento es R)
- (8) $\mathbf{C}_{Rx} = (\exists x)_E \neg Rx$ (Hay eventos diferentes de R)
- (9) $\mathbf{E}_{Rx} = (\exists x)_E Rx \wedge (\exists x)_E \neg Rx$ (Los eventos pueden ser tanto R, como otros)

Pero el marco referencial es más completo. O mejor dicho las ocurrencias dependen de una serie de circunstancias, tales como cadenas causales, circunstancias concomitantes, propiedades de entes interactuantes, etc. De esta manera se debería reescribir las formas 5 a 9 de la siguiente manera:

- (5') $\mathbf{N}_e R_x = (\forall x)_E(\mathbf{C} \implies R_x)$ (Para las circunstancias \mathbf{C} , todos los eventos son R)
- (6') $\mathbf{P}_e R_x = (\exists x)_E(\mathbf{C} \wedge R_x)$ (Para las circunstancias \mathbf{C} , algún evento es R)
- (7') $\mathbf{I}_e R_x = (\forall x)_E(\mathbf{C} \implies \neg R_x)$ (Para las circunstancias \mathbf{C} , ningún evento es R)
- (8') $\mathbf{C}_e R_x = (\exists x)_E(\mathbf{C} \wedge \neg R_x)$ (Para las circunstancias \mathbf{C} , hay eventos diferentes de R)
- (9') $\mathbf{E}_e R_x = (\exists x)_E(\mathbf{C} \wedge R_x) \ \& \ (\exists x)_E(\mathbf{C} \wedge \neg R_x)$ (Para las circunstancias \mathbf{C} , Los eventos pueden ser tanto R como otros)

Vale aquí el siguiente comentario: Mario Bunge, en varias de sus obras⁹⁰, se opone a la lógica modal. Pero por otro lado se tiene que un autor como David J. Chalmers abusa de la misma al considerar que todo lo concebible es posible⁹¹. Esto último es incorrecto, ya que lo concebible tiene como referente el mundo de la fantasía, y por lo tanto no necesariamente es posible en la realidad o en el mundo real.

A.3.- Lógica Normativa

En el caso de la lógica normativa, cuyo referente primario es el de las acciones, se tienen las siguientes expresiones:

- (10) $\mathbf{[]}P_x = (\forall x)_A P_x$ (Para toda acción, ésta es P)
- (11) $\mathbf{<>}P_x = (\exists x)_A P_x$ (Alguna acción es P)
- (12) $\mathbf{[/]}P_x = (\forall x)_A \neg P_x$ (Ninguna acción es P)
- (13) $\mathbf{</>}P_x = (\exists x)_A \neg P_x$ (Hay una acción que no es P)

Pero una norma tiene un origen o pertenece a cierta sociedad, institución o doctrina, tiene circunstancias en las cuales se aplican, y puede tener un objetivo. De esta manera si denominamos $\mathcal{E} = \langle S, C, O \rangle$, en donde S es el sistema en donde está vigente la norma, C las circunstancias en las cuales se aplican y O el objetivo de la misma, se tiene entonces:

⁹⁰ Entre las obras se pueden mencionar las siguientes: *Crisis y Reconstrucción de la Filosofía*, págs. 269-270. Editorial Gedisa. Barcelona. 2002; *Emergencia y Convergencia. Novedad cualitativa y unidad del conocimiento*, págs. 267-275. Editorial Gedisa. Barcelona. 2004; *A la Caza de la Realidad. La controversia sobre el realismo*, págs. 290-297, 312-328. Editorial Gedisa. Barcelona. 2007

⁹¹ Chalmers, David J. *La Mente Consciente. En busca de una teoría fundamental*. Gedisa, Barcelona, 1999.

(10') $[]_{\mathcal{E}} P_x = (\dots x)_A (\mathcal{E} \implies P_x)$ (Dado \mathcal{E} toda acción es P)

(11') $\langle \rangle_{\mathcal{E}} P_x = (\exists x)_A (\mathcal{E} \wedge P_x)$ (Dado \mathcal{E} alguna acción es P)

(12') $[/]_{\mathcal{E}} P_x = (\forall x)_A (\mathcal{E} \implies \neg P_x)$ (Dado \mathcal{E} ninguna acción es P)

(13') $\langle / \rangle_{\mathcal{E}} P_x = (\exists x)_A (\mathcal{E} \wedge \neg P_x)$ (Dado \mathcal{E} hay una acción que no es P)

A.4.- Referentes y Sentencias sin sentido

Ya se estableció la necesidad de marcos referenciales para que una sentencia tenga valor veritativo de verdad o falso. Ahora bien si este marco referencial es vacío, se tiene que, realmente, la sentencia carece de sentido o dicho de otra manera cualquier sentencia formulada en base a un referente vacío es una sentencia sin sentido, una sentencia ni falsa ni verdadera. Esto implica retomar una lógica trivalente en la cual una sentencia toma uno de los siguientes tres valores: verdadero, falso o sin sentido.

A.5.- Referentes y Falacias

Un tipo de falacias, con relación a los referentes, es dado que algo es verdadero en el referente M_1 extrapolarlo al referente M_2 , o en general a cualquier referente M_i . La única manera en que se puede extrapolar propiedades de un referente a otro es mediante la existencia de un isomorfismo, de lo contrario nada (ni nadie) puede garantizar la veracidad de esta extrapolación de manera *a priori*.

A.6.- El Referente Universal

¿Puede un referente ser el Universo?

Pienso que no. Aun una teoría como la Teoría General de Sistemas, cuando uno de sus fundamentos ontológicos es⁹²:

PRINCIPIO 3: No existen entes aislados, esto es, todo elemento está relacionado con, al menos, un otro elemento.

⁹² Sobre los postulados ontológicos de la teoría de sistemas ver: *CONCEPTOS, TEORÍAS Y MODELOS. Un Enfoque Sistémico*. Trabajo de Ascenso presentado para la categoría de asociado. Disponible en www.hthonon.blogspot.com

Explicación: De hecho, de existir un elemento aislado sería imposible conocer de su existencia, ya que al no interactuar con nada, sería imposible lograr el conocimiento de su existencia, tanto por medios directos como por medios indirectos.

se refiere al Universo Cognoscible.

En otras palabras el marco referencial más extenso posible, sin caer en especulaciones, es el *Universo Cognoscible* y quizás, más precisamente, el *Universo Conocido Hasta Ahora*.

Es de notar que en la lógica clásica, la basada en silogismo, los referentes son los términos medio y menor (Ver más adelante **Inclusión de un referente en otro**). Esto es, en los silogismos siempre está presente el referente, aunque el mismo puede estar incompleto.

A.7.- Intersección de Referentes

Veamos qué es lo que pasa cuando la intersección de referentes no es vacía, con los valores veritativos de sentencias en dichas intersecciones.

a) Lógica de predicados

Sean M_i y M_j dos referentes tales que $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, entonces se tendrá:

1) Si todos los elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca⁹³ P y todos los elementos de M_j también tienen la propiedad intrínseca P , entonces todos los elementos de la intersección también tendrán dicha propiedad P .

$$(\forall x)_{M_i} Px \wedge (\forall x)_{M_j} Px \implies (\forall x)_{M_i \cap M_j} Px$$

2) Si todos los elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca P y algunos elementos de M_j también tienen la propiedad intrínseca P , entonces todos los elementos de la intersección también tienen dicha propiedad P .

$$(\forall x)_{M_i} Px \wedge (\exists x)_{M_j} Px \implies (\forall x)_{M_i \cap M_j} Px$$

⁹³ Se entiende por propiedad intrínseca a aquella propiedad que tiene un objeto por sí mismo independiente de la estructura del referente al cuál pertenecen.

3) Si algunos elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca P y algunos elementos de M_j también tienen la propiedad intrínseca P , entonces no se puede afirmar nada sobre los elementos de la intersección.

$$(\exists x)_{M_i}Px \wedge (\exists x)_{M_j}Px \text{ entonces } (\exists x)_{M_i \cap M_j}Px \text{ es indeterminado}$$

Mientras que si algunos elementos (o todos los elementos) de la intersección tienen la propiedad intrínseca P , entonces también tendrán dicha propiedad algunos elementos tanto de M_i como de M_j .

$$(\exists x)_{M_i \cap M_j}Px \implies (\exists x)_{M_i}Px \wedge (\exists x)_{M_j}Px$$

y

$$(\forall x)_{M_i \cap M_j}Px \implies (\forall x)_{M_i}Px \wedge (\forall x)_{M_j}Px$$

4) Si todos los elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca P y ninguno de los elementos de M_j tienen la propiedad P , entonces se tiene una contradicción o un *sin sentido*. En otras palabras, esto no puede pasar si la intersección es no vacía.

$$\neg[(\forall x)_{M_i}Px \wedge (\forall x)_{M_j}\neg Px]$$

5) Mientras que, si algunos elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca P y ninguno de los elementos de M_j tienen la propiedad P , entonces se tiene que ningún elemento de la intersección tiene la propiedad P .

$$(\exists x)_{M_i}Px \wedge (\forall x)_{M_j}\neg Px \implies (\forall x)_{M_i \cap M_j}\neg Px$$

En el caso de las lógicas modal y normativa se tienen principios análogos con la intersección de circunstancias como se verá a continuación.

b) Lógica Modal.

Sean \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_j dos circunstancias tales que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$, entonces se tendrá:

1) Si bajo las circunstancias \mathcal{C}_i necesariamente tienen que ocurrir R y bajo las circunstancias \mathcal{C}_j también tiene que ocurrir R, entonces en la intersección de las mismas también tendrá que ocurrir R, siempre y cuando R sea el resultado de propiedades intrínsecas.

$$\mathbf{N}e_1Rx \wedge \mathbf{N}e_2Rx \implies \mathbf{N}e_1 \cap e_2Rx$$

2) Si bajo las circunstancias \mathcal{C}_i necesariamente tiene que ocurrir R y bajo las circunstancias \mathcal{C}_j es posible que ocurra R, entonces en la intersección de las mismas tendrá que ocurrir R, siempre y cuando R sea el resultado de propiedades intrínsecas.

$$\mathbf{N}e_1Rx \wedge \mathbf{P}e_2Rx \implies \mathbf{N}e_1 \cap e_2Rx$$

3) Si bajo las circunstancias \mathcal{C}_i es posible que ocurra R y bajo las circunstancias \mathcal{C}_j es posible que ocurra R, entonces en la intersección de las mismas sobre la ocurrencia de R no se puede afirmar nada.

$$\mathbf{P}e_1Rx \wedge \mathbf{P}e_2Rx \text{ entonces } \mathbf{P}e_1 \cap e_2Rx \text{ es indeterminado.}$$

Mientras que si en la intersección de las circunstancias es posible (o necesaria) la ocurrencia de R, entonces también tanto bajo las circunstancias \mathcal{C}_i como \mathcal{C}_j es posible la ocurrencia de R, siempre y cuando R sea el resultado de propiedades intrínsecas.

$$\mathbf{P}e_1 \cap e_2Rx \implies \mathbf{P}e_1Rx \wedge \mathbf{P}e_2Rx$$

y

$$\mathbf{N}e_1 \cap e_2Rx \implies \mathbf{P}e_1Rx \wedge \mathbf{P}e_2Rx$$

4) Si bajo las circunstancias \mathcal{C}_i necesariamente tiene que ocurrir R y bajo las circunstancias \mathcal{C}_j es imposible que ocurra R, R es el resultado de propiedades intrínsecas, entonces en la intersección de las mismas tendrá una contradicción, lo cual implica revisar las teorías subyacentes.

$$\neg[\mathbf{N}e_1Rx \wedge \mathbf{I}e_2Rx]$$

5) Mientras que, si bajo las circunstancias \mathbf{C}_i es posible que ocurra R y bajo las circunstancias \mathbf{C}_j es imposible que ocurra R, entonces en la intersección es imposible que ocurra R, siempre y cuando R sea el resultado de propiedades intrínsecas.

$$\mathbf{P}e_1Rx \wedge \mathbf{I}e_2Rx \implies \mathbf{I}e_{1 \cap e_2}Rx$$

c) Lógica Normativa.

$$\text{Sean } \mathcal{E}_i = \langle S_i, C_i, O_i \rangle \text{ y } \mathcal{E}_j = \langle S_j, C_j, O_j \rangle$$

En donde:

S_i, S_j son los sistemas en donde están vigentes las normas,

C_i, C_j las circunstancias en las cuales se aplican y

O_i, O_j los objetivos de las mismas.

Y $S_i \cap S_j \neq \emptyset, C_i \cap C_j \neq \emptyset$ y $O_i \cap O_j \neq \emptyset$, lo cual se expresará con $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j \neq \emptyset$, entonces se tendrá:

1) Si dado \mathcal{E}_i obligatoriamente se debe hacer P y dado \mathcal{E}_j obligatoriamente, también, se debe hacer P, entonces en la intersección de las mismas también se debe obligatoriamente hacer P, siempre y cuando P provenga de propiedades intrínsecas.

$$[\]_{\mathcal{E}_i}Px \wedge [\]_{\mathcal{E}_j}Px \implies [\]_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j}Px$$

2) Si dado \mathcal{E}_i obligatoriamente se debe hacer P y dado \mathcal{E}_j está permitido hacer P, entonces en la intersección de las mismas se debe obligatoriamente hacer P, siempre y cuando P provenga de propiedades intrínsecas.

$$[\]_{\mathcal{E}_i}Px \wedge \langle \rangle_{\mathcal{E}_j}Px \implies [\]_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j}Px$$

3) Si dado \mathcal{E}_i está permitido hacer P y dado \mathcal{E}_j , también, está permitido hacer P, entonces en la intersección de los mismos no se puede sacar ninguna conclusión a priori P.

$$\langle \rangle_{\mathcal{E}_i} P_X \wedge \langle \rangle_{\mathcal{E}_j} P_X \text{ entonces } \langle \rangle_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j} P_X \text{ no es concluyente.}$$

Mientras que si bajo intersección de \mathcal{E}_i y \mathcal{E}_j está permitido (o es obligatorio) hacer P, entonces también tanto bajo \mathcal{E}_i como \mathcal{E}_j está permitido hacer P, siempre y cuando P provenga de propiedades intrínsecas.

$$\langle \rangle_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j} P_X \implies \langle \rangle_{\mathcal{E}_i} P_X \wedge \langle \rangle_{\mathcal{E}_j} P_X$$

y

$$[\]_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j} P_X \implies \langle \rangle_{\mathcal{E}_i} P_X \wedge \langle \rangle_{\mathcal{E}_j} P_X$$

4) Si dado \mathcal{E}_i obligatoriamente se debe hacer P y dado \mathcal{E}_j está prohibido hacer P y P proviene de propiedades intrínsecas, entonces en la intersección de los mismos se tendrá una contradicción, lo cual implica revisar las normas.

$$\neg [[\]_{\mathcal{E}_i} P_X \wedge [/]_{\mathcal{E}_j} P_X]$$

5) Mientras que, si dado \mathcal{E}_i está permitido hacer P y dado \mathcal{E}_j está prohibido hacer P, entonces en la intersección de los mismos se está prohibido hacer P, siempre y cuando P provenga de propiedades intrínsecas.

$$\langle \rangle_{\mathcal{E}_i} P_X \wedge [/]_{\mathcal{E}_j} P_X \implies [/]_{\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j} P_X$$

No está demás observar que las reglas anteriores se pueden considerar cómo las más importantes, pero, a partir de ellas se pueden deducir las demás.

A.8.- Inclusión de un referente en otro.

Diremos que un referente M_i está incluido en otro M_j si el referente M_i es un caso particular del referente M_j y lo denotaremos como: $M_i \subset M_j$.

En este caso tendremos, entre otras, las siguientes reglas para los valores veritativos de los enunciados en el caso de la lógica de predicados:

1) Si todos los elementos de M_j tienen la propiedad intrínseca P entonces todos los elementos de M_i también tienen la propiedad P .

$$(\forall x)_{M_j}Px \implies (\forall x)_{M_i}Px$$

2) Mientras que, si todos o algunos elementos de M_i tienen la propiedad intrínseca P entonces algunos elementos de M_j también tienen la propiedad P .

$$(\forall x)_{M_i}Px \vee (\exists x)_{M_i}Px \implies (\exists x)_{M_j}Px$$

3) Si ninguno de los elementos de M_j tienen la propiedad intrínseca P entonces tampoco los elementos de M_i tienen dicha propiedad P .

$$(\forall x)_{M_j}\neg Px \implies (\forall x)_{M_i}\neg Px$$

A reglas parecidas se puede llegar para las otras dos lógicas. Así, en la lógica modal, lo que es necesario (o imposible) en el referente más amplio también lo es en el referente más restringido y lo que es posible o necesario en el referente restringido es posible en el referente más amplio. Mientras que en la lógica normativa lo que es obligatoria (o está prohibido) en un contexto amplio lo es también en los contextos especiales.

A.9.- Unión de Referentes

Veamos qué es lo que pasa en la unión de referentes, con los valores veritativos de sentencias en dichas uniones.

En el caso de la lógica de predicados los únicos predicados que tendrán validez universal en la unión son los predicados que también los son en cada uno de los referentes:

$$(\forall x)_{M_i}Px \wedge (\forall x)_{M_j}Px \iff (\forall x)_{M_i \cup M_j}Px$$

De lo contrario, lo mejor que se puede tener en la unión son propiedades existenciales.

De manera similar, en la lógica modal, los únicos acontecimientos necesarios (o imposibles) son los que son necesarios (o imposibles) en ambos referentes; en la lógica normativa las únicas obligaciones (o prohibiciones) son las que lo son en ambos referentes.

De esta manera, no es recomendable realizar uniones de referentes a menos que se tenga o pueda obtener con ellas algunos resultados universales (y que estos resultados universales sean realmente interesantes).

A.10.- Aclaratoria Final.

Las reglas anteriores son ciertas siempre y cuando se refieran a propiedades intrínsecas, esto es propiedades independientes de las estructuras. Esto es si la intersección, inclusión o unión de referentes implican un cambio de estructuras y las propiedades son dependientes de las estructuras, dichas reglas no son necesariamente válidas. Así por ejemplo, si se tienen el intervalo abierto sobre la recta real $A = (1, 4)$ y el intervalo cerrado $B = [2, 3]$ – incluido en el anterior –, 2 y 3 son los mínimos y máximos del intervalo B, en el intervalo A no existen valores mínimos y máximos, ya que estas propiedades provienen de la estructura de los intervalos cerrados.

Conclusión.

No se puede analizar la verdad, falsedad o el *sin sentido* de un enunciado, si no está claro el referente respecto al cual este enunciado está desarrollado. Además, lo que puede ser verdad o falso en un referente X, no necesariamente tiene el mismo valor veritativo en un referente diferente Y.

Lista de Símbolos

| Símbolos | Significados |
|---------------|--|
| \neg | Operador Negación |
| $(\exists x)$ | Operador Existencial |
| $(\forall x)$ | Operador Universal |
| $[]$ | Operador de Obligación |
| \diamond | Operador de permisividad |
| $[/]$ | Operador de prohibición |
| N | Operador de Necesidad |
| P | Operador de Posibilidad |
| I | Operador de Imposibilidad |
| C | Operador de Contingencia |
| E | Operador de Eventualidad |
| \wedge | Operador de la Conjunción (y) |
| \Rightarrow | Operador de la Implicación (si ... entonces) |
| e | Circunstancias |
| \cap | Operador Intersección |
| \subset | Inclusión |
| \vee | Operador de la disyunción (o) |
| \cup | Operador Unión |

B.- LA VERDAD

B.1.- Conceptos de Verdad

Para tratar el concepto de verdad parto del principio de que es un concepto primitivo, esto es que no es realmente definible mediante otros conceptos aunque hay definiciones de verdad.

De esta manera en el DRAE⁹⁴ tenemos:

verdad.

Del lat. veritas, -atis.

1. f. Conformidad de las cosas con el concepto que de ellas forma la mente.
2. Conformidad de lo que se dice con lo que se siente o se piensa.
3. Propiedad que tiene una cosa de mantenerse siempre la misma sin mutación alguna.
4. Juicio o proposición que no se puede negar racionalmente.
5. Cualidad de veraz. Hombre de VERDAD.
6. Expresión clara, sin rebozo ni lisonja, con que a uno se le corrige o reprende. Ú. principalmente en pl. Cayetano le dijo dos VERDADES.
7. realidad, existencia real de una cosa.

Mientras que Abbagnano⁹⁵ define por verdad: “La validez o la eficacia de los procedimientos cognoscitivos.”

Y afirma que “Se pueden distinguir cinco conceptos fundamentales de la verdad:

- 1) La verdad como correspondencia o relación;
- 2) La verdad como revelación;
- 3) La verdad como conformidad con un regla
- 4) La verdad como coherencia,
- 5) La verdad como utilidad”

De estos cinco conceptos anteriores, los que, aparentemente, tienen realmente importancia para la ciencia son el primero y el cuarto, si consideramos la existencia de tipos de ciencias: las formales, la lógica y la matemática; y las facticas (Ver Mario Bunge⁹⁶).

⁹⁴ Diccionario de la Real Academia Española.

⁹⁵ **Nicola Abbagnano:** *Diccionario de Filosofía.* Verdad. Fondo de Cultura Económica. México. 1985.

⁹⁶ **Mario Bunge:** *Racionalidad y realismo.* Capítulo 2, Verdades. Alianza Editorial. Madrid. 1985

Mario Bunge: *Buscar la Filosofía en las Ciencias Sociales.:* Capítulo 3, Sección 5, Verdad. Siglo Veintiuno Editores. México. 1999.

Aunque Karl-Otto Apel⁹⁷ hace la siguiente clasificación de las teorías de la verdad:

1. Teorías clásicas de la correspondencia o adecuación, en sentido aristotélico.
2. Teoría de la evidencia, en el sentido de Descartes, Brentano o Husserl.
3. Teoría de la coherencia en el sentido de Hegel, del neohegelianismo o en el de Neurath o Rescher.
4. Teorías pragmáticas de la verdad en el sentido de James, Dewey o Rorty.
5. Teoría semántica de la correspondencia en el sentido de Tarski.
6. Formas postarskianas de la teoría realista de la correspondencia, por ejemplo Austin, Sellars o Popper.
7. Formas constructivistas de la teoría del consenso.
8. Formas pragmático-trascendentales de la teoría del consenso de procedencia peirciana.

De esta manera tenemos que para Bertrand Russell⁹⁸ hay tres requisitos que una teoría de la verdad debe satisfacer:

- 1) Debe admitir su opuesto: la falsedad
- 2) La verdad y falsedad son propiedades de las creencias y de las afirmaciones.
- 3) La verdad y falsedad depende siempre de algo que es exterior a la creencia misma. Son propiedades que dependen de la relación de las creencias con otras cosas, no de ciertas cualidades internas de las creencias.

Pero este texto de B.R. abre otra polémica, ¿quienes son verdaderos o falsos: las creencias o los enunciados? De hecho B.R. pareciera darle más importancia a las creencias que a los enunciados:

“los espíritus no *crean* la verdad ni la falsedad. Crean las creencias, pero una vez creadas éstas, el espíritu no puede hacerlas verdaderas o falsas, salvo el caso especial en que conciernen a cosas futuras que están en el poder de la persona que cree, como tomar el tren. Lo que hace verdadera una creencia es un *hecho*, y este hecho (salvo en casos excepcionales) no comprende en modo alguno el espíritu de la persona que tiene la creencia.”

Mientras que Karl Popper⁹⁹ se refiere a enunciados:

“Un enunciado es, pues, verdadero cuando su sentido es verdadero, es decir, cuando tanto él como los enunciados que tienen el mismo sentido coinciden con los hechos.”

De hecho, esto conlleva a otra controversia en la relación creencia-enunciado:

⁹⁷ **Karl-Otto Apel:** Teoría de la verdad y ética del discurso. Ediciones Paidós Ibérica. Barcelona. 1995.

⁹⁸ **Bertrand Russell:** *Los Problemas de la filosofía*. Capítulos: 12, Verdad y Falsedad. Editorial Labor. Barcelona. 1975

⁹⁹ **Karl R. Popper:** *Los dos problemas fundamentales de la Epistemología*. Págs. 27-32.. Editorial Tecnos. Madrid. 1998

¿Es todo enunciado la expresión de una creencia?

¿Es toda creencia expresable en un enunciado?

Mi posición es que los enunciados, aunque en la mayoría de los casos son expresiones de unas creencias, pueden existir sin las creencias. Y son ellos los que pueden ser verdaderos o falsos.

Pero ¿cuáles enunciados son factibles de ser verdaderos o falsos?:

Quizás es más fácil decir cuales no son factibles de ser verdaderos o falsos:

- Los enunciados tautológicos que siempre son verdaderos.
- Las contradicciones que siempre son falsas.
- Los enunciados sobre entes o hechos inexistentes, ni se pueden probar, ni refutar.
- La definiciones, estas son útiles o no, aceptadas o no.

De hecho aunque las definiciones aunque no sean verdaderas o falsas, los enunciados sobre estas, tales como la equivalencia de dos definiciones, si lo son.

B.2.- Comprobación y refutación

Así, para B.R. la coherencia no da el *sentido* de verdad, aunque con frecuencia es una *prueba* de verdad cuando ya es conocida cierta suma de verdad. De esta manera *la correspondencia con un hecho* constituye la naturaleza de la verdad.

“la creencia es *verdadera* cuando *corresponde* a un determinado complejo que le es asociado, y *falsa* en el caso contrario.”

Mario Bunge, al considerar dos tipos de verdades: las formales (o de razón) y las fácticas (o de hecho), y considera como verdades formales la verdad lógica y la verdad por ejemplificación (satisfacción en un modelo), y son aquellas que se pueden establecer con la sola ayuda de la razón.

Mientras que la verdad factual lo es respecto a hechos. Caracteriza dos tipos de indicadores de verdad: empírico y conceptual. En el conceptual a su vez distingue el de consistencia interna y externa. Mientras que el empírico se establece de acuerdo a la correspondencia con la realidad (o con los hechos), de ahí se plantea la necesidad de una teoría de la correspondencia.

Mientras que Karl R. Popper considera

“la demostración o fundamentación de un enunciado es una prueba de su verdad, pero no al contrario, ya que un enunciado puede coincidir con los hechos (es decir ser verdadero) sin que sea demostrable o fundamentable.”

B.3.- Verdad y ciencia.

Se puede considerar que uno de los objetivos de la Ciencia es la búsqueda de la Verdad, pero para que los enunciados tengan validez científica tienen que tener una serie de características:

- Sean comprobables o refutables. Esto no quiere decir que necesariamente cada uno de los axiomas de una teoría sea comprobable o refutable directamente, sino que las consecuencias lógicas de los mismos si lo sea.
- Las verdades científicas son independientes del observador. Esto es todo el mundo las puede corroborar, no dependen de actos de fe u otras cosas parecidas.
- Las verdades científicas corresponden a un nivel de organización y/o a un ámbito dado.

B.4.- Verdad Probable o Verdad de una probabilidad.

Una discusión en boga hoy, fundamentado en las lógicas divergentes, es el concepto de verdad probable.

Aunque el problema parece ser a veces más semántico, que epistemológico, no es de dejar de lado.

Tomemos una sentencia A relativa a un hecho B.

Si el hecho B, es del presente o de un pasado corroborable, se podrá inmediatamente asentar la verdad o falsedad de A, mientras que si es de un hecho futuro, tenemos dos caminos:

- 1) Esperar el futuro, lo cual no siempre es posible y/o conveniente.

- 2) Analizar los supuesto y las relaciones causales que llevaron a la realización de esta sentencia, y de allí a firmar su verdad o falsedad, o cambiarla por una nueva sentencia A' en términos de probabilidades.

Esto es lo que es verdadero o no, son las sentencias definidas en forma de probabilidad. Y generalmente no es la verdad que es probable. O sea:

Se debe decir “la probabilidad de X es p es verdadero (o falso)”, y no la “X es verdadero (o falso) con probabilidad p”, o se considera la segunda forma como un sinónimo de la primera.

Pero cuando estamos comprobando un enunciado con un hecho y esta comprobación ha sido exitosa n veces la probabilidad de nuevo éxito es de $n/(n+1)$. Por esto es más fructuosa lo intentos de falsación, ya que si las pruebas de falsación resultan negativas, entonces se puede considerar la teoría como correcta.

B.5.- Verdades aproximadas

En los años setenta se pusieron de moda la construcción de las lógicas borrosas de valores intermedios basada en la teoría de los conjuntos borrosos (fuzzy sets) de Zadeck. De hecho han tenido resultados muy buenos en los sistemas de control. Pero no se ha visto todavía su impacto en las Ciencias Sociales y Humanas, aunque algunos autores afirman que esta es la lógica ideal para las mismas, en las cuales existe mucha imprecisión en el uso de indicadores cualitativos.

C.- REFLEXIONES SOBRE ENUNCIADOS INCOMPATIBLES.

Se dice que dos enunciados son incompatibles entre y se representa por $p|q$ cuando es falso que ambos (p y q) son verdaderos, y es equivalente a $\neg p \vee \neg q$ o de manera más comprensible por $p \implies \neg q$

La tabla de verdad de la incompatibilidad viene dado por:

| p | q | $p q$ |
|---|---|-------|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

Pero si dos enunciados son incompatibles y los dos son falsos, lo que es verdad es afirmar que son incompatibles, pero su disyunción (tanto la inclusiva como la exclusiva) de ellos es falsa.

De esta manera si un enunciado es incompatible con otro, si el primero es verdadero el segundo es falso, pero si el primero es falso no se puede afirmar nada respecto a la veracidad del segundo a menos que el segundo sea una negación del primero.

Veamos el siguiente ejemplo:

Pedro y Juan están discutiendo de qué color es la fachada de la casa de Ramón. Pedro afirma que es Verde, mientras que Juan afirma que es Azul. Después de estar un buen rato en esta discusión, deciden pasar por la casa de Ramón para ver quien tiene la razón. Pero ¡oh, sorpresa! Los dos estaban equivocados ya que la fachada de la casa de Ramón es amarilla.

Como se puede observar en el ejemplo anterior tanto la afirmación de Pedro como la de Juan, aunque fueran incompatibles, eran falsas.

Es de observar que si se tiene N enunciados posibles incompatibles entre sí habrá uno y solamente uno de ellos que será verdadero. En este principio se basan los sorteos y loterías.

PARTE III

NORMAS

CAPÍTULO 13

ACERCAMIENTO A UNA TEORÍA RACIONALISTA DE LAS NORMAS

Vivimos en un mundo de normas, normas sociales, normas jurídicas, normas institucionales, etc., pero ¿son ellas útiles y/o racionales? Esta es la cuestión que voy a tratar de dilucidar en esta parte de la investigación en base a la lógica normativa y la lógica modal.

Si bien se ha estudiado, las normas y la racionalidad desde el punto de vista del decisor, esto es si una persona respeta una regla o no según le convenga, no hay estudios en cuanto si las normas en si son racionales y/o útiles, y mucho menos utilizando las lógicas normativa y modal.

Esto implica también analizar las consecuencias económicas y éticas de las mismas de las mismas tomando en cuenta sus beneficios y costos, además de sus viabilidades operativas.

En cuanto al uso de estas lógicas, en el año 1990, escribí una monografía LÓGICA Y ANÁLISIS DE DECISIONES, gran parte de la misma forma está reproducida con ciertas actualizaciones en la segunda parte de este libro, la cual utilicé en los cursos de toma de decisiones. Pero en ella no hice un estudio de la utilidad y la racionalidad de las prescripciones resultantes de un proceso de toma de decisiones, y mucho menos de las normas en general.

Si bien autores como Laurence Peter¹⁰⁰, Russell Ackoff¹⁰¹, Paul Tabori¹⁰², han hecho críticas a algunas normas y leyes, no se han dedicado a un estudio, desde un punto de vista de las lógicas normativa y modal, de las mismas, ni tampoco un análisis económico de las mismas ni de sus implicaciones éticas. Mientras que H. Kelsen, en su obra póstuma, Teoría General de las Normas, enfoca el problema más desde un punto de vista jurídico y filosófico. De manera completa realizan un trabajo en este sentido Carlos E. Alchourrón y Eugenio Bulygin. También cabe mencionar a Franz von Kutschera el cual analiza la ética utilizando la lógica normativa. Por lo tanto sobre la forma de abordar este trabajo no conozco ningún antecedente.

¹⁰⁰ Laurence Peter en el libro POR QUE LAS COSAS SALEN MAL le dedica una sección (págs. 46-48) dando varios ejemplos de leyes absurdas.

¹⁰¹ Una de las obras en la cual critica diversas normas es EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS.

¹⁰² Paul Tabori en su obra HISTORIA DE LA ESTUPIDEZ HUMANA, sobre todo en los capítulos V – La Estupidez del Burocratismo – y VI – La Estupidez de la Justicia – reseña una serie de leyes, que más que inútiles, son producto de la Estupidez Humana.

Obviamente, si se obtiene un marco referencial sobre la utilidad y racionalidad de las normas, y sus consecuencias, que es lo que pretende la primera parte de dicha investigación, la importancia de la misma es relevante a la hora de generar normas, sean estos reglamentos, leyes o prescripciones.

De esta manera, este desarrollo es eminentemente metateórica y más precisamente meta normativa, ya que la misma trata establecer una serie de principios y prescripciones de manera tal que las normas sean racionales y útiles.

13.1.- Conceptos Iniciales

En la literatura el uso de los conceptos normas, prescripciones y reglas se usan de diversas maneras, algunos los usan como sinónimos, otros no los definen, y otros si los diferencian. Así que a continuación voy a definir estos términos para el contexto de este libro.

13.1.1- Norma

Voy a entender por norma a cualquier sentencia respecto a lo que se debe, a lo que está permitido o a lo está prohibido hacer. Esto es, una norma se refiere a que acciones se deben ejecutar, cuales están permitidas y cuales están prohibidas de realizarse.

Es importante señalar que una norma sin referente no tiene valor veritativo. Solo se acata o no.

De esta manera “está prohibido matar” no es verdadero ni falso, solo se acata o no, mientras que “en la legislación de la República Bolivariana de Venezuela está prohibido matar” es verdadero.

Por otro lado una norma puede tener diversos orígenes, sea dada por costumbres, sea dada por alguna autoridad legítima o no.

13.1.2.- Prescripción

Una prescripción es una norma para casos específicos, sean estos provenientes de un diagnóstico o de lo que se debe hacer en caso de la violación de alguna norma.

13.1.3.- Regla

Mientras que las reglas son normas subrogadas, esto es la especificación, por lo general operativa, de otra norma.

13.1.4.- Infracción

Existe una infracción cuando una norma es infringida, desobedecida o no cumplida.

13.1.5.- Normas y Prescripciones Punitivas (o sanciones)

Son aquellas normas y prescripciones a ser aplicadas por un tercero, a fin de infligir un daño o castigo, a aquel que no ha cumplido con normas imperativas, o a aquel que no ha permitido a alguien disfrutar de una norma permisiva.

De esta manera, las sanciones son las prescripciones que se aplican ante la ocurrencia de infracciones.

Al conjunto de normas o prescripciones punitivas se va a designar con P.

13.1.6.- Soborno

Pago que reciben los encargados de hacer cumplir las sanciones asociadas a la infracción de una norma para no aplicar dichas prescripciones. Los sobornos reciben diversos nombres en diversos países. Así por ejemplo en México se le dice mordida, en Venezuela matraca, en Brasil coima, etc

13.2.- Normas Útiles

En ésta sección propongo una base de principios, enunciados tanto semánticamente como lógicamente, respecto a lo que se podría definir como una norma útil. El problema que no trato, ya que sobre lo mismo se ha escrito mucho, es respecto a las funciones de utilidad o beneficios tanto individuales como colectivos. Esto último merece un trabajo a parte.

A.- Normas útiles.**LA.- Interpretación Lógica**

Vamos a considerar que una norma (o un conjunto de normas) es útil si se cumplen las siguientes condiciones:

A.1)

Tiene un objetivo, o finalidad, válido.

LA.1)

Sea X un conjunto de normas entonces $\exists O$, en donde O es un objetivo, y $\mathbf{P}eRO$.

Esto es: una norma (o conjunto de normas) útil se enuncia para alcanzar un propósito, no obedece a un capricho. En otras palabras, una norma debe tener un objetivo y el objetivo debe ser posible de alcanzar.

Pero no solamente debe ser alcanzable, sino que la misma norma debe contribuir para alcanzar este objetivo con alta probabilidad. La probabilidad de alcanzar el objetivo debe ser mucho mayor con las normas que sin ellas.

A.2)

Contribuye a alcanzar el objetivo con alta.

LA.2)

$$P(RO|X) \gg P(RO|\neg X)$$

Pero además que debe poder realizarse, debe ser viable desde todos los puntos de vista: económico, técnico, social, etc.^{103,104}

A.3)

Es fácticamente viable de realizarse.

LA.3)

$$\langle \rangle_{\varepsilon} Ax \implies \mathbf{P}eAx$$

LA.3')

$$\neg [\langle \rangle_{\varepsilon} Ax \wedge \mathbf{I}eAx]$$

Un derecho, o sea una norma en cuanto a lo que puede hacerse, si no es posible fácticamente hacerse, es inútil.

¹⁰³ “Ciertamente, a una persona, a , en una situación, S , solo le está mandado ejecutar un modo de acción, F , si *a puede*, efectivamente, ejecutar F , es decir, si esto no le resulta imposible por circunstancias externas o incapacidad subjetiva.”

Franz von Kutschera. Pág. 43.

¹⁰⁴ Algo parecido plantea Maria Nowakowska en *A Formal Theory Of Actions: Syntax And Semantics Of Behaviour*. PRAXIOLOGICAL STUDIES: Polish Contributions to the Science of Efficient Action. Pág. 145

A.- Normas útiles.**LA.- Interpretación Lógica**

Además unas normas para que sean útiles deben cumplir con ciertos principios de racionalidad económica tales como:

A.4)

El beneficio que genera la norma, debe ser mayor que a la de su no existencia.

LA.4)

Sean $B|N$ y $B|\neg N$, los beneficios dados la existencia de la norma y sin su existencia, respectivamente, entonces debe cumplirse:

$$B|N > B|\neg N$$

A.5)

Sus sanciones deben ser más costosas (en todos sus sentidos) que el beneficio de su desobediencia a la misma.

LA.5)

Definamos las siguientes variables:
 z la norma,
 C el cumplimiento de la norma,
 X el hecho de que se descubra el no cumplimiento de la norma,
 Q el costo de las sanciones,
 B_D el beneficio por su desobediencia
 Entonces se debe cumplir:

$$P(X|\neg C)*Q > B_D$$

En palabras: El costo esperado por el incumplimiento de una norma debe ser mayor que el beneficio de desobedecerla.

A.6)

Sus sanciones deben garantizar que es más beneficioso seguir la norma que evadirla.

LA.6)

Usemos las variables definidas en LA.5 y definamos B_S el beneficio por el seguimiento.
 Entonces se debe cumplir:

$$B_S > B_D - P(X|\neg C)*Q$$

En palabras: El beneficio por seguir una norma debe ser mayor que el beneficio de desobedecerla descontado el costo esperado por el incumplimiento de la misma.

A.- Normas útiles.**LA.- Interpretación Lógica**

Estas últimas condiciones han sido expuestas por más de un autor. Al respecto vale la pena reproducir la siguiente cita¹⁰⁵:

“Supongamos que, en una situación determinada, a una persona le está legalmente prohibida una acción F, prohibición que está respaldada por una sanción, S. Si a actúa racionalmente, entonces evitara F, cuando el valor esperado del beneficio de F –tomando S en cuenta– sea menor que el valor esperado de $\neg F$. En este caso, la intimidación mediante S será efectiva. Por ello puede decirse que una sanción está justificada cuando produce una intimidación mínima, pero efectiva. Ahora bien, puesto que el valor esperado del beneficio de F depende de la probabilidad de que se produzca la sanción S cuando a realiza F, es decir, de la probabilidad de que la violación de la ley sea descubierta y castigada, y también del beneficio que a espera si F no se descubre, este criterio penal depende, en primer lugar, del porcentaje de delitos aclarados y, en segundo lugar, de las preferencias subjetivas de a.”

Otro principio que debe cumplir una norma para que sea útil es que no trate sobre lo que uno debe necesariamente hacer, esto es, sea una obligación o un derecho a hacer algo que necesariamente debe hacerse, por ejemplo el deber de respirar, o el derecho de dormir, no solamente no es útil, sino que carece hasta de sentido.

A.7)

No sea redundante respecto a lo que fácticamente es necesario hacer.

LA.7

$$\begin{array}{c} ([\varepsilon Ax \implies \neg \mathbf{N}eAx) \\ \wedge \\ (\langle \varepsilon Ax \implies \neg \mathbf{N}eAx) \end{array}$$

Esto es, una norma, sea ella imperativa o permisiva, de algo que fácticamente es necesario hacer no tiene ninguna utilidad. Las normas deben ser de actos contingentes.

Tampoco tiene sentido, y no tiene ninguna utilidad, reglamentar lo que está prohibido. Lo que está prohibido ¡prohibido está! Y punto. De esta manera reglamentar el trato a los esclavos, estando prohibido la esclavitud, no tiene sentido.

¹⁰⁵ Franz von Kutschera, Pág. 317.

A.- Normas útiles.**LA.- Interpretación Lógica**

A.8)

No sean unas normas prescriptivas o reglamentarias sobre lo que está prohibido hacer.

LA.8)

$$\neg([\!/\!]_{\varepsilon}Px) \\ \wedge \\ (Px \implies \langle \rangle Ax \vee [\!/\!]_{\varepsilon}Ax) \wedge A \notin \mathcal{P})$$

Esto es, no puede darse unas normas sobre algo que está prohibido, y al mismo tiempo si se realiza lo prohibido las prescripciones correspondientes no sean punitivas.

13.3.- Racionalidad de las Normas

Aquí voy a tratar el problema de la racionalidad de las normas, o de cuando se puede considerar que una norma o conjunto de normas es racional desde el punto de vista de la lógica normativa y de la relación entre la lógica normativa y la lógica modal.

Normas racionales.

Una norma o conjunto de normas se puede considerar como racional si cumple las siguientes condiciones.

B.1) Es coherente, esto es, que no contiene contradicciones desde un punto de vista de la lógica normativa.

LB.1)

$$\neg([\!/\!]_{\varepsilon}Ax \wedge \langle \!/\! \rangle_{\varepsilon}Ax) \wedge \neg([\!/\!]_{\varepsilon}Ax \wedge \langle \rangle_{\varepsilon}Ax) \\ \wedge \\ \neg([\!/\!]_{\varepsilon}Ax \wedge ([\!/\!]_{\varepsilon}\neg Ax) \wedge \neg([\!/\!]_{\varepsilon}Ax \wedge [\!/\!]_{\varepsilon}\neg Ax)$$

Esto es, en un conjunto de normas no pueden existir simultáneamente un imperativo y la permisividad de su negación, ni tampoco la obligación ni la prohibición de dos acciones contradictorias simultáneamente.

B.2) No es imposible de realizarse.

LB.2)

$$[\]\varepsilon Ax \implies \mathbf{P}eAx$$

Si la norma es del tipo mandato entonces debe poder realizarse, de lo contrario además de inútil es irracional.

O dicho de otra manera, no se puede (ni debe) elaborar una norma y ésta es fácticamente imposible de realizarse:

LB.2')

$$\neg[[\]\varepsilon Ax \wedge \mathbf{I}eAx]$$

En otras palabras la racionalidad implica tanto la consistencia lógica interna como la razón práctica.

13.4.- Algunas Deducciones e Implicaciones

En el presente capítulo voy a tratar en primer lugar algunas deducciones inmediatas, aplicando la lógica normativa referencial y en segundo lugar obtener algunas implicaciones que no son tan inmediatas.

13.4.1.- Algunas Deducciones.

D.1) Toda norma útil debe ser sobre actos cuya posibilidad es eventual, esto es que son tanto posibles de realizarse como se no realizarse.

Demostración:

$$\diamond\varepsilon Ax \implies \mathbf{P}eAx \quad (1) \quad (\text{por LA.3})$$

$$\diamond\varepsilon Ax \implies \neg\mathbf{N}eAx \quad (2) \quad (\text{por LA.7})$$

$$\langle \rangle_{\varepsilon} A_X \implies \mathbf{P}eA_X \wedge \neg \mathbf{N}eA_X \quad (3) \quad (\text{de la conjunción de (1) y (2)})$$

$$\langle \rangle_{\varepsilon} A_X \implies \mathbf{P}eA_X \wedge \mathbf{C}eA_X \quad (4) \quad (\text{de la definición de contingente})$$

$$\langle \rangle_{\varepsilon} A_X \implies \mathbf{E}eA_X \quad (5) \quad (\text{de la definición de eventual})$$

La demostración está hecha sobre normas permisivas, pero dado que:

$$[\]_{\varepsilon} A_X \implies \langle \rangle_{\varepsilon} A_X$$

Se tiene inmediatamente

$$[\]_{\varepsilon} A_X \implies \mathbf{E}eA_X$$

D.2) Una norma irracional es inútil, lo contrario no necesariamente se cumple.

Demostración

- 1) Si la norma es contradictoria entonces, obliga a hacer A y permite hacer no A, por lo tanto no puede haber prescripciones por no cumplirse A, y por lo tanto no se pueden cumplir los principios A.5 y A.6, ya que nunca se estaría violando la norma.¹⁰⁶
- 2) Si la norma es imposible de realizarse, entonces no es fácticamente posible de realizarse (principio A.3).
- 3) Una norma puede ser racional, pero puede violar varios de los principios de utilidad tal como no tener objetivo (principio A.1), o la probabilidad de alcanzar estos no aumenta con la existencia de esta norma (principio A.2), o es redundante respecto a lo que fácticamente es necesario hacer (principio A.7), o no se cumple los principios respecto a los costos y beneficios.

13.4.2.- Implicaciones.

I.1) La utilidad y racionalidad de unas normas, pueden variar según el contexto y el momento histórico.

¹⁰⁶ Aunque podría también penalizarse hágase (o cúmplase) o no A. Esto sería típico de una tiranía. Ver más adelante **normas y tiranías**, pág. 28.

Ejemplos

Así los versículos 1 al 6 del capítulo 21 del libro del Éxodo de la biblia se refieren al tema del trato a los esclavos, y los versículos 7 al 11 del mismo capítulo a la venta de la hija como esclava. Hoy en día estas normas no tienen sentido, ya que la esclavitud está prohibida.

Otro ejemplo es el caso mencionado por Robert Townsend:

“Los británicos crearon un puesto especial de vigilantes de costas cuando en 1803 apostaron a un funcionario en la cima de los acantilados de Dover para que oteara el horizonte con la ayuda de un catalejo. Tan pronto como viera acercarse a Napoleón, debía tocar una campana. El puesto fue suprimido en 1945.”¹⁰⁷

- I.2) En el caso de los principios A.5 y A.6, si los costos de las sanciones son muy altos pueden generar actos de soborno.

Explicación:

Para los individuos no propensos al riesgo las condiciones A.5 y A.6 son condiciones suficientes para respetar las normas siempre y cuando no existan agentes sobornables.

De hecho definamos

P_S como la probabilidad de que un agente sea sobornable y

S el monto del soborno.

Se tendrá entonces como valor esperado de la desobediencia a la norma:

$$B_D = P(X|-C)(1 - P_S)*Q - P(X|-C)* P_S *S$$

El valor de S se obtiene por negociación entre el sobornador y el sobornado.

Otro hecho posible es que la violación a la regla sea algo repetible, esto es, que sea un negocio que se desarrolla durante un tiempo indefinido de manera repetida. En este caso es posible también que el sobornado se convierta en socio o cómplice del negocio y tanto el sobornado como el sobornador evaluarán el valor presente de la negociación.

- I.3) La resistencia al cambio (a una norma nueva o a su derogación).

¹⁰⁷ Robert Townsend, Más Arriba en la Organización., Ediciones Orbis, Barcelona, 1985, pág. 215.

Por lo que se indicó en A.4, debe cumplirse, para una norma nueva:

$$B|N > B|\neg N$$

En donde $B|N$ y $B|\neg N$, los beneficios dados la existencia de la norma y sin su existencia.

Y obviamente para la derogación de una norma debe cumplirse que:

$$B|N < B|\neg N.$$

Voy analizar el primer caso, aprobación de una norma nueva. Por analogía el lector puede hacer las mismas inferencias para la derogación de una norma.

En este principio no está establecido como como se evalúa B .

De esta manera, llamase Bx_i el beneficio del individuo x_i y B el beneficio global (medido por algún indicador global) puede pasar uno de los dos siguientes casos:

- 1) Un mejoramiento tipo Pareto, esto es $Bx_i|N \geq Bx_i|\neg N$ para todos los x_i y $Bx_j|N > Bx_j|\neg N$ para algunos x_j (nadie está peor que antes y algunos mejoran).

En este caso no hay ningún motivo (racional) para oponerse a la nueva norma y por lo tanto no debería haber resistencia a la misma..

- 2) En caso contrario, pueden haber algunos x_i que cumplan con la condición de que $Bx_i|N \geq Bx_i|\neg N$ y otros x_j para los cuales se tiene que $Bx_j|N < Bx_j|\neg N$. Esto es mientras algunos miembros de la sociedad (supuestamente la mayoría), no desmejoran sus beneficios, algunos miembros de la misma disminuirán los mismos, pero la sociedad en su conjunto sí estará mejor. Pero el último grupo, para los cuales sus beneficios disminuyen, pueden generar resistencia (y hasta conflictos) por la existencia de la norma.

CAPÍTULO 14

NORMAS Y ENTORNO

14.1.- Normas Contraproducentes

Diremos que unas normas son contraproducentes si se cumple algunas de las siguientes condiciones:

- C.1) En vez de aumentar la probabilidad de alcanzar el objetivo, no solo lo disminuye, sino que aumenta la probabilidad de alcanzar el objetivo contrario:

$$P(R-O|X) > P(R-O|\neg X)$$

Aunque, como se indicó en UA.2, puede haber dos tipos de objetivos, uno oculto y otro explícito. En este caso se tendrá que las normas son contraproducentes para el que dicto las normas si $P(R-O_o|X) > P(R-O_o|\neg X)$ mientras que contraproducentes para los receptores de las normas si $P(R-O_e|X) > P(R-O_e|\neg X)$

- C.2) Si una norma, para algunos, es fácticamente imposible de realizarse, será contraproducente para los mismos:

$$\exists X_i | \langle \rangle_{\varepsilon} A X \wedge \mathbf{I} e_i A X$$

- C.3) Si una norma desmejora el beneficio conjunto entonces será contraproducente en general:

Sean $B|N$ y $B|\neg N$, los beneficios dados la existencia de la norma y sin su existencia, respectivamente, entonces es contraproducente si:

$$B|N < B|\neg N$$

Mientras que si no es un mejoramiento Pareto (Ver I.3) entonces será contraproducente para todos los individuos x_j para los cuales se cumple:

$$B_{x_j|N} < B_{x_j|\neg N}.$$

Así, se puede decir que una norma es contraproducente para algunos individuos o a la sociedad en general si genera algún tipo de perjuicio a los mismos.

14.2.- ¿Útiles para quién?

Hasta ahora no hemos definido para quien es útil o no, una norma o conjunto de normas.

Es claro que las normas serán útiles a los grupos para los cuales se satisfacen las condiciones A.1 a A.8. Pero no necesariamente, serán útiles para todos los miembros de una sociedad. De hecho como se indicó en el capítulo anterior algunas normas pueden ser contraproducentes para algunos grupos. Veamos a continuación cuales condiciones son válidas para todos y cuáles no.

UA.1) Si bien las normas pueden hacerse para un objetivo valido explicitado, estas no necesariamente obedecen a este objetivo, ya que pueden tener un objetivo oculto por parte del que las redacto.

Sea X un conjunto de normas entonces $\exists O_o$ y $\exists O_e$, en donde O_o es el objetivo oculto, y P_{RO_o} ; y O_e es el objetivo explicitado y E_{RO_e}

UA.2) En base a lo planteado en el párrafo anterior puede darse que efectivamente sirven solo para alcanzar el objetivo oculto, pero no para lograr el objetivo explícito.

$$\begin{array}{c}
 P(\text{RO}_0|X) \gg P(\text{RO}_0|\neg X) \\
 \text{Y} \\
 \neg[P(\text{RO}_e|X) \gg P(\text{RO}_e|\neg X)]
 \end{array}$$

UA.3) Si bien una norma puede ser factible de cumplirse para un grupo X_0 , puede haber algunos grupos X_1, X_2, \dots, X_n para los cuales no es posible seguir una norma, sea por discapacidad u otra condición física, sea por condiciones económicas o por condiciones culturales.

De esta manera sea \mathbf{C}_0 las circunstancias para el grupo X_0 y \mathbf{C}_i las circunstancias para los grupos $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, entonces se tendrá:

$$\begin{array}{c}
 \diamond_{\varepsilon} A_X \implies \mathbf{P}_{\mathbf{C}_0} A_X \\
 \text{Y} \\
 \diamond_{\varepsilon} A_X \wedge \mathbf{I}_{\mathbf{C}_i} A_X
 \end{array}$$

UA.4) Como se indicó en I.3, si el mejoramiento no es mejoramiento tipo Pareto entonces habrán grupos que se opondrán a las mismas. Aunque aquí quedaría, también abierto el problema del cálculo del beneficio para la sociedad como un todo.

UA.5 y UA.6) Su utilidad dependerá de la distribución de la población propensa y adversa al riesgo y de la distribución de funcionarios con inclinación a la corrupción¹⁰⁸.

En otras palabras, si la cantidad de funcionarios con inclinación hacia la corrupción (o sea dispuestos a ser sobornados) es alta y la cantidad de miembros de la

¹⁰⁸ Para Amartya Sen "la corrupción implica la violación de las reglas establecidas para obtener ganancias y beneficios personales". Sen, Amartya. *Desarrollo y Libertad*. Colombia. 2009. Pág. 329.

sociedad dispuestos a pagar sobornos también, lo que va a hacer la norma es aumentar la corrupción, pero por otro lado esta norma deja de ser útil, a excepción para los sobornados.

UA.7) Puede en principio parecer universal, pero para unas circunstancias dadas. Esto es, hay acciones que dependiendo de las circunstancias, tales como costumbres, cultura, etc., deben hacerse de manera obligatoria y otras no. Aunque si hay acciones que son universalmente necesarias hacer para vivir.

UA.8) Este es un principio que otra vez depende de ciertas circunstancias, ya que hay acciones que pueden estar prohibidas por principios éticos, pero las mismas pueden variar de grupo a grupo.

De esta manera, buscar normas, sean estas jurídicas, sean estas éticas o de cualquier otra índole, universalmente válidas, aunque sea un reto, es arar en el desierto. Lo máximo que se puede lograr es unos buenos deseos mediante unas metanormas referente a unos principios con respecto a lo que debería ser esta norma universal aceptable por todos.

14.3.- Normas y Circunstancias.

Un conjunto de normas pueden estar especificadas dependiendo de las circunstancias, estas circunstancias pueden ser tanto inherentes al individuo, como estados del entorno. En este caso se debe tener cuidado en:

NC.1) Las circunstancias tienen que ser disjuntas entre sí:

$$C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j.$$

NC.2) El universo de las circunstancias tiene que ser completo.

$$\bigcup_i C_i = U$$

Esto se puede lograr de tres maneras:

- 1) En base a una norma general, para luego normar las excepciones.
- 2) Normando algunas de las circunstancias para luego normar de manera genérica las demás.
- 3) Normando exhaustivamente cada circunstancia posible.

14.4.- Normas y temporalidades intra e inter generacionales.

La utilidad de las normas puede variar con el tiempo, tanto por los beneficios que ellas pueden generar, como por la sustentabilidad de las mismas.

En el caso de los beneficios se puede tener normas de alto beneficio en los primeros periodos pero que con tiempo más bien generan costos y se convierten en contraproducentes, pero también se puede tener normas que al principio generan costos y después de cierto tiempo generan beneficios.

De esta manera a la hora de calcular los beneficios de una norma se debería evaluar los beneficios de manera tal que se tome en cuenta la totalidad de los beneficios a lo largo de la línea del tiempo:

En donde B_t son los beneficios $B|N = \sum_{t=0}^{\infty} B_t|N$ netos¹⁰⁹ evaluados a valor presente debidos a la existencia de las normas.

En cuanto a las relaciones temporales de los beneficios las mismas se pueden tener los siguientes casos de comportamiento regular durante un tiempo T:

- 1) Decrecientes

$$B_0 \geq B_1 \geq B_2 \geq \dots \geq B_T$$

- 2) Estrictamente decrecientes

$$B_0 > B_1 > B_2 > \dots > B_T$$

¹⁰⁹ Esto significa que también pueden tomar valores negativos.

3) Crecientes

$$B_0 \leq B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_T$$

4) Estrictamente crecientes

$$B_0 < B_1 < B_2 < \dots < B_T$$

5) Estables

$$B_0 = B_1 = B_2 = \dots = B_T$$

Ahora bien, después de esto periodos regulares, el comportamiento puede cambiar a otro tipo de comportamiento, regular o no.

El otro aspecto que puede variar en el tiempo es la sustentabilidad¹¹⁰ de las normas, bien sea la sustentabilidad económica – recursos tanto financieros como factores de producción – o la sustentabilidad socio-ambiental.

Esto es, puede existir un momento T para el cual se dé la no factibilidad de la aplicación de la norma, por lo tanto la norma deja de ser útil (principio A.3).

De esta manera, según los valores de T, tanto en el comportamiento de los beneficios como de la sustentabilidad de las normas, las mismas tendrán efectos solo intrageneracional, o efectos intergeneracionales ($T > 20$ años).

14.5.- Principios Lógicos del Libre Albedrío

Sí, se tiene por concepto de libre albedrío a la “**Potestad de obrar por reflexión y elección**” tal como lo define el DRAE, se puede, en base al mismo, plantear el siguiente desarrollo lógico:

Designemos por $D_0(O_t)$ por el deseo actual de lograr el objetivo O en el momento (futuro) t. Si existe varias secuencias de acciones S_i , $i = 1, \dots, N$, que permiten obtener O en el momento t, entonces se es libre de escoger cualquiera de las secuencias S_i para alcanzar el objetivo O y se denotara por $LA(S_i)$.

¹¹⁰ Ver más sobre sustentabilidad más adelante en el capítulo 15.

De hecho, el único requisito para que una acción sea escogida libremente es que esta acción sea materialmente posible de realizarse. De hecho si una acción es imposible de realizar no se tendrá la libertad de realizarla, solo se puede imaginar realizarla.

La pregunta es ¿Qué pasa con las acciones prohibidas de realizarse y con las obligatorias a realizar, según alguna normativa?

En es caso se tiene la libertad de violar o infringir la normativa, y correr con las consecuencias punitivas de la misma, o de cumplir con la misma.

Es de notar que el libre albedrío implica no solamente escoger las acciones a realizar, sino que implica también no realizar las acciones que uno no desea. El único limite del libre albedrío son las restricciones de las posibilidades del mundo material.

CAPÍTULO 15

NORMAS Y POLÍTICA

En este capítulo vamos, en primer lugar a identificar varios tipos de regímenes políticos, más específicamente las tiranías y el populismo, en base a sus sustentos normativos. Seguidamente se va establecer un método para lograr acuerdos que sean de mayor utilidad posible y lo menos contraproducente posible para todos.

15.1.- Normas y Tiranías

tiranía.

(Del gr. τυραννία).

1. f. Gobierno ejercido por un tirano.
2. f. Abuso o imposición en grado extraordinario de cualquier poder, fuerza o superioridad.
3. f. Dominio excesivo que un afecto o pasión ejerce sobre la voluntad.

Real Academia Española © Todos los derechos reservados

tirano, na.

(Del lat. *tyrannus*, y este del gr. τύραννος).

1. adj. Dicho de una persona: Que obtiene contra derecho el gobierno de un Estado, especialmente si lo rige sin justicia y a medida de su voluntad. **U. t. c. s.**
2. adj. Dicho de una persona: Que abusa de su poder, superioridad o fuerza en cualquier concepto o materia, y también simplemente del que impone ese poder y superioridad en grado extraordinario. **U. t. c. s.**
3. adj. Dicho de una pasión o de un afecto: Que domina el ánimo o arrastra el entendimiento.

Real Academia Española © Todos los derechos reservados

Para empezar vamos definir lo que vamos a llamar una α -tiranía: sea β el porcentaje de una sociedad o colectivo para los cuales son útiles las normas y $\alpha \leq 1 - \beta$ el porcentaje para los cuales estas normas son contraproducentes, en este caso se dirá que se está en presencia de una α -tiranía.

Mientras que se puede hablar de una σ -tiranía si se tienen normas contradictorias (irracionales), de forma tal que se puede sancionar tanto por cumplir A, como no cumplir A, esto es: A está prohibida y A es obligatoria a la vez.

Esto es, si tanto A como no A son obligatorias o tanto A como no A están prohibidas, en cualquier caso se recibe una sanción Q_1 o Q_2 según sea el caso.

$$\begin{aligned} & [([\varepsilon]Ax \wedge ([\varepsilon]\neg Ax) \\ & \quad \vee \\ & \quad ([/\varepsilon]Ax \wedge [/\varepsilon]\neg Ax)] \\ & \quad \wedge \\ & (\neg C \rightarrow Q_1) \wedge (C \rightarrow Q_2) \end{aligned}$$

En donde C es el cumplimiento de A y Q_1 y Q_2 son las sanciones.

Así mismo, se puede hablar de una τ -tiranía (o totalitarismo), donde τ es el porcentajes de acciones normadas respecto a las acciones posibles.

15.2.- Normas y populismo y demagogia.

En base al capítulo anterior se puede identificar al populismo como aquel modelo en el cual en los momentos iniciales las normas generan beneficios, pero pasado los mismos estos se vuelven casi nulos o hasta negativos y sumados son casi nulos. Esto puede ser debido, en la mayoría de los casos, a la no sustentabilidad de las mismas, o a motivos de diversos tipos:

$$B_0|N > B_1|N > B_2|N > \dots > B_T|N$$

$$B|N = \sum_{t=0}^{\infty} B_t|N \leq 0$$

$$P_{e_0Ax}, \dots, I_{e_tAx}$$

Mientras que se puede hablar de normas que obedecen a actos demagógicos a las que obedecen a normas populistas o aquellas que ofrecen sacrificios (beneficios negativos) en el presente a cambio de recompensas (que en general no se dan o no logran compensar los sacrificios) en el futuro¹¹¹. Estas últimas tendrían la siguiente expresión:

$$B_0|N \gg 0$$

$$B|N = \sum_{t=0}^{\infty} B_t|N \leq 0$$

$$P(RO|X) \leq P(RO|\neg X)$$

15.3.- Normas y acuerdos

Aquí vamos a plantear un modelo de obtención de acuerdos sobre un conjunto normas que cumpla con las siguientes condiciones:

- 1) No existan normas contradictorias.
- 2) La utilidad mínima general de las mismas sea lo máxima posible.
- 3) El perjuicio máximo sea lo mínimo posible.

Mientras que la primera condición es solo sobre cada norma específica, las condiciones 2 y 3 son tanto sobre los objetivos como sobre cada una de las normas que permiten lograr los objetivos.

Es evidente que para un conjunto de normas, el primer acuerdo tiene que ser sobre el objetivo de las mismas. Esto es, hay más posibilidades de lograrse si este objetivo es puntual, muy

¹¹¹ Esto típico de las religiones las cuales a cambio de sacrificios en la vida terrenal se obtienen recompensas después de la muerte y respecto a las mismas nadie podido certificarlas. Pero también de algunos gobiernos autodenominados revolucionarios, en los cuales el Estado y la Patria o cualquier otro símbolo, se convierten en religión, que piden sacrificios a su población para tener en un futuro incierto una gran nación.

concreto, sin adornos adicionales. Así es muy difícil no lograr algún acuerdo sobre objetivos tales como:

- Eliminar la pobreza
- Mejorar la calidad de los servicios
- Disminuir la delincuencia
- Desarrollar la Nación

El problema suele ser el cómo. Para esto se suele generar una serie de normas o prescripciones. El problema es el acuerdo sobre las mismas, ya que las mismas pueden implicar aspectos ideológicos, efectos secundarios no deseables para algunos.

A continuación vamos a presentar un modelo a tal fin¹¹²:

Varios individuos de un colectivo reconocen una situación problemática con una probabilidad $P_i \cong 1$, de manera que la probabilidad conjunta de reconocer la situación problemática sea bastante alta. Cada uno de estos individuos cuenta con una información I_i y un conocimiento C_i , por un proceso de decisión D_i llega a una propuesta de acción A_i con valor para él de V_i . Esta propuesta tendrá otros valores para los demás individuos X_j : $V_j(A_i)$, menor que la propuesta propia. Esto es:

$$V_j(A_i) \leq V_j(A_j)$$

Definición:

Dos propuesta de acción, k y l , serán semejantes para el individuo i si:

$$V_i(A_k) \cong V_i(A_l)$$

Definición:

Dos propuesta de acción, k y l , serán intercambiables entre sí, si son semejantes para todos los individuos:

¹¹² Este modelo es una adaptación del modelo expuesto en ¿DECISIONES COLECTIVAS O ACUERDOS DE COLECTIVOS?, Henri Thonon, en RELEA #39

$$V_i(A_k) \cong V_i(A_l), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Definición:

Dos individuos, i y j , serán sustituibles entre si para ellos todas las valoraciones de las propuestas son parecidas:

$$V_i(A_k) \cong V_j(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Definición:

Una propuesta de acción A_i será viable si la probabilidad de la misma es mayor que cero o si es posible su realización:

$$\Pr(A_i) > 0$$

A partir de ahí se establecerán negociaciones y/o discusiones, hasta lograr una propuesta o curso de acción de colectivo A_c , cuyo valor estará caracterizado por:

$$\min_i \{V_j(A_i)\} \leq V_j(A_c) \leq V_j(A_j)$$

Un curso de acción del colectivo será un óptimo Pareto si no existe otro curso de acción, A_o , tal que:

$$V_i(A_o) \geq V_i(A_c), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Se dirá que un curso de acción, A_i se impuso sobre los demás si se eligió como curso de acción colectiva:

$$A_c = A_i.$$

Se dirá que un individuo j fue marginado o apabullado del proceso de negociación si el valor de la acción colectiva para este individuo es tan baja (o más) que cualquiera de los cursos de acción propuestos:

$$\min_i \{V_j(A_i)\} \geq V_j(A_c).$$

Todas las propuestas de acción individuales estarán representadas en el curso de acción colectivo si:

$$A_c \supseteq A_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Y una propuesta de acción de colectivo será viable si la probabilidad de su realización es mayor que cero, o sea si es posible realizarlo:

$$\Pr(Ac) > 0.$$

De hecho una propuesta de acción colectiva solo será posible convertirse en curso de acción real si es viable.

1. Propuestas de Acción Dominadas.

Se dirá que una propuesta de acción A_i está dominada por otra propuesta A_j si:

$$V_k(A_i) \leq V_k(A_j), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

De esta manera lo útil en las negociaciones sería empezar a eliminar las propuestas dominadas.

2. Propuestas de Acción Dominantes.

Se dirá que una propuesta de acción A_i es dominante si para toda otra propuesta A_j se cumple que:

$$V_k(A_i) \geq V_k(A_j), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

De esta manera lo útil en las negociaciones es empezar por dar por aceptadas las propuestas dominantes.

3. División de las propuestas en sus constituyentes

Esto es: Cada propuesta A_i , se convierte en un conjunto de constituyentes de la misma:

$$A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,M}\}$$

4. Intersección de las propuestas

Se hace una intersección de todas las propuestas en su forma constituyente, las constituyentes que queden en estas intersecciones formaran parte de la propuesta colectiva.

5. Construcción del conjunto de constituyentes.

Se construye el conjunto completo de las constituyentes que no quedaron en la intersección, de manera tal que cada una aparecerá una sola vez, con esto se tendrá como constituyentes:

$$a_1, a_2, \dots, a_M$$

5. Valoración de las demás constituyentes

Las constituyentes que no quedaron en la intersección tienen que ser valoradas por todos los individuos, esto es a cada una se le asigna un valor $v_k(a_j)$. Preferiblemente normalizados entre -1 y 1.

6. Justización de los valores de las constituyentes

A cada uno de los individuos se le calcula el valor de las constituyentes de manera tal que la suma de estos valores sea igual a uno.

Para esto se puede proceder de la siguiente manera:

a) Para cada individuo se clasifican las valoraciones en tres subconjuntos: $b_{k,j}$, si $v_k(a_j) > 0$,

$$c_{k,j}, \text{ si } v_k(a_j) = 0 \text{ y}$$

$$d_{k,j}, \text{ si } v_k(a_j) < 0.$$

b) Se calculan $S_k = \sum v_k(b_{k,j})$ y

$$T_k = -\sum v_k(d_{k,j}).$$

c) Se evalúan $u_k(b_{k,j}) = v_k(b_{k,j})/S_k$ y

$$u_k(d_{k,j}) = v_k(d_{k,j})/T_k .$$

d) Se obtienen los $w_k(a_j)$ de la siguiente manera:

1.- Se calculan los $u'_k(a_j) = u_k(a_j) + 1$

2.- Se halla los $R_k = \sum u'_k(a_j)$

3.- y por último $w_k(a_j) = u'_k(a_j)/R_k$

7. Maximización de la función de utilidad colectiva

Se procede a:

$$\text{maximizar } z = \min_j \{ \sum_j w_k(a_j) \cdot x_j \}^{113}$$

Sujeto a:

(r₁) $x_j = 0, 1$ para constituyentes que se toman completo o no se toman.

(r₂) $x_i + x_j = 1$, para constituyentes mutuamente excluyentes.

(r₃) $x_j \leq 1$, para constituyentes fraccionables.

(r₄) $x_i \geq x_j$ Si para tomar la constituyente j hay que tomar también la i.

(r₅) $x_i + x_j \geq 1$ Si hay que tomar al menos una de las dos constituyentes.

La solución de este problema anterior podría considerarse como el resultado de una negociación "justa", el problema está en que puede no tener solución factible.

Pero si además se quiere que el resultado no genere envidia, en el sentido que algún grupo se sienta más perjudicado que otro, se puede hacer unos pequeños cambios en el modelo:

$$\text{maximizar } z = z_1 - z_2$$

$$\text{en donde: } z_1 = \min_j \{ \sum_j w_k(a_j) \cdot x_j \}$$

$$z_2 = \max_j \{ - \sum_j u_k(d_{k,j}) \cdot x_j \}$$

¹⁰⁹ Esto es equivalente a:

$$\text{maximizar } z = X$$

$$\text{Sujeto a: } X \leq \sum_j w_k(a_j) \cdot x_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , j = 1, 2, \dots, M$$

Ilustremos estos pasos anteriores con un ejemplo:

En una comunidad hay tres grupos: 1) Los conservadores, 2) los progresistas y 3) los moderados.

Cada uno de estos grupos presenta un proyecto de ley respecto al mismo tema con 5 artículos:

$$A_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{1,5}\}$$

$$A_2 = \{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5}\}$$

$$A_3 = \{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4}, a_{3,5}\}$$

El primer artículo de cada de estos proyectos es igual. De esta manera según nuestro paso 4, lo damos por aceptado, y por los tanto no está sujeto a discusión.

El segundo artículo de la propuesta de los moderados, es igual al segundo de la de los conservadores ($a_{3,2} = a_{1,2}$) y el último de estos es igual al último de la propuesta de los progresistas ($a_{3,5} = a_{2,5}$)¹¹⁴.

De esta manera tenemos en discusión un conjunto de 10 artículos:

| LISTA DE ARTÍCULOS | ARTÍCULOS ORIGINALES |
|---------------------------|---|
| a₁ | a_{1,2}, a_{3,2} |
| a₂ | a_{1,3} |
| a₃ | a_{1,4} |
| a₄ | a_{1,5} |
| a₅ | a_{2,2} |
| a₆ | a_{2,3} |
| a₇ | a_{2,4} |
| a₈ | a_{2,5}, a_{3,5} |
| a₉ | a_{3,3} |
| a₁₀ | a_{3,4} |

¹¹⁴

Los demás artículos se consideran contradictorio entre si.

Al solicitar a cada grupo sus valoraciones respecto a cada artículo en una escala de -10 a $+10$ se obtuvieron los siguientes resultados (paso 5):

| LISTA DE ARTÍCULOS | ARTÍCULOS ORIGINALES | VALORES CONSERVADORES | VALORES PROGRESISTAS | VALORES MODERADOS |
|--------------------|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|-------------------|
| a ₁ | a _{1,2} , a _{3,2} | 10 | 0 | 10 |
| a ₂ | a _{1,3} | 10 | -10 | -10 |
| a ₃ | a _{1,4} | 5 | -5 | 0 |
| a ₄ | a _{1,5} | 5 | -5 | -5 |
| a ₅ | a _{2,2} | -5 | 5 | -5 |
| a ₆ | a _{2,3} | -5 | 5 | 0 |
| a ₇ | a _{2,4} | -10 | 10 | -10 |
| a ₈ | a _{2,5} , a _{3,5} | 0 | 10 | 10 |
| a ₉ | a _{3,3} | 0 | -5 | 5 |
| a ₁₀ | a _{3,4} | -5 | 0 | 5 |

Hagamos ahora el paso 6, de justificación de los valores:

| LISTA DE ARTÍCULOS | ARTÍCULOS ORIGINALES | VALORES CONSERVADORES | VALORES PROGRESISTAS | VALORES MODERADOS |
|--------------------|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|-------------------|
| a ₁ | a _{1,2} , a _{3,2} | 1/3 | 0 | 1/3 |
| a ₂ | a _{1,3} | 1/3 | -2/5 | -1/3 |
| a ₃ | a _{1,4} | 1/6 | -1/5 | 0 |
| a ₄ | a _{1,5} | 1/6 | -1/5 | -1/6 |
| a ₅ | a _{2,2} | -1/5 | 1/6 | -1/6 |
| a ₆ | a _{2,3} | -1/5 | 1/6 | 0 |
| a ₇ | a _{2,4} | -2/5 | 1/3 | -1/3 |
| a ₈ | a _{2,5} , a _{3,5} | 0 | 1/3 | 1/3 |
| a ₉ | a _{3,3} | 0 | -1/5 | 1/6 |
| a ₁₀ | a _{3,4} | -1/5 | 0 | 1/6 |

| LISTA DE ARTÍCULOS | ARTÍCULOS ORIGINALES | VALORES CONSERVADORES | VALORES PROGRESISTAS | VALORES MODERADOS |
|--------------------|-------------------------------------|-----------------------|----------------------|-------------------|
| a ₁ | a _{1,2} , a _{3,2} | 2/15 | 1/10 | 2/15 |
| a ₂ | a _{1,3} | 2/15 | 3/50 | 1/15 |
| a ₃ | a _{1,4} | 7/60 | 2/25 | 1/10 |
| a ₄ | a _{1,5} | 7/60 | 2/25 | 1/12 |
| a ₅ | a _{2,2} | 2/25 | 7/60 | 1/12 |
| a ₆ | a _{2,3} | 2/25 | 7/60 | 1/10 |
| a ₇ | a _{2,4} | 3/50 | 2/15 | 1/15 |
| a ₈ | a _{2,5} , a _{3,5} | 1/10 | 2/15 | 2/15 |
| a ₉ | a _{3,3} | 1/10 | 2/25 | 7/60 |
| a ₁₀ | a _{3,4} | 2/25 | 1/10 | 7/60 |

De esta manera se obtiene el siguiente problema de programación:

```

PL:
VAR:
    z1, z2, -
    A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10
MAX:
    z1 + (-1)*z2
SA:
[w1] 0.133*A1+0.133*A2+0.117*A3+0.117*A4+0.08*A5 +0.08*A6 +0.06*A7 +0.1*A8 +0.1*A9 +0.08*A10 +(-1)*z1 > 0
[w2] 0.1*A1 +0.06*A2 +0.08*A3 +0.08*A4 +0.117*A5+0.117*A6+0.133*A7+0.133*A8+0.08*A9 +0.1*A10 +(-1)*z1 > 0
[w3] 0.133*A1+0.067*A2+ 0.1*A3 +0.083*A4+0.083*A5+0.1*A6 +0.067*A7+0.133*A8+0.117*A9+0.117*A10+(-1)*z1 > 0
[u1] 0.2*A5 +0.2*A6 +0.4*A7 +0.2*A10 +(-1)*z2 < 0
[u2] 0.4*A2+0.2*A3 +0.2*A4 +0.2*A9 +(-1)*z2 < 0
[u3] 0.333*A2 +0.167*A4 +0.167*A5 +0.333*A7 +(-1)*z2 < 0
[r11] A2 + A6 + A9 = 1
[r12] A3 + A7 + A10 = 1
[r13] A1 + A5 = 1
[r14] A4 + A8 = 1
BIN:
    A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10

```

Obteniendose los siguientes resultados:

RESULTADOS DEL PROBLEMA

Z =: .23

SOLUCIÓN DE LAS VARIABLES CONTINUAS

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|----------|-----------|----------------|
| Z1 | 0.4300000 | 0.0000000 |
| Z2 | 0.2000000 | 0.0000000 |

VALOR DE LAS VARIABLES BINARIAS

| VARIABLE | VALOR |
|----------|-----------|
| A1 | 1.0000000 |
| A2 | 0.0000000 |
| A3 | 1.0000000 |
| A4 | 0.0000000 |
| A5 | 0.0000000 |
| A6 | 1.0000000 |
| A7 | 0.0000000 |
| A8 | 1.0000000 |
| A9 | 0.0000000 |
| A10 | 0.0000000 |

| RESTRICCIÓN | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
|-------------|-----------|----------------|
| w1 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| w2 | 0.0000000 | 1.0000000 |
| w3 | 0.0360000 | 0.0000000 |
| u1 | 0.0000000 | 1.0000000 |
| u2 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| u3 | 0.2000000 | 0.0000000 |
| r11 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| r12 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| r13 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| r14 | 0.0000000 | 0.0000000 |

Cuya interpretación es la siguiente:

- 1) Los artículos que se aprueban son: A1 ($a_{1,2}$, $a_{3,2}$), A3($a_{1,4}$), A6 ($a_{2,3}$) y A8 ($a_{2,5}$, $a_{3,5}$).
- 2) Si bien todos obtienen al menos una satisfacción de 0,43 (valor de la variable Z1), el grupo 3 obtiene una satisfacción de 0,46666 (valor de Z1 más el de la holgura de la ecuación w3).
- 3) Todos tienen a lo más un nivel de inconformidad o de envidia de 0,2 (valor de la variable Z2), el grupo 3 no tiene inconformidad (el valor de Z2 menos la holgura de la ecuación u3 es nulo).

PARTE IV

PRAXEOLOGÍA

CAPÍTULO 16

PRINCIPIOS

16.1.- Eficiencia y Productividad¹¹⁵.

Los términos de eficiencia, productividad, eficacia, efectividad, rendimiento y rentabilidad son comúnmente utilizados tanto en la literatura de la economía empresarial como en la de administración de operaciones sin tener siempre el mismo significado, y muchas veces utilizando un autor algunos de los vocablos como sinónimos, así que de hecho se propondrá aquí unas definiciones que se utilizan a lo largo de esta obra.

RENDIMIENTO (Rt): Es la razón entre los insumos que se utilizan efectivamente en un proceso de producción (Iu) y la disponibilidad de ellos (Id) :

$$Rt = Iu / Id.$$

EFICIENCIA (En): Es la razón entre la producción bruta (Qb) y los insumos disponibles:

$$En = Qb / Id.$$

EFFECTIVIDAD (Ed): Es la razón entre la producción neta (Qn) y la producción bruta:

$$Ed = Qn / Qb.$$

PRODUCTIVIDAD (P): Es la razón entre la producción neta y los insumos efectivamente utilizados:

$$P = Qn / Iu = Ed \times En / Rt.$$

EFICACIA (Ec): Es la razón entre la producción neta real (Qnr) y la producción neta planificada o deseada (Qnp) para un mismo nivel de insumos disponibles:

$$Ec = Qnr(Id) / Qnp(Id)$$

¹¹⁵ Este capítulo está adaptado de *Praxeología de los Servicios Sociales Públicos*. Tesis Doctoral aprobado en la UCV en el año 1992, presentada por H. Thonon.

$$= (Pr \times Rtr) / (Pp \times Rtp).$$

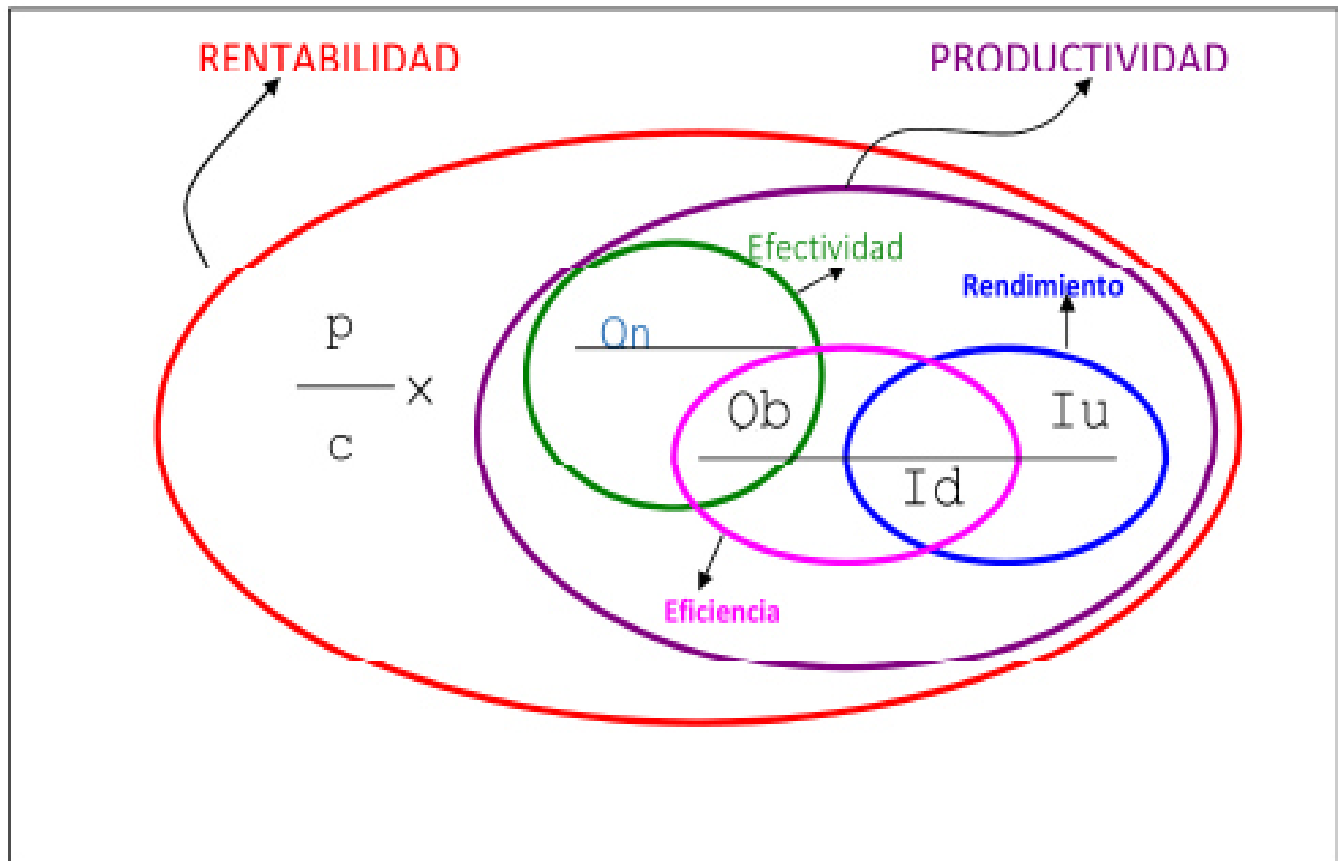
RENTABILIDAD (Rd): Es la razón entre los ingresos y los gastos monetarios.

$$\begin{aligned} Rd &= \sum_i p_i Qn_i / \sum_i c_i Iu_i \\ &= p \times Qn / c \times Iu \end{aligned}$$

De lo anterior se puede ver que (gráfico 16-1):

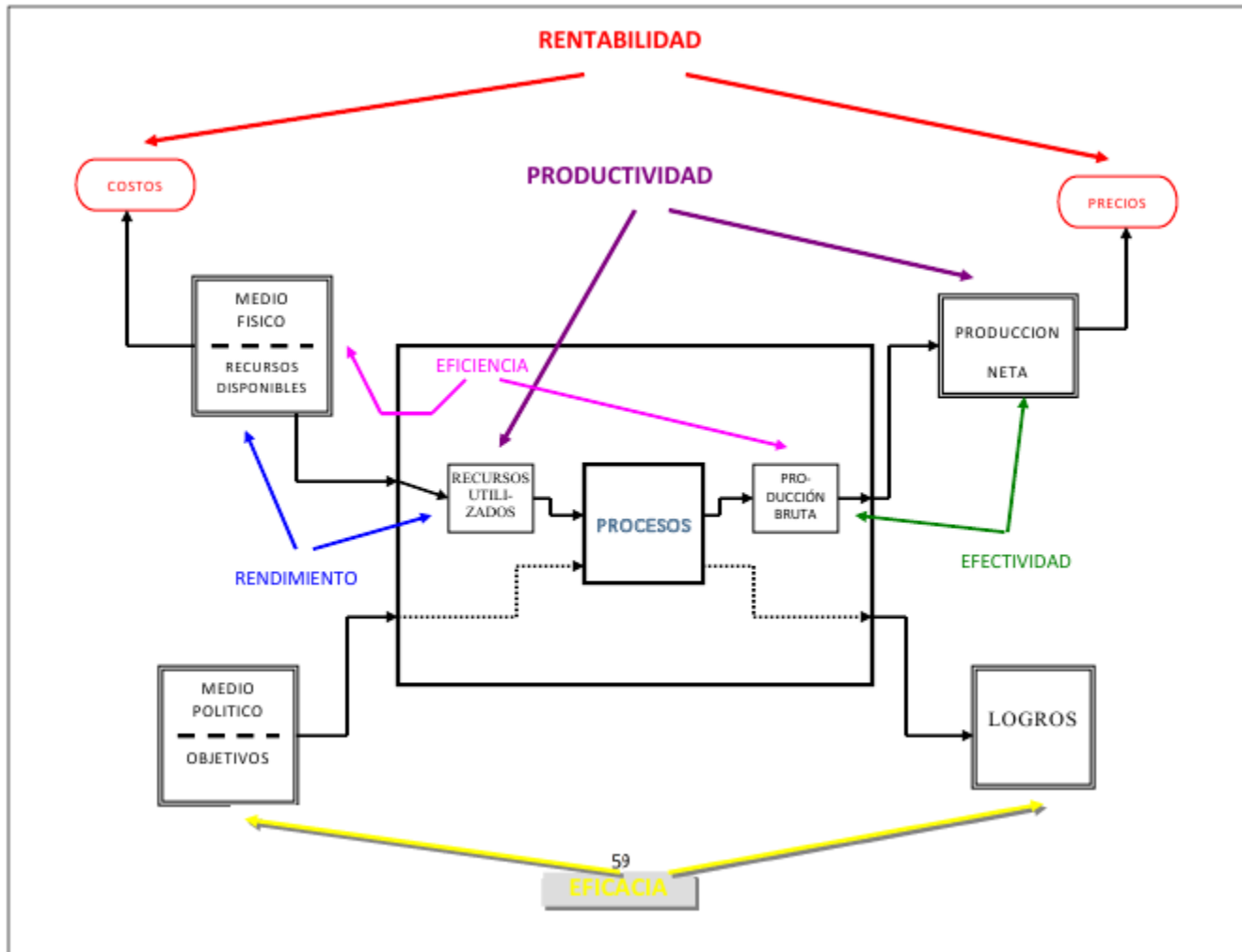
- 1.- La productividad es una medida más general que las de eficiencia, rendimiento y efectividad.
- 2.- Sí el rendimiento y la efectividad son iguales ($Rt = Ed$), entonces la productividad será igual a la eficiencia.
- 3.- Sí el rendimiento aumenta:
 - (a) si es por disminución de los insumos disponibles - permaneciendo constante los insumos efectivamente utilizados
 - la eficiencia aumenta en la misma proporción y
 - la productividad permanece constante;
 - (b) si es por aumento de los insumos efectivamente utilizados dependiendo de lo que suceda con la producción neta, si esta última aumenta en la misma proporción, la productividad se mantendrá, mientras que la eficiencia, ya que la producción bruta es creciente con respecto al aumento de los insumos efectivamente utilizados, aumentará. En otras palabras será necesario recurrir al análisis marginal de la producción.

Gráfico 16-1



- 4.- La rentabilidad: fijado la productividad, se puede aumentar jugando con los precios de venta de los productos (aumentándolos) y con los costos de los insumos (disminuyéndolos). Por lo cual no refleja la estructura productiva de la organización.
- 5.- En general (gráfico 16-2):
- la efectividad es un indicador de los resultados,
 - el rendimiento de los insumos,
 - la eficiencia de las operaciones,
 - la productividad del sistema y sus procesos,
 - la eficacia de los planes y
 - la rentabilidad una medida netamente económica.

Gráfico 16-2



En los indicadores anteriores (con excepción del de rentabilidad), existe obviamente los problemas de las unidades de medidas para los insumos y productos. Pero esto se puede solucionar mediante las técnicas de índices respecto a años bases para un mismo sistema, dividiendo cada indicador entre su indicador base para así tener el índice correspondiente, o mediante el uso de indicadores estándares, y comparar los resultados con estos indicadores estándares.

Además, es bueno señalar que realmente en la utilización de estos indicadores también se pueden calcular respecto a insumos y productos parciales, esto es respecto a los aspectos relevantes del sistema. Esto último permite obtener los valores marginales.

16.2.- Praxeología, sostenibilidad y sustentabilidad

Hoy en día, se plantea que además de que el conjunto de acciones para lograr y mantener un objetivo sean eficientes, también sean sostenibles y sustentables.

Si bien hay diversas definiciones tanto para sostenibilidad como para sustentabilidad, además de que en algunos autores los consideran como sinónimos aquí vamos a usar las siguientes definiciones.

Sostenible: Unas acciones son sostenible si existen los diversos recursos a lo largo del tiempo para realizarlas.

Sustentable: Unas acciones son sustentables si pueden auto-mantenerse en el tiempo. Esto es que no requieren de recursos adicionales para poder realizarse y en el mejor de los casos generar sus propios recursos.

De esta manera la ONG Amartya, en su página www.amartya.org.ar, indica lo siguiente:

La sustentabilidad para una sociedad significa la existencia de condiciones económicas, ecológicas, sociales y políticas que permitan su funcionamiento de forma armónica a lo largo del tiempo y del espacio. En el tiempo, la armonía debe darse entre las generaciones actuales y las venideras; en el espacio, la armonía debe generarse entre los diferentes sectores sociales, entre mujeres y hombres y entre la población con su ambiente.

No puede haber sustentabilidad en una sociedad cuando la riqueza de un sector se logra a costa de la pobreza del otro, cuando unos grupos reprimen a otros, cuando se están destruyendo o terminando los bienes de la naturaleza o cuando el hombre ejerce diversos grados de explotación, violencia y marginación contra la mujer. Tampoco podrá haber sustentabilidad en un mundo que tenga comunidades, países o regiones que no sean sustentables. La sustentabilidad debe ser global, regional, local e individual y debe darse en el campo ecológico, económico, social y político.

A veces se usan indistintamente conceptos como sostenible y sustentable aunque sus significados sean distintos. Sostenible viene de sostener y sustentable de sustentar, las cosas se sostienen desde afuera pero se sustentan desde adentro. Mientras la sostenibilidad se podría lograr con acciones decididas desde afuera, la sustentabilidad requiere que las acciones se decidan desde adentro; en forma autónoma. Además, lo que interesa hacer sustentable es la sociedad, no necesariamente el llamado desarrollo.¹¹⁶

¹¹⁶ http://www.amartya.org.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=59. Consultado el 09-06-2016

Mientras que el informe Bortland de las Naciones Unidas habla de desarrollo duradero y lo define de la siguiente manera:

El desarrollo duradero es el desarrollo que satisface las necesidades de la generación presente sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus propias necesidades.¹¹⁷

De esta manera, formalizando, si un curso de acciones necesita como recursos N_1, N_2, \dots, N_n , es sostenible si existen disponibilidades de m fuentes diferente $D_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ de manera tal que para cada recurso j se cumpla en cualquier momento t :

$$N_j \leq \sum_{i=1}^m D_{i,j}$$

Mientras que es sustentable respecto al recurso j , en el momento t , si se cumple:

1) $N_{j,t} \leq D_{j,t}$

En donde

2) $D_{j,t} = D_{j,t-1} - U_{j,t-1} + P_{j,t-1}$

Siendo $U_{j,t}$ el uso efectivo del recurso j en el momento t y $P_{j,t}$ la producción del mismo.

16.3.- Eficiencia y Utilidad de las Normas y Prescripciones.

Aquí voy a tratar de demostrar que un conjunto de normas para lograr un curso de acciones eficiente y sostenible necesariamente tiene que ser útil.

PA1. Obviamente que la condición A1 se cumple ya que lo primero que se establece es el objetivo del curso de acciones.

PA2. De la misma manera las prescripciones para realizar las acciones se diseñan de manera tal de alcanzar el o los objetivos con alta probabilidad.

PA3. Y, obviamente, son factible de realizarse, ya que de lo contrario no podría lograrse alcanzar el objetivo.

¹¹⁷ Informe de la Comisión Mundial sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo, 1987, Pág. 59. Haciendo causa común". Organizaciones no gubernamentales con sede en Estados Unidos, que se ocupan de desarrollo, medio ambiente y población. Audiencia Pública de la CMMAD. Ottawa, 26-27 de mayo de 1986. Versión digital

- PA4. Obviamente, si el no cumplimiento de las normas es más beneficioso, significa que el curso de acción por no seguir las normas es más eficiente que el curso prescripto. Por lo tanto un curso de acción para ser eficiente tiene que cumplir con A4.
- PA5. Si no seguir las prescripciones es más beneficioso que seguirlas, es obvio que existe un curso de acción más eficiente que el propuesto.
- PA6. Es obvio que si el no seguir la norma es más beneficioso, aun existiendo un castigo por no seguirla, el conjunto de prescripciones no es eficiente. El camino eficiente, sería violar las prescripciones asumiendo el castigo de por este hecho.
- PA7. Si una norma o prescripción es redundante a lo que se debe hacer no añade nada a la eficiencia de la acciones a realizar.
- PA8. Si alguna prescripción es respecto algo que no es posible hacer no tiene sentido hablar de eficiencia de la misma.

Lo contrario no necesariamente se cumple, esto es un conjunto de normas puede ser útil, pero no necesariamente va generar líneas de acción eficientes. Pero si aumenta la posibilidad de lo mismo.

16.4.- Normas, Procedimientos y Praxeología

Aquí vamos a usar el término procedimiento en el siguiente sentido “Método de ejecutar algunas cosas”¹¹⁸.

De esta manera cuando las normas se refieren a un procedimiento para lograr un objetivo, si involucra más de un actor está claro que deben cumplirse las siguientes condiciones para que dicho procedimiento no sea ambiguo, cuando no inútil:

P.1) Si un actor es responsable de realizar una acción, es porque el actor está en posibilidad de realizar esta acción de manera independiente. De manera tal que no se puede responsabilizar a un actor de acciones sobre las cuales no tiene la totalidad del control de la misma.

P.2) Toda acción tiene que estar limitada en el tiempo.

¹¹⁸ RAE.

P.3) Para toda acción, que por alguna razón, no se ha ejecutado, debe existir alguna acción alterna, de manera tal que se pueda ejecutar el procedimiento completo.

P.4) Toda acción debe ser diseñada en base a las circunstancias que puedan darse tanto en el inicio de las mismas como en el transcurso de su desarrollo (Ver capítulo VII).

Pero para que los procedimientos sean eficientes deben cumplirse adicionalmente:

P.5) La suma de los costos y los tiempos de cada acción involucrada debe ser el menor posible. Esto se logra, entre otras cosas, eliminando redundancia, esto es evitar acciones que no añaden ningún valor a los procedimientos.

Entre las herramientas clásicas para lograr esto se tiene la minimización de circuitos lógicos y las diversas vertientes del PERT, y particularmente la simulación.

16.5.- Lógica y Praxeología

16.5.1.- Formulación

Dado que la praxeología se basa en la racionalidad de las decisiones, éstas deben estar sustentadas por la lógica, (ciencia del razonamiento). Los enunciados praxeológicos son de la forma:

Dada una situación o ambiente E en un momento T_0 , debe hacerse (puede hacerse/no se debe hacer) P para obtener (para evitar) unos resultados probables y/o aproximados R , en un momento $T > T_0$.

Este tipo de enunciados implica¹¹⁹:

- 1.- Un lenguaje normativo respecto a las acciones a seguir.
- 2.- Un enfoque modal, respecto a cómo se quiere obtener el resultado.
- 3.- Una evaluación probabilística, respecto a los posibles resultados.
- 4.- Una evaluación de precisión de los objetivos.
- 5.- La utilización de operadores temporales.
- 6.- Relaciones causales entre acciones y resultados¹²⁰.

(119) Un análisis más detallado sobre las lógicas que a continuación se mencionan se encuentra en la parte II de este libro.

¹²⁰ Hacer algo, es generar eventos. Estos eventos tienen consecuencias. Esto es el que toma decisiones piensa que sus acciones se van a traducir en eventos que van generar unas consecuencias (por lo general las consecuencias deseadas).

Pero dado que la praxeología exige la eficiencia de las acciones el enunciado anterior debe reformularse de la siguiente manera:

Dada una situación o ambiente E en un momento T_0 , debe hacerse (puede hacerse/no se debe hacer) A para obtener (para evitar) unos resultados probables y/o aproximados R , en un momento $T > T_0$. De manera tal que A sea el conjunto de acciones lo más eficiente posible.

En otras palabras si existe otro conjunto de acciones A' entonces A debe ser más eficiente que A' .

16.5.2.- La relación de eficiencia

Pero, aquí empieza el problema. Si bien tradicionalmente la eficiencia estaba vinculada a lo crematístico, hoy en día el concepto se vincula a otros conceptos tales como la contaminación en sus diversas formas, el uso de la energía, la calidad de vida, etc.

De manera tal que el concepto de eficiencia se convirtió en una variable multidimensional.¹²¹

Así, la eficiencia E de un conjunto de acciones A , vendría expresado como:

$$E(A) = [e_1(A), e_2(A), \dots, e_n(A)],$$

En donde cada uno de los e_i es uno de los criterios de eficiencia.

De esta manera se puede afirmar que el conjunto de acciones A es más eficiente que el conjunto de acciones A' y se denota por $E(A) \succ E(A')$ si:

- 1) $e_i(A) \geq e_i(A')$, $i = 1, 2, \dots, n$
- 2) $e_j(A) > e_j(A')$ para algún j

Pero ¿qué pasa si se da que ni $E(A) \succ E(A')$, ni $E(A') \succ E(A)$, dado que $e_i(A) > e_i(A')$ y $e_j(A') > e_j(A)$ para algunos i e algunos j ?

¹²¹ Esto es, se debe tomar en cuenta también los efectos colaterales, los cuales pueden ser tanto benévolos o dañinos. Amartya Sen, en *Desarrollo y Libertad*, págs. 306-309, releva la importancia de los mismos y los denomina **consecuencias inintencionadas**.

Si bien, en algunos casos es posible combinar ambos conjunto de acciones de manera tal de tener un nuevos curso de acción A^* cuya eficiencia es mayor que ambas ($E(A^*) > E(A')$ y $E(A^*) > E(A)$), esto no siempre es posible.

En estos casos queda la pregunta ¿Qué hacer?

- 1) En las teorías clásicas se suele llevar todo a un solo número mediante alguna función: $E(A) = f([e_1(A), e_2(A), \dots, e_n(A)])$. Esta función casi siempre es una suma ponderada de cada una de las eficiencias:

$$E(A) = p_1 e_1(A) + p_2 e_2(A) + \dots + p_n e_n(A).$$

Pero aquí vale la pena preguntarse, sea cualquiera que sea el criterio, sea tanto para establecer la función como para establecer pesos ¿Son acaso los planificadores unos dioses o unos entes supra humanos, para tomar este tipo de decisiones?

- 2) Otro de los criterios, es de someter la decisión a consulta. Algo aparentemente muy democrático. Pero ¿Cómo se toma en cuenta el voto de los que no han nacido todavía, cuando estas decisiones afectan a las próximas generaciones?
- 3) Lo otro, que también se puede hacer es evaluar lo niveles de tolerancia para las ineficiencias y partir de ahí plantear el problema como un problema de programación multi objetivos o programación por metas. Pero ¿Hasta dónde y cuándo se puede repetir este proceso?
- 4) Lo que realmente debería hacerse es buscar una nueva vía o curso de acción, usando la creatividad, que supere a los dos anteriores. Mientras se logre esto, archivar el objetivo.

16.5.3.- Acciones y causalidad

Es de notar que las acciones para lograr un objetivo (u obra) siguen la lógica de la causalidad, esto es:

- En una secuencia de acciones para realizar una obra no deberían ser acciones que generen causas espurias, osea todas las acciones tienen que generar causas genuinas.
- De existir la posibilidad de la existencia de eventos atenuantes o inhibidores, se deben buscar acciones que contraresten dichos eventos.

En base a esto, para tomar decisiones, sean estas estratégicas o tácticas, se debe:

- 1) Definir bien los resultados que se quieren obtener.
- 2) Hacer un análisis exhaustivo de la situación actual.
- 3) Diseñar los diversos cursos de acciones que tengan posibilidad de lograr los resultados deseados.
- 4) Para cada uno de los cursos de acciones:
 - 4.1) Evaluar la posibilidad de estos resultados.¹²² Recordar que mientras mayor rapidez en la obtención de los resultados, menor posibilidad de la aparición de eventos perturbadores.
 - 4.2) Evaluar si existe, la posibilidad de que surjan eventos perturbadores. De ser así ¿las consecuencias de los mismos son beneficiosas o no? De ser así ¿se está listo para aprovecharlas?¹²³

¹²² Si bien la relación de causa-efecto no es transitiva (en el caso de que $Pr \approx 1$ se puede decir que es casi transitiva), se tiene:

Si

$$(C_{r1}; S_{r1}) \underset{Pr1}{\Rightarrow} (C_{r2}; S_{r2})$$

y

$$(C_{r2}; S_{r2}) \underset{Pr2}{\Rightarrow} (C_{r3}; S_{r3})$$

Entonces:

$$(C_{r1}; S_{r1}) \underset{Pr1*Pr2}{\Rightarrow} (C_{r3}; S_{r3})$$

De hecho, como se puede observar en la siguiente tabla, a menos que los grados de las propensiones (probabilidades) sean muy altos, 99%, las propensiones tienden a caer rápidamente. Así, por ejemplo con un grado de propensión del 80%, ya la propensión del cuarto paso cae a un 41%.

| longitud de la cadena | Probabilidades de la relación causa-efecto | | | | | |
|-----------------------|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 0,999 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 |
| 1 | 0,999 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 |
| 2 | 0,998001 | 0,9801 | 0,9604 | 0,9025 | 0,81 | 0,64 |
| 3 | 0,997003 | 0,970299 | 0,941192 | 0,857375 | 0,729000 | 0,512000 |
| 4 | 0,996006 | 0,960596 | 0,922368 | 0,814506 | 0,656100 | 0,409600 |
| 5 | 0,995010 | 0,950990 | 0,903921 | 0,773781 | 0,590490 | 0,327680 |
| 6 | 0,994015 | 0,941480 | 0,885842 | 0,735092 | 0,531441 | 0,262144 |
| 7 | 0,993021 | 0,932065 | 0,868126 | 0,698337 | 0,478297 | 0,209715 |
| 8 | 0,992028 | 0,922745 | 0,850763 | 0,663420 | 0,430467 | 0,167772 |
| 9 | 0,991036 | 0,913517 | 0,833748 | 0,630249 | 0,387420 | 0,134218 |
| 10 | 0,990045 | 0,904382 | 0,817073 | 0,598737 | 0,348678 | 0,107374 |

¹²³ Los eventos perturbadores pueden proceder bien sea de un competidor o de un aliado, o de un fenómeno natural o social.

- 4.3) Evaluar si existe, la posibilidad de que surjan eventos o situaciones atenuantes o inhibidores.
 - 4.3.1) De existir la posibilidad de que surjan eventos o situaciones atenuantes, evaluar la probabilidad de que surjan, y recalcular otra vez la probabilidad de la obtención de los resultados deseados.
 - 4.3.2) De existir la posibilidad de que surjan eventos o situaciones inhibidores, evaluar la probabilidad de que surjan. Si la posibilidad es alta, buscar cómo enfrentarlos o contrarrestarlos. Si esto no es posible, olvidarse de este curso acción.
- 4.4) Analizar la posibilidad de resultados colaterales. De existir esta posibilidad, evaluarlos a fin de conocer sus beneficios o costos. Estos resultados deben ser incorporados al análisis de la eficiencia de los mismos.¹²⁴
- 4.5) Analizar la rapidez de cada curso de acción. Si bien a mayor rapidez, menor posibilidad de la aparición de eventos perturbadores, no necesariamente los resultados que se obtienen son sostenibles. Además también pueden aparecer situaciones y eventos que mejoren la posibilidad de tener buenos resultados.
- 5) Ordenar el conjunto de cursos de acciones en base a la eficiencia y la probabilidad de obtención de los resultados de los mismos.

En el capítulo 17 se darán algunas herramientas para realizar la secuenciación de las actividades.

16.5.4.- Lógica de las acciones

Definición: Llamaremos **praxis** a un conjunto de acciones, para tratar de lograr un objetivo o fin.

Definición: Se dirá que una praxis fue **correcta** si se logro obtener el resultado, de lo contrario se dirá que fue **incorrecta**.

¹²⁴ Para un análisis detallado del análisis de eficiencia consultar 15.5.2 de Lógica y Praxis.

Definición: Cualquier acción realizada y sin la cual también se hubiera obtenido el mismo resultado, es una acción **superflua**.

Definición: Cualquier acción sin la cual no se puede lograr un objetivo, es una acción **necesaria**.

Si una acción necesaria dentro de una praxis está prohibida por alguna norma, se presenta un dilema praxis-ética. Si el objetivo de ésta praxis es lograr un mejoramiento deseado socialmente, esta norma sería una norma socialmente contraproducente (ver 14.1). De lo contrario, o se viola la norma (problema ético) o se busca una nueva praxis (problema práctico) para lograr este objetivo.

Si existen dos praxis, A y B, para lograr el mismo resultado O, se preferirá la que tiene mayor probabilidad de éxito. Esto es:

$$P(O|A) > P(O|B) \rightarrow A > B$$

16.5.5.- Prevención y Praxeología

Las acciones de prevención son aquellas se ejecutan de manera anticipada a fin de evitar un daño o inconveniente.

Es de recordar (ver capítulo 11) que existen eventos atenuantes o inhibidores y eventos que son causa de eventos no deseables, los cuales se pueden prevenir con acciones inhibidoras de los mismos. Realizar dichas acciones es parte de políticas preventivas. Esto es, **no esperar que ocurran eventos indeseables para atacar las consecuencias**, sino atacar de manera anticipada las causas, evitar que estas ocurran.

CAPÍTULO 17

ALGUNAS HERRAMIENTAS PARA LA PRAXEOLOGÍA

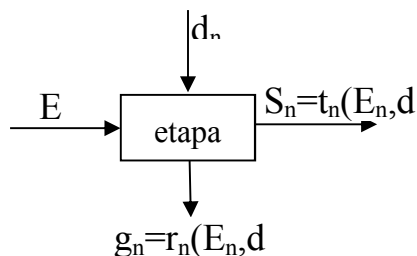
17.1.- Praxeología y Programación Dinámica¹²⁵

En el caso en el cual para lograr un objetivo son necesarias de varias acciones encadenadas, una manera de obtener la cadena óptima de las mismas es mediante la Programación Dinámica que resuelve problemas de optimización a múltiples etapas y su fundamento es el siguiente principio (Principio de Optimalidad de Bellman):

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualesquiera que sean el estado y decisiones iniciales (es decir, el control), las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión."

Y su desarrollo se puede resumir de la siguiente manera:

Una etapa de manera genérica se puede representar como la siguiente caja:



En donde:

E_n = Es la entrada a la etapa n

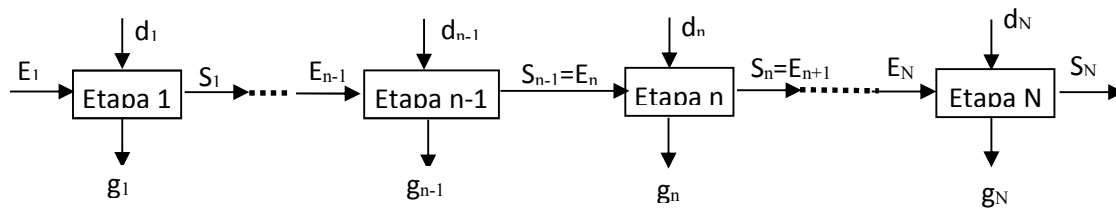
S_n = la salida

d_n = la decisión

$g_n = r_n(E_n, d_n)$ el retorno.

¹²⁵ Para más detalles sobre la programación dinámica consultar www.hthonon.blogspot.com

Mientras que la cadena completa quedaría representada de la siguiente manera:



Representando la serie se tiene:

El objetivo es:

$$\max(\text{o min}) g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n \otimes \dots \otimes g_N$$

$$\text{S.A: } E_1 = K_1$$

$$S_N = K_N$$

$$E_n = S_{n-1}$$

$$S_n = t_n(E_n, d_n)$$

Por lo que se tiene:

$$f_N^*(E_N) = \text{Opt}_{d_N} \{r_N(E_N, d_N)\}$$

$$f_{N-1}^*(E_{N-1}) = \text{Opt}_{d_{N-1}} \{r_{N-1}(E_{N-1}, d_{N-1}) \otimes f_N(E_N)\}$$

$$E_N = t_{N-1}(E_{N-1}, d_{N-1})$$

$$\vdots$$

$$f_1^*(E_1) = \text{Opt}_{d_1} \{r_1(E_1, d_1) \otimes f_2(E_2)\}$$

$$E_2 = t_1(E_1, d_1)$$

De esta manera, recordando que el óptimo es un óptimo de eficiencia multidimensional, la Programación Dinámica, puede ser una herramienta poderosa para hallar una secuencia de acciones eficientes para lograr un objetivo.

Pero luego de lograr un objetivo, éste, en muchos casos, hay que mantenerlo y las acciones correspondientes también tienen que ser eficientes.

Uno de los ejemplos clásicos de de Programación Dinámica es el de Producción e inventarios para varios periodos para los cuales se conoce la demanda. Pero estos problemas, con los

buenos paquetes programación lineal, existentes hoy en día, es mejor plantearlos como problemas de programación lineal.

Veamos el siguiente ejemplo tomado del libro de Billy E. Gillett¹²⁶:

Una empresa sus demandas para los siguientes 6 periodos vienen dadas por la siguiente tabla:

| Periodos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|----|---|
| Demandas | 8 | 4 | 6 | 2 | 10 | 4 |

Los costos de fijos de producción son de \$20 por lote y los variable de \$5 por unidad, y los costos de los inventarios finales de cada periodo de \$1 por unidad.

Y los inventarios iniciales son cero, y los finales también.

En base a lo anterior se tiene el siguiente planteamiento de programación lineal:

```

PL:
VAR:
  P1,P2,P3,P4,P5,P6, _      ' Pi Niveles de producción en el Periodo i
  IF1,IF2,IF3,IF4,IF5, _   ' IFi Inventarios finales del Periodo i
  L1,L2,L3,L4,L5,L6       ' Li va haber lote de producción
MIN:
  5*P1+5*P2+5*P3+5*P4+5*P5+5*P6+_      'Costos variables de producción
  IF1+IF2+IF3+IF4+IF5+_                 'Costos de los Inventarios finales
  20*L1+20*L2+20*L3+20*L4+20*L5+20*L6  'Costos fijos de producción
SA:
  P1 > 8                                ' En periodo 1 la producción mayor que la demanda
  P1 + (-1)*IF1 = 8                     ' En periodo 1, IF1 = P1 - 8
  P2 + IF1 > 4                           ' Para los demás periodos:
  P2 + IF1+ (-1)*IF2 = 4                 ' La producción más el inventario del
  P3 + IF2 > 6                             ' periodo anterior debe ser mayor que la demanda
  P3 + IF2+ (-1)*IF3 = 6                 ' Pi + IF(i-1) > Di
  P4 + IF3 > 2                             ' El inventario final es la diferencia entre
  P4 + IF3+ (-1)*IF4 = 2                 ' inventario inicial+la producción y la demanda
  P5 + IF4 > 10                           ' IFi = Pi+IF(i-1)-Di
  P5 + IF4+ (-1)*IF5 = 10
  P6 + IF5 > 2
  P1 + (-100)*L1 < 0                      ' solo puede haber producción por lote.
  P2 + (-100)*L2 < 0
  P3 + (-100)*L3 < 0
  P4 + (-100)*L4 < 0
  P5 + (-100)*L5 < 0
  P6 + (-100)*L6 < 0
BIN:
  L1,L2,L3,L4,L5,L6                      ' Hay (1) o no hay (0) producción

```

Cuyos resultados fueron:

¹²⁶ Gillett, Billy E.: Introduction to Operations Research. A Computer-Oriented Algorithmic Approach. McGraw-Hill. 1976. Págs.38-50.

RESULTADOS DEL PROBLEMA

Z =: 224

SOLUCIÓN DE LAS VARIABLES CONTINUAS

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|----------|------------|----------------|
| P1 | 20.0000000 | 0.0000000 |
| P2 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| P3 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| P4 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| P5 | 12.0000000 | 0.0000000 |
| P6 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| IF1 | 12.0000000 | 0.0000000 |
| IF2 | 8.0000000 | 0.0000000 |
| IF3 | 2.0000000 | 0.0000000 |
| IF4 | 0.0000000 | 4.0000000 |
| IF5 | 2.0000000 | 0.0000000 |

| RESTRICCION | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
|-------------|------------|----------------|
| PROD1 | 12.0000000 | 0.0000000 |
| IVNF1 | 0.0000000 | -5.0000000 |
| PROD2 | 8.0000000 | 0.0000000 |
| IVNF2 | 0.0000000 | -6.0000000 |
| PROD3 | 2.0000000 | 0.0000000 |
| IVNF3 | 0.0000000 | -7.0000000 |
| PROD4 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| IVNF4 | 0.0000000 | -8.0000000 |
| PROD5 | 2.0000000 | 0.0000000 |
| IVNF5 | 0.0000000 | -5.0000000 |
| PROD6 | 0.0000000 | 6.0000000 |
| HAYL1 | 80.0000000 | 0.0000000 |
| HAYL2 | 0.0000000 | 1.0000000 |
| HAYL3 | 0.0000000 | 2.0000000 |
| HAYL4 | 0.0000000 | 3.0000000 |
| HAYL5 | 88.0000000 | 0.0000000 |
| HAYL6 | 0.0000000 | 1.0000000 |

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

| VARIABLE | COEF. ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCION ADMISIBLE |
|----------|---------------|----------------------|-----------------------|
| P1 | 0.0000000 | ===== | 1.0000000 |
| P2 | 0.0000000 | 1.0000000 | ===== |
| P3 | 0.0000000 | 2.0000000 | ===== |
| P4 | 0.0000000 | 3.0000000 | ===== |
| P5 | 0.0000000 | 4.0000000 | 1.0000000 |
| P6 | 0.0000000 | 1.0000000 | ===== |
| IF1 | 0.0000000 | ===== | 1.0000000 |
| IF2 | 0.0000000 | ===== | 2.0000000 |
| IF3 | 0.0000000 | ===== | 3.0000000 |
| IF4 | 0.0000000 | ===== | 4.0000000 |
| IF5 | 0.0000000 | ===== | 1.0000000 |

| RESTRICCION | RECURSO ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCION ADMISIBLE |
|-------------|-----------------|----------------------|-----------------------|
| PROD1 | 0.0000000 | 12.0000000 | ===== |
| IVNF1 | 0.0000000 | 80.0000000 | 12.0000000 |
| PROD2 | 0.0000000 | 8.0000000 | ===== |
| IVNF2 | 0.0000000 | 80.0000000 | 8.0000000 |
| PROD3 | 0.0000000 | 2.0000000 | ===== |
| IVNF3 | 0.0000000 | 80.0000000 | 2.0000000 |
| PROD4 | 0.0000000 | 0.0000000 | ===== |
| IVNF4 | 0.0000000 | 80.0000000 | 0.0000000 |
| PROD5 | 0.0000000 | 2.0000000 | ===== |
| IVNF5 | 0.0000000 | 88.0000000 | 2.0000000 |
| PROD6 | 0.0000000 | 88.0000000 | 2.0000000 |
| HAYL1 | 0.0000000 | ===== | 80.0000000 |
| HAYL2 | 0.0000000 | 12.0000000 | 0.0000000 |
| HAYL3 | 0.0000000 | 8.0000000 | 0.0000000 |
| HAYL4 | 0.0000000 | 2.0000000 | 0.0000000 |
| HAYL5 | 0.0000000 | ===== | 88.0000000 |
| HAYL6 | 0.0000000 | 2.0000000 | 0.0000000 |

VALOR DE LAS VARIABLES BINARIAS

| VARIABLE | VALOR |
|----------|-----------|
| L1 | 1.0000000 |
| L2 | 0.0000000 |
| L3 | 0.0000000 |
| L4 | 0.0000000 |
| L5 | 1.0000000 |
| L6 | 0.0000000 |

El cuál coincide con el obtenido por B. Gillett aplicando programación dinámica. De lo más importante de la programación dinámica es su principio, que el buen camino se traza desde el principio del mismo.

17.2.- Programacion Por Metas

En la programación económica se puede considerar que el conjunto de restricciones son las metas a cumplir. En algunos casos este conjunto de restricciones forma un conjunto vacío. Esto puede suceder por dos motivos:

- 1.- **Mal planteamiento del problema:** Siempre es bueno y saludable revisar el planteamiento del problema a fin de verificar si todas las ecuaciones han sido bien planteadas
- 2.- **Imposibilidad real de cumplir todas las restricciones:** En este caso se recurre a la programación por metas.

17.2.1.- Pasos para la programación por metas:

Para plantear un problema por programación por metas se debe:

- 1.- Clasificar las restricciones o metas entre las que son de obligatorio cumplimiento y las que permiten desviaciones.
- 2.- Analizar que tipo de desviación se puede dar en cada meta, esto es si son desviaciones en exceso o en falta.
- 3.- Verificar si las diversas restricciones están en medidas similares o si es preferible trabajar con desviaciones relativas.
- 4.- Verificar si todas las desviaciones tienen la misma importancia, o si se tiene una escala de preferencia para las mismas.
- 5.- Que forma de desviaciones utilizar: suma, suma de cuadrados, o minmax.

17.2.2.- Técnicas¹²⁷:**1.- Conversión de restricciones en ecuaciones de metas:****a) Igualdades:**

Las ecuaciones de la forma:

$$\sum_j a_{i,j} x_j = b_i$$

se convierte transforma en la siguiente ecuación:

$$\sum_j a_{i,j} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

en donde d_i^- es la desviación en falta (o negativa) y d_i^+ es la desviación en exceso (o positiva).

b) Desigualdades de menor o igual:

Las inecuaciones de la forma:

$$\sum_j a_{i,j} x_j \leq b_i$$

se convierte transforma en la siguiente ecuación:

$$\sum_j a_{i,j} x_j - d_i^+ \leq b_i$$

en donde d_i^+ es la desviación en exceso (o positiva).

c) Desigualdades de mayor o igual:

Las inecuaciones de la forma:

$$\sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i$$

se convierte transforma en la siguiente ecuación:

$$\sum_j a_{i,j} x_j + d_i^- \geq b_i$$

en donde d_i^- es la desviación en falta (o negativa).

(¹²⁷) Vamos a suponer que todas restricciones son lineales

2.- Conversión de ecuaciones con desviaciones absolutas en ecuaciones con desviaciones relativas.

Una ecuación escrita con desviaciones absolutas como:

$$\sum_j a_{i,j} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i$$

se convierte en una de desviaciones relativas dividiendo ambos lados de la ecuación entre b_i :

$$\sum_j (a_{i,j}/b_i) x_j + \delta_i^- - \delta_i^+ = 1;$$

en donde δ_i^- y δ_i^+ son las desviaciones relativas negativas y positivas respectivamente. De esta manera que la siguiente ecuación:

$$\sum_j \alpha_{i,j} x_j + \delta_i^- - \delta_i^+ = 1;$$

en donde $\alpha_{i,j} = a_{i,j}/b_i$.

3.- Planteamientos de la función objetivo.

a) Suma ponderada de las desviaciones.

En el caso en que se quiere tomar la suma de las desviaciones priorizadas, el planteamiento de la función objetivo es el siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_i p_i^- \delta_i^- + p_i^+ \delta_i^+;$$

en donde p_i^- y p_i^+ son los pesos o prioridades que se le asigna a cada una de las desviaciones.

Este planteamiento tiene la gran desventaja para muchos problemas que una desviación puede llegar a ser muy grande (100%) mientras algunas pueden ser muy pequeñas (0%). Esto es las desviaciones pequeñas se balancean (o compensan) proporcionalmente con desviaciones grandes.

b) Suma ponderada del cuadrado de las desviaciones.

En el caso en que se quiere tomar la suma de los cuadrados de las desviaciones priorizadas, el planteamiento de la función objetivo es el siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_i p_i^- (\delta_i^-)^2 + p_i^+ (\delta_i^+)^2;$$

en donde p_i^- y p_i^+ son los pesos o prioridades que se le asigna a cada una de las desviaciones.

Con este planteamiento ya las desviaciones pequeñas no se compensan proporcionalmente con desviaciones grandes. De hecho al ser cuadrática la función los valores grandes toman mucho más peso que los pequeños. Pero si presenta el inconveniente de tener, para problemas grandes tener que acudir a algoritmos más difíciles tales como la programación cuadrática.

c) Minimizar la máxima desviación (Minmax)

En el caso en que se quiere tomar la mínima de la mayor desviación priorizadas, el planteamiento del problema es el siguiente:

$$\text{Minimizar } \delta;$$

con las siguientes ecuaciones adicionales :

$$p_i^- \delta_i^- \leq \delta$$

$$p_i^+ \delta_i^+ \leq \delta$$

Aunque el problema se puede reducir haciendo las siguientes sustituciones:

$$\delta^- \leq \delta$$

$$\delta^+ \leq \delta$$

y las inecuaciones de desigualdad \leq , por

$$\sum_j \alpha_{i,j} x_j - (1/ p_i^+) \delta^+ \leq 1,$$

las inecuaciones de desigualdad \geq , por

$$\sum_j \alpha_{i,j} x_j + (1/ p_i^-) \delta^- \geq 1,$$

y las ecuaciones por

$$\sum_j \alpha_{i,j} x_j + (1/ p_i^-) \delta^- - (1/ p_i^+) \delta^+ \geq 1,$$

en donde p_i^- y p_i^+ son los pesos o prioridades que se le asigna a cada una de las desviaciones.

Este planteamiento garantiza que ninguna desviación va a poder tomar un valor excesivamente grande, a cuenta de una disminución de la demás.

d.- Restricciones adicionales

En algunos casos también se pueden plantear restricciones adicionales sobre las desviaciones, tales como algunas de ellas no sobre pase algún valor umbral:

$$\delta_i^- \leq u_i^-$$

$$\delta_i^+ \leq u_i^+$$

o también que alguna de ellas sea menor o mayor que otra

$$\delta_i^{+/-} \leq \delta_j^{+/-}$$

4.- Obtención de las prioridades (o ponderaciones)

Para obtener los pesos y/o prioridades a asignar a cada una de las desviaciones primero hay que partir de sí el problema proviene de una decisión de alcance individual (o particular) o si es en función de un colectivo¹²⁸.

a.- Decisión individual

En este caso se recomienda utilizar alguna técnica (o una mezcla de ellas) de la que aparecen de manera cada vez más común en los diversos libros de Decisiones en los capítulos de decisiones múlti-objetivos o decisiones con objetivos múltiples.

Casi todas ellas están basadas en determinar de alguna manera las preferencias individuales del decisor. En comparar de alguna manera los valores individuales de los diversos objetivos a fin de construir de alguna función de utilidad.

b.- Decisiones en función un colectivo

(¹²⁸) No confundir una decisión que toma un individuo en función de un colectivo, con las mal llamadas decisiones colectivas.

Primero hay que dejar muy en claro que son muy diferente desde diversos puntos de vista – ontológico, epistemológico, metodológico, etc. – las decisiones de un individuo (o ente) por un colectivo que las “decisiones colectivas”, ya que en el primer caso es un individuo que se abroga cierta autoridad sobre el colectivo que toma decisiones en función del mismo, mientras que en el segundo caso se busca un acuerdo de un colectivo mediante diversos mecanismo.

De esta manera cuando se toma decisiones en función de un colectivo se ponderan diversos parámetros tales como importancia y tamaño de la población involucrada, los efectos sobre otros grupos, medidas ponderadas de preferencias individuales o de grupo, pero siempre termina habiendo en alguna medida las preferencias del decisor.

De cualquier manera por lo general, sino hay muy buenas razones para suponer que las diversas metas tienen diferentes prioridades, es preferible asignarle a todas la misma ponderación

EJEMPLO:

Supóngase que en cierto Estado se tiene un presupuesto de 15 millardos para invertir en obras sociales y se quiere: construir 2000 soluciones habitacionales, de las cuales al menos el 10% debe ser de tipo medio y los costos son de Bs. 10 y 20 millones para las tipo Económicas y tipo Medio respectivamente; construir 20 escuelas de la cuales se aspira que el 20% cuente con el ciclo básico completo y cuyo costos son de Bs. 100 millones para las de primaria y 250 millones para los ciclos básicos completos, y 10 dispensarios de los cuales se quiere que 10% de ellos estén equipados para una atención medica completa (incluyendo operaciones menores) y los costos de los mismos son de Bs. 150 millones para los de asistencia primaria y Bs. 500 millones para los de asistencia completa.

Se puede facilmente comprobar que los Bs. 15 millones no alcanzan:

| descripción | variable | Costo unitario (millones de Bs.) | cantidad | Costo total (millones de Bs.) |
|-------------------------------|----------|-------------------------------------|----------|----------------------------------|
| Casas económicas | QCE | 10 | 1800 | 18.000 |
| Casas medias | QCM | 20 | 200 | 4.000 |
| Escuelas primarias | QEP | 100 | 16 | 1.600 |
| Ciclos Básicos | QCB | 250 | 4 | 1.000 |
| Centro de asistencia primaria | QCAP | 150 | 9 | 1.350 |
| Centro de asistencia completa | QCAM | 500 | 1 | 500 |
| TOTAL | | | | 26.450 |

De esta manera quedan las siguientes ecuaciones de metas:

PRESUPUESTO:

$$10 QCE + 20 QCM + 100 QEP + 250 QCB + 150 QCAP + 500 QCAM \leq 15000$$

CASAS:

$$QCE + QCM \geq 2.000$$

CM:

$$-0,10 QCE + 0,90 QCM \geq 0.0 \quad (QCM \geq 0,1 (QCE + QCM))$$

ESCUELAS:

$$QEP + QCB \geq 20$$

CBAS:

$$-0,20 QEP + 0,80 QCB \geq 0.0 \quad (QCB \geq 0,2 (QEP + QCB))$$

DISP:

$$QCAP + QCAM \geq 10$$

CAM:

$$-0.10 QCAP + 0.90 QCAM \geq 0.0 \quad (QCAM \geq 0,1 (QCAP + QCAM))$$

Veamos ahora los diversos planteamientos y sus soluciones, suponiendo que todas las prioridades son las mismas:

Suma de la desviaciones

```

PM:
VAR:
  PL:
M VAR:
  QCE, QCM, QEP, QCB, QCAP, QCAM, _
S/ DPCASAS, DPRCMCE, DPESCUELAS, DPRCBASEP, DPDISP, DPRCAMCAP
[MIN:
M [Suma Desviaciones:] DPCASAS+DPRCMCE+DPESCUELAS+DPRCBASEP+DPDISP+DPRCAMCAP
SA:
I [PRESUPUESTO] 10*QCE+ 20*QCM+ 100*QEP+ 250*QCB+ 150*QCAP+ 500*QCAM< 15000
I [CASAS] .0005*QCE+ .0005*QCM+DPCASAS> 1
I [RCMCE] (-.1)*QCE+ .9*QCM+DPRCMCE> 0
I [ESCUELAS] .05*QEP+ .05*QCB+DPESCUELAS> 1
I [RCBASEP] (-.2)*QEP+ .8*QCB+DPRCBASEP> 0
E [DISP] .1*QCAP+ .1*QCAM+DPDISP> 1
E [RCAMCAP] (-.1)*QCAP+ .9*QCAM+DPRCAMCAP> 0
ENT:
QCE, QCM, QEP, QCB, QCAP, QCAM

```

RESULTADOS DEL PROBLEMA
SOLUCIÓN DE CONTINUO

=====

Suma Desviaciones:: .5204545454545

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|-------------|-------------|----------------|
| QCE | 863.1818182 | 0.0000000 |
| QCM | 95.9090909 | 0.0000000 |
| QEP | 16.0000000 | 0.0000000 |
| QCB | 4.0000000 | 0.0000000 |
| QCAP | 9.0000000 | 0.0000000 |
| QCAM | 1.0000000 | 0.0000000 |
| DPCASAS | 0.5204545 | 0.0000000 |
| DPRCME | 0.0000000 | 0.9995455 |
| DPESCUELAS | 0.0000000 | 0.8818182 |
| DPRCBASEP | 0.0000000 | 0.9931818 |
| DPDISP | 0.0000000 | 0.9159091 |
| DPRCAMCAP | 0.0000000 | 0.9840909 |
| RESTRICCIÓN | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
| PRESUPUESTO | 0.0000000 | 0.0000455 |
| CASAS | 0.0000000 | 1.0000000 |
| RCMCE | 0.0000000 | 0.0004545 |
| ESCUELAS | 0.0000000 | 0.1181818 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 0.0068182 |
| DISP | 0.0000000 | 0.0840909 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 0.0159091 |

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

=====

| VARIABLE | COEF. ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCIÓN ADMISIBLE |
|-------------|-----------------|----------------------|-----------------------|
| QCE | 0.0000000 | 0.0002500 | 0.0041453 |
| QCM | 0.0000000 | 0.0050000 | 0.0005000 |
| QEP | 0.0000000 | 0.0068182 | 0.0073864 |
| QCB | 0.0000000 | 0.2204545 | 0.0068182 |
| QCAP | 0.0000000 | 0.0159091 | 0.0093434 |
| QCAM | 0.0000000 | 0.9159091 | 0.0159091 |
| DPCASAS | 1.0000000 | 7.4615385 | 1.0000000 |
| DPRCME | 1.0000000 | ===== | 0.9995455 |
| DPESCUELAS | 1.0000000 | ===== | 0.8818182 |
| DPRCBASEP | 1.0000000 | ===== | 0.9931818 |
| DPDISP | 1.0000000 | ===== | 0.9159091 |
| DPRCAMCAP | 1.0000000 | ===== | 0.9840909 |
| RESTRICCIÓN | RECURSO ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCIÓN ADMISIBLE |
| PRESUPUESTO | 15000.0000000 | 11450.0000000 | 10550.0000000 |
| CASAS | 1.0000000 | ===== | 0.5204545 |
| RCMCE | 0.0000000 | 474.7500000 | 105.5000000 |
| ESCUELAS | 1.0000000 | 4.0576923 | 1.0000000 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 16.0000000 | 4.0000000 |
| DISP | 1.0000000 | 5.7027027 | 1.0000000 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 9.0000000 | 1.0000000 |

RESULTADOS DEL PROBLEMA
SOLUCION ENTERA

=====

Suma Desviaciones:: .5205

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|------------|-------------|----------------|
| QCE | 863.0000000 | 0.0000000 |
| QCM | 96.0000000 | 0.0000000 |
| QEP | 16.0000000 | 0.0000000 |
| QCB | 4.0000000 | 0.0000000 |
| QCAP | 9.0000000 | 0.0000000 |
| QCAM | 1.0000000 | 0.0000000 |
| DPCASAS | 0.5205000 | 0.0000000 |
| DPRCME | 0.0000000 | 1.0000000 |
| DPESCUELAS | 0.0000000 | 0.0000000 |
| DPRCBASEP | 0.0000000 | 0.9962500 |
| DPDISP | 0.0000000 | 0.9537500 |
| DPRCAMCAP | 0.0000000 | 0.9912500 |

| RESTRICCION | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
|-------------|-----------|----------------|
| PRESUPUESTO | 0.0000000 | 0.0000250 |
| CASAS | 0.0000000 | 1.0000000 |
| RCMCE | 0.1000000 | 0.0000000 |
| ESCUELAS | 0.0000000 | 0.0650000 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 0.0037500 |
| DISP | 0.0000000 | 0.0462500 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 0.0087500 |

Mínima desviación máxima

PL:
VAR: QCE,QCM,QEP,QCB,QCAP,QCAM,_
DMAX
MIN:
[Mínima Desviación Máxima:]DMAX
SA:
[PRESUPUESTO] 10*QCE+ 20*QCM+ 100*QEP+ 250*QCB+ 150*QCAP+ 500*QCAM< 15000
[CASAS] .0005*QCE+ .0005*QCM+DMAX> 1
[RCMCE] (-.1)*QCE+ .9*QCM+DMAX> 0
[ESCUELAS] .05*QEP+ .05*QCB+DMAX> 1
[RCBASEP] (-.2)*QEP+ .8*QCB+DMAX> 0
[DISP] .1*QCAP+ .1*QCAM+DMAX> 1
[RCAMCAP] (-.1)*QCAP+ .9*QCAM+DMAX> 0
ENT:
QCE,QCM,QEP,QCB,QCAP,QCAM

RESULTADOS DEL PROBLEMA
SOLUCIÓN DE CONTINUO

Mínima Desviación Máxima:: .424703264094956

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|-------------|--------------|----------------|
| QCE | 1035.9588279 | 0.0000000 |
| QCM | 114.6346439 | 0.0000000 |
| QEP | 9.6294510 | 0.0000000 |
| QCB | 1.8764837 | 0.0000000 |
| QCAP | 5.6023739 | 0.0000000 |
| QCAM | 0.1505935 | 0.0000000 |
| DMAX | 0.4247033 | 0.0000000 |
| RESTRICCION | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
| PRESUPUESTO | 0.0000000 | 0.0000371 |
| CASAS | 0.0000000 | 0.8160237 |
| RCMCE | 0.0000000 | 0.0003709 |
| ESCUELAS | 0.0000000 | 0.0964392 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 0.0055638 |
| DISP | 0.0000000 | 0.0686202 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 0.0129822 |

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

| VARIABLE | COEF. ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCION ADMISIBLE |
|-------------|-----------------|----------------------|-----------------------|
| QCE | 0.0000000 | 0.0002225 | 0.0024581 |
| QCM | 0.0000000 | 0.0049751 | 0.0004008 |
| QEP | 0.0000000 | 0.0051352 | 0.0066266 |
| QCB | 0.0000000 | 0.2000000 | 0.0057230 |
| QCAP | 0.0000000 | 0.0117608 | 0.0081197 |
| QCAM | 0.0000000 | 0.5000000 | 0.0133283 |
| DMAX | 1.0000000 | ===== | 1.0000000 |
| RESTRICCION | RECURSO ACTUAL. | INCREMENTO ADMISIBLE | DISMINUCION ADMISIBLE |
| PRESUPUESTO | 15000.0000000 | 11450.0000000 | 2030.0000000 |
| CASAS | 1.0000000 | 0.0922727 | 0.5204545 |
| RCMCE | 0.0000000 | 203.0000000 | 123.8697395 |
| ESCUELAS | 1.0000000 | 0.7807692 | 0.5334247 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 8.8877097 | 1.9301793 |
| DISP | 1.0000000 | 5.4691892 | 0.1745486 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 5.0752688 | 0.1546078 |

RESULTADOS DEL PROBLEMA
SOLUCION ENTERA

=====

Mínima Desviación Máxima:: .49999999999988

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|----------|--------------|----------------|
| QCE | 1031.0000000 | 0.0000000 |
| QCM | 114.0000000 | 0.0000000 |
| QEP | 10.0000000 | 0.0000000 |
| QCB | 2.0000000 | 0.0000000 |
| QCAP | 5.0000000 | 0.0000000 |
| QCAM | 0.0000000 | 0.0000000 |
| DMAX | 0.5000000 | 0.0000000 |

| RESTRICCION | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
|-------------|-------------|----------------|
| PRESUPUESTO | 160.0000000 | 0.0000000 |
| CASAS | 0.0725000 | 0.0000000 |
| RCMCE | 0.0000000 | 1.0000000 |
| ESCUELAS | 0.1000000 | 0.0000000 |
| RCBASEP | 0.1000000 | 0.0000000 |
| DISP | 0.0000000 | 0.0000000 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 0.0000000 |

Suma de desviaciones cuadráticas

```

PC:
VAR:
    QCE,QCM,QEP,QCB,QCAP,QCAM,
DPCASAS,DPRCMCE,DPESCUELAS,DPRCBASEP,DPDISP,DPRCAMCAP
MIN:
[Suma Desviaciones Cuadráticas:]DPCASAS^2+DPRCMCE^2+DPESCUELAS^2+DPRCBASEP^2+DPDISP^2+DPRCAMCAP^2
SA:
[PRESUPUESTO] 10*QCE+ 20*QCM+ 100*QEP+ 250*QCB+ 150*QCAP+ 500*QCAM< 15000
[CASAS] .0005*QCE+ .0005*QCM+DPCASAS> 1
[RCMCE] (-.1)*QCE+ .9*QCM+DPRCMCE> 0
[ESCUELAS] .05*QEP+ .05*QCB+DPESCUELAS> 1
[RCBASEP] (-.2)*QEP+ .8*QCB+DPRCBASEP> 0
[DISP] .1*QCAP+ .1*QCAM+DPDISP> 1
[RCAMCAP] (-.1)*QCAP+ .9*QCAM+DPRCAMCAP> 0
ENT:
QCE,QCM,QEP,QCB,QCAP,QCAM
    
```

RESULTADOS DEL PROBLEMA
RESULTADOS DEL PROBLEMA
SOLUCION ENTERA

=====

Suma Desviaciones Cuadráticas: .284520471149012

| VARIABLE | VALOR | COSTO REDUCIDO |
|------------|-------------|----------------|
| QCE | 892.0000000 | 0.0000000 |
| QCM | 98.9999998 | 0.0000000 |
| QEP | 14.0000000 | 0.0000000 |
| QCB | 4.0000000 | 0.0000000 |
| QCAP | 8.0000000 | 0.0000000 |
| QCAM | 0.9999999 | 0.0000000 |
| DPCASAS | 0.5045002 | 0.0000000 |
| DPRCMCE | 0.1000003 | 0.0000000 |
| DPESCUELAS | 0.1000000 | 0.0000000 |
| DPRCBASEP | 0.0000000 | 0.0000000 |
| DPDISP | 0.1000000 | 0.0000000 |
| DPRCAMCAP | 0.0000000 | 0.0000000 |

| RESTRICCION | HOLGURAS | PRECIOS DUALES |
|-------------|-----------|----------------|
| PRESUPUESTO | 0.0000000 | 0.9999999 |
| CASAS | 0.0000000 | 0.5045002 |
| RCMCE | 0.0000000 | 0.1000003 |
| ESCUELAS | 0.0000000 | 0.1000000 |
| RCBASEP | 0.0000000 | 0.0000000 |
| DISP | 0.0000000 | 0.1000000 |
| RCAMCAP | 0.0000000 | 0.0000000 |

Como se puede apreciar en los resultados, mientras que en el primer modelo la desviación respecto al total de casas a construir es del 52%, y las demás metas se cumplen en su totalidad, en el caso del tercer modelo (del cuadrado de las desviaciones) la desviación de las casas baja al 50%, pero se generan desviaciones entre 0,04% y 11% en las demás metas. Pero en el caso del modelo 2 (la mínima desviación máxima) se tiene que todas las metas se desvían en un 50% (o sea que se cumplen en un 50%).

¿Cual solución es mejor? Esto ya lo debe decidir el decisor

EJERCICIO:

En base al análisis de sensibilidad del modelo 1, indicar cuál es la prioridad que hay que asignarle a las casas a fin de que disminuya la desviación de estas respecto a la meta. Vuelva a correr los modelos con esta prioridad.

17.3.- PERT/CPM

Las técnicas de PERT y CPM son dos técnicas que nacieron en una misma época para la evaluación y control de proyectos, y cuya representación se hacen mediante grafos dirigidos sin ciclos.

A continuación se resume las dos técnicas mediante un cuadro comparativo:

| | PERT | CPM |
|----|--|--|
| 1) | Técnica de Evaluación y Revisión de Programas | Método de la Ruta Crítica |
| 2) | Origen: 1957 Objetivo: Planear y controlar el proyecto Solaris. (Armada Norteamericana) | Origen: 1956 Objetivo: Controlar el mantenimiento de plantas químicas. (Du Pond Co. & Remington Rand Corp.) |
| 3) | Tiempos con incertidumbre . | Tiempos determinísticos . |
| 4) | No toma en cuenta costos. | Igual importancia al tiempo y al costo |

| | PERT | CPM |
|----|--|---|
| 5) | Las Actividades son representadas por Flechas y los Nodos representan a los Eventos. | Las Actividades son representadas por Nodos y las Flechas representan las pre-laciones entre las Actividades. |

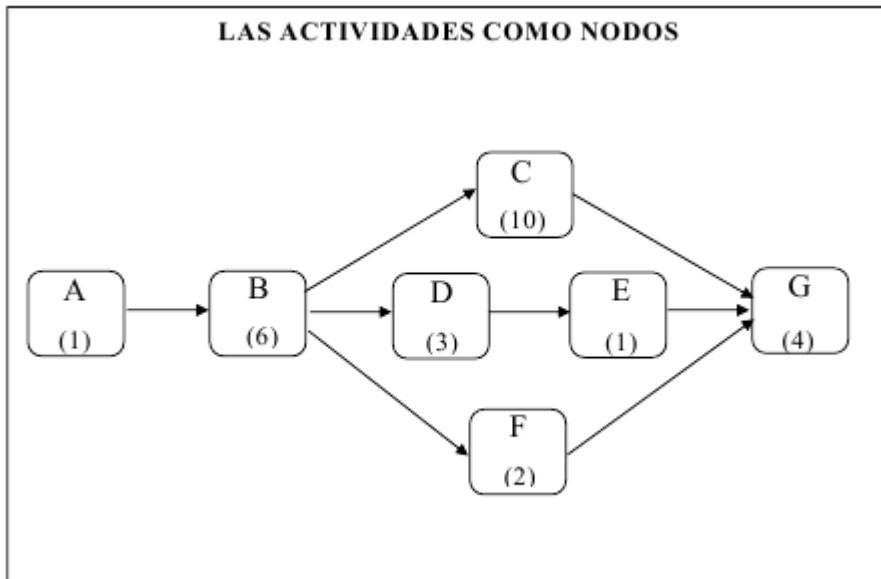
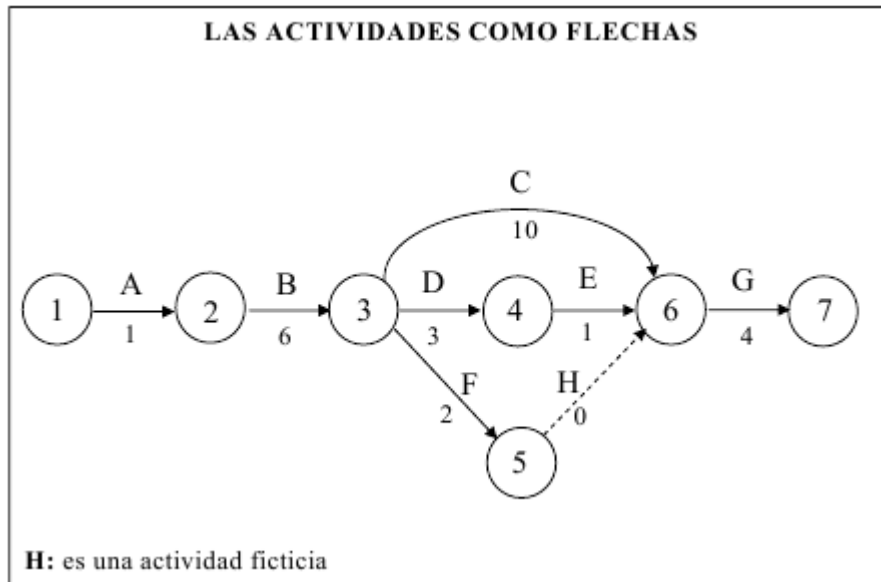
Hoy en día se usa cualquier de las dos representaciones para ambas técnicas. En el caso del PERT los nodos tienen que estar numerados en orden ascendentes, y en algunos casos, como cuando dos actividades tienen el mismo nodo inicial y final, o cuando una actividad es precedente de dos o más actividades y una de estas es precedida por otras actividades, es necesario crear una actividad ficticia.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Para realizar el mantenimiento de un mezclador se necesita hacer la siguiente lista de actividades:

| Actividades | Descripción | Duración (Horas) | Actividades Precedentes |
|--------------------|---|-------------------------|--------------------------------|
| A | Emisión de certificado de requisición. | 1 | -- |
| B | Apertura e inspección del mezclador. | 6 | A |
| C | Reparación del agitador dañado. | 10 | B |
| D | Revisión de la válvula de desagüe. | 3 | B |
| E | Restauración de la válvula de desagüe. | 1 | D |
| F | Ajuste de la nueva correa en V a la transmisión. | 2 | B |
| G | Proceso de cierre de mezclador y fin de la requisición. | 4 | C, E, F |

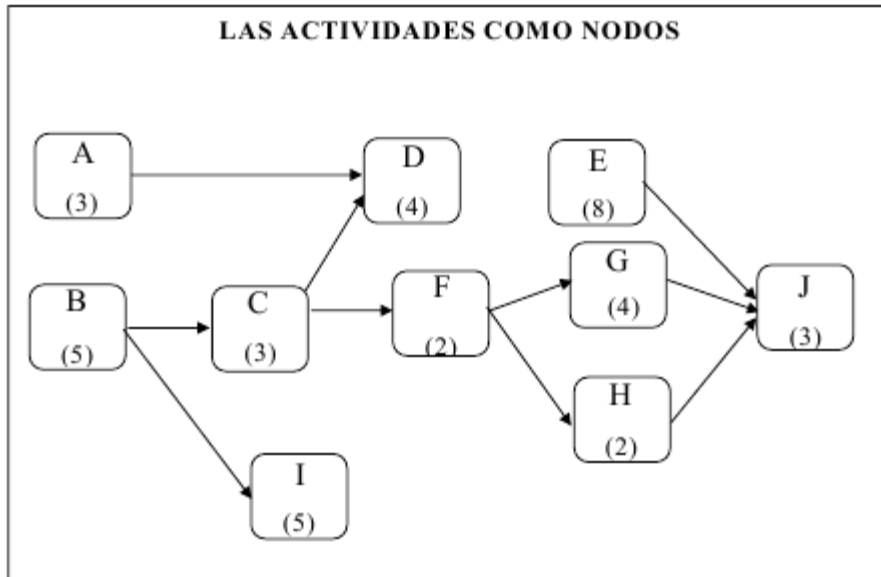
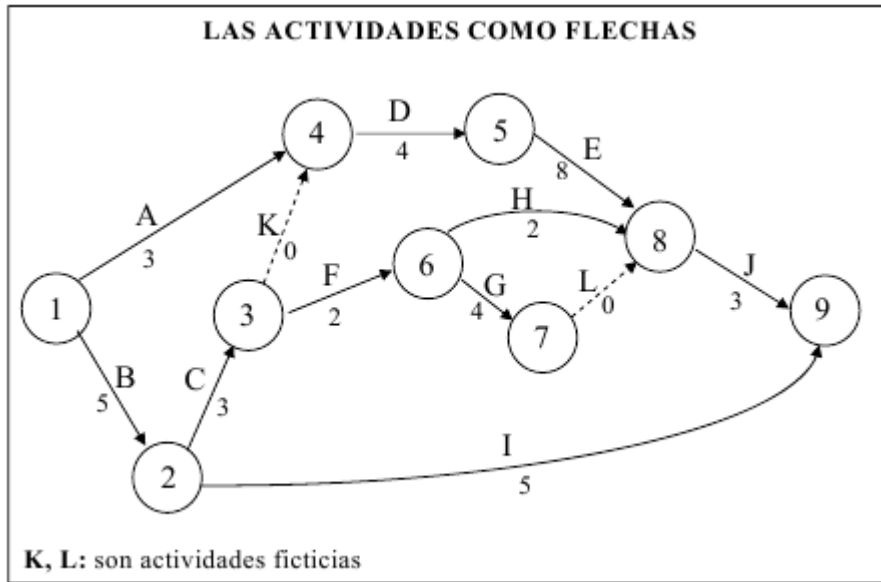
A continuación se mostrará las dos formas de representación, tanto la de PERT con las actividades como flechas, como la de CPM con las actividades como nodos.



Ejemplo 2: Para mudar el centro de operaciones de tarjetas de crédito a una nueva ciudad X una empresa tiene la siguiente lista de actividades:

| Actividades | Descripción | Duración (Horas) | Actividades Precedentes |
|--------------------|--|-------------------------|--------------------------------|
| A | Seleccionar sitio de oficinas. | 3 | -- |
| B | Crear plan organizacional y financiero. | 5 | -- |
| C | Determinar requerimientos de personal. | 3 | B |
| D | Diseñar la instalación. | 4 | A, C |
| E | Construir el interior. | 8 | D |
| F | Seleccionar el personal que se va transferir. | 2 | C |
| G | Contratar nuevos empleados. | 4 | F |
| H | Trasladar registros, personal clave, etc. | 2 | F |
| I | Hacer arreglos financieros con instituciones de X. | 5 | B |
| J | Capacitar nuevo personal. | 3 | H, E, G |

A continuación se mostrará las dos formas de representación, tanto la de PERT con las actividades como flechas, como la de CPM con las actividades como nodos.



17.3.1.- Obtención de los pasos críticos:

Los pasos críticos, esto es las actividades cuya demora implica la demora del proyecto, se pueden obtener mediante el siguiente algoritmo:

1) **Sea $T(I, J)$ el tiempo de la actividad I-J.**

2) **Calculo de los tiempos de Inicio Tempranos ($ES(I, J)$):**

$$ES(I, J) = \underset{\text{C precedente de I}}{\text{Máximo}} \{ES(C, I) + T(C, I)\}$$

3) **Calculo de los tiempos de Finalización Tempranos ($EF(I, J)$):**

$$EF(I, J) = ES(I, J) + T(I, J)$$

4) **Calculo de los tiempos de Finalización Tardíos ($LF(I, J)$):**

$$LF(I, J) = \underset{\text{E posterior de j}}{\text{Mínimo}} \{LF(J, E) - T(J, E)\}$$

5) **Calculo de los tiempos de Inicio Tardíos ($LS(I, J)$):**

$$LS(I, J) = LF(I, J) - T(I, J)$$

6) **Obtención de los pasos críticos:**

$$\therefore EF(I, J) = LF(I, J) \text{ ó } ES(I, J) = LS(I, J)$$

7) **Cálculo de las Holguras ($H(I, J)$):**

$$H(I, J) = LF(I, J) - EF(I, J) = LS(I, J) - ES(I, J)$$

17.3.2.- Un algoritmo más “computacional”

El siguiente algoritmo equivalente al primero se puede considerar más “computacional”:

**TIEMPOS DE LOS EVENTOS TEMPRANOS Y TARDÍOS
(E_i y L_i)**

$$E_1 = 0, \quad \text{por suposición}$$

$$E_j = \text{Max}_i \{E_i + D_{ij}\}; \quad 2 \leq j \leq n$$

$$E_n = \text{duración (esperada) del proyecto}$$

$$L_1 = E_n$$

$$L_i = \text{Min}_j \{L_j - D_{ij}\}; \quad 1 \leq i \leq n-1$$

TIEMPOS DE INICIO Y FINALIZACIÓN TEMPRANOS Y TARDÍOS DE ACTIVIDADES Y HOLGURAS.

$$\left. \begin{array}{l} ES_{ij} = E_i \\ EF_{ij} = E_i + D_{ij} \\ LF_{ij} = L_j \\ LS_{ij} = L_j - D_{ij} \\ H_{ij} = L_j - EF_{ij} \end{array} \right\} \quad \forall i, j$$

17.3.3.- Modelo de programación lineal

Los tiempos de ocurrencia de los eventos, tanto tempranos como tardíos, se pueden obtener también con los siguientes modelos de programación lineal:

Sean x_i , $i = 1, \dots, k$, los tiempos de ocurrencia tempranos de los eventos i , entonces se tiene como modelo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1,k} x_i \\ \text{Sujeto a:} & x_i - x_j \geq t_{ij} \\ & x_i \geq 0. \end{array}$$

Sean y_i , $i = 1, \dots, k$, los tiempos de ocurrencia tardíos de los eventos i , entonces se tiene como modelo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \sum_{i=1,k} y_i \\ \text{Sujeto a:} & y_k = x_k \\ & y_i - y_j \geq t_{ij} \\ & y_i \geq 0. \end{array}$$

EJEMPLOS:

De esta manera para los ejemplos 1 y 2 tendríamos los siguientes cuadros:

| Actividad | Actividades | | Inicio Temprano | Final Temprano | Final Tardío | Inicio Tardío | Holguras |
|-----------|-------------|----------|-----------------|----------------|--------------|---------------|----------|
| | Precedentes | Duración | | | | | |
| A | - | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| B | A | 6 | 1 | 7 | 7 | 1 | 0 |
| C | B | 10 | 7 | 17 | 17 | 7 | 0 |
| D | B | 3 | 7 | 10 | 16 | 13 | 6 |
| E | D | 1 | 10 | 11 | 17 | 16 | 6 |
| F | B | 2 | 7 | 9 | 17 | 15 | 8 |
| G | C, E, F | 4 | 17 | 21 | 21 | 17 | 0 |

y

| Actividad | Acitvidades | | Inicio | | Final | | Holguras |
|-----------|-------------|----------|----------|----------|--------|--------|----------|
| | Precedentes | Duración | Temprano | Temprano | Tardío | Tardío | |
| A | - | 3 | 0 | 3 | 8 | 5 | 5 |
| B | - | 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 |
| C | B | 3 | 5 | 8 | 8 | 5 | 0 |
| D | A, C | 4 | 8 | 12 | 12 | 8 | 0 |
| E | D | 8 | 12 | 20 | 20 | 12 | 0 |
| F | C | 2 | 8 | 10 | 16 | 14 | 6 |
| G | F | 4 | 10 | 14 | 20 | 16 | 6 |
| H | F | 2 | 10 | 12 | 20 | 18 | 8 |
| I | B | 5 | 5 | 10 | 23 | 18 | 13 |
| J | E, G, H | 3 | 20 | 23 | 23 | 20 | 0 |

17.3.4.- Tiempos inciertos (el PERT)

Muchas veces la duración de las actividades no es tiempo exacto, determinado, sino más bien incierto. Ante esto históricamente se ha supuesto, por o general, unas distribuciones de tiempo beta, y en algunos casos triangular (esta última más fácil para simular). Aunque en la realidad se debería tener una buena estimación de la distribución de ser esto posible, o si no es preferible trabajar con la matemática de los números imprecisos. (VER: Siguiete sección).

Cuando se trabaja con las distribuciones beta o triangular se tiene para cada actividad:

- El tiempo optimista (t_o): La duración estimada más corta para dicha actividad.
- El tiempo más probable (t_m): La duración estimada más frecuente (la moda) para dicha actividad.
- El tiempo pesimista (t_p): La duración estimada más larga para dicha actividad.

El tiempo esperado (o promedio) y la desviación típica para cada actividad está dado en la siguiente tabla:

| | Distribución Beta | Distribución Triangular |
|-------------------|-------------------------------|--|
| Tiempo Esperado | $TE_i = (t_o + 4t_m + t_p)/6$ | $TE_i = (t_o + t_m + t_p)/3$ |
| Desviación Típica | $ST_i = (t_p - t_o)/6$ | $ST_i^2 = t_o(t_o - t_m)/18$ $+ t_p(t_p - t_o)/18$ $+ t_m(t_m - t_p)/18$ |

Si bien algunos autores proponen que el tiempo esperado y la desviación típica de la ruta crítica vienen dados por:

$$TE = \sum_{\substack{i=\text{actividad} \\ \text{crítica}}} TE_i$$

$$ST = \sqrt{\sum_{\substack{i=\text{actividad} \\ \text{crítica}}} ST_i^2}$$

y suponen que el tiempo de ejecución de la ruta crítica tiene una distribución normal, o bien:

$$z = (T - TE)/ST \sim N(0, 1)$$

Pero lo anterior, no siempre es posible, cuando hay incertidumbre, tomar como tiempos del proyecto, los tiempos de la ruta crítica. De hecho, si las rutas críticas según los tiempos sean optimistas, más probables, pesimistas o esperados no son las mismas, habrá posibilidades que tanto el tiempo esperado como la desviación típica del proyecto aumenten. Esto se debe a que:

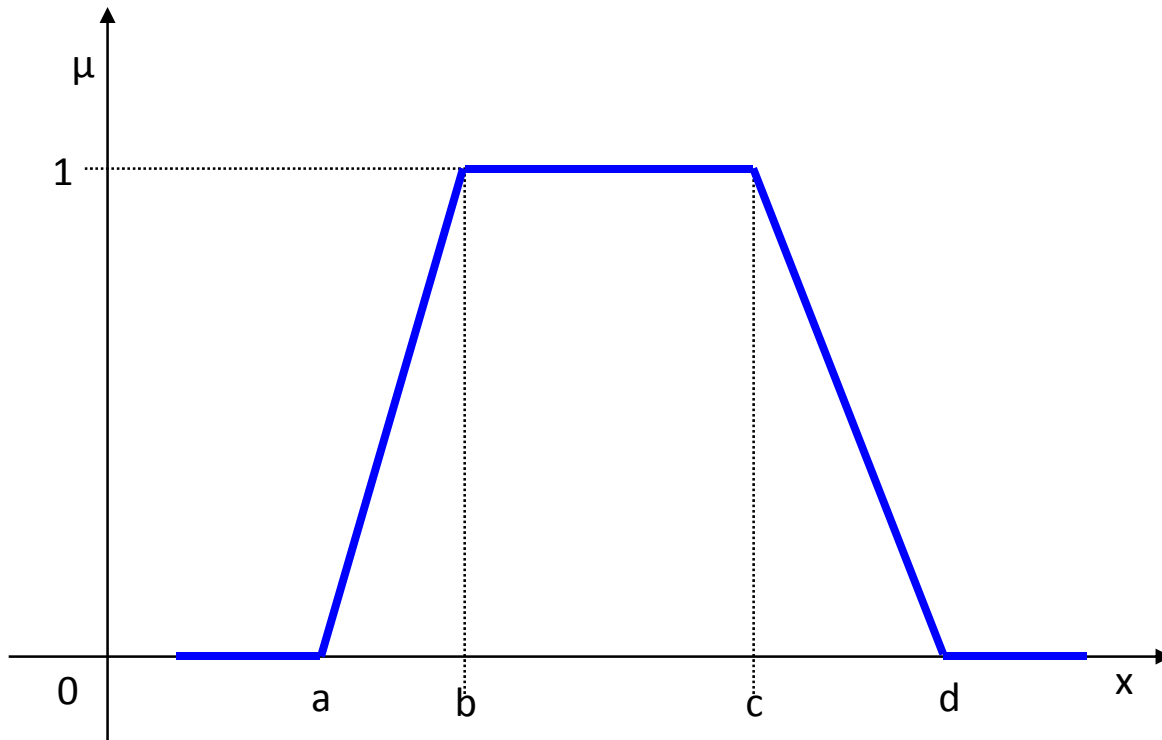
$$E(\max(X, Y)) \geq \max(E(X), \max(Y))$$

Ver el ejemplo de 17.3.5

17.3.5.- Tiempos difusos

Un número difuso o borroso \tilde{n} es un subconjunto difuso o borroso sobre la recta real, con una función de pertenencia del siguiente tipo:

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \text{Estrictamente creciente entre 0 y 1, } & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ \text{Estrictamente decreciente entre 1 y 0, } & x \in [c, d] \\ 0, & x \geq d \\ \text{(Ver gráfica A-2)} \end{cases}$$



GRAFICA 17.3.5-1

- Operaciones con números difusos:

Sean \tilde{n} y \tilde{m} dos números difusos y $*$ una operación algebraica cualquiera, entonces:

$$\mu_{\tilde{n}*\tilde{m}}(z) = \max_{z=x*y} \left\{ \min(\mu_{\tilde{n}}(x), \mu_{\tilde{m}}(y)) \right\}$$

Y de forma más general: se tienen $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N$, números borroso, y sea f una operación con ellos entonces:

$$\mu_{f(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)}(z) = \max_{z=f(x_1, \dots, x_N)} \left\{ \min(\mu_{\tilde{n}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{n}_N}(x_N)) \right\}$$

Las funciones f y/o g tienen coeficientes borrosos.

En este caso, los coeficientes borrosos son números borrosos, y se puede resolver el problema mediante el uso de las operaciones sobre números borrosos:

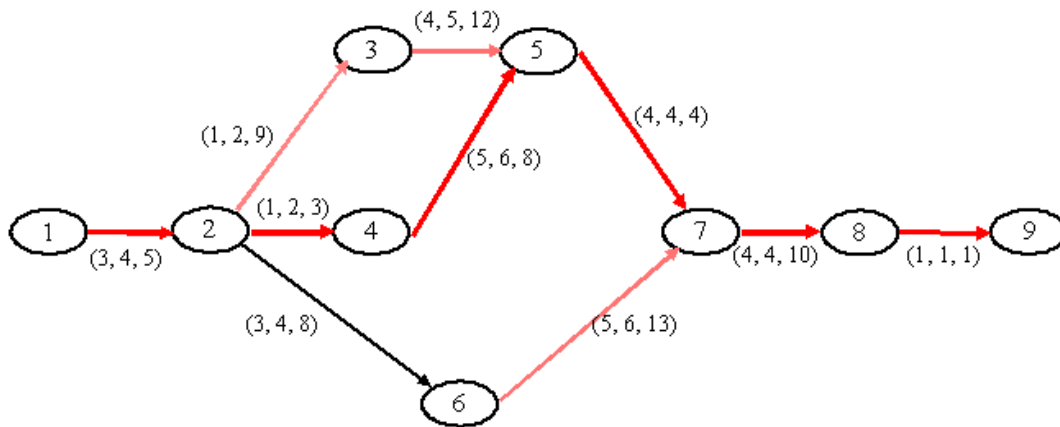
$$\mu_{\tilde{n}*\tilde{m}}(z) = \max_{z=x*y} \left\{ \min(\mu_{\tilde{n}}(x), \mu_{\tilde{m}}(y)) \right\}$$

y con estas operaciones utilizar los algoritmos de solución operando sobre los números borrosos.

Ejemplo:

Sea el siguiente caso de PERT (ver gráfica 17.3.5-2):

GRAFICA 17.3.5-2



Actividades

Tiempos

| | |
|-------|-----------------|
| 1 - 2 | $\pi(3, 4, 5)$ |
| 2 - 3 | $\pi(1, 2, 9)$ |
| 2 - 4 | $\pi(1, 2, 3)$ |
| 2 - 6 | $\pi(3, 4, 8)$ |
| 3 - 5 | $\pi(4, 5, 12)$ |
| 4 - 5 | $\pi(5, 6, 7)$ |
| 5 - 7 | $\pi(4, 4, 4)$ |
| 6 - 7 | $\pi(5, 6, 13)$ |
| 7 - 8 | $\pi(4, 4, 10)$ |
| 8 - 9 | $\pi(1, 1, 1)$ |

En donde: $\pi(x_1, x_2, x_3) = \{ (x|\mu(x)) \}$ con:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1), & x \in [x_1, x_2) \\ 1, & x = x_2 \\ (x_3 - x)/(x_3 - x_2), & x \in (x_2, x_3] \\ 0, & x > x_3 \end{cases}$$

O sea, los tiempos $\pi(x_1, x_2, x_3)$ son conjuntos borrosos definidos a partir de los tiempos pesimista x_3 , optimista x_1 y el tiempo más verosímil x_2 .

Para calcular los tiempos tempranos de inicio y finalización de las actividades se usa el algoritmo tradicional:

$$T.Temp.F_{i-j} = T.Temp.I_{i-j} \oplus T_{i-j}$$

$$T.Temp.I_{i-j} = \text{Max}_k \{T.Temp.T_{k-i}\}$$

Así queda el siguiente cuadro:

| <u>Actividades</u> | <u>T.Temp.I</u> | <u>T.Temp.F</u> |
|--------------------|-------------------|-------------------------|
| Actividad | Tiempos de Inicio | Tiempos de Finalización |
| INICIO | ¶(0, 0, 0) | ¶(0, 0, 0) |
| 1-2 | ¶(0, 0, 0) | ¶(3, 4, 5) |
| 2-3 | ¶(3, 4, 5) | ¶(4, 6, 14) |
| 2-4 | ¶(3, 4, 5) | ¶(4, 6, 8) |
| 2-6 | ¶(3, 4, 5) | ¶(6, 8, 13) |
| 3-5 | ¶(4, 6, 14) | ¶(8, 11, 26) |
| 4-5 | ¶(4, 6, 8) | ¶(9, 12, 15) |
| 5-7 | ¶(9, 12, 26) | ¶(13, 16, 30) |
| 6-7 | ¶(6, 8, 13) | ¶(11, 14, 26) |
| 7-8 | ¶(13, 16, 30) | ¶(17, 20, 40) |
| 8-9 | ¶(17, 20, 40) | ¶(18, 21, 41) |
| FIN | ¶(18, 21, 41) | ¶(18, 21, 41) |

Para hallar los tiempos tardíos de inicio y finalización de las etapas se usará el siguiente algoritmo:

$$T.Tard.F_{i-j} = \text{Min}_k \{T.Tard.I_{j-k}\}$$

$$T.Tard.I_{i-j} = \text{Max } T \setminus T.Tard.T_{i-j} \oplus T \leq T.Tard.F_{i-j}$$

$$T \leq T_{i-j}$$

Así queda el siguiente cuadro:

| <u>Actividades</u> | <u>T.Tard.I</u> | <u>T.Tard.F</u> |
|--------------------|-------------------|-------------------------|
| Actividad | Tiempos de Inicio | Tiempos de Finalización |
| INICIO | ¶(0, 0, 0) | ¶(0, 0, 0) |
| 1-2 | ¶(0, 0, 0) | ¶(3, 4, 5) |
| 2-3 | ¶(4, 5, 5) | ¶(5, 7, 14) |
| 2-4 | ¶(3, 4, 16) | ¶(4, 6, 19) |
| 2-6 | ¶(5, 6, 9) | ¶(8, 10, 17) |
| 3-5 | ¶(5, 7, 14) | ¶(9, 12, 26) |
| 4-5 | ¶(4, 6, 19) | ¶(9, 12, 26) |
| 5-7 | ¶(9, 12, 26) | ¶(13, 16, 30) |
| 6-7 | ¶(8, 10, 17) | ¶(13, 16, 30) |
| 7-8 | ¶(13, 16, 30) | ¶(17, 20, 40) |
| 8-9 | ¶(17, 20, 40) | ¶(18, 21, 41) |
| FIN | ¶(18, 21, 41) | ¶(18, 21, 41) |

NOTA:

También se podría plantear los tiempos tardíos iniciales y finales mediante el algoritmo:

$$T.Tard.F_{i-j} = \text{Min}_k \{T.Tard.I_{j-k}\}$$

$$T.Tard.I_{i-j} = T.Tard.F_{i-j} \ominus T_{i-j}$$

Pero esto traería como incongruencia la posibilidad de tiempos tardíos menores que tiempos tempranos, por lo cual es deseable corregir el algoritmo de la siguiente manera:

$T.Tard.I_{i-j} = \text{Max} (T.Tard.F_{i-j} \ominus T_{i-j}, T.Temp.I_{i-j})$ y así se tendría el siguiente cuadro:

| Actividades | T.Tard.I | T.Tard.F \ominus T | T.Tard.F |
|-------------|-------------------|----------------------|-------------------|
| 1 - 2 | $\pi(0, 0, 23)$ | $\pi(-2, 0, 23)$ | $\pi(3, 4, 26)$ |
| 2 - 3 | $\pi(3, 5, 27)$ | $\pi(-5, 5, 27)$ | $\pi(4, 7, 28)$ |
| 2 - 4 | $\pi(3, 4, 26)$ | $\pi(1, 4, 26)$ | $\pi(4, 6, 27)$ |
| 2 - 6 | $\pi(3, 6, 28)$ | $\pi(-2, 6, 28)$ | $\pi(6, 10, 31)$ |
| 3 - 5 | $\pi(4, 7, 28)$ | $\pi(-3, 7, 28)$ | $\pi(9, 12, 32)$ |
| 4 - 5 | $\pi(4, 6, 27)$ | $\pi(2, 6, 27)$ | $\pi(9, 12, 32)$ |
| 5 - 7 | $\pi(9, 12, 32)$ | $\pi(9, 12, 32)$ | $\pi(13, 16, 36)$ |
| 6 - 7 | $\pi(6, 10, 31)$ | $\pi(0, 10, 31)$ | $\pi(13, 16, 36)$ |
| 7 - 8 | $\pi(13, 16, 36)$ | $\pi(7, 16, 36)$ | $\pi(17, 20, 40)$ |
| 8 - 9 | $\pi(17, 20, 40)$ | $\pi(17, 20, 40)$ | $\pi(18, 21, 41)$ |

Bajo este algoritmo, los resultados difieren del utilizado en el desarrollo del problema, y esto se debe a que la resta de números borrosos no es la operación inversa de la suma de los mismos.



Para calcular la holgura al inicio de cada actividad se hace:

$$H.I_{i-j} = T.Tard.I_{i-j} \ominus T.Temp.I_{i-j}.$$

Y el grado de pertenencia de cero (0) al tiempo de holgura da el grado de criticidad de la actividad.

Mientras que la holgura al final de cada actividad se viene dada por:

$$H.F_{i-j} = T.Tard.F_{i-j} \ominus T.Temp.F_{i-j}.$$

De esta manera se tiene la siguiente tabla:

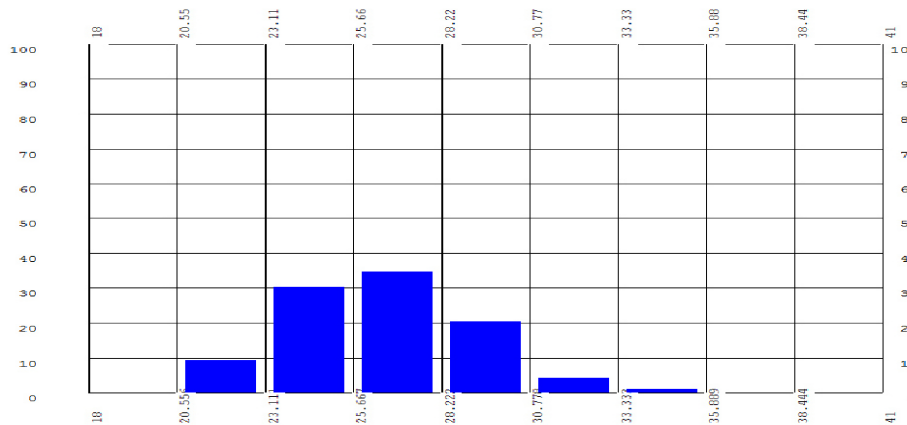
| Actividad | Holgura Inicial | Criticidad | Holgura Final | Criticidad |
|-----------|------------------------|------------|------------------------|------------|
| INICIO | $\uparrow(0, 0, 0)$ | 1 | $\uparrow(0, 0, 0)$ | 1 |
| 1-2 | $\uparrow(0, 0, 0)$ | 1 | $\uparrow(-2, 0, 2)$ | 1 |
| 2-3 | $\uparrow(-1, 1, 2)$ | .5 | $\uparrow(-9, 1, 10)$ | .9 |
| 2-4 | $\uparrow(-2, 0, 13)$ | 1 | $\uparrow(-4, 0, 15)$ | 1 |
| 2-6 | $\uparrow(0, 2, 6)$ | 0 | $\uparrow(-5, 2, 11)$ | .7143 |
| 3-5 | $\uparrow(-9, 1, 10)$ | .9 | $\uparrow(-17, 1, 18)$ | .9444 |
| 4-5 | $\uparrow(-4, 0, 15)$ | 1 | $\uparrow(-6, 0, 17)$ | 1 |
| 5-7 | $\uparrow(-17, 0, 17)$ | 1 | $\uparrow(-17, 0, 17)$ | 1 |
| 6-7 | $\uparrow(-5, 2, 11)$ | .7143 | $\uparrow(-13, 2, 19)$ | .8667 |
| 7-8 | $\uparrow(-17, 0, 17)$ | 1 | $\uparrow(-23, 0, 23)$ | 1 |
| 8-9 | $\uparrow(-23, 0, 23)$ | 1 | $\uparrow(-23, 0, 23)$ | 1 |
| FIN | $\uparrow(-23, 0, 23)$ | 1 | $\uparrow(-23, 0, 23)$ | 1 |

Si este mismo PERT se evalúa mediante tiempos con distribución probalística triangular, se tendrá los siguientes resultados:

**RESULTADOS DE LA SIMULACION -
DISTRIBUCION DE LOS TIEMPOS DE TERMINACION**

| Intervalo de Tiempo | Cantidad Observaciones | Frecuencia Relativa |
|---------------------|------------------------|---------------------|
| 18.00 - 20.56 | 0 | 0.000 |
| 20.56 - 23.11 | 94 | 0.094 |
| 23.11 - 25.67 | 302 | 0.302 |
| 25.67 - 28.22 | 346 | 0.346 |
| 28.22 - 30.78 | 205 | 0.205 |
| 30.78 - 33.33 | 42 | 0.042 |
| 33.33 - 35.89 | 11 | 0.011 |
| 35.89 - 38.44 | 0 | 0.000 |
| 38.44 - 41.00 | 0 | 0.000 |

Cuya gráfica es la siguiente:



Siendo la criticidad de las actividades las siguientes:

| GRADOS DE CRITICIDAD ACTIVIDAD | CRITICIDAD |
|-----------------------------------|------------|
| 1-2 | 1.000 |
| 2-3 | 0.707 |
| 2-4 | 0.044 |
| 2-6 | 0.249 |
| 3-5 | 0.707 |
| 4-5 | 0.044 |
| 5-7 | 0.751 |
| 6-7 | 0.249 |
| 7-8 | 1.000 |
| 8-9 | 1.000 |

17.3.6.- CPM/COSTOS

Como se dijo al principio, el CPM toma también en cuenta los costos, para esto se toma en cuenta la existencia de dos tipos de costos en los proyectos:

a) Costos de aceleración de una actividad:

Sea D_{1ij} el costo de la actividad i, j en el tiempo M_{ij}
 y D_{2ij} el costo de la actividad i, j en el tiempo A_{ij}
 entonces:

$$C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}t_{ij} \begin{cases} M_{ij} \leq t_{ij} \leq A_{ij} \\ b_{ij} = (D_{1ij} - D_{2ij}) / (A_{ij} - M_{ij}) \\ a_{ij} = (A_{ij}D_{1ij} - M_{ij}D_{2ij}) / (A_{ij} - M_{ij}) \end{cases}$$

b) Costos indirectos del proyecto por día:

$$I = I_d \cdot x_k$$

Representación mediante programación lineal

Una forma de resolver el CPM con costo es mediante el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Minimizar: } C = \sum_{ij} (a_{ij} - b_{ij}t_{ij}) + I_d \cdot x_k$$

$$\text{Sujeto a: } x_j - x_i \geq t_{ij}$$

El cual planteado de forma convencional se convierte en:

$$\text{Minimizar: } C' = -\sum_{ij} b_{ij}t_{ij} + I_d \cdot x_k$$

$$\text{Sujeto a: } x_j - x_i - t_{ij} \geq 0$$

$$t_{ij} \leq A_{ij}$$

$$t_{ij} > M_{ij}$$

Si la red no es muy compleja se puede utilizar un método heurístico que consiste en acelerar las actividades críticas y las que se van haciendo críticas en la medida que la suma de las pendientes de las aceleraciones en un tiempo no sean mayores que el costo indirecto del proyecto por día.

Tiempo de Penalización.

Si el proyecto pasado cierta duración (tiempo de penalización, T_p) tiene un costo adicional de penalización (P), entonces el modelo de programación lineal toma la siguiente forma:

$$\text{Minimizar: } C = \sum_{ij}(a_{ij} - b_{ij}t_{ij}) + I_d \cdot x_k + P \cdot T$$

$$\text{Sujeto a: } x_j - x_i \geq t_{ij}$$

$$T \geq (x_k - T_p)$$

El cual planteado de forma convencional se convierte en:

$$\text{Minimizar: } C' = -\sum_{ij} b_{ij}t_{ij} + I_d \cdot x_k + P \cdot T$$

$$\text{Sujeto a: } x_j - x_i - t_{ij} \geq 0$$

$$t_{ij} \leq A_{ij}$$

$$t_{ij} \geq M_{ij}$$

17.3.7.- CPM/RECURSOS

En el uso del CPM se puede también tomar en cuenta el uso de los recursos, para lo cual se recomienda utilizar algoritmos heurísticos aunque el modelo de programación lineal es el siguiente:

Sea:

$$x_{jd} = \begin{cases} 1 & \text{se realiza la actividad } j \text{ el día } d. \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\sum_{d=1,\delta} x_{jd} = t_j \quad (t_j \text{ duración de la actividad } j)$$

$$\sum_{j=1,n} c_{rj} x_{jd} \leq A_{rd} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{rj} \text{ Cantidad de recursos } r, \text{ necesarios para} \\ \text{realizar el proyecto } j \\ c_{rj} \text{ Cantidad de recursos } r, \text{ necesarios para} \\ \text{realizar el proyecto } j \end{array} \right.$$

$$t_p x_{jd} \leq \sum_{i=1, d-1} x_{pi} \quad \left\{ \begin{array}{l} p \in P_j = \text{Conjunto Precedentes de } j. \\ \text{Significa que la actividades preceden-} \\ \text{tes deben terminar antes de empezarse} \\ \text{una nueva actividad.} \end{array} \right.$$

$$t_j x_{jd} - t_j x_{j(d+1)} + \sum_{i=d+2, \delta} x_{ji} \leq t_j \quad \left(\text{Esta restricción impide la par-} \right. \\ \left. \text{tición de las actividades.} \right)$$

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=0, z} (R_i \sum_{j=1, n} x_{j(k+i)})$$

- para algún k: $0 < k < z$
- $R_z = 4 \cdot R_{(z-1)}$
- $R_0 = 1$

CAPÍTULO 18

FUNCIONES DE PRODUCCIÓN

INTRODUCCION

En la literatura económica, se encuentran diferentes posiciones sobre las funciones de producción. Los textos sobre economía sectorial las presentan en formas de tablas, los de economía general se contentan en presentarlas gráficamente, solo algunos libros referentes a optimización y/o Investigación de operaciones en el área de la economía analizan algunas de ellas y por lo general de una manera bastante superflua¹²⁹, sin profundizar los análisis sobre las mismas, además de que en muchos modelos se conforman en usar las funciones lineales y las de factor-producto cayendo de este modo en una excesiva simplificación de las estructuras productivas.

De lo dicho anteriormente, se nota la importancia del estudio de funciones analíticas concretas tales como las de Factor-Producto, Cobb-Douglas y elasticidad de sustitución constante, que responden a las teorías económicas, y aunque en apariencia (sobre todo las dos últimas mencionadas) sean más difíciles de manejar, en la realidad no lo son, sobre todo si tomamos en cuenta los avances en el campo de la programación no-lineal (y sobre todo en la geométrica) y los avances tecnológicos en las ciencias de la computación lo cual permite realizar, al alcance de cualquiera, los cálculos necesarios.

De esta manera, en este estudio se empezará primero con un repaso a los conceptos básicos de funciones de producción y un enunciado de los diferentes problemas tipo de programación económica. Para luego estudiar estos problemas utilizando las diferentes funciones de producción: Factor-Producto, Cobb-Douglas y Elasticidad de Sustitución Constante. Así mismo se hará una breve introducción al análisis intersectorial, además se analizarán los casos de cuando existen factores con saturación y con descuentos. En los apéndices el lector encontrará lo referente a las condiciones de Kuhn-Tucker, a la programación lineal, cuadrática y geométrica, y los algoritmos simplex y de pivote complementario.

125 Como excepción a lo anterior se puede mencionar el libro de David F. Heathfield, Funciones de Producción de la colección MacMillan-Vicens-Vives de Economía.

18.1.- Coneptos Básicos

Sean x_1, \dots, x_n un vector de factores de producción o insumos.

Sea q el máximo de la producción obtensible con estos insumos, entonces:

$$f(x_1, \dots, x_n) = q$$

se define como la función de producción.

O dicho de otra manera, sean $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$, las diferentes funciones tecnológicas de producción existentes (en un momento dado), entonces $q = f(x_1, \dots, x_n) = \max_i \{f_i(x_1, \dots, x_n)\}$ es la función de producción para este universo de tecnologías.¹³⁰

18.1.1.- Propiedades de una Función de Producción.

- **Productividad Marginal:** La productividad marginal respecto al factor i , es el incremento en la producción obtenida mediante la utilización de cantidades adicionales del insumo i :

$$PM_i = \frac{\partial q}{\partial x_i}$$

126 Se supone una racionalidad de la producción en la definición de las funciones de producción, aunque esto no es necesario para el tratamiento que se les va a seguir.

- **Productividad Media:** La productividad media del factor i es la producción obtenida por unidad del insumo i :

$$AM_i = \frac{q}{x_i}$$

- **Elasticidad de la producción:** La elasticidad de la producción respecto al factor i , es la razón existente entre el cambio relativo de la producción ($\partial q/q$) y el cambio relativo del insumo i ($\partial x_i/x_i$):

$$E_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{x_i}{q}$$

También viene a ser la razón entre la productividad marginal respecto al factor i y la productividad media del mismo factor i :

$$E_i = \frac{PM_i}{AP_i}$$

El coeficiente de elasticidad de una función de producción es la suma de las elasticidades respecto a los diferentes factores:

$$E = \sum E_i$$

- **Isocuanta de producción:** Las isocuantas de producción son los conjuntos de factores que generan el mismo nivel de producción:

$$\{x \in I \mid f(x_1, \dots, x_n) = q^0\}$$

- **Elasticidad de sustitución:** La elasticidad de sustitución de dos factores, i y j, es la razón existente entre la variación porcentual del cociente de los factores y la variación porcentual en el cociente de sus productividades marginales:

$$E_{ij} = \frac{d(x_i/x_j) / (x_i/x_j)}{d(PM_i/PM_j) / (PM_i/PM_j)}$$

- **Función de producción homogénea:** Una función de producción $q=f(x_1, \dots, x_n)$ se dice que es homogénea si:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) = \lambda q$$

en donde $\lambda > 0$

A las funciones de producción homogéneas también se les dice "constante a escala" ó de "rendimiento constante a escala"¹³¹.

18.1.2.- Las "Buenas" Funciones de Producción

Vamos a dar, a continuación, algunas características que deseáramos que tuviera una función de producción "buena":

¹³¹ Respecto a las funciones de producción homogéneas se puede demostrar:

- 1) Teorema de Euler:

Una función f es homogénea si y solo si:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i PM_i$$

- 2) Si f es homogénea y $x_i = g_i(y_1, \dots, y_m)$ son también homogéneas entonces:

$$h(y_1, \dots, y_m) = f(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$$

también será homogénea

- Que tenga la posibilidad de ser homogénea, según los valores que tomen los parámetros que la caracterizan.

Esto es si $q = f(x;\delta)$, entonces existe algún δ tal que:

$$f(\lambda x;\delta) = \lambda f(x;\delta)$$

- Cuando alguno de los insumos falta, y si este insumo es indispensable, la producción se anule.

Esto es:

$$q > 0 \iff x_1, \dots, x_n > 0$$

ó

$$x_i = 0 \implies q = 0$$

- Que los parámetros sean fácilmente calculables, o sea que la expresión sea relativamente sencilla.
- Que su formulación sea fácilmente expandible a cualquier número de insumos¹³².
- Rendimientos (Productividad Marginal y Productividad Media) de los factores decrecientes.¹³³

Además, si tomamos en cuenta que una tecnología siempre disponible es el no usar el excedente de un recurso, podemos pedirle a la función de producción que siempre sea no decreciente, esto que tenga productividad marginal positiva (o igual a cero).

18.1.3.- Funciones de Producción Generalizadas.

Como lo mencionamos en la nota (3) en los libros de economía las funciones de producción vienen expresadas en función de dos factores de producción: Capital (K) y Trabajo (L). Así que una de las generalizaciones sobre las que se va a exigir a las funciones de producción es la de poder tomar en cuenta n factores de producción no sustituibles (Capital fijo, Capital de Trabajo, Trabajo, Tierra, etc). Estos es x_1, \dots, x_n factores de producción. Pero, además es de importancia

128 Es de notar que en los textos de economía las funciones de producción siempre vienen dadas en función de dos variables: Capital (K) y Trabajo (L).

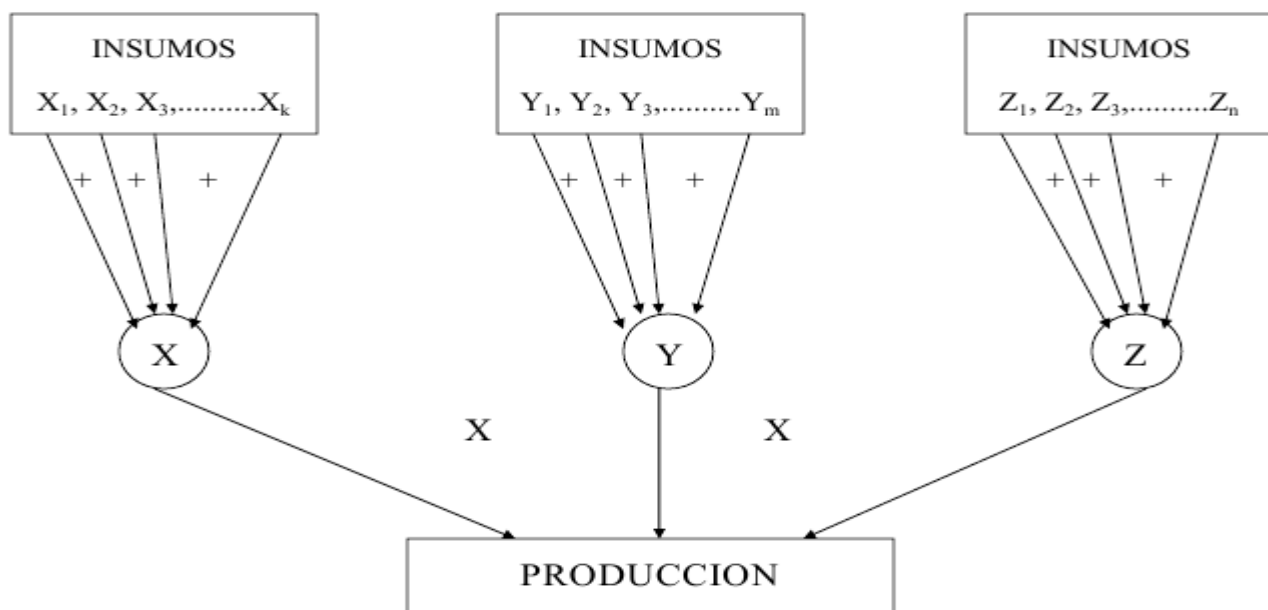
129 Que la productividad marginal sea decreciente se asegura si las segundas derivadas son negativas.

otro tipo de generalización tomando en cuenta los factores de producción sustituibles¹³⁴. Esto es: Un factor x_i se puede considerar que esta constituido por diferentes insumos $x_{i,1}, \dots, x_{i,n}$ sustituibles entre si pero con diferentes rendimientos, $1/\pi_{i,j}$, asi que:

$$x_i = \sum_j x_{i,j}/\pi_{i,j}$$

De esta manera nuestras funciones de producción generalizadas serán función de matrices de factores $f(X)$ en donde cada fila de la matriz esta compuesta por insumos sustituibles entre sí y no siendo sustituible un factor de una fila de la matriz con el de otra fila. En otras palabras cada fila representa un factor de producción y cada columna un insumo, y cada $x_{i,j}$ representa la cantidad del insumo j que se está utilizando en el factor i . Ver [figura 18-1](#).

Figura 18-1



18.2.- La Programacion Economica

Llamaremos problema de Programación Económica a los problemas de optimización en los cuales estén envueltos prioritariamente parámetros económicos (precios y costos) sujetos o

130 Esta idea se tomó apartir del planteamiento de Jan Tinbergen, La Distribución del ingreso, respecto a la generalización de la función de Cobb-Douglas y que se ha tratado en: La función de Producción de Cobb-Douglas; sus generalizaciones y sus usos en la programación económica. Investigación y Gerencia, Vol 2, N° 4.

no a disponibilidad de recursos (o insumos y factores de producción) los cuales están sujetos a una transformación cuya productividad viene dada por alguna función de producción.

A manera más concreta nos referiremos a los siguientes problemas:

PROBLEMA 1: Sea p el precio por unidad de producto producida y $c_{i,j}$ el costo unitario del insumo i,j , entonces se deseara hallar el nivel de cada insumo $x_{i,j}$ a fin de maximizar la función de beneficios netos dada por:

$$F(X)=pf(X) - \sum_{i,j} c_{i,j}x_{i,j}$$

PROBLEMA 2: Sea p el precio por unidad de producto producida y $c_{i,j}$ el costo unitario del insumo i,j , y Q_j la cantidad del insumo j disponible, entonces se deseara hallar el nivel de cada insumo $x_{i,j}$ a fin de maximizar la función de beneficios netos dada por:

$$F(X)=pf(X) - \sum_{i,j} c_{i,j}x_{i,j}$$

$$\text{suje}to\ a:\ \sum_i x_{i,j} = Q_j$$

PROBLEMA 3: Dado el nivel de producción deseado Y de un producto y $c_{i,j}$ el costo por unidad del insumo i,j , entonces se deseara hallar el nivel de cada insumo $x_{i,j}$ a fin de minimizar los costos producción. Esto se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \sum_{i,j} c_{i,j}x_{i,j}$$

$$\text{suje}to\ a : Y=f(X)$$

PROBLEMA 4: Se tienen varios productos (k productos) que tienen los mismos insumos, y se tienen fijados los niveles de los insumos a utilizarse (Q_k), hallar las cantidades de cada insumo $x_{i,j}$ a utilizar en la producción de cada uno de los productos de manera tal que el beneficio de la producción conjunta sea máxima. Esto se plantea de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar: } \sum_k p_k f(X_k) - \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} x_{i,j,k}$$

$$\text{suje}to\ a : \sum_{i,k} x_{i,j,k} = Q_j$$

Es de notar que en los problemas anteriores se consideran los costos y los precios constantes. Pero esto no siempre es cierto, de hecho si se aumenta la producción los precios pueden bajar

a fin de igualar la demanda a la oferta y de la misma manera cuando aumenta la cantidad de insumos el costo de estos pueden aumentar debido a la presión de la demanda. La hipótesis más sencilla es que las variaciones son proporcionales a la cantidad, quedando las funciones con factores cuadráticos:

$$B(x) = -p_2 f^2(x) + p_1 f(x)$$

$$C(x) = \sum_i (a_i x_i^2 + b_i x_i)$$

o que exista la posibilidad de descuento en los costos de los insumos, según la cantidad que se demande.

Esto problemas los denominaremos 1'...4' y 1"4" respectivamente.

Además, en los problemas 2 a 4 podemos sustituir las igualdades de las restricciones por desigualdades (\leq para los problemas 2 y 4, y \geq para el problema 3).

18.2.1.- Análisis de las Soluciones¹³⁵

PROBLEMA 1:

Para el problema 1 tenemos un problema (en general) de optimización clásica, sin restricciones, para lo cual nos basta que el vector gradiente ($\nabla F(x)$) se anule, o sea que el vector gradiente de $f(x)$ multiplicado por el precio p iguale al vector de costos:

$$p^T \cdot \nabla f(x) = c.$$

En el caso en que f sea homogénea tendremos que la solución no dará un punto único sino un conjunto determinado por las relaciones entre los insumos.

PROBLEMAS 2 a 4:

En estos problemas, por ser problemas con restricciones hay que aplicar, o las condiciones de los Lagrangeanos en caso de igualdades, o de Kuhn-Tucker en el caso de desigualdades.

131 En el anexo D se da un resumen de los algoritmos de cálculo..

18.2.- Función Factor-Producto.

La función factor-producto, también denominada como función de Leontief se refiere a que la producción de un producto depende linealmente del aumento de los factores, siempre y cuando los otros factores no limiten este aumento, y se representa como:

$$q = \min(x_1/\pi_1, x_2/\pi_2)$$

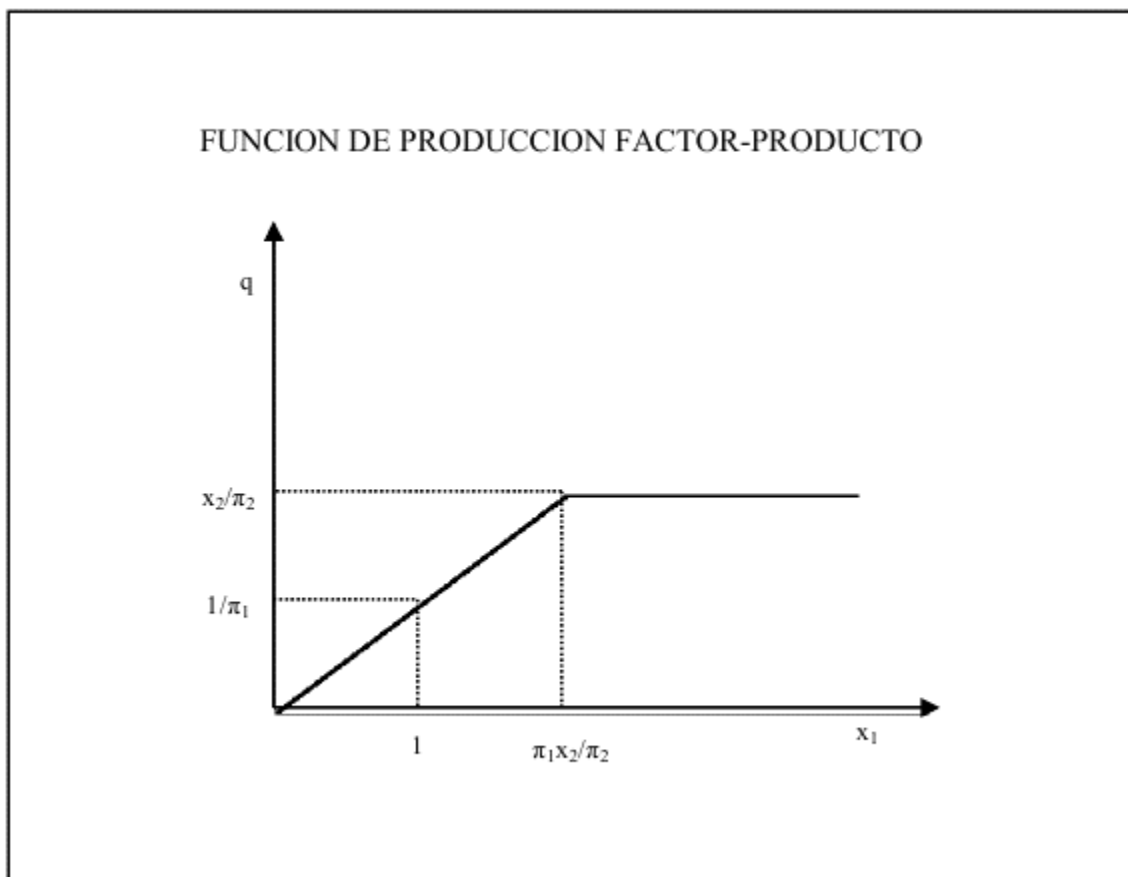
y de forma generalizada:

$$q = \min(\sum_j x_{i,j}/\pi_{i,j})$$

En donde los $\pi_{i,j}$ indican cantidad mínima del insumo i,j necesaria para obtener una unidad del producto q .

Su representación gráfica respecto a la variación de un insumo dejando los demás fijos viene representada en la [gráfica 18-1](#).

Gráfica 18-1



18.2.1. -Propiedades

Productividad Marginal:

a) Respecto al factor i

$$1/\pi_i \quad \text{si } x_i/\pi_i < x_k/\pi_k \quad \text{para todo } k \neq i, \text{ y si no } 0.$$

b) Respecto al insumo i,j

$$1/\pi_{i,j} \quad \text{si } \sum_l x_{i,l}/\pi_{i,l} < \sum_l x_{k,l}/\pi_{k,l} \quad \text{para todo } k \neq i, \text{ y si no } 0.$$

Productividad Media:

a) Respecto al factor i

$$1/\pi_i \quad \text{si } x_i/\pi_i < x_k/\pi_k \quad \text{para todo } k \neq i, \text{ y si no } q/x_i.$$

b) Respecto al insumo i,j

$$q/x_{i,j}$$

Elasticidad :

a) Respecto al factor i

$$1 \quad \text{si } x_i/\pi_i < x_k/\pi_k \quad \text{para todo } k \neq i, \text{ y si no } 0.$$

b) Respecto al insumo i,j

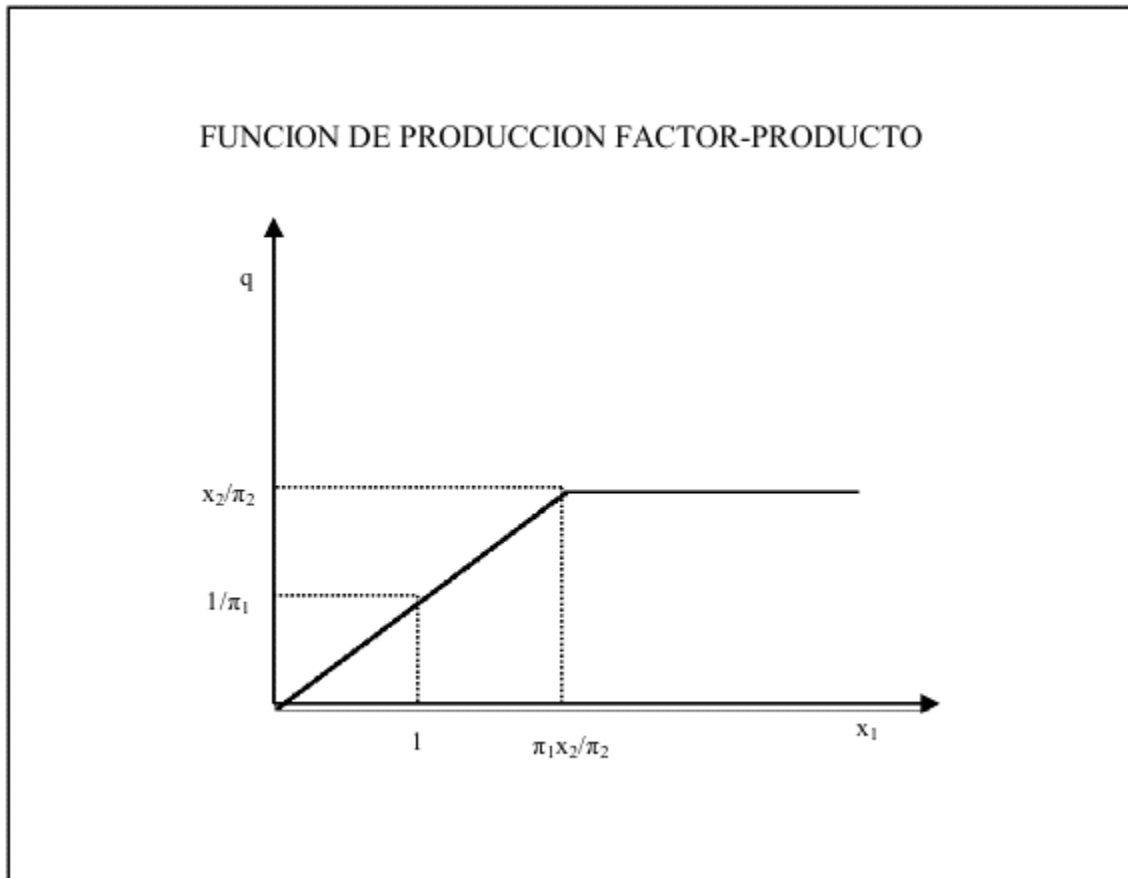
$$x_{i,j}/q\pi_{i,j} \quad \text{si } \sum_l x_{i,l}/\pi_{i,l} < \sum_l x_{k,l}/\pi_{k,l} \quad \text{para todo } k \neq i, \text{ y si no } 0.$$

Elasticidad total:

1

En la [gráfica 18-2](#) están representadas las formas de las isocuantas (para dos factores de producción).

Gráfica 18-2



Además este tipo de función siempre es homogénea.

Esta función también se puede representar como un problema de programación lineal:

Maximizar q

Sujeto a: $\pi_1 q \leq x_1$

$\pi_2 q \leq x_2$

18.3.- Función de Cobb-Douglas.

La función de Cobb-Douglas se refiere a que la relación entre la productividad marginal de los factores y la productividad media de los mismos (elasticidad) es constantes¹³⁶, y se representa como:

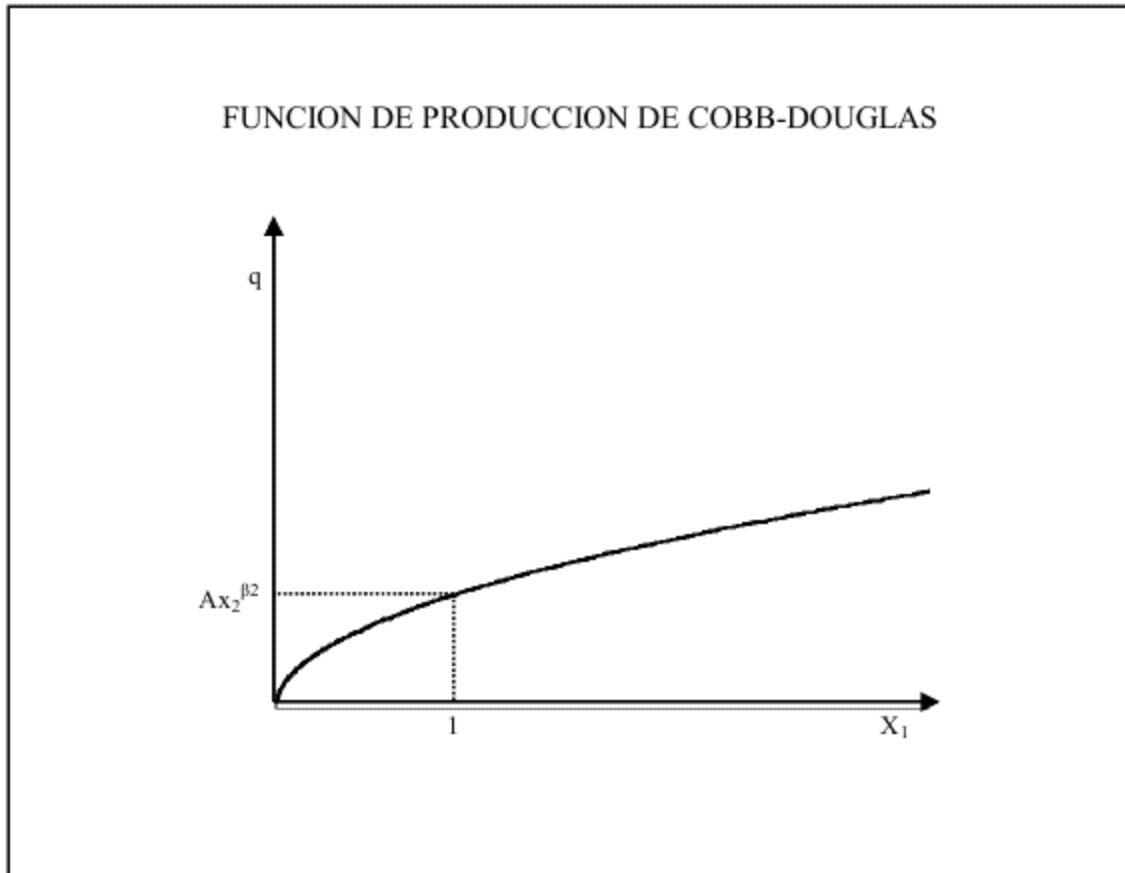
$$q = Ax_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$$

y de forma generalizada:

$$q = A \prod_i (\sum_j x_{i,j} / \pi_{i,j})^{\beta_i}$$

Su representación gráfica respecto a la variación de un insumo dejando los demás fijos viene representada en la [gráfica 18-3](#).

Gráfica 18-3



1 Esto es lo mismo que afirmar que el costo total por cada factor de producción es una proporción constante de la producción.

18.3.1.- Propiedades**Productividad Marginal:**

a) Respecto al factor k

$$\beta_k q / x_k$$

b) Respecto al insumo k, l

$$\beta_k q / x_k \pi_{k,l}$$

Productividad Media:

a) Respecto al factor k

$$q / x_k$$

b) Respecto al insumo k, l

$$q / x_{k,l}$$

Elasticidad:

a) Respecto al factor k

$$\beta_k$$

b) Respecto al insumo l en el factor k:

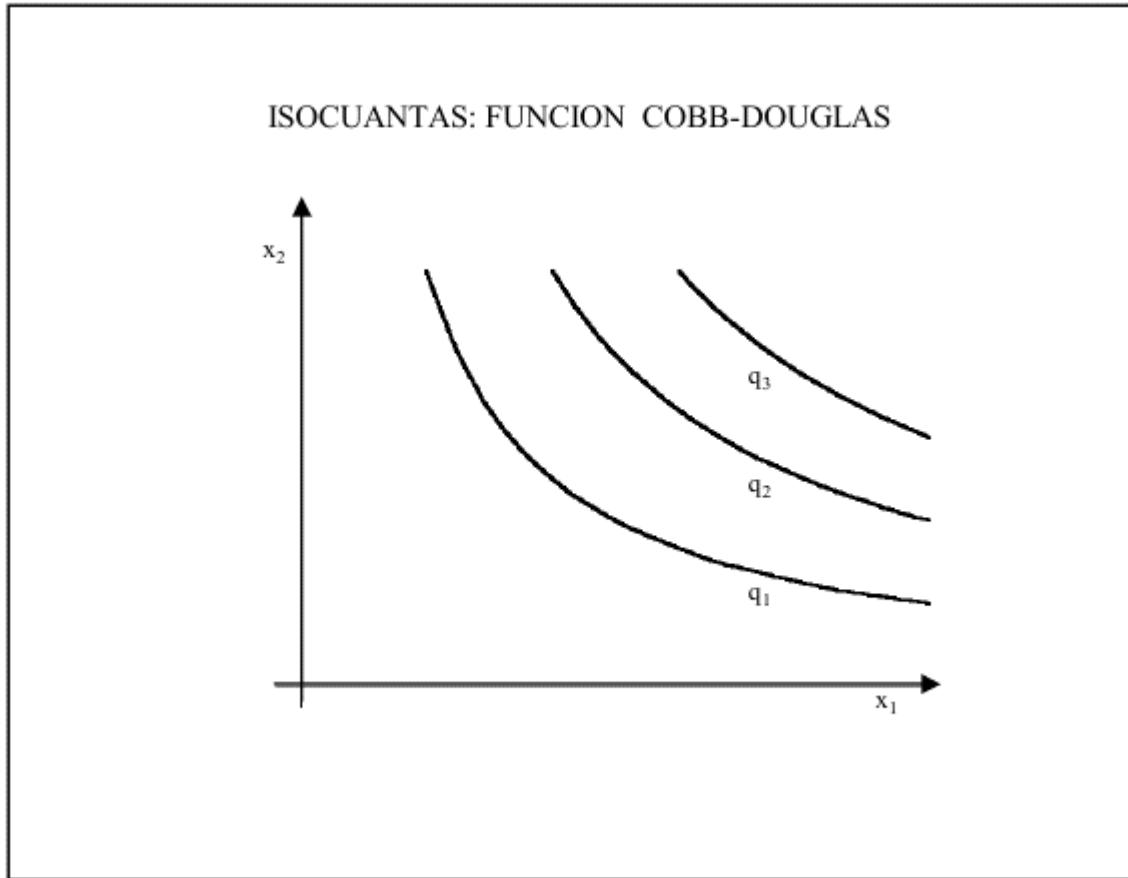
$$\beta_k x_{k,l} / \pi_{k,l} x_k$$

Elasticidad total:

$$\sum_i \beta_i$$

En la [gráfica 18-4](#) están representadas las formas de las isocuantas (para dos factores de producción).

Gráfica 18-4



Además este tipo de función es homogénea cuando $\sum_i \beta_i = 1$.

Esta función también se puede representar como un problema de programación geométrica:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } q \\ \text{Sujeto a: } Aq^{-1}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2} \leq 1 \end{array}$$

18.3.2.- Otras Propiedades Adicionales de la Función de Cobb-Douglas.

Los parámetros A y β_i son fácilmente estimables ya que el logaritmo de la función es una función lineal de los logaritmos de los factores:

$$\ln q = \ln A + \sum \beta_i \ln x_i$$

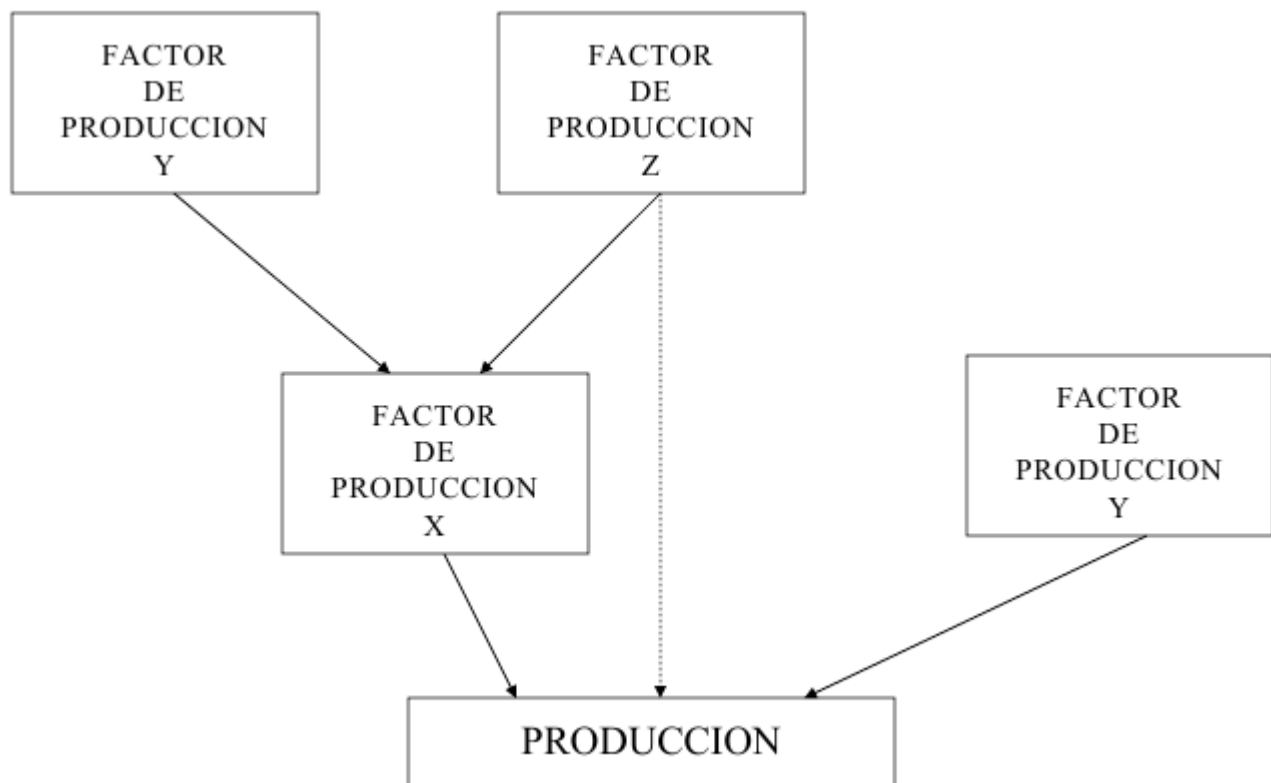
Cuando es homogénea ($\sum_i \beta_i = 1$) puede ser expresada como una combinación lineal de los insumos, con las productividades marginales como coeficientes:

$$q = \sum PM_{i,j} x_{i,j}$$

En cuanto a los exponentes, si se considera que las funciones de producción tienen que ser homogéneas (constantes a escala), al hallar en la práctica los exponentes de la Cobb-Douglas estos deberían ser todos positivos y la suma de ellos debería ser uno. Pero esto a veces no ocurre, sobre todo si no especifica esta condición explícitamente en el modelo estadístico que los debe evaluar:

- Si la suma de los coeficientes resulta menor que uno, esto se puede interpretar en el hecho que en el modelo de producción se obvió algún insumo o factor restrictivo de la producción.
- Mientras, si la suma de estos exponentes es mayor que uno, esto se puede interpretar en el sentido de que en el modelo se obvió algún factor el cual es generador de producción.
- De la misma manera, si alguno de los exponentes es negativo, esto se puede interpretar como el hecho que alguno de los factores es función de otros de los factores del modelo. (Ver figura 18-2).

Figura 18-2



18.4.- Función Elasticidad de Sustitución Constante (CES)

La función CES se refiere a que la variación total en la producción de un producto es igual a la suma de los cambios originados por cada uno de los factores, y se representa como:

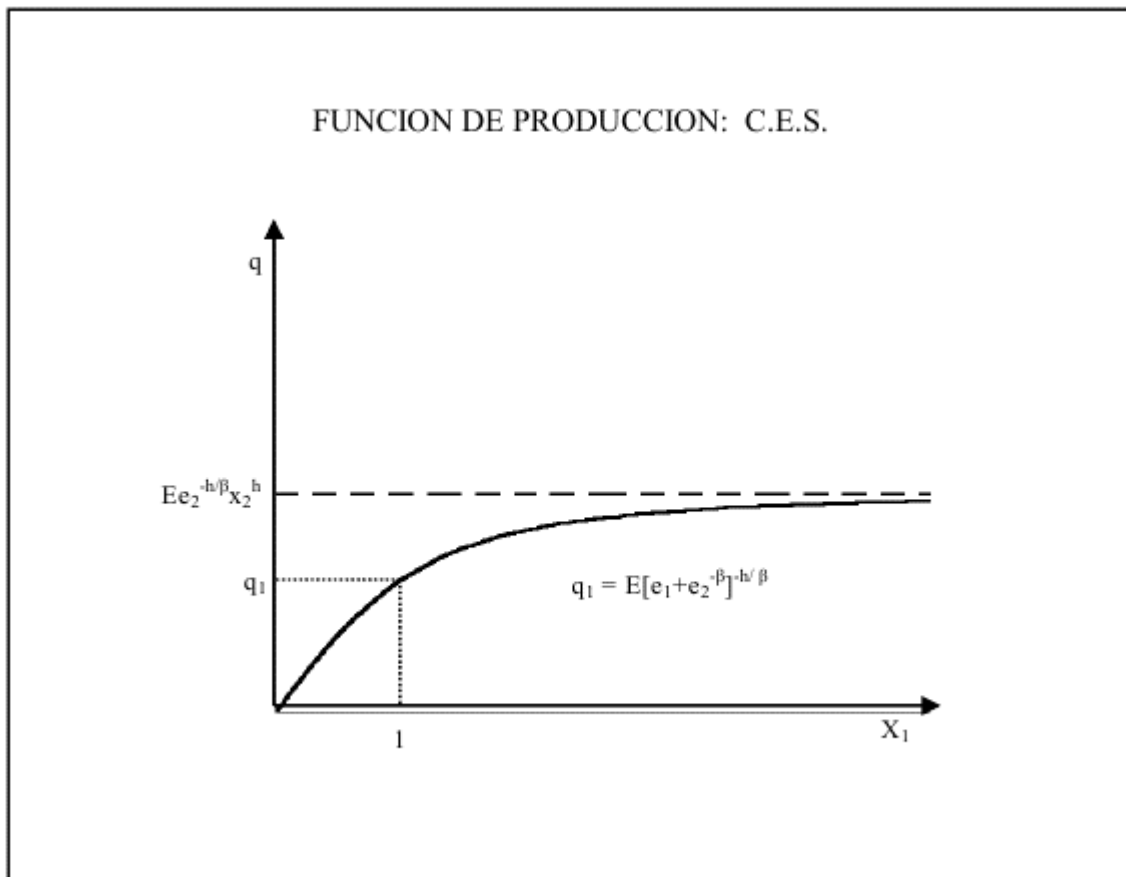
$$Q = E(e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^{-h/\beta}$$

y de forma generalizada:

$$q = E[\sum_i e_i (\sum_j x_{i,j} / \pi_{i,j})^{-\beta}]^{-h/\beta}$$

En donde los e_i representan el peso del factor i en la producción de q y E es un factor de escala. Su representación gráfica respecto a la variación de un insumo dejando los demás fijos viene representada en la [gráfica 5](#).

Gráfica 18-5



18.4.1- Propiedades**Productividad Marginal:**

a) Respecto al factor k:

$$E h e_k [\sum_i e_i x_i^{-\beta}]^{-h/\beta-1} x_k^{-1-\beta} = E^{-\beta/h} e_k h (q^{1/h} / x_k)^\beta (q / x_k)$$

b) Respecto al insumo k,l:

$$(E h e_k / \pi_{k,l}) [\sum_i e_i (\sum_j x_{i,j} / \pi_{i,j})^{-\beta}]^{-h/\beta-1} (\sum_j x_{k,j} / \pi_{k,j})^{-1-\beta}$$

Productividad Media:

a) Respecto al factor k:

$$E [\sum_i e_i x_i^{-\beta}]^{-h/\beta} / x_k$$

b) Respecto al insumo k,l

$$E [\sum_i e_i (\sum_j x_{i,j} / \pi_{i,j})^{-\beta}]^{-h/\beta} / x_{k,l}$$

Elasticidad:

a) Respecto al factor k:

$$h e_k [\sum_i e_i x_i^{-\beta}]^{-1} x_k^{-\beta} = E^{-\beta/h} e_k h (q^{1/h} / x_k)^\beta$$

b) Respecto al insumo l en el factor k:

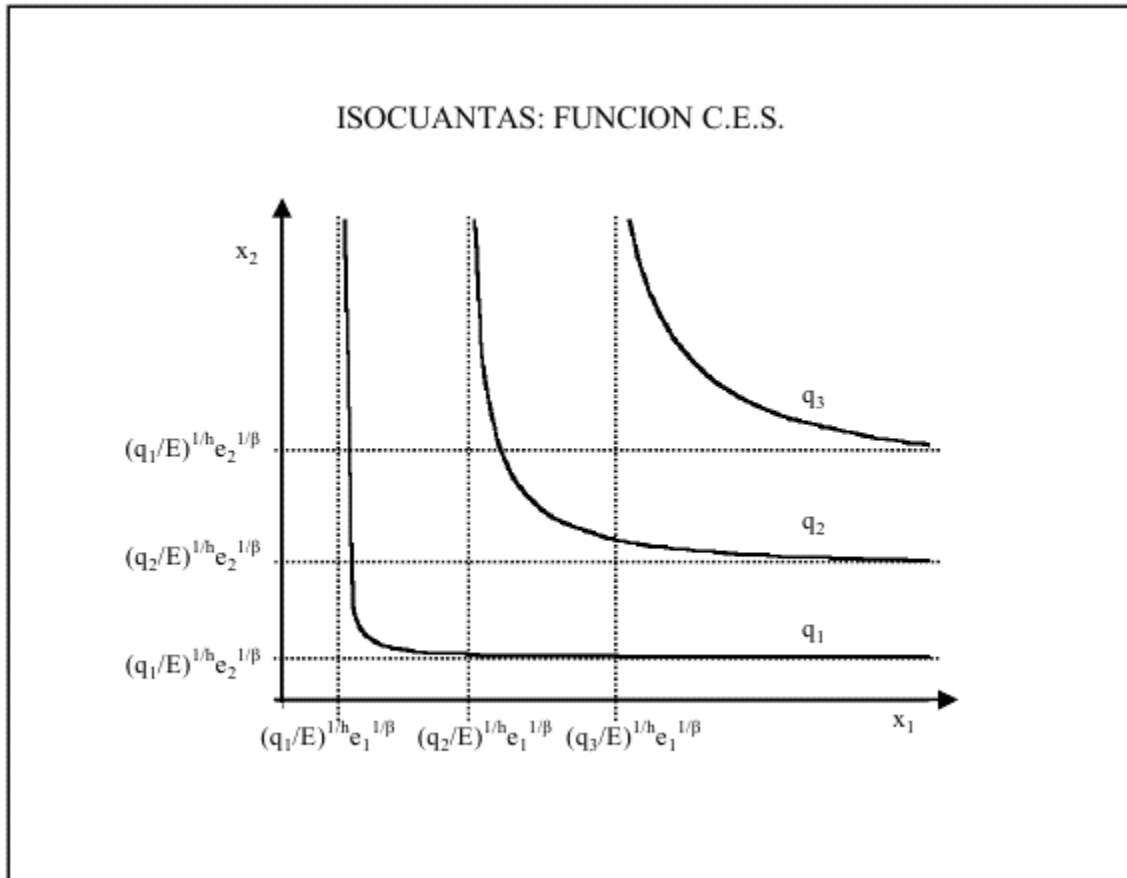
$$(h e_k / \pi_{k,l}) x_{k,l} [\sum_i e_i (\sum_j x_{i,j} / \pi_{i,j})^{-\beta}]^{-1} (\sum_j x_{k,j} / \pi_{k,j})^{-1-\beta}$$

Elasticidad total:

h

En la [gráfica 18-6](#) están representadas las formas de las isocuantas (para dos factores de producción).

Gráfica 18-6



Además este tipo de función es homogénea cuando $h = 1$.

Esta función también se puede representar como un problema de programación geométrica

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } q^{h/\beta} \\ &\text{Sujeto a: } Ee_1 q^{-1} x_1^{-\beta} + Ee_2 q^{-1} x_2^{-\beta} \leq 1 \end{aligned}$$

18.4.2.- Otras Propiedades Adicionales de la Función CES.

Cuando el parámetro β tiende hacia -1 la CES se aproxima a una función lineal de producción, cuando β tiende hacia 0 se aproxima a una función de Cobb-Douglas y por último cuando β tiende hacia ∞ la CES se aproxima a una función de Factor-Producto.

Además, suponiendo el factor de escala $E = 1$, es necesario al menos $e_i^{1/\beta}$ unidades del factor i de producción para obtener una unidad del producto q .

18.5.- Factores de Producción con Saturación

En algunos procesos productivos existen factores que si bien son necesarios, cuando alcanzan más allá de cierta proporción respecto a los demás factores, se convierten en factores perturbadores de la producción. Esta proporción en donde un factor empieza perturbar la producción es lo que se denomina punto de saturación; y la proporción en donde se anula completamente la producción es el punto de saturación completa.

Para incluir el fenómeno de la saturación en los problemas analizados anteriormente se puede trabajar de dos maneras:

- 1.- Se le agrega a los problemas una nueva restricción, limitando a cualquier factor con punto de saturación a que este por debajo de este punto:

$$x_i \leq ps_i \sum_j x_j$$

o también:

$$x_1 + x_2 + \dots + (1 - 1/ps_i)x_i + \dots + x_n \geq 0.$$

En donde ps_i es el punto de saturación para el factor i .

- 2.- La segunda manera, es introduciendo un nuevo factor de producción, z_i , igual a la diferencia entre el punto de saturación completa (psc_i) y el el factor de producción i :

$$z_i = psc_i \sum_j x_j - x_i$$

La dificultad que se puede conseguir trabajando de esta manera es la estimación del parámetro asociado a esta variable en la función de producción.

De manera tal que un factor de producción con punto de saturación no altera el planteamiento general de los problemas. Solamente añade una restricción, y opcionalmente (si se trabaja de la segunda manera) una variable.

18.6.- Descuentos en los Insumos

Algunos insumos pueden tener, al adquirirse más de cierta cantidad, descuentos.

Se conocen de manera general dos políticas de descuentos:

- 1.- Descuento sobre el total de la compra, a partir de cierta cantidad Q_{di} .

Esto es:

$$C_{ti}(x_i) = \begin{cases} c_{i1}x_i, & \text{si } x_i < Q_{di} \\ c_{i2}x_i, & \text{si } x_i \geq Q_{di} \end{cases}$$

con $c_{i1} > c_{i2}$.

Como en cualquier problema se busca minimizar los costos, la función de costo se puede plantear de la siguiente manera:

$$C_{ti}(x_i) = c_{i2}x_i + (c_{i1} - c_{i2})(Q_{di} - K_i)$$

$$K_i \leq x_i$$

$$K_i \leq Q_{di}.$$

- 2.- Descuento sobre las unidades de compra por encima de cierta cantidad Q_{di} .

Esto es:

$$C_{ti}(x_i) = \begin{cases} c_{i1}x_i, & \text{si } x_i \leq Q_{di} \\ c_{i2}(x_i - Q_{di}) + c_{i1}Q_{di}, & \text{si } x_i > Q_{di} \end{cases}$$

con $c_{i1} > c_{i2}$.

Como en cualquier problema se busca minimizar los costos, la función de costo se puede plantear de la siguiente manera:

$$C_{ti}(x_i) = c_{i1}(Q_{di} - K_{1i}) + c_{i2}K_{2i}$$

$$x_i = Q_{di} - K_{1i} + K_{2i}$$

$$K_{1i}K_{2i} = 0$$

$$K_i \leq Q_{di}.$$

De esta manera el primer caso no altera, la estructura de los modelos, mientras que el segundo caso, es un típico caso de programación separable.

CAPÍTULO 19

EL RIESGO, LA INCERTIDUMBRE Y LO DIFUSO

En la primera parte se definió riesgo e incertidumbre de manera informal, aquí se va formalizar estos conceptos, para tener una visión de como aplicarlos¹³⁷, pero primero se va a empezar con la definición de la función de costo de oportunidad o comúnmente llamada también función de arrepentimiento o remordimiento.

19.1.- Costo de Oportunidad

Como se definió anteriormente (nota 34, pág. 46), el arrepentimiento, remordimiento o costo de oportunidad es la diferencia, una vez acaecido los hechos entre lo que se obtuvo y lo que se podría haber obtenido de haberse tomado otra decisión.

Así, la función correspondiente se obtiene de la siguiente manera:

$$g(x, y) = \max_x \{ f(x, y) \} - f(x, y)$$

en el caso que f sea una función de beneficio, y por

$$g(x, y) = f(x, y) - \min_x \{ f(x, y) \}$$

si f es una función de costo.

En donde x es la variable de decisión e y la variable correspondiente a los estados de la naturaleza.

La ventaja de trabajar con esta función, sobre todo cuando se toman decisiones por otros es que disminuye las posibilidades de críticas posteriores, a las acciones emprendidas.

EJEMPLO 1:

Supóngase que se tiene una demanda D de un producto que varía entre a y b , y se puede producir este producto en este mismo rango. El precio de venta del producto es p y su costo de producción es c ; y la cantidad de producto que se produce y no se vende en un periodo se pierde. ¿Qué cantidad de producto producir?

Se tendrá como función de beneficio:

¹³⁷ Más detalles se pueden conseguir en mi blog

$$B(Q, D) = \begin{cases} p \cdot D - c \cdot Q, & Q \geq D \\ (p - c) \cdot Q, & Q \leq D \end{cases} \quad D \in [a, b]; Q \in [a, b]$$

Se construye la función de arrepentimiento $A(Q, D)$:

$$A(Q, D) = \max_Q \{B(Q, D)\} - B(Q, D)$$

$$A(Q, D) = \begin{cases} c \cdot (Q - D), & Q \geq D \\ (p - c) \cdot (D - Q), & Q \leq D \end{cases} \quad D \in [a, b]; Q \in [a, b]$$

EJEMPLO 2:

Se tienen K Bolívares disponibles durante 60 días y se pueden colocar a 60 días con unos intereses pagables mensualmente al 31% (los intereses del primer mes de reinvierten a 30 días) o invertir a 30 días con unos intereses del 30%, y reinvertir en el mes siguiente el capital más los intereses a 30 días. Aunque no se conocen los intereses del mes siguiente se puede asegurar que estos van a estar entre el 27% y el 33%. ¿Como invertir?

Hágase primero las funciones de beneficios de las dos alternativas en función de los intereses I , del segundo mes:

$$B_1(I) = 25.833,33 \cdot (2 + I/12)$$

$$B_2(I) = 1.025.000 \cdot I/12 + 25.000$$

La construcción de la función de remordimiento dará:

$$R_1(I) = \begin{cases} 0 & ; & \text{si } I \leq 32,03\% \\ 999.166,67 \cdot I/12 - 26.666,67; & \text{si } I \geq 32,03\% \end{cases}$$

$$R_2(I) = \begin{cases} 26.666,67 - 999.166,67 \cdot I/12; & \text{si } I \leq 32,03\% \\ 0 & ; & \text{si } I \geq 32,03\% \end{cases}$$

19.2.- El Riesgo

El riesgo como, se definió anteriormente (capítulo3), esta asociado a la probabilidad de obtener un resultado X crítico o indeseable al realizar un conjunto de acciones A.

Formalmente: $R = P(X \in C | A) = 1 - \alpha$

Si bien el nivel de riesgo a asumir es hasta cierto punto subjetivo, el riesgo como tal es objetivo.

Un indicador de riesgo, que se suele utilizar frecuentemente es el coeficiente de variación el cual viene dado por σ/μ (la razón entre la desviación típica σ y la media μ). A partir de allí se puede obtener el nivel de riesgo mediante la desigualdad de **Tchebyshev** la cual viene dada por:

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - 1/k^2$$

o

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq 1/k^2$$

En donde k es una constante positiva cualquiera, obviamente mayor que 1.

19.3.- La Incertidumbre

Como se indico anteriormente (capítulo 3), se tiene incertidumbre cuando no se tiene las probabilidades de los distintos escenarios que pueden ocurrir. En estos casos lo mejor que puede hacerse es tomar un conjunto de acciones precavidas. Esto es prepararse para lo peor¹³⁸.

Esto se puede plantear como hallar el $\max_x \{ \min_y \{ f(x, y) \} \}$ en el de que f sea una función de beneficios o el $\min_x \{ \max_y \{ f(x, y) \} \}$ en el caso de que f sea una función de costos.¹³⁹

EJEMPLO 1':

Continuando con el ejemplo 1.

Si se aplica el criterio directamene a la función de beneficio se tiene:

$\max_Q \{ \min_D \{ B(Q, D) \} \} = \max_Q \{ p \cdot a - c \cdot Q \} = (p-c) \cdot a$, cuando $Q = D = a$; por lo tanto la elección sería producir la cantidad a.

¹³⁸ Algunos autores denominan esta estrategia como estrategia pesimista. Pero realmente no lo es. Una cosa es ser precavido y otra pesimista.

¹³⁹ De hecho, si se construyó la función de costos de oportunidad, f será una función de costos.

Mientras que si se aplica el criterio a la función de arrepentimiento se tiene:

$$\begin{aligned} \min_Q \{ \max_D \{ A(Q,D) \} \} &= \min_Q \{ \max \{ c \cdot (Q-a); (p-c) \cdot (b-Q) \} \} = \\ &= \min_Q \left\{ \begin{array}{ll} c \cdot (Q-a) & Q \geq b - c \cdot (b-a)/p \\ (p-c) \cdot (b-Q) & Q \leq b - c \cdot (b-a)/p \end{array} \right\} = \\ &= c \cdot (b-a) \cdot (p-c)/p, \text{ cuando } Q = b - c \cdot (b-a)/p. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2':

Continuando con el ejemplo 2.

Si se aplica el criterio directamente a la función de beneficio se tiene:

$\text{Max}_i \{ \text{Min}_I \{ B_i(I) \} \} = \max \{ 52.247,92 ; 48.062,50 \} = 52.247,92$, correspondiente a la primera alternativa.

Mientras que si se aplica el criterio a la función de remordimiento se tiene:

$\text{Min}_i \{ \text{Max}_I \{ R_i(I) \} \} = \min \{ 810,42; 4185,42 \} = 810,42$, correspondiente a la primera alternativa.

Ahora bien, en este ejemplo también se puede analizar la posibilidad de una estrategia mixta¹⁴⁰, esto es invertir un porcentaje en la alternativa 1 y el resto en la 2.

Trabajando con la función de remordimiento, desarrollada en el ejemplo 6, se tendrá:

$$\text{maximizar: } Z = t_1 + t_2$$

$$\text{Sujeto a: } t_1 R_1(I) + t_2 R_2(I) \leq 1, \quad I \in [27\% , 33\%]$$

Por lo cual queda:

$$\text{Maximizar: } Z = t_1 + t_2$$

¹⁴⁰ El planteamiento original es:
 Minimizar W
 Sujeto a: $p_1 R_1(I) + p_2 R_2(I) \leq W$
 $p_1 + p_2 = 1$

Se hacen los siguientes cambios

(a) Se define: $Z = (1/W)$,

(b) $t_i = p_i/W$

(c) Se sustituye

La deducción del planteamiento mixto se puede conseguir en www.hthonon.blogspot.com

Sujeto a:

$$t_2 \cdot (26.666,67 - 999.166,67 \cdot I/12) \leq 1 ; I \in [27\% ; 32,03\%]$$

$$t_1 \cdot (999.166,67 \cdot I/12 - 26.666,67) \leq 1 ; I \in [32,03\% ; 33\%]$$

Como la función de la primera restricción es decreciente respecto a I, es obvio que si se cumple para el menor valor de I (27%), se cumplirá también para los demás valores de I. De la misma manera como la función de la segunda restricción es creciente respecto a I, si ésta se cumple para el mayor valor de I (33%), también se cumplirá para los demás valores de I. Por lo tanto se tiene:

$$4185,41666 \cdot t_2 \leq 1$$

$$810,41333 \cdot t_1 \leq 1$$

De lo cual se tiene como solución:

$$t_1 = 0,0012339$$

$$t_2 = 0,0002389$$

$$Z = 0,0014728$$

Y se tendrá como proporciones óptimas:

$$W = 678,95$$

$$p_1 = 0,837782$$

$$p_2 = 0,162218$$

De esta manera se puede afirmar que si se quiere minimizar el remordimiento luego de los dos meses, se debe invertir Bs. 837.782 a dos meses y Bs. 162.218 a un mes.

19.4.- Lo difuso

Cuando se habla de lo difuso o borroso, es que no se tiene una precisión exacta sobre las fronteras, esto puede ser tanto en nuestras metas como en el conocimiento de los parámetros.

19.5.- Obtención de Soluciones.

Una manera de obtener soluciones, tanto para los casos con riesgo como para el caso de trabajar con condiciones difusas, es obteniendo el conjunto Óptimo Pareto (Ver Anexos D y G).

En el caso de riesgo sería respecto a $[f; R_{1-\alpha}](x)$ o $[\mu; \sigma](x)$, mientras que para los casos valores difusos sería: $f(x)$ y los $\mu_{\tilde{g}_i}(g_i(x))$.

Ejemplo 2”

Vamos a suponer que las probabilidades de las tasas de interés para el próximo mes vienen dadas por una distribución triangular entre 27 y 33% con la moda en 33%.

Además, las tasas de no son dadas en porcentajes sin punto decimal¹⁴¹. Por lo cual se tiene la siguiente tabla para las dos alternativas:

| Alternativas | 27% | 28% | 29% | 30% | 31% | 32% | 33% |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2 meses | 52247.91 | 52269.44 | 52290.97 | 52312.49 | 52334.02 | 52355.55 | 52377.08 |
| 1 mes | 48062.5 | 48916.67 | 49770.83 | 50625. | 51479.17 | 52333.33 | 53187.5 |
| Prob. | 0.04 | 0.07 | 0.11 | 0.14 | 0.18 | 0.21 | 0.25 |

y para la función de arrepentimiento:

| Alternativas | 27% | 28% | 29% | 30% | 31% | 32% | 33% |
|--------------|---------|---------|---------|---------|--------|-------|--------|
| 2 meses | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 810.42 |
| 1 mes | 4185.41 | 3352.77 | 2520.14 | 1687.49 | 854.85 | 22.22 | 0. |
| Prob. | 0.04 | 0.07 | 0.11 | 0.14 | 0.18 | 0.21 | 0.25 |

Veamos ahora las soluciones, tanto para los beneficios como para los costos de oportunidad (arrepentimiento), primero para el par $[f; R_{1-\alpha}]$:

| Alternativas | R: 0.0% | R: 3.6% | R: 10.7% | R: 21.4% | R: 35.7% | R: 53.6% | R: 75.0% |
|--------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2 meses | 100.0% | 100.0% | 100.0% | 100.0% | 100.0% | 100.0% | 0.0% |
| 1 mes | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 100.0% |
| Valor | 52247.9 | 52269.4 | 52291. | 52312.5 | 52334. | 52355.6 | 53187.5 |

¹⁴¹ Esta suposición nos facilita el cálculo y no requerir del uso de integrales.

Como se puede notar, en este caso a menos que se quiera tomar un riesgo del 75% hay que invertir el todo en certificados a dos meses, mientras que si nos vamos con el arrepentimiento:

| Alternativas | R: 0.0% | R: 3.6% | R: 10.7% | R: 21.4% | R: 35.7% | R: 53.6% | R: 75.0% |
|--------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2 meses | 83.8% | 80.5% | 75.7% | 67.6% | 51.3% | 2.7% | 0.0% |
| 1 mes | 16.2% | 19.5% | 24.3% | 32.4% | 48.7% | 97.3% | 100.0% |
| valor | 679. | 652.7 | 613.2 | 547.5 | 416. | 21.6 | 0. |

A menos que se quiera correr un riesgo del 75% de no tener arrepentimiento siempre hay que diversificar.

Mientras que si se analiza el par $[\mu; \sigma]$ y el coeficiente de variación se tiene para el caso del beneficio:

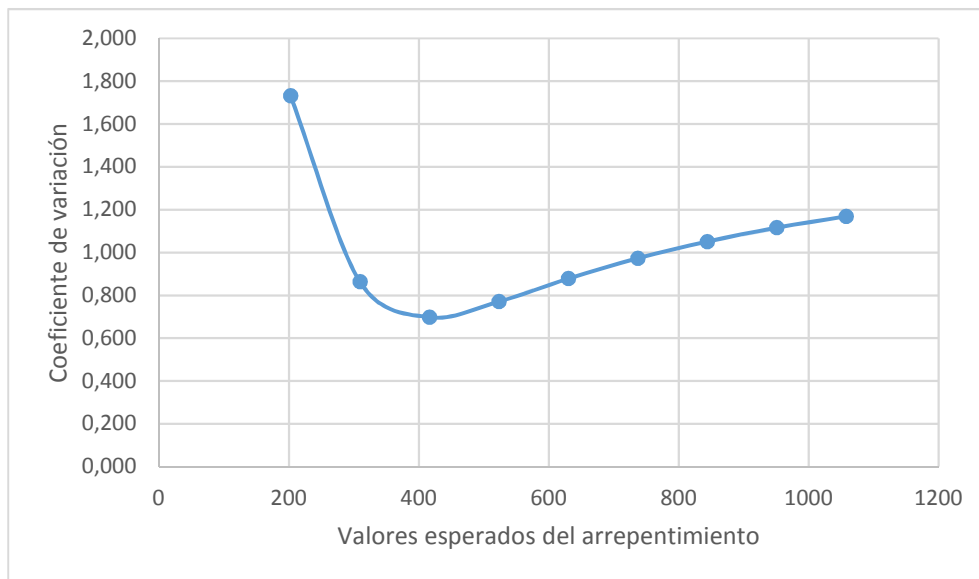
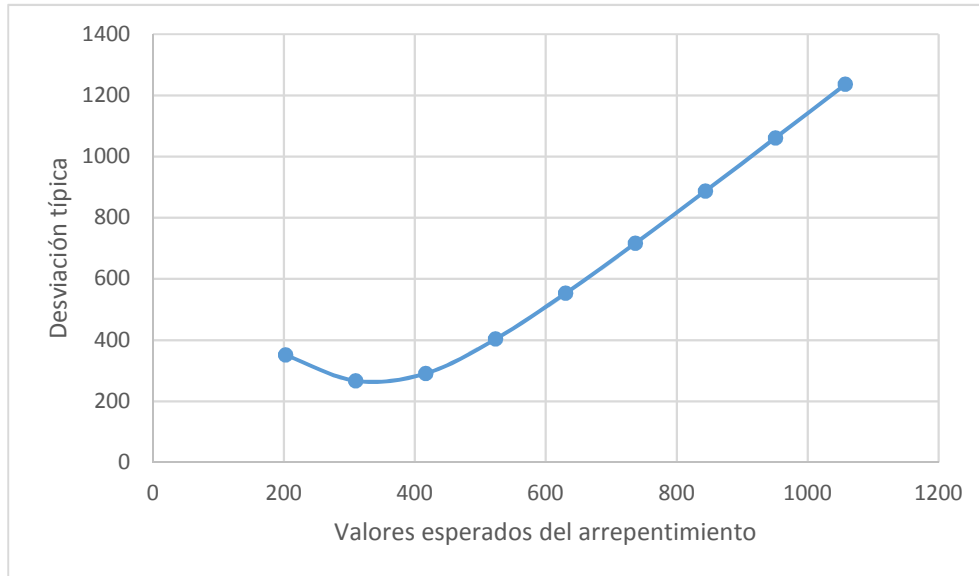
| RD | 2 meses | 1 mes | VE | DS | CV |
|----------|---------|--------|----------|---------|-------|
| 51479.17 | 0.0% | 100.0% | 51479.17 | 1479.46 | 0.029 |
| 51586.02 | 12.5% | 87.5% | 51586.02 | 1299.19 | 0.025 |
| 51692.88 | 25.0% | 75.0% | 51692.88 | 1118.92 | 0.022 |
| 51799.74 | 37.5% | 62.5% | 51799.74 | 938.65 | 0.018 |
| 51906.59 | 50.0% | 50.0% | 51906.59 | 758.37 | 0.015 |
| 52013.45 | 62.5% | 37.5% | 52013.45 | 578.1 | 0.011 |
| 52120.31 | 75.0% | 25.0% | 52120.31 | 397.83 | 0.008 |
| 52227.16 | 87.5% | 12.5% | 52227.16 | 217.56 | 0.004 |
| 52334.02 | 100.0% | 0.0% | 52334.02 | 37.29 | 0.001 |

Que la mejor opción es invertir a todo a dos meses – la menor desviación típica, el mayor valor esperado y el menor coeficiente de variación.

Mientras que en base a la función de remordimiento se tiene:

| RD | 2 meses | 1 mes | VE | DS | CV |
|---------|---------|--------|---------|---------|-------|
| 202.6 | 100.0% | 0.0% | 202.6 | 350.92 | 1.732 |
| 309.46 | 87.5% | 12.5% | 309.46 | 267.01 | 0.863 |
| 416.32 | 75.0% | 25.0% | 416.32 | 290.59 | 0.698 |
| 523.18 | 62.5% | 37.5% | 523.18 | 403.21 | 0.771 |
| 630.03 | 50.0% | 50.0% | 630.03 | 552.92 | 0.878 |
| 736.89 | 37.5% | 62.5% | 736.89 | 716.83 | 0.973 |
| 843.75 | 25.0% | 75.0% | 843.75 | 887.12 | 1.051 |
| 950.6 | 12.5% | 87.5% | 950.6 | 1060.71 | 1.116 |
| 1057.46 | 0.0% | 100.0% | 1057.46 | 1236.21 | 1.169 |

Como se puede apreciar, mejor en los gráficos siguientes se tiene que la menor desviación es la del segundo punto correspondiente a un valor esperado de remordimiento de 309, mientras que el menor coeficiente de variación corresponde al tercer punto correspondiente a un VE de 416.



Lo que si pareciera ser cierto, sean cuáles sean los modelos que se utilicen, es que lo mejor que se puede hacer en caso de riesgo e incertidumbre es diversificar (¡no ponga todos los huevos en las misma canasta!).

De manera tal que a nivel práctico se tiene:

- a) Diversifique (en la medida de lo posible),
- b) Prepárese para lo peor, pero aproveche las oportunidades. ¡Piense en los arrepentimientos!
- c) Y por último, sea adaptativo a los cambios del entorno.

CAPÍTULO 20

ALGUNAS HERRAMIENTAS DE IO

En capítulos anteriores se presentaron con algún grado de detalle algunas herramientas o técnicas de la Investigación de Operaciones (o administración científica) tales como la Programación Dinámica y el PERT/CPM. En este capítulo se van presentar de manera muy escueta algunas de otras herramientas de la IO.

20.1.- La Programación Lineal

Supongamos que una ensambladora fabrica dos productos A y B los cuales le dan un beneficio de Bs. 1,50 y Bs. 1,00 por unidad respectivamente, la ensambladora tiene dos tipos de empleados, 36 ensambladores y 18 empaquetadores; el producto A requiere por unidad de 1 hora hombre de ensamblaje y 1 h.h. de empaquetamiento, mientras que para el producto B se requiere 2 h.h. de ensamblaje y 1/2 de empaquetamiento. Además se tiene que los trabajadores tienen jornada de 8 horas. La fábrica quiere maximizar sus beneficios. ¿Cuántos productos A y B tiene que fabricar?.

Este problema lo podemos esquematizar en el siguiente cuadro:

Horas hombre requeridos por unidad (H.h)

| Tareas | Producto A | Producto B | Disponibles |
|-------------|------------|------------|-------------|
| Ensamblaje | 1 | 2 | 288 |
| Empaquetaje | 1 | ½ | 144 |
| Beneficios | 1,50 | 1,00 | |

El cual podemos representar mediante el siguiente modelo matemático:

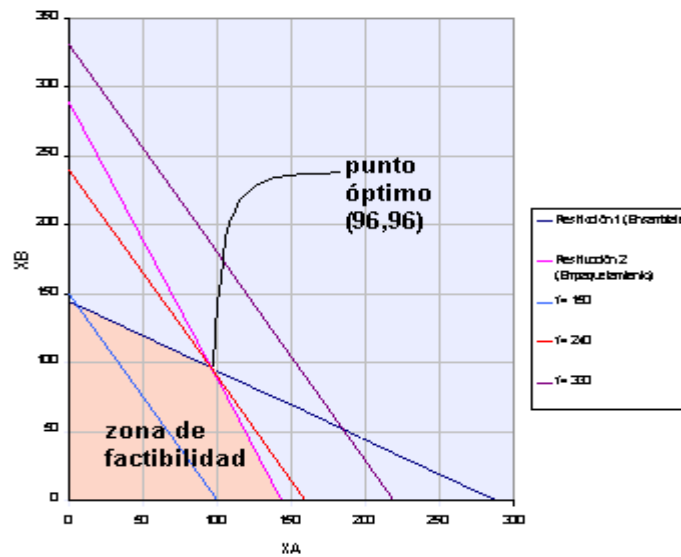
$$\text{maximizar } f(X_A, X_B) = 1,50 \cdot X_A + 1,00 \cdot X_B$$

$$\text{Sujeto a: } 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 288$$

$$1 \cdot X_A + \frac{1}{2} \cdot X_B \leq 144$$

$$X_A, X_B \geq 0$$

La función f a maximizar es la que se denomina función objetivo, los coeficientes de esta función son los coeficientes de beneficio, las desigualdades subsiguientes son las restricciones, en donde los coeficientes (1, 2, 1, 1/2) se les denominan coeficientes técnicos, y los valores en la derecha de las inecuaciones son las restricciones del nivel de los recursos disponibles. (Ver gráfica 1). La región enmarcada por estas restricciones es la que se denomina región de factibilidad (la que aparece coloreada en la gráfica).



Gráfica 20-1

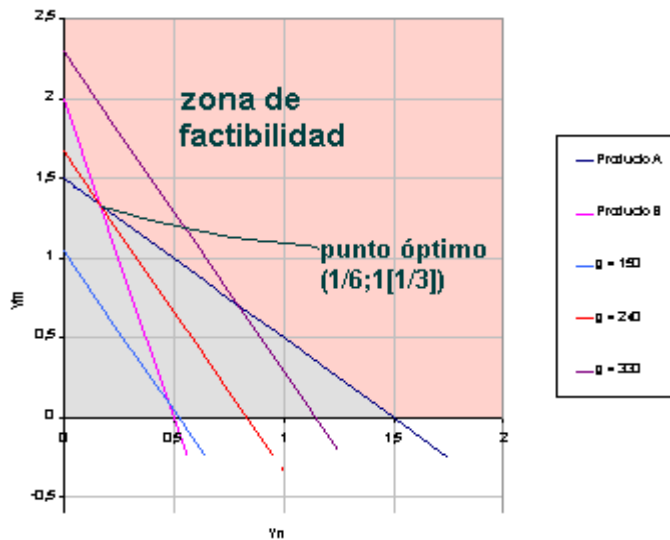
Y observando la gráfica también nos daremos cuenta que f alcanza su máximo valor en la región de factibilidad en el punto (96,96), en donde toma el valor de 240 Bs.

Pero, otra pregunta que puede hacerse nuestro ensamblador es como valorar las horas hombres de trabajo de los ensambladores y de los empacadores de manera que el costo sea mínimo. En este caso tendría el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } g(Y_n, Y_m) = 288Y_n + 144Y_m \\ &\text{sujeto a:} \\ &\quad 1. Y_n + 1. Y_m \geq 1,50 \\ &\quad 2. Y_n + \frac{1}{2} Y_m \geq 1,00 \\ &\quad Y_n, Y_m \geq 0 \end{aligned}$$

Y la solución de este modelo, como se puede notar en la gráfica 2, es (1/6, 1 1/3), punto en el cual g vale 240. La coincidencia de los valores óptimos de f y de g no es casualidad, sino

una propiedad de los problemas de programación lineal planteados en la forma anterior. Esta forma de planteamiento es el que se denomina el planteamiento de los problemas duales.



Gráfica 20-2.

La lista de problemas en los cuales se puede aplicar la programación lineal es muy extensa, y claro estas suelen tener más de dos variables y más de dos restricciones, pero afortunadamente existen buenos métodos computarizados para resolverlos. A continuación vamos a enumerar las aplicaciones de la P.L:

- Intensidad de aplicación de los medios publicitarios.
- Ruta de viajes
- Emplazamientos
- movimientos de materiales
- Transporte
- Ocupación y gestión de stock
- Asignación de tareas
- Ocupación de máquinas
- Pérdida de corte
- Mezclas
- Asignación de cuotas a vendedores
- Administración de personal.

Aunque esto no significa que sea siempre el modelo a usar en los casos anteriores, sino que bajo ciertas condiciones los problemas anteriormente mencionados pueden resolverse mediante modelos de programación lineal.

20.2.- La Teoría de Juegos

Vamos a suponer que dos empresas compiten por un mercado, teniendo ambas dos estrategias cada una. Y sea la repartición del mercado segun las estrategias el dado por el siguiente cuadro:

| | | Empresa B Estrategias | |
|--------------------------|----|--------------------------|----|
| | | B1 | B2 |
| Empresa A Estrategias | A1 | 60 | 40 |
| | A2 | 50 | 30 |

En donde los valores del cuadro, son los porcentajes del mercado para la empresa A.

Para este problema se puede notar que lo mejor que puede hacer la empresa A es usar su estrategia A1 ya que haga lo que haga la empresa B, el resultado es mejor usando A1 que A2, y de manera análoga la mejor estrategia para B es la B2. Este tipo de solución se le denomina solución minimax.

Claro está que este ejemplo anterior es un modelo muy burdo de la realidad, pero tiene su importancia en cuanto a que enseña que no siempre es posible maximizar o minimizar directamente, sino que hay que tomar en cuenta las estrategias del contrario a fin de -al menos- no escoger la peor.

Además del modelo anterior - juego de dos personas de suma cero- existen una gran variedad de modelos de juegos, entre los cuales cabe mencionar los modelos de más de dos jugadores con posibilidades de coaliciones. Los juegos contra la naturaleza, los juegos de suma diferente de cero, los juegos secuenciales. Para más detalles consultar el documento TJD1 en www.htho-non.blogspot.com.

20.3.- La Teoría de Colas

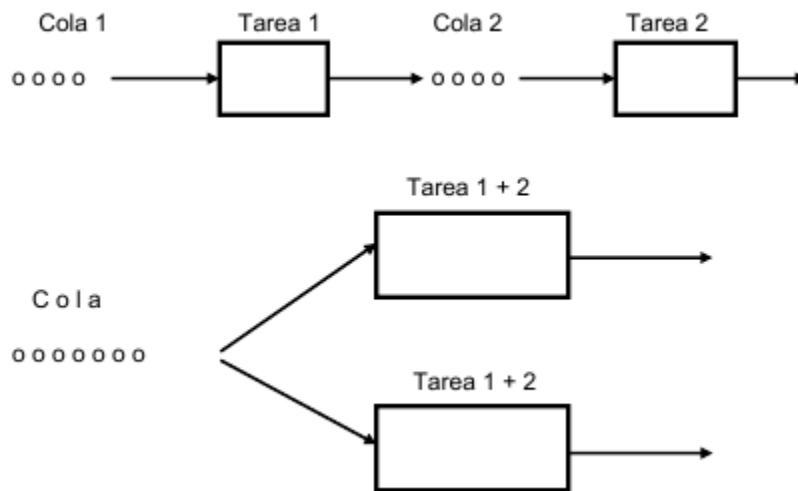
Supongamos que tenemos el siguiente problema:

Queremos prestar un servicio que se puede descomponer en dos tareas con duración esperada de dos minutos para cada una, y los usuarios del servicio vienen con un promedio de tiempo

entre ellos de tres minutos. Se quiere saber si al contratar dos personas para prestar el servicio, dedicar una de ellas a la primera tarea y la otra a la segunda, o que las dos personas realicen las dos tareas (Ver gráfica 20-3).

En el siguiente cuadro se resume los resultados teóricos de las dos opciones.

| | <u>Opción 1</u> | <u>Opción 2</u> |
|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| Probabilidad de que no haya usuarios | 0,11 | 0,20 |
| Longitud media de la cola | 2,67 | 1,07 |
| Media de usuarios en el sistema | 3,33 | 2,4 |
| Tiempo medio para esperar servicio | 8 min | 3,2 min |
| Tiempo medio en el sistema | 10 min | 7,2 min |



GRAFICA 20-3

Claro está que en la elaboración del cuadro anterior hubo unos supuestos, tales como: La distribución del tiempo entre llegadas y de la prestación de servicios es exponencial, que el usuario que no obtiene servicio inmediatamente va a hacer cola.

Y analizando los resultados de este cuadro nos da que la mejor opción es la 2. Pero podría plantearse otra cuestión y es que pasaría si al hacer una misma persona la misma tarea no se demore 4 minutos sino 5. Para este caso el valor de los parámetros descritos en el cuadro anterior serían: 0,09; 3,78; 5,45; 11,36; 16,36; respectivamente. Y obviamente en este caso sería preferible la opción 1.

Este es solamente uno de los ejemplos más sencillos del uso de la teoría de colas, aunque los ejemplos más complicados no se suelen resolver por medios analíticos, sino mediante la simulación (Ver capítulo 5).

20.4.- La Teoría de Inventarios

La teoría de inventarios trata de resolver problemas tales como cuando hacer un pedido, cuánto ordenar, cuánto almacenar en base a datos como costo de hacer un pedido, costo de almacenamiento, la función de demanda, costo de escasez, descuento por cantidades, etc.

Así tenemos que para hacer un modelo simple - El modelo determinístico, estático de un solo ítem, de demanda uniforme y sin escasez - la cantidad a ordenar D viene dada por $\sqrt{1/2 p Q}$, en donde p es el costo del pedido, Q es la demanda anual e I el costo de inventario anual por unidad.

Como dijimos este es el modelo más sencillo, y estos se van complicando a medida en que la demanda se haga aleatoria, aumente el número de ítems, se permita escasez, se pueda percibir descuentos, etc. Cuando estos modelos se complican mucho se suelen resolver por métodos de simulación.

Además es de hacer notar que algunos problemas de inventarios están combinado con problemas de cola, lo que los hace más difíciles todavía.

Los modelos de inventarios, también pueden aplicarse a otros problemas tales como situaciones financieras, recursos humanos, etc.

20.5.- Los Procesos Estocásticos

Una compañía ha determinado que si cierra un mes con balance positivo tiene una probabilidad de $3/4$ de cerrar con un balance positivo el mes siguiente y de $1/4$ de cerrar negativamente, mientras que si cierra un mes con balance negativo tiene una probabilidad de $1/2$ de cerrar con

balance positivo al mes siguiente y de $1/2$ de volver a cerrar con balance negativo. (Ver gráfico 19-4).

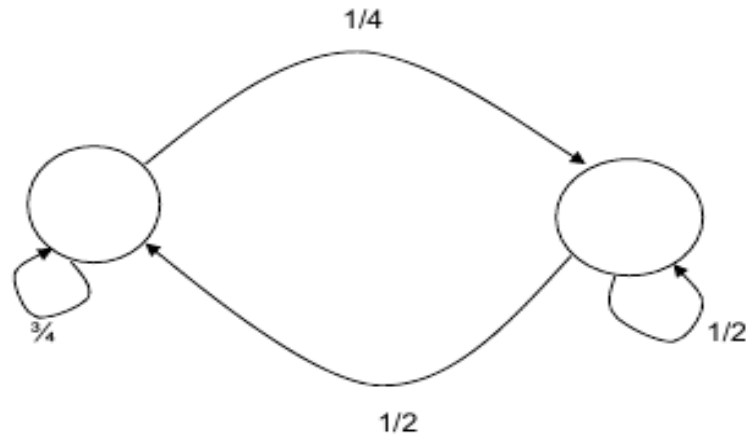


Gráfico 20-4.

La Compañía desea saber a) si en Enero tiene balance positivo cual es la probabilidad que en marzo tenga balance positivo; b) Cuáles son las probabilidades, a largo plazo, de tener balances positivos.

Las respuestas a estas preguntas son $11/16$ y $2/3$.

Esta ultima respuesta puede interpretarse de la manera siguiente: la compañía ha de esperar tener balances positivos las $2/3$ de las veces y las demás veces ($1/3$) balances negativos.

Claro está que hay casos de procesos estocásticos mucho más complejos los cuales no siempre tienen solución analítica. Además es de observar que la teoría de colas es un caso particular de los procesos estocásticos.

CAPÍTULO 21

PRAXEOLOGÍA NORMATIVA Y PRAXEOLOGÍA POSITIVISTA

Si bien este libro está dedicado a la praxeología normativa, no deja de reconocer la praxeología positivista.

De hecho ninguna praxeología normativa puede tener éxito si no toma en cuenta los resultados de la praxeología positivista, sobre todo de porque los individuos y los colectivos actúan de cierta manera, que los motiva, cuál es el poder de las costumbres, mitos, líderes, etc. En general de ¿Por qué el éxito de la estupidez sobre el sentido común?

Así, para la praxeología normativa son importantes los resultados de la praxeología positivista en cuanto al porqué de las acciones tanto individuales y de grupos. Para la praxeología positivista son problemas de búsqueda de porqué las acciones de los individuos y de los grupos no son eficientes, de porqué la estupidez es más exitosa que el sentido común.

En otras palabras, la praxeología normativa y la praxeología positivista, no pueden seguir siendo esferas separadas de la investigación, las dos deben retroalimentarse. Unir esfuerzos. Complementarse la una a la otra.

Así, si se tiene que una serie de acciones eficientes, para lograr un objetivo, es $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y la gente realiza las acciones $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ nada eficientes para lograr el mismo objetivo. A la praxeología positivista le tocará tratar de dar la explicación del porqué, mientras que la praxeología normativa buscará unas acciones nuevas que impulse a la gente preferir y realizar la serie de acciones A y no la B .

Pero, también la praxeología positivista puede tratar de explicar el porqué de ciertas acciones en un grupo, mientras que la praxeología normativa tendrá que tomar, si estas acciones obedecen a unos principios morales, como limitantes para los programas de acción, o ver cómo lograr una modificación de los mismos si generan resultados macros no deseables.

En fin, no puede, ni debe, existir un divorcio entre la praxeología positivista y la praxeología normativa. Las dos deben convivir, ayudarse y complementarse mutuamente.

21.1.- El Uso Del Análisis Causal En El Análisis Histórico.

Si bien el historicismo en base al análisis causal ha sido criticado por varios filósofos, con los planteamientos dados en el capítulo 10 se pueden reforzar dichas críticas. Dejar de usar frases tan simplistas como: “fulano está en la situación X por su culpa”, “El país P en está en tal situación porque fue colonizado por el país Y”. El análisis histórico tiene que ser mucho más profundo, además de que del mismo no se puede predecir el futuro, ni las acciones a tomar para controlar dicho futuro.

Por lo tanto para realizar cualquier análisis histórico se debe:

- 1) Desglosar bien los actores intervinientes y las acciones que realizaron y las condiciones políticas, sociales, económicas y tecnológicas existentes para el momento y que otros eventos sucedieron. Desechar las causas espurias.
- 2) Si se quiere utilizar dichos análisis para tomar decisiones hay que evaluar muy bien las diferencias y semejanzas existentes, tanto de los actores como de las condiciones, entre el momento histórico y el momento de tomar dichas decisiones.

ANEXOS

D.- ÓPTIMO PARETO

D.1.- Relación (de) Pareto:

Sea X un conjunto cualquiera y sean f_1, \dots, f_p , funciones numéricas definidas sobre X .

Se llama relación de Pareto asociada a f_1, \dots, f_p , la relación binaria R :

$$(x)(y) \ x, y \in X, \ xRy \iff (i) \ i=1, \dots, p, \ f_i(x) \geq f_i(y).$$

Se tienen entonces, como propiedades de R :

- 1) R es reflexiva.
- 2) R es transitiva.

D.2.- Óptimo (de) Pareto:

$x \in X$ se llama Óptimo Pareto, si es un elemento maximal de la relación R , esto es:

$$\neg(\exists y) \ y \in X \wedge yRx \wedge \neg(xRy).$$

Es decir: $\neg(\exists y) \ y \in X \wedge (i) \ i=1, \dots, p, \ f_i(y) \geq f_i(x)$, siendo alguna de las desigualdades estricta.

O dicho en palabras, un punto es un Optimo Pareto, asociado a las funciones f_1, \dots, f_p , si no es posible aumentar alguna de las funciones sin disminuir alguna otra.

Al conjunto de los puntos Óptimos Paretos se le denomina como $P[X; f_1, \dots, f_p]$

Ejemplo: Sea $X = \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$ y

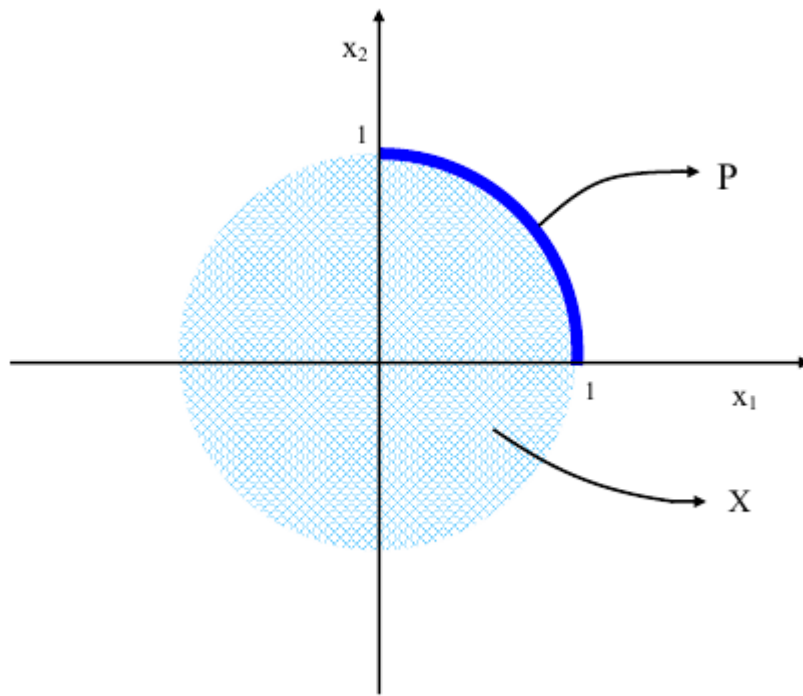
$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \text{ y } f_2(x_1, x_2) = x_2$$

Se tiene entonces que:

$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_1 \geq y_1 \wedge x_2 \geq y_2$$

$$\text{y } P[X; f_1, f_2] = \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \text{ y } x_1, x_2 \geq 0 \}.$$

Ver gráfica C-1.



Gráfica C-1

E.- PROGRAMACIÓN ECONÓMICA

E.1.- El problema de optimización clásico:

Sea:

$$\text{Maximizar } f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Una condición necesaria para que f tenga un máximo es que:

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Para que esta condición sea suficiente que f tiene que ser cóncava, esto es que H_f^{142} sea negativo semidefinido para todo x .

E.2.- El problema clásico con restricciones:

Sea:

$$\text{Maximizar } f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Sujeto a: } G(x) = 0, \quad G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

En este caso se construye la función $L_{f,G}(x, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^m$), llamada Lagrangeano:

$$L_{f,G}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T \cdot G(x)$$

y se procede a maximizar esta función:

$$\nabla f(x^*) + J_G(x^*) \cdot \lambda = 0$$

$$G(x^*) = 0.$$

¹⁴² La matriz H_f es la matriz de las segundas derivadas.

E.3.- El problema de programación económica sin restricciones:

Sea:

$$\text{Maximizar } f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Sujeto a: } x \geq 0$$

Sí f es cóncava, la condición de optimalidad será:

$$\nabla f(x^*) \leq 0$$

$$x^* \geq 0$$

$$\nabla f(x^*) \cdot x^* = 0$$

o también:

$$\nabla f(x^*) + r = 0$$

$$x - \delta = 0$$

$$r^T \cdot \delta = 0$$

$$r, \delta \geq 0; r, \delta \in \mathbb{R}^n$$

E.4.- El problema de programación económica restringido:

Sea:

$$\text{Maximizar } f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Sujeto a: } G(x) \geq 0, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \geq 0$$

La restricción se puede convertir en :

$$G(x) - s = 0$$

$$s \geq 0$$

Usando los multiplicadores de Lagrange queda:

$$\text{Maximizar } L_{f,G-s}(x,s, \lambda) = f(x) + \lambda^T \cdot [G(x) - s]$$

$$\text{Sujeto a: } x, s \geq 0$$

Aplicando el resultado del problema 3, se tiene:

$$\nabla L_{x,s} \leq 0$$

$$\nabla L_{\lambda} = 0$$

$$x, s \geq 0$$

$$\nabla L \cdot [x|s] = 0$$

pero

$$\nabla L = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + J_G(x) \cdot \lambda \\ -\lambda \\ G(x) - s \end{pmatrix}$$

De esta manera queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla f(x) + J_G(x) \cdot \lambda \leq 0$$

$$G(x) - s = 0$$

$$-\lambda \leq 0$$

$$x, s \geq 0$$

$$[\nabla f(x) + J_G(x) \cdot \lambda]^T \cdot x = 0$$

$$\lambda^T \cdot s = 0$$

O también de manera equivalente:

$$\nabla f(x) + J_G(x) \cdot \lambda + r = 0$$

$$G(x) - s = 0$$

$$x, s, r, \lambda \geq 0$$

$$r^T \cdot x = 0$$

$$s^T \cdot \lambda = 0$$

Estas últimas condiciones planteadas son las condiciones dadas por Kuhn-Tucker.

E.5.- Problema de Programación Lineal. (PL)

Los problemas de programación lineal en su forma standard son de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } c^T \cdot x \\ &\text{Sujeto a: } A \cdot x \leq b \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de K-T se tiene:

$$\begin{aligned} A^T \cdot y - r &= c \\ A \cdot x + s &= b \\ r^T \cdot x &= 0 \\ s^T \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & -I & 0 \\ A & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

Para resolver este problema existe el algoritmo Simplex, el cual se da resumido en el Anexo F

E.6.- Programación Cuadrática (PQ):

Los problemas de programación cuadrática son de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } c^T \cdot x - x^t \cdot Q \cdot x \\ &\text{Sujeto a: } A \cdot x \leq b \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

Aplicando las condiciones de K-T se tiene:

$$-2Q.x - A^T.y + r = -c$$

$$A.x + s = b$$

$$r^T.x = 0$$

$$s^T.y = 0$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -2Q & -A^T & -I & 0 \\ A & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$$

Para resolver este problema existe el algoritmo del pivote complementario, el cual se da resumido en el Anexo F

E.7.- Programación geométrica (PG):

Definamos un monomio: $M = c \prod_i x_i^{e_i}$

$$\text{o } \log M = c + \sum_i e_i \log(x_i)$$

y a un posinomio como: $P = \sum_j \sigma_j M_j$, en donde $\sigma_j \equiv \pm 1$.

Entonces un problema de PG esta definido por el siguiente tipo de ecuaciones:

Minimizar P_0

Sujeto a: $P_k \leq \sigma_k$; $k = 1, \dots, m$

$x_i \geq 0$; $i = 1, \dots, n$

La solución del problema se obtiene mediante la solución del problema:

$$\text{Maximizar } \Phi = \sigma \left\{ \prod_k \left[\prod_j (c_{jk}/w_{jk})^{\sigma_{jk} w_{jk}} w_k^{\sigma_k w_k} \right] \right\}^{\sigma}; \quad w_0=1$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_j \sigma_{j0} w_{j0} = \sigma$$

$$\sum_k \sum_j \sigma_{jk} e_{ijk} w_{jk} = 0; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_j \sigma_{jk} w_{jk} - \sigma_k w_k = 0; \quad k = 1, \dots, m$$

$$w_{jk}, w_k \geq 0$$

El sistema anterior tiene una solución única cuando el número de monomios es igual al número de variables más uno.

Para hallar el valor de las variables, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_{j0} = \sigma \Phi w_{j0};$$

$$M_{jk} = w_{jk}/w_k.$$

F.- ALGORITMOS

F.1.- El algoritmo dual simplex:

Sea el problema:

$$\text{Minimizar } z=c^T \cdot x$$

$$\text{Sujeto a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Se construye la siguiente tabla inicial:

| | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|-------------------------|-------|-------|-----------------|-------|
| vb | x_1 | x_2 | $x_3 \dots x_n$ | s_1 | s_2 | $s_3 \dots s_m$ | b |
| s_1 | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3} \dots a_{1,n}$ | 1 | 0 | 00 | b_1 |
| s_2 | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3} \dots a_{2,n}$ | 0 | 1 | 00 | b_2 |
| s_3 | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3} \dots a_{3,n}$ | 0 | 0 | 10 | b_3 |
| .. | | | | .. | .. | | ... |
| s_m | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | $a_{m,3} \dots a_{m,n}$ | 0 | 0 | 01 | b_m |
| c-Z | c_1 | c_2 | $c_3 \dots c_n$ | 0 | 0 | 00 | 0 |

Luego se sigue el siguiente algoritmo:

Paso 1: Se ubica el b_j más negativo y se asigna a b_{jm} .

Si no hay b_j negativo, se va al paso 5.

Paso 2: Se ubica el menor de los $\text{abs}(c_i/a_{jm,i})$ para los $a_{jm,i}$ negativos y se asigna a $a_{jm,im}$. Si no hay $a_{jm,i}$ negativo, entonces el problema NO TIENE SOLUCION FACTIBLE.

Paso 3: Se ejecuta el **algoritmo de pivoteo**.

Paso 4: Se regresa al paso 1.

Paso 5: Se ubica el c_i más negativo y se asigna a c_{im} .

Si no hay c_i negativo, entonces se ha ENCONTRADO LA SOLUCION AL PROBLEMA.

Paso 6: Se ubica el menor $b_j/a_{j,im}$ para los $a_{j,im}$ positivos y se asigna a $a_{jm,im}$. Si no hay $a_{j,im}$ positivo, entonces el problema NO ESTA ACOTADO.

Paso 7: Se ejecuta el algoritmo de pivoteo.

Paso 8: Se regresa al paso 5.

F.2. - Algoritmo de pivoteo:

Paso 1: Se asigna al elemento pivote (PIVOTE) $a_{jm,im}$.

Paso 2: Se divide toda la fila pivote entre el elemento pivote:

$$a_{jm,i} = a_{jm,i}/\text{PIVOTE}; \quad b_{jm} = b_{jm}/\text{PIVOTE}.$$

Paso 3: Para cada fila diferente a la pivote:

- a.- Se asigna como multiplicador (MULTIPLICADOR_j) al elemento de la fila correspondiente a la columna pivote ($a_{j,im}$).
- b.- Se le restan a las filas la fila pivote multiplicada por el correspondiente multiplicador:

$$a_{j,i} = a_{j,i} - \text{MULTIPLICADOR}_j * a_{jm,i}$$

$$b_j = b_j - \text{MULTIPLICADOR}_j * b_{jm}$$

$$c_i = c_i - \text{MULTIPLICADOR}_c * a_{jm,i}$$

$$-z = -z - \text{MULTIPLICADOR}_c * b_{jm}$$

Paso 4: Se asigna a $v_{b_{jm}}$ la variable correspondiente a la columna pivote.

FIN DEL ALGORITMO.

F.3.- Algoritmo del pivote complementario.

Sea el problema:

Hallar dos vectores w y z tal que:

$$w - M.z = q$$

$$w^T.z = 0$$

$$w, z \geq 0$$

Se construye la siguiente tabla inicial:

| vb | z_1 | z_2 | $z_3 \dots z_n$ | w_1 | w_2 | $w_3 \dots w_n$ | z_0 | q |
|-------|-----------|-----------|-------------------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|
| w_1 | $m_{1,1}$ | $m_{1,2}$ | $m_{1,3} \dots m_{1,n}$ | 1 | 0 | 0 0 | -1 | q_1 |
| w_2 | $m_{2,1}$ | $m_{2,2}$ | $m_{2,3} \dots m_{2,n}$ | 0 | 1 | 0 0 | -1 | q_2 |
| w_3 | $m_{3,1}$ | $m_{3,2}$ | $m_{3,3} \dots m_{3,n}$ | 0 | 0 | 1 0 | -1 | q_3 |
| .. | | | | .. | .. | | ... | .. |
| w_n | $m_{n,1}$ | $m_{n,2}$ | $m_{n,3} \dots m_{n,n}$ | 0 | 0 | 0 1 | -1 | q_n |

Paso 1: Se halla el menor de los $q_j < 0$ y se asigna a q_{jm} .

Si no hay q_j negativo, entonces SE TIENE LA SOLUCION.

Paso 2: Se asigna como elemento pivote el elemento de la columna z_0 correspondiente a esta fila ($m_{jm,2n+1}$).

Paso 3: Se ejecuta el algoritmo de pivoteo.

Paso 4: Se asigna como nueva columna pivote la correspondiente a z_{jm} ($im \leftarrow jm$).

Paso 5: Se halla el menor de los $q_j/m_{j,im}$ para los $m_{j,im}$ positivos y se asigna a $m_{jm,im}$. Si no hay $m_{j,im}$ positivos, entonces NO HAY SOLUCION AL PROBLEMA.

Paso 6: Se ejecuta el algoritmo de pivoteo.

Paso 7: Si el ultimo pivoteo fue sobre la fila correspondiente a z_0 , entonces SE TIENE LA SOLUCION DEL PROBLEMA. Si no, se va al paso 4.

El algoritmo de pivoteo es el mismo (con excepción de los símbolos) que el descrito en la parte 1, correspondiente al Simplex.

G.- INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN CONDICIONES BORROSAS

G.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo se va a considerar la I.O. en su forma más general: Optimizar unos objetivos sujetos a unas restricciones de recursos y de manera tal que se cumplan unas metas, bajo unas relaciones tecnológicas conocidas.

En esta definición anterior se tienen varios conceptos - Optimizar, objetivos, restricciones de recursos, cumplimientos de metas, relaciones tecnológicas - sobre las cuales no siempre se tiene un conocimiento exacto o no hay un acuerdo sobre sus magnitudes. En otras palabras, son conocidos solo de una manera vaga o borrosa.

Esto no quiere decir que los problemas de I.O. se resuelven siempre tomando en cuenta estas vaguedades y/o borrosidades, ya que en la mayoría de los casos estas borrosidades se eliminan afinando las definiciones o conceptos y los conocimientos sobre la problemática aunque esto no siempre es posible o conveniente.

Para empezar se van a definir los conceptos que en la I.O. puedan tener una connotación borrosa.

G.2.- DEFINICIONES BORROSAS (O DIFUSAS):

OPTIMIZAR: El concepto optimizar (u optimar) puede adquirir diferentes significados, se puede referir a la búsqueda de un máximo o mínimo absoluto, pero también puede significar hallar y conformarse con una "buena solución".

OBJETIVOS: Estos pueden presentarse en forma de funciones de costos o ganancias cuyas estructuras son borrosas, ó también, pueden ellos mismos no estar claros.

RESTRICCIONES DE RECURSOS: A veces las verdaderas capacidades del uso de los recursos, o sea, la disponibilidad real de los recursos en sí, son sólo conocidas de una manera aproximada o vaga.

CUMPLIMIENTOS DE METAS: Estas por lo general menos claras que los objetivos y muy ligadas a ellos, suelen ser deseos - generalmente de origen político e ideológico - impregnadas de un gran contenido de subjetividad.

CONDICIONES TECNICAS: Las condiciones técnicas en las cuales se desarrollan los problemas de I.O., no siempre se conocen en toda su completitud y complejidad, y pueden ser aproximaciones bastante burdas de la realidad.

Estas breves conceptualizaciones anteriores permiten constatar que una aproximación a la I.O. mediante el uso de los conjuntos borrosos puede ayudar en la obtención de resultados y soluciones a tales problemas.

G.3.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Optimo Pareto

a) Relación (de) Pareto:

Sea X un conjunto cualquiera y sean f_1, \dots, f_p , funciones numéricas definidas sobre X .

Se llama relación de Pareto asociada a f_1, \dots, f_p , la relación binaria R :

$(x)(y) x, y \in X, xRy \iff (i) i=1, \dots, p, f_i(x) \geq f_i(y)$.

Se tienen entonces, como propiedades de R :

- 1) R es reflexiva.
- 2) R es transitiva.

b) Optimo (de) Pareto:

$x \in X$ se llama Optimo Pareto, si es un elemento maximal de la relación R , esto es: $\neg(\exists y) y \in X \wedge yRx \wedge \neg(xRy)$. Es decir: $\neg(\exists y) y \in X \wedge (i) i=1, \dots, p, f_i(y) \geq f_i(x)$, siendo alguna de las desigualdades estricta.

O dicho en palabras, un punto es un Optimo Pareto, asociado a las funciones f_1, \dots, f_p , si no es posible aumentar alguna de las funciones sin disminuir alguna otra.

Al conjunto de los puntos Óptimos Paretos se le denomina como $P[X; f_1, \dots, f_p]$

Ejemplo: Sea $X = \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$ y

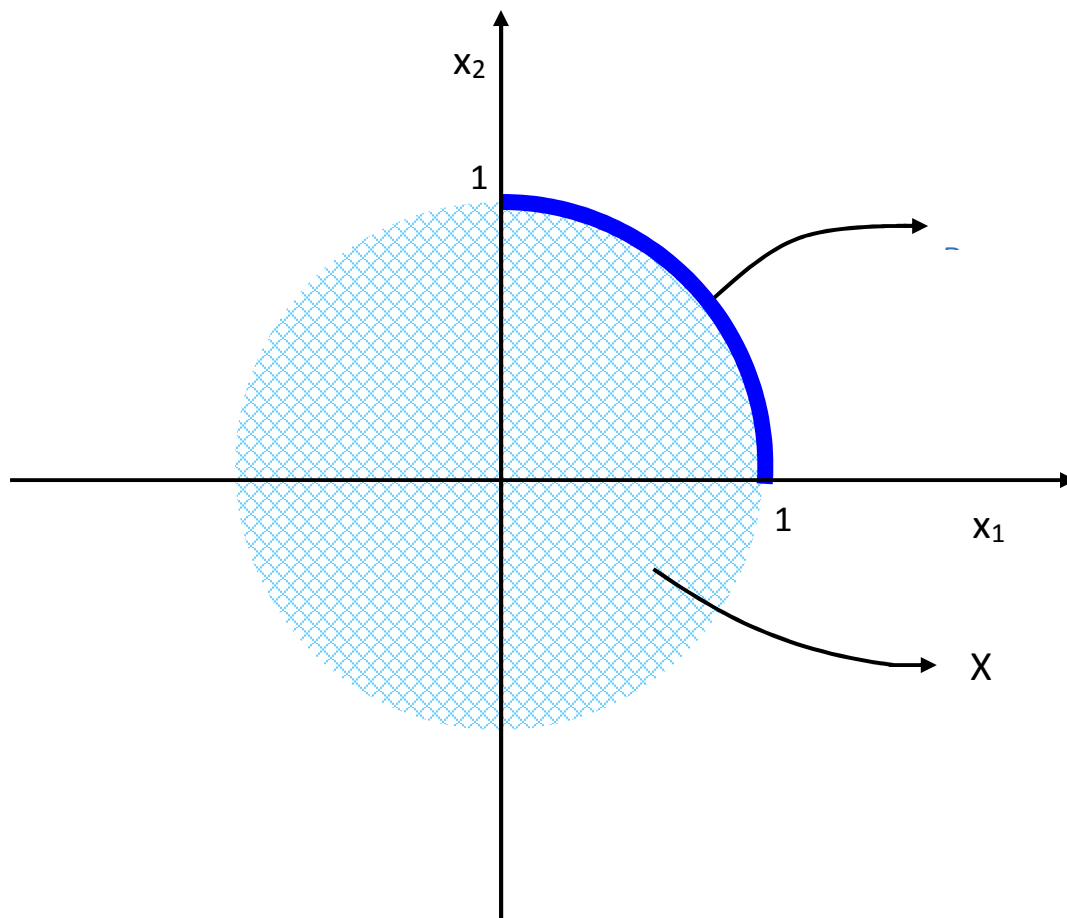
$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \text{ y } f_2(x_1, x_2) = x_2$$

Se tiene entonces que:

$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_1 \geq y_1 \wedge x_2 \geq y_2$$

$$\text{y } P[X; f_1, f_2] = \{ (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \text{ y } x_1, x_2 \geq 0 \}.$$

Ver gráfica G-1.



GRAFICA G-1

Subconjuntos Borrosos

a) Sea \$X\$ un conjunto cualquiera, se denota por subconjunto borroso \$\underline{R}\$ de \$X\$ a:

$$\underline{R} = \{(x | \mu_{\underline{R}}(x)), (x) x \in X$$

en donde \$\mu_{\underline{R}}\$ es la función de pertenencia de \$x\$ al conjunto borroso \$R\$, y toma valores entre 0 y 1.

b) Las operaciones sobre conjuntos borrosos:

Sean \underline{R}_1 y \underline{R}_2 dos subconjuntos borrosos de X , con funciones de pertenencia μ_1 y μ_2 (en vez de μ_{R_1} y μ_{R_2}). Entonces se pueden definir las siguientes operaciones:

1) Unión (\cup)

$$\underline{R}_1 \cup \underline{R}_2 = \{(x \mid \max(\mu_1(x), \mu_2(x))), (x) \mid x \in X\}.$$

2) Intersección (\cap)

$$\underline{R}_1 \cap \underline{R}_2 = \{(x \mid \min(\mu_1(x), \mu_2(x))), (x) \mid x \in X\}.$$

3) Identidad de Subconjuntos Borrosos

$\underline{R}_1 \wedge \underline{R}_2$ son idénticos ($\underline{R}_1 = \underline{R}_2$) si:

$$(x) \mid x \in X, \mu_1(x) = \mu_2(x).$$

4) Complemento respecto a X

$\underline{R}_1 \wedge \underline{R}_2$ son complementarios ($\underline{R}_1 = \underline{R}_2^c$) respecto a X si:

$$(x) \mid x \in X, \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x).$$

5) Inclusión

\underline{R}_1 está incluido en \underline{R}_2 ($\underline{R}_1 \subseteq \underline{R}_2$) si:

$$(x) \mid x \in X, \mu_1(x) \leq \mu_2(x).$$

6) Pertenencia Borrosa

Se dirá que $x \in X$ pertenece al subconjunto borroso \underline{R}_1 si: $\mu_1(x) > 0$ ($x \in \underline{R}_1$).

Ejemplo:

Sean:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\underline{R}_1 = \{(1|0), (2|0,1), (3|0,2), (4|0,5), (5|0,8), (6|1)\}$$

$$\underline{R}_2 = \{(1|0), (2|0,4), (3|0,8), (4|1), (5|0,5), (6|0)\}$$

Entonces:

$$\underline{R}_1 \cup \underline{R}_2 = \{(1|0), (2|0,4), (3|0,8), (4|1), (5|0,8), (6|1)\}$$

$$\underline{R}_1 \cap \underline{R}_2 = \{(1|0), (2|0,1), (3|0,2), (4|0,5), (5|0,5), (6|0)\}$$

$$\underline{R}_1^c = \{(1|1), (2|0,9), (3|0,8), (4|0,5), (5|0,2), (6|0)\}$$

Mientras que

$$\underline{R}_3 = \{(1|0), (2|0,3), (3|0,7), (4|1), (5|0,5), (6|0)\}$$

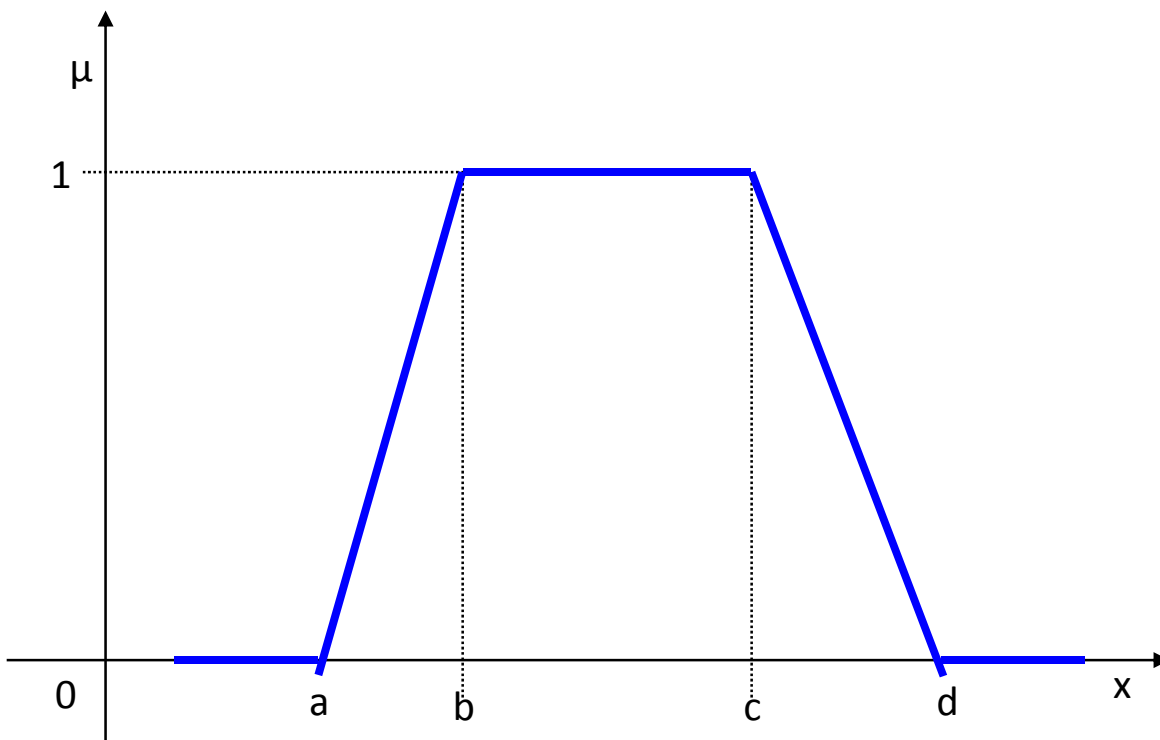
está incluido en \underline{R}_2 (Igualmente $\underline{R}_1 \cap \underline{R}_2$ está incluido tanto en \underline{R}_2 como en \underline{R}_1).

Números Borrosos

Un número borroso \tilde{n} es un subconjunto borroso sobre la recta real, con una función de pertenencia del siguiente tipo:

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \text{Estrictamente creciente entre } 0 \text{ y } 1, & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ \text{Estrictamente decreciente entre } 1 \text{ y } 0, & x \in [c, d] \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$

(Ver gráfica G-2)



GRAFICA G-2

- Operaciones con números borrosos:

Sean \tilde{n} y \tilde{m} dos números borrosos y $*$ una operación algebraica cualquiera, entonces:

$$\mu_{\tilde{n}*\tilde{m}}(z) = \max_{z=x*y} \{ \min(\mu_{\tilde{n}}(x), \mu_{\tilde{m}}(y)) \}$$

Y de forma más general: se tienen $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N$, números borroso, y sea f una operación con ellos entonces:

$$\mu_{f(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)}(z) = \max_{z=f(x_1, \dots, x_N)} \{ \min(\mu_{\tilde{n}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{n}_N}(x_N)) \}$$

G.4.- PLANTEAMIENTO GENERAL DE LOS PROBLEMAS DE I.O.

Los problemas de I.O. se pueden plantear matemáticamente de las siguientes maneras:

Planteamiento 1: Maximizar (o minimizar) $f(\mathbf{x})$,

Sujeto a: $\mathbf{x} \in R$

Planteamiento 2: Maximizar (o minimizar) $f(\mathbf{x})$,

Sujeto a: $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$.

En donde f es la función definida por los objetivos (función objetivo), y R el conjunto formado por la intersección de los recursos y por el cumplimiento de las metas, esto en el primer planteamiento, mientras que en el segundo planteamiento, se tiene que \mathbf{g} define las relaciones técnicas y \mathbf{B} los recursos disponibles y los niveles de las metas - \mathbf{g} , \mathbf{B} y \mathbf{x} son vectores y R un espacio vectorial - .

Así, se analizarán los casos en los cuales f y/o \mathbf{g} tienen elementos (números) borrosos y los casos en los cuales R sea un subconjunto borroso o \mathbf{B} sea un vector formado por números borrosos.

NOTAS:

- 1.- El problema de minimizar $h(x)$ es equivalente al de maximizar $f(x)$, $f = -h$. Así cuando se hable de óptimo, se referirá en el sentido de máximo, sin por esto perder generalidad en la formulación de los resultados.
- 2.- Si $X_1 \subseteq X_2$, y x_1° es el máximo en X_1 y x_2° es el máximo en X_2 , entonces: $f(x_1^\circ) \leq f(x_2^\circ)$.

G.5.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE I.O. CON CONDICIONES BORROSAS

Caso 1: El conjunto de las restricciones (R) es borroso.

Así se tiene que $\underline{R} = \{(x | \mu_R(x))\}$, $(x) x \in X$.

Se definen los conjuntos ordinarios de nivel α , de la siguiente manera:

$$R_\alpha = \{x | \mu_R(x) \geq \alpha\}$$

Obviamente, se tendrá que si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces $R_{\alpha_1} \subseteq R_{\alpha_2}$.

Además, se sabe (ver nota 2) que si x_1° es el óptimo en R_{α_1} y x_2° es el óptimo en R_{α_2} , entonces si $R_{\alpha_1} \subseteq R_{\alpha_2}$ se tiene que $f(x_1^\circ) \leq f(x_2^\circ)$.

Así que si se toman el par de funciones $f(x)$ y $\mu_R(x)$, se tiene como solución al problema un conjunto de Óptimos Pareto: $P[X; f, \mu_R]$. Esto es, no se puede mejorar el valor de la función objetivo f sin disminuir el grado de pertenencia al conjunto de restricciones μ_R , ni aumentar μ_R sin disminuir f . Además de que para cada nivel de pertenencia α , se tendrá un óptimo x_α° .

Ejemplo: Sea el problema:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

Sujeto a: $(x, y) \in \underline{R} = \{(x, y) | \mu_R(x, y)\}$

$$\text{con } \mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ (4 - (x^2 + y^2))/3, & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

Si se construyen los conjuntos ordinarios de α , R_α se tiene:

$$R_\alpha = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4 - 3\alpha\}, \alpha \in (0, 1]$$

$$R_0 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

Así que para cada $\alpha > 0$, se puede usar el Lagrangeano para hallar la solución (el máximo) en R_α (la solución para R_0 , $x = \infty$, $y = \infty$, $f(x,y) = \infty$) :

$$L_\alpha(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 + 3\alpha - 4)$$

Derivando e igualando a cero se tiene:

$$\partial L_\alpha / \partial x = 1 - 2\lambda x = 0 \implies x = 1/(2\lambda).$$

$$\partial L_\alpha / \partial y = 1 - 2\lambda y = 0 \implies y = 1/(2\lambda).$$

$$\partial L_\alpha / \partial \lambda = -(x^2 + y^2 + 3\alpha - 4) = 0 \implies x^2 + y^2 = 4 - 3\alpha.$$

$$\implies x_\alpha^\circ = y_\alpha^\circ = \sqrt{(4 - 3\alpha)/2}.$$

Así que:

$$P[X; f, \mu_R] = \{ (\sqrt{(4 - 3\alpha)/2}, \sqrt{(4 - 3\alpha)/2}) \}, \alpha \in (0, 1],$$

$$\text{con } f(x, y) = \sqrt{8 - 6\alpha}$$

$$\text{y } \mu_R(x, y) = \alpha$$

o dicho de otra manera:

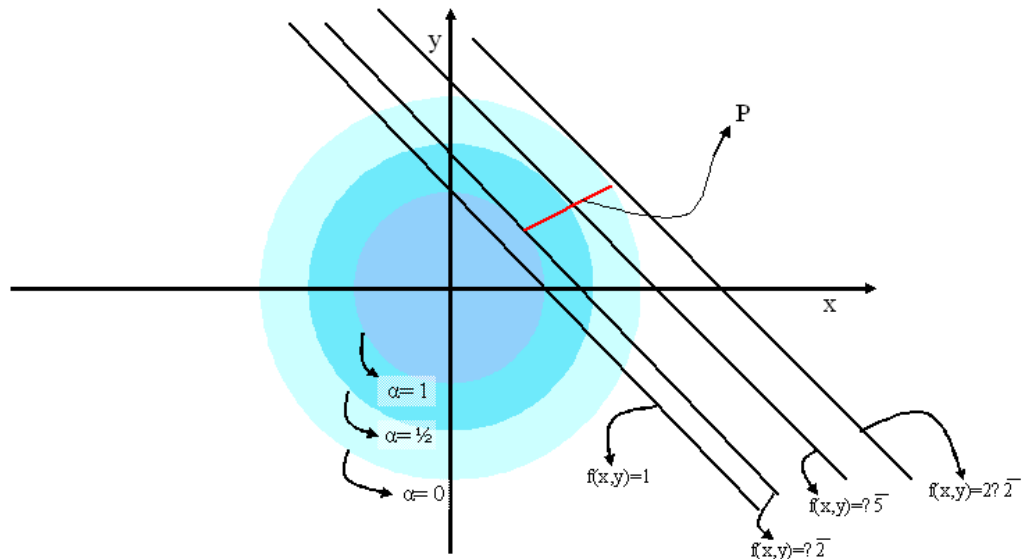
$$P[X; f, \mu_R] = \{ (x, y) \mid x = y, \sqrt{1/2} \leq x < \sqrt{2} \}$$

$$\text{con } f(x, y) = x + y = 2x$$

$$\text{y } \mu_R(x, y) = (4 - 2x^2)/3.$$

(Ver gráfica G-3)

GRAFICA G-3



Caso 2: El vector de recursos y metas \mathbf{B} , está formado por números borrosos.

Así se tiene, evaluando cada ecuación i en el punto \mathbf{x} , el resultado de esta evaluación $g_i(\mathbf{x})$, tiene un grado de pertenencia $\mu_i(g_i(\mathbf{x}))$ a \tilde{b}_i , por lo cual se puede para cada ecuación i , generar un subconjunto borroso $R_{\tilde{b}_i} = \{ \mathbf{x} | \mu_{\tilde{b}_i}(g_i(\mathbf{x})) \}$, o sea: $\mu_{R_i}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{b}_i}(g_i(\mathbf{x}))$.

Aquí se puede proceder de alguna de las dos(2) siguientes maneras:

- 1.- Hallar un Optimo Pareto con respecto a $f(\mathbf{x})$ y los $\mu_{\tilde{b}_i}(g_i(\mathbf{x}))$, $i=1, \dots, n$.
- 2.- Definir el conjunto borroso $R = \bigcap_{i=1}^n R_i$, con:

$$\mu_R(\mathbf{x}) = \min \{ \mu_{R_i}(\mathbf{x}) \},$$

y proceder como en el caso 1.

Ejemplo: Sea el problema:

maximizar $f(x, y) = x + y$

Sujeto a: $2x + y + s_1 \in \tilde{b}_1$

$x + 2y + s_2 \in \tilde{b}_2$ $x, y, s_1, s_2 \geq 0$

$$\mu_{\tilde{b}_1}(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ z - 1, & z \in [1, 2) \\ 1, & z = 2 \\ 3 - z, & z \in (2, 3] \\ 0, & z > 3 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{b}_2}(z) = \begin{cases} 0, & z < 2 \\ z - 2, & z \in [2, 3) \\ 1, & z = 3 \\ 4 - z, & z \in (3, 4] \\ 0, & z > 4 \end{cases}$$

Resolviendo de la primera manera, y observando la gráfica (**gráfica G-4**), se tiene que en los puntos óptimos $s_1 = s_2 = 0$, y

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 - \alpha_1 & x &= (2 - 2\alpha_1 + \alpha_2)/3 \\ x + 2y &= 4 - \alpha_2 & y &= (5 + \alpha_1 - 2\alpha_2)/3. \end{aligned}$$

Así que:

$$P[X; f, \mu_{\tilde{b}_1}(z), \mu_{\tilde{b}_2}(z)] = \{ ((2 - 2\alpha_1 + \alpha_2)/3, (5 + \alpha_1 - 2\alpha_2)/3) \},$$

$$\alpha_1 \in (0, 1], \alpha_2 \in (0, 1]$$

con:

$$f = (7 - \alpha_1 - \alpha_2)/3$$

$$\mu_{\tilde{b}_1} = \alpha_1$$

$$\mu_{\tilde{b}_2} = \alpha_2$$

$f, \mu_{\bar{b}_1}(z), \mu_{\bar{b}_2}(z)$ calculados en los puntos del conjunto.

o también:

$$P[X;f, \mu_{\bar{b}_1}(z), \mu_{\bar{b}_2}(z)] = \{ (x, y) \mid 2 \leq 2x + y \leq 3, 3 \leq x + 2y \leq 4 \},$$

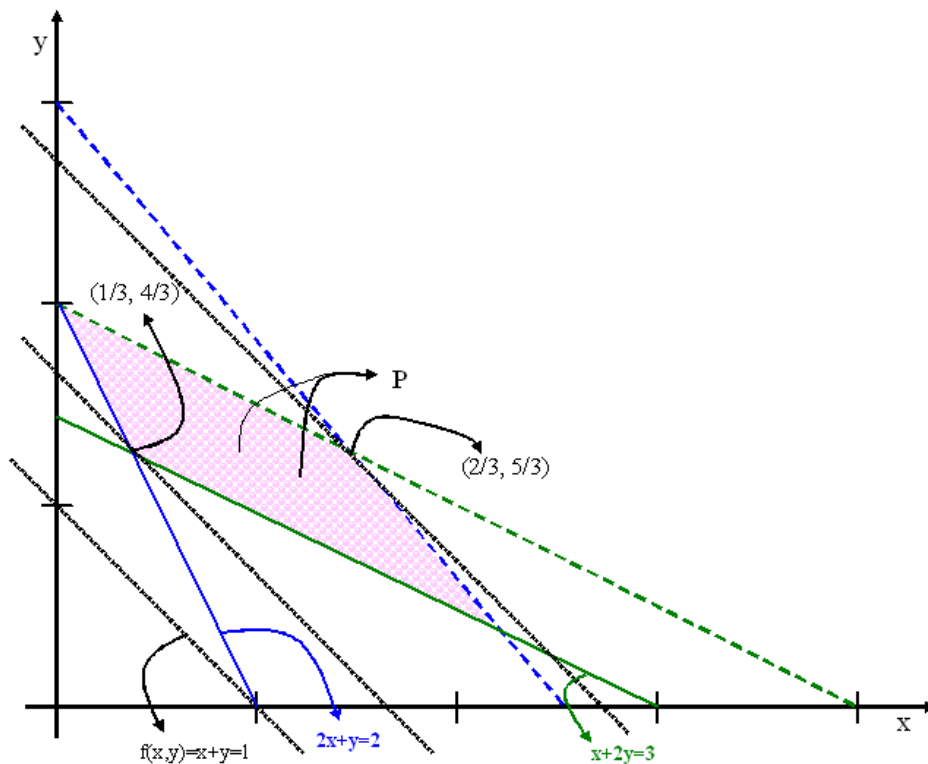
con:

$$f(x, y) = x + y$$

$$\mu_{\bar{b}_1}(x, y) = 3 - 2x - y;$$

$$\mu_{\bar{b}_2}(x, y) = 4 - x - 2y$$

GRAFICA G-4



Mientras que resolviendo el problema de la segunda manera se forma el conjunto borroso \underline{R} con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\mathbb{R}}(x, y; s_1, s_2) = \min(\mu_{\tilde{b}_1}(2x + y + s_1), \mu_{\tilde{b}_2}(x + 2y + s_2))$$

$$\implies \mu_{\mathbb{R}}(x, y) = \begin{cases} 1, & 2x + y \leq 2 \wedge x + 2y \leq 3 \\ 3 - (2x + y), & y - x \leq 1, \quad 2x + y \leq 3 \wedge x + 2y \leq 4 \\ 4 - (x + 2y), & y - x \geq 1, \quad 2x + y \leq 3 \wedge x + 2y \leq 4 \\ 0, & 2x + y \geq 3 \vee x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

Así que:

$$L_{\alpha}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1(3 - \alpha - (2x + y)) - \lambda_2(4 - \alpha - (x + 2y)).$$

Derivando el Lagrangeano e igualando a 0 se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \partial L_{\alpha} / \partial x &= 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \partial L_{\alpha} / \partial y &= 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -1/3$$

$$\left. \begin{aligned} \partial L_{\alpha} / \partial \lambda_1 &= -3 + \alpha + 2x + y = 0 \\ \partial L_{\alpha} / \partial \lambda_2 &= -4 + \alpha + x + 2y = 0 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} x = (2 - \alpha)/3 \\ y = (5 - \alpha)/3 \end{cases}$$

Así que:

$$P[X; f, \mu_{\mathbb{R}}] = \{ ((2 - \alpha)/3, (5 - \alpha)/3) \}, \alpha \in (0, 1]$$

con:

$$f(x, y) = (7 - 2\alpha)/3$$

$$\mu_{\mathbb{R}}(x, y) = \alpha$$

o también:

$$P[X; f, \mu_{\mathbb{R}}] = \{ (x, y) / y = 1 + x, 1/3 \leq x < 2/3 \},$$

con:

$$f(x, y) = x + y = 1 + 2x$$

$$\mu_{\mathbb{R}}(x, y) = 3 - (2x + y) = 4 - (x + 2y) = 2 - 3x$$

Caso 3: Las funciones f y/o g tienen coeficientes borrosos.

En este caso, los coeficientes borrosos son números borrosos, y se puede resolver el problema mediante el uso de las operaciones sobre números borrosos:

$$\mu_{\tilde{n} * \tilde{m}}(z) = \max_{z=x*y} \{ \min(\mu_{\tilde{n}}(x), \mu_{\tilde{m}}(y)) \}$$

y con estas operaciones utilizar los algoritmos de solución operando sobre los números borrosos.

En la sección 17.3.5 se muestra un PERT realizado bajo estas condiciones.

EPÍLOGO

Si bien, alguien puede pensar que las diferentes partes de este libro no están relacionadas entre sí, veamos a continuación las relaciones entre ellas:

Ante todo la lógica es el fundamento del razonamiento y entre las diversas lógicas están la lógica normativa y la lógica modal (y más concretamente la probable), además de la lógica de la causalidad, las cuales son la base de todas las acciones en la medida en que estas respondan a decisiones bien evaluadas.

Pero también son importantes las normas, no solamente deben cumplir con los principios de la lógica normativa, sino que tampoco deben entrar en conflicto con la lógica modal.

De esta manera la praxeología debe generar, líneas de acción guiadas por normas que además de útiles sean eficientes y cuyos resultados sean sustentables o sostenibles. De no resultar así, deberá analizar porque no sucedió: ¿La situación no era la adecuada? ¿Ocurrieron eventos imprevistos? Mientras que si resultaron exitosas, analizar muy bien bajo qué condiciones se pueden volver a aplicar.

BIBLIOGRAFÍA

- ABBAGNANO, NICOLA: *Diccionario de Filosofía*. Fondo de Cultura Económica. México. 1985.
- ACKOFF, RUSSELL L.: *El Arte de Resolver Problemas*. Editorial LIMUSA. México. 2001
- ACKOFF, RUSSELL L. y SASIENI, MAURISE W.: *Fundamentos de la Investigación de Operaciones*, editorial Limusa, S.A., Mexico, 1977.
- ALCHOURRÓN, CARLOS E. Y BULYGIN EUGENIO: *Introducción a la Metodología de la Ciencias Jurídicas y Sociales*. Editorial Astrea. Buenos Aires. 1987. Versión PDF bajada de es.bookzz.org.
- ALCHOURRÓN, CARLOS E. y BULYGIN EUGENIO: *Análisis Lógico y Derecho*. Centro de Estudios Constitucionales. Madrid. 1991. Versión PDF bajada de es.bookzz.org.
- ALCHOURRÓN, CARLOS E.: *Lógica de Normas y Lógica de Proposiciones Normativas*. En: Alchourrón, Carlos y Bulygin, Eugenio: *Análisis lógico y Derecho*. Centro de Estudios Constitucionales. Madrid. 1991.
- ALEXANDRE, VICTOR: *Éléments De Praxéologie. Contribution à une science des actes*. L'Harmattan, 2003. Versión digital bajada el 03-07-2016
- APEL, KARL-OTTO: *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Ediciones Paidós Ibérica. Barcelona. 1995.
- APOSTEL, LEO: *Sintaxis, Semántica y Pragmática*. En *Tratado de Lógica y Conocimiento Científico*, dirigido por Jean Piaget. Paidos. Buenos Aires. 1979. Vol. II, Págs. 153-172.
- ARGYRIS, CHRIS: www.actionscience.com
- BACON, MICHAEL: *Pragmatism. An Introduction*. Polity Press. Cambridge. 2012
- BÉDARD, RENÉE: *El Rombo Y Las Cuatro Dimensiones Filosóficas*. En AD-MINISTER, Universidad EAFIT, Medellín, Número 3, Jun-Dic 2003.
- BÉDARD, RENÉE: *La Trilogía Administrativa*. En AD-MINISTER, Universidad EAFIT, Medellín, Número 4, Ene-Dic 2004.
- BELLMAN, RICHARD: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, New Jersey. 1957, 1972.
- B.I.D.- E.I.A.P.-F.G.V.: *Proyectos de Desarrollo: planificación, Implementación y Control*, Limusa, Mexico, 1979.
- BISHIR, JOHN W. & DREWES, DONALD W.: *Mathematics in the Behavioral and Social Sciences*. Harcourt, Brace & world. 1970.
- BLACK, MAX: *Inducción y Probabilidad*. Ediciones Cátedra. Colección Teorema. Madrid. 1979.
- BOUDOT, MAURICE: *Lógica Inductiva y Probabilidad*. Paraninfo. Madrid. 1978.

- BRAVERMAN, JEROME D.: *Probabilidad, Lógica y Decisiones Gerenciales*. Trillas. 1980
- BOCHENSKI, J.M.: *Compendio de Lógica Matemática*. Paraninfo. Madrid. 1982.
- BUNGE, MARIO: *Causalidad*. EUDEBA. Buenos Aires. 1961
- BUNGE, MARIO: *La Investigación Científica*. Editorial Ariel. Barcelona. 1983.
- BUNGE, MARIO: *Epistemología*. Editorial Ariel. Barcelona. 1985.
- BUNGE, MARIO: *Racionalidad y realismo*. Alianza Editorial. Madrid. 1985
- BUNGE, MARIO: *Buscar la Filosofía en las Ciencias Sociales*. Siglo Veintiuno Editores. México. 1999
- BUNGE, MARIO: *Crisis y Reconstrucción de la Filosofía*. Editorial Gedisa. Barcelona. 2002
- BUNGE, MARIO: *Emergencia y Convergencia. Novedad cualitativa y unidad del conocimiento*. Editorial Gedisa. Barcelona. 2004.
- BUNGE, MARIO: *A la Caza de la Realidad. La controversia sobre el realismo*. Editorial Gedisa. Barcelona. 2007.
- CALVO SOLER, RAUL: *Uso de Normas Jurídicas y Toma de Decisiones*. Gedisa. Barcelona. 2003
- CARNAP, RUDOLF: *Fundamentación Lógica de la Física: Cuarta Parte, Causalidad y Determinismo*. Ediciones Orbis. Barcelona. 1985.
- CHALMERS, DAVID J.: *La Mente Consciente. En busca de una teoría fundamental*. Gedisa, Barcelona, 1999.
- CHURCHMAN, C. WEST - ACKOFF, RUSSELL L. - ARNOFF, E. LEONARD: *Introducción a la Investigación Operativa*, Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, 1973.
- COPY, IRVING: *Introducción a la Lógica*. Eudeba Manuales.
- DAVAL, ROGER: *Logique de L'action individuelle*. PUF. Paris. 1981
- DALLA CHIARA SCABIA, MARIA LUISA: *Lógica*. Editorial Labor. 1976.
- DUBOIS, DIDIER & PRADE, HENRI: *Operations on Fuzzy Numbers*. En *Int. J. Systems Sci.*, 1978. Vol 9, Nº 6, pags. 613-626.
- DUBOIS, DIDIER & PRADE, HENRI: *Fuzzy Sets and System. Theory and Applications*. Academic Press. 1980
- ELSTER, JON: *Economics. Análisis de la interacción entre racionalidad, emoción preferencias y normas sociales en la economía de la acción individual y sus desviaciones*. GEDISA. Barcelona. 1997.
- ELSTER, JON: *Lógica y Sociedad. Contradicciones y mundos posibles*. GEDISA. Barcelona. 2006.

ESPARZA, JESUS B.: *La Lógica de la Obligatoriedad Jurídica*. Universidad del Zulia. 1979.

ESPINAS, ALFRED: *Les Origines de la Technologie: Étude Sociologique*. Felix Alcan, Éditeur. Paris, 1897. Bajado de gallica.bnf.fr el 09-06-2016.

FOLKMAR, DANIEL: *L'anthropologie Philosophique Considérée Comme Base De La Morale*. Tesis Doctoral. Schleicher Frères, Éditeurs, Paris, 1899. Bajado de gallica.bnf.fr el 22-06-2016.

FOLKMAR, DANIEL: *Leçons D'anthropologie Philosophique: Ses Applications A La Morale Positive*. Schleicher Frères, Éditeurs, Paris, 1900. Bajado de gallica.bnf.fr el 28-06-2016.

FOULQUIÉ, PAUL: *Vocabulaire des Sciences Sociales*. Presses Universitaires de France. Paris. 1978.

FOXLEY R., ALEJANDRO: *Estrategia de Desarrollo y Modelos de Planificación*. CEPLAN. Fondo de Cultura Economica. México. 1975.

GARDIES, JEAN LOUIS: *Lógica de Tiempo*. Paraninfo. Madrid. 1979

GAVER, DONALD P.: *Simulation Theory*, en Handbook of Operations research, foundations and fundamentals, editado por Joseph J. Moder y Salah E. Elmaghraby, Van Nostrand Reinhold Company, 1978.

GILLET, BILLY E.: *Introduction to Operations Research. A Computer-Oriented Algorithmic Approach*. McGraw-Hill. 1976.

GUÉTMANOVA, ALEXANDRA: *Lógica*. Editorial Progreso. Moscú. 1989.

GUILLAUME, MARC: *Modèles Economiques*. P.U.F. Paris. 1971.

HAACK, SUSAN: *Lógica Divergente*. Paraninfo. Madrid. 1980.

HAACK, SUSAN: *Filosofía de las Lógicas*. Ediciones Cátedra. Madrid. 1982

HASENJAEGER, GISBERT: *Conceptos y Problemas de la Lógica Moderna*. Editorial Labor. 1968.

JAMES, MIKE: *Inteligencia Artificial en BASIC*. Librería "El Ateneo" Editorial. Buenos Aires. 1989.

JANEZ BARRIO, TARSICIO: *Lógica Jurídica. Argumentación e interpretación. 3ra. Edición*. UCAB. Caracas. 2005

JULIAO VARGAS, CARLOS GERMÁN: *Una Teoría De La Práctica*. Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO. Bogota, 2002. (Edición digital)

JULIAO VARGAS, CARLOS GERMÁN: *El Enfoque Praxeológico*. Corporación Universitaria Minuto de Dios - UNIMINUTO. Bogota, 2011. (Edición digital)

- KAUFMANN, ARNOLD: *La Ciencia y el Hombre de Acción. Introducción a la Praxeología*. Biblioteca para el hombre actual. Ediciones Guadarama, S.A., Madrid. 1967.
- KAUFMANN, ARNOLD: *Introducción à la Théorie des Sous-ensembles Flous*. Masson, 1977
- KALINOWSKI, GEORGES: *La praxéologie de T. Kotarbinski*. En: Archives de Philosophie, Tome 43, Cahier 3, 1980, Págs. 453- 463.
- KALINOWSKI, GEORGES: *Lógica del Discurso Normativo*. Tecnos. Madrid. 1975.
- KALINOWSKI, GEORGES: *Lógica de las Normas y Lógica Deóntica. Posibilidad y Relaciones*. Distribuciones Fontamara. México. 1996.
- KELSEN, HANS: *Teoría General de las Normas*. Trillas. México. 1994, 2007
- KNOTT, ADAM: *praxeology.org*.
- KUTSHERA, FRANZ VON: *Fundamentos de Ética*. Ediciones Cátedra. Madrid. 1989.
- LANGE, OSCAR: *Teoría General de la Programación*. Ediciones Ariel, Barcelona, 1971.
- LANGE, OSCAR: *Economía Política*. F.C.E., México, 1966.
- LE MOIGNE, JEAN-LOUIS: *La Theorie du Système Général. Théorie de la Modélisation*, P.U.F., 1984.
- LENK, HANS: *Filosofía Pragmática*. Editorial Alfa. Barcelona. 1982
- LIVRAGHI, GIANCARLO: *The Power of Stupidity*. Se obtiene en inglés en www.gandalf.it/stupid/book.htm.
- MARTIN MAHNER - MARIO BUNGE: *Fundamentos de Biofilosofía*. Siglo Veintiuno Editores. México. 2000
- MARTÍNEZ, SILVIO y REQUENA, ALBERTO: *Simulación Dinámica por ordenador*. Alianza Editorial. Madrid. 1988.
- MISER, HUGH J.: *The History, Nature, and use of Operations Research*. En Handbook of Operations research, foundations and fundamentals, editado por Joseph J. Moder y Salah E. Elmaghraby, Van Nostrand Reinhold Company, 1978.
- MORFAUX, LOUIS-MARIE: *Diccionario de Ciencias Humanas*. Ediciones Grijalbo, S.A.. Barcelona. 1985.
- MOSTERIN, JESÚS: *Ciencia, Filosofía y Racionalidad*. Gedisa, Barcelona. 2013.
- MOULIN, H & F. FOGELMAN-SOULIÉ: *La Convéxité dans les Mathématiques de la Décision*. Hermann, Colection Méthodes. 1979.
- NEGOITA, C.V. & RALESCU, D.A.: *On Fuzzy Optimization*. En Kybernetes, 1977, Vol. 6, pp. 193-195.

- NOWAKOWSKA, MARIA: *A Formal Theory Of Actions: Syntax And Semantics Of Behaviour*. En PRAXIOLOGICAL STUDIES: Polish Contributions to the Science of Efficient Action.
- ORLOVSKY, S.A.: *On Programming with Fuzzy Constraint Sets*. En *Kybernetes*, 1977, Vol. 6, pp. 197-201.
- PALAU, GLADYS: *Introducción Filosófica a las Lógicas No Clásicas*. Editorial Gedisa, 2002,
- PARSONS, TALCOTT: *The Structure of Social Action*. Second Edition. The Free Press, New York. 1937, 1949.
- PARSONS, TALCOTT: *The Social System*. The Free Press of Glencoe, New York. 1951, 1954. Se consigue también en Español: *El Sistema Social*. Revista de Occidente. Madrid. 1966, 1976
- PARSONS, TALCOTT – SHILS, EDWARD A.: *Toward A General Theory of Action*. Harvard University Press, Cambridge, 1962. Se consigue también en Español: *Hacia Una Teoría General de la Acción*. S/E
- PARSONS, TALCOTT – BALES, ROBERT F. - SHILS, EDWARD A.: *Working Papers in the Theory of Action*. The Free Press, New York. 1953. Se consigue también en Español: *Apuntes sobre la Teoría de la Acción*. Amorrortu Editores. Buenos Aires. 1970.
- PÉKELIS V.: *Pequeña Enciclopedia de la Gran Cibernética*, Editorial MIR, Moscú, 1977.
- PERDOMO MÁRQUEZ, RÓMULO: *Introducción a la Lógica Jurídica*. Universidad de Los Andes. Mérida. 1986.
- PETER, LAURENCE J.: *Por que las Cosas Salen Mal. O Retorno al Principio de Peter*. Plaza & Janes Editores, S.A. Barcelona. 1985.
- POPPER, KARL R.: *Los dos problemas fundamentales de la Epistemología*. Pág. 161. Editorial Tecnos. Madrid. 1998
- PÖRN, INGMAR: *Action Theory and Social Science. Some formal models*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1977
- POZO NAVARRO, F.: *La Dirección por sistemas*, Limusa, México, 1976.
- PRADE, H.M.: *Operations Research with Fuzzy Data*. En *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy*
- PUTMAN, HILARY: *El Pragmatismo. Un debate abierto*. Editorial Gedisa. 1999, 2006.
- RHEAULT, JEAN PAUL: *Introducción a la Teoría de las Decisiones*, editorial Limusa, Mexico, 1975.

ROMBACH, HEINRICH: *Decisión*. En Conceptos Fundamentales de Filosofía. Colectivo. Editorial Herder. Barcelona. 1978. Tomo I. Págs. 476-490.

RUSSELL, BERTRAND: *Los Problemas de la filosofía*. Editorial Labor. Barcelona. 1975

SAATY, THOMAS L.: *Mathematical Methods of Operations Research*. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1959.

SCHREIDER, JULIUS A.: *Equality, Resemblance and Order*. Ed.MIR. Moscú. 1.975.

SHANNON, ROBERT E.: *Simulación de Sistemas*. Diseño, desarrollo e implantación. Trillas. 1988.

SPRINGER, CLIFFORD H. - HERLIHY, ROBERT E. - BEGGS, ROBERT I.: *Métodos Avanzados y Modelos*, Serie de Matemáticas para la Dirección de Negocios. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. 1972.

SUPPES, PATRICK: *Introducción a la Lógica Simbólica*. CECSA. México. 1975

SUPPES, PATRICK: *Estudios de filosofía y metodología de la ciencia*. Capítulo13, Problemas del análisis causal en las ciencias sociales. Editorial Alianza. Madrid. 1988.

TABORI, PAUL: *Historia de la Estupidez Humana*. Ediciones elaleph.com. 1999.

THONON, HENRI: *Función de Producción de Cobb-Douglas; Sus Generalizaciones y sus Usos en la Programación Económica*. En Investigación y Gerencia, Vol II - N° 4, Octubre-Diciembre 1985.

TINBERGEN, JAN: *La Distribución del Ingreso*. Editorial El Manual Moderno, S.A. México, 1979

TOWNSEND, ROBERT: *Más Arriba en la Organización*. Ediciones Orbis, Barcelona, 1985.

TUOMELA, RAIMO: *Human Action And Its Explanation*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1977.

TUOMELA, RAIMO: *A Theory of Social Action*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1984.

TUOMELA, RAIMO: *Science, Action, and Reality*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht, Holland. 1985.

VAN GIGCH, JOHN P.: *Teoría General de Sistemas*. 2a. Edición. Trillas. México. 1987.

VANBERG, VIKTOR: *Racionalidad y Reglas. Ensayos sobre teoría económica de la Constitución*. Gedisa. Barcelona. 1999

VON WRIGHT, HENRIK: *Norma y Acción. Una investigación lógica*. Editorial Tecnos. Madrid. 1979.

WHITE, D.J.: *Teoría de la Decisión*, AU #16, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1972.

Diccionario de la Real Academia Española.

Diccionario de Filosofía. Editorial Progreso. Moscú. 1984.

Informe de la Comisión Mundial sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo, 1987

Handbook of Operations research, foundations and fundamentals, editado por Joseph J. Moder y Salah E. Elmaghraby, Van Nostrand Reinhold Company, 1978.