



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Equivalencia unitaria de operadores en espacios de Hilbert

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Ricardo Jose De Gouveia Vieira** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: MSc. Alejandra Aguilera.

Caracas, Venezuela

Agosto 2019

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "Equivalencia unitaria de operadores en espacios de Hilbert", presentado por el Br. Ricardo Jose De Gouveia Vieira, titular de la Cédula de Identidad 21.411.873, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.



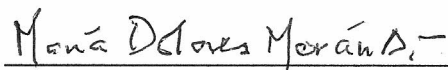
Alejandra Aguilera

Tutor



Mairene Colina

Co-Tutor



Maria Dolores Moran

Jurado



Angel Padilla

Jurado

... Porque siento que la vida se mide en logros y no solo en años. Es justamente la posibilidad de realizar un sueño lo que hace la vida más interesante.

- Ricardo De Gouveia

AGRADECIMIENTOS

Creo que poder compactar a todas las personas que formaron parte de mi gran carrera universitaria daría más páginas que el trabajo a continuación. Pero estoy seguro que todos los que aquí no menciono, saben y espero estén seguros que los llevo presente.

Primero que nada a mi familia, gracias por darme ánimos, fuerza y sin duda alguna la posibilidad de perseguir un sueño. De darme el poder de tomar mis propias decisiones en la vida y convertirme en el hombre que soy hoy en día. Su apoyo ha sido y siempre será incondicional y solo espero (aún sin ser un requisito para ustedes) que puedan sentirse tan orgullosos de mi como el universo y el amor se los pueda permitir. Papá, gracias por nunca rendirte, por enseñarme que si es posible y que aunque la vida algunas veces no es justa con nuestros sueños, tú lograste salir adelante construyendo la felicidad a tú manera. Eres y siempre serás mi ejemplo de superación. Mamá, gracias por enseñarme que solo la constancia y el trabajo duro me llevaran tan alto como me lo proponga, gracias por todos los empujones de aliento, de ánimo, solo alguien que no los tuvo sabe exactamente como impulsarte hacia adelante y gracias a ti y solo a ti comprendí que si me pidieran resumir en dos palabras lo que la vida es, diría sin duda, sigue adelante. Ale, hay amigos que no se escogen, y en esa categoría entran los hermanos. Pero un hermano mayor siempre se ve como un superhéroe que siempre está bien y siempre es el más fuerte pero me enseñaste que a veces el más fuerte es el que más ayuda necesita, gracias por todas las veces que me defendiste cuando me sentía indefenso. La hermandad tiene muchas cosas que no tienen explicación, por eso amor de hermano es amor de hermano. Janeth, mi morocha gracias por mostrarme que no debo dejar de aprender y que debo aprovechar el tiempo al máximo uno siempre ve a las personas mayores que uno grandes pero solo nos damos cuenta de cuánto tiempo ha pasado en realidad cuando vemos a los que son menores que uno. Gracias por las nuevas perspectivas. Los amo a todos.

Amigos, un viejo proverbio italiano dice: "Quién encuentra a un amigo, encuentra un tesoro". Fernando, Ignacio, Rosanna, Boris, Roger, Maria Jose, Jesus, Francisco, Gabriel, Yoselyn, Juan, Jose, Alfredo, Miguel, Israel, ... En serio los nombres son infinitos pero los recuerdos que tengo con cada uno de ustedes son para siempre. No tengo y sé que las palabras no me bastarán para agradecerle al universo el que ustedes hayan llegado a mi vida. Desde el primer momento en que nos estrechamos la mano hasta la última sonrisa para vernos al día siguiente en clases. Gracias por todo lo que aprendí de ustedes lo que fue la política universitaria y el poder crecer en la carrera desde cero y vernos surgir a todos como profesionales. Todo el tiempo que compartimos fue de las mejores cosas que me sucedió en la carrera y así como estoy seguro de que nunca los olvidaré. Ustedes, siempre tendrán un amigo en mí.

Profesores, gracias. Espero puedan entender el nivel de gratitud que siento con cada uno de ustedes por todas sus enseñanzas, por todo su tiempo, por cada pequeño pensamiento que me compartieron dentro o fuera del aula. Este trabajo no es más que el resumen de lo que ustedes pueden llegar a enseñarle a sus estudiantes. Tomas, Jonathan, Daniela, Edwin, Maia, Mairene, Cristina, Carmen, Hugo, Kenyer, Angel, Angie, Elvia, Maira, Mariela. Gracias por todos los distintos tipos de vista.

Profesora Alejandra Aguilera, Tutora, Amiga y desde cualquier perspectiva, increíble persona. Gracias por confiar en mi no solo como estudiante sino como tesista desde el momento en que me diste la primera clase en la universidad estaba seguro de que me enseñarías muchísimo pero no sabía que el conocimiento era infinito hasta que te conocí. Enseñar es un arte perdido en el tiempo y tu tienes la habilidad de conectar con aquellos que te escuchan y poder hacer que algo tan complejo se vuelva sencillo ante su mente, ahí es donde vive el verdadero arte de la enseñanza. Gracias a ti se hacer matemática y no me bastarán las palabras para decirte lo mucho que eso significa para mi. Gracias por darme la oportunidad de ser tu tesista y demostrarte de cuán capaces son los estudiantes en los que dejas tu huella. No solo hiciste que me enamorará más de la matemática sino que me mostraste como crecer en ella. La dedicación que le das a aquellos que te inspiran a enseñar es una de las mejores lecciones que me has podido dar. Fueron dos largos años y aprendí, me divertí, lloré y lo más importante crecí como matemático, valió la pena todo el conocimiento que me dio este largo viaje. Quiero que sepas que estoy y siempre voy a estar eternamente agradecido contigo. Gracias por enseñarme a ser un matemático.

Abuelo, que difícil es escribirte cuando ya no estás, pero sé que nunca me has abandonado. Te juro que me hubiera encantado contarte todo lo que me divertí en la universidad y estoy seguro que solo me habrías alentado más, a eso, divertirme. Porque tu me enseñaste que un día que no sonría será un día totalmente perdido, que haré sentir triste a quiénes en realidad me aman. Siempre me dijiste que debía decir lo que sentía, gracias por eso, siento que tus enseñanzas llegaron a la universidad central de Venezuela y creo que pude compartir tanta alegría como tu al mundo, espero seguir haciéndolo. De alguna u otra forma me sigues enseñando desde el momento que me dijiste que hay que saber de donde venimos para saber a donde nos dirigimos y estés donde estes puedas celebrar en lo que se convirtió tu nieto porque este trabajo es...

En memoria a tí, abuelo.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
Capítulo 1. Preliminares	4
1. Teoría de la medida	4
2. Análisis Funcional	10
Capítulo 2. Teoría espectral para operadores en espacios de Hilbert	19
1. Espectro de un operador	20
2. Álgebras de Banach	24
3. El Teorema Espectral	31
Capítulo 3. Equivalencia unitaria de operadores normales	42
1. Equivalencia unitaria de operadores de multiplicación	42
2. Teoría de multiplicidad para operadores normales	58
Bibliografía	75

Resumen

El principal objetivo de este Trabajo especial de Grado es dar todas las herramientas necesarias para lograr una descomposición de operadores normales definidos en espacios de Hilbert en la suma directa de operadores normales definidos de cierta manera en términos de la equivalencia unitaria. Para responder ¿Qué es la equivalencia unitaria? Solo debemos pensar en cuando dos matrices son semejantes, o al menos conseguir las condiciones para las cuales ellas sean semejantes, pero la dificultad de esta idea se presenta cuando nos enfrentamos a espacios de dimensión infinita.

En este trabajo utilizamos herramientas de alta densidad matemática como lo es la teoría de la medida, el análisis funcional y la teoría espectral; para poder lograr nuestro objetivo.

Palabras Claves: Espacio de Hilbert, Equivalencia unitaria, Operador normal, Unitariamente equivalente, suma directa de operadores, Espectro.

Introducción

La teoría espectral es un término que se utiliza para extender en cierto sentido la teoría de autovalores, autovectores y diagonalización de una matriz cuadrada asociada a una transformación lineal, definida en un espacio vectorial de dimensión finita a contextos más generales de operadores definidos en espacios de dimensión infinita. Esta observación previa se hace a modo de introducción, ya que ir de un espacio de dimensión finita a uno de dimensión infinita requiere de cierta rigurosidad en la extensión de estos resultados.

En dimensión finita tenemos resultados acerca de cuándo una matriz es semejante a otra, por lo que en dimensión infinita surge la idea denominada “El problema de la equivalencia unitaria”. Dos operadores T y S son unitariamente equivalentes si existe un isomorfismo U tal que $UTU^{-1} = S$. El problema de la equivalencia unitaria consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes en T y S para la existencia de dicho U . Dado que los operadores equivalentes son geoméricamente indistinguibles, cualquier “descripción” de un operador T será al mismo tiempo una descripción de todos los operadores que pertenecen a la misma clase de equivalencia que T . En otras palabras: dado que, geoméricamente hablando, T solo se determina dentro de la equivalencia unitaria, no debería existir ni existe una descripción más desarrollada de T . Si T es un operador normal con resolución de la identidad E , el problema de encontrar todos los operadores equivalentes a T se resuelve, en cierto “sentido”, mediante la ecuación $UTU^{-1} = \int_{\Delta} \lambda d(UE(\lambda)U^{-1})$ (el símbolo U en esta ecuación denota, por supuesto, un isomorfismo; la interpretación y la prueba de la ecuación se logran mediante la formación de los productos internos habituales y deben ser notorios para quién ha seguido la teoría espectral hasta ahora). Si, en otras palabras, decimos que dos resoluciones de la identidad E y F , con el mismo dominio, son equivalentes siempre que exista un isomorfismo U tal que $UE(\Delta)U^{-1} = F(\Delta)$ para todos los Δ donde E y F son resoluciones de la identidad equivalentes, entonces una condición necesaria y suficiente para la equivalencia de dos operadores normales es la equivalencia de sus respectivas resoluciones de la identidad. La razón principal para sentirse insatisfecho con la respuesta anterior al problema de equivalencia es

que deja las cosas más o menos donde estábamos. Lo que realmente se quiere es encontrar un conjunto completo de invariantes para la equivalencia unitaria de operadores normales.

En términos cualitativos, esto significa que deseamos asociar a cada operador normal T un cierto “objeto” m_T para que se cumplan las siguientes condiciones. Si T y S son operadores normales unitariamente equivalentes, entonces $m_T = m_S$. (ii) Si T y S son operadores normales tales que de algún modo $m_T = m_S$, entonces T y S son unitariamente equivalentes. (iii) A cada objeto m le corresponde al menos un operador normal T tal que $m_T = m$. (iv) Los objetos m son conceptos matemáticos manejables, que pueden describirse en términos simples y, en la medida de lo posible, constructivos, y cuya definición es independiente de la teoría de operadores (dichas m las conoceremos como funciones de multiplicidad asociadas a cada operador).

Vale la pena señalar que el espectro $\sigma(T)$ de un operador T (no necesariamente normal) satisface las condiciones (i), (iii) y (iv). Por lo tanto, podemos decir que los puntos de $\sigma(T)$ constituyen un conjunto de invariantes unitarios de T , pero no un conjunto completo de tales invariantes. Las primeras tres de las condiciones anteriores describen nada más que un mapeo uno a uno del conjunto de todas las clases de equivalencia de operadores normales en el conjunto de todos los objetos. Se busca con este trabajo darle al lector, al final, las condiciones de juzgar si los objetos m (funciones de multiplicidad) satisfacen o no la última condición. Para motivar tanto el resultado que obtendremos como el método que usaremos para obtenerlo, comenzamos el primer capítulo, recordando la teoría necesaria y suficiente de análisis real y análisis funcional. Posteriormente en el segundo capítulo hablaremos en detalle sobre la teoría espectral y finalmente en último capítulo desarrollaremos la teoría sobre de equivalencia unitaria de operadores en espacios de Hilbert.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es presentar algunas definiciones y resultados concernientes a la teoría de la medida y al análisis funcional necesarios para abordar los capítulos siguientes. La primera sección estará dedicada a recordar las definiciones de σ -álgebra de subconjuntos, espacio de medida, medidas reales positivas y medidas complejas, además de las nociones de continuidad absoluta, singularidad de medidas y el Teorema de Radon-Nikodym.

En la sección 2, recordaremos la teoría general de operadores lineales y acotados en espacios de Hilbert, haciendo especial énfasis en la estructura algebraica y topológica del conjunto $B(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : T \text{ es lineal y acotado}\}$, que además de ser un espacio de Banach con respecto a la norma de operadores tiene una estructura más rica y es la de ser una C^* -álgebra.

1. Teoría de la medida

Comenzamos esta sección recordando la definición de espacio medible, para ello es necesario primero dar la definición de σ -álgebra de subconjuntos.

DEFINICIÓN 1.1. Dado un conjunto X , una clase de conjuntos $\Omega \subseteq \wp(X)$ se llama σ -álgebra si y solo si

- a) $X \in \Omega$.
- b) $\Delta \in \Omega \Leftrightarrow \Delta^c \in \Omega$.
- c) $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty \in \Omega \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n \in \Omega$.

Al par (X, Ω) se le llama *espacio medible*, y a los elementos de Ω *conjuntos medibles*.

DEFINICIÓN 1.2. Una *medida positiva* μ sobre un espacio medible (X, Ω) es una función de conjuntos $\mu : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, tal que:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) μ es σ -aditiva, es decir, si $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta_n).$$

En este caso, decimos que (X, Ω, μ) es un *espacio de medida* y μ una medida en X .

El concepto de medibilidad se extiende a funciones entre espacios medibles.

DEFINICIÓN 1.3. Sean (X, Ω_1) y (Y, Ω_2) dos espacios medibles. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *medible* si y solo si $f^{-1}(\Delta) \in \Omega_1$ para todo $\Delta \in \Omega_2$.

Si μ es una medida en (X, Ω) , $\Delta \in \Omega$ y $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ es una función medible, se define la *integral de Lebesgue* de f sobre Δ con respecto a μ por

$$\int_{\Delta} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\Delta} s d\mu, 0 \leq s \leq f, f \text{ es simple} \right\}.$$

En general, si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, $f = u + iv$, entonces

$$\int_{\Delta} f d\mu = \int_{\Delta} u d\mu + i \int_{\Delta} v d\mu.$$

Ver ([5], remark 2.6.5, p 127).

La definición anterior nos permite introducir el siguiente espacio de funciones:

Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\mathcal{L}^p(X, \Omega, \mu)$, y en algunos casos simplemente por $\mathcal{L}^p(\mu)$, al conjunto

$$\mathcal{L}^p(X, \Omega, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Consideramos la siguiente relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(X, \Omega, \mu)$: $f \sim g$ si y solo si $f = g$ casi siempre. Recordemos que la expresión “casi siempre” se refiere a que la medida del conjunto de puntos donde no se cumple la propiedad mencionada es cero.

Se define el espacio $L^p(X, \Omega, \mu) = L^p(\mu)$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia inducidas por la relación \sim en el conjunto $\mathcal{L}^p(\mu)$, esto es: $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$. Para $f \in L^p(\mu)$ tenemos la norma definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio completo con respecto a esa norma. En el caso $p = 2$, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x),$$

para $f, g \in L^2(\mu)$ y vale que $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle_2$ para toda $f \in L^2(\mu)$.

Si $p = \infty$, se define $L^\infty(X, \Omega, \mu) = L^\infty(\mu)$ como el conjunto de las clases de equivalencia de las funciones esencialmente acotadas y $\|f\|_\infty = \inf \{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$ define una norma en este espacio.

Para estudiar los problemas concernientes a este trabajo necesitamos dar la noción de medida de Borel regular.

En las siguientes definiciones se asume que X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. En este caso, una σ -álgebra de subconjuntos de X en la que tendremos especial interés es la generada por los subconjuntos abiertos de X .

DEFINICIÓN 1.4. Sea X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. La σ -álgebra de Borel \mathcal{B} de X es la σ -álgebra más pequeña que contiene a los subconjuntos abiertos de X . A una medida definida en (X, \mathcal{B}) se le llama *medida de Borel*.

DEFINICIÓN 1.5. Una medida μ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es llamada *medida de Lebesgue* si para todo intervalo (a, b) con a y b finitos se tiene que

$$\mu((a, b)) = b - a.$$

EJEMPLO 1.6. Sea μ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y sea μ_n la medida de Lebesgue en $[1/(n+1), 1/n]$ para $n \geq 1$. Entonces $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ define una medida en $[0, 1]$ y $\mu = \nu$. En efecto:

- $\nu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$, ya que $\mu_n(\emptyset) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Para ver la σ -aditividad de ν sabemos que: $\mu([0, 1]) = 1$ y $\mu([\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Si } S_n = \sum_{k=1}^n \mu \left(\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$, por lo tanto la serie converge.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\right) \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\Delta_i \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\Delta_i \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(\Delta_i)
\end{aligned}$$

Así, ν es una medida. Más aún, $\mu(\Delta) = \nu(\Delta)$ para todo subconjunto de Borel Δ del $[0, 1]$, ya que:

$$\begin{aligned}
\nu(\Delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\Delta \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \mu\left(\Delta \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right)\right) \\
&= \mu(\Delta \cap [0, 1]) \\
&= \mu(\Delta)
\end{aligned}$$

Finalmente, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

DEFINICIÓN 1.7. Una medida positiva μ en (X, \mathcal{B}) es una medida de Borel *regular* si:

- $\mu(K) < \infty$ para todo subconjunto compacto K de X .
- $\mu(\Delta) = \sup\{\mu(K) : K \text{ es compacto y } K \subseteq \Delta\}$ para todo $\Delta \in \Omega$.
- $\mu(\Delta) = \inf\{\mu(U) : U \text{ es abierto y } \Delta \subseteq U\}$ para todo $\Delta \in \Omega$.

Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ al conjunto de todas las medidas de Borel regulares en X .

Otro concepto que aparecerá frecuentemente a lo largo de este trabajo es el de soporte de una medida de Borel regular.

DEFINICIÓN 1.8. Sea μ una medida de Borel regular en un espacio topológico Hausdorff localmente compacto X . El *soporte* de μ se define como el siguiente conjunto

$$\text{supp } \mu := X \setminus \bigcup \{V : V \text{ es abierto y } \mu(V) = 0\}.$$

En este caso, $\mu(X \setminus \text{supp } \mu) = 0$. Para mayores detalles referentes a esta definición remitimos al lector a [9].

Recordamos ahora los conceptos de continuidad absoluta y singularidad de medidas.

DEFINICIÓN 1.9. Si μ es una medida en un espacio medible (X, Ω) y ν es una medida positiva en (X, Ω) , decimos que μ es *absolutamente continua* con respecto a ν , y escribimos $\mu \ll \nu$, si $\mu(\Delta) = 0$ cuando $\nu(\Delta) = 0$.

Diremos que μ y ν son *equivalentes* si tienen los mismos conjuntos de medida cero, esto es, $\mu(\Delta) = 0$ si y solo si $\nu(\Delta) = 0$. Denotaremos esto como $[\mu] = [\nu]$.

DEFINICIÓN 1.10. Sean $\mu \in \mathcal{M}(X)$ y $A \in \Omega$. Se dice que μ *está concentrada en* A si $\mu(\Delta) = \mu(\Delta \cap A)$ para todo $\Delta \in \Omega$.

Dos medidas $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$ son *mutuamente singulares* cuando están concentradas en conjuntos disjuntos, esto es, existen $A, B \in \Omega$ tales que $A \cap B = \emptyset$ con μ_1 concentrada en A y μ_2 concentrada en B .

En seguida, enunciamos el teorema más importante concerniente a la continuidad absoluta de medidas.

TEOREMA 1.11 (**Radon-Nikodym**). *Si (X, Ω, ν) es un espacio de medida σ -finito y μ es otra medida σ -finita en (X, Ω) tal que $\mu \ll \nu$, entonces existe una única función no negativa $f \in L^1(X, \Omega, \nu)$ tal que $\mu(\Delta) = \int_{\Delta} f d\nu$ para todo Δ en Ω . A la función f se le llama la *derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto a ν* , usualmente se denota a f como $d\mu/d\nu$.*

Para la demostración del teorema anterior ver [8], Theorem. 6.9, p. 122.

La siguiente proposición es consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym y muestra que si una medida es absolutamente continua con respecto a otra, es posible encontrar un conjunto de Borel tal que al concentrar una de la dos a dicho conjunto, ambas medidas sean equivalentes.

PROPOSICIÓN 1.12. Si μ y η son medidas en (X, Ω) y $\eta \ll \mu$, entonces existe un conjunto de Borel Δ_0 tal que $[\eta] = [\mu|_{\Delta_0}]$, donde $\mu|_{\Delta_0}(\Delta) := \mu(\Delta \cap \Delta_0)$ para todo $\Delta \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\eta \ll \mu$, entonces por el Teorema de Radon-Nikodym existe una función no negativa f en $L^1(X, \Omega, \mu)$ tal que

$$\eta(\Delta) = \int_{\Delta} f d\mu, \quad \forall \Delta \in \Omega.$$

Consideremos el conjunto $\Delta_0 = \{x \in X : f(x) > 0\}$ y veamos que Δ_0 es el conjunto buscado.

Primero observamos que

$$\eta(\Delta) = \int_{\Delta} f d\mu = \int_{\Delta \cap \Delta_0} f d\mu + \int_{\Delta \cap \Delta_0^c} f d\mu = \int_{\Delta \cap \Delta_0} f d\mu \quad (1.1)$$

pues $f \equiv 0$ en Δ_0^c .

Supongamos que $\eta(\Delta) = 0$ para $\Delta \in \Omega$. Por la igualdad anterior

$$\int_{\Delta \cap \Delta_0} f d\mu = 0$$

y como f es estrictamente positiva en Δ_0 , debe ocurrir que $\mu(\Delta \cap \Delta_0) = 0$, es decir, $\mu|_{\Delta_0}(\Delta) = 0$. Esto muestra que $\mu|_{\Delta_0} \ll \eta$.

Recíprocamente, supongamos que $\mu|_{\Delta_0}(\Delta) = \mu(\Delta \cap \Delta_0) = 0$. Como η es absolutamente continua respecto a μ , por hipótesis, se tiene que $\eta(\Delta \cap \Delta_0) = 0$. La ecuación (1.1) implica que $\eta(\Delta) = \eta(\Delta \cap \Delta_0) = 0$. Por lo tanto, $\eta \ll \mu|_{\Delta_0}$. Así, hemos probado $[\eta] = [\mu|_{\Delta_0}]$. ■

Hasta el momento nos dedicamos a estudiar las propiedades de las medidas positivas. Ahora, conviene introducir la definición y discutir algunas propiedades de las medidas complejas. Estas nociones serán necesarias para abordar la sección que dedicaremos al Teorema espectral para operadores normales en espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.13. Una *medida compleja* μ sobre un espacio medible (X, Ω) es una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- b) μ es σ -aditiva, es decir, si $\{\Delta_n\} \subset \Omega$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta_n).$$

DEFINICIÓN 1.14. Si μ es una medida compleja en (X, Ω) y $\Delta \in \Omega$, se define la *variación total* de μ , como:

$$|\mu|(\Delta) = \left\{ \sum_{j=1}^k |\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^k \text{ es una partición medible de } \Delta \right\}.$$

OBSERVACIÓN 1.15. $|\mu|$ es una medida real en (X, Ω) .

Ahora bien, si μ es una medida de Borel compleja, entonces existe una función de borel compleja h con $|h| = 1$ tal que $d\mu = h d|\mu|$ (ver [8], Theorem. 6.12, p. 126). Es por esto que es razonable definir *la integral con respecto a una medida compleja* μ por

$$\int f d\mu = \int fh d|\mu|.$$

2. Análisis Funcional

Los operadores que consideramos en el presente trabajo estarán definidos en espacios de Hilbert. Por esta razón dedicaremos esta sección a repasar aspectos generales de la teoría de espacios de Hilbert y operadores lineales y acotados.

Sea \mathcal{H} un espacio vectorial complejo. Un producto interno en \mathcal{H} es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple:

- a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- d) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- e) $\langle x, x \rangle = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

El par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denomina *espacio con producto interno*.

Todo espacio con producto interno puede ser normado definiendo $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Para $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. La desigualdad anterior se conoce como la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

Un *espacio de Hilbert* \mathcal{H} es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma asociada al producto interno.

En un espacio con producto interno \mathcal{H} tenemos la noción de ortogonalidad: si $x, y \in \mathcal{H}$ son tales que $\langle x, y \rangle = 0$ decimos que x e y son *ortogonales*.

Si \mathcal{M} es un subespacio de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El *complemento ortogonal* de \mathcal{M} es el conjunto:

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{M}\}.$$

TEOREMA 1.16. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y \mathcal{M} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces*

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp.$$

COROLARIO 1.17. *Si \mathcal{M} es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , entonces $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$.*

DEFINICIÓN 1.18. Un subconjunto \mathcal{E} de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una *base ortonormal* de \mathcal{H} si cumple que

- a) Para todo $e \in \mathcal{E}$, $\|e\| = 1$;
- b) Si $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ y $e_1 \neq e_2$ entonces $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$;
- c) \mathcal{E} es maximal.

El siguiente teorema es una aplicación del Lema de Zorn:

TEOREMA 1.19. *Todo espacio de Hilbert \mathcal{H} no trivial tiene una base ortonormal. En particular, si \mathcal{H} es separable, tiene una base ortonormal numerable.*

EJEMPLO 1.20. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$. El conjunto $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2[0, 1]$.

Ahora procederemos a definir un funcional lineal y acotado $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, ya que es necesario para enunciar el Teorema de representación de Riesz.

DEFINICIÓN 1.21. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Un funcional $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es *lineal* si satisface que

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si además, existe una constante $c > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces f es un funcional *acotado*.

TEOREMA 1.22 (Teorema de representación de Riesz). Si $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y acotado, entonces existe un único vector $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Más aún, $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|x_0\|$.

Para la demostración del teorema anterior ver [3], Theorem. 3.4, p. 13.

La siguiente definición establece un criterio para decidir si un par de espacios de Hilbert pertenecen a la misma clase.

DEFINICIÓN 1.23. Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} dos espacios de Hilbert. Diremos que un operador lineal $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ es un *isomorfismo isométrico*, o simplemente, un *isomorfismo* entre \mathcal{H} y \mathcal{K} , si es biyectivo y preserva los productos internos, es decir,

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. En particular, U es una isometría pues $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

En estas condiciones decimos que \mathcal{H} y \mathcal{K} son (isométricamente) isomorfos.

Se puede verificar fácilmente que este concepto de isomorfismo define una relación de equivalencia entre espacios de Hilbert. Es importante notar que estos isomorfismos preservan las características esenciales de los espacios considerados, como lo son, el producto interno y la completitud.

EJEMPLO 1.24. La transformada de Fourier de $L^2[0, 1]$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Sea $e_n(t) = e^{2\pi int}$, entonces $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una base para $L^2[0, 1]$ y sea $U : L^2[0, 1] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ la Transformada de Fourier, definida por $Uf = \widehat{f}$, donde $\widehat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función dada por $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt$, el cual es el n -ésimo ($n \in \mathbb{Z}$) coeficiente de Fourier de $f \in L^2[0, 1]$ y como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base para $L^2[0, 1]$ podemos escribir a f como

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e_n \tag{1.2}$$

donde la convergencia de la serie es con respecto a la norma del espacio $L^2[0, 1]$.

Además, U satisface que $\|Uf\| = \|f\|$ por la identidad de Parseval (Ver [3], Theorem 5.4, p. 20). U es lineal ya que para $f, g \in L^2[0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned} (\widehat{\lambda f + g})(n) &= \int_0^1 (\lambda f + g)(t)e^{-2\pi int} dt = \int_0^1 \lambda f(t)e^{-2\pi int} dt + \int_0^1 g(t)e^{-2\pi int} dt \\ &= \lambda \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt + \int_0^1 g(t)e^{-2\pi int} dt \\ &= \lambda \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n) \\ &= (\lambda \widehat{f} + \widehat{g})(n) \end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos que $U(\lambda f + g) = \lambda Uf + Ug$.

Ahora bien, si $\{\alpha_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ excepto una cantidad finita, entonces $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n \in L^2[0, 1]$ y por (1.2) tenemos que $\widehat{f}(n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $Uf = \{\alpha_n\}$, esto significa que el $\text{Ran}(U)$ es denso en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Pero U es una isometría ($\|Uf\| = \|f\|$) por lo tanto $\text{Ran}(U)$ es cerrado, lo que implica que U es sobreyectivo.

Ahora, dada una familia numerable de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ queremos definir su suma directa de forma tal que el espacio obtenido sea también un espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.25. Sean $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios de Hilbert. La *suma directa* de $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se define por

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i := \left\{ \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \mid h_i \in \mathcal{H}_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|^2 < \infty \right\}.$$

PROPOSICIÓN 1.26. Si \mathcal{H} es la suma directa de una sucesión de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, entonces la fórmula

$$\langle h, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i, g_i \rangle$$

para $h = \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ y $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$, define un producto interno en \mathcal{H} . Más aún, \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con respecto a este producto.

OBSERVACIÓN 1.27. Si $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$, cada espacio de Hilbert \mathcal{H}_i puede ser visto como un subespacio de \mathcal{H} si identificamos los elementos de \mathcal{H}_i con sucesiones que tienen ceros en todas las posiciones salvo en el lugar i -ésimo. De este modo, tenemos que para $i \neq j$ los

espacios \mathcal{H}_i y \mathcal{H}_j son ortogonales con respecto al producto interno dado en la Proposición 1.26.

Nos interesa estudiar ahora la teoría general de operadores en espacios de Hilbert. De aquí en adelante \mathcal{H} denotará un espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.28. Un operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es lineal y acotado si

- a) $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,
- b) Existe una constante $M > 0$ tal que $\|T(x)\|_{\mathcal{H}} \leq M\|x\|_{\mathcal{H}}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Denotamos al conjunto de todos los operadores lineales y acotados en \mathcal{H} por $B(\mathcal{H})$, esto es,

$$B(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Se define la *norma de un operador* $T \in B(\mathcal{H})$ como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Esta norma convierte a $B(\mathcal{H})$ en un espacio de Banach.

En $B(\mathcal{H})$ se pueden definir varias topologías dependiendo de la base de entornos considerada:

DEFINICIÓN 1.29.

- a) La *topología uniforme* en $B(\mathcal{H})$ tiene la base de entornos

$$U(T, \epsilon) = \{S \in B(\mathcal{H}) : \|S - T\| < \epsilon\}.$$

para $T \in B(\mathcal{H})$ y $\epsilon > 0$.

- b) La *topología fuerte (SOT)* en $B(\mathcal{H})$ tiene la base de entornos

$$F(T, \epsilon, x) = \{S \in B(\mathcal{H}) : \|S(x) - T(x)\|_{\mathcal{H}} < \epsilon\}.$$

para $T \in B(\mathcal{H})$, $\epsilon > 0$, $x \in \mathcal{H}$.

- c) La *topología débil (WOT)* en $B(\mathcal{H})$ tiene la base de entornos

$$D(T, \epsilon, x, y) = \{S \in B(\mathcal{H}) : |\langle S(x), y \rangle - \langle T(x), y \rangle| < \epsilon\}.$$

para $T \in B(\mathcal{H})$, $\epsilon > 0$, $x, y \in \mathcal{H}$.

La definición anterior nos permite tener las siguientes nociones de convergencia en $B(\mathcal{H})$.

PROPOSICIÓN 1.30. Sean $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$ y $T \in B(\mathcal{H})$. Entonces

- a) $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a T si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$.
- b) $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la topología fuerte a T si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
- c) $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a T si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n x, y \rangle = \langle T x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

Veremos al final de esta sección que la siguiente definición de adjunto de un operador permite dotar a $B(\mathcal{H})$ de una estructura más robusta y es la de ser una C^* -álgebra.

DEFINICIÓN 1.31. El *adjunto* de un operador $T \in B(\mathcal{H})$, que se denota por T^* , es el único operador en $B(\mathcal{H})$ tal que $\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y además su norma coincide con la norma de T , i.e. $\|T\| = \|T^*\|$.

La definición anterior permite clasificar los operadores en $B(\mathcal{H})$ de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 1.32. Si $T \in B(\mathcal{H})$. Se dice que

- a) T es *normal* si, $T^* T = T T^*$,
- b) T es *auto-adjunto* si, $T = T^*$,
- c) T es *unitario* si, $T^* T = I = T T^*$,
- d) T es *proyección* si, $T^2 = T$.

Queremos definir ahora la suma directa de operadores, pero antes el siguiente teorema nos da la hipótesis necesaria para que dicho operador esté bien definido.

TEOREMA 1.33. Sea $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de espacios de Hilbert y sea $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$. Supongamos que $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de operadores tales que $T_i \in B(\mathcal{H}_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe un operador acotado $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $Th = \{T_i h_i\}_{i=1}^{\infty}$ para todo $h = \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ si y solo si $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\| < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\| = C < \infty$. Sea $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ un elemento arbitrario, entonces

$$\|Th\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\{T_i h_i\}_{i \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_i h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T_i\|^2 \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 = C^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 = C^2 \|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Así, $\|Th\|_{\mathcal{H}} \leq C \|h\|_{\mathcal{H}}$. Por lo que concluimos que T es un operador acotado.

Ahora bien, fijamos $j \in \mathbb{N}$ y eligimos $h_j \in \mathcal{H}_j$, $h_j \neq 0$. Sea $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tal que $h_i = 0$ para todo $i \neq j$, entonces

$$\|T_j h_j\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i h_i\|^2 \right)^{1/2} = \|Th\| \leq \|T\| \|h\| = \|T\| \|h_j\|.$$

Tomando supremo sobre los $h_j \in \mathcal{H}_j$ tal que $\|h_j\| = 1$ obtenemos que

$$\|T_j\| = \sup_{\|h_j\|=1} \|T_j h_j\| \leq \|T\|.$$

Ahora tomando supremo sobre los $j \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_j\| \leq \|T\| < \infty.$$

Finalmente, se puede deducir por ambas implicaciones que:

$$\|T\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_j\|.$$

■

DEFINICIÓN 1.34. Sean $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios de Hilbert y $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de operadores tal que $T_i \in B(\mathcal{H}_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\| < \infty$. El operador *suma directa* de $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es el operador $T : \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ definido por

$$Th = \{T_i h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{para } h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i.$$

Además, si llamamos $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ tenemos que $T \in B(\mathcal{H})$ y $\|T\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\|$.

OBSERVACIÓN 1.35. Un operador suma directa T se suele denotar como $T = \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$, además para todo $i \in \mathbb{N}$ es usual usar la notación $T|_{\mathcal{H}_i}$ para referirse al operador T_i definido en el correspondiente espacio de Hilbert \mathcal{H}_i .

A continuación procederemos a definir cuando dos operadores son unitariamente equivalentes. Haremos énfasis en esta definición, ya que este concepto aparecerá a lo largo de todo el trabajo.

DEFINICIÓN 1.36. Sean \mathcal{H}, \mathcal{K} dos espacios de Hilbert, $T \in B(\mathcal{H})$ y $S \in B(\mathcal{K})$. Se dice que T y S son *unitariamente equivalentes* si existe un isomorfismo isométrico $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que $UTU^{-1} = S$, esto se denota por $T \cong S$.

Ahora introducimos las definiciones de álgebra, álgebra de Banach y álgebra C^* con el propósito de desarrollar en el siguiente capítulo algunos aspectos de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.37. Un *álgebra* \mathcal{A} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con una operación de multiplicación $P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $P(a, b) = ab$ que satisface las siguientes propiedades:

- a) $a(bc) = (ab)c$
- b) $a(b + c) = ab + ac$
- c) $(a + b)c = ac + bc$
- d) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 1.38. Un *álgebra de Banach* \mathcal{A} es un álgebra que tiene una norma con respecto a la cual es un espacio de Banach y tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Si además \mathcal{A} tiene unidad e , entonces $\|e\| = 1$.

DEFINICIÓN 1.39. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach, una aplicación $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $\varphi(x) = x^*$ es llamada *involución* en \mathcal{A} si cumple con las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

- a) $(x + y)^* = x^* + y^*$
- b) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$
- c) $(xy)^* = y^*x^*$
- d) $x^{**} = x$

DEFINICIÓN 1.40. Una C^* -*álgebra* es un álgebra de Banach \mathcal{A} con una involución $x \mapsto x^*$ que satisface

$$\|xx^*\| = \|x\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.41. Dada una C^* -álgebra \mathcal{A} , la subálgebra generada por un elemento $x \in \mathcal{A}$ se define como la clausura del conjunto de todos los polinomios $p(x, x^*)$.

Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, entonces $B(\mathcal{H})$ es una C^* -álgebra con identidad (el operador identidad $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$) considerando el producto como la composición de operadores, la norma usual de operadores y la involución $T \mapsto T^*$, donde T^* es el adjunto de T . Además, diremos que una subálgebra \mathcal{A} de $B(\mathcal{H})$ es *normal* si todos los $T \in \mathcal{A}$ son operadores normales.

DEFINICIÓN 1.42. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $N \in B(\mathcal{H})$ un operador normal. Denotamos por $C^*(N)$ a la C^* -álgebra generada por N , la cual se define como la clausura de todos los polinomios en I , N y N^* .

Una definición más específica de la C^* -álgebra generada por N se puede ver en el libro de W. Arveson ([6], Definition 1.1, p. 1).

Teoría espectral para operadores en espacios de Hilbert

En este capítulo desarrollamos la teoría necesaria para enunciar y demostrar el Teorema espectral para operadores normales (acotados), el cual provee una caracterización completa de los operadores normales en espacios de Hilbert a través de su espectro, y generaliza el concepto de diagonalización de una transformación lineal normal en espacios de dimensión finita.

La primera parte está dedicada a dar algunas definiciones y resultados sobre funciones analíticas. Seguidamente definimos el espectro de un operador y demostramos algunas de sus propiedades más importantes. Luego, presentamos algunos aspectos de la teoría de álgebras de Banach conmutativas e ideales maximales con el objetivo de definir la transformada de Gelfand, que jugará un papel fundamental en la demostración del teorema principal del capítulo.

El Teorema espectral para operadores normales se deduce principalmente de la estructura de C^* -álgebra del espacio $B(\mathcal{H})$, específicamente del Teorema de Gelfand-Naimark que caracteriza las C^* -subálgebras conmutativas de $B(\mathcal{H})$. Cabe mencionar que este teorema se puede enunciar en el contexto de álgebras de Banach generales (ver [7]), pero para nuestro propósito lo presentamos en el contexto del álgebra de operadores lineales y acotados.

El principal objetivo de este capítulo es brindar una herramienta fundamental, como lo es el Teorema espectral para operadores normales en espacios de Hilbert, para luego en el próximo capítulo dar una caracterización de los operadores normales que son unitariamente equivalentes. Dicho teorema permitirá asociarle a cada operador normal una colección de objetos de forma tal que dos operadores son unitariamente equivalentes si y solo si estos objetos son equivalentes en cierto sentido.

1. Espectro de un operador

Antes de dar la definición de espectro de un operador damos algunas definiciones y resultados de la teoría de funciones analíticas.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con G un subconjunto abierto de \mathbb{C} . La derivada de f en $z_0 \in G$ se define por

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

diremos que f es *analítica* en G si tiene derivada continua en G . Se dice que f es una función *entera* si f es analítica en todo el plano complejo.

TEOREMA 2.2 (Liouville). *Una función acotada que es analítica en todo el plano complejo es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [8], Theorem 10.23 ,p. 213. ■

OBSERVACIÓN 2.3. Si \mathcal{X} es un espacio de Banach y G una región en \mathbb{C} , se define la derivada de $f : G \rightarrow \mathcal{X}$ en z_0 , como $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(z_0 + h) - f(z_0)]$ siempre que este límite exista con respecto a la norma asociada al espacio de Banach, y diremos que f es analítica si f tiene derivada continua en G .

A continuación definiremos el espectro de un operador, esta definición es clave en la teoría espectral y además enunciaremos algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 2.4. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$. El *espectro* de T se define como

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ no es invertible en } B(\mathcal{H})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq 0 \text{ o } \text{Ran}(\lambda I - T) \neq \mathcal{H}\}. \end{aligned}$$

El conjunto $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ se conoce como *resolvente* de T .

OBSERVACIÓN 2.5. El espectro también se puede definir para un elemento a de un álgebra de Banach (con identidad) general \mathcal{A} , como

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

donde e es el elemento identidad (con respecto al producto) de \mathcal{A} .

El espectro de un operador es un conjunto no vacío, cerrado y acotado de \mathbb{C} , es decir, compacto. Para ver esto necesitamos los siguientes resultados.

LEMA 2.6. *Si $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $\|T - I\| < 1$, entonces T es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S \in B(\mathcal{H})$ dado por $S = I - T$, entonces $\|S\| = r < 1$, por hipótesis. Sabemos que se cumple que $\|S^2\| \leq \|S\|^2$, por lo tanto por inducción sobre n es sencillo ver que $\|S^n\| \leq \|S\|^n = r^n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|S^n\| < \infty$, entonces existe un $M \in B(\mathcal{H})$, tal que $M = \sum_{n=1}^{\infty} S^n$, esto último por la completitud de $B(\mathcal{H})$.

Ahora bien, si $M_n = I + S + S^2 + \dots + S^n$, veamos cual es el resultado de la composición de M_n con $I - S$:

$$\begin{aligned} M_n(I - S) &= (I + S + S^2 + \dots + S^n) - (I + S + S^2 + \dots + S^n) \cdot S \\ &= (I + S + S^2 + \dots + S^n) - (S + S^2 + \dots + S^n + S^{n+1}) \\ &= I - S^{n+1} \end{aligned}$$

Pero recordemos que $\|S^{n+1}\| \leq r^{n+1} < 1$ por lo que $S^{n+1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces

$$M(I - S) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(I - S) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - S^{n+1}) = I.$$

lo que es análogo para $(I - S)M$. Así $(I - S)$ es invertible y su inversa viene dada por $M = \sum_{n=1}^{\infty} S^n$. Finalmente, tenemos que

$$I - S = I - (I - T) = T$$

es decir, T es invertible. ■

El siguiente teorema establece que el conjunto de todos los elementos invertibles de $B(\mathcal{H})$ es abierto y la aplicación que manda cada elemento en su inverso es continua, estas son propiedades fundamentales para demostrar que el espectro de un operador es un conjunto compacto.

TEOREMA 2.7. *Sean $G_l = \{T \in B(\mathcal{H}) : T \text{ es invertible a izquierda}\}$, $G_r = \{T \in B(\mathcal{H}) : T \text{ es invertible a derecha}\}$ y $G = \{T \in B(\mathcal{H}) : T \text{ es invertible}\}$, entonces G_l, G_r y G son subconjuntos abiertos de $B(\mathcal{H})$. Además, la aplicación $T \mapsto T^{-1}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $T_0 \in G_l$ y $S_0 \in B(\mathcal{H})$ fijos tal que $S_0 T_0 = I$. Sea $T \in B(\mathcal{H})$, si $\|T - T_0\| < \|S_0\|^{-1}$, entonces $\|S_0 T - I\| = \|S_0(T - T_0)\| < 1$. Por el Lema 2.6, $M = S_0 T$ es invertible y si $N = M^{-1} S_0$, se tiene que $NT = I$. Entonces hemos conseguido una bola abierta de centro T_0 y radio $\|S_0\|^{-1}$, tal que $T \in \{T \in B(\mathcal{H}) : \|T - T_0\| < \|S_0\|^{-1}\} \subseteq G_l$. Es decir, G_l es abierto, análogamente G_r es también abierto. Ahora, claramente $G = G_l \cap G_r$, esto debido a que G contiene a los operadores que tienen inverso tanto a derecha como a izquierda, y como la intersección finita de subconjuntos abiertos es abierto, se concluye que G es abierto.

Veamos ahora, que la aplicación que manda a T en su inverso T^{-1} es continua. Para ello supongamos que existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $T_n \rightarrow I$. Tomando $0 < \delta < 1$ y suponiendo que $\|T_n - I\| < \delta$, nuevamente por el Lema 2.6 tenemos que

$$T_n^{-1} = (I - (I - T_n^{-1})) = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T_n)^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} (I - T_n)^k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|T_n^{-1} - I\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (I - T_n)^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(I - T_n)\|^k \\ &< \delta/(1 - \delta). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, entonces δ se puede escoger de manera tal que $\delta/(1 - \delta) < \epsilon$, es decir que $\|T_n - I\| < \delta$ implica que $\|T_n^{-1} - I\| < \epsilon$, así $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{-1} = I$.

Ahora sea $T \in G$ y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de G tal que $T_n \rightarrow T$. Entonces $T^{-1} T_n \rightarrow I$. Por el procedimiento anterior, $T_n^{-1} T = (T^{-1} T_n)^{-1} \rightarrow I$.

Finalmente,

$$T_n^{-1} = (T_n^{-1} T) T^{-1} \rightarrow T^{-1}.$$

■

A continuación demostraremos que el espectro de un operador T es un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{C} .

TEOREMA 2.8. *Para cada $T \in B(\mathcal{H})$ ($T \neq 0$), el espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Si $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\lambda I - T = \lambda(I - T/\lambda)$ y $\|T/\lambda\| < 1$. Por el Lema 2.6, $(I - T/\lambda)$ es invertible, lo que implica que $(\lambda I - T)$ es invertible y entonces $\lambda \notin \sigma(T)$, es decir que $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ es acotado.

Ahora bien, sea G el conjunto de todos los operadores invertibles en $B(\mathcal{H})$. La aplicación tal que $\lambda \rightarrow (\lambda I - T)$ es una función continua de \mathbb{C} en $B(\mathcal{H})$. Como G es abierto y $\rho(T)$ es la imagen inversa de G a través de la aplicación continua, sucede que $\rho(T)$ es abierto, lo que significa que $\sigma(T)$ cerrado, por lo tanto compacto.

Para ver que $\sigma(T) \neq \emptyset$ definimos $F : \rho(T) \rightarrow B(\mathcal{H})$ como $F(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ y usamos la identidad $M^{-1} - N^{-1} = M^{-1}(N - M)N^{-1}$ para $M, N \in B(\mathcal{H})$. Tomando $M = ((\lambda + h)I - T)$ y $N = (\lambda I - T)$, donde $\lambda \in \rho(T)$, $h \neq 0 \in \mathbb{C}$ y $\lambda + h \in \rho(T)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h} &= \frac{((\lambda + h)I - T)^{-1}(-h)(\lambda I - T)^{-1}}{h} \\ &= -((\lambda + h)I - T)^{-1}(\lambda I - T)^{-1}. \end{aligned}$$

Como $((\lambda + h)I - T)^{-1} \rightarrow (\lambda I - T)^{-1}$ cuando $h \rightarrow 0$, se tiene que $F'(\lambda)$ existe y es tal que

$$F'(\lambda) = -(\lambda I - T)^{-2}.$$

Así pues $F' : \rho(T) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es continua, por lo que F es analítica en $\rho(T)$ por la Observación 2.3. Ahora bien, por el Lema 2.6 si $|\lambda| > \|T\|$, entonces $F(\lambda) = \lambda^{-1}(I - T/\lambda)^{-1}$, pero si $\lambda \rightarrow \infty$ se tiene que $(I - T/\lambda) \rightarrow I$ por lo que también sucede que $(I - T/\lambda)^{-1} \rightarrow I$. Entonces $F(\lambda) \rightarrow 0$ si $\lambda \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, si suponemos que $\rho(T) = \mathbb{C}$, entonces F es una función entera que tiende a cero en el infinito. Lo que implica por el Teorema 2.2, que F es constante, lo cual es una contradicción ya que $F'(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Es decir, $\rho(T) \neq \mathbb{C}$ o lo que es análogo $\sigma(T) \neq \emptyset$. ■

Procedemos a definir otra propiedad del espectro de un operador que conoceremos como el radio espectral.

DEFINICIÓN 2.9. Sea $T \in B(\mathcal{H})$. El *radio espectral de T* se denota por $r(T)$ y está definido como

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Como $\sigma(T) \neq \emptyset$ y acotado, $r(T)$ está bien definido y es finito. Además, como $\sigma(T)$ es compacto, este supremo es alcanzado, por lo que es máximo. El siguiente teorema da otra caracterización del radio espectral.

TEOREMA 2.10. Si $T \in B(\mathcal{H})$, entonces el siguiente límite existe y

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Además, como $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|^{n/n} = \|T\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [7], Theorem 10.13 ,p. 253. ■

2. Álgebras de Banach

Los siguientes resultados se pueden enunciar para cualquier álgebra de Banach conmutativa con identidad. Sin embargo, para el objetivo de este trabajo nos restringiremos a subálgebras de Banach conmutativas de $B(\mathcal{H})$.

DEFINICIÓN 2.11. Sea $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ una subálgebra conmutativa que contiene al operador identidad I . Un subconjunto \mathcal{M} de \mathcal{A} se dice *ideal* si:

- a) \mathcal{M} es un subespacio vectorial de \mathcal{A} .
- b) \mathcal{M} absorbe el producto, es decir, si $T \in \mathcal{M}$ y $S \in \mathcal{A}$, entonces $TS \in \mathcal{M}$.

\mathcal{M} es un *ideal maximal* si es un ideal propio de \mathcal{A} que no está contenido en ningún otro ideal propio.

Ningún ideal propio de \mathcal{A} puede contener algún elemento invertible.

DEFINICIÓN 2.12. Sea $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ una subálgebra conmutativa que contiene al operador identidad I . Se dice que $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ es un *homomorfismo complejo* si h es un funcional no nulo y $h(TS) = h(T)h(S)$ para todo $T, S \in \mathcal{A}$.

Habiendo definido lo que es un homomorfismo complejo nos centraremos en el conjunto de todos los homomorfismos complejos de \mathcal{A} , que denotaremos por \mathcal{F} . Además, enunciaremos un teorema que nos brinda una serie de propiedades acerca de este conjunto \mathcal{F} . Pero antes, vamos a presentar y demostrar el teorema de Gelfand-Mazur.

TEOREMA 2.13 (Gelfand-Mazur). *Si \mathcal{A} es un álgebra de Banach sobre \mathbb{C} con identidad en la cual cada elemento distinto de cero tiene inverso multiplicativo. Entonces \mathcal{A} es isométricamente isomorfo a \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $a \in \mathcal{A}$, entonces a lo sumo uno de los elementos $\alpha_1 e - a$ ó $\alpha_2 e - a$ es cero. Luego, al menos uno de ellos es invertible.

Como $\sigma(a)$ es no vacío, se sigue que $\sigma(a)$ consta exactamente de un elemento, digamos $\alpha(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Además, como $\alpha(a)e - a$ es no invertible, se tiene que $\alpha(a)e - a = 0$, es decir, que $\alpha(a)e = a$.

Por lo tanto, la aplicación $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\psi(a) = \alpha(a)$ es un isomorfismo por construcción y

$$|\psi(a)| = |\alpha(a)| = \|\alpha(a)e\| = \|a\|.$$

■

El siguiente teorema da una correspondencia uno a uno entre todos los ideales maximales de una subálgebra de Banach conmutativa \mathcal{A} de $B(\mathcal{H})$ y el conjunto de todos los homomorfismos complejos de \mathcal{A} .

TEOREMA 2.14. *Sea \mathcal{A} una subálgebra de Banach conmutativa de $B(\mathcal{H})$ que contiene al operador identidad y sea \mathcal{F} el conjunto de todos los homomorfismos complejos de \mathcal{A} . Entonces*

- a) *Todo ideal maximal de \mathcal{A} es el kernel de algún $h \in \mathcal{F}$.*
- b) *Si $h \in \mathcal{F}$, entonces el kernel de h es un ideal maximal de \mathcal{A} .*
- c) *Un elemento $T \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si $h(T) \neq 0$ para todo $h \in \mathcal{F}$.*
- d) *Un elemento $T \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si T no pertenece a ningún ideal propio de \mathcal{A} .*
- e) *$\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si $h(T) = \lambda$ para algún $h \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN.

- a) Sea \mathcal{A} una subálgebra conmutativa y \mathcal{M} un ideal propio cerrado de \mathcal{A} , entonces \mathcal{A}/\mathcal{M} es un álgebra de Banach con respecto a la norma $\|T + \mathcal{M}\| = \inf_{M \in \mathcal{M}} \|T - M\|$. En

efecto, veamos que la operación multiplicación en \mathcal{A}/\mathcal{M} dada por

$$(T + \mathcal{M})(S + \mathcal{M}) = TS + \mathcal{M}.$$

está bien definida. Si $T - T' \in \mathcal{M}$ y $S - S' \in \mathcal{M}$, entonces la identidad

$$T'S' - TS = T'S' - TS' + TS' - TS = (T' - T)S' + T(S' - S)$$

pertenece a \mathcal{M} por ser ideal propio, pues, absorbe el producto. Luego, $T'S' + \mathcal{M} = TS + \mathcal{M}$. Además, si $T, S \in \mathcal{A}$ y $M, N \in \mathcal{M}$, implica que

$$(T + M)(S + N) = TS + (TN + MS + MN) \in TS + \mathcal{M}.$$

Entonces,

$$\|(T + \mathcal{M})(S + \mathcal{M})\| = \|TS + \mathcal{M}\| \leq \|(T + M)(S + N)\| \leq \|T + M\| \|S + N\|.$$

Tomando ínfimos sobre $M, N \in \mathcal{M}$, se obtiene que

$$\|(T + \mathcal{M})(S + \mathcal{M})\| \leq \|T + \mathcal{M}\| \|S + \mathcal{M}\|.$$

Más aún, la aplicación $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$, dada por $\pi(T) = T + \mathcal{M}$, es un homomorfismo, pues:

$$\pi(T + S) = (T + S) + \mathcal{M} = (T + \mathcal{M}) + (S + \mathcal{M}) = \pi(T) + \pi(S)$$

$$\pi(\lambda T) = \lambda T + \mathcal{M} = \lambda(T + \mathcal{M}) = \lambda\pi(T)$$

$$\pi(TS) = TS + \mathcal{M} = (T + \mathcal{M})(S + \mathcal{M}) = \pi(T)\pi(S).$$

Finalmente, si I es el operador identidad en \mathcal{A} , entonces $\pi(I) = I + \mathcal{M}$ es el operador identidad en \mathcal{A}/\mathcal{M} . Además, $\|I + \mathcal{M}\| \leq \|I + \mathcal{M}\|^2$ por ser álgebra de Banach, con lo cual

$$1 \leq \|I + \mathcal{M}\|.$$

Pero, sabemos por como se define la norma que $\|\pi(T)\| \leq \|T\|$ para todo $T \in \mathcal{A}$. Por lo tanto

$$\|\pi(I)\| \leq \|I\| = 1.$$

Lo que demuestra que $\|I + \mathcal{M}\| = 1$.

Ahora bien, sea $T \in \mathcal{A}$ con $T \notin \mathcal{M}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{J} = \{ST + \mathcal{M} : S \in \mathcal{A} \text{ y } M \in \mathcal{M}\}.$$

Entonces \mathcal{J} es un ideal de \mathcal{A} y $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{J}$, lo cual se ve tomando $S = I$ y $M = 0$.

Como \mathcal{M} es maximal se tiene que $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ y $ST + M = I$, para ciertos $S \in \mathcal{A}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Luego, si $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$, tenemos

$$\pi(I) = \pi(ST + M) = \pi(S)\pi(T) + \pi(M) = \pi(S)\pi(T).$$

Como \mathcal{A} es conmutativa se tiene que:

$$\pi(I) = \pi(S)\pi(T) = \pi(T)\pi(S).$$

Por lo tanto, $\pi(T)$ es invertible en \mathcal{A}/\mathcal{M} , para todo $T \notin \mathcal{M}$, por el Teorema 2.13 existe un isomorfismo isométrico ϕ de \mathcal{A}/\mathcal{M} en \mathbb{C} .

Sea $h = \phi \circ \pi$, entonces $h \in \mathcal{F}$. En efecto,

$$h : \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}.$$

Así, h es no nulo, lineal y preserva el producto, por ser composición de funciones con estas propiedades. Por lo tanto $h(I) = 1$ y además

$$\ker(h) = \{T \in \mathcal{A} : h(T) = 0\} = \{T \in \mathcal{A} : \phi(\pi(T)) = 0\} = \mathcal{M}.$$

Recordando que la última igualdad se cumple, ya que ϕ es inyectiva, por lo que $\ker(\phi) = \{0\}$ y así $\pi(T) = 0$.

- b) Si $h \in \mathcal{F}$, entonces $\ker(h) = h^{-1}(\{0\})$ es un ideal de \mathcal{A} , ya que h es un homomorfismo y $h(TS) = h(T)h(S) = 0$, para $T \in \ker(h)$ ($h(T) = 0$). Así $TS \in \ker(h)$. Por lo que $\ker(h)$ es un ideal. Veamos que es maximal, supongamos que $\ker(h) \subsetneq \mathcal{A}$, entonces existe $T_1 \in \mathcal{A} \setminus \ker(h)$ tal que $h(T_1) \neq 0$ y escogiendo $T_0 = \frac{T_1}{h(T_1)}$ obtenemos que $h(T_0) = 1$, es decir, $T_0 \notin \ker(h)$. Sea $T \in \mathcal{A}$ un elemento arbitrario. Entonces

$$T - h(T).T_0 \in \ker(h).$$

Así, para $T \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\mathcal{A} = \ker(h) + \{\lambda T_0 : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Lo que implica que la codimensión del $\ker(h)$ es igual a 1, es decir, que no existe otro ideal propio de \mathcal{A} que contenga al $\ker(h)$. Por lo tanto es maximal.

c) Sea $T \in \mathcal{A}$ invertible y $h \in \mathcal{F}$, entonces $h(T) \neq 0$, para todo $h \in \mathcal{F}$, pues $1 = h(I) = h(TT^{-1}) = h(T)h(T^{-1})$.

Ahora, si T no es invertible, entonces el conjunto $\{ST : S \in \mathcal{A}\}$ es un ideal propio de \mathcal{A} ya que no contiene a I . Luego, dicho conjunto esta contenido en algún ideal maximal de \mathcal{A} , entonces por el ítem (a) existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $h(T) = 0$.

d) Ningún ideal propio contiene operadores invertibles. Si T no pertenece a ningún ideal propio, en particular no pertenece a ningún ideal maximal. Por (a) se tiene que $h(T) \neq 0$, para toda $h \in \mathcal{F}$. Lo cual implica, por el ítem (c), que T es invertible.

e) Si $\lambda \in \sigma(T)$, ocurre que $(\lambda I - T)$ no es invertible, por (c), $h(\lambda I - T) = 0$ para algún $h \in \mathcal{F}$, lo que implica que $h(T) = \lambda$, para algún $h \in \mathcal{F}$. El recíproco funciona en cada implicación. ■

Ahora procederemos a definir la Transformada de Gelfand de una subálgebra conmutativa \mathcal{A} de $B(\mathcal{H})$ que contiene al operador identidad. La transformada de Gelfand es una aplicación mediante la cual se identifica a \mathcal{A} con una subálgebra de un espacio de funciones continuas.

DEFINICIÓN 2.15 (Transformada de Gelfand). Sea \mathcal{F} el conjunto de todos los homomorfismos complejos de una subálgebra de Banach conmutativa \mathcal{A} de $B(\mathcal{H})$. La *Transformada de Gelfand* de $T \in \mathcal{A}$ se define como $\hat{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{T}(h) = h(T)$$

para $h \in \mathcal{F}$.

Sea $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{T} : T \in \mathcal{A}\}$. La topología de Gelfand de \mathcal{F} es la topología débil generada por $\hat{\mathcal{A}}$, esto es, la menor topología que hace continuas a todas las funciones \hat{T} . Entonces $\hat{\mathcal{A}}$ está contenida en $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ que es el álgebra de todas las funciones continuas de \mathcal{F} en \mathbb{C} , es decir, $\hat{\mathcal{A}}$ es una subálgebra.

Por el Teorema 2.14 sabemos que existe una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales de \mathcal{A} y los elementos de \mathcal{F} , por esta razón al conjunto \mathcal{F} junto con la topología de Gelfand se le llama *espacio de ideales maximales de \mathcal{A}* , y a la aplicación $T \mapsto \hat{T}$ se le llama *Transformada de Gelfand de \mathcal{A} en $\hat{\mathcal{A}}$* .

DEFINICIÓN 2.16. Sea \mathcal{A} una subálgebra de Banach conmutativa de $B(\mathcal{H})$. El *radical* de \mathcal{A} , denotado por $\text{rad}(\mathcal{A})$, es la intersección de todos los ideales maximales de \mathcal{A} . Si $\text{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, \mathcal{A} se llama semisimple.

TEOREMA 2.17. Sea \mathcal{A} una subálgebra de Banach conmutativa de $B(\mathcal{H})$ y \mathcal{F} el espacio de ideales maximales de \mathcal{A} . Entonces

- a) \mathcal{F} es un espacio de Hausdorff compacto.
- b) La transformada de Gelfand es un homomorfismo de \mathcal{A} en la subálgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ de $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$, cuyo kernel es $\text{rad}(\mathcal{A})$. La transformada de Gelfand es un isomorfismo si y solo si \mathcal{A} es semisimple.
- c) Para cada $T \in \mathcal{A}$, el rango de \widehat{T} es $\sigma(T)$ y

$$\|\widehat{T}\|_{\infty} = r(T) \leq \|T\|$$

Además, $T \in \text{rad}(\mathcal{A})$ si y solo si $r(T) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración del ítem (a) se puede ver en detalle en ([7], Theorem 11.9, p.280).

Ahora bien, para ver el ítem (b) y (c), sean $T, S \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $h \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{(T+S)}(h) &= h(T+S) = h(T) + h(S) = \widehat{T}(h) + \widehat{S}(h) \\ \widehat{(\alpha T)}(h) &= h(\alpha T) = \alpha h(T) = \alpha \widehat{T}(h) \\ \widehat{(TS)}(h) &= h(TS) = h(T).h(S) = \widehat{T}(h)\widehat{S}(h) \end{aligned}$$

Así, $T \mapsto \widehat{T}$ es un homomorfismo y su kernel es el conjunto

$$\{T \in \mathcal{A} : \widehat{T} = 0\}. \tag{2.1}$$

Pero, si $\widehat{T} = 0$ es necesario y suficiente que $\widehat{T}(h) = h(T) = 0$ para todo $h \in \mathcal{F}$, es decir, $T \in \ker(h)$ para todo $h \in \mathcal{F}$, más aún, $T \in \bigcap_{h \in \mathcal{F}} \ker(h)$. Por el Teorema 2.14 y la definición 2.16, se tiene que $\text{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{h \in \mathcal{F}} \ker(h)$. Por lo tanto, $T \in \text{rad}(\mathcal{A})$.

Ahora bien, si $\lambda \in \text{Ran}(\widehat{T})$, entonces $\lambda = \widehat{T}(h) = h(T)$ para algún $h \in \mathcal{F}$. Así, por el ítem (e) del Teorema 2.14 se tiene que $\lambda \in \sigma(T)$, el recíproco también vale. Además,

$$\|\widehat{T}\|_{\infty} = \sup_{h \in \mathcal{F}} |\widehat{T}(h)| = \sup_{\alpha \in \sigma(T)} |\alpha| = r(T) \leq \|T\|.$$

Entonces, si $r(T) = 0$, por lo anterior tenemos que $\|\widehat{T}\|_\infty = 0$, es decir, $\widehat{T} = 0$, pero ya vimos que si $\widehat{T} = 0$ es necesario y suficiente que $T \in \text{rad}(\mathcal{A})$. ■

Enunciaremos ahora el teorema de Gelfand-Naimark, pero antes recordaremos el teorema de Stone-Weirestrass.

TEOREMA 2.18. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Sea \mathcal{A} una subálgebra de $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ que separa puntos de X , contiene a las funciones constantes y es estable con respecto a la conjugación. Entonces \mathcal{A} es denso en $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [7], Theorem 5.7, p 122. ■

TEOREMA 2.19 (Gelfand-Naimark). *Sea \mathcal{A} una C^* -subálgebra conmutativa de $B(\mathcal{H})$, con espacio de ideales maximales \mathcal{F} . Entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de \mathcal{A} en $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ con la propiedad*

$$h(T^*) = \widehat{h(T)} \quad (T \in \mathcal{A}, h \in \mathcal{F})$$

o equivalentemente,

$$(T^*)^\wedge = \widetilde{\widehat{T}} \quad (T \in \mathcal{A}).$$

DEMOSTRACIÓN. En esta demostración solo nos centraremos en ver que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico. Para la propiedad, ver ([7], Theorem 11.18, p. 289).

Ahora, $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{T} : T \in \mathcal{A}\}$ es una subálgebra de $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ que separa puntos, contiene a los operadores constantes y es estable por conjugación. Por el teorema de Stone-Weirestrass, $\widehat{\mathcal{A}}$ es denso en $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Veamos que $T \mapsto \widehat{T}$ es isometría. Si $T \in \mathcal{A}$ y $S = TT^*$, entonces $S = S^*$, lo que significa que $\|S^2\| = \|S\|^2$, haciendo inducción sobre n se sigue que

$$\|S^m\| = \|S\|^m, \quad \text{para } m = 2^n.$$

Luego

$$\|\widehat{S}\|_\infty = r(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{1/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|S^m\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\|S\|^m)^{1/m} = \|S\|.$$

Como $S = TT^*$, entonces $\widehat{S} = \widehat{TT^*} = \widehat{T}\widehat{T^*} = \widehat{T}\widetilde{\widehat{T}} = |\widehat{T}|^2$, luego

$$\|\widehat{T}\|_\infty^2 = \|\widehat{S}\|_\infty = \|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

Es decir, $\|\widehat{T}\|_\infty = \|T\|$. El hecho de que la transformada de Gelfand sea una isometría, implica que $\widehat{\mathcal{A}}$ es cerrado. Concluimos entonces que $\widehat{\mathcal{A}} = C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$. ■

3. El Teorema Espectral

Ahora introducimos la definición de un tipo de “medida” E que toma valores en el álgebra de operadores $B(\mathcal{H})$ en lugar de valores escalares y que llamaremos resolución de la identidad, con el objetivo de definir posteriormente la integral de funciones a valores escalares con respecto a una medida compleja inducida por E .

DEFINICIÓN 2.20. Sea X un conjunto, Ω una σ -álgebra de subconjuntos de X y \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Una *resolución de la identidad* para (X, Ω, \mathcal{H}) es una aplicación $E : \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$ con las siguientes propiedades:

- a) $E(\emptyset) = 0$ y $E(X) = I$.
- b) Para cada $\Delta \in \Omega$, $E(\Delta)$ es una proyección autoadjunta.
- c) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1) \cdot E(\Delta_2)$, para todo $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$.
- d) Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$ son tales que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, entonces $E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$.
- e) Para cada $x, y \in \mathcal{H}$, la función de conjuntos $E_{x,y} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle$, $\Delta \in \Omega$, es una medida compleja.

OBSERVACIÓN 2.21. Si E es una resolución de la identidad para (X, Ω, \mathcal{H}) y $x, y \in \mathcal{H}$, entonces $E_{x,y}$ tiene variación total $\leq \|x\| \|y\|$.

Veamos el siguiente ejemplo de una resolución de la identidad.

EJEMPLO 2.22. Sea X un conjunto compacto, Ω la σ -álgebra de subconjuntos de Borel de X , μ una medida en Ω y $\mathcal{H} = L^2(\mu)$. Sea $E : \Omega \rightarrow B(L^2(\mu))$ la aplicación que satisface que para cada $\Delta \in \Omega$, $E(\Delta) : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ es el operador definido por $E(\Delta)f = f \cdot \chi_\Delta$. Entonces E es una resolución de la identidad para $(X, \Omega, L^2(\mu))$.

Para ver esto, recordemos que la función característica χ_Δ definida como:

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Delta \\ 0 & \text{si } x \notin \Delta \end{cases}$$

cumple las siguientes propiedades:

- Si $\Delta = \emptyset$, $\chi_\Delta \equiv 0$,
- Si $\Delta = X$, $\chi_\Delta \equiv 1$,
- Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$, $\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(x) = \chi_{\Delta_1}(x) \cdot \chi_{\Delta_2}(x)$ para todo $x \in X$,
- Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$ son tales que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, entonces $\chi_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(x) = \chi_{\Delta_1}(x) + \chi_{\Delta_2}(x)$.
- Si $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos y $\Delta = \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$ entonces $\chi_\Delta(x) = \sum_{n=1}^\infty \chi_{\Delta_n}(x)$.

Vamos a demostrar esta última propiedad. Sea $x \in \Delta$, entonces $x \in \Delta_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x \notin \Delta_n$ para todo $n \neq n_0$, pues los Δ_n son disjuntos dos a dos. Entonces por definición de la función característica:

$$\chi_\Delta(x) = 1, \quad \chi_{\Delta_{n_0}}(x) = 1 \quad \text{y} \quad \chi_{\Delta_n}(x) = 0 \quad \forall n \neq n_0,$$

Así, tenemos que:

$$\chi_\Delta(x) = 1 = \chi_{\Delta_{n_0}}(x) = \sum_{n=1}^\infty \chi_{\Delta_n}(x).$$

Supongamos ahora que $x \notin \Delta = \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$, entonces $\chi_\Delta(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\chi_\Delta(x) = 0 = \sum_{n=1}^\infty \chi_{\Delta_n}(x).$$

Ahora bien, usando las propiedades anteriores veamos que E cumple con las cinco propiedades de la Definición 2.20.

- a) Observamos que $E(\emptyset)f = f \cdot \chi_\emptyset = f \cdot 0 = 0$ y $E(X)f = f \cdot \chi_X = f \cdot 1 = f$ para toda $f \in L^2(\mu)$. Entonces $E(\emptyset) = 0$ y $E(X) = I$.
- b) Para cada $\Delta \in \Omega$, $E(\Delta)$ es una proyección autoadjunta. En efecto, si $f \in L^2(\mu)$, entonces

$$E(\Delta)^2 f = E(\Delta)(E(\Delta)f) = E(\Delta)(f \cdot \chi_\Delta) = f \cdot \chi_\Delta \cdot \chi_\Delta = f \cdot \chi_\Delta = E(\Delta)f.$$

es decir, $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$. Además, de la definición del producto interno en $L^2(\mu)$ se ve fácilmente que $E(\Delta) = E(\Delta)^*$.

- c) Para todo $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$ veamos que $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$. Sea $f \in L^2(\mu)$, entonces:

$$E(\Delta_1 \cap \Delta_2)f = f \cdot \chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = f \cdot \chi_{\Delta_2} \cdot \chi_{\Delta_1} = E(\Delta_1)(f \cdot \chi_{\Delta_2}) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)f.$$

Como f es arbitraria se tiene que $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.

d) Sean $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$ tales que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, entonces para $f \in L^2(\mu)$ vale que

$$\begin{aligned} E(\Delta_1 \cup \Delta_2)f &= f \cdot \chi_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = f \cdot (\chi_{\Delta_1} + \chi_{\Delta_2}) = f \cdot \chi_{\Delta_1} + f \cdot \chi_{\Delta_2} \\ &= E(\Delta_1)f + E(\Delta_2)f \\ &= (E(\Delta_1) + E(\Delta_2))f, \end{aligned}$$

lo cual implica que $E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$.

e) Por último veamos que para cada $f, g \in L^2(\mu)$, la función de conjuntos $E_{f,g} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $E_{f,g}(\Delta) = \langle E(\Delta)f, g \rangle = \langle f \cdot \chi_{\Delta}, g \rangle$ con Δ en Ω , es una medida compleja. Por a. se sigue que $E_{f,g}(\emptyset) = 0$. Es suficiente entonces demostrar que $E_{f,g}$ es σ -aditiva. Sea $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de Borel disjuntos dos a dos y sea $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Entonces

$$\langle E(\Delta)f, g \rangle = \langle f \cdot \chi_{\Delta}, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f \cdot \chi_{\Delta_n}, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\Delta_n)f, g \rangle$$

y por lo tanto, $E_{f,g}(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{f,g}(\Delta_n)$. Así, $E_{f,g}$ es σ -aditiva, por lo tanto es una medida compleja.

Concluimos que E es una resolución de la identidad para $(X, \Omega, L^2(\mu))$.

Dada una resolución de la identidad E para (X, Ω, \mathcal{H}) vamos a definir el álgebra $L^\infty(E)$, para ello es necesario primero dar la definición de rango esencial de una función compleja f Ω -medible en X .

DEFINICIÓN 2.23. El *rango esencial* de una función Ω -medible $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, denotado por $\text{Ran ess}(f)$, se define como el subconjunto cerrado más pequeño de \mathbb{C} que contiene todos los valores $f(p)$ para casi todo $p \in X$, específicamente,

$$\text{Ran ess}(f) = \bigcap \left\{ \overline{f(\Delta)} : \Delta \in \Omega \text{ y } E(X \setminus \Delta) = 0 \right\}.$$

DEFINICIÓN 2.24. Se dice que f es *esencialmente acotada* si su rango esencial es acotado. En ese caso el *supremo esencial* de f es

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{Ran ess}(f)\}.$$

Sea \mathcal{B} el conjunto de todas las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, Ω -medibles y acotadas con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| : p \in \Omega\}.$$

Entonces \mathcal{B} es un álgebra de Banach y el conjunto $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{B} : \|f\|_\infty = 0\}$ es un ideal cerrado de \mathcal{B} . Por lo tanto, \mathcal{B}/\mathcal{N} es un álgebra de Banach y la denotaremos por $L^\infty(E)$.

Más aún, la norma de una clase $[f] = f + \mathcal{N} \in L^\infty(E)$ es, por definición $\|[f]\| = \inf_{g \in \mathcal{N}} \|f + g\|$ y esta norma coincide con $\|f\|_\infty$.

Ahora bien, ya sabiendo quién es el álgebra $L^\infty(E)$ es posible conseguir un isomorfismo isométrico de $L^\infty(E)$ en una subálgebra normal \mathcal{A} de $B(\mathcal{H})$, para ello, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.25. *Si E es una resolución de la identidad, entonces existe un isomorfismo isométrico $\Psi : L^\infty(E) \rightarrow \mathcal{A}$, donde \mathcal{A} es una subálgebra normal de $B(\mathcal{H})$, tal que Ψ preserva la involución, es decir, $\Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$ y*

$$\langle \Psi(f)x, y \rangle = \int_X f dE_{x,y} \quad (x, y \in \mathcal{H}, f \in L^\infty(E)). \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [7], Theorem 12.21, pag. 319. ■

Enunciaremos el teorema de representación de Riesz en el contexto de funcionales, ya que este nos permite conseguir una medida de Borel compleja regular, la cual será necesaria para la demostración del teorema espectral.

TEOREMA 2.26 (Representación de Riesz). *Sea X un espacio de Hausdorff compacto y \mathcal{F} un funcional lineal y acotado en $C(X, \mathbb{C})$. Entonces existe una única medida de Borel compleja regular μ tal que*

$$\mathcal{F}f = \int_X f d\mu$$

para toda $f \in C(X, \mathbb{C})$. Además, la norma de \mathcal{F} es la variación total de μ ,

$$\|\mathcal{F}\| = \|\mu\| = |\mu|(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [8], Theorem 6.19, p. 131. ■

La principal afirmación del teorema espectral para operadores normales es que todo operador normal $T \in B(\mathcal{H})$ induce una resolución de la identidad definida en la σ -álgebra de Borel de su espectro $\sigma(T)$ tal que T se puede representar a partir de E por medio de una integral.

Recordemos que al escribir el espectro $\sigma(T)$ de un operador $T \in B(\mathcal{H})$ siempre nos referimos a todo el álgebra $B(\mathcal{H})$, es decir, $\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si $\lambda I - T$ no tiene inversa en $B(\mathcal{H})$.

El Teorema espectral para operadores normales se obtendrá como un caso particular del siguiente resultado.

TEOREMA 2.27. *Sea \mathcal{A} una subálgebra normal cerrada de $B(\mathcal{H})$ que contiene al operador identidad y \mathcal{F} el espacio de ideales maximales de \mathcal{A} . Entonces,*

- a) *Existe una única resolución de la identidad E definida en la σ -álgebra de Borel de \mathcal{F} que satisface*

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} dE_{x,y} \quad (2.3)$$

para todo $T \in \mathcal{A}$ y $x, y \in \mathcal{H}$, donde \widehat{T} es la transformada de Gelfand de T .

- b) *La inversa de la transformada de Gelfand, es decir, la aplicación que manda \widehat{T} en T se puede extender a un isomorfismo isométrico que preserva la involución $\Phi : L^\infty(E) \rightarrow \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de $B(\mathcal{H})$, definido por*

$$\langle (\Phi f)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} f dE_{x,y}.$$

- c) *\mathcal{B} es la clausura (en la topología de la norma de $B(\mathcal{H})$) del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las proyecciones $E(\Delta)$.*
- d) *Un operador $S \in B(\mathcal{H})$ conmuta con todo operador $T \in \mathcal{A}$ si y solo si S conmuta con toda proyección $E(\Delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $B(\mathcal{H})$ es un C^* -álgebra y \mathcal{A} es una subálgebra normal de $B(\mathcal{H})$, se tiene que \mathcal{A} es un C^* -álgebra conmutativa. Por el Teorema de Gelfand-Naimark, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de \mathcal{A} en $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ que preserva la involución. En particular, como todo elemento de $C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$ es la transformada de Gelfand de algún $T \in \mathcal{A}$ podemos definir un funcional lineal $\mathcal{F} : C(\mathcal{F}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\mathcal{F}(\widehat{T}) = \langle Tx, y \rangle.$$

\mathcal{F} es acotado, ya que $|\mathcal{F}(\widehat{T})| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\| = \|\widehat{T}\|_\infty \|x\| \|y\|.$

Por el Teorema de representación de Riesz existe una única medida de Borel compleja regular $\mu_{x,y}$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \mathcal{F}(\widehat{T}) = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} d\mu_{x,y} \quad (2.4)$$

para $x, y \in \mathcal{H}$ y $T \in \mathcal{A}$.

Ahora, a cada función Borel medible acotada $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ le asociamos un operador $\Phi f \in B(\mathcal{H})$ que satisface la relación

$$\langle (\Phi f)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} f d\mu_{x,y}. \quad (2.5)$$

Si comparamos las ecuaciones (2.4) y (2.5) observamos que $\Phi \widehat{T} = T$, es decir, Φ es una extensión de la inversa de la transformada de Gelfand.

Φ es lineal: Si f, g son dos funciones Borel medibles acotadas y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\lambda f + g)x, y \rangle &= \int_{\mathcal{F}} (\lambda f + g) d\mu_{x,y} = \lambda \int_{\mathcal{F}} f d\mu_{x,y} + \int_{\mathcal{F}} g d\mu_{x,y} \\ &= \lambda \langle (\Phi f)x, y \rangle + \langle (\Phi g)x, y \rangle = \langle (\lambda(\Phi f) + (\Phi g))x, y \rangle. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Gelfand-Naimark, T es autoadjunto si y solo si \widehat{T} es una función real, así que

$$\int_{\mathcal{F}} \widehat{T} d\mu_{x,y} = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \overline{\int_{\mathcal{F}} \widehat{T} d\mu_{y,x}}$$

y esto implica que $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$. Luego,

$$\langle (\Phi \bar{f})x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \bar{f} d\mu_{x,y} = \overline{\int_{\mathcal{F}} f d\mu_{y,x}} = \overline{\langle (\Phi f)y, x \rangle} = \langle x, (\Phi f)y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y por lo tanto $\Phi \bar{f} = (\Phi f)^*$.

Veamos ahora que Φ es multiplicativo, es decir, que

$$\Phi(fg) = (\Phi f)(\Phi g)$$

para f, g funciones Borel medibles acotadas. Si $S, T \in \mathcal{A}$ entonces $(ST)^\wedge = \widehat{S}\widehat{T}$. Luego,

$$\int_{\mathcal{F}} \widehat{S}\widehat{T} d\mu_{x,y} = \langle STx, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{S} d\mu_{Tx,y}$$

esto se cumple para todo $\widehat{S} \in C(\mathcal{F}, \mathbb{C})$. Si reemplazamos \widehat{S} por una función de Borel acotada f entonces

$$\int_{\mathcal{F}} f \widehat{T} d\mu_{x,y} = \int_{\mathcal{F}} f d\mu_{Tx,y} = \langle (\Phi f)Tx, y \rangle = \langle Tx, z \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} d\mu_{x,z}$$

donde $z = (\Phi f)^*y$. Si ahora reemplazamos \widehat{T} por g se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \Phi(fg)x, y \rangle &= \int_{\mathcal{F}} fg \, d\mu_{x,y} = \int_{\mathcal{F}} g \, d\mu_{x,z} = \langle (\Phi g)x, z \rangle \\ &= \langle (\Phi g)x, (\Phi f)^*y \rangle = \langle (\Phi f)(\Phi g)x, y \rangle\end{aligned}$$

y así $\Phi(fg) = (\Phi f)(\Phi g)$.

Definamos ahora la función E de la siguiente manera: Si Δ es un subconjunto de Borel de \mathcal{F} y χ_Δ es su función característica, definimos

$$E(\Delta) = \Phi(\chi_\Delta).$$

$E(\emptyset) = \Phi(0) = 0$ y $E(\mathcal{F}) = \Phi(1)$ y por (2.4) y (2.5) se tiene que

$$\langle \Phi(1)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} d\mu_{x,y} = \langle x, y \rangle$$

de donde $\Phi(1) = I$ y por lo tanto $E(\mathcal{F}) = \Phi(1) = I$. Si Δ y Δ' son dos subconjuntos de Borel de \mathcal{F} entonces

$$E(\Delta \cap \Delta') = \Phi(\chi_{\Delta \cap \Delta'}) = \Phi(\chi_\Delta \chi_{\Delta'}) = \Phi(\chi_\Delta)\Phi(\chi_{\Delta'}) = E(\Delta)E(\Delta').$$

E es finitamente aditiva: Sean $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ conjuntos de Borel de \mathcal{F} disjuntos dos a dos y $\Delta = \cup_{k=1}^n \Delta_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \Phi(\chi_\Delta)x, y \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \chi_\Delta \, d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} d\mu_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} d\mu_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{F}} \chi_{\Delta_k} \, d\mu_{x,y} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \Phi(\chi_{\Delta_k})x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \Phi(\chi_{\Delta_k})x, y \right\rangle\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$, esto demuestra que $E(\Delta) = \Phi(\chi_\Delta) = \sum_{k=1}^n \Phi(\chi_{\Delta_k}) = \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)$.

Por último,

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle = \langle \Phi(\chi_\Delta)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \chi_\Delta \, d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\Delta)$$

para $x, y \in \mathcal{H}$ y todo conjunto de Borel Δ . Como $\mu_{x,y}$ está únicamente determinada por (2.4) se sigue entonces que existe una única resolución de la identidad E (como la definimos) tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} \, dE_{x,y}. \quad (2.6)$$

lo cual demuestra (a).

Por el Teorema 2.25 existe un isomorfismo isométrico $\Psi : L^\infty(E) \rightarrow \mathcal{B}$, donde \mathcal{B} es una subálgebra cerrada de $B(\mathcal{H})$, que satisface la fórmula

$$\langle (\Psi f)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} f dE_{x,y},$$

pero para toda función $f \in L^\infty(E)$ y $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\langle (\Psi f)x, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} f dE_{x,y} = \int_{\mathcal{F}} f d\mu_{x,y} = \langle (\Phi f)x, y \rangle$$

de donde $\Psi = \Phi$. Esto demuestra (b).

(c) se demuestra usando que toda función $f \in L^\infty(E)$ es límite uniforme de funciones simples.

Finalmente, demostremos (d). Sean $S \in B(\mathcal{H})$, $x, y \in \mathcal{H}$ y sea $z = S^*y$. Para $T \in A$ y cualquier conjunto de Borel $\Delta \subset \mathcal{F}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle STx, y \rangle &= \langle Tx, z \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} dE_{x,z}, \\ \langle TSx, y \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \widehat{T} dE_{Sx,y}, \\ \langle SE(\Delta)x, y \rangle &= \langle E(\Delta)x, z \rangle = E_{x,z}(\Delta), \\ \langle E(\Delta)Sx, y \rangle &= E_{Sx,y}(\Delta). \end{aligned}$$

Luego, $ST = TS$ para todo $T \in A$ si y solo si $E_{x,z}(\Delta) = E_{Sx,y}(\Delta)$ y esto ocurre si y solo si $SE(\Delta) = E(\Delta)S$.

Así finalizamos la demostración. ■

Al hablar de operadores en $B(\mathcal{H})$, sabemos que si un par de operadores T, S conmutan entre sí, también conmutarán sus respectivos adjuntos. Sin embargo, lo anterior no implica que S conmute con T^* , ya que, esto solo sucede si T es normal y $T = S$. Más aún, no siempre sucede esta conmutatividad aunque ambos operadores sean normales. Un hecho interesante es que si dos operadores T y S en $B(\mathcal{H})$ conmutan y además alguno de ellos es normal, entonces sí ocurre que S conmuta con T^* , es decir, si T es un operador normal y S otro operador en $B(\mathcal{H})$ tales que $ST = TS$, entonces $T^*S = ST^*$. De hecho, el siguiente teorema es un resultado más general y su demostración se encuentra en [3], Theorem 6.7, p. 278, para este trabajo se usará en la demostración del Teorema Espectral.

TEOREMA 2.28 (Fuglede-Putnam-Rosenblum). Sean $M, N, T \in B(\mathcal{H})$. Si M, N son normales y $MT = TN$, entonces $M^*T = TN^*$.

El teorema espectral es un resultado relevante en la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Nos caracteriza la estructura de los operadores normales a través de su espectro.

Para un operador normal N en un espacio de dimensión finita igual a n el teorema espectral dice que N puede diagonalizarse, recordemos que en este caso, el espectro del operador es el conjunto formado por los autovalores de N . Es decir, que si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son los autovalores de N (repetidos como sus multiplicidades lo indiquen), entonces los autovectores correspondientes e_1, e_2, \dots, e_n forman una base ortonormal para \mathcal{H} .

Para distintos $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ autovalores de N y E_k la proyección ortogonal de \mathcal{H} en el $\ker(N - \lambda_k)$, para $1 \leq k \leq n$, el Teorema Espectral ($\dim(\mathcal{H}) = n$) dice que

$$N = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_k.$$

El Teorema Espectral para operadores normales en espacios de Hilbert de dimensión infinita será una generalización de lo anterior, ya que en dimensión infinita el espectro de N podría no ser un conjunto discreto y la representación viene dada en términos de una integral con respecto a una medida compleja determinada por la existencia de una resolución de la identidad.

TEOREMA 2.29 (El Teorema Espectral). Si $T \in B(\mathcal{H})$ es un operador normal entonces existe una única resolución de la identidad E definida en los subconjuntos de Borel de $\sigma(T)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x,y}(\lambda) \quad (x, y \in \mathcal{H}). \quad (2.7)$$

Además, cada proyección $E(\Delta)$ conmuta con cada operador $S \in B(\mathcal{H})$ que conmute con T .

OBSERVACIÓN 2.30. Algunas veces será conveniente pensar que E está definida en todo subconjunto de Borel de \mathbb{C} , para ello, hacemos $E(\Delta) = 0$ si $\Delta \cap \sigma(T) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{A} la subálgebra cerrada más pequeña de $B(\mathcal{H})$ que contiene a I , T y T^* . Entonces \mathcal{A} es normal porque T lo es. Más aún, \mathcal{A} es un C^* -álgebra conmutativa tal

que los polinomios en T y T^* son densos en \mathcal{A} . Por lo tanto, existe un isomorfismo isométrico $\Psi : C(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$(\Psi f)^\wedge = f \circ \widehat{T}.$$

Además, si $f(\lambda) = \lambda$ en $\sigma(T)$ entonces $\Psi f = T$ y $f \circ \widehat{T} = \widehat{T}$.

Por el Teorema 2.27, existe una única resolución de la identidad E definida en los subconjuntos de Borel de \mathcal{F} (luego en los subconjuntos de Borel de $\sigma(T)$) tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{\mathcal{F}} \widehat{T}(u) dE_{x,y}(u) = \int_{\mathcal{F}} (f \circ \widehat{T})(u) dE_{x,y}(u) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

donde la penúltima igualdad se da por el Teorema de Transformación (Ver [1], Teorema de Transformación, p. 90.) haciendo $\lambda = \widehat{T}(u)$ y sabiendo que $\widehat{T}(\mathcal{F}) = \sigma(T)$.

Por otra parte, si $ST = TS$, entonces el Teorema 2.28 implica que $ST^* = T^*S$. Luego, S conmuta con todo elemento de \mathcal{A} . Por (d) del Teorema 2.27, se sigue que $SE(\Delta) = E(\Delta)S$ para todo subconjunto de Borel $\Delta \subset \sigma(T)$. ■

Antes de enunciar el siguiente teorema, es conveniente recordar un poco acerca de la *topología débil-**. Sea X un espacio normado sobre \mathbb{C} . Se define el *dual topológico de X* como el conjunto:

$$X^* = B(X, \mathbb{C}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es un funcional lineal y acotado}\}.$$

Sea $J : X \rightarrow X^{**}$ la inmersión natural, dada por $J(x) = x^*$, donde $x^*(f) = f(x)$ para toda $f \in X^*$. La *topología débil-** en X^* es la topología débil generada por $J(X)$, una base de la topología débil-* es:

$$\text{Base} := \{N_{**}(f_0, x_1, \dots, x_m, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \mid f_0 \in X^*, x_1, \dots, x_m \in X, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \mathbb{R}^+\}.$$

donde, $N_{**}(f_0, x_1, \dots, x_m, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \{f \in X^* : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \epsilon_k, \forall 1 \leq k \leq m\}$.

La siguiente proposición es importante ya que nos dice que la convergencia en la topología débil-* coincide con la convergencia puntual.

PROPOSICIÓN 2.31. *Sea $f \in X^*$ y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$. Entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en la topología débil-* si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.*

DEFINICIÓN 2.32. Dada una C^* -álgebra con identidad \mathcal{A} , una representación de \mathcal{A} es un par (Π, \mathcal{H}) donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y Π es un homomorfismo que preserva involución.

EJEMPLO 2.33. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y \mathcal{A} es una C^* -subálgebra de $B(\mathcal{H})$ entonces la inclusión $i : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación de \mathcal{A} .

TEOREMA 2.34. Si $N \in B(\mathcal{H})$ es un operador normal con resolución de la identidad E y $\mathcal{B}(\sigma(N))$ es la C^* -álgebra de todas las funciones de Borel acotadas en $\sigma(N)$, entonces la aplicación $\Pi : \mathcal{B}(\sigma(N)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ dada por

$$\Pi(\phi) = \phi(N) \quad (\phi \mapsto \phi(N))$$

es una representación de la C^* -álgebra $\mathcal{B}(\sigma(N))$.

Además, si $\{\phi_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{B}(\sigma(N))$ es tal que $\int \phi_i d\mu \rightarrow 0$ en la topología débil- $*$ para toda medida μ en $\mathcal{M}(\sigma(N))$, entonces $\phi_i(N) \rightarrow 0$ en la WOT.

Esta aplicación es única en el sentido de que si $\tau : \mathcal{B}(\sigma(N)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación tal que $\tau(id) = N$ ($id(z) = z$ es la función identidad) y $\tau(\phi_i) \rightarrow 0$ en la WOT cuando $\{\phi_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{B}(\sigma(N))$ satisface que $\int \phi_i d\mu \rightarrow 0$ en la topología débil- $*$ para toda medida μ en $\mathcal{M}(\sigma(N))$, entonces $\tau(\phi) = \phi(N)$ para toda $\phi \in \mathcal{B}(\sigma(N))$.

DEMOSTRACIÓN. Ver ([3], Theorem 2.3, p. 264). ■

El teorema previo será de mucha utilidad para poder calcular explícitamente la resolución de la identidad asociada a ciertos operadores que estudiaremos en el capítulo 3.

Combinando la existencia de la resolución de la identidad E que nos garantiza el Teorema Espectral y la Definición 1.9, nos interesa el estudio de las medidas que son equivalentes a E y para eso tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.35. Sea N un operador normal y E su resolución de la identidad asociada. Llamamos *medida espectral* para N a una medida de Borel positiva μ en $\sigma(N)$ que satisface la condición de que μ es equivalente a E , es decir, $\mu(\Delta) = 0$ si y solo si $E(\Delta) = 0$, para Δ subconjunto de Borel de $\sigma(N)$.

Equivalencia unitaria de operadores normales

En este capítulo veremos de manera cercana una de las conexiones que posee el análisis funcional con la teoría de la medida. Estudiaremos los resultados necesarios sobre operadores normales en espacios de Hilbert que nos darán una clara idea del problema de la equivalencia unitaria entre operadores, gran parte de esta construcción se plantea en el libro de John B. Conway *A course in functional analysis*.

Estudiaremos bajo qué condiciones dos operadores de multiplicación son unitariamente equivalentes, para poder hacer una descomposición en suma directa de dichos operadores y ver así cuando esta descomposición es unitariamente equivalente a un operador normal N cualquiera.

Finalmente, obtener un resultado que nos permita concluir la equivalencia unitaria entre dos operadores normales cualesquiera.

1. Equivalencia unitaria de operadores de multiplicación

Iniciaremos este capítulo con la definición de vector cíclico-* para un operador, para ello es necesario dar las definiciones de subespacio invariante y subespacio reductor por un operador.

DEFINICIÓN 3.1. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, \mathcal{M} un subespacio cerrado de \mathcal{H} y $T \in B(\mathcal{H})$. Decimos que \mathcal{M} es un subespacio *invariante* si $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Decimos que \mathcal{M} es un subespacio *reductor* si $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{M}^\perp$.

DEFINICIÓN 3.2. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$. Un vector e_0 en \mathcal{H} es *cíclico-** si \mathcal{H} es el subespacio reductor más pequeño que contiene a e_0 . El operador T es *cíclico-** si existe un vector cíclico-* en \mathcal{H} . Un vector e_0 en \mathcal{H} es *cíclico* si \mathcal{H} es el subespacio invariante más pequeño que contiene a e_0 . El operador T es *cíclico* si existe un vector cíclico en \mathcal{H} .

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que un vector sea cíclico-* o cíclico para un operador. Estas condiciones vienen dadas por la estructura del espacio de Hilbert en cuestión.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$.*

- a) *Un vector $e_0 \in \mathcal{H}$ es cíclico-* si y solo si $\mathcal{H} = \overline{\{Se_0 : S \in C^*(T)\}}$ donde $C^*(T)$ es la C^* -álgebra generada por T .*
- b) *Un vector $e_0 \in \mathcal{H}$ es un vector cíclico si y solo si $\mathcal{H} = \overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}}$.*

DEMOSTRACIÓN.

- a) (\Rightarrow) Supongamos que $\mathcal{H} \neq \overline{\{Te_0 : T \in C^*(T)\}}$. Queremos ver que e_0 no es un vector cíclico-*, es decir, que existe \mathcal{M} subespacio propio cerrado de \mathcal{H} tal que $e_0 \in \mathcal{M}$, $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{M}^\perp$.

Sea $\mathcal{M} = \overline{\{Se_0 : S \in C^*(T)\}}$. Como $I \in C^*(T)$ y $Ie_0 = e_0$, tenemos que $e_0 \in \mathcal{M}$. Ahora bien, si $z \in \mathcal{M}$ existe una sucesión $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^*(T)$ tal que $z = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n e_0$. Luego, $Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} TS_n e_0$ y como $TS_n \in C^*(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $Tz \in \mathcal{M}$. Por lo tanto, $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Veamos ahora que $T(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{M}^\perp$. Sea $w \in \mathcal{M}$ y $h \in \mathcal{M}^\perp$ entonces $\langle Th, w \rangle = \langle h, T^*w \rangle$.

Como $w \in \mathcal{M}$ se puede escribir en la forma $w = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n e_0$ para una sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^*(T)$, luego, $T^*w = \lim_{n \rightarrow \infty} T^*T_n e_0 \in \mathcal{M}$ ya que $T^*T_n \in C^*(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $Th \in \mathcal{M}^\perp$ para todo $h \in \mathcal{M}^\perp$.

(\Leftarrow) Supongamos que e_0 no es un vector cíclico-*, es decir, existe \mathcal{M} subespacio propio cerrado de \mathcal{H} tal que $e_0 \in \mathcal{M}$, $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{M}^\perp$. Queremos ver que $\mathcal{H} \neq \overline{\{Se_0 : S \in C^*(T)\}}$

Vamos a demostrar que $\overline{\{Se_0 : S \in C^*(T)\}} \subseteq \mathcal{M}$. Para ello vamos a demostrar que $S(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo S en $C^*(T)$. Como $T(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{M}^\perp$ se tiene que $\langle T^*h, g \rangle = \langle h, Tg \rangle = 0$, para todo $h \in \mathcal{M}$ y $g \in \mathcal{M}^\perp$, y por lo tanto $T^*h \in \mathcal{M}$. Esto demuestra que $T^*(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Tenemos hasta ahora que T y T^* dejan invariante al subespacio \mathcal{M} . Como \mathcal{M} es un subespacio lineal cerrado cualquier polinomio $P(T, T^*)$ también deja invariante

a \mathcal{M} y en consecuencia todo operador T que sea límite de polinomios en T y T^* también satisface la misma propiedad.

Entonces, como $e_0 \in \mathcal{M}$, tendremos que $Se_0 \in \mathcal{M}$ para todo S en $C^*(T)$, así:

$$\overline{\{Se_0 : S \in C^*(T)\}} \subseteq \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \subset \mathcal{H}.$$

b) (\Rightarrow) Supongamos que $\mathcal{H} \neq \overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}}$. Queremos ver que e_0 no es un vector cíclico, es decir, que existe \mathcal{M} subespacio propio cerrado de \mathcal{H} tal que $e_0 \in \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Veamos que $\mathcal{M} = \overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}}$ es el subespacio que buscamos. Observamos primero que $e_0 \in \mathcal{M}$, pues $I = T^0$ es el polinomio identidad y $Ie_0 = e_0$.

Ahora bien, si $z \in \mathcal{M}$ entonces existe una sucesión $\{p_n(T)e_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T)e_0$. Luego, $Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} Tp_n(T)e_0$ y como $Tp_n(T)$ es un polinomio en T para todo $n \in \mathbb{N}$ concluimos que $Tz \in \mathcal{M}$, que es lo que queríamos probar.

(\Leftarrow) Para ver el recíproco, supongamos que e_0 no es un vector cíclico, es decir, existe \mathcal{M} subespacio propio cerrado de \mathcal{H} , tal que $e_0 \in \mathcal{M}$ y $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Queremos ver que $\mathcal{H} \neq \overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}}$.

Basta ver que $\overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}} \subseteq \mathcal{M}$. Tenemos que T deja invariante al subespacio \mathcal{M} . Como \mathcal{M} es un subespacio lineal cerrado, cualquier polinomio $p(T)$ también deja invariante a \mathcal{M} , por lo que $p(T)(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Ahora, como $e_0 \in \mathcal{M}$, tendremos que $p(T)e_0 \in \mathcal{M}$ para cualquier polinomio $p(T)$. Por lo tanto, $\overline{\{p(T)e_0 : p \text{ es un polinomio}\}} \subseteq \mathcal{M} = \mathcal{M} \subset \mathcal{H}$.

■

En la siguiente proposición se introduce el operador de multiplicación por la variable independiente y se estudian algunas de sus propiedades.

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea μ una medida de Borel regular en \mathbb{C} con soporte compacto K y definimos $N_\mu : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ por $(N_\mu f)(z) = zf(z)$. Entonces N_μ es un operador normal que satisface las siguientes propiedades:*

- $\sigma(N_\mu) = K$.
- Si $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de Borel acotada y $M_\phi : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ es el operador definido por $M_\phi f = \phi f$, entonces $\phi(N_\mu) = M_\phi$.

- c) Si E es la resolución de la identidad para N_μ , entonces $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$, donde χ_Δ es la función característica de Δ .
- d) Una función $f \in L^2(\mu)$ es un vector cíclico- $*$ para N_μ entonces $f(z) \neq 0$ c.s. $[\mu]$.

DEMOSTRACIÓN. Primero hallamos N_μ^* y vemos que N_μ es normal. Sean $f, g \in L^2(\mu)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle f, N_\mu^* g \rangle &= \langle N_\mu f, g \rangle = \int_K N_\mu f(z) \overline{g(z)} d\mu(z) = \int_K z f(z) \overline{g(z)} d\mu(z) \\ &= \int_K f(z) z \overline{g(z)} d\mu(z) \\ &= \int_K f(z) \overline{z g(z)} d\mu(z) \end{aligned}$$

de donde $N_\mu^* g(z) = \overline{z} g(z)$.

Además,

$$\begin{aligned} N_\mu^*(N_\mu f)(z) &= \overline{z} N_\mu f(z) = \overline{z} z f(z) = |z|^2 f(z) \\ N_\mu(N_\mu^* f)(z) &= z N_\mu^* f(z) = z \overline{z} f(z) = |z|^2 f(z) \end{aligned}$$

lo cual demuestra que N_μ es normal.

Veamos que se cumple a): Sea $\lambda \in K = \text{supp } \mu$. Como μ es una medida regular, $\mu(F) < \infty$ para todo subconjunto compacto de \mathbb{C} , en particular, $\mu(\overline{B(\lambda, r)}) < \infty$ para cada $r > 0$.

Si $f_r = \chi_{\overline{B(\lambda, r)}} \in L^2(\mu)$ entonces $\|f_r\|_2 \neq 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|(N_\mu - \lambda I)f_r\|_2 &= \left(\int_K |(N_\mu - \lambda I)f_r(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_K |z - \lambda|^2 |f_r(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(r^2 \int_K |f_r(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \\ &\leq r \|f_r\|_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda \in \sigma(N_\mu)$, pues de lo contrario, si $\lambda \in \rho(N_\mu)$, existiría una constante $m > 0$ tal que

$$\|(N_\mu - \lambda I)f\| \geq m \|f\|$$

para toda $f \in L^2(\mu)$. Así, $K \subseteq \sigma(N_\mu)$.

Para demostrar que $\sigma(N_\mu) \subseteq K$, supongamos que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K$, entonces existe $r > 0$ tal que $\mu(\overline{B(\lambda, r)}) = 0$ y la función $g(z) = \frac{1}{z-\lambda}$ está uniformemente acotada por $1/r$ en K , esto es, si $z \in K$ entonces $|z - \lambda| \geq r$ y

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{z-\lambda} \right| = \frac{1}{|z-\lambda|} \leq \frac{1}{r}.$$

Entonces el operador $M_g f(z) = g(z)f(z) = \frac{f(z)}{z-\lambda}$ es acotado en $L^2(\mu)$, ya que

$$\|M_g f\|_2^2 = \int_K |g(z)|^2 |f(z)|^2 d\mu = \int_K |z-\lambda|^{-2} |f(z)|^2 d\mu \leq r^{-2} \|f\|^2.$$

Finalmente, tenemos que

$$(N_\mu - \lambda I)M_g f(z) = (z - \lambda) \frac{f(z)}{z - \lambda} = f(z)$$

y

$$M_g(N_\mu - \lambda I)f(z) = \frac{1}{z - \lambda}(z - \lambda)f(z) = f(z)$$

de donde $N_\mu - \lambda I$ es un operador inversible con inversa acotada M_g , es decir, $\lambda \in \rho(N_\mu)$. Luego, tomando complementos se obtiene que $\sigma(N_\mu) \subseteq K$.

Veamos b). Sea $\eta : \mathcal{B}(\sigma(N_\mu)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ dada por $\eta(\phi) = M_\phi$ y sea $\{\phi_i\} \subset \mathcal{B}(\sigma(N_\mu))$ una red ϕ_i converge a 0 en la topología débil-*, i.e. $\phi_i(z) \rightarrow 0$ para todo $z \in \sigma(N_\mu)$. Entonces $\eta(\phi_i) \rightarrow 0$ en WOT, ya que

$$\langle M_{\phi_i} f, g \rangle = \int \phi_i(z) f(z) \overline{g(z)} d\mu \rightarrow 0$$

para $f, g \in L^2(\mu)$. Además, $\eta(id) = N_\mu$ ($id(z) = z$ es la función identidad). Por la unicidad de la representación de $\mathcal{B}(\sigma(N_\mu))$ dada en el Teorema 2.34, podemos concluir que $\phi(N_\mu) = M_\phi$ para toda $\phi \in \mathcal{B}(\sigma(N_\mu))$.

Ahora demostremos c). Si Δ es un boreliano de $\sigma(N_\mu)$ entonces

$$\langle \chi_\Delta(N_\mu) f, g \rangle = \int_{\sigma(N_\mu)} \chi_\Delta(z) dE_{f,g}(z) = E_{f,g}(\Delta) = \langle E(\Delta) f, g \rangle$$

para $f, g \in L^2(\mu)$ cualesquiera. En consecuencia, $E(\Delta) = M_{\chi_\Delta}$, ya que, por b) se cumple que $M_{\chi_\Delta} = \chi_\Delta(N_\mu)$.

Por último demostramos d). Supongamos que $f(x) = 0$ en un conjunto de medida positiva A entonces existe un conjunto de medida finita $B \subset A$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in B$. Notemos que

$$\overline{\{\phi \cdot f : \phi \in C(K)\}} \subset \{g \in L^2 : g(x) = 0 \text{ c.s.}[\mu]x \in B\} \subset L^2(\mu)$$

ya que, por ejemplo $\chi_B \in L^2(\mu)$ pero $\chi_B \notin \{g \in L^2 : g(x) = 0 \text{ c.s.}[\mu]x \in B\}$. Esto muestra que f no es un vector cíclico-* para N_μ . ■

En la siguiente proposición definimos el operador de multiplicación por una función en $L^\infty(\mu)$, calculamos su espectro y su resolución de la identidad asociada.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida y $\mathcal{H} = L^2(X, \Omega, \mu)$. Para $\phi \in L^\infty(\mu) \equiv L^\infty(X, \Omega, \mu)$, se define el operador $M_\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por $(M_\phi f)(z) = \phi(z)f(z)$. Entonces*

- a) M_ϕ es normal y $M_\phi^* = M_{\bar{\phi}}$.
- b) Si $\phi \in L^\infty(\mu)$, $\|\phi\|_\infty = \|M_\phi\|$.
- c) $\sigma(M_\phi) = \text{Ran ess}(\phi) := \bigcap \left\{ \overline{\phi(\Delta)} : \Delta \in \Omega \text{ y } \mu(X \setminus \Delta) = 0 \right\}$.
- d) Si E es la resolución de la identidad para M_ϕ , entonces para todo subconjunto de Borel Δ de $\sigma(M_\phi)$, tenemos que $E(\Delta) = M_{\chi_{\phi^{-1}(\Delta)}}$.

Al operador M_ϕ se le conoce como el operador de multiplicación por la función ϕ .

DEMOSTRACIÓN.

- a) Sean $f, g \in L^2(\mu)$, entonces

$$\langle f, M_\phi^* g \rangle = \langle M_\phi f, g \rangle = \int \phi(t) f(t) \overline{g(t)} d\mu(t) = \int f(t) \overline{\phi(t) g(t)} d\mu(t).$$

Así, $M_\phi^* g = \bar{\phi} g = M_{\bar{\phi}} g$.

- b) Sea $\phi \in L^\infty(\mu)$ y veamos primero que $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Como $\|\phi\|_\infty$ es el ínfimo de todos los $a > 0$ tal que $|\phi(x)| \leq a$ c.s. $[\mu]$, tenemos que

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_\infty.$$

Por lo tanto, podemos asumir que ϕ es una función medible y acotada. Además, $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_\infty$ para todo $x \in X$.

Entonces si $f \in L^2(\mu)$, tenemos que

$$\|M_\phi f\|_2^2 = \int |\phi(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \leq \|\phi\|_\infty^2 \int |f(x)|^2 d\mu(x) = \|\phi\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Así, tomando supremo sobre $f \in L^2(\mu)$ con $\|f\|_2 \leq 1$ implica que

$$\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty.$$

Más aún, $M_\phi \in B(\mathcal{H})$. Veamos ahora que $\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_\infty$. Para $\epsilon > 0$ existe un $\Delta \in \Omega$ con $0 < \mu(\Delta) < \infty$ tal que

$$|\phi(x)| \geq \|\phi\|_\infty - \epsilon, \quad \text{para } x \in \Delta. \quad (3.1)$$

Por otro lado, si escogemos $f = \frac{1}{\sqrt{\mu(\Delta)}} \chi_\Delta$, entonces $f \in L^2(\mu)$, ya que

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} = \left(\int_X \frac{1}{\mu(\Delta)} \chi_\Delta(x) d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\mu(\Delta)}{\mu(\Delta)} \right)^{1/2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, para esta $f \in L^2(\mu)$ y usando (3.1) tenemos que

$$\|M_\phi\|^2 \geq \|\phi f\|_2^2 = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta |\phi(x)|^2 d\mu(x) \geq (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^2.$$

Haciendo $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera obtenemos que $\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_\infty$.

Finalmente,

$$\|\phi\|_\infty = \|M_\phi\|.$$

c) Veamos que $\sigma(M_\phi) \subseteq \text{Ran ess}(\phi)$. Para ello supongamos que $\lambda \notin \text{Ran ess}(\phi)$, entonces existe un conjunto Δ en Ω con $\mu(X \setminus \Delta) = 0$ tal que $\lambda \notin \overline{\phi(\Delta)}$. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \lambda| \geq \delta, \quad \text{para todo } x \in \Delta.$$

Tomando $\psi = (\phi - \lambda)^{-1}$, entonces $\psi \in L^\infty(\mu)$, pues ψ es esencialmente acotada en todo X recordar que $\mu(X \setminus \Delta) = 0$.

Por lo tanto, $M_\psi = (M_\phi - \lambda)^{-1}$. Ya que para $f \in L^2(\mu)$, tenemos que

$$(M_\phi - \lambda)(M_\psi(f))(x) = (M_\phi - \lambda)(\psi(x)f(x)) = \frac{\phi(x)f(x) - \lambda f(x)}{\phi(x) - \lambda} = f(x)$$

$$(M_\psi)(M_\phi - \lambda(f))(x) = M_\psi(\phi(x)f(x) - \lambda f(x)) = \frac{\phi(x)f(x) - \lambda f(x)}{\phi(x) - \lambda} = f(x).$$

Lo anterior implica que M_ψ es el inverso de $M_\phi - \lambda$. Entonces $\lambda \notin \sigma(M_\phi)$.

Veamos ahora que $\text{Ran ess}(\phi) \subseteq \sigma(M_\phi)$. Sea $\lambda \in \text{Ran ess}(\phi)$, entonces para $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto Δ_n tal que $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$ y $|\phi(x) - \lambda| < 1/n$, para todo $x \in \Delta_n$. Escogiendo $f_n = \frac{1}{\sqrt{\mu(\Delta_n)}}\chi_{\Delta_n}$, entonces $f_n \in L^2(\mu)$ y $\|f_n\|_2 = 1$ (análogo al ítem b)).

Sin embargo, tenemos que

$$\|(M_\phi - \lambda)f_n\|_2^2 = \frac{1}{\mu(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} |\phi(x) - \lambda|^2 d\mu(x) \leq 1/n^2.$$

Lo que demuestra que $\lambda \in \sigma(M_\phi)$.

- d) Dada $\phi \in L^\infty(\mu)$ fija. Sea $\tau : \mathcal{B}(\sigma(M_\phi)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ dada por $\tau(\varphi) = M_{\varphi \circ \phi}$ y sea $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{B}(\sigma(M_\phi))$ una red φ_i converge a 0 en la topología débil-*, i.e. $\varphi_i(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in \sigma(M_\phi) = \text{Ran ess}(\phi)$. Entonces $\tau(\varphi_i) \rightarrow 0$ en WOT, ya que

$$\langle M_{\varphi_i \circ \phi} f, g \rangle = \int \varphi_i(\phi(x)) f(x) \overline{g(x)} d\mu \rightarrow 0$$

para $f, g \in L^2(\mu)$. Además, $\tau(id) = M_\phi$, si $id(x) = x$ es la función identidad. Por la unicidad de la representación de $\mathcal{B}(\sigma(M_\phi))$ del Teorema 2.34, concluimos que $\varphi(M_\phi) = M_{\varphi \circ \phi}$ para toda $\varphi \in \mathcal{B}(\sigma(M_\phi))$. En particular, si $\varphi = \chi_\Delta$ para algún Δ boreliano de $\sigma(M_\phi)$, entonces

$$\tau(\chi_\Delta) = \chi_\Delta(M_\phi) = M_{\chi_\Delta \circ \phi} = M_{\chi_{\phi^{-1}(\Delta)}}.$$

La última igualdad se sigue observando que

$$(\chi_\Delta \circ \phi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x) \in \Delta \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \phi^{-1}(\Delta) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \chi_{\phi^{-1}(\Delta)}(x).$$

Ahora bien. Si Δ es un boreliano de $\sigma(M_\phi)$, tenemos que

$$\langle \chi_\Delta(M_\phi) f, g \rangle = \int_{\sigma(M_\phi)} \chi_\Delta(\phi(x)) dE_{f,g}(x) = \int_\Delta dE_{f,g}(x) = E_{f,g}(\Delta) = \langle E(\Delta) f, g \rangle.$$

para $f, g \in L^2(\mu)$ cualesquiera. Finalmente, tenemos que $E(\Delta) = M_{\chi_{\phi^{-1}(\Delta)}}$, ya que, por lo anterior se cumple que $M_{\chi_{\phi^{-1}(\Delta)}} = \chi_\Delta(M_\phi)$.



A continuación veremos un par de ejemplos de operadores, uno de multiplicación, otro de traslación y hallaremos sus respectivos espectros.

EJEMPLO 3.6. Sea μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y $N : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ el operador definido por $(Nf)(x) = \sin(x)f(x)$.

Veamos que N es un operador autoadjunto. Sean $f, g \in L^2(\mu)$, entonces:

$$\langle f, N^*g \rangle = \langle Nf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} (Nf)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(x)f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\sin(x)g(x)} dx$$

Por lo tanto, $(N^*g)(x) = \sin(x)g(x)$, lo que significa que N es un operador autoadjunto.

Por el ítem c) de la Proposición 3.5, tenemos que

$$\sigma(N) = \text{Ran ess}(\sin(x)) = [-1, 1].$$

EJEMPLO 3.7. Consideremos el operador de traslación $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por $(Tf)(t) = f(t-1)$. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\langle f, T^*g \rangle = \langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} (Tf)(t) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-1) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{g(s+1)} ds.$$

de donde, $(T^*g)(t) = g(t+1)$. Observamos que T es un operador unitario pues $T^* = T^{-1}$.

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{F}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixt} dx$$

también es un operador unitario y por lo tanto, T y $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ tienen el mismo espectro.

Por propiedades de la transformada de Fourier se tiene que

$$(\mathcal{F}Tf)(t) = e^{-2\pi it} \mathcal{F}f(t) \tag{3.2}$$

y así $(\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1})f(t) = e^{-2\pi it} f(t)$, es decir, $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ es el operador de multiplicación por $e^{-2\pi it}$.

Entonces

$$\sigma(T) = \sigma(\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \partial\mathbb{D}. \tag{3.3}$$

Por el ítem d) de la Proposición 3.5, sabemos que la resolución de la identidad asociada a $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ es

$$E(\Delta) = M_{\chi_{\phi^{-1}(\Delta)}}, \quad \text{para todo } \Delta \in \sigma(T)$$

donde $\phi(t) = e^{-2\pi it}$.

La siguiente proposición nos ayuda a entender como es el espectro del operador suma directa de la Definición 1.34.

PROPOSICIÓN 3.8. *Para $i \geq 1$, sea N_i un operador normal en \mathcal{H}_i con $\sup_{i \geq 1} \|N_i\| < \infty$ y E_i es la resolución de la identidad para N_i . Si $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$ en $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$, entonces:*

- a) $\sigma(N) = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)}$.
- b) *Si E es la resolución de la identidad para N , entonces $E(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))$ para todo subconjunto de Borel Δ de $\sigma(N)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Para esta proposición demostraremos primero que si $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ está dado por $T = \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$ donde $T_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces T es invertible si y solo si T_i es invertible para todo $i \in \mathbb{N}$.

(\Rightarrow) Supongamos que T es invertible, es decir, existe un operador $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $TS = ST = I$ y $S_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$. Sea $x_j \in \mathcal{H}_j$ y consideremos la sucesión $x = \{\dots, 0, x_j, 0, \dots\}$ y veamos que T_j es invertible. Supongamos que $T_j x_j = 0$. Entonces

$$Tx = \{T_i x_i\} = \{\dots, 0, T_j x_j, 0, \dots\} = \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Así como T es inyectivo $x = 0$ y por lo tanto $x_j = 0$, es decir, T_j es inyectivo.

Para la sobreyectividad debemos ver que para todo $y_j \in \mathcal{H}_j$ existe $x_j \in \mathcal{H}_j$ tal que $T_j x_j = y_j$, pero sabemos que T ser invertible, en particular, es sobreyectivo. Por lo que para todo $y \in \mathcal{H}$ existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $Tx = y$, por definición ocurre que $\{T_i x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, lo cual solo ocurre si y solo si $T_j x_j = y_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

(\Leftarrow) Supongamos que $T_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ es invertible para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sean $x, y \in \mathcal{H}$ tales que $Tx = Ty$, esto es por definición que $\{T_i x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{T_i y_i\}_{i=1}^{\infty}$, pero cada T_i es inyectivo. Por lo que $x_j = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Así $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} = y$.

Para ver la sobreyectividad, queremos ver que para todo $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $Tx = y$. Así como T_i es invertible para cada $i \in \mathbb{N}$, escogemos $x = \{T_i^{-1} y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces

$$Tx = \{T_i T_i^{-1} y_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\dots, T_j T_j^{-1} y_j, \dots\} = \{\dots, y_j, \dots\} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} = y.$$

Es decir, T es sobreyectivo y finalmente invertible.

Demostrado lo anterior y sin pérdida de generalidad, para $\lambda \in \mathbb{C}$, tomamos $T = \lambda I - N$ y $T_i = \lambda I - N_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora vamos a probar que:

$$\sigma(N) = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)}. \quad (3.4)$$

Veamos, si $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)$, entonces $\lambda \in \sigma(N_i)$, para algún $i \in \mathbb{N}$, esto es que $\lambda I - N_i$ no es invertible, para algún $i \in \mathbb{N}$. Pero por lo demostrado anteriormente tenemos que $\lambda I - N$ no es invertible, es decir, $\lambda \in \sigma(N)$, y como $\sigma(N)$ es compacto se tiene que $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)} \subseteq \sigma(N)$. Ahora bien, si $\lambda \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)}$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $|\lambda - z| \geq \delta$ para todo $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(N_i)$, por lo tanto $(N_i - \lambda)^{-1}$ existe y $\|(N_i - \lambda)^{-1}\| \leq 1/\delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pero si llamamos $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (N_i - \lambda)^{-1}$, entonces A es un operador acotado y se sigue que $A = (N - \lambda)^{-1}$, es decir que $\lambda \notin \sigma(N)$. Finalmente hemos demostrado 3.4.

Ahora bien, para ver (b), sea E_i la resolución de la identidad asociada a cada N_i y para todo subconjunto de Borel Δ de $\sigma(N)$, definimos $E'(\Delta)$ como

$$E'(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))$$

y vamos a demostrar que E' es una resolución de la identidad. Sea $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, observamos que

$$E'(\mathbb{C})h = \{E_i(\mathbb{C} \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{E_i(\sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = h.$$

$$E'(\emptyset)h = \{E_i(\emptyset \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{E_i(\emptyset)h_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{0\}_{i \in \mathbb{N}} = 0.$$

Entonces sucede que $E'(\mathbb{C}) = I$ y $E'(\emptyset) = 0$. Ahora bien, sabemos que cada $E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))$ es una proyección con rango en \mathcal{H}_i entonces $E'(\Delta)$ define una proyección en $B(\mathcal{H})$.

En efecto, Sea $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ y $\Delta \in \Omega$ fijo, entonces

$$\begin{aligned} (E'(\Delta))^2 h &= E'(\Delta)(E'(\Delta)h) = E'(\Delta)(\{E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}}) \\ &= \{(E_i(\Delta \cap \sigma(N_i)))^2 h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\ &= \{E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\ &= E'(\Delta)h \end{aligned}$$

Sean Δ_1 y Δ_2 dos subconjuntos de Borel de $\sigma(N)$ y $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
E'(\Delta_1 \cap \Delta_2)h &= \{E_i((\Delta_1 \cap \Delta_2) \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \{E_i((\Delta_1 \cap \sigma(N_i)) \cap (\Delta_2 \cap \sigma(N_i)))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \{E_i(\Delta_1 \cap \sigma(N_i)) \cdot E_i(\Delta_2 \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= E'(\Delta_1)(\{E_i(\Delta_2 \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}}) \\
&= E'(\Delta_1)E'(\Delta_2)h.
\end{aligned}$$

Nuevamente, sean Δ_1 y Δ_2 dos subconjuntos de Borel de $\sigma(N)$, tales que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, entonces para $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H} , ocurre que

$$\begin{aligned}
E'(\Delta_1 \cup \Delta_2)h &= \{E_i((\Delta_1 \cup \Delta_2) \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \{E_i((\Delta_1 \cap \sigma(N_i)) \cup (\Delta_2 \cap \sigma(N_i)))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \{(E_i(\Delta_1 \cap \sigma(N_i)) + E_i(\Delta_2 \cap \sigma(N_i)))h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \{(E_i(\Delta_1 \cap \sigma(N_i))h_i)\}_{i \in \mathbb{N}} + \{(E_i(\Delta_2 \cap \sigma(N_i))h_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= (E'(\Delta_1) + E'(\Delta_2))h.
\end{aligned}$$

Veamos la σ -aditividad de $E'_{h,g}(\Delta) = \langle E'(\Delta)h, g \rangle$. Ya que para $h = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $g = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H} , ocurre lo siguiente:

$$E'_{h,g}(\emptyset) = \langle E'(\emptyset)h, g \rangle = \langle \{E_i(\emptyset \cap \sigma(N_i))h_i\}, g \rangle = \langle \{E_i(\emptyset)h_i\}, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0.$$

Por lo que si $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle E'(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j)h, g \rangle &= \langle \{E_i((\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j) \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}}, g \rangle \\
&= \left\langle \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} E_i(\Delta_j \cap \sigma(N_i))h_i \right\}, g \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \{E_i(\Delta_j \cap \sigma(N_i))h_i\}_{i \in \mathbb{N}}, g \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} E'(\Delta_j)h, g \right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces $E'_{h,g}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} E'_{h,g}(\Delta_j)$ y así E' es una resolución de la identidad.

Ahora bien, sea M el operador asociado a E' por el Teorema Espectral, es decir, para $x, y \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\sigma(M)} \lambda dE'(\lambda).$$

En particular, si $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$, y elegimos $x = \{\dots, 0, x_i, 0, \dots\}$ y $y = \{\dots, 0, y_i, 0, \dots\}$ entonces

$$\langle Mx, y \rangle = \int_{\sigma(M)} \lambda dE'_{x,y}(\lambda) = \int_{\sigma(N_i)} \lambda d(E_i)_{x_i, y_i}(\lambda) = \langle N_i x_i, y_i \rangle,$$

donde la igualdad de las integrales se deduce observando que para todo conjunto de Borel Δ de $\sigma(M)$ vale que

$$E'_{x,y}(\Delta) = \langle E'(\Delta)x, y \rangle = \langle E_i(\Delta \cap \sigma(N_i))x_i, y_i \rangle = (E_i)_{x_i, y_i}(\Delta). \quad (3.5)$$

Por lo tanto $M = N_i$ en \mathcal{H}_i para todo $i \in \mathbb{N}$ y como $N|_{\mathcal{H}_i} = N_i$ por definición, tenemos que $M = N$. Finalmente, por la unicidad de la resolución de la identidad dada por el Teorema espectral se tiene que $E' = E$. ■

El siguiente teorema nos proporciona condiciones para la equivalencia unitaria entre el operador de multiplicación definido en la Proposición 3.4 y un operador normal cíclico-* cualquiera.

TEOREMA 3.9. *Un operador normal $N \in B(\mathcal{H})$ es cíclico-* si y solo si N es unitariamente equivalente a N_μ para alguna medida μ compactamente soportada en \mathbb{C} . Si e_0 es un vector cíclico-* para N , entonces μ se puede escoger de manera tal que exista un isomorfismo $V : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ con $Ve_0 = 1$ y $VNV^{-1} = N_\mu$. Bajo estas condiciones V es único.*

DEMOSTRACIÓN. Sean μ una medida en \mathbb{C} con $K = \text{supp } \mu$ compacto y N_μ el operador definido como en la Proposición 3.4. Supongamos que N es unitariamente equivalente a N_μ , es decir, existe un isomorfismo $V : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ tal que $Ve_0 = 1$ y $VNV^{-1} = N_\mu$.

Queremos ver que N es cíclico-*, para ello vamos a usar el ítem a) de la Proposición 3.3. Notemos que el C^* -álgebra generada por N_μ ($C^*(N_\mu)$), contiene a N_μ , N_μ^* , $p(N_\mu, N_\mu^*)$ que son de la forma

$$p(N_\mu, N_\mu^*) = \sum_{j,k} a_{j,k} N_\mu^j N_\mu^{*k} = \sum_{j,k} a_{j,k} z^j \bar{z}^k.$$

y al tomar límites uniformes obtenemos que podemos escribir $C^*(N_\mu) = \{M_u : u \in C(K)\}$, donde $C(K)$ es el conjunto de las funciones continuas definidas en K y $M_u : L^2(\mu) \mapsto L^2(\mu)$ está dado por $M_u f(z) = u(z)f(z)$.

Como $C(K)$ es denso en $L^2(\mu)$, se tiene que

$$\overline{\{T(1) : T \in C^*(N_\mu)\}} = \overline{\{M_u(1) : u \in C(K)\}} = \overline{C(K)} = L^2(\mu),$$

es decir, 1 es un vector cíclico-* para N_μ .

Usando que $N = V^{-1}N_\mu V$, obtenemos que la C^* -álgebra generada por N es el conjunto

$$C^*(N) = \{V^{-1}M_u V : u \in C(K)\}.$$

En consecuencia,

$$\overline{\{T e_0 : T \in C^*(N)\}} = \overline{\{V^{-1}M_u V e_0 : u \in C(K)\}} = V^{-1} \left(\overline{\{M_u(1) : u \in C(K)\}} \right) = \mathcal{H}.$$

Recíprocamente, supongamos que e_0 es un vector cíclico-* para N . Si E es la resolución de la identidad para N , definamos $\mu(\Delta) = \|E(\Delta)e_0\|^2 = \langle E(\Delta)e_0, e_0 \rangle$ para todo subconjunto de Borel Δ de \mathbb{C} .

Sea $K = \text{supp } \mu$.

Si $\mathcal{B}(K)$ es el conjunto de todas las funciones de Borel acotadas definidas en K y $U : \mathcal{B}(K) \rightarrow \mathcal{H}$ está dado por $U\phi = \phi(N)e_0$, entonces U define un operador lineal isométrico, ya que

$$\begin{aligned} \|U\phi\|^2 &= \|\phi(N)e_0\|^2 = \langle \phi(N)e_0, \phi(N)e_0 \rangle = \langle |\phi|^2(N)e_0, e_0 \rangle = \int |\phi(z)|^2 d\langle E(z)e_0, e_0 \rangle \\ &= \int |\phi|^2 d\mu \\ &= \|\phi\|^2 \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{B}(K)$. Pero además, e_0 es un vector cíclico-* por hipótesis, así que

$$\mathcal{H} = \overline{\{\phi(N)e_0 : \phi \in \mathcal{B}(K)\}} = \overline{\text{Ran}(U)}.$$

Por lo tanto, U se extiende a un isomorfismo $U : L^2(\mu) \mapsto \mathcal{H}$.

Ahora, si $\phi \in \mathcal{B}(K)$, entonces

$$UN_\mu U^{-1}(\phi(N)e_0) = UN_\mu(U^{-1}U\phi) = UN_\mu(\phi) = U(g) = g(N)e_0 = N\phi(N)e_0,$$

con $g(z) = z\phi(z)$. Por lo tanto $UN_\mu U^{-1} = N$ en $\{\phi(N)e_0 : \phi \in B(K)\}$, el cual es denso en \mathcal{H} . Así que $N_\mu \cong N$, con $V = U^{-1}$.

Note que $U1 = 1(N)e_0 = e_0$ y por lo tanto $Ve_0 = 1$.

Para ver la unicidad, supongamos que existen isomorfismos U_1 y U_2 que satisfacen las condiciones del teorema, en particular,

$$U_1 N U_1^{-1} = N_\mu = U_2 N U_2^{-1},$$

entonces $U_2^{-1} U_1 N U_1^{-1} U_2 = N$, así $U_2^{-1} U_1 = I$, lo que implica que $U_1 = U_2$ y por lo tanto U es único, así también V . ■

Una aplicación directa de el teorema anterior es el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.10. Sea S el operador shift bilateral en $\ell^2(\mathbb{Z})$ definido de la siguiente manera:

$$S(\{\dots, a_{-1}, \mathbf{a}_0, a_1, \dots\}) = \{\dots, a_0, \mathbf{a}_1, a_2, \dots\}.$$

El vector $e_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ que tiene 1 en la posición cero y 0 en el resto es un vector cíclico-* para S por la Proposición 3.3. Además, si $U : L^2(\mu) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ es la Transformada de Fourier definida como en el Ejemplo 1.24 entonces se cumple que $U1 = e_0$, esto se sigue del hecho que

$$U1(n) = \widehat{1}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Ahora, si llamamos $V = U^{-1}$, tenemos que $Ve_0 = 1$ y

$$V S V^{-1} f = V S(\{\widehat{f}(n)\}) = V(\{\widehat{f}(n-1)\}) = g$$

donde $g(t) = e^{2\pi i t} f(t)$.

Si observamos que toda función $f \in L^2[0, 1]$ se puede identificar con una función $\tilde{f} \in L^2(\partial\mathbb{D})$ con el producto interno

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \tilde{f}(z) \overline{\tilde{g}(z)} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \tilde{f}(e^{2\pi i t}) \overline{\tilde{g}(e^{2\pi i t})} dt,$$

haciendo $f(t) = \tilde{f}(e^{2\pi i t})$, entonces tenemos que

$$V S V^{-1} \tilde{f}(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i t} \tilde{f}(e^{2\pi i t})$$

o equivalentemente, $VSV^{-1}\tilde{f}(z) = z\tilde{f}(z)$, con $z = e^{2\pi it}$. Esto último implica que S es unitariamente equivalente a N_μ donde $N_\mu : L^2(\partial\mathbb{D}) \rightarrow L^2(\partial\mathbb{D})$ es el operador de multiplicación por la variable independiente y μ es la de longitud de arco del círculo unitario normalizada.

Es un buen momento para preguntarse cuándo dos operadores de multiplicación son unitariamente equivalentes, esto tiene una relación directa con el hecho de que las medidas correspondientes a los operadores sean equivalentes.

TEOREMA 3.11. $N_{\mu_1} \cong N_{\mu_2}$ si y solo si $[\mu_1] = [\mu_2]$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $[\mu_1] = [\mu_2]$ y sea $\phi = d\mu_1/d\mu_2$ la derivada de Radon-Nikodym de μ_1 respecto a μ_2 . Notemos que si $g \in L^1(\mu_1)$, entonces $\phi g \in L^1(\mu_2)$ y $\int g \phi d\mu_2 = \int g d\mu_1$.

En consecuencia, si $f \in L^2(\mu_1)$, tenemos que $\sqrt{\phi}f \in L^2(\mu_2)$ y $\|\sqrt{\phi}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, entonces si definimos el operador $U : L^2(\mu_1) \rightarrow L^2(\mu_2)$ por $Uf = \sqrt{\phi}f$, éste resulta ser una isometría de $L^2(\mu_1)$ en $L^2(\mu_2)$.

Veamos que U es sobreyectivo. Si $g \in L^2(\mu_2)$ es una función tal que $g = Uf = \sqrt{\phi}f$ para alguna $f \in L^2(\mu_1)$, obtenemos que $f = \phi^{-1/2}g \in L^2(\mu_1)$ (recordando que ϕ está bien definida y $\phi(x) \neq 0$ para casi todo punto). Entonces $Uf = g$, así U es sobreyectiva y $U^{-1}g = \phi^{-1/2}g$, para cualquier $g \in L^2(\mu_2)$.

Ahora bien, si $g \in L^2(\mu_2)$ y $z \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$UN_{\mu_1}U^{-1}g(z) = UN_{\mu_1}\phi^{-1/2}g(z) = U(z\phi^{-1/2})g(z) = \phi^{1/2}z\phi^{-1/2}g(z) = zg(z) = N_{\mu_2}g(z).$$

Como lo anterior vale para todo $z \in \mathbb{C}$ y toda $g \in L^2(\mu_2)$, tenemos que U es el isomorfismo que satisface $UN_{\mu_1}U^{-1} = N_{\mu_2}$ y por lo tanto $N_{\mu_1} \cong N_{\mu_2}$.

Recíprocamente, supongamos que existe un isomorfismo $V : L^2(\mu_1) \rightarrow L^2(\mu_2)$ tal que $VN_{\mu_1}V^{-1} = N_{\mu_2}$. Sea $\Psi \in L^2(\mu_2)$ la función que verifica $\Psi = V(1)$. Para simplificar la notación vamos a escribir $N_1 = N_{\mu_1}$ y $N_2 = N_{\mu_2}$.

Veamos por inducción que $VN_1^kV^{-1} = N_2^k$ y $VN_1^{*k}V^{-1} = N_2^{*k}$.

Sea $k = 1$, entonces $VN_1V^{-1} = N_2$, o que es lo mismo $N_1V^{-1} = V^{-1}N_2$. Supongamos ahora que $k = n$. Por lo tanto $VN_1^nV^{-1} = N_2^n$,

Si $k = n + 1$,

$$VN_1^nV^{-1} = N_2^n \Leftrightarrow VN_1^nV^{-1}N_2 = N_2^nN_2 \Leftrightarrow VN_1^nN_1V^{-1} = N_2^nN_2 \Leftrightarrow VN_1^{n+1}V^{-1} = N_2^{n+1}$$

Lo cual, demuestra lo que queremos; más aún, tomando adjunto a ambos lados de la igualdad anterior y recordando que V es unitario por ser un isomorfismo entre espacios de Hilbert, tenemos que:

$$(VN_1^n V^{-1})^* = (N_2^n)^* \Leftrightarrow V^{*-1} N_1^{*n} V^* = N_2^{*n} \Leftrightarrow VN_1^{*n} V^{-1} = N_2^{*n}$$

Ahora bien, como $VN_1^k V^{-1} = N_2^k$ y $VN_1^{*k} V^{-1} = N_2^{*k}$ ocurren, polinomios de la forma $p(N_1, N_1^*)$ y $p(N_2, N_2^*)$, satisfacen la misma propiedad, por lo tanto $Vp(N_1, N_1^*)V^{-1} = p(N_2, N_2^*)$, para cualquier polinomio p en las variables z y \bar{z} .

Ahora, supongamos que $N_1 \cong N_2$, entonces $\sigma(N_1) = \sigma(N_2)$. Por el ítem (a) de la Proposición 3.4, tenemos que $\text{supp } \mu_1 = \text{supp } \mu_2 = K$.

Tomando límite de polinomios en z y \bar{z} , tenemos que $Vu(N_1)V^{-1} = u(N_2)$, para u en $C(K)$.

Entonces para u en $C(K)$ ocurre que, $V(u) = Vu(N_1)1 = u(N_2)V1 = u\Psi$.

Como V es una isometría, por la igualdad anterior, se tiene que $\int |u|^2 d\mu_1 = \int |u|^2 |\Psi|^2 d\mu_2$, para todo u en $C(K)$.

Por lo tanto, $\int v d\mu_1 = \int v |\Psi|^2 d\mu_2$, para v en $C(K)$ y $v \geq 0$.

Por la unicidad del Teorema de representación de Riesz, $\mu_1 = |\Psi|^2 \mu_2$, así $\mu_1 \ll \mu_2$.

Si usamos V^{-1} (pues V es un isomorfismo) y además invertimos los roles de N_1 y N_2 en el procedimiento anterior obtendremos que $\mu_2 \ll \mu_1$.

Finalmente, obtenemos que $[\mu_1] = [\mu_2]$. ■

2. Teoría de multiplicidad para operadores normales

A continuación presentaremos un conjunto de resultados de álgebra de operadores, con el propósito de dar la definición de vector separador de un álgebra de Von Neumann, ya que la existencia del mismo nos permitirá descomponer un operador normal N en una suma directa de operadores normales que será unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación definidos como en la Proposición 3.4.

DEFINICIÓN 3.12. Si $\mathcal{Y} \subseteq B(\mathcal{H})$, el conjunto $\mathcal{Y}' = \{T \in B(\mathcal{H}) : TS = ST \text{ para todo } S \in \mathcal{Y}\}$ es llamado el *conmutador* de \mathcal{Y} . Así $\mathcal{Y}'' = (\mathcal{Y}')'$ es llamado el *doble conmutador* de \mathcal{Y} .

DEFINICIÓN 3.13. Un *álgebra de Von Neumann* \mathcal{A} , es una C^* -subálgebra de $B(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

DEFINICIÓN 3.14. Si $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ es un álgebra de Von Neumann y $e_0 \in \mathcal{H}$, entonces e_0 es un *vector separador* de \mathcal{A} , si el único operador T en \mathcal{A} tal que $Te_0 = 0$ es el operador $T = 0$.

COROLARIO 3.15. Si \mathcal{A} es una C^* -subálgebra abeliana de $B(\mathcal{H})$ y \mathcal{H} es separable, entonces \mathcal{A} posee un vector separador.

DEMOSTRACIÓN. Ver [3], Corollary 7.9, p. 283. ■

A partir de aquí asumiremos que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert separable.

DEFINICIÓN 3.16. Si N es un operador normal en $B(\mathcal{H})$. $W^*(N)$ se define como el álgebra de Von Neumann generada por N , esto es, $W^*(N)$ es la intersección de todas las álgebras de Von Neumann que contienen a N . Por lo tanto, $W^*(N)$ es la **WOT** clausura de $\{p(N, N^*) : p(z, \bar{z}) \text{ es un polinomio en } z \text{ y } \bar{z}\}$.

LEMA 3.17. $W^*(N) = \{\phi(N) : \phi \in \mathcal{B}(\sigma(N))\}$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [3], Lemma 8.7, p. 287. ■

TEOREMA 3.18 (**Cálculo funcional de un operador normal**). Si N es un operador normal en \mathcal{H} y μ es una medida espectral para N , entonces existe una aplicación bien definida $\rho : L^\infty(\mu) \rightarrow W^*(N)$ dada por $\rho(\phi) = \phi(N)$ tal que:

- a) ρ es un isomorfismo- $*$ y una isometría.
- b) $\rho : (L^\infty(\mu), \text{débil-}^*) \rightarrow (W^*(N), \text{WOT})$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [3], Theorem 8.10, p. 289. ■

La siguiente proposición será clave para poder comprender la descomposición de un operador normal N en una suma directa de operadores.

PROPOSICIÓN 3.19. Si N es un operador normal en $B(\mathcal{H})$ y $e \in \mathcal{H}$, entonces existe un vector separador e_0 de $W^*(N)$, tal que $e \in \overline{\{Te_0 : T \in W^*(N)\}}$.

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración la haremos por pasos.

Paso 1.

Sea f_0 cualquier vector separador de $W^*(N)$ (observar que $W^*(N)$ es una C^* -subálgebra abeliana de $B(\mathcal{H})$ y \mathcal{H} es separable) y sea E la resolución de la identidad para N . Definimos $\mu(\Delta) = \|E(\Delta)f_0\|^2$ y denotemos como $\mathcal{G} = \overline{\{Tf_0 : T \in W^*(N)\}} \subseteq \mathcal{H}$.

Como \mathcal{G} es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , podemos escribir $e = g_1 + h_1$, donde $g_1 \in \mathcal{G}$ y $h_1 \in \mathcal{G}^\perp$.

Sea $\eta(\Delta) = \|E(\Delta)h_1\|^2$ y $\mathcal{L} = \overline{\{Th_1 : T \in W^*(N)\}}$.

Veamos que $\eta \ll \mu$. Supongamos que $\mu(\Delta) = 0$, entonces $E(\Delta)f_0 = 0$, lo que implica que $E(\Delta) = 0$, pues $E(\Delta) \in W^*(N)$ y f_0 es un vector separador de $W^*(N)$.

Por lo tanto, si $\eta(\Delta) = \|E(\Delta)h_1\|^2$ y $E(\Delta) = 0$, ocurre que $\eta(\Delta) = 0$ cuando $\mu(\Delta) = 0$, entonces $\eta \ll \mu$.

Veamos que \mathcal{G} y \mathcal{L} son subespacios reductores para N , esto es, $N(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$, $N(\mathcal{G}^\perp) \subseteq \mathcal{G}^\perp$ y que $N(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$, $N(\mathcal{L}^\perp) \subseteq \mathcal{L}^\perp$. Esto es cierto, ya que, NTf_0 y N^*Tf_0 siguen siendo elementos de \mathcal{G} por como se define el álgebra $W^*(N)$, y análogamente NSh_1 y N^*Sh_1 , siguen siendo elementos de \mathcal{L} .

Veamos que $\mathcal{L} \perp \mathcal{G}$.

Sea $f \in \overline{W^*(N)f_0}$ y $g \in \overline{W^*(N)h_1}$, así existe $\{T_n f_0\}_{n \geq 1} \subset W^*(N)f_0$ y $\{S_k h_1\}_{k \geq 1} \subset W^*(N)h_1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f_0 - f\|_{\mathcal{H}} = 0$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k h_1 - g\|_{\mathcal{H}} = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle f - T_n f_0 + T_n f_0, g - S_k h_1 + S_k h_1 \rangle \\ &= \langle f - T_n f_0, g - S_k h_1 \rangle + \langle f - T_n f_0, S_k h_1 \rangle + \langle T_n f_0, g - S_k h_1 \rangle + \langle T_n f_0, S_k h_1 \rangle \\ &\leq \|f - T_n f_0\| \cdot \|g - S_k h_1\| + \|f - T_n f_0\| \cdot \|S_k h_1\| + \|T_n f_0\| \cdot \|g - S_k h_1\| + \langle S_k^* T_n f_0, h_1 \rangle \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n, k \rightarrow \infty$ y $S_k^* T_n f_0 \in \mathcal{G}$, $h_1 \in \mathcal{G}^\perp$.

Más aún, si N es reducido por \mathcal{G} y \mathcal{L} , f_0 es cíclico-* para $N|_{\mathcal{G}}$ y h_1 es cíclico-* para $N|_{\mathcal{L}}$, esto porque \mathcal{G} es el espacio reductor para $N|_{\mathcal{G}}$ más pequeño que contiene a f_0 , igualmente para \mathcal{L} con h_1 , entonces por el Teorema 3.9 y la definición de $\mu(\Delta)$ y $\eta(\Delta)$, implica que $N|_{\mathcal{G}} \cong N_\mu$ y $N|_{\mathcal{L}} \cong N_\eta$.

Como $\eta \ll \mu$, por la Proposición 1.12 existe un conjunto de Borel Δ_0 tal que $[\eta] = [\mu|_{\Delta_0}]$.

Por lo tanto, si llamamos $\nu = \mu|_{\Delta_0}$ tenemos que $N|_{\mathcal{L}} \cong N_\nu$, por transitividad y el Teorema 3.11.

Paso 2.

Ahora bien, del paso anterior tenemos que $N|_{\mathcal{L}} \cong N_\nu$ y $N|_{\mathcal{G}} \cong N_\mu$; y esto da la posibilidad de definir el siguiente isomorfismo U .

Sea $U : \mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \longrightarrow L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$ el isomorfismo tal que:

$$\begin{aligned} U(\{0\} \oplus \mathcal{L}) &\subseteq \{0\} \oplus L^2(\nu) \\ U(N|_{\mathcal{G} \oplus \mathcal{L}})U^{-1} &= N_\mu \oplus N_\nu \end{aligned}$$

Como $e = g_1 + h_1 \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{L}$, llamemos $Ue = g \oplus h$. Luego, $h(z) \neq 0$ c.t.p- $[\nu]$, ya que h_1 es un vector cíclico-* de $N|_{\mathcal{L}}$ por el ítem d.) de la proposición 3.4.

Paso 3.

Definamos el operador $\tilde{N} : L^2(\mu) \oplus L^2(\nu) \rightarrow L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$ por $\tilde{N} = N_\mu \oplus N_\nu$. Veamos que existe una función f en $L^2(\mu)$ tal que $f \oplus h$ es un vector separador de $W^*(\tilde{N})$ y $g \oplus h \in \overline{\{T(f \oplus h) : T \in W^*(\tilde{N})\}}$ y luego, el isomorfismo U definido en el Paso 2 nos permitirá concluir que $e_0 = U^{-1}(f \oplus h)$ es un vector separador de $W^*(N)$ y que $e = U^{-1}(g \oplus h)$ pertenece a $\overline{\{Te_0 : T \in W^*(N)\}}$.

Sea f en $L^2(\mu)$ la función definida por

$$f(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \Delta_0 \\ 1 & \text{si } z \notin \Delta_0 \end{cases}$$

Por el cálculo funcional para el operador normal \tilde{N} tenemos que $\overline{\{W^*(\tilde{N})(f \oplus h)\}} = \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}}$.

Ahora, nótese que $L^2(\mu|_{\Delta_0^c}) \oplus \{0\} \subseteq \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}}$, pues

$$\phi \chi_{\Delta_0^c} \oplus 0 = \phi \chi_{\Delta_0^c}(f \oplus h) \in \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}},$$

para toda $\phi \in L^\infty(\mu)$. Esto implica que

$$(1 - g)\chi_{\Delta_0^c} \oplus 0 \in \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}}.$$

Así,

$$g \oplus h = (f \oplus h) - ((1 - g)\chi_{\Delta_0^c} \oplus 0) \in \overline{\{\phi f \oplus \phi h : \phi \in L^\infty(\mu)\}}.$$

Por otra parte, si $\phi \in L^\infty(\mu)$ y $0 = \phi f \oplus \phi h$, entonces $\phi f = \phi h = 0$ c.t.p- $[\mu]$. Como $h(z) \neq 0$ c.t.p- $[v]$, debe ocurrir que $\phi(z) = 0$ c.t.p- $[\mu]$ en Δ_0 . Además, para z en Δ_0^c , $f(z) = 1$. Por lo tanto $\phi(z) = 0$ c.t.p- $[\mu]$ en Δ_0^c .

Así, $f \oplus h$ es un vector separador de $W^*(\tilde{N})$. ■

PROPOSICIÓN 3.20. *Si N, N_1 y N_2 son operadores normales, N es cíclico-* y $N \oplus N_1 \cong N \oplus N_2$, entonces $N_1 \cong N_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver ([3], Proposition 10.6, p. 295). ■

El siguiente teorema generaliza el resultado del Teorema 3.11 y establece un primer paso para responder la pregunta sobre la equivalencia unitaria de operadores normales. La respuesta consiste en asociarle a cada operador normal una sucesión de medidas de forma tal que sea unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación. Luego, si las sucesiones de medidas asociadas a dos operadores son equivalentes (en cierto sentido) entonces éstos serán unitariamente equivalentes.

TEOREMA 3.21.

- a) Si $N \in B(\mathcal{H})$ es un operador normal, entonces existe una sucesión (posiblemente finita) de medidas $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ en \mathbb{C} tales que $\mu_{i+1} \ll \mu_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $N \cong \bigoplus_{i=1}^\infty N_{\mu_i}$.
- b) Sean $N \in B(\mathcal{H})$, $M \in B(\mathcal{K})$ operadores normales, $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ y $\{\nu_i\}_{i=1}^\infty$ sucesiones de medidas tales que $\mu_{i+1} \ll \mu_i$, $\nu_{i+1} \ll \nu_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y

$$N \cong \bigoplus_{i=1}^\infty N_{\mu_i} \quad \text{y} \quad M \cong \bigoplus_{i=1}^\infty N_{\nu_i}.$$

Entonces, $N \cong M$ si y solo si $[\mu_i] = [\nu_i]$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN.

- a) Sea e_1 un vector separador para $W^*(N)$ y sea $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ una base ortonormal para \mathcal{H} tal que $f_1 = e_1$. Si definimos $\mu_1(\Delta) = \|E(\Delta)e_1\|^2$ para todo subconjunto de Borel Δ de $\sigma(N)$ y $\mathcal{H}_1 = \overline{\{W^*(N)e_1\}}$, entonces tenemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ y $N_{\mu_1} \cong N|_{\mathcal{H}_1}$.

Sea $N_2 = N|_{\mathcal{H}_1^\perp}$ y f_2' la proyección ortogonal de f_2 en \mathcal{H}_1^\perp . Por la proposición 10.4 existe un vector separador e_2 de $W^*(N_2)$ tal que $f_2' \in \overline{\{W^*(N_2)e_2\}} = \overline{\{W^*(N)e_2\}}$. Si definimos $\mu_2(\Delta) = \|E(\Delta)e_2\|^2$ y $\mathcal{H}_2 = \overline{\{W^*(N)e_2\}}$ observamos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp, \quad \{f_1, f_2\} \subset \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad N_{\mu_2} \cong N|_{\mathcal{H}_2}.$$

Más aún, sucede que $\mu_2 \ll \mu_1$.

Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de vectores $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{H}_i = \overline{\{W^*(N)e_i\}}$ son subespacios cerrados de \mathcal{H} con la propiedad $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ para $i \neq j$, una sucesión de medidas $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ definidas por $\mu_i(\Delta) = \|E(\Delta)e_i\|^2$ tales que $\mu_{i+1} \ll \mu_i$ y operadores $N_i = N|_{\mathcal{H}_i} \cong N_{\mu_i}$. Además $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i$ y por lo tanto

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i.$$

Considerando el isomorfismo $U : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^\infty L^2(\mu_i)$ que cumple $UN|_{\mathcal{H}_i}U^{-1} = N_{\mu_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ obtenemos finalmente que $N \cong \bigoplus_{i=1}^\infty N_{\mu_i}$.

b) Si $[\mu_i] = [\nu_i]$ entonces $N_{\mu_i} \cong N_{\nu_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ por el Teorema 3.11, es decir, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo isométrico $U_i : L^2(\mu_i) \rightarrow L^2(\nu_i)$ tal que $U_i N_{\mu_i} U_i^{-1} = N_{\nu_i}$. Si definimos el operador $U : \bigoplus_{i=1}^\infty L^2(\mu_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^\infty L^2(\nu_i)$ por $U = \bigoplus_{i=1}^\infty U_i$ entonces vale que

$$UNU^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i N_{\mu_i} U_i^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_{\nu_i} \cong M$$

Por lo tanto, $N \cong M$.

Supongamos ahora que $N \cong M$ y sea $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ el isomorfismo tal que $UNU^{-1} = M$. Sea e_1 un vector separador para $W^*(N)$, luego $Ue_1 = f_1$ es un vector separador para $W^*(M)$.

Observamos que las medidas μ_1 y ν_1 definidas por $\mu_1(\Delta) = \|E_N(\Delta)e_1\|^2$ y $\nu_1(\Delta) = \|E_M(\Delta)f_1\|^2$, donde E_N y E_M son las resoluciones de la identidad asociadas a N y M respectivamente, satisfacen $[\mu_1] = [\nu_1]$, lo cual implica que $N_{\mu_1} \cong N_{\nu_1}$.

Si $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i$ y $\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{K}_i$, tenemos por lo anterior que $N|_{\mathcal{H}_1} \cong N_{\mu_1} \cong N_{\nu_1} \cong M|_{\mathcal{K}_1}$, además, la Proposición 3.20 implica que $N|_{\mathcal{H}_1^\perp} \cong M|_{\mathcal{K}_1^\perp}$.

Si escribimos $\mathcal{H}_1^\perp = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp$ y $\mathcal{K}_1^\perp = \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_2^\perp$ y aplicamos un razonamiento similar al anterior obtenemos que $N|_{\mathcal{H}_2} \cong N_{\mu_2} \cong N_{\nu_2} \cong M|_{\mathcal{K}_2}$ y nuevamente por la Proposición 3.20 se deduce que $N|_{\mathcal{H}_2^\perp} \cong M|_{\mathcal{K}_2^\perp}$.

Realizando este proceso inductivamente se sigue que $N|_{\mathcal{H}_i} \cong M|_{\mathcal{K}_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, con lo cual se concluye que $M \cong N$.

■

Sea N es un operador normal con medida espectral μ y $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas en \mathbb{C} como en el ítem a) del Teorema 3.21. Si $\mu_1 \ll \mu$, entonces por la Proposición 1.12, existe un subconjunto de Borel Δ_1 tal que $[\mu_1] = [\mu|_{\Delta_1}]$ y como además $\Delta_1 = \sigma(N)$ (ver demostración de Teorema 3.21) entonces $[\mu_1] = [\mu]$. Ahora bien, sabemos por el teorema anterior que $\mu_2 \ll \mu_1$, luego por transitividad $\mu_2 \ll \mu$ entonces existe un subconjunto de Borel $\Delta_2 \subset \Delta_1$ tal que $[\mu_2] = [\mu|_{\Delta_2}]$, haciendo un proceso inductivo sobre $n \in \mathbb{N}$, tenemos que si $\mu_n \ll \mu$, existe un subconjunto de Borel $\Delta_n \subset \dots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1$ tal que $[\mu_n] = [\mu|_{\Delta_n}]$. Por lo tanto esta sucesión de subconjuntos de Borel $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidos de manera decreciente nos permite reescribir el Teorema 3.21 tomando $\mu_n = \mu|_{\Delta_n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $\Delta_1 = \sigma(N)$, por consiguiente tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 3.22.

- a) Si $N \in B(\mathcal{H})$ es un operador normal con medida espectral μ , entonces existe una sucesión decreciente $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de Borel en $\sigma(N)$ tal que $\Delta_1 = \sigma(N)$ y $N \cong N_{\mu} \oplus N_{\mu|_{\Delta_2}} \oplus N_{\mu|_{\Delta_3}} \oplus \dots$
- b) Si M es otro operador normal con medida espectral ν y si $\{\Sigma_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de Borel en $\sigma(M)$ tal que $M \cong N_{\nu} \oplus N_{\nu|_{\Sigma_2}} \oplus N_{\nu|_{\Sigma_3}} \oplus \dots$, entonces $M \cong N$ si y solo si
- i) $[\mu] = [\nu]$.
 - ii) $\mu(\Delta_n \setminus \Sigma_n) = 0 = \mu(\Sigma_n \setminus \Delta_n)$, para todo n .

La demostración de este corolario es consecuencia del Teorema 3.21. Para obtener el ítem (b) es suficiente demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $[\mu|_{\Delta_n}] = [\nu|_{\Sigma_n}]$ si y solo si $[\mu] = [\nu]$ y $\mu(\Delta_n \setminus \Sigma_n) = 0 = \mu(\Sigma_n \setminus \Delta_n)$. Para ello:

Supongamos que $[\mu|_{\Delta_n}] = [\nu|_{\Sigma_n}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 3.11 tenemos que $N_{\mu|_{\Delta_n}} \cong N_{\nu|_{\Sigma_n}}$, en particular si $n = 1$, vale que $N_{\mu} \cong N_{\nu}$ lo cual implica $[\mu] = [\nu]$.

Ahora bien, por hipótesis tenemos que $\mu|_{\Delta_n}(\Delta) = 0$ si y solo $\nu|_{\Sigma_n}(\Delta) = 0$, para Δ un subconjunto de Borel de $\sigma(N) = \sigma(M)$.

Notemos que, $\nu|_{\Sigma_n}(\Sigma_n^c) = \nu(\Sigma_n \cap \Sigma_n^c) = \nu(\emptyset) = 0$, entonces

$$\mu(\Delta_n \setminus \Sigma_n) = \mu(\Delta_n \cap \Sigma_n^c) = \mu|_{\Delta_n}(\Sigma_n^c) = 0.$$

Análogamente, $\mu|_{\Delta_n}(\Delta_n^c) = \mu(\Delta_n \cap \Delta_n^c) = \mu(\emptyset) = 0$, entonces

$$\mu(\Sigma_n \setminus \Delta_n) = \nu(\Sigma_n \cap \Delta_n^c) = \nu|_{\Sigma_n}(\Delta_n^c) = 0.$$

Veamos ahora que $[\mu|_{\Delta_n}] = [\nu|_{\Sigma_n}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\mu|_{\Delta_n}(\Delta) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \nu|_{\Sigma_n}(\Delta) &= \nu(\Delta \cap \Sigma_n) = \nu(\Delta \cap \Sigma_n \cap \Delta_n) + \nu(\Delta \cap \Sigma_n \cap \Delta_n^c) \\ &\leq \nu(\Delta \cap \Delta_n) + \nu(\Sigma_n \cap \Delta_n^c) = 0 \end{aligned}$$

esto por i) y ii). Así tenemos que $\nu|_{\Sigma_n} \ll \mu|_{\Delta_n}$.

Para ver que $\mu|_{\Delta_n} \ll \nu|_{\Sigma_n}$ es análogo a lo anterior.

El siguiente ejemplo nos va a motivar el siguiente teorema.

EJEMPLO 3.23. Sea μ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y sea μ_n la medida de Lebesgue en $[1/(n+1), 1/n]$ para $n \geq 1$, entonces $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ (ver Ejemplo 1.6). Sea $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mu_n)^{(n)}$ y definamos $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $T = N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \oplus \dots$. Por el ítem c) de la Proposición 3.4 la resolución de la identidad asociada al operador N_{μ_n} esta dada por $E_n(\Delta) = M_{\chi_{\Delta}}$ para $\Delta \subset \sigma(N_{\mu_n})$ boreliano.

Entonces por la Proposición 3.8 tenemos que $\sigma(T) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_{\mu_n})}$ y

$$E(\Delta) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (E_n(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n})))^{(n)}.$$

Veamos que μ_n es una medida espectral para N_{μ_n} , es decir, $E_n(\Delta) = 0$ si y solo si $\mu_n(\Delta) = 0$, para todo $\Delta \subset [1/(n+1), 1/n]$.

En efecto,

$$0 = \mu_n(\Delta) = \int_{\Delta} d\mu_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \chi_{\Delta}(x) d\mu(x).$$

Entonces, para $f, g \in L^2(\mu_n)$ se tiene que

$$\langle E_n(\Delta)f, g \rangle = \langle M_{\chi_{\Delta}}f, g \rangle = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \chi_{\Delta}(x) f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \int_{\Delta} f(x) \overline{g(x)} d\mu_n(x) = 0.$$

Es decir, $E_n(\Delta) = 0$.

El recíproco se obtiene eligiendo un par de funciones particulares en $f, g \in L^2(\mu_n)$ tales que $f(x) \overline{g(x)} = 1$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Más aún, si $E(\Delta) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (E_n(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n}))^{(n)}) = 0$ tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n})) = 0$ entonces lo anterior implica que $\mu_n(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n})) = 0$, por el Ejemplo 1.6 se tiene que $\mu(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n})) = 0$ para todo n , finalmente $\mu(\Delta) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n}))) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta \cap \sigma(N_{\mu_n})) = 0$. El recíproco de lo anterior vale en todas las afirmaciones.

Por lo tanto μ es una medida espectral para T .

Ahora bien, por el Corolario 3.22 existe una sucesión $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ decreciente de subconjuntos de Borel del $[0, 1]$, tal que $\Delta_1 = \sigma(T)$ y

$$T \cong N_{\mu} \oplus N_{\mu|_{\Delta_2}} \oplus N_{\mu|_{\Delta_3}} \oplus \dots \quad (3.6)$$

Ahora, considerando los $\Delta_n = [0, 1/n]$, $n \geq 1$ tenemos:

Para $\Delta_1 = [0, 1]$, ocurre que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

Para $\Delta_2 = [0, 1/2]$, ocurre que $\mu|_{\Delta_2} = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n$.

Para $\Delta_3 = [0, 1/3]$, ocurre que $\mu|_{\Delta_3} = \sum_{n=3}^{\infty} \mu_n$.

Y así sucesivamente sobre $n \in \mathbb{N}$. Observando que las μ_n cumplen la condición de ser mutuamente singulares, pues están concentradas en subconjuntos disjuntos del $[0, 1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} T &= N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \oplus \dots \\ &= (N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus N_{\mu_3} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_2} \oplus N_{\mu_3} \oplus N_{\mu_4} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_3} \oplus N_{\mu_4} \oplus N_{\mu_5} \oplus \dots) \oplus \dots \\ &= N_{\mu} \oplus N_{\mu|_{\Delta_2}} \oplus N_{\mu|_{\Delta_3}} \oplus \dots \end{aligned}$$

Esto nos da una idea bajo qué condiciones un operador normal N cualquiera con medida espectral μ es unitariamente equivalente a una descomposición de la forma $N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \oplus \dots$.

TEOREMA 3.24. *Si N es un operador normal, entonces existen $\mu_{\infty}, \mu_1, \mu_2, \dots$ medidas mutuamente singulares (algunas pueden ser cero) tales que*

$$N \cong N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots$$

Si M es otro operador normal que cumple la condición anterior con sus respectivas medidas $\eta_{\infty}, \eta_1, \eta_2, \dots$ mutuamente singulares (algunas pueden ser cero), entonces

$$N \cong M \Leftrightarrow [\mu_n] = [\eta_n], \quad \text{para } 1 \leq n \leq \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea μ una medida espectral para N y $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos de Borel del espectro de N (como en el Corolario 3.22).

Definamos los conjuntos $\Sigma_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \Delta_n$ y $\Sigma_n = \Delta_n \setminus \Delta_{n+1}$ para $1 \leq n < \infty$ y sean $\mu_n = \mu|_{\Sigma_n}$ $1 \leq n \leq \infty$ y $\nu_n = \mu|_{\Delta_n}$ para $1 \leq n < \infty$.

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Sigma_\infty \cup (\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}) \cup (\Delta_{n+1} \setminus \Delta_{n+2}) \cup \dots \\ &= \Sigma_\infty \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1} \cup \dots\end{aligned}$$

Así, para todo $\Delta \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\nu_n(\Delta) &= \mu|_{\Delta_n}(\Delta) = \mu(\Delta \cap (\Sigma_\infty \cup \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1} \cup \dots)) \\ &= \mu((\Delta \cap \Sigma_\infty) \cup (\Delta \cap \Sigma_n) \cup (\Delta \cap \Sigma_{n+1}) \cup \dots) \\ &= \mu(\Delta \cap \Sigma_\infty) + \mu(\Delta \cap \Sigma_n) + \mu(\Delta \cap \Sigma_{n+1}) + \dots \\ &= \mu|_{\Sigma_\infty}(\Delta) + \mu|_{\Sigma_n}(\Delta) + \mu|_{\Sigma_{n+1}}(\Delta) + \dots \\ &= \mu_\infty(\Delta) + \mu_n(\Delta) + \mu_{n+1}(\Delta) + \dots \\ &= (\mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots)(\Delta)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nu_n = \mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots, \quad \text{para } 1 \leq n < \infty.$$

Notando que las medidas $\mu_\infty, \mu_1, \mu_2, \dots$ son mutuamente singulares por definición, tenemos que

$$N_{\nu_n} \cong N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_n} \oplus N_{\mu_{n+1}} \oplus \dots$$

Y por el corolario 3.22 sucede que

$$N \cong N_{\nu_1} \oplus N_{\nu_2} \oplus \dots$$

Entonces

$$\begin{aligned}N &\cong N_{\nu_1} \oplus N_{\nu_2} \oplus N_{\nu_3} \oplus \dots \\ &\cong (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_2} \oplus N_{\mu_3} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_3} \oplus N_{\mu_4} \oplus \dots) \oplus \dots \\ &\cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots\end{aligned}$$

Ahora bien, suponiendo que M es otro operador normal que cumple lo anterior con sus respectivas medidas $\eta_\infty, \eta_1, \eta_2, \dots$ mutuamente singulares (algunas pueden ser cero), es decir:

$$M \cong N_{\eta_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\eta_1} \oplus N_{\eta_2}^{(2)} \oplus N_{\eta_3}^{(3)} \dots \quad y \quad N \cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots$$

Lo cual ocurre, siempre que

$$\nu'_n = \eta_\infty + \eta_n + \eta_{n+1} + \dots \quad y \quad \nu_n = \mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots, \quad \text{para } 1 \leq n < \infty.$$

Suponiendo que $[\mu_n] = [\eta_n]$ para todo $1 \leq n \leq \infty$, por lo anterior tenemos que

$$[\nu'_n] = [\nu_n], \quad \text{para todo } 1 \leq n \leq \infty.$$

así por el Teorema 3.24 sucede que

$$N_{\nu'_n} \cong N_{\nu_n}, \quad \text{para todo } 1 \leq n \leq \infty. \quad (1)$$

pero sabemos por el Corolario 3.22 que

$$M \cong N_{\nu'_1} \oplus N_{\nu'_2} \oplus \dots \quad y \quad N \cong N_{\nu_1} \oplus N_{\nu_2} \oplus \dots$$

entonces lo anterior y (1) implican que

$$N \cong M.$$

■

En la siguiente definición introducimos el concepto de función de Borel que toma valores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} con el objetivo de definir el espacio $L^2(\mu, \mathcal{H})$ el cual resultará útil para caracterizar la equivalencia unitaria de dos operadores normales en términos de una sucesión de medidas mutuamente singulares dos a dos.

DEFINICIÓN 3.25. Sea una medida de Borel positiva con soporte compacto en \mathbb{C} y sea \mathcal{H}_n un espacio de Hilbert de dimensión n , $1 \leq n \leq \infty$. Decimos que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_n$ es una *función de Borel* si $z \mapsto \langle f(z), g \rangle$ es una función medible Borel para cada $g \in \mathcal{H}_n$.

OBSERVACIÓN 3.26. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_n$ es una función de Borel y $\{e_j\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal para \mathcal{H}_n , entonces $\|f(z)\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle f(z), e_j \rangle|^2$, por lo tanto $z \mapsto \|f(z)\|^2$ es una función de Borel.

DEFINICIÓN 3.27. Definimos $L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$ como el espacio de todas las funciones de Borel $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_n$ tales que $\|f\|^2 = \int \|f(z)\|^2 d\mu(z) < \infty$, donde dos funciones concuerdan c.s. $[\mu]$.

Si f y $g \in L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$, entonces $\langle f, g \rangle = \int \langle f(z), g(z) \rangle d\mu(z)$ define un producto interno en $L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$.

OBSERVACIÓN 3.28. $L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido anteriormente.

PROPOSICIÓN 3.29. Si N es el operador de multiplicación por z en $L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$, entonces

$$N \cong N_\mu^{(n)}.$$

Es decir, $N \cong N_\mu \oplus \dots \oplus N_\mu$ n -veces.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormal para \mathcal{H}_n y $U : L^2(\mu; \mathcal{H}_n) \rightarrow L^2(\mu)^{(n)}$, dado por

$$Uf(z) = (\langle f(z), e_1 \rangle, \langle f(z), e_2 \rangle, \dots, \langle f(z), e_n \rangle)$$

Veamos que U es el isomorfismo tal que

$$UNU^{-1} = N_\mu^{(n)}.$$

Entonces, sea $f, g \in L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$ tales que $Uf(z) = Ug(z)$, así por definición de U .

$$\langle f(z), e_j \rangle = \langle g(z), e_j \rangle, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\langle f(z), e_j \rangle - \langle g(z), e_j \rangle = 0$$

$$\langle f(z) - g(z), e_j \rangle = 0$$

Como $\{e_j\}$ es una base ortonormal

$$(f - g)(z) = 0$$

por lo tanto U es inyectivo, ya que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ahora bien, veamos la sobreyectividad. Sea $g \in L^2(\mu)^{(n)}$, es decir, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ con $g_j \in L^2(\mu)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Queremos encontrar $f \in L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$ tal que

$$Uf(z) = (g_1, g_2, \dots, g_n) = g.$$

Definamos $f(z) = \sum_{j=1}^n g_j(z)e_j$, la cual pertenece a $L^2(\mu; \mathcal{H}_n)$ ya que f se escribe como combinación lineal de elementos de la base $\{e_j\}_{j=1}^n$, y $g_j(z)e_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_n$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces

$$\langle f(z), e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n g_j(z)e_j, e_i \right\rangle = g_i(z), \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Por lo tanto para $z \in \mathbb{C}$ fijo, tenemos que

$$Uf(z) = (\langle f(z), e_1 \rangle, \langle f(z), e_2 \rangle, \dots, \langle f(z), e_n \rangle) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)) = g(z).$$

Finalmente sea $g \in L^2(\mu)^{(n)}$

$$\begin{aligned} UNU^{-1}g(z) &= UN(f(z)) = U(zf(z)) = (\langle zf(z), e_1 \rangle, \langle zf(z), e_2 \rangle, \dots, \langle zf(z), e_n \rangle) \\ &= (z\langle f(z), e_1 \rangle, z\langle f(z), e_2 \rangle, \dots, z\langle f(z), e_n \rangle) \\ &= (zg_1(z), zg_2(z), \dots, zg_n(z)) \\ &= (N_\mu g_1(z), N_\mu g_2(z), \dots, N_\mu g_n(z)) \\ &= N_\mu^{(n)}g(z) \end{aligned}$$

Como g es arbitraria, tenemos que $UNU^{-1} = N_\mu^{(n)}$. ■

El siguiente teorema es una extensión del Teorema 3.24, pero ahora la descomposición la haremos en suma directa de operadores como en la Proposición 3.29.

TEOREMA 3.30. *Si N es un operador normal en $B(\mathcal{H})$, existen medidas mutuamente singulares $\mu_\infty, \mu_1, \mu_2, \dots$ y un isomorfismo*

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mu_\infty; \mathcal{H}_\infty) \oplus L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2; \mathcal{H}_2) \oplus \dots$$

tal que

$$UNU^{-1} = N_\infty \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus \dots$$

donde N_n es el operador de multiplicación por z en $L^2(\mu_n; \mathcal{H}_n)$ (como en la Proposición en 3.29).

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema es análoga a la desarrollada en el Teorema 3.24. Basta notar que por el Teorema 3.24 existe un isomorfismo $U_1 : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\mu_i)^{(i)}$ tal que

$$U_1 N U_1^{-1} = N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots$$

y por la Proposición 3.29 tenemos para $1 \leq i \leq \infty$ isomorfismos $\overline{U}_i : L^2(\mu_i)^{(i)} \rightarrow L^2(\mu_i; \mathcal{H}_i)$, tales que

$$\overline{U}_i N_{\mu_i}^{(i)} \overline{U}_i^{-1} = N_i$$

Ahora bien, definiendo otro isomorfismo $U_2 : \bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\mu_i)^{(i)} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\mu_i; \mathcal{H}_i)$ dado por $U_2|_{L^2(\mu_i)^{(i)}} = \overline{U}_i$. Entonces

Si $U = U_2 U_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} U_1 N U_1^{-1} &= N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots \\ U_2^{-1} U N U^{-1} U_2 &= N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots \\ U N U^{-1} &= U_2 (N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots) U_2^{-1} \\ U N U^{-1} &= (\overline{U}_{\infty} N_{\mu_{\infty}}^{(\infty)} \overline{U}_{\infty}^{-1}) \oplus (\overline{U}_1 N_{\mu_1} \overline{U}_1^{-1}) \oplus (\overline{U}_2 N_{\mu_2}^{(2)} \overline{U}_2^{-1}) \oplus \dots \\ U N U^{-1} &= N_{\infty} \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, U es el isomorfismo buscado. ■

Podemos tener una idea un poco más clara de estos resultados si suponemos que \mathcal{H} es de dimensión finita. Sea N un operador normal y sea Λ_k el conjunto de todos los autovalores de N con multiplicidad geométrica k (cantidad de autovectores linealmente independientes asociados a cada autovalores de N), así para $\lambda \in \Lambda_k$ tenemos que $\dim(\ker(\lambda I - N)) = k$.

Entonces $\Lambda_k = \{\lambda_j^{(k)} : 1 \leq j \leq m_k\}$ y sea N_k el operador diagonalizable de dimensión $k \cdot m_k$ asociado a cada $\lambda_j^{(k)}$ con multiplicidad k , así.

$$N \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_p.$$

y $\sigma(N) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_p$ por lo tanto $\sigma(N_k) = \Lambda_k$, ya que cada autovalor de N_k tiene multiplicidad k .

Entonces

$$N_k \cong A_k^{(k)}$$

donde $A_k^{(k)}$ es un operador diagonalizable en un espacio de dimensión m_k con $\sigma(A_k) = \Lambda_k$.

Por lo tanto

$$N \cong A_1 \oplus A_2^{(2)} \oplus \dots \oplus A_p^{(p)}.$$

y $\sigma(A_i) \cap \sigma(A_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

Para ver esto más claro tenemos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.31. Sea \mathcal{H} con $\dim(\mathcal{H}) = 9$, $N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ y $\sigma(N) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$ con λ_1 con multiplicidad 1, λ_2 con multiplicidad 2, λ_3 con multiplicidad 2, λ_4 con multiplicidad 1 y λ_5 con multiplicidad 3, entonces:

$$\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_4\}; \Lambda_2 = \{\lambda_2, \lambda_3\} \text{ y } \Lambda_3 = \{\lambda_5\}$$

y $\sigma(N) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$. Por lo tanto

$$N_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; N_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}; N_3 = \begin{bmatrix} \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Entonces la descomposición por multiplicidad esta dada por

$$N \cong N_1 \oplus N_2 \oplus N_3.$$

Así, tenemos que

$$N_1 \cong A_1^{(1)}; N_2 \cong A_2^{(2)}; N_3 \cong A_3^{(3)}.$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; A_3^{(3)} = [\lambda_5]_{1 \times 1}$$

Por lo tanto

$$N \cong A_1 \oplus A_2^{(2)} \oplus A_3^{(3)}.$$

Recordando que

$$N \cong \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix}_{9 \times 9}$$

Podemos definir para este ejemplo la función de multiplicidad para N , $m_N : \mathbb{C} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$, dada por:

$$m_N = \chi_{\Lambda_1} + 2\chi_{\Lambda_2} + 3\chi_{\Lambda_3}$$

Esta función depende de Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 y si el respectivo $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece o no a algún Λ_i con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nótese que,

$$m_N(\lambda_4) = m_N(\lambda_1) = 1, \quad m_N(\lambda_2) = m_N(\lambda_3) = 2 \quad \text{y} \quad m_N(\lambda_5) = 3$$

es decir, la función de multiplicidad evaluada en cada autovalor coincide con la multiplicidad geométrica asociada al mismo.

Ahora bien, usando la notación del Teorema 3.30 podemos dar la siguiente definición de función de multiplicidad asociada a un operador normal.

DEFINICIÓN 3.32. Sea $N \in B(\mathcal{H})$ un operador normal con medida espectral μ y $\Delta_\infty, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ una sucesión de subconjuntos de Borel de $\sigma(N)$ disjuntos dos a dos tal que $[\mu_n] = [\mu|_{\Delta_n}]$. Definimos la función $m_N : \mathbb{C} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ por

$$m_N = \infty\chi_{\Delta_\infty} + \chi_{\Delta_1} + 2\chi_{\Delta_2} + 3\chi_{\Delta_3} + \dots$$

A la función m_N se le llama *función de multiplicidad para N* .

OBSERVACIÓN 3.33.

- i) La definición de la función m_N depende de la elección de los conjuntos Δ_n con $1 \leq n \leq \infty$ así como del operador N . Sin embargo, cualquier par de escogencia de los Δ_n difieren en conjuntos de medida cero (ver Teorema 3.24).
- ii) La función m_N es una función de Borel, pues es la suma de funciones características que a su vez son de Borel.
- iii) Si $m : \mathbb{C} \rightarrow \{\infty, 0, 1, 2, \dots\}$ es una función de Borel y μ es una medida con soporte compacto $K \subset \mathbb{C}$ entonces podemos definir conjuntos $\Delta_n = \{z : m(z) = n\}$ con $n = \infty, 1, 2, \dots$ y una familia de medidas mutuamente singulares $\{\mu_n\}$ dadas por $\mu_n(\Delta) = \mu(\Delta \cap \Delta_n)$ tales que, el operador $N = N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus N_{\mu_3}^{(3)} \dots$ tiene como medida espectral a μ y función de multiplicidad m c.s. $[\mu]$.

La discusión previa y el Teorema 3.30 nos permite presentar el teorema final de este capítulo, el cual es el resultado que compacta las hipótesis necesarias y suficientes para saber cuándo dos operadores normales son unitariamente equivalentes. Por lo tanto tenemos:

TEOREMA 3.34. *Dos operadores normales son unitariamente equivalentes si y solo si tienen la misma medida espectral μ y sus funciones de multiplicidad asociadas son iguales c.s. $[\mu]$.*

Los objetos a los que se refiere el teorema anterior, a saber, función de multiplicidad y medida espectral, constituyen un conjunto completo de invariantes unitarios para los operadores normales y a través de ellos es posible analizar y estudiar el problema de la equivalencia unitaria.

Bibliografía

- [1] C. BETZ, Introducción a la Teoría de la Medida e Integración Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. U.C.V.(1992). 40
- [2] C. S. KUBRUSLY, Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces, Birkhäuser, Springer Science, 2012.
- [3] J. CONWAY, A course in functional analysis, second edition, Springer, 1990. 12, 13, 38, 41, 59, 62
- [4] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, Linear Operators. Tomos 1 y 2, year.
- [5] V.I. BOGACHEV, Measure Theory, Volume I, Springer, 2007. 5
- [6] W. ARVESON, An invitation to C*-Algebras, Springer, 1976. 18
- [7] W. RUDIN, Functional Analysis, second edition, McGraw Hill, Inc. 1991. 19, 24, 29, 30, 34
- [8] W. RUDIN, Real and Complex Analysis, International Student Edition, McGraw Hill, Inc. 1970. 8, 10, 20, 34
- [9] W. SEIDEL, Supports of Borel measures, Fundamenta Mathematicae, Volume 133, Issue: 1, pages 67-80, 1989. 8