



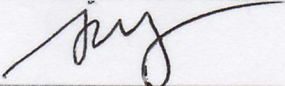
VEREDICTO

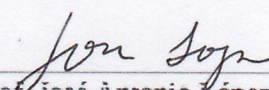
Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Cristian Americo Alvarado Patiño**, Cédula de Identidad V-20552045, bajo el título "Entrelazamientos inequivalentes en un sistema de tres qubits bajo operaciones locales estocásticas y comunicación clásica", a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de Licenciado en Física, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 31 de julio de 2019, a la 1:00 pm, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 31 días del mes de julio de 2019, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el autor del Trabajo Especial de Grado Prof Nelson Enrique Bolívar Cova.

Firma del jurado evaluador


Dr Antonio Maria Sexto Ysaías
Delgado De Pasquale
UCV


Prof. José Antonio López
Rodríguez
UCV


Prof Nelson Enrique Bolívar
Cova
UCV



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ENTRELAZAMIENTOS INEQUIVALENTES EN UN SISTEMA DE
TRES QUBITS BAJO OPERACIONES LOCALES ESTOCÁSTICAS
Y COMUNICACIÓN CLÁSICA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Cristian A. Alvarado P.

ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Luis A. González D.
Dr. Nelson Bolívar

Mayo-2019

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**ENTRELAZAMIENTOS INEQUIVALENTES EN UN SISTEMA DE
TRES QUBITS BAJO OPERACIONES LOCALES ESTOCÁSTICAS
Y COMUNICACIÓN CLÁSICA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Cristian A. Alvarado P.

ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Luis A. González D.
Dr. Nelson Bolívar

Mayo-2019
Caracas-Venezuela

AGRADECIMIENTOS.

Sinceramente, no creo que quepa en este espacio tanta gente a la que le estoy agradecido de corazón, pero haré un esfuerzo por incluirlos a todos. Tal vez, a propósito de este trabajo, sería provechoso establecer clases de equivalencia y agradecer a representantes de cada clase, sin embargo, no lo haré de este modo. Le agradezco enormemente a mi familia por apoyarme en todas las decisiones de mi vida, en particular, por inspirarme a continuar en el mundo científico, en mis momentos de mayores dudas. Les agradezco a ellos por inspirarme a ver a la física como un instrumento en manos de la humanidad y en beneficio del bien común, lo que me ha ayudado a continuar. A mi esposa Irazú Bezares, que ha sido mi apoyo a lo largo de mi carrera. Gracias a ella por su paciencia y su confianza en mí, sin su apoyo este trabajo se me habría hecho cuesta arriba. Gracias a mi suegra, Josefina Silguera, que me ha brindado su apoyo incondicional y ha confiado en mí. Le agradezco a mi amigo, con el que trabajo actualmente: Abrahán Parra y su familia, ellos son, sin ninguna vergüenza del uso de la palabra, unos ángeles para mi esposa y para mí. Sin su apoyo no creo que estuviera justo en este momento redactando estas líneas.

Estoy profundamente agradecido con la Escuela de Percepción Simón Rodríguez, donde me forma actualmente. Gracias a mi hermano Alfredo Mujica, y todos los integrantes de la escuela, sin excepciones, porque me han acompañado en este proceso desde su comienzo y, literalmente, lo han visto como suyo propio. Gracias por enseñarnos a ser servidores de la humanidad. Estoy enormemente agradecido con mi tutor y amigo Luis González, por su dedicación y por su amor. No podría estar más satisfecho ni más agradecido con Dios por ponerlo en mi vida. Junto a mi tutor, no puedo dejar de mencionar a Bárbara Montañés. Ella fue el medio por el que logré ponerme en contacto con Luis González y el IVIC (institución a la que le estoy muy agradecido igualmente) y desde entonces se ha convertido en una gran amiga, y justo en este momento está en el IVIC esperando por mí, para ayudarme con detalles técnicos de la compilación de este trabajo.

Gracias a Nelson Bolívar por su paciencia y su inspiración, por su comprensión y delicadeza en su trato con sus estudiantes. Gracias a la Universidad Central de Venezuela, y con toda la responsabilidad de lo que voy a decir, gracias a cada persona que no he nombrado, gracias a toda persona con la que me he cruzado, incluso gracias a aquellos con los que tan sólo he cruzado miradas, todos han colaborado en este proceso, pues reconozco que no es un proceso local y, por lo tanto, no es un logro únicamente académico. Gracias a todos por ayudarme a dar lo mejor de mí y gracias a Dios por hacer todo esto posible, por confiar en nosotros y por reconocernos con un amor y paciencia infinita, incluso cuando nosotros no lo reconocemos a Él.

RESUMEN.

Bajo el criterio de operaciones locales asistidas con comunicación clásica, si dos estados pueden ser interconvertidos entre sí, con alguna probabilidad no nula de éxito, queda definida una clase de equivalencia estocástica. Observando las características de los subsistemas de un sistema compuesto, para estas clases de equivalencia, nos damos cuenta de que, una clase define un tipo de entrelazamiento, así que, para el caso de sistemas tripartitos de qubits, encontramos que las operaciones locales estocásticas asistidas con comunicación clásica, dividen al conjunto de estados de estos sistemas, en seis clases que son inequivalentes entre sí. De estas seis clases, una está formada por estados separables, tres tienen entrelazamiento bipartito, y el resultado más importante es que, las dos últimas, comparten entrelazamiento tripartito. Es decir, mostramos que los estados tripartitos entrelazados se subdividen en dos clases inequivalentes, a saber, las clases con entrelazamiento GHZ y las que tienen entrelazamiento W.

Índice general

Lista de figuras	11
Introducción.	13
1. La Mecánica Cuántica y el Operador Densidad.	17
1.1. Definición del Operador Densidad	17
1.1.1. Colectivo Estadístico	18
1.2. Propiedades del Operador Densidad	18
1.2.1. Estados puros y estados mixtos	19
1.3. Superposición incoherente de estados puros	19
1.4. Interpretación Física del Operador Densidad	20
1.4.1. Forma canónica del Operador Densidad	20
1.4.2. Forma no canónica del Operador Densidad	21
2. Sistemas Compuestos y Entrelazamiento Cuántico	23
2.1. Estado de un Sistema Compuesto Bipartito	23
2.2. Propiedades Esenciales del Producto Tensorial	24
2.3. Entrelazamiento Cuántico	25
2.3.1. Estado Puro Entrelazado	25
2.4. Estados Puros y Mixtos en Sistemas Compuestos	26
2.4.1. Estado de un subsistema	26
3. Conceptos de la Teoría de Información Cuántica	29
3.1. El Qubit	29
3.1.1. Vector de Bloch	30
3.1.2. Estados Mixtos Qubits en la Esfera de Bloch	31
3.2. Información Cuántica	33
3.2.1. Entropía Cuántica o de Von Neumann	34
3.2.2. Obtención de información	35

3.3.	Operaciones locales asistidas con comunicación clásica (OLCC)	37
3.3.1.	OLCC	38
3.3.2.	Transformación de un estado puro bipartito entrelazado mediante OLCC	38
3.4.	Medida de entrelazamiento	39
4.	La Descomposición de Schmidt	41
4.1.	Descomposición de Schmidt	42
4.2.	Descomposición en Valores Singulares (DVS)	42
4.2.1.	DVS	43
4.3.	Deducción de la Descomposición de Schmidt para el Caso Bipartito	44
4.3.1.	Ventajas de la descomposición de Schmidt bipartita	45
4.4.	Descomposición de Schmidt para un sistema de tres qubits	48
4.4.1.	Estado puro de un sistema tripartito de qubits	48
4.4.2.	Descomposición de Schmidt de orden superior	49
4.4.3.	Representación no superflua de un estado puro de tres qubits	50
5.	Clasificación de Estados Tripartitos Entrelazados en un Sistema de Qu- bits Bajo OLCC Estocásticas	55
5.1.	Tipos de entrelazamiento bajo OLCC estocásticas	55
5.1.1.	Clases de equivalencia	56
5.2.	Operaciones Locales Estocásticas asistidas con comunicación clásica (OLECC)	57
5.2.1.	OLECC y Operadores Locales Invertibles (OLI)	58
5.3.	Tipos de entrelazamiento en sistemas de tres qubits entrelazados	59
5.3.1.	Método para la clasificación	60
5.3.2.	Estados de los subsistemas y rangos locales	63
5.3.3.	Clasificación de los estados en función de los rangos locales	65
5.3.4.	Estados GHZ y W	77
5.3.5.	Inequivalencia de las clases bajo OLECC	79
5.3.6.	Medida de entrelazamiento tripartito e inequivalencia entre las cla- ses $ GHZ\rangle$ y $ W\rangle$	80
5.3.7.	Ortogonalidad Por Subespacio	82
5.3.8.	Jerarquía entre las clases	82
	Conclusiones.	83

A. Rango de una matriz.	87
A.1. Criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en función de su rango .	87
A.2. OLECC y rangos locales	88

Índice de figuras

- 5.1. Grupos de jerarquía entre las 6 clases inequivalentes bajo OLECC. La flecha indica que los estados están relacionados mediante una OL no invertible. . 84

INTRODUCCIÓN.

En la teoría de la información cuántica (TIC) tiene gran importancia el hallazgo de clases de equivalencia. Esto se debe a que, la realización de una tarea cualquiera en TIC, puede ser llevada a cabo con cualquiera de los estados que forman parte de una misma clase de equivalencia. Elegir, por ejemplo, estados máximamente entrelazados, a la hora de realizar una tarea dada, puede facilitarnos el trabajo de una manera incalculable.

Se sabe para sistemas bipartitos, que para un gran número de copias de un estado puro dado, cualquier estado bipartito puede ser convertido, de manera asintótica, en el estado EPR, máximamente entrelazado $|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$, bajo operaciones locales y comunicación clásica (OLCC) [1]. Tomando en cuenta el tratamiento asintótico, puede decirse que los estados puros bipartitos entrelazados, pertenecen todos a una única clase de equivalencia, que pudiera llamarse clase EPR, por la elección de un estado EPR como el representante de la clase. En general, decimos que existen dos tipos de entrelazamiento, o dos clases de equivalencia, para los estados de un sistema bipartito, a saber, los estados que son separables (cuando no hay entrelazamiento) y los estados con entrelazamiento EPR.

Este trabajo se inspira en la pregunta ¿qué ocurre para los sistemas tripartitos con respecto a los tipos de entrelazamiento? ¿Los estados de un sistema tripartito entrelazado también pertenecen a una única clase de equivalencia (un único tipo de entrelazamiento)? Nuestro propósito es dar respuesta a esta pregunta. Uno de los puntos a considerar para nuestra respuesta es que no haremos un tratamiento asintótico, es decir, en este trabajo, nosotros nos enfocaremos en una copia simple de un estado. Para una copia simple, es conocido que dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ pueden ser interconvertidos entre sí, con certeza, bajo OLCC, únicamente si se relacionan mediante operadores locales unitarios (LU). Pero incluso en los sistemas bipartitos más simples, no es posible encontrar LU que relacionen a $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$. Este problema se resuelve definiendo la equivalencia estocástica. Es decir, no exigimos la total certeza para la interconversión de los estados, nos basta con que exista cierta probabilidad no nula de que puedan convertirse uno en el otro. Por supuesto, esto traerá consecuencias sobre la realización de la tarea. Ahora se realizará la tarea también con una cierta probabilidad no nula dependiendo del estado que sea usado para llevarla a cabo. Así, las operaciones que definen nuestras clases de equivalencia, son operaciones locales estocásticas asistidas con comunicación clásica (OLECC). Veremos que estas operaciones están representadas por operadores locales invertibles (OLI). Una vez definidas las OLECC, vemos que, para caracterizar a nuestros estados, resulta impresionantemente beneficioso, observar los rangos locales de las matrices densidad asociadas a cada uno de los subsistemas, de hecho, probamos que las clases quedan definidas justo por las carac-

terísticas de estos rangos locales, así que, en función de los rangos locales encontramos 6 tipos de entrelazamiento para estados de un sistema tripartito: la primera clase tiene entrelazamiento nulo, las 3 siguientes comparten entrelazamiento bipartito y, el resultado más sorprendente, es que aparecen 2 clases inequivalentes para los estado con verdadero entrelazamiento tripartito [1]. Estamos usando el hecho de que una clase de equivalencia define un tipo de entrelazamiento.

Nuestra manera particular de reproducir esta clasificación, se basa en la obtención de una descomposición no superflua (inspirada en una descomposición de Schmidt generalizada al caso tripartito) del estado de un sistema tripartito de qubit. Hecho esto, vemos como la clasificación sale de una manera muy natural, y encontramos argumentos muy simples y de alto significado físico, para la aparición de dos clases de equivalencia para estados tripartitos entrelazados: las clases $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$.

Especialmente, nos planteamos el objetivo de esta manera:

Objetivo General: Identificar y caracterizar todas las clases de entrelazamientos de estados puros de un sistema de tres qubits bajo operaciones locales estocásticas y comunicación clásica (OLECC).

Objetivos Específicos:

- Explicar que son las OLECC.
- Explicar qué son los estados GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) y W (R. F. Werner).
- Explicar qué es la medida de correlaciones tripartitas de Coffman.
- Mostrar que un estado tripartito, no trivial, entrelazado puede ser convertido, mediante OLECC, en un estado GHZ o en un estado W, y que esos dos tipos dividen al conjunto de estados entrelazados en dos conjuntos no relacionados mediante operaciones locales estocásticas con comunicación clásica.

Para dar cumplimiento a nuestros objetivos, de manera satisfactoria, estructuramos este trabajo en 5 capítulos. En ellos encontramos:

- Capítulo 1: Aquí hacemos una representación de la mecánica cuántica en el lenguaje del operador densidad, basándonos en el concepto de colectivo estadístico para la definición de un estado cuántico mixto. Presentaremos los aspectos más resaltantes del mismo, en función de nuestro propósito.
- Capítulo 2: En vista de que este trabajo se centra en sistemas físicos compuestos, es de vital importancia hacer una introducción a sistemas compuestos y su relación con

el fenómeno de entrelazamiento cuántico. Presentamos el formalismo matemático específicamente para el caso de sistemas bipartitos, e introducimos algunos conceptos útiles para nuestro tratamiento.

- Capítulo 3: En este capítulo introducimos todos los conceptos de la teoría de la información cuántica que usaremos en nuestro desarrollo. Hacemos énfasis en el concepto de sistemas físicos de qubits, y mostramos la forma que adoptan la mayoría de nuestros conceptos aquí expuestos, para el caso qubit.
- Capítulo 4: En este capítulo nos dedicamos, de la manera más detallada posible, a hacer una exposición de una de las herramientas más poderosas que facilitan el cumplimiento de nuestro objetivo, a saber, la descomposición de Schmidt. Hacemos esto para concluir, realizando una descomposición de Schmidt generalizada al caso tripartito. Al final del capítulo presentamos nuestro primer resultado: hacemos una descomposición no superflua de un estado tripartito de qubit, la cual encontramos que consta de 5 términos.
- Capítulo 5: Aquí desarrollamos todo nuestro trabajo de clasificación, propiamente dicho. Comenzamos explicando lo que son las clases de equivalencia y como nos lleva a definir un tipo de entrelazamiento para los estados a considerar, y luego explicamos nuestro tratamiento estocástico. A continuación definimos el método usado para nuestra clasificación, basado en los trabajos de R. Tarrach e I. Cirac, para finalmente presentar nuestra propuesta, basada en la observación del estado tripartito en su forma no superflua, lo que nos dirige naturalmente, mediante argumentos físicos, a hacer una clasificación completa que comparamos con la realizada por R. Tarrach. Al final del capítulo mostramos la inequivalencia entre los seis tipos de entrelazamiento (entre las que encontramos a los estados $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$ como representantes de los estados tripartitos entrelazados en sus tres subsistemas, o estados con verdadero entrelazamiento tripartito), y mostramos la relación de jerarquía entre estas clases.

Capítulo 1

La Mecánica Cuántica y el Operador Densidad.

Generalmente, en la mecánica cuántica, cuando queremos describir un sistema, no tenemos un conocimiento total de su estado actual, sino que más bien, tenemos una distribución probabilística de estados en los que pudiera encontrarse el sistema. Es decir, no podemos representar el estado del sistema usando sólo un ket unidad en el espacio de Hilbert, recurrimos a una herramienta muy útil en mecánica cuántica y especialmente útil en la *Teoría de la Información Cuántica*, que consiste en definir un operador que representa en sí la distribución probabilística de todos los estados posibles de un sistema dado: el *Operador Densidad*.

1.1. Definición del Operador Densidad

El lenguaje del *Operador Densidad* proporciona un medio conveniente para describir sistemas cuánticos cuyos estados no son completamente conocidos.

DEFINICIÓN 1: Si un sistema físico se encuentra en un estado $|\psi_i\rangle$, con probabilidad p_i , donde el índice i denota la probabilidad con la que ocurre el i -ésimo estado, el estado del sistema queda definido por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.1)$$

donde, en general, llamamos a $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ un *Colectivo Estadístico de estados puros* y ρ el *Operador Densidad del sistema*. El *Operador Densidad* también se conoce como *matriz densidad* y representa el estado del sistema [2].

1.1.1. Colectivo Estadístico

Un estado $|\psi\rangle$ de un sistema da testimonio de cómo fue preparado, por lo tanto, teniendo certeza total de que este es el estado del sistema, tiene sentido hablar del estado único del sistema. En este caso, podemos hablar de medidas únicas o elementales, que básicamente constan de un montaje experimental diseñado para determinar el estado del sistema con una sola medida. Ahora bien, no siempre es posible, de hecho es lo menos frecuente en física, encontrar exactamente el mismo resultado de una medida elemental para dos montajes experimentales idénticos de un mismo sistema. Por ejemplo, supongamos que diseñamos un montaje experimental para realizar una medida elemental dada sobre un sistema A y obtenemos el resultado $|\psi_A\rangle$. Luego decidimos repetir el mismo experimento sobre un sistema idéntico A y resulta que obtenemos, de la misma medida elemental, el resultado $|\phi_A\rangle$. Y así sucesivamente, para diferentes realizaciones obtenemos diferentes resultados. En estos casos, ya no podemos hablar de una medida elemental, sino de un *Colectivo* de medidas.

Una medida colectiva consiste en experimentos elementales repetidos realizados sobre un gran número de sistemas preparados de forma idéntica. Esto arroja un *Colectivo Estadístico* de estados puros únicos y una distribución de probabilidades, cada una asociada a un estado puro del colectivo.

DEFINICIÓN 2: *Un Colectivo Estadístico consiste de un número de estados puros únicos asociados a un mismo sistema sobre el que se ha realizado repetidamente la misma medida elemental.*

En la *teoría de la información cuántica*, el *Colectivo Estadístico* se conoce como el *Alfabeto* de la *fuerza de información*, donde cada estado puro único del colectivo representa un *símbolo* contenido en el espacio llamado *Alfabeto* de la *fuerza de información*, que contiene todos los *símbolos*. Cada símbolo sale de la fuente con una cierta probabilidad asignada por la función de distribución probabilística de la fuente.

1.2. Propiedades del Operador Densidad

Para estar acorde con los postulados de la mecánica cuántica, el *Operador Densidad* debe cumplir las siguientes propiedades:

- ρ tiene traza igual a uno

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (1.2)$$

- ρ es un operador positivo

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad (1.3)$$

para cualquier vector $|\psi\rangle$ perteneciente al espacio vectorial en el que ρ ha sido definido.

Note que la segunda propiedad también implica que ρ es Hermítico: $\rho^\dagger = \rho$ [3].

1.2.1. Estados puros y estados mixtos

Como veremos en la interpretación del *Operador Densidad*, la ecuación (1.1) describe a un sistema físico en *estado mixto*, pero en muchos casos vamos a necesitar escribir el *Operador Densidad* asociado a un *estado puro*, es decir, el estado del sistema cuando podemos conocerlo de manera exacta con una medida única o elemental. Se deduce fácilmente que tendrá la siguiente forma

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (1.4)$$

donde $|\psi\rangle$ representa al *estado puro* del sistema. En función de lo expuesto el *Operador Densidad* presenta las siguientes propiedades que evidencian el estado del sistema en cuestión:

- Estados puros

$$\text{Tr}[\rho^2] = 1 \quad (1.5)$$

- Estados mixtos

$$\text{Tr}[\rho^2] < 1. \quad (1.6)$$

La igualdad ocurre para estados puros y la desigualdad para estados mixtos [2].

1.3. Superposición incoherente de estados puros

Supongamos que tenemos una base $\{|\psi_i\rangle\}$ para el espacio de Hilbert \mathcal{H} de un determinado sistema. Vamos a hacer una comparación entre un estado mixto y un estado puro, ambos representados en esa misma base. A saber

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{vs} \quad |\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle.$$

En el lado izquierdo tenemos un estado mixto y en el lado derecho un estado puro para un sistema dado. Podemos incluir una fase relativa en algunos de los elementos de la base y ver qué ocurre en ambos casos. Para ello, es conveniente escribir la matriz densidad asociada al estado puro $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, lo que resulta en

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{vs} \quad \rho_\psi = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i} \sqrt{p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|.$$

Ahora es muy sencillo apreciar que si incluimos una fase relativa $e^{i\phi}$ a cualquiera de los estados de la base $|\psi_i\rangle$, el estado mixto no será afectado en lo absoluto, mientras que el estado puro sí. Así, concluimos que el estado mixto ρ es totalmente insensible ante diferencias de fase de sus elementos constituyentes, mientras que el estado puro es único frente a diferencias de fases de sus elementos constituyentes, es decir, una fase relativa distingue entre dos estados puros mientras que es indistinguible para estados mixtos de un mismo sistema. Por esta razón, a los estados puros se les llama *superposición coherente* de estados y a los estados mixtos *superposición incoherente* de estados puros. Que una superposición sea *coherente* quiere decir que admite interferencia (relación definida entre las fases). El término $\sum_{i \neq j} \sqrt{p_i} \sqrt{p_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j|$, de la ecuación del lado derecho (para estados puros) está relacionado con esa interferencia.

1.4. Interpretación Física del Operador Densidad

En la ecuación (1.1), los estados $|\psi_i\rangle$ no son necesariamente ortogonales entre sí. La ortogonalidad o no de este conjunto da lugar a dos interpretaciones diferentes del *Operador Densidad*: *colectivo estadístico de estados puros* ó *colectivo estadístico de estados mixtos* (colectivo de colectivos).

1.4.1. Forma canónica del Operador Densidad

Para un *Operador Densidad* dado ρ , podemos encontrar un conjunto ortonormal $|\psi_j\rangle$ tal que ρ tenga la forma canónica

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad (1.7)$$

donde los números p_j son los autovalores de ρ , y los vectores $|\psi_j\rangle$ son sus correspondientes autovectores. Dado que ρ es no-negativo y de traza unidad, los números p_j satisfacen

$$p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

El operador de proyección $P_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$ es un observable que describe la propiedad de “estar en el estado $|\psi_k\rangle$ ”. Es decir, este operador distingue el estado en el que se encuentra el sistema. La probabilidad de que un sistema descrito por el *Operador Densidad* ρ se encuentre en el estado $|\psi_k\rangle$, viene dado por el valor esperado del operador P_k , que se expresa como:

$$\text{Tr} [P_k \rho] = p_k. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, el autovalor p_k del operador ρ , es la probabilidad de que un sistema en el estado mixto ρ se encuentre en el estado puro $|\psi_k\rangle$.

Interpretación del Operador Densidad

Un estado mixto ρ de un sistema físico es un *Colectivo Estadístico* de estados puros $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots\}$ (que forman un conjunto ortonormal), donde cada estado puro $|\psi_j\rangle$ ocurre con probabilidad p_j . La probabilidad p_j son los autovalores del operador ρ , y $|\psi_j\rangle$ son sus autovectores.

1.4.2. Forma no canónica del Operador Densidad

La forma no canónica del *Operador Densidad* viene dada por un conjunto de estados $\{|\phi_j\rangle\}$ no ortonormales entre sí, que se expresa como:

$$\rho = \sum_j q_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j|, \quad (1.9)$$

donde $q_j \geq 0$, $\sum_j q_j = 1$. Aquí los números q_j no son los autovalores del *Operador Densidad*.

Interpretación de un colectivo de estados mixtos

Para esta forma del *Operador Densidad*, ahora tenemos un colectivo de estados mixtos (o colectivo de colectivos, ya que un estado mixto ya es un *Colectivo Estadístico* de estados puros), por lo que decimos que ρ describe un colectivo de sistemas cuánticos que han sido preparados en el estado $|\phi_k\rangle$ con probabilidad q_k .

Notemos que si $\{|\phi_k\rangle\}$ fuese un conjunto ortonormal, la probabilidad q_k de *ser preparado* en el estado $|\phi_k\rangle$ coincidiría con la probabilidad p_k de *ser encontrado* en el estado $|\phi_k\rangle$. Pero si los estados no son ortonormales, la probabilidad p_k es mayor que q_k , porque si un sistema se ha preparado en el estado $|\phi_j\rangle$, con $j \neq k$, también tiene cierta probabilidad de *ser encontrado* en el estado $|\phi_k\rangle$. La probabilidad p_k es el valor esperado de $P_k = |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$ en el estado ρ :

$$p_k = \text{Tr} (|\phi_k\rangle \langle \phi_k| \rho) \geq q_k \quad (1.10)$$

[4].

Capítulo 2

Sistemas Compuestos y Entrelazamiento Cuántico

En este trabajo vamos a considerar sistemas cuánticos que están formados por varias partes relacionadas entre sí. Cuando nos enfrentamos a un problema de este tipo, el espacio de Hilbert en el que se describe el sistema debe ser aumentado con respecto a los sistemas simples de una sola parte. Este espacio contiene vectores que provienen del *producto tensorial* de vectores de cada uno de los subespacios (el *producto tensorial* para el espacio de Hilbert del sistema compuesto, contiene todos los posibles productos de los vectores de los subespacios). En particular, vamos a considerar sistemas compuestos de dos partes A y B para introducir el formalismo. Estos son llamados *sistemas bipartitos*.

2.1. Estado de un Sistema Compuesto Bipartito

Supongamos que un subsistema A de un sistema bipartito se encuentra en el estado puro $|\psi^A\rangle$ perteneciente al espacio de Hilbert \mathcal{H}^A , y el otro subsistema B se encuentra en el estado puro $|\psi^B\rangle$ perteneciente al espacio de Hilbert \mathcal{H}^B , se define el estado del sistema compuesto AB como:

$$|\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle.$$

La base del formalismo del producto tensorial para sistemas compuestos se sigue de este razonamiento: Si \mathcal{H}^A es el espacio de Hilbert para el subsistema A y \mathcal{H}^B es el espacio de Hilbert para el subsistema B , entonces $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ es el espacio de Hilbert para el sistema compuesto AB . Los únicos estados del sistema compuesto AB no son los de arriba, cualquier combinación lineal de estados producto es un estado de ese sistema.

Supongamos que $\{|\psi_j^A\rangle\}$ es una base ortonormal para \mathcal{H}^A y que $\{|\psi_k^B\rangle\}$ es una base ortonormal para \mathcal{H}^B , entonces uno puede demostrar que el conjunto formado por los

vectores

$$|\psi_{jk}\rangle = |\psi_j^A\rangle \otimes |\psi_k^B\rangle \quad (2.1)$$

forman una base ortonormal para el espacio de producto tensorial

$$\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B = \mathcal{H}^{AB}.$$

Por lo tanto, cualquier vector $|\psi\rangle$ en \mathcal{H}^{AB} puede ser representado de manera única, como

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} c_{jk} |\psi_j^A\rangle \otimes |\psi_k^B\rangle \quad (2.2)$$

con

$$c_{jk} = (\langle \psi_j^A | \otimes \langle \psi_k^B |) |\psi\rangle$$

y la condición de normalización

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \sum_{jk} |c_{jk}|^2 = 1.$$

Más adelante usaremos el hecho de que el producto tensorial es asociativo

$$\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \mathcal{H}^C = (\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B) \otimes \mathcal{H}^C = \mathcal{H}^A \otimes (\mathcal{H}^B \otimes \mathcal{H}^C) \quad (2.3)$$

[4]

2.2. Propiedades Esenciales del Producto Tensorial

Las propiedades que queremos resaltar aquí, dado que serán muy utilizadas en este trabajo, son la *Bilinealidad* y la *Regla del producto interno*.

Bilinealidad: Para cualquier $|\psi\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathbb{C}^2$, $|\phi\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathbb{C}^2$, y $a \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$(a) (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\phi\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi\rangle,$$

$$(b) |\psi\rangle \otimes (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\phi_1\rangle + |\psi\rangle \otimes |\phi_2\rangle,$$

$$(c) a(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (a|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (a|\phi\rangle).$$

Producto interno: Para cualquier $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathbb{C}^2$, $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathbb{C}^2$, se tiene que:

$$\langle \psi_1 \otimes \phi_1 | \psi_2 \otimes \phi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle, \quad (2.4)$$

donde usamos la notación abreviada $|\psi \otimes \phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ [5].

2.3. Entrelazamiento Cuántico

Los sistemas compuestos dan lugar al fenómeno más resaltante de la mecánica cuántica; *el entrelazamiento*. Para comprender un poco de que se trata, vamos a comenzar con un ejemplo: Supongamos que tenemos un estado compuesto bipartito de la forma

$$|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (2.5)$$

Si Alice se encuentra en el subsistema A y Bob en el subsistema B , ni Alice ni Bob tendrán dificultad alguna en decir en cuál estado se encuentra su subsistema. Alice reportará $|\psi_A\rangle$ y Bob reportará $|\psi_B\rangle$.

Pero, ¿qué ocurre si el sistema compuesto tiene la forma:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_0^A\rangle \otimes |\phi_0^B\rangle + |\psi_1^A\rangle \otimes |\phi_1^B\rangle). \quad (2.6)$$

Ahora no resulta tan fácil, tanto para Alice como para Bob, decir con exactitud en cuál estado está su subsistema, debido a que (2.6) no es un estado separable en el producto A y B .

Los estados de la ecuación (2.5), se conocen como estados *desentrelazados*, separables o estados del producto, mientras que los estados que tienen la forma de la ecuación (2.6), se conocen como *estados entrelazados*.

2.3.1. Estado Puro Entrelazado

Un estado puro bipartito $|\psi_{AB}\rangle$ está entrelazado si éste no puede ser escrito como el estado producto $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, para cualquier elección de los estados $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$.

Los estados entrelazados existen, en un sentido estrictamente matemático, porque en el espacio de Hilbert del sistema compuesto \mathcal{H}^{AB} siempre es posible encontrar una combinación lineal de los estados del producto que resulte en la forma de la ecuación (2.6), ya que estos también son vectores definidos en ese espacio [6].

“Incluso si el estado inicial de un sistema compuesto es separable, en general, se entrelazará durante la evolución del tiempo si hay algún acoplamiento entre los subsistemas. Cuando el estado de un sistema compuesto está entrelazado, no tiene sentido hablar del estado de un subsistema en el sentido utilizado hasta ahora (es decir, como algo que puede describirse mediante un solo vector en el espacio de Hilbert del sistema)” [4].

2.4. Estados Puros y Mixtos en Sistemas Compuestos

En esta sección mostraremos que, dependiendo del estado del sistema global; es decir, si es separable o si está entrelazado, los estados de los subsistemas serán puros o mixtos, respectivamente.

2.4.1. Estado de un subsistema

Supongamos que tenemos un sistema bipartito en estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, donde $\{|\psi_i^A\rangle\}$ es una base para \mathcal{H}^A y $\{|\psi_j^B\rangle\}$ es una base para \mathcal{H}^B . Sabiendo que $\{|\psi_i^A\rangle \otimes |\psi_j^B\rangle\}$ es una base para $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, entonces el estado del sistema global se puede representar como

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i^A\rangle \otimes |\psi_j^B\rangle \quad (2.7)$$

[4].

Traza Parcial

Sabiendo que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ es un operador definido en $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, para un sistema bipartito, el operador ρ_A , que actúa en \mathcal{H}^A , se obtiene mediante la *traza parcial* sobre \mathcal{H}^B , definida como

$$\rho_A = Tr_B(\rho) \equiv \sum_l (\mathbb{I} \otimes \langle\psi_l^B|) \rho (\mathbb{I} \otimes |\psi_l^B\rangle), \quad (2.8)$$

donde $\{|\psi_l^B\rangle\}$ es una base para \mathcal{H}^B . De manera similar, se define $\rho_B = Tr_A(\rho)$, que actúa en \mathcal{H}^B .

La traza parcial nos permite “olvidar” el segundo subsistema. En otras palabras, la traza parcial es la operación cuántica más simple que nos permite hacer una descripción local del estado de un sistema global compuesto [7].

Como vimos, la ecuación (2.8), describe el estado de un subsistema, y si ahora usamos (2.7) y (2.8), obtenemos para el subsistema A:

$$\rho_A = \sum_{ikl} c_{il} c_{kl}^* |\psi_i^A\rangle \langle\psi_k^A|. \quad (2.9)$$

Podemos manipular esta expresión a conveniencia, para obtener:

$$\rho_A = \sum_l \left(\sum_i c_{il} |\psi_i^A\rangle \right) \otimes \left(\sum_k c_{kl}^* \langle\psi_k^A| \right) = \sum_l |\psi_l^A\rangle \langle\psi_l^A|. \quad (2.10)$$

Esta expresión nos es útil para llevar a cabo, finalmente, el objetivo de esta subsección, ya que si decimos que el estado global $|\psi\rangle$ es separable

$$|\psi\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle \quad (2.11)$$

podemos afirmar que el estado del subsistema A es $|\psi^A\rangle$, el cual se puede expresar en la base $\{|\psi_i^A\rangle\}$, lo cual ocasiona que ρ_A colapse a

$$\rho_A = |\psi^A\rangle\langle\psi^A|. \quad (2.12)$$

Lo mismo ocurre para ρ_B , con lo que concluimos que si el estado global $|\psi\rangle$ es separable, los estados de los subsistemas son puros; de lo contrario, tendremos estados mixtos si el estado global está *entrelazado* [4].

Capítulo 3

Conceptos de la Teoría de Información Cuántica

3.1. El Qubit

En la teoría de información clásica es fundamental el concepto de *bit* de información, que es una unidad de medida de información. Su nombre hace referencia al dígito binario, ya que se basa en la posibilidad de seleccionar entre dos alternativas que tienen el mismo grado de probabilidad. Como vemos, es un sistema de dos niveles: cero y uno.

En el caso cuántico, el término *bit* es reemplazado por el de *qubit*, del inglés “quantum bit”, bit cuántico; que representa la unidad de información para la Mecánica Cuántica.

Un sistema *qubit* se representa en el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 . Por lo tanto, un estado de un sistema *qubit* es de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^1 c_i |\phi_i\rangle \in \mathbb{C}^2 \quad (3.1)$$

donde la base ortonormal para \mathbb{C}^2 , $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ está representada por los estados

$$|\phi_0\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad |\phi_1\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

En el marco de la teoría de la información, a esta base se le llama base computacional y cualquier estado *qubit* se representa como:

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \quad (3.3)$$

con $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$, que es la condición de normalización. Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son análogos cuánticos de los *bit* clásicos 0 y 1, respectivamente.

A diferencia de un sistema de *bit* clásicos, donde existen sólo dos estados distintos, un sistema *qubit* tiene infinitamente más estados: todos los estados que soporta la ecuación (3.1). “Un *qubit* puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$, hasta que sea observado” [2]. Esta es una de las características aprovechadas por la computación y la información cuántica. Cualquier sistema cuántico de dos niveles es un sistema *qubit*. Por ejemplo: el espín de un electrón, la polarización de un fotón o un átomo con un estado base y uno excitado.

3.1.1. Vector de Bloch

Podemos notar que el estado de un sistema físico y un vector unitario perteneciente al espacio de estados o espacio de Hilbert asociado al sistema, no tienen una relación uno a uno. Diferentes vectores unitarios paralelos unos a otros corresponden al mismo estado. Por ejemplo, $|\psi\rangle$ e $i|\psi\rangle$ corresponden al mismo estado cuántico. En general, si dos vectores $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ están relacionados por $|\psi'\rangle = c|\psi\rangle$ con c complejo, de magnitud 1, ellos corresponden al mismo estado cuántico. Esta es llamada una **indefinición de fase**, con $c = e^{i\phi}$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ y es llamada **fase**. Una manera de lograr una identificación uno a uno entre un vector y un estado, es representar el estado de un sistema *qubit* como un vector real tridimensional llamado **vector de Bloch**. Todos los **vectores de Bloch** viven en una esfera unitaria llamada **Esfera de Bloch**. La representación de un estado en la **Esfera de Bloch** nos permite comprender geoméricamente las propiedades del estado, porque el **vector de Bloch** vive en \mathbb{R}^3 .

Para introducir el **vector de Bloch**, notemos que cualquier estado *qubit* puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle \quad (3.4)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$, para garantizar la correspondencia uno a uno con un vector unitario de \mathbb{C}^2 , incluyendo la **indefinición de fase**. Se ha deducido la ecuación (3.4), tomando en cuenta que $|\psi\rangle$ y $e^{i\varphi}|\psi\rangle$ son el mismo estado. Ahora notemos que los rangos de θ y ϕ son exactamente los mismos que los parámetros angulares de las coordenadas polares para la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, ahora tenemos una correspondencia uno a uno entre un estado *qubit* $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ y un vector tridimensional

$$\vec{b} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \in \mathbb{R}^3 \quad (3.5)$$

en la esfera unitaria, mediante la ecuación (3.4). Este es el **vector de Bloch**. Se puede ver fácilmente de la relación (3.4), que los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ corresponden a los polos norte y sur respectivamente de la **Esfera de Bloch** [6, 3, 5].

3.1.2. Estados Mixtos Qubits en la Esfera de Bloch

Recordemos que un estado mixto está representado por una matriz llamada *matriz de densidad*. Por ello, es justo hablar un poco acerca de los operadores en un sistema de *qubits*.

Operador observable: Un operador observable es cualquier operador Hermítico definido en el espacio de estados. Tiene una *descomposición espectral*

$$O = \sum_m p_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|. \quad (3.6)$$

donde $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ es el proyector en el autoespacio de O con autovalor m [2].

Observable qubits: Es cualquier operador Hermítico Q , observable, que se representa mediante una base ortonormal del espacio de Hilbert de un *qubit*. Están representados por matrices Hermíticas 2×2 .

De estas matrices hay un grupo de particular importancia que se conocen como matrices de Pauli. Son 3 matrices 2×2 , de la forma

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Su importancia, entre muchas otras, a efectos de lo que queremos resaltar aquí, radica en que, junto con la matriz unidad dos-dimensional, \mathbb{I}_2 , forman una base en el espacio vectorial real de cuatro dimensiones de todas las matrices 2×2 Hermíticas. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente observación:

Con respecto a una base ortonormal en \mathbb{C}^2 , cualquier observable *qubit*, Q , está representado por una combinación lineal de matrices de Pauli,

$$Q = \frac{1}{2} \left(a_0 \mathbb{I}_2 + \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

con coeficientes reales a_0, \dots, a_3 . Con

$$a_0 = \text{Tr}Q \quad ; \quad a_k = \text{Tr}(Q\sigma_k). \quad (3.9)$$

Es directo de la relación (3.8) que cualquier operador densidad ρ , en el espacio de Hilbert de un *qubit*, puede ser escrito como

$$\rho = \frac{1}{2} \left(a_0 \mathbb{I}_2 + \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k \right) \quad (3.10)$$

donde $a_0 = \text{Tr}\rho = 1$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, que satisface $0 \leq |\vec{a}| \leq 1$, y $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Con esto podemos visualizar un estado mixto ρ .

Visualización del operador densidad para qubits

A cualquier operador densidad de *qubit* ρ , le corresponde a un único vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ con $0 \leq |\vec{a}| \leq 1$, tal que $\rho = \rho(\vec{a})$. Así

$$\rho(\vec{a}) = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{a}). \quad (3.11)$$

Relacionándolo con lo anteriormente dicho, el vector \vec{a} es el **vector de Bloch** generalizado. Es decir, el que representa a un estado mixto. Y la esfera unitaria $\{\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq |\vec{a}| \leq 1\}$ es la **Esfera de Bloch**.

Sabemos que la componente de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ en la dirección de un vector unitario \hat{a} está dada por $\vec{v} \cdot \hat{a}$. Igualmente, la matriz Hermítica $\vec{\sigma} \cdot \hat{a}$ define la componente del espín $\vec{\sigma}$ en la dirección de un vector unitario \hat{a} . La matriz Hermítica 2×2 $\vec{\sigma} \cdot \hat{a}$, tiene autovalores $+1$ y -1 y autovectores normalizados

$$|\psi_{\pm}(\hat{a})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm a_3)}} \begin{pmatrix} a_3 \pm 1 \\ a_1 + ia_2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Estos vectores son los autovectores de $\rho(\vec{a})$. Definiendo $\vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$, llegamos a la forma canónica de la ecuación (3.11), dada por

$$\rho(\vec{a}) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{a}|)|\psi_+(\hat{a})\rangle\langle\psi_+(\hat{a})| + \frac{1}{2}(1 - |\vec{a}|)|\psi_-(\hat{a})\rangle\langle\psi_-(\hat{a})|. \quad (3.13)$$

De la expresión anterior, podemos concluir que, si $|\vec{a}| = 1$ - la superficie de la **Esfera de Bloch** - tendremos un estado puro $\rho(\vec{a}) = |\psi_+(\hat{a})\rangle\langle\psi_+(\hat{a})|$. Y si $0 \leq |\vec{a}| < 1$ - el interior de la **Esfera de Bloch** - tenemos un estado mixto. El estado máximamente mezclado ocurre para $|\vec{a}| = 0 \Rightarrow \rho(\vec{a}) = \frac{\mathbb{I}}{2}$.

Es interesante el siguiente análisis: Siempre podemos escribir el vector \vec{a} , como una combinación lineal de otros dos vectores \vec{b} y \vec{c} de la **Esfera de Bloch**, tal que

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} + (1 - \lambda)\vec{c}, \quad \text{con } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.14)$$

En una combinación lineal de éste tipo, el vector \vec{a} se encuentra en el segmento de línea recta que conecta a \vec{b} con \vec{c} , y se llama *combinación lineal convexa*.

Usando la matriz de densidad asociada a cada vector y eligiendo a los vectores \vec{b} y \vec{c} en la superficie de la esfera ($|\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 1$), obtenemos

$$\rho(\vec{a}) = \lambda\rho(\vec{b}) + (1 - \lambda)\rho(\vec{c}). \quad (3.15)$$

Como siempre se puede escribir cualquier estado mixto en la forma (3.15), concluimos que *todo estado de un sistema cuántico es una combinación lineal convexa de estados puros*

$\rho(\vec{b})$ y $\rho(\vec{c})$. Un conjunto de este tipo recibe el nombre de *conjunto convexo* y los puntos con $|\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 1$ son llamados *puntos extremos*. Así, el conjunto de todos los estados de un sistema físico cuántico es un *conjunto convexo*, y los estados puros son *puntos extremos* de ese conjunto [4].

3.2. Información Cuántica

El concepto de información que usaremos es una generalización del concepto clásico desarrollado por el matemático e ingeniero norteamericano Claude Shannon, creador de la teoría de la información. Shannon introdujo la noción de que la información es, en cierto sentido, una *medida de la incerteza*. Desde ese punto de vista, la frase “la tierra gira sobre su propio eje” no nos ofrece ninguna información. Eso ya lo sabemos, no nos *sorprende*. En contraste, la frase “la tierra no gira sobre su propio eje” tiene información porque no lo sabíamos, nos *sorprende*. Por esto, a menudo se asocia información con ignorancia.

Mientras más probable sea la ocurrencia de un suceso, menos información contiene.

LLamemos $I(s)$ al contenido de información del suceso S que ocurre con probabilidad $p(s)$. Veamos qué propiedades de sentido común, según nuestro concepto de información, debería cumplir $I(s)$ y lleguemos a una definición para la cantidad de información $I(s)$ que tiene un suceso S .

- a) Si un suceso S_1 ocurre con menor o igual probabilidad que otro S_2 , entonces el suceso S_1 contiene más información, o la misma, que el suceso S_2 . Es decir, si $p(s_1) \leq p(s_2)$, entonces $I(s_1) \geq I(s_2)$.
- b) Si S_1 y S_2 son sucesos independientes, la información contenida en ambos sucesos debería ser la suma. Es decir, si $p(s_1, s_2) = p(s_1)p(s_2)$, entonces $I(s_1, s_2) = I(s_1) + I(s_2)$.
- c) Un suceso cualquiera siempre contiene algo de información (salvo que su ocurrencia fuera inevitable). Es decir, $\forall S, I(s) \geq 0$.

Estas tres propiedades nos llevan a definir la cantidad de información I , contenida en un suceso S como:

$$I(s) = -\log_2[p(s)], \quad (3.16)$$

donde $p(s)$ es la probabilidad con la que ocurre el suceso S y la base 2 del logaritmo es la constante de proporcionalidad que nos permite definir la unidad de información como *bit* (una contracción de *binary unit*). Notemos que si $p(s) = 1/2$, entonces $I(s) = 1 \text{ bit}$. Así, el *bit* es la cantidad de información que se obtiene cuando se especifica una de dos posibles alternativas igualmente probables

3.2.1. Entropía Cuántica o de Von Neumann

La entropía cuántica es una generalización del concepto de entropía de Shannon. Shannon llamó entropía a la cantidad media de información contenida en un suceso S , definida

$$H(S) = - \sum_i p_i(s) \log_2[p_i(s)]. \quad (3.17)$$

Aquí se considera al suceso S como una variable aleatoria.

En el caso cuántico, dado que el operador densidad contiene tanto la incertidumbre clásica como la cuántica, es de esperarse que la cantidad media de información cuántica dependa de él.

DEFINICIÓN 3: *Supongamos que Alice prepara algún sistema cuántico A en el estado ρ_A , definido en el espacio de Hilbert asociado al sistema A . La entropía $H(A)_\rho$ del estado está definida como*

$$H(A)_\rho = H(\rho_A) = S(\rho_A) \equiv -Tr[\rho_A \log(\rho_A)]. \quad (3.18)$$

Usando la forma canónica del operador densidad, podemos ver que la entropía cuántica se reduce a la clásica. La cantidad media de información cuántica, $S(\rho)$, se conoce también como entropía de Von Neumann, y depende, explícitamente, de los autovalores del operador densidad.

Propiedades de la entropía cuántica

1. No-Negatividad: La entropía cuántica es no negativa para cualquier operador densidad ρ

$$S(\rho) \geq 0.$$

2. Valor Mínimo: El valor mínimo de la entropía cuántica es cero y ocurre cuando el estado del sistema es puro.
3. Valor Máximo: El máximo valor de la entropía cuántica es $\log(d)$, donde d es la dimensión del sistema y ocurre cuando el estado del sistema está máximamente mezclado.

Existen más propiedades para la entropía de Von Neumann, pero estas tres son las más resaltantes para nuestro propósito [6].

3.2.2. Obtención de información

Un punto de vital importancia en la teoría de la información es el hecho de que para poder obtener información de un sistema físico hay que realizar una medición (de una cantidad física). En un sistema de *qubits*, lo típico es medir a través de una *base de medición*. Cuando se usa una *base de medición*, el estado del sistema después de la medida es justamente uno de los elementos de la base (en nuestro caso, una base ortonormal en \mathbb{C}^2). Es decir, si tenemos un sistema en el estado (3.1), el estado del sistema después de la medida será:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\longmapsto |0\rangle \quad (i = 0) \\ |\psi\rangle &\longmapsto |1\rangle \quad (i = 1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aquí hemos usado la *base de medición* conocida como *base computacional* $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, mencionada anteriormente. El cambio del estado debido a una medición lo llamamos el *proceso de medida* y es una forma de evolución del sistema físico mediante la medición. Un *proceso de medida* típico es justamente una **medida proyectiva** con respecto a una *base de medición* y es de suma importancia tener un mecanismo de distinción para los diferentes resultados post-medida. Por ello es importante el concepto de **estados distinguibles**.

Medidas proyectivas

Una medida proyectiva está descrita por un observable M , un operador Hermítico en el espacio de estados del sistema en cuestión. El observable tiene una descomposición espectral

$$M = \sum_m p(m) P_m, \quad (3.20)$$

donde P_m es el proyector en el autoespacio del observable M con autovalor m . Los posibles resultados de la medida corresponden a los autovalores m del observable. Midiendo sobre el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado m viene dada por

$$p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle. \quad (3.21)$$

Una vez que el resultado m ha ocurrido, el estado del sistema inmediatamente después de la medición resulta

$$|\psi'\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (3.22)$$

Ahora podemos notar que cuando decimos que hemos usado la base de medición $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ para obtener los resultados (3.19), lo que estamos haciendo es una medida proyectiva con respecto a esa base. Por ejemplo: Cuando decimos que ocurrió el resultado 0, esto significa

(usando el postulado de medidas proyectivas) que el estado del sistema después de haber ocurrido 0, es

$$\frac{|0\rangle\langle 0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle}} = \frac{\langle 0|\psi\rangle}{|\langle 0|\psi\rangle|}|0\rangle, \quad (3.23)$$

donde $\frac{\langle 0|\psi\rangle}{|\langle 0|\psi\rangle|} = e^{i\phi}$ es una fase global, lo que indica que el estado del sistema será $|0\rangle$, inmediatamente después de ocurrir el resultado 0, tal como se muestra en (3.19).

Distinguibilidad de estados

Una importante aplicación del postulado de medición, específicamente de una medida proyectiva, es su utilidad para distinguir estados cuánticos. A diferencia del mundo clásico, en el mundo cuántico *distinguir* entre diferentes estados de un sistema puede ser bastante problemático. Clásicamente es sencillo, o más bien natural, distinguir entre dos estados de un sistema físico. Por ejemplo, distinguir entre los diferentes resultados del lanzamiento de un dado siempre es completamente posible y no da lugar a ambigüedades.

Para ilustrar lo que ocurre en el mundo cuántico usemos el típico experimento mental de Alice y Bob, dos observadores separados espacialmente que pueden intercambiar información clásica. Alice elige un estado $|\psi_i\rangle$ ($1 \leq i \leq n$) de un conjunto fijo de n estados conocidos por ambas partes. Ella envía el estado $|\psi_i\rangle$ a Bob, el cual tiene la tarea de identificar cuál estado i del conjunto n le ha enviado Alice. Para distinguir se hará uso de una medida proyectiva.

Vamos a suponer que los estados $|\psi_i\rangle$ son ortonormales. Entonces Bob puede realizar una medida para *distinguir* esos estados usando el siguiente procedimiento: Se definen los operadores de medición $M_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, uno para cada posible índice i y el operador adicional M_0 que se ajusta para que se cumpla la relación de completitud para esa familia de operadores. De ese modo, si el estado $|\psi_i\rangle$ es preparado, entonces $p(i) = \langle\psi_i|M_i|\psi_i\rangle = 1$, lo que indica que el resultado i ocurre con total certeza. Esto nos dice que es posible entonces, distinguir con seguridad los estados ortonormales $|\psi_i\rangle$. Por contraste, si los estados $|\psi_i\rangle$ no son ortonormales, entonces se puede probar fácilmente que *no hay medida posible capaz de distinguir, con certeza, entre diferentes estados que no sean ortonormales*. La razón es obvia cuando notamos que si Bob intenta adivinar el estado $|\psi_i\rangle$ que le envió Alice, pero $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ (por ejemplo) no son ortogonales, entonces siempre se podrá escribir cualquiera de esos dos estados como una combinación lineal del otro y un vector ortogonal a él, es decir $|\psi_2\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_1\rangle_\perp$. En conclusión, $0 < p(i) < 1$ si los estados $|\psi_i\rangle$ no son ortogonales y por eso *son imposibles de distinguir. Únicamente los estados ortonormales son distinguibles* [2].

Aprovechamiento del entrelazamiento

Hay muchas aplicaciones del fenómeno de entrelazamiento; no obstante, haremos un breve recuento cualitativo de las más notables: En 1991, Eker mostró que si dos partes, Alice y Bob, comparten una gran cantidad de estados singlete entrelazados, pueden comunicarlos de una manera completamente segura. Esta tarea se conoce como *criptografía cuántica*. En 1992, Bennett y Wiesner demostraron que dos partes que comparten un estado entrelazado pueden comunicar dos bit clásicos enviando sólo un bit cuántico o qubit. Esta tarea se conoce como *codificación superdensa* porque brinda la posibilidad de codificar dos bit clásicos de información en un sólo qubit. Otros autores estudiaron la tarea de comunicar un estado cuántico desconocido entre dos partes. Un estado cuántico desconocido no puede comunicarse por medios clásicos, lo que es una consecuencia directa del hecho de que tal estado no puede ser clonado. Sin embargo, si las dos partes comparten un estado singlete entrelazado, Bennett mostró que cualquier bit cuántico desconocido puede ser perfectamente comunicado. Esta tarea se conoce como *teleportación cuántica*.

3.3. Operaciones locales asistidas con comunicación clásica (OLCC)

Es necesario especificar las condiciones en las que Alice y Bob se relacionan entre ellos y qué tipo de operaciones pueden realizar sobre su estado compartido. Resulta que en muchos de los experimentos usados en la teoría de la información y la comunicación cuántica y que son justo los que usaremos en este trabajo, las condiciones son las siguientes: Alice y Bob comparten un estado entrelazado, ellos pueden realizar sólo operaciones locales sobre su parte del estado y pueden comunicar sus resultados a la otra parte haciendo sólo uso de la comunicación clásica. Este tipo de operaciones es muy común en la teoría de la información.

Cuando hablamos del entrelazamiento dejamos claro que la particularidad del mismo radica en que ninguna de las partes involucradas puede tener certeza de la parte del estado que tiene en su posesión. Esto hace imposible la creación de estados entrelazados mediante operaciones locales. Al contrario, los estados separables siempre pueden ser creados por las partes siempre y cuando exista comunicación clásica entre ellos. Así que Alice y Bob pueden crear un estado separable mediante operaciones locales y luego comunicando sus resultados entre sí. Este es el tipo de operaciones que explicaremos en detalle de manera simple y general, evitando las complejidades de una descripción matemática completa que en realidad tiene.

3.3.1. OLCC

Para dos partes Alice y Bob, una operación cuántica pertenece a la clase OLCC si se puede descomponer en los siguientes pasos:

1. Una de las partes, por ejemplo, Alice, realiza una medida local en su subsistema.
2. El resultado de la medida es comunicado *clásicamente* (por vía telefónica, internet, mensaje de texto, etc) a Bob.
3. Dependiendo de la información recibida, Bob realiza una medida local en su subsistema.
4. El resultado de la medida de Bob es comunicado *clásicamente* a Alice.
5. Dependiendo de la información recibida, Alice realiza una medida local en su subsistema y el proceso comienza nuevamente desde el paso 2, hasta que sea necesario.

Como ya hemos mencionado, las OLCC juegan un papel importante en la teoría de la información cuántica específicamente cuando trabajamos con estados entrelazados. No sólo son útiles para crear estados separables e inútiles para crear estados entrelazados, sino que también sirven, y es este el uso que le daremos en este trabajo, *para transformar estados entrelazados en otros (también entrelazados) pero con diferente tipo de entrelazamiento*.

3.3.2. Transformación de un estado puro bipartito entrelazado mediante OLCC

Supongamos que Alice y Bob comparten un estado puro máximamente entrelazado como $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Dado que ellos pueden realizar operaciones locales en sus subsistemas y que pueden intercambiarse información clásica, es posible transformar el estado $|\psi\rangle$ entrelazado en el estado $|\varphi\rangle$ con otro tipo de entrelazamiento, de la siguiente manera:

Alice realiza una medición de dos resultados descrita por los operadores de medición M_1 y M_2 :

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Si después de la medición resulta que ocurre 1 (descrita por M_1), el estado resultante del sistema será $|\varphi_1\rangle = \cos \theta|00\rangle + \sin \theta|11\rangle$. Por el contrario, si resulta que ocurre 2 (descrita por M_2), el estado resultante del sistema será $|\varphi_2\rangle = \sin \theta|00\rangle + \cos \theta|11\rangle$. El protocolo es el siguiente: Si Alice realiza la medición M y obtiene el resultado 1, ella no realiza

ninguna operación más sobre su qubit y le informa su resultado a Bob. Entonces ellos comparten el estado $|\varphi_1\rangle$. Ahora, si Alice obtiene el resultado 2, ella deberá aplicar sobre su parte (el primer qubit) la compuerta NOT, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que tiene la propiedad $X|0\rangle = |1\rangle$; $X|1\rangle = |0\rangle$. Y deberá comunicarle su resultado a Bob, en cuyo caso él también deberá aplicar la compuerta NOT sobre su parte (el segundo qubit). En este caso, vemos que Alice obtiene, después de aplicar NOT, $|\varphi'_2\rangle = \sin\theta|10\rangle + \cos\theta|01\rangle$. Este es el estado conjunto del sistema, y ahora Bob deberá aplicar NOT sobre su parte (el segundo qubit) con lo que el estado final del sistema conjunto será $|\varphi''_2\rangle = \sin\theta|11\rangle + \cos\theta|00\rangle$. Finalmente, puede verse claramente que $|\varphi''_2\rangle = |\varphi_1\rangle$, con lo que concluimos que, mediante operaciones locales y comunicación clásica, Alice y Bob pueden transformar el estado maximamente entrelazado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ en el estado entrelazado no maximal $|\varphi\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$, habiendo Alice realizado la medición M [2].

3.4. Medida de entrelazamiento

Para realizar las tareas de información cuántica antes mencionadas: *criptografía*, *codificación superdensa* y *teleportación*, es necesario que las partes Alice y Bob compartan un estado puro singlete entrelazado. Pero, en general, lo que en realidad determina si un estado puede ser usado para dichas tareas es la *cantidad de entrelazamiento* que contiene dicho estado. Una de las cantidades más conocidas y utilizadas es el *entrelazamiento destilable*, el cual se define como el número máximo de singletes que se pueden obtener por copia de un estado mixto dado mediante operaciones locales y comunicación clásica, si el número de copias es muy grande. Pero, dado que en este trabajo usaremos sólo estados compuestos puros, no será necesario definir en detalle el *entrelazamiento destilable*, y definiremos la *cantidad de entrelazamiento* sólo para estados puros.

Cualquier medida de entrelazamiento E debe cumplir las siguientes dos propiedades:

1. E no incrementa bajo operaciones locales y comunicación clásica.
2. E se anula para estados separables.

Para un estado puro $|\psi_{AB}\rangle$ distribuido entre dos partes, Alice y Bob, el entrelazamiento generalmente se cuantifica mediante la entropía de Von Neumann del operador de densidad reducido $\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)$ (ó ρ_B):

$$E(|\psi_{AB}\rangle) = S(\rho_A) = - \sum_i \lambda_i \log_2(\lambda_i), \quad (3.25)$$

donde λ_i son los autovalores de ρ_A . La importancia de esta cantidad en la teoría de la información cuántica viene del hecho de que es igual el *entrelazamiento destilable* para cualquier estado puro [3].

Capítulo 4

La Descomposición de Schmidt

Un escenario típico en la teoría de la información cuántica es el sistema compuesto. Para el análisis de estos sistemas y su importancia en esta teoría, hay un conjunto de herramientas teóricas de vital importancia como lo son el *operador densidad* y la *traza parcial*, que ya hemos estudiado. Otra herramienta indispensable que se usa para representar estados puros compuestos, en una forma especial que simplifica mucho las tareas en la ciencia de la información y, en la física en general, es la conocida *descomposición de Schmidt*.

La principal ventaja de representar un estado en la forma de Schmidt, es que nos proporciona criterios claros para saber *cuándo el estado de un sistema está entrelazado o es separable*. Esto, a su vez, nos facilita el estudio de los subsistemas, como veremos más adelante. La *descomposición de Schmid*, al ser una *superposición de estados ortonormales coordinados*, es una representación que refleja los grados de libertad reales del sistema en cuestión. Es decir, cuando tenemos el estado de un sistema bipartito, en la forma descrita por la ecuación (2.2), esta descomposición, o representación del estado, no refleja los grados de libertad reales del sistema, sino que aparecen términos adicionales que, en realidad, son combinaciones de términos que sí reflejan propiamente los grados de libertad reales del sistema. Por ejemplo, si tenemos un sistema bipartito de qubits, la *descomposición de Schmidt* nos muestra, como puede deducirse cualitativamente sin ella, que el sistema tiene únicamente dos grados de libertad; mientras que, en una descomposición como (2.2) el sistema tiene cuatro grados de libertad. Dos son irreales, porque son combinaciones de los otros dos. Por esta razón, a la *descomposición de Schmidt* se le conoce también como *descomposición no superflua*. Una *descomposición superflua* es la que se muestra en la ecuación (2.2).

La *descomposición de Schmidt* que encontramos en la literatura, se calcula para estados puros de un sistema bipartito. Ella se fundamenta en el famoso teorema del álgebra

lineal conocido como *descomposición en valores singulares* (DVS), que es una generalización del concepto de diagonalización de matrices cuadradas. Dado que nuestro trabajo está centrado en sistemas tripartitos de qubits, deducimos la descomposición de Schmidt en ese caso [6, 7, 2].

4.1. Descomposición de Schmidt

Es posible descomponer cualquier estado puro bipartito como una superposición de estados ortonormales coordinados.

Teorema 1: (Descomposición de Schmidt) Supongamos que tenemos un sistema bipartito en el estado

$$|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B, \quad (4.1)$$

donde \mathcal{H}^A y \mathcal{H}^B son espacios de Hilbert finito-dimensionales, no necesariamente de la misma dimensión y $\| |\psi\rangle_{AB} \|_2 = 1$. Entonces es posible expresar ese estado como sigue:

$$|\psi\rangle_{AB} \equiv \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_i |i\rangle_A |i\rangle_B, \quad (4.2)$$

donde las amplitudes σ_i son reales, estrictamente positivas y normalizadas de manera tal que $\sum_i \sigma_i^2 = 1$. Los estados $|i\rangle_A$ forman una base ortonormal para el subsistema A y los estados $|i\rangle_B$ forman una base ortonormal para el subsistema B . Los elementos σ_i son llamados *coeficientes de Schmidt*. El *rango de Schmidt* d , de un estado puro bipartito, es igual al número de *coeficientes de Schmidt* σ_i , en su *descomposición de Schmidt*, y satisface

$$d \leq \min \{ \dim(\mathcal{H}^A), \dim(\mathcal{H}^B) \} \quad (4.3)$$

[6].

Para probar este teorema vamos primero a presentar el fundamento matemático del mismo: La *Descomposición en Valores Singulares*.

4.2. Descomposición en Valores Singulares (DVS)

Toda matriz simétrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se puede descomponer como $A = PDP^T$, siendo P una matriz ortogonal ($P^T = P^{-1}$) y D una matriz diagonal que contiene los autovalores de A . Cuando A no es simétrica pero sí cuadrada, si A es diagonalizable, existe una descomposición de $A = SDS^{-1}$, siendo S no-singular (la no-singularidad implica, entre

otras cosas, que es invertible), aunque no necesariamente ortogonal. Pero no toda matriz A es diagonalizable ni cuadrada [8, 9].

Vemos que en ambos casos, estamos buscando una *diagonalización* para la matriz A . La *Descomposición en Valores Singulares* es una generalización del concepto de *diagonalización* de matrices que no exige que A sea cuadrada, diagonalizable ni simétrica.

4.2.1. DVS

La *diagonalización* de una matriz está íntimamente relacionada con el tema de autovalores. Sabemos que si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tiene n autovectores linealmente independientes, es diagonalizable. Esto es $A = PDP^{-1}$, donde $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores de A y $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz diagonal cuyas entradas son los autovalores de A . Esta factorización se conoce como *descomposición en autovalores* o la típica *diagonalización*.

Veremos que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$ (cuadrada o no, simétrica o no), tiene una descomposición, o factorización, de la forma

$$A = U\Sigma V^\dagger, \quad (4.4)$$

que se conoce como *descomposición en valores singulares* (DVS). Las diferencias fundamentales entre ambas factorizaciones son las siguientes: La DVS utiliza dos bases diferentes para diagonalizar una matriz (las bases determinadas por los *vectores singulares a derecha e izquierda*), las bases en DVS son ortonormales, lo cual no siempre ocurre en la *descomposición en autovalores*; y no toda matriz admite *descomposición en autovalores*, aún siendo cuadrada, sin embargo, se puede demostrar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, admite una (DVS) [10].

DEFINICIÓN 4: (Descomposición en Valores Singulares) Dada $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, una (DVS) es una factorización del tipo $A = U\Sigma V^\dagger$, con $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, matrices unitarias, y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz *pseudodiagonal*. Es decir: $\Sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\Sigma_{ii} = \sigma_i$, ordenados de modo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_p > 0$, $\Sigma_{ii} = 0$ si $i > p$, y $p \leq \min\{m, n\}$ [10].

Teorema 2: Sea $A = U\Sigma V^\dagger \in \mathbb{C}^{m \times n}$, con $m \geq n$, entonces:

1. Los autovalores de la matriz $A^\dagger A$ son los números $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, y los autovectores de la matriz $A^\dagger A$ son los denominados *vectores singulares a la derecha* (v_i) de A .
2. Los autovalores no-nulos de la matriz AA^\dagger son los números σ_i^2 y los autovectores de la matriz AA^\dagger son los denominados *vectores singulares a la izquierda* (u_i) de A .

Cualquier otro complemento ortogonal a u_1, \dots, u_n puede elegirse como autovectores asociados al autovalor 0.

3. Como $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_p > 0$, el *rango* de A es p . El espacio nulo de A está generado por las columnas $[v_{p+1}, \dots, v_n]$ de V y el espacio *rango* por las columnas $[u_1, \dots, u_p]$ de U .

Se deduce, entonces que la matriz U es la matriz que diagonaliza a la matriz cuadrada AA^\dagger , puesto que sus columnas (las de U), están formadas por los autovectores de AA^\dagger , tal como indica el procedimiento para la diagonalización de matrices cuadradas. Evidentemente esta matriz es diagonalizable porque sus columnas son vectores ortogonales entre sí. La matriz U se conoce, para una factorización del tipo (4.4), como la matriz de *vectores singulares a la izquierda*. De igual manera, la matriz V es la matriz que diagonaliza a la matriz cuadrada $A^\dagger A$, puesto que sus columnas (las de V), están formadas por los autovectores de $A^\dagger A$. Ya vimos que estos autovectores son llamados *vectores singulares a la derecha* de A , por lo que la matriz V se conoce, para una factorización del tipo (4.4), como la matriz de *vectores singulares a la derecha*. Los números $|\sigma_i|$ son los denominados *valores singulares* de A , sabiendo que $|\sigma_i|^2$ son los autovalores no-nulos de las matrices Hermíticas AA^\dagger y $A^\dagger A$ [10, 11].

Interpretación Algebraica de DVS:

Dado que es demostrable que toda matriz $A = U\Sigma V^\dagger \in \mathbb{C}^{m \times n}$ admite una DVS, podemos asegurar que siempre es posible escoger una base ortonormal en \mathbb{C}^m (las columnas de U), y una base ortonormal en \mathbb{C}^n (las columnas de V) tal que la matriz A en dicho par de bases es “diagonal” [10].

4.3. Deducción de la Descomposición de Schmidt para el Caso Bipartito

Supongamos que tenemos un estado bipartito representado en las bases $\{|j\rangle_A\}_{j=1}^{d_A-1}$ y $\{|k\rangle_B\}_{k=1}^{d_B-1}$ como

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=1}^{d_A-1} \sum_{k=1}^{d_B-1} a_{jk} |j\rangle_A |k\rangle_B. \quad (4.5)$$

Esta es una descomposición *superflua*, como ya hemos mencionado. Si queremos una descomposición *no-superflua* (que refleje los grados de libertad reales del sistema) para el estado $|\psi\rangle_{AB}$, debemos hacer una DVS de la matriz $A = [a_{jk}]$, lo cual implica un cambio

de base (una transformación unitaria) para los vectores $|j\rangle_A$ y $|k\rangle_B$, como veremos a continuación.

Factorizamos la matriz A

$$A = U\Sigma V^\dagger,$$

En notación indicial: $a_{jk} = u_{jl}\sigma_{li}v_{ik}^\dagger$. Pero como Σ es una matriz *pseudodiagonal*, sabemos que $\sigma_{li} = \sigma_i\delta_{li}$, así que $a_{jk} = u_{jl}\sigma_i\delta_{li}v_{ik}^\dagger$, tal que $a_{jk} = \sum_i u_{ji}\sigma_i v_{ik}^\dagger$. Ahora evaluamos esta expresión en la ecuación (4.5) y obtenemos

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=1}^{d_A-1} \sum_{k=1}^{d_B-1} \sum_{i=1}^{d-1} u_{ji}\sigma_i v_{ik}^\dagger |j\rangle_A |k\rangle_B. \quad (4.6)$$

Agrupamos por índice

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d-1} \sigma_i \left(\sum_{j=1}^{d_A-1} u_{ji} |j\rangle_A \right) \left(\sum_{k=1}^{d_B-1} v_{ik}^\dagger |k\rangle_B \right). \quad (4.7)$$

Quedan así definidas las nuevas bases coordinadas $|i\rangle_A \equiv \left(\sum_{j=1}^{d_A-1} u_{ji} |j\rangle_A \right)$ y $|i\rangle_B \equiv \left(\sum_{k=1}^{d_B-1} v_{ik}^\dagger |k\rangle_B \right)$, con lo que el estado final resulta:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d-1} \sigma_i |i\rangle_A |i\rangle_B. \quad (4.8)$$

Notemos que los *valores singulares* $|\sigma_i|$ de la matriz $[a_{jk}]$ son justamente los coeficientes de Schmidt y que $|\sigma_i^2|$ son los autovalores no-nulos de las matrices Hermíticas AA^\dagger y $A^\dagger A$. Los correspondientes conjuntos de autovectores son $|i\rangle_A$ e $|i\rangle_B$, respectivamente (según los items 1 y 2 del **Teorema 2**). Acá hemos usado la notación $|i\rangle_A |i\rangle_B = |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$ [11].

4.3.1. Ventajas de la descomposición de Schmidt bipartita

En los estados de los subsistemas:

Si el estado de un sistema compuesto está descrito por la ecuación (4.8), entonces los estados de los subsistemas están descritos por los operadores de densidad

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A, \quad \rho_B = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_B, \quad (4.9)$$

donde $\sigma_i^2 \equiv p_i$. Por lo tanto, vemos que ρ_A y ρ_B tienen los mismos autovalores no-nulos. El cuadrado de los *coeficientes de Schmidt* es el mismo para ambos subsistemas. Esto indica que los subsistemas tendrán las mismas propiedades descritas por $\sigma_i^2 \equiv p_i$. Por ejemplo: ρ_A es un estado puro si y sólo si ρ_B es un estado puro [4].

En la caracterización del entrelazamiento del estado:

La *descomposición de Schmidt* nos muestra una forma sencilla para el estado de un sistema compuesto, que nos facilita el poder averiguar si el sistema está entrelazado o no. Dada la relación $\sigma_i^2 \equiv p_i$, escribimos la ecuación (4.8) así:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_B, \quad (4.10)$$

donde p_i es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $|i\rangle_A |i\rangle_B$. Resulta directo darse cuenta de que si $p_i \neq 1$ el sistema estará entrelazado y sólo en los casos en que $p_i = 1$ tendremos un estado separable. En otras palabras, si el *rango de Schmidt* $d > 1$, el sistema estará entrelazado y sólo si $d = 1$ (un sólo *coeficiente de Schmidt*) el sistema será separable [4].

En el análisis del grado de entrelazamiento:

DEFINICIÓN 5: Supongamos que los subsistemas A y B tienen asociados espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , respectivamente, ambos de igual dimensión n . El estado del sistema compuesto se dice que está *máximamente entrelazado* si

$$\rho_A = \frac{1}{n} \mathbb{I}_A, \quad \rho_B = \frac{1}{n} \mathbb{I}_B. \quad (4.11)$$

Esta definición es fácil de entender, si usamos la descomposición de Schmidt con dos subsistemas de igual dimensión n . Decimos que el sistema está *máximamente entrelazado* si tiene la forma

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{d-1} |i\rangle_A |i\rangle_B. \quad (4.12)$$

Calculemos el estado del subsistema A :

$$\rho_A = Tr_B (|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}) \quad (4.13)$$

partiendo de que

$$|\psi\rangle\langle\psi|_{AB} = \frac{1}{n} \sum_{ij} |i\rangle\langle j|_A \otimes |i\rangle\langle j|_B \quad (4.14)$$

nos queda

$$\begin{aligned}
 \rho_A = Tr_B (|\psi\rangle\langle\psi|_{AB}) &= \frac{1}{n} \sum_{ij} |i\rangle\langle j|_A \otimes \sum_k \langle k|i\rangle\langle j|k\rangle_B \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{ij} |i\rangle\langle j|_A \otimes \delta_{ij} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_i |i\rangle\langle i|_A \\
 &= \frac{1}{n} \mathbb{I}_A.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Hemos usado la definición de traza parcial (2.4.1) y llegamos al estado ρ_A de la **Definición 5**, partiendo del estado *máximamente entrelazado* (4.11). Este estado ρ_A es una mezcla estadística, donde cada estado puro $|i\rangle_A$ contribuye con la misma probabilidad $p = \frac{1}{n}$, resultando un estado *máximamente mezclado*.

Concluimos que para un estado *máximamente entrelazado*, los estados de los subsistemas estarán *máximamente mezclados* y para un estado separable (por el mismo procedimiento) los subsistemas estarán en estado puro [4].

Estados de Bell:

En el espacio de Hilbert del sistema de dos qubits podemos elegir otra base que se compone únicamente de estados *máximamente entrelazados*, los cuatro estados ortonormales conocidos como *estados de Bell*. A saber:

$$\begin{aligned}
 |\psi_e^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \\
 |\psi_e^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\
 |\psi_o^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \\
 |\psi_o^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Los estados $|\psi_e^\pm\rangle$ son superposiciones de estados de productos en los que los espines son paralelos. Se conocen comunmente como estados EPR (Einstein-Podolski-Rosen) y a veces se les llama *estados de paridad par*. Los estados $|\psi_o^\pm\rangle$, donde los dos sumandos tienen espines antiparalelos, se denominan *estados de paridad impar* [4].

Como podemos ver, los cuatro estados (4.16) son *estados máximamente entrelazados* y como forman un conjunto ortonormal, es sencillo probar que cada uno de ellos nos conduce al mismo estado para los subsistemas: $\rho_A = \frac{1}{2}\mathbb{I}_A$ y $\rho_B = \frac{1}{2}\mathbb{I}_B$. Esto quiere decir

que, diferentes representaciones del estado del sistema compuesto $|\psi_{AB}\rangle$ llevan al mismo estado ρ_A y ρ_B para los subsistemas. No existe una relación uno a uno.

“Diferentes estados *máximamente entrelazados*, son diferentes estados puros del sistema compuesto. Por lo tanto, se pueden distinguir por mediciones adecuadas (“globales”) realizadas en el sistema en su conjunto. Pero no pueden distinguirse mediante mediciones locales que proporcionan sólo información sobre ρ_A y ρ_B . En general, el estado de un sistema bipartito contiene más información que los estados ρ_A y ρ_B de los subsistemas juntos. Esto no es más que la forma mecánica cuántica de decir que el todo es más que la suma de sus partes”[4].

4.4. Descomposición de Schmidt para un sistema de tres qubits

El objeto de estudio de este trabajo es un sistema tripartito de qubits entrelazados. Vamos a considerar únicamente un estado puro de ese sistema. Para facilitar los cálculos a la hora de cumplir con los objetivos planteados, queremos tener una descomposición no superflua para el estado puro tripartito del sistema.

Vamos a comenzar definiendo nuestro sistema, luego seguiremos el procedimiento empleado por *Asher Peres*, en el artículo [11], para tener una descomposición de Schmidt de orden superior. A continuación de esto, vamos a aplicar un procedimiento para el caso de un sistema de tres qubits, descrito por *R. Tarrach*, y colaboradores [12]. Nuestro aporte será vincular ambos procedimientos para lograr un desarrollo detallado de la descomposición y llegar a la forma no superflua del estado, presentada por *R. Tarrach* y colaboradores.

4.4.1. Estado puro de un sistema tripartito de qubits

Como vimos en los capítulos 2 y 3, se pueden extender las ideas al caso tripartito sin ningún problema. Es decir, un estado puro tripartito de qubits $|\psi_{ABC}\rangle$ pertenece al espacio de estados $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Usando las *bases computacionales* para cada uno de los subsistemas, $\{|j\rangle_A\}_{j=0}^1$, $\{|k\rangle_B\}_{k=0}^1$, $\{|l\rangle_C\}_{l=0}^1$, podemos representar al estado de la siguiente manera:

$$|\psi_{ABC}\rangle = \sum_{jkl} a_{jkl} |j\rangle_A |k\rangle_B |l\rangle_C. \quad (4.17)$$

Los números complejos a_{jkl} ya no son elementos de una matriz, como en el caso bipartito, sino que son elementos de un objeto matemático llamado *tensor*, específicamente un

tensor de orden 3. Esto muestra que nuestro estudio se encuentra en el campo del *álgebra multilineal*. Sin embargo, no es nuestro objetivo profundizar demasiado al respecto, sino usar los resultados de esa área de las matemáticas que sean útiles para nuestro propósito.

Por ahora nos interesa acotar que, desde el punto de vista del *álgebra multilineal*, un vector es un *tensor* de orden 1, una matriz es un *tensor* de orden 2 y para órdenes superiores, simplemente se llaman *tensores* y se especifica el orden al que pertenecen. Usaremos las letras

a: para especificar un número complejo.

A: para especificar una matriz.

\mathcal{A} : para especificar un tensor

[13].

Siendo $|\psi_{ABC}\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, el estado puro de un sistema de tres qubits, representado en la *base computacional*, como vimos en (4.5), vamos a proceder a escribir el estado, término a término, usando la notación simplificada $|j\rangle_A \otimes |k\rangle_B \otimes |l\rangle_C = |j\rangle_A |k\rangle_B |l\rangle_C = |jkl\rangle$, sabiendo que la primera entrada corresponde al subsistema A , la segunda a B y la tercera a C :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \left(\sum_{l=0}^1 a_{jkl} |jkl\rangle \right) \\ &= \sum_{j=0}^1 \left(\sum_{k=0}^1 (a_{jk0} |jk0\rangle + a_{jk1} |jk1\rangle) \right) \\ &= \sum_{j=0}^1 (a_{j00} |j00\rangle + a_{j10} |j10\rangle + a_{j01} |j01\rangle + a_{j11} |j11\rangle) \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a_{000} |000\rangle + a_{100} |100\rangle + a_{010} |010\rangle + a_{110} |110\rangle \\ &\quad + a_{001} |001\rangle + a_{101} |101\rangle + a_{011} |011\rangle + a_{111} |111\rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Vemos entonces que una representación superflua del estado puro del sistema de tres qubits (4.19), contiene exactamente 8 términos. En lo sucesivo veremos cómo lograr una representación no superflua (una *descomposición de Schmidt*) para ese estado y veremos cuántos términos resultan y cuáles.

4.4.2. Descomposición de Schmidt de orden superior

Este desarrollo que presentaremos a continuación, está basado en el artículo de *Asher Peres*, titulado “*Higher order Schmidt decompositions*” [11].

Queremos escribir la triple suma

$$|\psi\rangle = \sum_{jkl} a_{jkl} |j\rangle |k\rangle |l\rangle, \quad (4.20)$$

con las condiciones especificadas en la ecuación (4.17), como una suma simple:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\xi\rangle_i |\eta\rangle_i |\zeta\rangle_i. \quad (4.21)$$

Así se vería una descomposición de Schmidt generalizada al caso tripartito, donde $\{|\xi\rangle_i\}$, $\{|\eta\rangle_i\}$ y $\{|\zeta\rangle_i\}$ son 3 conjuntos de vectores ortonormales.

El punto es que el *Teorema de Schmidt* fue desarrollado para el caso bipartito, así que, sólo asegura que (4.20) puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\xi\rangle_i |w\rangle_i, \quad (4.22)$$

que se deduce de considerar al sistema tripartito ABC , como un sistema bipartito $A(BC)$. Este es nuestro enfoque, el cual se justifica en la propiedad asociativa del producto tensorial: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, presentada en la ecuación (2.3).

En la ecuación (4.22) los estados $\{|\xi\rangle_i\}$ forman un conjunto ortonormal de vectores, provenientes de una transformación unitaria de los estados $\{|j\rangle\}$ y los estados $\{|w\rangle_i\}$, forman un conjunto ortonormal de vectores, provenientes de una transformación unitaria de los estados $\{|k\rangle \otimes |l\rangle\}$ (ver las condiciones dadas para la base de Schmidt en (4.8)).

Para lograr una expresión como (4.21), tenemos que exigir condiciones sobre los $|w\rangle_i$ de (4.22). Vamos a considerar sólo los casos donde la representación (4.22) es única, es decir, los $|\alpha_i|$ son todos diferentes. Las condiciones que deberán cumplirse son:

$$|w\rangle_i = \sum_{kl} \Omega_{ikl} |k\rangle |l\rangle = |\eta\rangle_i |\zeta\rangle_i \quad \forall i \quad (4.23)$$

Esto implica que todas las matrices Ω_i , a saber, las matrices con elementos $(\Omega_i)_{kl} = \Omega_{ikl}$, deben ser de rango 1 y deben satisfacer $\Omega_i^\dagger \Omega_m = 0$ y $\Omega_i \Omega_m^\dagger = 0$, si $i \neq m$. Si se verifican esas condiciones, podemos obtener los conjuntos ortonormales $\{|\eta\rangle_i\}$ y $\{|\zeta\rangle_i\}$, como los autovectores de $\Omega_i^\dagger \Omega_i$ y $\Omega_i \Omega_i^\dagger$, respectivamente [11].

Y así se obtiene una *descomposición de Schmidt* generalizada para el caso tripartito, como se muestra en la ecuación (4.21).

4.4.3. Representación no superflua de un estado puro de tres qubits

Esta sección está dedicada a realizar una aplicación concreta de la *descomposición de Schmidt* generalizada al caso tripartito, que acabamos de ver. Para ello, usamos algunas

indicaciones dadas en [12].

Nuestro aporte es hacer una clara identificación de los términos de ambos artículos, seguir las indicaciones para nuestro caso concreto, a fin de calcular las cantidades que necesitamos en nuestro desarrollo y, finalmente, justificar cuántos términos y cuales, debe tener una descomposición no superflua del estado, a diferencia de la descomposición (4.19).

En la expresión (4.20), los números a_{jkl} son elementos del tensor $\mathcal{A} = [a_{jkl}]$. Recordemos que $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. El *álgebra multilineal* interpreta al tensor \mathcal{A} , representado en una base, como un cubo donde sus 8 elementos se encuentran, cada uno, en una de las aristas. Los elemento del tensor son identificados mediante 3 índices (jkl). Cuando uno de los índices se deja fijo y los otros dos libres, estamos ubicados en una de las caras del cubo, es decir, en una “rebanada” del cubo, de donde se obtiene una matriz asociada al índice que se deja fijo. Por ejemplo:

$$A_j = (A_j)_{kl} = [(a_j)_{kl}] \tag{4.24}$$

denota que las matrices A_j , son las matrices que resultan al dejar fijo el índice “j”.

Podemos identificar a las matrices Ω_i de la expresión (4.23), como una transformación unitaria de las matrices A_j tal que se cumpla la condición de rango 1, para poder tener una descomposición de Schmidt generalizada. Se define el vector $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$ que representa al tensor \mathcal{A} y se lleva a cabo un cambio de base mediante una matriz unitaria U , $\vec{\Omega} = U\vec{A}$, tal que las componentes de $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \end{pmatrix}$ sean matrices de rango 1.

En forma compacta, se tiene que $\Omega_i = \sum_k u_{ik} A_k$. Es decir, lo primero que hay que hacer para llegar a una descomposición no superflua del estado, es escribir al vector \vec{A} , que representa al tensor \mathcal{A} , en una base donde se cumpla que $\det(\Omega_i) = 0$. Esta es la condición necesaria para las matrices Ω_i que vimos en la subsección 4.4.2 [11] (ver la relación entre el rango y el determinante, en el Apéndice A).

Hecho esto, el siguiente paso es realizar una DVS para cada una de las matrices Ω_i , lo cual traerá consecuencias sobre las expresiones de (4.23):

$$|w_0\rangle = \sum_{kl} (\Omega_0)_{kl} |k\rangle|l\rangle = |\eta\rangle_0 |\zeta\rangle_0 \tag{4.25}$$

$$|w_1\rangle = \sum_{kl} (\Omega_1)_{kl} |k\rangle|l\rangle = |\eta\rangle_1 |\zeta\rangle_1 \tag{4.26}$$

Por conteo directo de parámetros, se sabe, para un estado compuesto de tres qubits, que un conjunto no superfluo tendrá cinco estados, es decir, tres de los ocho términos del tensor \mathcal{A} no aparecen [12]. Es decir, una descomposición no superflua de nuestro

estado, no exhibirá más de cinco términos. Para que nuestro cálculo refleje este resultado, deberemos trabajar con una sola de las matrices Ω_i , pues de lo contrario, obtendremos una descomposición de dos términos (la *descomposición de Schmidt* generalizada), desechando así tres grados de libertad reales del sistema. La *descomposición de Schmidt* generalizada, puede interpretarse como la descomposición más pequeña que describe a cualquier estado del sistema tripartito, es una descomposición no superflua, que refleja algo que podríamos llamar los *mínimos grados de libertad* posibles del sistema.

Así pues, para obtener una descomposición no superflua que refleje todos los grados de libertad del sistema, elegimos trabajar sólo con Ω_0 . Comencemos por realizar una DVS para ella, lo cual siempre es posible hacer. Nos queda

$$\Omega_0 = U\Sigma V^\dagger, \quad (4.27)$$

ahora usemos la condición de que todas las Ω_i son de rango 1, es decir, $\det(\Omega_i) = 0$. Esto es fácil de probar para matrices 2×2 . Pero apliquémoslo sólo a Ω_0 :

$$\det(\Omega_0) = \det(U\Sigma V^\dagger) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V^\dagger). \quad (4.28)$$

Para matrices unitarias, se sabe que $\det(U) = \det(V^\dagger) = 1 \Rightarrow \det(\Sigma) = 0$. Puesto que Σ es una matriz diagonal, $\det(\Sigma) = 0$ arroja dos posibles resultados: $\Sigma_{00} = 0$ ó $\Sigma_{11} = 0$. Elegimos $\Sigma_{11} = 0$. La consecuencia directa de este resultado es que, en la primera igualdad de (4.25), el único término que no se anula, es el asociado a los índices “00”, mientras que los demás se anulan. Para (4.26), todos los términos están presentes porque no impusimos condiciones sobre Ω_1 .

Si juntamos (4.22) y (4.23), se obtiene

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |\xi\rangle_0 \sum_{kl} (\Omega_0)_{kl} |k\rangle |l\rangle + \alpha_1 |\xi\rangle_1 \sum_{kl} (\Omega_1)_{kl} |k\rangle |l\rangle, \quad (4.29)$$

y como los únicos términos que no se anulan son los correspondientes a los índices “00” para la suma del lado izquierdo (que contiene a Ω_0) y todos los términos se consideran para la suma del lado derecho (que contiene a Ω_1), el estado final no superfluo, resulta de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |\xi\rangle_0 |\eta\rangle_0 |\zeta\rangle_0 + \alpha_1 |\xi\rangle_1 \sum_{kl} (\Omega_1)_{kl} |k\rangle |l\rangle \quad (4.30)$$

Al no imponer la condición de rango 1 sobre Ω_i , la igualdad (4.26) no se cumple, lo que hace que todos los términos de la sumatoria sean considerados en la descomposición y así obtenemos la descomposición no superflua de 5 términos para nuestro estado. Finalmente, hacemos los cambios necesarios para que la descomposición quede reflejada sobre la base computacional para que resulte la forma conocida:

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle, \quad (4.31)$$

con $\lambda_i \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\mu_i \equiv \lambda_i^2$ / $\sum_i \mu_i = 1$.

Esta es la descomposición no superflua del estado que encontramos en [12], la cual refleja todos los grados de libertad reales del sistemas, a diferencia de una descomposición de Schmidt generalizada al caso tripartito, que refleja la descomposición no superflua más pequeña posible, donde los únicos términos no nulos son los asociados a los índices “000” y “111”.

Capítulo 5

Clasificación de Estados Tripartitos Entrelazados en un Sistema de Qubits Bajo OLCC Estocásticas

En este capítulo vamos a identificar y caracterizar todos los estados que comparten un mismo *tipo de entrelazamiento*, usando como criterio para la clasificación a las Operaciones Locales Estocásticas Asistidas con Comunicación Clásica (OLECC). Entre los estados que resultan de usar a las OLECC para clasificar, nos enfocamos, especialmente, en los estados con entrelazamiento tripartito. Mostramos que, mediante OLECC, el conjunto de estados tripartitos de qubits entrelazados, se divide en dos clases, que son *inequivalentes* entre sí: la clase GHZ y la clase W. Para cumplir con nuestro objetivo, citamos varias definiciones y las explicamos, junto con los principales conceptos que estamos utilizando.

5.1. Tipos de entrelazamiento bajo OLCC estocásticas

Es un resultado conocido, que para un gran número de copias de cualquier estado puro bipartito entrelazado, existe una única clase de equivalencia bajo OLCC, representada por el estado EPR, visto en (4.16). Este estado se elige como representante de la clase porque es un estado máximamente entrelazado, presentado en una forma muy simple: $|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$. Esto quiere decir, que cualquier estado puro bipartito entrelazado, puede ser llevado a su forma máximamente entrelazado (estado EPR), mediante OLCC, si y sólo si, se dispone de un gran número de copias simples de ese estado. Lo que hace que sea una conversión asintótica.

Nosotros, en este trabajo, nos estamos enfocando, únicamente, en una copia simple de un estado puro entrelazado. Para estos casos, veremos que las OLCC no nos sirven para definir clases de equivalencia. Veremos que el problema se resuelve definiendo la *equivalencia estocástica* y que una *clase de equivalencia estocástica*, define un mismo *tipo de entrelazamiento* (o *entrelazamiento equivalente*) para los estados que pertenecen a dicha clase.

La motivación subyacente para esta definición es que, si el entrelazamiento de $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ es equivalente, entonces los dos estados pueden usarse para realizar la misma tarea en materia de información, aunque la probabilidad de un desempeño exitoso de la tarea dependa del estado que esté siendo usado. Una vez definida una clase de equivalencia, cualquiera de los estados de dicha clase puede usarse para llevar a cabo una tarea específica de información cuántica. Una clase refleja que todos los estados son esencialmente el mismo, pues comparten las mismas propiedades de entrelazamiento. Lo usual es elegir a un representante de la clase que tendrá el mismo tipo de entrelazamiento que cualquier otro miembro. Se elige, comunmente, un estado que sea máximamente entrelazado como representante de la clase. Se encuentra que un tipo de entrelazamiento, o lo que llamamos propiedades de entrelazamiento, se refiere a la fortaleza del entrelazamiento. Es decir, en este trabajo vamos a probar que para los sistemas tripartitos entrelazados existen dos tipos de entrelazamiento: el entrelazamiento GHZ y el W y que el tipo GHZ es más débil que el W, en el sentido de que, cuando realizamos cierta operación cuántica (la traza parcial) para describir aparte a uno de los subsistemas, el resto de los subsistemas (los otros dos) quedan desentrelazados, es decir, en estado separable, mientras que, cuando hacemos exactamente lo mismo con el estado W, el resto de los subsistemas siguen entrelazados entre sí. Por eso se considera a los estados W como los estados con el tipo de entrelazamiento más fuerte.

5.1.1. Clases de equivalencia

En términos abstractos, una clase de equivalencia se evidencia, si existe alguna operación capaz de convertir a un objeto en otro, en cuyo caso, a ambos objetos se les denomina elementos de esa clase, que se define bajo el tipo de operaciones usadas para dicha conversión. En nuestro caso particular, estamos interesados en las operaciones locales.

DEFINICIÓN 6: (Clases de equivalencia bajo Operaciones Locales) Una clase de equivalencia bajo Operaciones Locales queda definida para sistemas compuestos, si existen Operadores Locales A , capaces de transformar (o convertir) un estado $|\psi\rangle$ en otro estado $|\phi\rangle$. Es decir,

$$|\phi\rangle = A|\psi\rangle, \tag{5.1}$$

siendo A , un Operador Local: $A = \mathbb{I} \otimes \dots \mathbb{I} \otimes A \otimes \mathbb{I} \dots \otimes \mathbb{I}$, según el subsistema en el que sea aplicado y el número de subsistemas que represente el estado global. Es decir, para una Operación Local A , realizada en el subsistema C , de un sistema global tripartito ABC , una clase de equivalencia quede establecida, si se cumple

$$|\phi\rangle = (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes A)|\psi\rangle. \quad (5.2)$$

Los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son los elementos de esa clase. Y el criterio o la base para tal clasificación, son las Operaciones Locales, representadas por los operadores A [1].

DEFINICIÓN 7: (Tipos de entrelazamiento) Decimos que dos estados pertenecientes a un sistema compuesto entrelazado tienen el mismo *tipo de entrelazamiento*, o tienen *entrelazamiento equivalente*, si pertenecen a la misma clase de equivalencia. Es decir, una clase de equivalencia para estados entrelazados define un tipo de entrelazamiento. Por eso, si existen operadores A , aplicados a alguno de los subsistemas (por ejemplo al subsistema C), para un sistema tripartito entrelazado, tales que

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes A)|\psi\rangle \\ & y \\ |\psi\rangle &= (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes A^{-1})|\phi\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

Entonces decimos que los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, contienen el mismo tipo de entrelazamiento. Si dos estados entrelazados pertenecen a la misma clase de equivalencia bajo Operaciones Locales, entonces comparten el mismo tipo de entrelazamiento. Notemos que, en general, una clase de equivalencia requiere que los operadores sean invertibles. Más adelante hablaremos de esto con más detalle [1].

5.2. Operaciones Locales Estocásticas asistidas con comunicación clásica (OLECC)

Debemos recalcar que la definición de clases de equivalencia para una copia simple de un estado no es un tema sencillo, pues no siempre se pueden encontrar los operadores adecuados para la conversión entre estados. Por ejemplo, para una copia simple, los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ pueden ser interconvertidos, el uno en el otro, con certeza, bajo OLCC, sólo si se relacionan mediante operadores locales unitarios U . Pero incluso en los sistemas bipartitos más simples, $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ no se relacionan, generalmente, por operadores locales unitarios U [1]. Esto nos lleva a buscar una clasificación alternativa. Una manera de resolver el problema - la que usamos aquí - es la de no imponer la condición de que un estado deba

convertirse en el otro con certeza. Nos bastará con que, tan sólo, exista una probabilidad no nula de que dicha interconversión ocurra. Esto define un tipo de equivalencia llamada *equivalencia estocástica*.

La desventaja de esta solución alternativa, es que la tarea que vayamos a realizar con un estado de una *clase de equivalencia estocástica*, no se realizará con certeza, con cualquiera de los dos estados con *entrelazamientos equivalentes*, sino que la probabilidad de un desempeño exitoso de la tarea dependerá del estado que esté siendo usado.

DEFINICIÓN 8: (Entrelazamientos equivalentes bajo OLECC) Decimos que $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ tienen entrelazamiento equivalente, si existen protocolos locales que permiten a las partes convertir a cada uno de los dos estados en el otro, con alguna probabilidad de éxito a priori.

5.2.1. OLECC y Operadores Locales Invertibles (OLI)

En nuestra clasificación, vemos que la principal herramienta matemática que usaremos, será la noción de *rango de un operador*, específicamente los rangos de las matrices de densidad reducida asociadas a cada uno de los tres subsistemas que forman nuestro sistema compuesto entrelazado. Nos basamos en un importante resultado del álgebra lineal, que asegura que las transformaciones invertibles no modifican los rangos de los operadores que están siendo transformados. Esto lo mostramos en el Apéndice A, aplicado a los *rangos locales* (el rango de una matriz densidad reducida asociada a alguno de los subsistemas) y es la base de nuestra clasificación.

Entonces, si los operadores que usamos para relacionar a los diferentes estados entrelazados que estamos estudiando, son invertibles y locales, ellos nos ayudan a clasificar a los estados en función de los *rangos locales*, como veremos en detalle más adelante. Se puede probar, en efecto, que las OLECC están formadas por Operadores Locales Invertibles (OLI). Es decir, si aplicamos una OLECC en uno de los subsistemas (por ejemplo, el subsistema C)

$$|\phi\rangle = (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes A)|\psi\rangle, \tag{5.4}$$

esto quiere decir, que el operador A es invertible y que los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, relacionados por el OLI, A , tienen *entrelazamiento equivalente* (pertenecen a la misma clase de *equivalencia estocástica*).

Teorema 3: Dos estados puros de un sistema multipartito son equivalentes bajo OLECC, si ellos están relacionados por un operador local invertible (OLI).

En el Apéndice A, probamos este teorema.

En la práctica, los protocolos locales son una serie de rondas de operaciones, donde en cada ronda, una parte determinada manipula localmente su subsistema y comunica clásicamente sus resultados a las otras partes. Las operaciones posteriores se harán dependiendo de los resultados previos y el protocolo se divide en varias ramas. Una ronda de operaciones locales, mediadas por comunicación clásica entre las partes, determina una rama del protocolo. Para nuestros propósitos, sólo necesitamos enfocarnos en una de estas ramas, de hecho, la ecuación (5.5), se refiere justo a la rama que hizo el trabajo y bajo esta consideración hacemos nuestros cálculos teóricos.

No podemos pasar por alto el hecho de que, al estar las OLECC representadas por operadores unitarios, para el caso de una copia simple de un estado puro, éstas son un “grano grueso” de la clasificación anterior, pues las OLCC para una copia simple de un estado puro, están representadas por operadores unitarios. Es decir, las OLECC contienen a las OLCC, porque el conjunto de los operadores invertibles contiene a los operadores unitarios.

5.3. Tipos de entrelazamiento en sistemas de tres qubits entrelazados

Definimos un tipo de entrelazamiento cuando se establece una clase de equivalencia para estados entrelazados. Ya sabemos que en nuestro caso la equivalencia es estocástica. Vemos en detalle, que para sistemas de tres qubits entrelazados, existen seis clases de *equivalencia estocástica*, o sea, equivalencia mediante OLECC. Es decir, existen seis tipos de entrelazamiento que son inequivalentes entre sí. Obviamente, dos clases son inequivalentes entre si mediante OLECC, pues eso es justo lo que las distingue como clases independientes.

La base que nos permitirá hacer esta clasificación es la observación de los *rangos locales*, es decir, de los rangos de las matrices densidad asociadas a los subsistemas.

LEMA 1: Si los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, cumplen con

$$|\phi\rangle = (A \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle, \quad (5.5)$$

entonces los rangos de las correspondientes matrices de densidad reducidas satisfacen $r(\rho_A^\psi) \geq r(\rho_A^\phi)$, $r(\rho_B^\psi) \geq r(\rho_B^\phi)$ y $r(\rho_C^\psi) \geq r(\rho_C^\phi)$.

Se deduce del lema, que las operaciones locales no pueden aumentar los rangos locales. O bien los dejan invariantes, o los reducen. No es complicado darse cuenta que la igualdad de los rangos locales en el lema se cumple si el operador local A es invertible. De lo contrario, el rango local del estado después de la transformación, habrá disminuido si A es

no invertible. De este resultado, deducimos las relaciones jerárquicas entre las clases. Esto no es difícil de entender, si se tiene en cuenta que, un operador no invertible va a proyectar sólo algunos de los términos de Schmidt en los que se descompone el estado, más no todos, lo cual disminuye el número de términos del estado final. Esto, obviamente, al calcular la traza parcial para una de las matrices densidad reducidas, trae como consecuencia una disminución en el rango de esa matriz, para dicho estado final.

Lo anterior resultará más claro si acotamos que, siempre podemos hacer una descomposición de Schmidt del estado, lo que trae como consecuencia directa que el número de coeficientes de Schmidt de la descomposición será el rango de la matriz densidad reducida para cualquiera de los subsistemas. Es decir, tener una descomposición de Schmidt de un estado, genera (en general) matrices densidad reducidas de rango máximo. En nuestro caso, esto significa que estamos suponiendo que las matrices densidad reducidas $\rho_A = Tr_{BC}(|\psi\rangle\langle\psi|)$, ρ_B y ρ_C tienen rango dos ($r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$) a menos que las condiciones del estado original en cuestión, indiquen lo contrario. El rango máximo para matrices cuadradas es 2. Y las matrices densidad reducidas para cada uno de los subsistemas, de un sistema multipartito qubit, siempre son matrices cuadradas.

El estado que estemos considerando tendrá sus propias características físicas, en cuanto a entrelazamiento se refiere. Esto determina las propiedades de los coeficientes de Schmidt, que a su vez, tiene influencia sobre los rangos locales (ver (4.9)). Las matrices densidad presentes en (4.9), así escritas, reflejan rango máximo porque la base en la que están representadas es ortonormal. Los coeficientes de esa descomposición son el cuadrado de los coeficientes de Schmidt y esto justifica que sus características influyeran los rangos locales de las matrices densidad ρ_i .

5.3.1. Método para la clasificación

Para la clasificación de nuestro estado qubit tripartito entrelazado, nos vamos a basar en un tipo de clasificación previa hecha por R. Tarrach y colaboradores [12].

Nuestro aporte se basa en mostrar la relación que guardan los parámetros usados en la clasificación con los rangos locales y relacionarlos a su vez, con el tipo de entrelazamiento presente en cada estado que resulte de la clasificación de R. Tarrach. Demostramos que, en función de los rangos locales, la clasificación de Tarrach es “gruesaz que se reduce a 6 clases: la clase 1, contiene sólo estados separables; la clase 2, 3 y 4, contiene estados con entrelazamiento bipartito y las clases 5 y 6, contienen estados con entrelazamiento tripartito. Igualmente demostramos que estas 6 clases son inequivalentes entre sí.

Comencemos recordando la descomposición del estado en su forma no superflua (4.31):

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle,$$

$$\text{con } \lambda_i \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \mu_i \equiv \lambda_i^2 \quad / \quad \sum_i \mu_i = 1.$$

El método de Tarrach se basa en buscar parámetros que se mantengan invariantes para cualquier estado y que estén relacionados con los λ_i , de modo que, para diferentes valores de los λ_i , se definan diferentes clases. Estos invariantes son 5, exactamente, y los tomamos de [12].

Definiendo $\Delta \equiv |\lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi} - \lambda_2 \lambda_3|^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \text{Tr}(\rho_A^2) = 1 - 2\mu_0(1 - \mu_0 - \mu_1), \\ I_2 &\equiv \text{Tr}(\rho_B^2) = 1 - 2\mu_0(1 - \mu_0 - \mu_1 - \mu_2) - 2\Delta, \\ I_3 &\equiv \text{Tr}(\rho_C^2) = 1 - 2\mu_0(1 - \mu_0 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3) - 2\Delta \\ I_4 &\equiv \text{Tr}(\rho_A \otimes \rho_A \rho_{AB}), \\ I_5 &\equiv |H \det(a_{jkl})|^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Estos parámetros de entrelazamiento son invariantes en el sentido de que, para cualquiera que sea el estado, cumplen con

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \text{Tr}(\rho_A^2) \leq 1, \\ \frac{1}{2} &\leq \text{Tr}(\rho_B^2) \leq 1, \\ \frac{1}{2} &\leq \text{Tr}(\rho_C^2) \leq 1, \\ \frac{1}{4} &\leq \text{Tr}(\rho_A \otimes \rho_A \rho_{AB}) \leq 1, \\ 0 &\leq |H \det(a_{jkl})|^2 \leq \frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Donde

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &\equiv \text{Tr}_C(|\psi\rangle\langle\psi|), \quad \rho_C \equiv \text{Tr}_{AB}(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ \rho_A &\equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \quad \text{y} \quad \rho_B \equiv \text{Tr}_A(\rho_{AB}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

La cantidad $H \det(a_{jkl})$ se conoce como hiperdeterminante de Cayley y está asociado con una cantidad llamada 3-tangle. Pese a que estos invariantes tienen significado físico, como veremos, se hace una conversión, usando $\sum_i \mu_i = 1$, para expresarlas en forma

algebráicamente más fácil de manejar a efectos de la clasificación:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq J_1 \equiv \Delta \leq \frac{1}{4}, \\
 0 &\leq J_2 \equiv \mu_0\mu_2 \leq \frac{1}{4}, \\
 0 &\leq J_3 \equiv \mu_0\mu_3 \leq \frac{1}{4}, \\
 0 &\leq J_4 \equiv \mu_0\mu_4 \leq \frac{1}{4}, \\
 J_5 &\equiv \mu_0(\Delta + \mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_4).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Los invariantes J_4 y J_5 son simétricos bajo permutaciones de las partes A , B y C que conforman el sistema tripartito, mientras que $J_1(J_2, J_3)$ es simétrico sólo bajo el intercambio de la parte B y C (A y C , A y B).

Ahora se procede con una clasificación completa de los estados de tres qubits representados en la ecuación (4.31), con la ayuda del grupo de inequaciones (5.9):

- Tipo 1 (Estados producto): $J_i = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Tipo 2a (Estados biseparables): $J_i = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$, excepto $J_1(J_2, J_3)$, cuando la parte $A(B, C)$ no está entrelazada con las otras dos partes. Contiene sólo entrelazamiento bipartito.
- Tipo 2b (Estados GHZ generalizados): $J_i = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$, excepto J_4 .
- Tipo 3a (Estados tri-Bell): $\mu_1 = \mu_4 = 0$.
- Tipo 3b (Estados GHZ extendidos): $\mu_j = \mu_k = 0$, para $j, k \in \{1, 2, 3\}$ y $j \neq k$.
- Tipo 4a $\mu_4 = 0$.
- Tipo 4b $\mu_2 = 0$ ó $\mu_3 = 0$.
- Tipo 4c $\mu_1 = 0$.

Esta es la clasificación que propone R. Tarrach y colaboradores [12]. A continuación, la mostraremos en detalle, según los valores dados a los parámetros para cada tipo, en relación con la ecuación (4.31). También mostramos la relación que existe entre cada tipo propuesto por Tarrach y los rangos locales, con lo que demostramos que esa clasificación se puede reducir a 4 tipos (los primeros 4 tipos de la clasificación de Tarrach), si nos enfocamos en los rangos locales. Se verá que estos 4 tipos se reducen a los 3 grupos jerárquicos que se relacionan mediante OL no invertibles. Y que estos 3 grupos contienen a las 6 clases inequivalentes bajo OLECC.

5.3.2. Estados de los subsistemas y rangos locales

La clasificación de Tarrach se basa en los parámetros de entrelazamiento λ_i , que se muestran en la ecuación (4.31). Para mostrar la relación existente entre esa clasificación y los rangos locales, tenemos que calcular las matrices densidad asociadas a cada subsistema, para el estado tripartito de qubit expresado en la descomposición (4.31) - justamente - y vemos que la relación existente se muestra de manera natural cuando evaluamos los rangos locales de estas matrices para cada condición dada por Tarrach.

Comencemos por señalar que los primeras tres invariantes usadas por Tarrach, a saber I_1, I_2, I_3 , las primeras 3 desigualdades presentadas en (5.7), expresan la relación de pureza para un sistema de qubit, que a su vez, reflejan el grado de entrelazamiento del estado global. Es decir, si $Tr(\rho_x^2)$ es menor a 1 (con $x = A, B, C$), significa que el estado ρ_x , asociado al subsistema x , está mezclado, por lo tanto, el estado puro global $|\psi_{xy}\rangle$ está entrelazado (el valor $\frac{1}{2}$ indica la máxima mezcla, por lo tanto, máximo entrelazamiento del estado global). Si por el contrario, $Tr(\rho_x^2)$ es igual a 1, significa que el estado ρ_x , asociado al subsistema x , es un estado puro, y por lo tanto, el estado puro global no está entrelazado, es separable (ver 1.2 y 4.3.1).

El análisis anterior nos muestra la relevancia de los operadores densidad asociados a los subsistemas, cuando se evalúa el grado de entrelazamiento del estado del sistema global. Ahora veremos como el rango de estos operadores define tipos de entrelazamiento.

Subsistemas A, B y C (ρ_A, ρ_B y ρ_C)

Usemos las definiciones de (5.8) para nuestros cálculos. Comencemos calculando $|\psi\rangle\langle\psi|$, para luego calcular $Tr_C(|\psi\rangle\langle\psi|)$ y obtener ρ_{AB} . Ya con esto podemos obtener ρ_A, ρ_B y ρ_C . Todo esto para el estado (4.31).

Esta es la matriz densidad asociada al estado puro global $|\psi\rangle$, en su forma no superflua:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle\langle\psi| = & \lambda_0^2|000\rangle\langle 000| + \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi}|000\rangle\langle 100| + \lambda_0\lambda_2|000\rangle\langle 101| \\
 & + \lambda_0\lambda_3|000\rangle\langle 110| + \lambda_0\lambda_4|000\rangle\langle 111| + \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi}|100\rangle\langle 000| \\
 & + \lambda_1^2|100\rangle\langle 100| + \lambda_1\lambda_2e^{i\varphi}|100\rangle\langle 101| + \lambda_1\lambda_3e^{i\varphi}|100\rangle\langle 110| \\
 & + \lambda_1\lambda_4e^{i\varphi}|100\rangle\langle 111| + \lambda_2\lambda_0|101\rangle\langle 000| + \lambda_2\lambda_1e^{-i\varphi}|101\rangle\langle 100| \\
 & + \lambda_2^2|101\rangle\langle 101| + \lambda_2\lambda_3|101\rangle\langle 110| + \lambda_2\lambda_4|101\rangle\langle 111| \\
 & + \lambda_3\lambda_0|110\rangle\langle 000| + \lambda_3\lambda_1e^{-i\varphi}|110\rangle\langle 100| + \lambda_3\lambda_2|110\rangle\langle 101| \\
 & + \lambda_3^2|110\rangle\langle 110| + \lambda_3\lambda_4|110\rangle\langle 111| + \lambda_4\lambda_0|111\rangle\langle 000| \\
 & + \lambda_4\lambda_1e^{-i\varphi}|111\rangle\langle 100| + \lambda_4\lambda_2|111\rangle\langle 101| \\
 & + \lambda_4\lambda_3|111\rangle\langle 110| + \lambda_4^2|111\rangle\langle 111|.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ahora, usando la definición de traza parcial (ver 2.4.1), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \rho_{AB} = Tr_C(|\psi\rangle\langle\psi|) &= (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \langle 0|)|\psi\rangle\langle\psi|(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes |0\rangle) + (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \langle 1|)|\psi\rangle\langle\psi|(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes |1\rangle) \\
 &= \lambda_0^2|00\rangle\langle 00| + \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi}|00\rangle\langle 10| + \lambda_0\lambda_3|00\rangle\langle 11| + \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi}|10\rangle\langle 00| \\
 &\quad + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)|10\rangle\langle 10| + \lambda_1\lambda_3e^{i\varphi}|10\rangle\langle 11| + \lambda_3\lambda_0|11\rangle\langle 00| \\
 &\quad + \lambda_3\lambda_1e^{-i\varphi}|11\rangle\langle 10| + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)|11\rangle\langle 11| \\
 &\quad + \lambda_2\lambda_4|10\rangle\langle 11| + \lambda_4\lambda_2|11\rangle\langle 10|.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ahora podemos calcular ρ_A y ρ_B :

$$\begin{aligned}
 \rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) &= (\mathbb{I} \otimes \langle 0|)\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes |0\rangle) + (\mathbb{I} \otimes \langle 1|)\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes |1\rangle) \\
 &= \lambda_0^2|0\rangle\langle 0| + \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi}|0\rangle\langle 1| + \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi}|1\rangle\langle 0| \\
 &\quad + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)|1\rangle\langle 1|.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) &= (\langle 0| \otimes \mathbb{I})\rho_{AB}(|0\rangle \otimes \mathbb{I}) + (\langle 1| \otimes \mathbb{I})\rho_{AB}(|1\rangle \otimes \mathbb{I}) \\
 &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)|0\rangle\langle 0| + (\lambda_1\lambda_3e^{i\varphi} + \lambda_2\lambda_4)|0\rangle\langle 1| \\
 &\quad + (\lambda_3\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_2)|1\rangle\langle 0| + (\lambda_3^2 + \lambda_4^2)|1\rangle\langle 1|.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Usando $\sum_{ij=0}^1 |i\rangle\langle j| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, obtenemos:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi} \\ \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi} & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

$$\rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_3e^{i\varphi} + \lambda_2\lambda_4 \\ \lambda_3\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_2 & \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Para ρ_C , procedemos:

$$\begin{aligned}
 \rho_C &\equiv Tr_{AB}(|\psi\rangle\langle\psi|) \\
 &= (\langle 0| \otimes \langle 0| \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle\langle\psi|(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \mathbb{I}) + (\langle 1| \otimes \langle 1| \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle\langle\psi|(|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \mathbb{I}) \\
 &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2)|0\rangle\langle 0| + (\lambda_1\lambda_2e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4)|0\rangle\langle 1| \\
 &\quad + (\lambda_2\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_3)|1\rangle\langle 0| + (\lambda_2^2 + \lambda_4^2)|1\rangle\langle 1|,
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

finalmente

$$\rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1\lambda_2e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4 \\ \lambda_2\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_3 & \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Podemos verificar nuestros resultados recordando que $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, con lo cual se ve claramente que las 3 matrices densidad obtenidas cumplen con la propiedad $Tr(\rho_x) = 1$ (ver 1.2, ecuación (1.2)), pues los elementos de su diagonal son justo la suma completa que acabamos de describir.

5.3.3. Clasificación de los estados en función de los rangos locales

Para saber si el estado que resulta de imponer las condiciones que definen a cada tipo, está entrelazado o no, hay que examinar las implicaciones que tienen las condiciones dadas a los parámetros J_i , sobre los parámetros de entrelazamiento λ_i , del estado (4.31). Esto se hace mediante el grupo de inequaciones (5.9), para los J_i , que, como se ve, se definen implícitamente en función de los λ_i , presentes en (4.31). Tomando en cuenta, por supuesto, que $\mu_i \equiv \lambda_i^2$. Una vez hecho esto, veremos como se relaciona con los rangos locales.

Estados separables

Tipo 1

Si $J_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, de (5.9), se aprecia que existen dos posibilidades.

Caso a: $\mu_0 = 0$, lo cual anula a J_2, J_3, J_4 y J_5 , quedando libre $J_1 \equiv \Delta \equiv |\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} - \lambda_2\lambda_3|^2 = 0$, implica que $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3$.

Ahora impongamos estas condiciones de los λ 's sobre el estado (4.31) (siempre tomando en cuenta que $\mu_i \equiv \lambda_i^2$):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \\ |\psi\rangle &= |1\rangle \otimes (\lambda_1e^{i\varphi}|00\rangle + \lambda_2|01\rangle + \lambda_3|10\rangle + \lambda_4|11\rangle) \\ |\psi\rangle &= |1\rangle \otimes \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4}|0\rangle + |1\rangle\right) \otimes (\lambda_3|0\rangle + \lambda_4|1\rangle). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Esta última expresión se obtuvo usando $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3$, lo que muestra claramente, que es un estado *completamente separable*: $A - B - C$.

Caso b: $\mu_0 \neq 0$, lo cual implica que $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$, μ_1 queda libre (obviamente, se dedujo esto suponiendo $\mu_0 \neq 0$, viendo que debe ocurrir con los demás parámetros en (5.9), para que se siga cumpliendo la condición $J_i = 0$). Como $\mu_0 \neq 0$ y μ_1 es libre, nos queda:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle \\ |\psi\rangle &= (\lambda_0|0\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Se ve claro que este también es un estado *completamente separable*: $A - B - C$.

Así, hemos probado que los estados tipo 1 de Tarrach, son estados *completamente separables*.

Implicación en los rangos locales

Ya vimos claramente que la condición $J_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, implica que los estados con condiciones de este tipo son completamente separables. Pero a nosotros nos interesa lo que ocurre con las matrices densidad de los subsistemas (ρ_A , ρ_B y ρ_C), porque nuestro criterio para clasificar son las operaciones locales, partiendo del hecho, de que las OLECC, dejan invariantes los rangos locales (los rangos de las matrices densidad reducida). Por lo tanto, si encontramos un grupo de estados, todos con un mismo valor de rangos locales para sus subsistemas, entonces ellos pertenecen a la misma clase de equivalencia (en nuestro caso, una *equivalencia estocástica*).

Para ver las consecuencias que tienen estas condiciones sobre las matrices densidad de los subsistemas, escribimos los μ_i , presentes en cada caso, en función de los λ_i , y los evaluamos en las matrices de las ecuaciones (5.14), (5.15), (5.17).

Subsistema A:

Caso a: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3$

$$\Rightarrow \rho_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Caso b: $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \Rightarrow$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi} \\ \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi} & \lambda_1^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Para mostrar que una de las filas de la matriz, es una combinación lineal de la otra, se usó (en el Caso b) el método de Gauss-Jordan. El cambio usado fue: $-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}e^{i\varphi}f_1 + f_2 : f_2$. Y así, se ve que estas dos matrices tienen, claramente, rango 1 ($r(\rho_A) = 1$) porque una fila completa es cero en todas sus entradas (ver Apéndice A).

Subsistema B:

Caso a: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3 \Rightarrow$

$$\rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_3e^{i\varphi} + \lambda_2\lambda_4 \\ \lambda_3\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_2 & \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_3e^{i\varphi} + \lambda_2\lambda_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Caso b: $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\Rightarrow \rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

En el Caso a no se aprecia, a simple vista, el rango de la matriz, así que usamos Gauss-Jordan para intentar simplificar la matriz, a conveniencia. Primero usamos la relación $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3$, en las entradas antidiagonales de la matriz, luego aplicamos Gauss-Jordan. Los cambios fueron: $-\frac{\lambda_4}{\lambda_2}f_1 + f_2 : f_2$ y $\frac{\lambda_2}{\lambda_4}f_2 + f_1 : f_2$. Y ahora sí es evidente que las dos matrices son de rango 1 ($r(\rho_B) = 1$).

Subsistema C:

Caso a: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3 \Rightarrow$

$$\rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1\lambda_2e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4 \\ \lambda_2\lambda_1e^{-i\varphi} + \lambda_4\lambda_3 & \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1\lambda_2e^{i\varphi} + \lambda_3\lambda_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Caso b: $\lambda_0 \neq 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\Rightarrow \rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

En el Caso a usamos la relación $\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} = \lambda_2\lambda_3$, en una forma conveniente, en las entradas antidiagonales de la matriz y luego Gauss-Jordan: $-\frac{\lambda_4}{\lambda_3}f_1 + f_2 : f_2$. Y así, la matriz en ambos casos tiene rango 1 ($r(\rho_C) = 1$).

Concluimos que los estados **tipo 1**, de la clasificación de Tarrach, son estados cuyos subsistemas tienen matrices densidad de rango 1. Es decir, si el estado global de un sistema físico compuesto tiene matrices densidad reducidas de rango 1, para cada uno de sus subsistemas, entonces estamos en presencia de un estado no entrelazado o separable.

Estados biseparables o con entrelazamiento bipartito

Tipo 2a

$$J_i = 0, \text{ excepto } J_1(J_2 \text{ ó } J_3).$$

Caso a: $J_i = 0$, excepto J_1 . Viendo (5.9), con esta condición, se aprecian dos subcasos:

Caso a.1: $\lambda_0 \neq 0$, implica que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Y de la definición de $J_1 = \Delta \equiv |\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} - \lambda_2\lambda_3|^2 = 0$, se deduce que μ_1 queda libre.

Evaluemos estas condiciones en el estado (4.31):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle \\ |\psi\rangle &= (\lambda_0|0\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|1\rangle) \otimes |00\rangle \end{aligned} \quad (5.26)$$

Es un estado *completamente separable*.

Caso a.2: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ libres:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|110\rangle + \lambda_3|101\rangle + \lambda_4|111\rangle \\ |\psi\rangle &= |1\rangle \otimes (\lambda_1e^{i\varphi}|00\rangle + \lambda_2|10\rangle + \lambda_3|01\rangle + \lambda_4|11\rangle). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Este estado es *biseparable*, del tipo $A - BC$. Es decir, el subsistema A es separable con respecto a los subsistemas BC , los cuales están entrelazados entre sí. El estado del lado derecho del producto tensorial, todavía podría ser un estado separable, pero ello requeriría de condiciones especiales sobre los λ 's que este caso no exige. Por eso aseguramos que es entrelazado.

Caso b: $J_i = 0$, excepto J_2 . Esta condición implica que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ y por $J_1 = \Delta \equiv |\lambda_1\lambda_4e^{i\varphi} - \lambda_2\lambda_3|^2 = 0$, deducimos que λ_0, λ_1 y λ_2 quedan libres.

Evaluando en el estado:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle \\ |\psi\rangle &= (\lambda_0|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_3 + \lambda_1e^{i\varphi}|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_3 + \lambda_2|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_3) \otimes |0\rangle_2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Se ve que es un estado *biseparable*, del tipo $AC - B$, pues el estado que está entre paréntesis es, obviamente, entrelazado.

Caso c: $J_i = 0$, excepto J_3 . Esto implica que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ y λ_0, λ_1 y λ_3 libres.

Evaluando en el estado:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_3|110\rangle \\ |\psi\rangle &= (\lambda_0|00\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|10\rangle + \lambda_3|11\rangle) \otimes |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Obtenemos un estado biseparable del tipo: $AB - C$.

Hemos probado que los estados del Tipo 2a, de Tarrach, son estados, en general, *biseparables* (a excepción del caso especial a.1, que resulta *completamente separable*). De modo que: si $J_i = 0$, excepto J_1 , tenemos estados *biseparables* del tipo $A - BC$; si $J_i = 0$, excepto J_2 , tenemos estados *biseparables* del tipo $AC - B$; si $J_i = 0$, excepto J_3 , tenemos estados *biseparables* del tipo $AB - C$.

Implicación en los rangos locales

Del cálculo anterior, donde quedó demostrado que los estados separables tienen matrices densidad de rango 1 y del hecho de que el rango máximo de nuestras matrices es 2, podemos inferir que los estados entrelazados tienen matrices densidad de rango 2. Vamos a verificarlo para el Caso a.2. Para el resto de la clasificación, basta demostrar, que los estados de un tipo dado están entrelazados o no, para concluir que sus rangos locales son 1 o 2, según el caso.

Caso a.2: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ libres:

Subsistema A:

$$\Rightarrow \rho_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Subsistema B:

$$\Rightarrow \rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1 \lambda_3 e^{i\varphi} + \lambda_2 \lambda_4 \\ \lambda_3 \lambda_1 e^{-i\varphi} + \lambda_4 \lambda_2 & \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Subsistema C:

$$\Rightarrow \rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_3^2 & \lambda_1 \lambda_2 e^{i\varphi} + \lambda_3 \lambda_4 \\ \lambda_2 \lambda_1 e^{-i\varphi} + \lambda_4 \lambda_3 & \lambda_2^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Se puede apreciar, muy claramente, que la matriz ρ_A es de rango 1 y que las matrices ρ_B y ρ_C , son de rango 2, porque todos sus parámetros son libres y no se cumple la relación $\lambda_1 \lambda_4 e^{i\varphi} = \lambda_2 \lambda_3$. No hay manera de reducirlas mediante el método de Gauss-Jordan, de modo que una fila completa se anule, porque las filas son linealmente independientes (esto ocurre en matrices de rango máximo).

La forma sencilla en la que están escritas nuestras matrices y las condiciones dadas por Tarrach para cada Tipo de estados, junto con los ejemplos que ya hemos visto en detalle, nos permite concluir, de manera general, que los estados separables tienen matrices densidad de rango 1, para los subsistemas, mientras que los estados entrelazados tienen matrices densidad de rango 2. De ahora en adelante, para el resto de los Tipos de estados de Tarrach, nos bastará con probar si son separables o entrelazados para saber los valores de los rangos locales y, finalmente hacer nuestra clasificación en función de ellos. De todas maneras, siempre se puede “echar un vistazo.^a las matrices densidad de los subsistemas que ya hemos escrito y, con las condiciones dadas, verificar que sus rangos concuerdan con nuestra generalización.

Una manera más convincente de notar que los estados entrelazados tienen matrices densidad de rango 2, asociadas a los subsistemas que están entrelazados entre sí, es por el resultado conocido del álgebra lineal, que afirma que una matriz con coeficientes reales es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. En el Apéndice A, mostramos que las matrices con rango máximo son invertibles. En nuestro caso, 2 es el rango máximo, y nuestras matrices son de coeficientes reales. Así que es mucho más fácil visualizar que las matrices que resultan de estados entrelazados, tienen determinantes distinto de cero. También es útil para el caso contrario, pues si una matriz tiene determinante nulo, entonces no es invertible. En nuestro caso, esto significa que son de rango 1, lo cual es simple de ver para las matrices densidad asociadas a estados separables.

De lo antes dicho, nuestra conclusión para los estados **tipo 2a** de Tarrach es: la condición $J_i = 0$, excepto J_1 , que representa estados *biseparables* del tipo $A-BC$ significa, en función de los rangos locales, que $r(\rho_A) = 1$ y $r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$; la condición $J_i = 0$, excepto J_2 , que representa estados *biseparables* del tipo $AC-B$ significa que $r(\rho_A) = r(\rho_C) = 2$ y $r(\rho_B) = 1$ y la condición $J_i = 0$, excepto J_3 , que representa estados *biseparables* del tipo $AB-C$ significa que $r(\rho_A) = r(\rho_B) = 2$ y $r(\rho_C) = 1$.

Estados tripartitos entrelazados

Tipo 2b

$J_i = 0$, excepto J_4 . Observando (5.9), inferimos que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_0, \lambda_4 \neq 0$. De $J_5 = 0$ y $J_1 \equiv \Delta = 0$ surge $\mu_1\mu_4 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$; es decir, $\lambda_1 = 0$.

Evaluando en (4.31), obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_4|111\rangle. \quad (5.33)$$

Este es un estado *completamente entrelazado*. Es decir, sus tres subsistemas están entrelazados entre sí. A dicho estado se le denomina estado tripartito entrelazado, simplemente.

Rangos locales: Los rangos de las matrices densidad asociadas a los subsistemas de estos estados son $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, como se ve en las matrices

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_0\lambda_1e^{-i\varphi} \\ \lambda_1\lambda_0e^{i\varphi} & \lambda_1^2 + \lambda_4^2 \end{pmatrix} \rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix} \rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_4^2 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Las matrices ρ_B y ρ_C son, evidentemente, de rango 2, y ρ_A también es de rango 2, porque su determinante es distinto de cero, $\det|\rho_A| = \lambda_0^2\lambda_4^2$. Es decir, ρ_A es invertible, de rango 2.

Tipo 3a

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 0$$

Obtenemos el estado:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle. \quad (5.35)$$

Como ninguno de los qubit se repite, sucesivamente, en los tres estados, se ve que es imposible separarlo en productos tensoriales. Este también es un estado tripartito entrelazado.

Rangos locales: Los rangos de las matrices densidad asociadas a los subsistemas de estos estados son $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, como se aprecia con claridad en las matrices

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix} \rho_B = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \rho_C = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_3^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Tipo 3b

$$\lambda_j = \lambda_k = 0, \text{ para } j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ y } j \neq k.$$

Caso a: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad (5.37)$$

Caso b: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad (5.38)$$

Caso c: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad (5.39)$$

Los 3 son estados entrelazados: $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$.

Tipo 4a

$$\lambda_4 = 0$$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle \quad (5.40)$$

Tipo 4b

$$\lambda_2 = 0$$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad (5.41)$$

Tipo 4c

$$\lambda_1 = 0$$

Obtenemos:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad (5.42)$$

Estos 3 estados también son entrelazados (recordemos que nos referimos a que, los tres subsistemas están entrelazados). Se ve, porque ninguno de los qubit se repite sistemáticamente en los 4 elementos, de modo que pudiéramos separarlo del resto, como factor común para el producto tensorial. Entonces: $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$.

Concluimos que los estados del **tipo 2b**, **tipo 3a**, **tipo 3b**, **tipo 4a**, **tipo 4b** y **tipo 4c** son todos pertenecientes a la clase con rangos locales: $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$. Es decir, con entrelazamiento tripartito.

Pero ahora nos preguntamos ¿los estados con entrelazamiento tripartito, es decir, aquellos con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, tendrán una sub - clasificación bajo OLECC? La respuesta a esta pregunta es el punto por tratar a continuación y es el punto central de este trabajo.

Sub - clasificación para los estados tripartitos entrelazados

Vimos que los estados con entrelazamiento tripartito tienen matrices densidad de rango máximo para sus subsistemas, específicamente de rango 2. Ahora vamos a mostrar una manera muy sencilla de subdividir a esta clase.

Los estados de la ecuación (4.31) son, en general, estados con entrelazamiento tripartito, si no les damos condiciones especiales a los λ 's. Es decir, consideremos la ecuación (4.31), para las condiciones tipo 2b, en adelante (están excluidas las condiciones tipo 1 y tipo 2a) escribámoslo de la siguiente manera, conveniente para nuestro propósito:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|0\rangle \otimes |00\rangle + |1\rangle \otimes (\lambda_1 e^{i\varphi}|00\rangle + \lambda_2|01\rangle + \lambda_3|10\rangle + \lambda_4|11\rangle). \quad (5.43)$$

Luego,

$$|\psi\rangle = \lambda_0|0\rangle \otimes |00\rangle + |1\rangle \otimes |\phi_{BC}\rangle, \quad (5.44)$$

con

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1 e^{i\varphi} |00\rangle + \lambda_2 |01\rangle + \lambda_3 |10\rangle + \lambda_4 |11\rangle \quad (5.45)$$

Puesto que ya probamos que cualquier estado de tres qubit puede ser escrito en la forma (4.31) entonces, de (5.44), podemos afirmar que existen dos clases de estados tripartitos entrelazados: cuando $|\phi_{BC}\rangle$ es separable y cuando $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado. Por supuesto, respetando las condiciones para que el estado global esté entrelazado.

Caso $|\phi_{BC}\rangle$ separable: Sabiendo que $|\phi_{BC}\rangle$ siempre se puede escribir en la forma (5.45), lo que vamos a buscar son las condiciones que deben cumplir los λ 's para que tenga lugar este caso, respetando que el estado global siga entrelazado.

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_4 |11\rangle. \quad (5.46)$$

Es un estado separable. El estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.47)$$

Este es un estado **tipo 2b**.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_3 |10\rangle + \lambda_4 |11\rangle \quad (5.48)$$

$$|\phi_{BC}\rangle = |1\rangle \otimes (\lambda_2 |0\rangle + \lambda_4 |1\rangle).$$

Es un estado separable. El estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.49)$$

Este es un estado **tipo 3b: Caso a**.

3) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_2 |01\rangle + \lambda_4 |11\rangle \quad (5.50)$$

$$|\phi_{BC}\rangle = (\lambda_2 |0\rangle + \lambda_4 |1\rangle) \otimes |1\rangle.$$

Es un estado separable. El estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_4 |111\rangle \quad (5.51)$$

Este es un estado **tipo 3b: Caso b**.

4) $\lambda_i \neq 0 \forall i$, se cumple $\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_4e^{i\varphi}$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4}|0\rangle + |1\rangle \right) \otimes (\lambda_3|0\rangle + \lambda_4|1\rangle). \quad (5.52)$$

Así que $|\phi_{BC}\rangle$ resulta separable con la relación entre los λ 's. El estado global queda como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + |1\rangle \otimes \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4}|0\rangle + |1\rangle \right) \otimes (\lambda_3|0\rangle + \lambda_4|1\rangle) \\ |\psi\rangle &= \lambda_0|000\rangle + |1\rangle|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle. \end{aligned} \quad (5.53)$$

El estado está entrelazado y pertenece a este caso porque $|\phi_{BC}\rangle$ es separable en la forma $|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle$. Es importante que notemos que, como ninguno de los λ 's se anulan, el estado se nos presenta en su forma estándar

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle, \quad (5.54)$$

pero nos daremos cuenta, en estos casos, de que sus coeficientes cumplen con la relación $\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_4e^{i\varphi}$.

Caso $|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado: Ahora vamos a buscar las condiciones para los λ 's, de modo que $|\phi_{BC}\rangle$ esté entrelazado, pero el estado global continúe completamente entrelazado. Esto lo estamos haciendo observando el estado global en su forma (5.43), sabiendo que lo que está entre paréntesis es $|\phi_{BC}\rangle$.

1) $\lambda_3 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1e^{i\varphi}|00\rangle + \lambda_2|01\rangle + \lambda_4|11\rangle. \quad (5.55)$$

Se ve que $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado y el estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_4|111\rangle. \quad (5.56)$$

Este estado tripartito entrelazado no aparece en la clasificación de Tarrach, pero nuestro método nos brinda la oportunidad de evidenciarlo.

2) $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_2|01\rangle + \lambda_3|10\rangle. \quad (5.57)$$

Es un estado entrelazado y el estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle. \quad (5.58)$$

Es un estado **tipo 3a**.

3) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1 e^{i\varphi} |00\rangle + \lambda_4 |11\rangle. \quad (5.59)$$

Está entrelazado y el estado global asociado es

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.60)$$

Es un estado del **tipo 3b: c**.

4) $\lambda_4 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1 e^{i\varphi} |00\rangle + \lambda_2 |01\rangle + \lambda_3 |10\rangle. \quad (5.61)$$

Es un estado entrelazado y el estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle. \quad (5.62)$$

Este estado es **tipo 4a**.

5) $\lambda_2 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1 e^{i\varphi} |00\rangle + \lambda_3 |10\rangle + \lambda_4 |11\rangle. \quad (5.63)$$

Es un estado entrelazado y el estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.64)$$

Este estado es del **tipo 4b**.

6) $\lambda_1 = 0$. Implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_2 |01\rangle + \lambda_3 |10\rangle + \lambda_4 |11\rangle. \quad (5.65)$$

Está entrelazado y el estado global resulta

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.66)$$

Es un estado del **tipo 4c**.

7) $\lambda_i \neq 0 \forall i$, pero no hay ninguna relación especial entre los λ 's. Esto implica:

$$|\phi_{BC}\rangle = \lambda_1 e^{i\varphi} |00\rangle + \lambda_2 |01\rangle + \lambda_3 |10\rangle + \lambda_4 |11\rangle. \quad (5.67)$$

Sin ninguna relación especial entre los λ 's este estado está entrelazado. Y conduce al estado global en su forma estándar

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle. \quad (5.68)$$

Para finalmente dar nuestra conclusión en función de los rangos locales, vamos a explicar el trasfondo de nuestra clasificación, que es, incluso, el trasfondo de la clasificación de Tarrach, aunque no se diga explícitamente. El hecho de que cualquier estado tripartito de qubits entrelazado se puede siempre escribir en la forma (5.44), nos está diciendo algo acerca de los rangos locales. Se nota que la expresión (5.44) es una *descomposición en estados productos* para el estado $|\psi\rangle$. Esto quiere decir, que los vectores $|0\rangle$ y $|1\rangle$, en la primera entrada de los dos términos de la expresión, abarcan el rango de la matriz densidad asociada a ese subsistema (en nuestro caso, es ρ_A , que es de rango 2).

LEMA 2: Sea $\sum_{i=1}^l |e_i\rangle|f_i\rangle$ una *descomposición en estados producto*, para el estado $|\eta\rangle \in \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_F$. Entonces el conjunto de estados $\{e_i\}_{i=1}^l$, abarca el rango de $\rho_E \equiv Tr_F|\eta\rangle\langle\eta|$ [1].

Del lema, se colige que pueden existir un máximo de dos vectores en una *descomposición en estados productos* para los estados $|\psi\rangle$, que estamos considerando. A saber, los que tienen $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$. De igual modo ocurre con los estados que aparecen en la segunda y tercera entrada de nuestra descomposición, en su forma (5.44). En otras palabras, el rango de la matriz densidad ρ_{BC} abarca sólo uno o sólo dos estados del producto (en el Apéndice A dejamos claro que el rango de una matriz define la cantidad de vectores fila o columna linealmente independientes que la conforman. Es esto lo que refleja el lema, partiendo de una descomposición espectral para dicha matriz). Uno de los estados producto ya aparece explícito en la expresión (5.44), es el estado $|00\rangle$ de la segunda y tercera entrada del primer término. El otro estado producto que expande el rango de ρ_{BC} , es justamente nuestro primer caso, cuando $|\phi_{BC}\rangle$ es separable. Cuando no lo es, entonces el rango de ρ_{BC} tendrá un sólo vector producto; es decir, el único que aparece explícito en la *descomposición en estados producto*, que es $|00\rangle$.

Los estados qubit tripartitos entrelazados, a saber, los que tienen $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, a su vez se subdividen en dos clases: los que tienen sólo dos vectores producto en el rango de ρ_{BC} (caso $|\phi_{BC}\rangle$ separable) y los que tienen sólo un vector producto en el rango de ρ_{BC} (caso $|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado).

Demostremos específicamente que los estados de Tarrach bajo nuestro criterio, basado en los rangos locales, caen, únicamente, en alguna de esas dos clases. Específicamente encontramos que los estados **tipo 2b**, **tipo 3b: caso a** y **tipo 3b: caso b**, pertenecen a la clase en la que $|\phi_{BC}\rangle$ es separable (dos vectores producto en el rango de ρ_{BC}); y los estados **tipo 3a**, **tipo 3b: caso c**, **tipo 4a**, **tipo 4b** y **tipo 4c**, pertenecen a la clase en la que $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado (un sólo vector de producto en el rango de ρ_{BC}).

A continuación, veremos que los estados para los que $|\phi_{BC}\rangle$ es separable forman la clase llamada *Clase* $|GHZ\rangle$ y los estados para los que $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado forman la

clase llamada *Clase* $|W\rangle$. Demostramos que estas dos clases y las otras que hemos visto, son todas inequivalentes entre sí.

5.3.4. Estados GHZ y W

Estos son estados que provienen del estudio de sistemas compuestos entrelazados. Los estados Greenberger-Horne-Zeilinger, $|GHZ\rangle$, y Werner $|W\rangle$, son estados máximamente entrelazados, que se definieron en principio para sistemas bipartitos. En este trabajo, nos estamos refiriendo a su forma generalizada al caso de tres qubits.

Estados $|GHZ\rangle$

Estos estados máximamente entrelazados, generalizados al caso tripartito, tienen comúnmente la forma:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (5.69)$$

Y tienen la principal propiedad de que cuando uno de sus subsistemas es trazado, los dos qubit restantes quedan completamente desentrelazados. Por esto, a veces se le considera como el estado máximamente entrelazado con entrelazamiento más débil. También es un estado que viola las desigualdades de tipo Bell. La información cuántica mutua de los resultados de una medición, para estos estados, es máxima igualmente.

Estados $|W\rangle$

Son estados máximamente entrelazados que, generalizados al caso de tres qubits, tienen la forma:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (5.70)$$

Su propiedad más resaltante es que cuando uno de los qubit es trazado, el estado del sistema de las otras dos partes continua máximamente entrelazado. Por esto se conoce como el estado con entrelazamiento más poderoso.

Tanto los estados GHZ como W, son generalizaciones al caso tripartito de los conocidos estados de Bell que mostramos en (4.16).

Estados $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$ como representantes de los dos tipos de estrelazamiento tripartito

Recordemos que la motivación para encontrar clases de equivalencia, es que, una vez hallada la clase, cualquier representante de ella nos servirá para realizar una tarea de información cuántica particular. No olvidemos, que en nuestro caso, la equivalencia es

estocástica, así que la tarea será realizada con una cierta probabilidad de éxito, según el estado que se use para llevarla a cabo. Como todos los miembros de una clase comparten las mismas propiedades de entrelazamiento o tipo de entrelazamiento, podemos elegir entre ellos el estado que nos resulte más cómodo para trabajar, según lo requiera el experimento. Elegimos a los estados GHZ y W como los representantes de clase, puesto que cada uno pertenece a una clase diferente y tienen una forma máximamente entrelazada particularmente simple.

Clase $|GHZ\rangle$: Se ve directamente que el estado $|GHZ\rangle$ pertenece a la clase para la que $|\phi_{BC}\rangle$ es separable, específicamente a nuestra condición $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, que es el **tipo 2b**, de la clasificación de Tarrach.

Por su forma particularmente simple a la hora de exhibir las propiedades de la clase y la comodidad que brinda para la realización de tareas para la información cuántica, se elige a este representante del tipo $|\phi_{BC}\rangle$ separable, con la condición $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, en su forma máximamente entrelazado, como representante de toda la clase.

Así pues, los estados que pertenecen a la clase donde $R(\rho_{BC})$ tiene sólo dos estados producto ($|\phi_{BC}\rangle$ separable), son denominados *Estados $|GHZ\rangle$* . La clase en general, se le conoce como *Clase $|GHZ\rangle$* . Más adelante daremos argumentos sólidos que justifican el hecho de que siempre es posible encontrar un operador local invertible (OLI) que relaciona a todos estos estados. Es decir, que cualquier estado de la clase $|GHZ\rangle$ puede ser llevado, mediante un OLI, a la forma estándar $|GHZ\rangle$.

Clase $|W\rangle$: A simple vista, los estados $|W\rangle$, en su forma (5.70), no parecen estar contenidos en ninguna de las dos clases ($|\phi_{BC}\rangle$ separable ó $|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado), puesto que los qubit ordenados en la forma ‘001’ y ‘010’ no aparecen en nuestra descomposición no superflua (4.31).

Sin embargo, sabemos que una transformación loca unitaria (LU), para cualquiera de los estados de una clase, genera otro estado que sigue estando dentro de la clase. Esto es, porque los LU (y en general, los OLI), no modifican los rangos locales, que es justo la característica principal que define a una clase bajo el criterio de operaciones locales. Un LU conocido, capaz de llevar al estado $|W\rangle$, a una forma soportada en (4.31), es

$$LU \equiv X \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.71}$$

Que transforma $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$, tal que

$$\begin{aligned}
 & (X \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I})|W\rangle \\
 &= (X \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I})\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \\
 |W'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|101\rangle + |110\rangle + |000\rangle).
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Este estado $|W'\rangle$, que es el mismo estado $|W\rangle$, escrito en una forma conveniente, es justamente el representante máximamente entrelazado de nuestra clase $|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado, para la condición $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$. En la clasificación de Tarrach, es el **tipo 3a**.

Por la simplicidad que nos proporciona la forma del estado $|W\rangle$ para realizar cálculos en información cuántica, lo elegimos como el representante de la clase para la que $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado (un sólo vector producto en $R(\rho_{BC})$). La clase se denomina *Clase $|W\rangle$* y los estados que conforman la clase se les llama *Estados $|W\rangle$* ya que siempre es posible encontrar OLI, tales que lleven cualquier estado de la clase a la forma estándar $|W\rangle$.

5.3.5. Inequivalencia de las clases bajo OLECC

Hemos visto hasta ahora que para los sistemas tripartitos de qubits entrelazados existen 6 clases de estados que se distinguen en función de sus rangos locales (los rangos de las matrices densidad asociadas a cada uno de los subsistemas) y que estos definen un tipo de entrelazamiento.

Así que nuestra primera clase está formada por los estados cuyos rangos locales cumplen con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 1$. Estos son los estados completamente separables (ninguno de los 3 qubits está entrelazado con el otro); la segunda, tercera y cuarta clase, están formadas por los estados, cuyos rangos locales son 1, para alguno de los subsistemas, 2 para el resto. En general, estas 3 clases responden a los casos $r(\rho_x) = 1$ y $r(\rho_y) = r(\rho_z) = 2$, donde x, y, z representan a las 3 combinaciones posibles de los subsistemas A, B, C . Corresponden a estados con entrelazamiento bipartito (también llamados biseparables). El subsistema x es separable del subsistema yz , los cuales están entrelazados entre sí. Las últimas dos clases son aquellas con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, que significa que los tres qubit estan entrelazados entre sí. Es la clase con entrelazamiento tripartito, propiamente. Se dividen en aquellas con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$ y sólo dos vectores producto en $R(\rho_{BC})$ ($|\phi_{BC}\rangle$ separable) y aquellas con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$ y un sólo vector producto en $R(\rho_{BC})$ ($|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado).

La inequivalencia bajo OLECC de estas 6 clases, se hace evidente para las primeras cuatro de ellas, si recordamos que las OLECC están representadas por OLI. Ya mostramos

en 5.2.1 que la aplicación de una OLI, deja invariante los rangos locales. Esto es suficiente para convencernos de que las primeras 4 clases establecidas bajo el criterio de OLECC (estados con las mismas condiciones para los rangos locales, relacionados mediante OLI) son inequivalentes entre ellas, pues justamente sus diferencias están en los rangos locales y las OLI que representan a las OLECC, jamás podrán relacionar un estado de una clase con otro de otra clase, porque ello requeriría que una OLI modificara los rangos locales, lo cual ya vimos que es imposible.

Dado que para las dos últimas clases los rangos locales de los tres subsistemas son iguales $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, vamos a buscar otro método para poder distinguir entre dos estados con las mismas características.

5.3.6. Medida de entrelazamiento tripartito e inequivalencia entre las clases $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$

Se sabe que para estados bipartitos existen varias medidas de entrelazamiento que son monótonas; es decir, que no aumentan, en promedio, bajo OLECC. Se puede mostrar fácilmente que estas medidas, por ejemplo, la entropía de entrelazamiento para conversiones asintóticas y la entropía monótona para una copia única, pueden ser usadas para dividir al conjunto de estados qubit tripartitos en 5 clases inequivalentes [1]. La quinta clase que este tratamiento incluye es, justamente, aquella con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$. Pero este método no puede distinguir entre las dos clases de este tipo, que ya sabemos que existen.

Medida de entrelazamiento tripartito de Coffman

Para tratar el caso de entrelazamiento tripartito, Coffman introdujo una medida que llamó 3-tangle. Esta es una medida monótona de entrelazamiento tripartito. Que sea monótona quiere decir que decrecen en promedio bajo OLECC aplicadas en cualquiera de los tres subsistemas.

La 3-tangle, se identifica con la letra τ y es invariantes bajo permutaciones de las partes. La 3-tangle τ , también es llamado invariante polinomial o entrelazamiento residual, también se le conoce como Correlación de Coffman.

DEFINICIÓN 9: (Correlación de Coffman) Consideremos $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, con coeficientes respecto a la base computacional $\psi_{ijk} = \langle ijk|\psi\rangle$, con $i, j, k \in \{0, 1\}$, entonces τ mide el entrelazamiento tripartito y se define en función de los coeficientes ψ_{ijk} :

$$\tau(\psi) = 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3|, \tag{5.73}$$

donde

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \psi_{000}^2 \psi_{111}^2 + \psi_{001}^2 \psi_{110}^2 + \psi_{010}^2 \psi_{101}^2 + \psi_{100}^2 \psi_{011}^2, \\
 d_2 &= \psi_{000} \psi_{111} \psi_{011} \psi_{100} + \psi_{000} \psi_{111} \psi_{101} \psi_{010} \\
 &\quad + \psi_{000} \psi_{111} \psi_{110} \psi_{001} + \psi_{011} \psi_{100} \psi_{101} \psi_{010} \\
 &\quad + \psi_{011} \psi_{100} \psi_{110} \psi_{001} + \psi_{101} \psi_{010} \psi_{110} \psi_{001} \\
 d_3 &= \psi_{000} \psi_{110} \psi_{101} \psi_{011} + \psi_{111} \psi_{001} \psi_{010} \psi_{100}.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Tomado de [14].

Inequivalencia entre las clases $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$

Aquí usamos las medidas de entrelazamiento tripartito o Correlaciones de Coffman, para mostrar que las dos clases $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$ son inequivalentes entre sí.

Calculamos el 3-tangle (τ), para nuestro estado general, en su forma no superflua (4.31). Observamos los términos y notamos que los únicos que no son nulos son ψ_{000} , ψ_{100} , ψ_{101} , ψ_{110} y ψ_{111} . Esto reduce los d 's a:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \psi_{000}^2 \psi_{111}^2 = \lambda_0^2 \lambda_4^2 \\
 d_2 &= 0 \\
 d_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

Así que, el 3-tangle para el estado $|\psi\rangle$, viene dado por

$$\tau(\psi) = 4|\lambda_0^2 \lambda_4^2|. \tag{5.76}$$

Finalmente, observamos los estados de la clase $|GHZ\rangle$ y los estados de la clase $|W\rangle$. Si para alguno de esos estados λ_0 y/o λ_4 es cero, entonces el 3-tangle es cero, para toda la clase, justamente por ser una medida monótona. Es decir, no puede incrementar bajo OLECC.

Se ve claramente que para los estados de la clase $|GHZ\rangle$, los coeficientes λ_0 y λ_4 no se anulan para ninguno de los estados, mientras que para la clase $|W\rangle$, estos coeficientes se anulan para varios de los estados. Por ello, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \tau(\psi_{GHZ}) &= 4\lambda_0^2 \lambda_4^2 \\
 \tau(\psi_W) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

Estos valores muestran la inequivalencia entre las clases $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$, porque, como mencionamos, el 3-tangle, al ser monótono, no puede incrementar bajo OLECC. Es decir, los estados de la clase $|W\rangle$ no pueden ser convertidos, mediante OLECC, en estados de la clase $|GHZ\rangle$. Esto demuestra la inequivalencia entre las dos clases.

5.3.7. Ortogonalidad Por Subespacio

Cualquier apariencia de oscuridad que pudiera presumirse en lo antes expuesto queda completamente aclarada en esta subsección.

Aquí vamos a introducir un requisito que es necesario para cualquier estado multipartito que esté escrito de manera no superflua. Este requisito es la ortogonalidad por subespacio. Es decir, debe verificarse, para la descomposición del estado, que cada subespacio debe estar representado por vectores que sean ortogonales entre sí.

La ortogonalidad por subespacio para nuestro estado exige que

$$\langle 00 | \phi_{BC} \rangle = 0. \quad (5.78)$$

Pero como hemos visto, el vector $|\phi_{BC}\rangle$ puede ser separable o estar entrelazado, lo cual da lugar a dos relaciones de ortogonalidad que, a su vez, se manifestará en la eliminación de un grupo de λ 's para un caso y otro grupo para el caso restante.

Cuando $|\phi_{BC}\rangle$ es separable, la relación de ortogonalidad exige que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, quedando el estado total de la forma

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_4|111\rangle. \quad (5.79)$$

Por otra parte, cuando $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado, la relación de ortogonalidad exige que $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$. Tomando en cuenta, como hemos mencionado antes, que los vectores deben ser tales que, ninguna combinación lineal de ellos nos lleve a un segundo vector del producto, ya que el rango de $|\phi_{BC}\rangle$ debe contener sólo un vector del producto. El estado total queda de la forma

$$|\psi\rangle = \lambda_2|001\rangle + \lambda_3|010\rangle + \lambda_0|100\rangle. \quad (5.80)$$

Vemos, entonces, que en realidad podemos tener únicamente dos tipos de estados con verdadero entrelazamiento tripartito, que son los dos estados anteriores. El primero corresponde a la clase GHZ y el segundo a la clase W , donde se ve, sin lugar a dudas, que la cantidad τ (3-tangle) resulta ser distinta de cero para los estados GHZ e igual a cero para los estados W .

5.3.8. Jerarquía entre las clases

Lo último que mostramos en este trabajo con respecto a las clases de equivalencia que existen para un sistema tripartito de qubit entrelazado es que las 6 clases inequivalentes que encontramos se pueden clasificar en 3 grandes grupos jerárquicos. Para mostrar esta

relación de jerarquía, debemos relacionar a las clases mediante operadores locales no invertibles.

Recordemos como se relacionan las clases mediante operadores locales:

$$|\phi\rangle = A \otimes B \otimes C|\psi\rangle. \quad (5.81)$$

LLevar a cabo una operación local no invertible significa que al menos uno de los operadores de la ecuación anterior, sea de rango 1. Esto trae como consecuencia que el subsistema que sea afectado por él, va a disminuir su rango local. Esta es la razón de la gerarquía, pues los estados que tengan $r(\rho_x) = 2$, en alguno de sus subsistemas, pueden ser llevados, mediante OL no invertibles, a estados con $r(\rho_x) = 1$, en el mismo subsistema. Esta es, obviamente, una relación unidireccional, porque el caso inverso es imposible.

Las tres clases jerárquicas que existen son: en la cabeza de la jerarquía, tenemos a las dos clases, $|GHZ\rangle$ y $|W\rangle$, pues son las que tienen $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$. Estos estados pueden ser llevados, mediante OL no invertibles aplicadas en el subsistema deseado (o en los tres subsistemas a la vez, si se quiere), a cualquiera de las clases que tengan, al menos, uno de sus rangos locales igual a 1. Es decir, a cualquier estado con entrelazamiento bipartito, o a un estado completamente separable, según lo que se quiera. En el medio de la jerarquía se encuentran los tres estados con entrelazamiento bipartito. Son aquellos en los que dos de los subsistemas tienen rango local igual a 2 y pueden ser llevados mediante OL no invertibles a la última clase de la jerarquía, los estados completamente separables, que son los únicos que cumplen con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 1$. Ver figura 5.1.

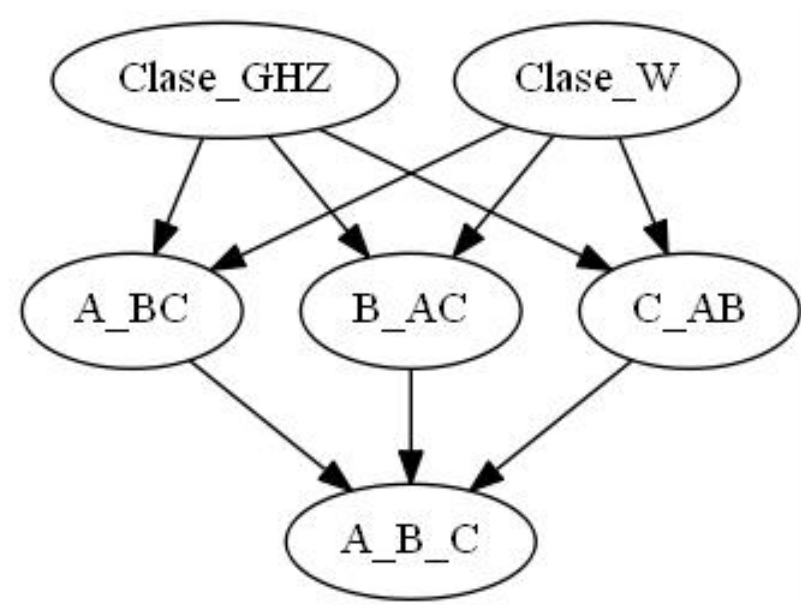


Figura 5.1: Grupos de jerarquía entre las 6 clases inequivalentes bajo OLECC. La flecha indica que los estados están relacionados mediante una OL no invertible.

CONCLUSIONES.

En el presente trabajo, resaltamos los siguientes resultados obtenidos:

1. Encontramos que cualquier estado tripartito de un sistema de qubits, puede ser representado sólo por 5 términos en vez de 8, dando lugar a una descomposición no superflua, tipo Schmidt, de la forma:

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle,$$

$$\text{con } \lambda_i \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \mu_i \equiv \lambda_i^2, \quad \text{con } \sum_i \mu_i = 1.$$

2. Basándonos en la clasificación de R. Tarrach de 8 tipos de estados (**Tipo 1**, **Tipo 2a**, **Tipo 2b**, **Tipo 3a**, **Tipo 3b**, **Tipo 4a**, **Tipo 4b** y **Tipo 4c**) logramos, usando la noción de rangos locales y la descomposición no superflua del estado genérico, la siguiente clasificación:

2.1 Los estados **Tipo 1** de la clasificación de Tarrach, son estados cuyos subsistemas tienen matrices densidad de rango 1 ($r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 1$). Es decir, si el estado global de un sistema físico compuesto, tiene matrices densidad reducidas de rango 1, para cada uno de sus subsistemas, entonces estamos en presencia de un estado no entrelazado, o separable.

2.2 Los estados **Tipo 2a** de Tarrach quedan de esta manera: la condición $J_i = 0$, excepto J_1 , representa estados *biseparables* del tipo $A - BC$, que en función de los rangos locales, significa que $r(\rho_A) = 1$ y $r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$; la condición $J_i = 0$, excepto J_2 , representa estados *biseparables* del tipo $AC - B$, con $r(\rho_A) = r(\rho_C) = 2$ y $r(\rho_B) = 1$ y la condición $J_i = 0$, excepto J_3 , que representa estados *biseparables* del tipo $AB - C$, con $r(\rho_A) = r(\rho_B) = 2$ y $r(\rho_C) = 1$. Todos estos estados contienen entrelazamiento bipartito.

2.3 Los estados del **Tipo 2b**, **Tipo 3a**, **Tipo 3b**, **Tipo 4a**, **Tipo 4b** y **Tipo 4c**, son todos pertenecientes a la clase con rangos locales: $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$; es decir, con verdadero entrelazamiento tripartito.

3 Los estados qubit tripartitos entrelazados, a saber, los que tienen $r(\rho_A) = r(\rho_B) = r(\rho_C) = 2$, a su vez se subdividen en dos clases, los que tienen sólo dos vectores producto en el rango de ρ_{BC} (caso $|\phi_{BC}\rangle$ separable) y los que tienen un sólo vector producto en el rango de ρ_{BC} (caso $|\phi_{BC}\rangle$ entrelazado). Demostramos específicamente, que los estados de Tarrach, bajo nuestro criterio, basado en los rangos locales, todos se encuentran, únicamente, en alguna de estas dos clases. Encontramos que los estados **Tipo 2b**, **Tipo 3b: Caso a** y **Tipo 3b: Caso b**, pertenecen a la clase en la que $|\phi_{BC}\rangle$ es separable (dos vectores producto en el rango de ρ_{BC}). Y mostramos que un representante de esta clase es el famoso estado entrelazado

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle).$$

Por ello llamamos a esta clase, clase GHZ.

Los estados **Tipo 3a**, **Tipo 3b: Caso c**, **Tipo 4a**, **Tipo 4b** y **Tipo 4c**, pertenecen a la clase en la que $|\phi_{BC}\rangle$ está entrelazado (un sólo vector de producto en $R(\rho_{BC})$). Un representante significativo de esta clase es el famoso estado entrelazado

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle).$$

Por eso esta clase se conoce como clase W.

Es decir, basándonos en los rangos locales y en las OLECC, podemos dividir al conjunto de estados tripartitos de un sistema de qubits, en 6 clases o tipos de entrelazamiento, una con entrelazamiento nulo, 3 con entrelazamiento bipartito y 2 con verdadero entrelazamiento tripartito, a saber, las clases GHZ y W.

4. Demostramos que las 6 clases son inequivalentes entre sí cuando se relacionan mediante OLECC y que existe una relación de jerarquía cuando se relacionan mediante OL no invertibles. Específicamente, encontramos a la cabeza de la jerarquía a las clases GHZ y W, en el medio a las 3 clases con entrelazamiento bipartito y a los pies de la jerarquía tenemos a los estados completamente separables. Los estados de la parte superior de la jerarquía pueden ser llevados, mediante OL no invertibles, a estados de más abajo, pero demostramos que la dirección contraria es imposible.

Apéndice A

Rango de una matriz.

Sea A una matriz de $m \times n$. El rango de A , denotado por $r(A)$, está dado por

$$r(A) = \dim(\text{Imag}A) \leq \min(m, n). \quad (\text{A.1})$$

Esto se traduce, para matrices cuadradas $n \times n$, en: $r(A) \leq n$. Sabemos del álgebra lineal, que las filas y columnas de estas matrices cuadradas, forman un conjunto de vectores linealmente independientes, si y sólo si, $\det(A) \neq 0$, es decir, si A es invertible. Si A es invertible, entonces su rango es máximo, $r(A) = n$, y viceversa. Por esto decimos, que *el rango de una matriz es el número de filas (o columnas) linealmente independientes que ella posee*. Que para matrices invertibles, es igual a la dimensión del espacio vectorial donde están definidas (n , en nuestro caso).

De lo antes dicho también se deduce que, *si un arreglo del tipo Gauss-Jordan puede dejar a una de las filas o columnas de una matriz con todos sus términos cero, entonces esa matriz no es de rango máximo y el valor del rango estará dado por el número de filas o columnas que no pueda ser llevadas a cero en todos sus términos*.

A.1. Criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en función de su rango

Sea A una matriz $n \times n$, entonces A es invertible $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Prueba: Usemos la definición del rango para el producto de matrices.

Sean A y B dos matrices $n \times n$. Entonces

$$r(AB) \leq \min[r(A), r(B)]. \quad (\text{A.2})$$

Esto implica que $r(AB) \leq r(A)$ y $r(AB) \leq r(B)$.

Sí A es invertible, $AA^{-1} = \mathbb{I}$. Esto quiere decir, que $r(\mathbb{I}) = r(AA^{-1}) \leq r(A)$. Donde hemos usado el rango del producto. Ahora, sabemos que \mathbb{I} , siempre tiene rango máximo, es decir $r(\mathbb{I}) = n$. Esto nos dice que $r(A) \geq n$. Pero ya vimos que, para toda matriz cuadrada, siempre se cumple que $r(A) \leq n$. Entonces la única solución posible es que se cumpla la igualdad de la inecuación: $r(A) = n$ [15].

Teorema 4: Sea A una matriz $n \times n$. Si $\det(A) = 0$, entonces A no es invertible. Por el contrario, si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible.

Del criterio y el teorema anterior, se deducen dos implicaciones importantes para matrices $n \times n$:

1. Si $\det(A) = 0$, $r(A) \neq n$. La matriz no es de rango máximo.
2. Si $\det(A) \neq 0$, $r(A) = n$. La matriz tiene rango máximo.

Por las implicaciones anteriores afirmamos que, *toda matriz cuadrada de rango 1 tiene determinante nulo*.

A.2. OLECC y rangos locales

En [1] podemos ver la demostración formal de que los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, pertenecientes a la misma clase de equivalencia están, necesariamente, relacionados por operadores locales invertibles (OLI). De esta conexión, se sigue que los rangos locales de un estado puro, $r(\rho_k)$, con $k = A, B, \dots$, son invariantes bajo OLECC, mientras que bajo OLCC (en general, OL no invertibles) sólo pueden decrecer.

LEMA 3: Si los vectores bipartitos $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, cumplen con

$$|\phi\rangle = A \otimes \mathbb{I}_B |\psi\rangle, \quad (\text{A.3})$$

entonces los rangos de las correspondientes matrices densidad reducidas, satisfacen $r(\rho_A^\psi) \geq r(\rho_A^\phi)$ y $r(\rho_B^\psi) \geq r(\rho_B^\phi)$.

Prueba: Consideremos la descomposición de Schmidt de $|\psi\rangle$,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n_\psi} \sqrt{\lambda_i^\psi} |i\rangle |i\rangle, \quad \lambda_i^\psi > 0, \quad n_\psi \leq \min(n, m), \quad (\text{A.4})$$

y escribimos el operador A como

$$A = \sum_{i=1}^n |\mu_i\rangle \langle i|, \quad (\text{A.5})$$

donde $|\mu_i\rangle \in \mathbb{C}^n$ no necesitan estar normalizados ni ser linealmente independientes. Entonces encontramos que $\rho_A^\psi = \sum_{i=1}^{n_\psi} |i\rangle\langle i|$ y $\rho_A^\phi = A\rho_A^\psi A^\dagger = \sum_{i=1}^{n_\psi} |\mu_i\rangle\langle \mu_i|$, así que $r(\rho_A^\phi) \leq n_\psi$. Esto prueba el lema, obviamente, porque la forma como está escrita ρ_A^ψ , gracias a que proviene de una descomposición de Schmidt para el estado global puro, revela que el rango de $\rho_A^\psi = n_\psi$. La forma como está escrito el operador A , es decir, no necesariamente invertible, establece la posibilidad de que el rango de la matriz densidad resultante disminuya. Esto es porque algunos estados se mezclan, en lugar de proyectarse. La segunda desigualdad del lema se sigue del hecho de que, para cualquier vector bipartito $r(\rho_A) = r(\rho_B)$.

COROLARIO: Si los vectores $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, están conectados por un operador local de la forma $|\phi\rangle = A \otimes B \otimes \dots \otimes N|\psi\rangle$, entonces $r(\rho_k^\psi) \geq r(\rho_k^\phi)$, para todo $k = A, B, \dots, N$.

Prueba: De hecho, para cada una de las partes, por ejemplo, Alice, podemos ver al operador $A \otimes B \otimes \dots \otimes N$ como la composición de dos operadores locales $A \otimes \mathbb{I}$ y $\mathbb{I} \otimes (B \otimes \dots \otimes N)$. Entonces, debido al lema anterior, la aplicación del primer operador no puede aumentar $r(\rho_A)$, y lo mismo sucede con el segundo operador, que no puede aumentar $r(\rho_{B\dots N})$ [recordemos que para cualquier estado puro $r(\rho_A) = r(\rho_{B\dots N})$].

No podemos concluir sin resaltar del Lema 3, lo siguiente: *la aplicación de operadores locales invertibles (OLI), dejan invariantes los rangos locales, mientras que la aplicación de operadores locales no invertibles (OL no invertibles), disminuyen los rangos locales.* En general, *los rangos locales no pueden incrementar bajo OLECC.*

Bibliografía

- [1] G. Vidal W. Dur and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physics Review A*, 62, 2000.
 - [2] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
 - [3] Alexander Streltsov. *Quantum Correlations Beyond Entanglement and Their Role in Quantum Information Theory*. Springer Briefs in Physics, 2013.
 - [4] Bernd Thaller. *Advanced Visual Quantum Mechanics*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
 - [5] Kawachi. A Kimura. G Ogawa. T Hayashi. M, Ishizaka. S. *Introduction to Quantum Information Science*.
 - [6] Mark M. Wilde. *From Classical to Quantum Shannon Theory*. Cambridge University Press, 2018.
 - [7] Mikio Nakahara and Tetsuo Ohmi. *Quantum Computing - From Linear Algebra to Physical Realizations*. CRC Press - Taylor and Francis Group, 2008.
 - [8] J.Douglas Faires R.L. Burden. Analisis numérico. *Grupo Editorial Iberoamericana*, 1985.
 - [9] J. Demmel. Applied numerical linear algebra. *SIAM, Philadelphia*, 1997.
 - [10] Adriana Verdiell Flavia Buffo. La descomposición en valores singulares: un enfoque geométrico y aplicaciones. *Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Avenida Alem*.
 - [11] Asher Peres. Higher order schmidt decompositions. *Physics Letters A*, 202, 1995.
-

- [12] L. Costa E. Jané J. I. Latorre A. Acín, A. Andrianov and R. Tarrach. Generalized schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states. *Physics Review Letters*, 85, 2000.
- [13] Bart De Moor Lieven De Lathauwer and Joos Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *SIAM J. MATRIX ANAL. APPL: Society for Industrial and Applied Mathematics*, 21, 2000.
- [14] J. Siewert C. Eltschka, A. Osterloh and A Uhlmann. Three-tangle for mixtures of generalized ghz and generalized w states. *New Journal of Physics*, 10, 2008.
- [15] Stanley I. Grossman. *Álgebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.
-