



## VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Eduard Sánchez**, Cédula de Identidad **V-26289952**, bajo el título “**Teoría de Kaluza-Klein y el problema de Materia Oscura**”, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 17 de octubre de 2019, a Las 8:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 17 días del mes de octubre de 2019, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Gabriel Antonio Abellan Poleo.

Firma del jurado evaluador

Prof Eudomar Rafael Henriquez  
Guerra  
UCV

Prof Ernesto Fuenmayor Di  
Prisco  
UCV

Prof Gabriel Antonio Abellan  
Poleo  
UCV

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**TEORÍA DE KALUZA-KLEIN Y EL PROBLEMA DE MATERIA  
OSCURA**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Eduard Sánchez  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán

Octubre-2019  
Caracas-Venezuela

*Escuela de Física*



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**TEORÍA DE KALUZA-KLEIN Y EL PROBLEMA DE MATERIA  
OSCURA**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Eduard Sánchez  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Gabriel Abellán

Octubre-2019  
Caracas-Venezuela



*The most beautiful thing we can experience  
is the mysterious. It is the source of all  
true art and all science.*

Albert Einstein



# Agradecimientos

A mis padres Omaira Moncada y Julio Sánchez por el apoyo constante, consejos y motivación.

A mis hermanos Mariely y Cesar por estar presentes y ser ejemplo de perseverancia.

A los profesores y en especial a mi tutor Gabriel Abellán, que formaron parte de mi aprendizaje y motivación para la culminación de mis estudios de pregrado.

A mis amigos y compañeros de estudio, por los momentos de alegría y experiencias compartidas.



## RESUMEN

En el presente trabajo se realiza un estudio de los fundamentos de la teoría de Kaluza-Klein, con el objetivo de obtener un candidato a materia oscura. Aunque la existencia de materia oscura puede inferirse a través de sus efectos gravitacionales sobre la materia ordinaria, su composición se desconoce. Candidatos a la resolución de esta problemática incluyen partículas exóticas derivadas de teorías más allá del modelo estándar. El candidato que se propone en este trabajo es la partícula de Kaluza-Klein mediadora del campo escalar para el primer modo masivo de la torre de Kaluza-Klein, que resulta del mecanismo de compactificación aplicado al sector dilatón. Este procedimiento en conjunto con una transformación conforme, usada para obtener la parte gravitacional en su forma canónica, es lo realizado para llegar a la acción de la teoría que involucra un sector gravedad, un sector de electromagnetismo y un sector escalar dilatónico. Se construyen las reglas de Feynman y se calculan los vértices para dar con amplitudes de transición en procesos permitidos por la acción obtenida. Usando la regla de Oro de Fermi, fue posible calcular secciones eficaces para dos procesos de detección, cuyos resultados fueron comparados con el potencial energético actual en aceleradores de partículas. La sección eficaz total obtenida es del orden  $\sim 10^{-82}$ pb al asumir una masa de 100TeV para la partícula de Kaluza-Klein.



# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>13</b>
<b>Introducción</b>	<b>15</b>
<b>1. Electromagnetismo Clásico y Relatividad General</b>	<b>17</b>
1.1. Elementos de la Teoría Clásica de Campos . . . . .	17
1.1.1. Ecuación de Euler Lagrange . . . . .	17
1.1.2. Teorema de Noether . . . . .	18
1.2. Electromagnetismo Clásico . . . . .	20
1.2.1. Formulación Covariante . . . . .	20
1.2.2. Densidad Lagrangiana para el Electromagnetismo . . . . .	22
1.3. Relatividad General . . . . .	24
1.3.1. Movimiento en un espacio-tiempo curvo . . . . .	24
1.3.2. Derivación Covariante . . . . .	25
1.3.3. Curvatura . . . . .	27
1.3.4. Acción de Hilbert-Einstein y Ecuaciones de Einstein . . . . .	29
1.3.5. Ecuaciones de Maxwell-Einstein . . . . .	32
1.3.6. Gravedad Linealizada . . . . .	32
<b>2. Teoría de Kaluza-Klein</b>	<b>35</b>
2.1. Mecanismo de Kaluza . . . . .	36
2.1.1. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	37
2.1.2. Transformación conforme . . . . .	40
2.2. Compactificación . . . . .	41
2.3. Partícula de Kaluza-Klein . . . . .	42
<b>3. Formulación de la Integral de Camino</b>	<b>47</b>
3.1. Integral de Camino . . . . .	48
3.1.1. Funcional Generador del Vacío . . . . .	49

---

3.2. Teoría de Campo Escalar Libre . . . . .	49
3.2.1. Propagador para la Teoría de Maxwell Masiva . . . . .	51
3.2.2. Propagador de la Teoría Relativista Linealizada . . . . .	53
3.3. Teoría con Interacciones ( $\lambda\phi^4$ ) . . . . .	54
3.3.1. Reglas de Feynman para la teoría $\lambda\phi^4$ . . . . .	57
<b>4. Materia Oscura y Partícula de Kaluza-Klein</b>	<b>61</b>
4.1. Antecedentes y Primeras Indicaciones . . . . .	62
4.2. Candidatos a Materia Oscura . . . . .	64
4.3. Partícula de Kaluza-Klein como candidato a Materia Oscura . . . . .	67
4.3.1. Secciones Eficaces . . . . .	68
<b>5. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Reglas de Feynman</b>	<b>83</b>
<b>B. Funcional Generador</b>	<b>87</b>
<b>C. Notación</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

1.1. Traslación de un vector en un plano tangente a un punto cercano en un espacio curvo [1]. . . . .	27
1.2. Traslación de un vector $S_\rho(x)$ a través de dos trayectorias distintas. . . . .	28
3.1. Diagrama para dispersión de partículas. . . . .	56
3.2. Ejemplo diagrama de Feynman a nivel árbol . . . . .	58
4.1. Diagramas de aniquilación de partículas de Kaluza-Klein a nivel árbol . . . . .	69
4.2. Sección eficaz diferencial para $\chi + \chi \rightarrow \gamma + \gamma$ en función del momento $p$ . . . . .	72
4.3. Sección eficaz total para $\chi + \chi \rightarrow \gamma + \gamma$ en función del momento $p$ . . . . .	72
4.4. Diagramas de dispersión de fotones a nivel árbol . . . . .	73
4.5. Sección eficaz diferencial para $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ en función de la energía $E$ . . . . .	76
4.6. Sección eficaz total $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ en función del momento $p$ . . . . .	76
4.7. Sección eficaz total para tres procesos distintos: producción de bosón de Higgs, dispersión de fotones y aniquilación de partículas KK. . . . .	77

---



# Introducción

El problema de materia oscura ha desconcertado a físicos y astrónomos, desde su descubrimiento a través de las observaciones sobre la Vía Láctea por el astrónomo Oort. Aunque la materia oscura no ha sido detectada directamente, la necesidad de su existencia recae sobre el hecho de que grandes estructuras cosmológicas, como galaxias y cúmulos de galaxias no pueden ser explicadas solo con la presencia de materia bariónica. Las observaciones sobre distintos tipos de galaxias, que incluyen galaxias espirales, elípticas y enanas, han mostrado un empuje gravitacional que no está asociado a la materia visible, sino a un tipo de materia que permanece oscura y parece solo interactuar con la materia ordinaria a través de la interacción gravitatoria. El primer intento para tratar de explicar la naturaleza de la materia oscura se basó en los denominados MACHOs, que son objetos astrofísicos cuya intensidad luminosa dificulta su detección mediante relaciones de masa-luminosidad. Sin embargo, entre este tipo de cuerpos se encuentran enanas marrones, agujeros negros, estrellas de neutrones, entre otras estructuras cuya abundancia, medida hasta la actualidad, no podría contribuir a la totalidad de materia oscura en el universo, y es que en comparación con la materia visible, la materia oscura es hasta 10 veces más abundante representando un 27 % del contenido de masa-energía en el universo conocido. Una segunda solución a esta problemática es buscar un candidato en el modelo estándar que cumpla con las propiedades observadas en la materia oscura. De las 17 partículas que componen este modelo, solo los neutrinos se caracterizan por ser partículas poco interactuantes, no obstante, un modelo para materia oscura basado solo en estos constituyentes no está exento de problemas. Lo anterior sugiere la búsqueda de un candidato más allá del modelo estándar que se ajuste a las características observadas. Una propuesta surge de uno de los primeros intentos de unificación.

La teoría de Kaluza-Klein, iniciada por Kaluza en 1921 y modificada por Klein en 1926, representó un mecanismo de unificación para las dos interacciones fundamentales conocidas hasta el momento: la relatividad general y el electromagnetismo de Maxwell. La idea de Kaluza fue extender la geometría del espacio-tiempo para incluir una quinta

---

dimensión. En sus inicios, se asumió una condición tal que la coordenada extra no hacía presencia en las ecuaciones de movimiento, derivadas de un tensor de Einstein en cinco dimensiones. El aporte de Klein a la teoría fue asignar a la dimensión extra una geometría circular con un radio tan pequeño que explicara su no observación experimental. En décadas más recientes, la teoría de Kaluza-Klein ha recibido de nuevo atención al estudiarse las consecuencias de la compactificación sobre un campo escalar conocido como dilatón. La periodicidad de esta nueva dimensión hace posible expresar los campos como series de Fourier, que introducidos en una versión de la acción para cinco dimensiones, resulta en modos masivos para infinitos campos escalares. La masa de cada uno de estos campos es proporcional al radio de compactificación. El primer modo de la denominada torre de Kaluza-Klein, es el candidato que se propone para la materia oscura.

El objetivo del presente trabajo es introducir los aspectos básicos de la teoría de Kaluza-Klein, para estudiar procesos que involucren a su partícula asociada con partículas mediadoras de la interacción electromagnética y gravitacional, esto es, el fotón y gravitón respectivamente. Para lograr esto, se usa la formulación de la integral de camino desarrollada por Feynman que permitirá además de cuantizar los campos presentes, dar con cantidades de medición para ciertos diagramas de procesos permitidos por la acción resultante de la teoría de Kaluza-Klein.

En el capítulo 1, se definirán algunos aspectos del electromagnetismo clásico y relatividad general con el objetivo de expresarlas como teorías de campos a través de la formulación Lagrangiana. Para el capítulo 2, se introducirá la teoría de Kaluza-Klein en la que se define un tensor métrico en cinco dimensiones para lograr la unificación de las teorías de relatividad general y electromagnetismo, además de incluir un campo escalar sobre el cual se aplicará el mecanismo de compactificación de la dimensión extra, para obtener un conjunto infinito de campos escalares masivos. Con lo anterior y una transformación conforme sobre la métrica, se espera obtener la acción a ser usada en el resto del trabajo. En el capítulo 3, se presentará la formulación de la integral de camino para cuantizar los campos en sus partículas respectivas, se definirán sus propagadores y mediante la acción se calcularán los vértices que harán parte de las reglas de Feynman para la teoría. Finalmente en el capítulo 4, se abordarán los antecedentes sobre el problema de materia oscura y posibles candidatos que se ajustan a las características deducidas de observaciones cosmológicas. Se calcularán secciones eficaces para procesos que involucran la partícula de Kaluza-Klein a través de la regla de oro de Fermi. Los resultados serán comparados con el potencial energético actual y posibles métodos de detección.

---

# Capítulo 1

## Electromagnetismo Clásico y Relatividad General

En este primer capítulo, se presentarán los fundamentos del electromagnetismo clásico y relatividad general expresadas como teorías de campos. En primer lugar, se definen algunos elementos de la teoría clásica de campos como la acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener ecuaciones de movimiento, así como también el teorema de Noether que asocia transformaciones continuas con cantidades conservadas.

### 1.1. Elementos de la Teoría Clásica de Campos

En una teoría de campos cada punto de una región estará asociada con una variable de campo denotado, en el caso escalar, por  $\phi(x, t)$ . Esto constituye un sistema con un número infinito de grados de libertad cuyas variables dinámicas son los valores del campo en cada punto del espacio. Los elementos de la teoría clásica de campos que se definen a continuación serán aplicados posteriormente al electromagnetismo clásico y relatividad general.

#### 1.1.1. Ecuación de Euler Lagrange

Para estudiar una teoría con infinitos grados de libertad continuos es conveniente usar formulaciones alternativas a la mecánica Newtoniana, ejemplos son las formulaciones Lagrangiana o Hamiltoniana. En el caso de una teoría relativista conviene utilizar la formulación Lagrangiana, la cual está sustentada en una cantidad llamada la acción, definida como

$$S = \int dt L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (1.1)$$

---

donde  $L[\phi, \dot{\phi}]$  es el Lagrangiano, funcional del campo que puede expresarse como la integral sobre el espacio de una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ .

Con el objeto de encontrar ecuaciones de movimiento para el campo  $\phi$ , se realizan variaciones sobre la acción (1.1) con respecto al campo y sus derivadas, y así se obtiene

$$\delta S = \int dt \delta L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]. \quad (1.2)$$

Ahora se considera la relación  $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$  y el teorema de Gauss: los campos y sus derivadas se aproximan lo suficientemente rápido a cero, y por lo tanto los términos con derivadas totales se anulan. Con esto la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

El principio de Hamilton postula que la trayectoria o acción de un sistema físico debe ser un punto estacionario,  $\delta S = 0$ , entonces de (1.3) resulta

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0, \quad (1.4)$$

que para todo valor en la variación del campo se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Esta expresión se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange para el campo  $\phi$ . A través de esta ecuación pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento para una teoría descrita por la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ .

### 1.1.2. Teorema de Noether

La relación entre simetrías y leyes de conservación se resume en el teorema de Noether; este resultado asocia a cada transformación continua una ley de conservación. Una transformación infinitesimal sobre el campo se expresa como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x), \quad (1.6)$$

con  $\alpha$  un parámetro infinitesimal y donde  $\Delta\phi$  es una deformación en la configuración del campo. Por otra parte, el teorema de Gauss garantiza la invariancia de la acción al agregar

un término de superficie, así la densidad Lagrangiana bajo la transformación (1.6) puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \quad (1.7)$$

donde el término de divergencia  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$ , representa la variación en la densidad Lagrangiana  $\Delta\mathcal{L}$ . Las variaciones aplicadas sobre el Lagrangiano con respecto al campo y sus derivadas,  $\delta\phi = \alpha\Delta\phi$ , resulta en lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = \alpha\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\delta\phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\phi) \\ \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) + \alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\Delta\phi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

El segundo término de la expresión anterior corresponde con la ecuación de Euler-Lagrange (1.5), por tanto la ecuación (1.8) se reduce a

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}^\mu\right) = 0. \quad (1.9)$$

Se define la corriente de Noether como

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi + \mathcal{J}^\mu(x), \quad (1.10)$$

siendo una cantidad conservada

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \quad (1.11)$$

que resulta de la expresión (1.9).

### Ejemplo: Traslaciones

El teorema de Noether puede aplicarse a transformaciones espacio-temporales tal como traslaciones y rotaciones. En el caso de una transformación de traslación infinitesimal,  $\epsilon^\mu$ , las coordenadas cambian

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon^\mu, \quad (1.12)$$

dando lugar a una transformación del campo

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \epsilon) = \phi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x), \quad (1.13)$$

y por consiguiente una transformación sobre la densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \epsilon^\nu \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}). \quad (1.14)$$

La corriente de Noether (1.9) para esta transformación toma la forma

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu, \quad (1.15)$$

conocido como tensor de energía-momento. La integral de volumen sobre la corriente de Noether proporciona las denominadas cargas conservadas

$$p^\nu = \int_V d^3x T^{0\nu}, \quad (1.16)$$

que en el caso de una transformación de traslación se reconocen como la energía y el vector momento lineal.

## 1.2. Electromagnetismo Clásico

En este trabajo se estudiará la teoría de Kaluza-Klein que unifica la relatividad general con el electromagnetismo, es por ello que es necesario estudiar sus fundamentos, así como también su expresión en teorías de campos. Se comienza introduciendo el electromagnetismo y en la siguiente sección la relatividad general.

Los fenómenos electromagnéticos obedecen las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (1.17a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.17b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1.17c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.17d)$$

que expresan la relación e interacción de los campos clásicos eléctrico y magnético,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  respectivamente, con sus fuentes: densidad de carga eléctrica  $\rho$  y corriente  $\mathbf{j}$ .

### 1.2.1. Formulación Covariante

Es conveniente expresar las ecuaciones de Maxwell en forma covariante con el objetivo de que se vean explícitamente invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Es así como

las ecuaciones de Maxwell se convierten en ecuaciones tensoriales al introducir el tensor de campo electromagnético,  $F^{\mu\nu}$ , definido en forma matricial como

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

con elementos de matriz correspondientes a componentes del campo eléctrico y magnético. Para lograr una teoría covariante completa, se define el dual del tensor  $F^{\mu\nu}$ , para esto se hace la contracción de  $F^{\mu\nu}$  con el tensor de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , de la forma

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (1.19)$$

que es equivalente al intercambio de las componentes del campo eléctrico y magnético en (1.18). En función de estos dos tensores, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (1.17a) y (1.17c), así como las ecuaciones homogéneas (1.17b) y (1.17d) pueden combinarse en dos expresiones covariantes

$$\left. \begin{array}{l} \partial_i E^i = j^0 \\ \epsilon^{ijk}\partial_j B_k - \partial_0 E^i = j^i \end{array} \right\} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_i B^i = 0 \\ \epsilon^{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0 \end{array} \right\} \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.21)$$

siendo  $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$  la densidad de corriente en cuatro dimensiones. De esta forma, las cuatro ecuaciones de Maxwell se reducen a dos expresiones covariantes, en el sentido de que ambos lados de las ecuaciones (1.20) y (1.21) transforman como tensores.

Por otra parte, los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  son cantidades derivadas de un potencial electromagnético  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ , satisfaciendo las ecuaciones

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad (1.23)$$

que son equivalentes a la ecuación covariante

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.24)$$

Esta definición aplicada a la ecuación de Maxwell inhomogénea (1.20) permite obtener una ecuación de onda

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu \\ \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) &= j^\nu.\end{aligned}\tag{1.25}$$

El potencial  $A^\mu(x)$  no es un observable clásico lo que significa que no está determinado de forma única, siempre puede realizarse una transformación de calibre que agrega el gradiente de una función  $\Lambda(x)$  al potencial

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda.\tag{1.26}$$

Esta transformación no modificará el valor de los campos, ni la forma de la ecuación (1.25). Para calcular una cantidad de interés el potencial se sujeta a una condición de calibre particular. Uno de los calibres usados es el calibre de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0,\tag{1.27}$$

condición cuya expresión es covariante. Una consecuencia del calibre Lorenz (1.27) resulta de la divergencia en la ecuación de onda (1.25),

$$\begin{aligned}\partial_\nu j^\nu &= \partial_\nu[\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)] \\ &= \square(\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \\ \partial_\nu j^\nu &= 0,\end{aligned}\tag{1.28}$$

que representa una ecuación de continuidad, implicando la conservación de corriente.

### 1.2.2. Densidad Lagrangiana para el Electromagnetismo

Una vez expresados los elementos del electromagnetismo en su forma covariante, el siguiente paso es obtener ecuaciones de movimiento para la teoría. Esto se logra a través de la ecuación de Euler-Lagrange en función del campo electromagnético  $A_\mu$ . En interacción con una fuente de corriente  $j_\mu(x)$ , la densidad Lagrangiana para la teoría electromagnética es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu.\tag{1.29}$$

Es directo ver que el tensor de campo electromagnético permanece invariante bajo una transformación de calibre (1.26),

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda) \\ F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Sin embargo, el Lagrangiano bajo esta transformación resulta en

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - j_\mu A'^\mu \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu(A^\mu + \partial^\mu\Lambda) \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \partial^\mu(j_\mu\Lambda) + \partial^\mu(j_\mu\Lambda),
\end{aligned} \tag{1.31}$$

con dos términos adicionales correspondientes a la ecuación de continuidad para la corriente y una derivada total. Usando la conservación de corriente (1.28) e integrando (1.29) sobre el espacio-tiempo, para así obtener la acción

$$S' = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \partial^\mu(j_\mu\Lambda) \right]. \tag{1.32}$$

Por teorema de Gauss la derivada total en (1.32) se convierte en un término de superficie y al considerar campos que se aproximan a cero en la frontera, no hay contribución por parte de éste. Así, la acción es invariante bajo la transformación de calibre en el potencial

$$S' = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \right] - \int d^4x \partial^\mu(j_\mu\Lambda) = S. \tag{1.33}$$

Conocida la forma de la densidad Lagrangiana para el electromagnetismo, puede aplicarse el principio de Hamilton una vez realizadas variaciones con respecto al potencial electromagnético y sus derivadas

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \right] = 0, \tag{1.34}$$

que se reduce al cálculo de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu)}{\partial A_\nu} = -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} = -\delta_\mu^\nu j^\mu = -j^\nu, \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{2} F^{\beta\alpha} \frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{2} F^{\beta\alpha} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
&= \frac{1}{2} F^{\beta\alpha} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) = \frac{1}{2} (F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) = -F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Para llegar al resultado (1.36) se usa el hecho de que  $F^{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ . Finalmente al sustituir las expresiones (1.35) y (1.36) en la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{1.37}$$

que corresponde a las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. Siguiendo un procedimiento similar podemos obtener las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

### 1.3. Relatividad General

A continuación se estudiará brevemente la relatividad general que es la segunda teoría importante para poder abordar el estudio de las teorías de Kaluza-Klein. La relatividad general, teoría desarrollada por Einstein en 1915, describe los fenómenos relacionados a la gravitación. La interacción gravitacional en comparación con el electromagnetismo clásico difieren en el sentido de que la variable dinámica que da lugar a la gravitación es el espacio-tiempo mismo, y no un campo adicional propagándose a través del espacio. Einstein llegó a la conclusión de que el espacio-tiempo es curvo y la gravedad es una manifestación de su curvatura. Esta idea se deriva del principio de equivalencia que establece que en una región lo suficientemente pequeña del espacio es imposible diferenciar un campo gravitacional de un sistema no inercial. Para describir la estructura curva del espacio-tiempo se introduce el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , que es la variable dinámica de la teoría y estará dada por la geometría del espacio-tiempo de interés.

#### 1.3.1. Movimiento en un espacio-tiempo curvo

Al iniciar el estudio de relatividad general, surge la siguiente pregunta: ¿Qué trayectoria sigue una partícula de masa  $m$  moviéndose en un espacio-tiempo curvo?, para responder a ello se considera una partícula libre moviéndose en un espacio-tiempo con elemento de línea  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ . El objetivo es encontrar ecuaciones de movimiento en términos de  $x^\mu(\tau)$ , parametrizado con el parámetro temporal  $\tau$ . La acción para la partícula libre será la siguiente

$$S = -m \int ds = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}[x(\tau)] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \quad (1.38)$$

A continuación se procede a calcular la variación de la acción con respecto al tensor métrico

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\delta(g_{\mu\nu}[x] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{2\sqrt{\dot{x}^2}} \\ &= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau \sqrt{\dot{x}^2}}{2\sqrt{\dot{x}^2} \sqrt{\dot{x}^2}} \left[ \delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \delta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta \dot{x}^\nu \right], \end{aligned} \quad (1.39)$$

con  $\dot{x}^2 \equiv g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ . Usando la relación  $d\tau \sqrt{\dot{x}^2} = ds$ , puede pasarse en (1.39) a una parametrización con respecto al tiempo propio  $s$ . Para el primer término de la expresión anterior, la variación del tensor métrico corresponde en primer orden con  $\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x + \delta x) - g_{\mu\nu}(x) \simeq \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x) \delta x^\alpha$ . Sobre el segundo y tercer término en (1.39) se aplica

integración por partes y asumiendo la condición  $\delta x(s_1) = \delta x(s_2) = 0$  se encuentra que

$$\begin{aligned}
\delta S &= -m \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{2} \left\{ \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{d}{ds} [g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\nu] \delta x^\mu - \frac{d}{ds} [g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu] \delta x^\nu \right\} \\
&= -m \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{2} \left\{ \partial_\alpha g_{\mu\nu} \delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu \delta x^\mu - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\mu \delta x^\nu - 2g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu \delta x^\nu \right\} \\
&= -m \int_{s_1}^{s_2} ds \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu \right] \delta x^\alpha. \tag{1.40}
\end{aligned}$$

Debido a la simetría del tensor métrico  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , se obtiene la igualdad  $g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu \delta x^\nu = g_{\mu\nu} \delta x^\mu \ddot{x}^\nu$ . De acuerdo al principio de Hamilton,  $\delta S$  debe ser igual a cero para cualquier valor de  $\delta x^\alpha$ , así el integrando en (1.40) es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu &= 0 \\
-\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \ddot{x}^\rho &= 0 \\
\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0, \tag{1.41}
\end{aligned}$$

correspondiente a la ecuación geodésica. El término  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  es la diferencia entre la trayectoria obtenida y la recta que extremiza la acción en un espacio plano descrito por la métrica de Minkowski. De esta manera, la ecuación (1.41) generaliza la noción de línea recta en un espacio curvo. Además se define la conexión o símbolos de Christoffel como derivadas de la métrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \tag{1.42}$$

y en el caso particular de la métrica de Minkowski  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , los símbolos de Christoffel son iguales a cero.

### 1.3.2. Derivación Covariante

Un tensor es un objeto matemático que bajo una transformación de coordenadas cambia de la siguiente forma

$$T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\beta_l}} T'^{\beta_1 \dots \beta_l}_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x'). \tag{1.43}$$

El problema con la derivación ordinaria de un tensor es que no transforma como lo haría un tensor con su respectiva cantidad de índices. Ejemplo de esto es la derivada de un

tensor de rango (0,1), expresado como  $A'^\alpha$ , que bajo una transformación de coordenadas resulta en

$$\begin{aligned} \partial'_\beta A'^\alpha(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \partial_\nu A^\mu(x) + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A^\mu(x) \\ &= S_\mu^\alpha (S^{-1})^\nu_\beta \partial_\nu A^\mu + [(S^{-1})^\nu_\beta \partial_\nu S_\mu^\alpha] A^\mu, \end{aligned} \quad (1.44)$$

con notación  $S_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ ,  $(S^{-1})^\mu_\rho = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}$ ,  $\partial'_\mu = (S^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$ . El primer término de la expresión (1.44) efectivamente transforma de acuerdo con la definición de un tensor (1.43), sin embargo el segundo término hace que esta cantidad sea una operación que no es independiente de un cambio de coordenadas, contraviniendo la principal razón de recurrir al uso de tensores, que es poder escribir relaciones matemáticas independientes del sistema de coordenadas utilizado. La solución a esta problemática se obtiene al definir una cantidad que transforme de forma adecuada, para ello se introduce la derivación covariante

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda, \quad (1.45)$$

definida como la derivación ordinaria más un término relacionado con la conexión, que convenientemente anula el término adicional en (1.44). La conexión transforma de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa\beta}^{\prime\alpha} &= S_\eta^\alpha (S^{-1})^\omega_\kappa (S^{-1})^\sigma_\beta \Gamma_{\omega\sigma}^\eta + S_\eta^\alpha (S^{-1})^\rho_\kappa \partial_\rho (S^{-1})^\eta_\beta \\ &= S_\eta^\alpha (S^{-1})^\omega_\kappa (S^{-1})^\sigma_\beta \Gamma_{\omega\sigma}^\eta - (S^{-1})^\rho_\kappa (\partial_\rho S_\sigma^\alpha) (S^{-1})^\sigma_\beta, \end{aligned} \quad (1.46)$$

usando la propiedad para matrices  $\partial M^{-1} = -M^{-1} \partial M M^{-1}$  sobre el segundo término tal que

$$\begin{aligned} S_\eta^\alpha (S^{-1})^\rho_\kappa \partial_\rho (S^{-1})^\eta_\beta &= S_\eta^\alpha (S^{-1})^\rho_\kappa [(S^{-1})^\eta_\gamma \partial_\rho S_\sigma^\gamma (S^{-1})^\sigma_\beta] \\ &= -\delta_\gamma^\alpha (S^{-1})^\rho_\kappa \partial_\rho S_\sigma^\gamma (S^{-1})^\sigma_\beta \\ &= -(S^{-1})^\rho_\kappa \partial_\rho S_\sigma^\alpha (S^{-1})^\sigma_\beta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Los resultados (1.46) y (1.44) hacen que la derivada covariante (1.45) transforme como un tensor

$$\begin{aligned} \partial'_\beta A'^\alpha(x') + \Gamma_{\kappa\beta}^{\prime\alpha} A'^\kappa &= S_\mu^\alpha (S^{-1})^\nu_\beta \partial_\nu A^\mu + S_\eta^\alpha (S^{-1})^\sigma_\beta \Gamma_{\omega\sigma}^\eta A^\omega \\ &= S_\mu^\alpha (S^{-1})^\nu_\beta (\partial_\nu A^\mu + \delta_\mu^\eta \delta_\nu^\omega \Gamma_{\omega\sigma}^\eta A^\omega) \\ \nabla'_\beta A'^\alpha &= S_\mu^\alpha (S^{-1})^\nu_\beta \nabla_\nu A^\mu. \end{aligned} \quad (1.48)$$

La interpretación geométrica de la derivada covariante de un vector, es la diferencia que existe al transportar paralelamente un vector en un camino sobre un espacio curvo tal

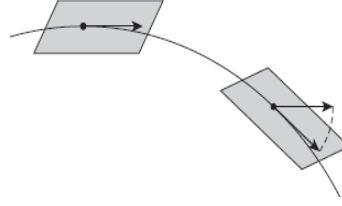


Figura 1.1: Traslación de un vector en un plano tangente a un punto cercano en un espacio curvo [1].

como se muestra en la figura 1.1. Una vez transportado hasta un punto cercano, el vector no se encuentra en el mismo plano tangente, cambiando así los vectores base además de las componentes del vector. El término referido a la conexión en (1.44) toma en cuenta este hecho geométrico. La definición de derivada covariante se extiende a tensores

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} &= \partial_{\alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} + \Gamma^{\nu_1}_{\beta \alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} + \dots + \Gamma^{\nu_l}_{\beta \alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} \\ &\quad - \Gamma^{\beta}_{\mu_1 \alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k} - \dots - \Gamma^{\beta}_{\mu_k \alpha} T^{\nu_1 \dots \nu_l}_{\mu_1 \dots \mu_k}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

con  $k$  índices covariantes y  $l$  índices contravariantes.

Para caracterizar la geometría del espacio-tiempo, en relatividad general pueden agregarse dos condiciones: condición de libre torsión y condición de métrica compatible. La primera implica que la conexión es simétrica

$$\Gamma^{\mu}_{\nu \alpha} = \Gamma^{\mu}_{\alpha \nu}, \quad (1.50)$$

en sus índices covariantes. Por otra parte, la condición de métrica compatible impone que la derivada covariante del tensor métrico es igual a cero

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu \nu} = 0. \quad (1.51)$$

Estas dos condiciones y la definición de derivada covariante permiten obtener la forma de la conexión (1.40) derivada del tratamiento de la partícula libre.

### 1.3.3. Curvatura

La curvatura del espacio-tiempo es una de las principales consecuencias de la teoría de relatividad general, de acuerdo con la cual la gravedad es un efecto de la geometría curva del espacio-tiempo. Para cuantificar la curvatura se define el tensor de Riemann, que surge al considerar el siguiente problema. Cuando un vector en un espacio Euclídeo es transportado paralelamente a lo largo de un camino cerrado, tendrá la misma dirección al

regresar al punto inicial luego del transporte. Sin embargo, esto no ocurre en un espacio general donde el vector resultante dependerá del camino tomado durante el transporte paralelo. Para observar lo anterior, se considera el transporte paralelo de un vector  $S_\rho$  sobre dos trayectorias distintas (figura 1.2) hasta el punto C, y así se obtienen los siguientes vectores resultantes

$$(1 + (\delta_2 x)^\mu \nabla_\mu)(1 + (\delta_1 x)^\nu \nabla_\nu) S_\rho(x), \quad (1.52)$$

$$(1 + (\delta_1 x)^\nu \nabla_\nu)(1 + (\delta_2 x)^\mu \nabla_\mu) S_\rho(x), \quad (1.53)$$

donde  $(1 + (\delta_1 x)^\nu \nabla_\nu)$  es el operador de traslación a lo largo del camino infinitesimal  $\delta_1 x$ . La expresión (1.52) corresponde al transporte paralelo del vector, primero a lo largo del segmento  $\delta_1 x$  que inicia en el punto A y culmina en el punto D, para luego ser transportado por el segmento infinitesimal  $\delta_2 x$  que une los puntos D y C. Para (1.53) se tiene de igual forma la traslación del vector hasta el punto C, pero siguiendo la trayectoria que pasa por el punto B. La diferencia de los vectores (1.52) y (1.53) es un conmutador de derivadas covariantes

$$(\delta_2 x)^\mu (\delta_1 x)^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu S_\rho - (\delta_1 x)^\nu (\delta_2 x)^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S_\rho = (\delta_2 x)^\mu (\delta_1 x)^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] S_\rho, \quad (1.54)$$

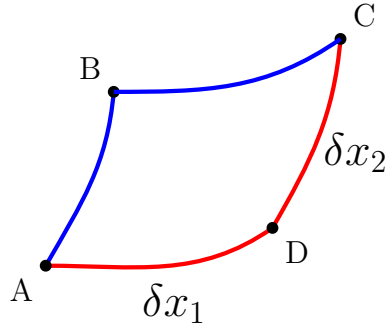


Figura 1.2: Traslación de un vector  $S_\rho(x)$  a través de dos trayectorias distintas.

que se interpreta como el transporte paralelo a lo largo del camino cerrado (iniciando y culminando en el punto A). Los elementos de este conmutador actúan sobre el vector de la forma

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu S_\rho) = \partial_\mu (\nabla_\nu S_\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho (\nabla_\sigma S_\rho) - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma (\nabla_\nu S_\sigma), \quad (1.55)$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu S_\rho) = \partial_\nu (\nabla_\mu S_\rho) - \Gamma_{\nu\mu}^\rho (\nabla_\sigma S_\rho) - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma (\nabla_\mu S_\sigma), \quad (1.56)$$

y su diferencia es

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]S_\rho &= \partial_\mu(\partial_\nu S_\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma S_\sigma) - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma(\partial_\nu S_\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\kappa S_\kappa) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -(\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu))S_\rho \\
&= -R_{\rho\mu\nu}^\sigma S_\rho,
\end{aligned} \tag{1.57}$$

donde  $R_{\rho\mu\nu}^\sigma$  es el tensor de Riemann o curvatura definido como

$$R_{\rho\mu\nu}^\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\kappa - \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\kappa. \tag{1.58}$$

En un espacio-tiempo plano descrito con la métrica de Minkowski ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), los vectores resultantes luego del transporte son iguales ( $R_{\rho\mu\nu}^\sigma = 0$ ), por lo que el tensor de Riemann es una medida de cómo el espacio está curvado.

Las simetrías del tensor de Riemann, con respecto al intercambio y contracción de índices, tienen algunas implicaciones importantes. Si la contracción es sobre el primer índice,  $R_{\sigma\mu\nu}^\sigma$  entonces de (1.58) se obtiene  $R_{\sigma\mu\nu}^\sigma = 0$ , al tratarse de un tensor antisimétrico. Por otra parte, si la contracción ocurre con el segundo o tercer índice se obtiene

$$R_{\mu\sigma\nu}^\sigma = -R_{\mu\nu\sigma}^\sigma, \tag{1.59}$$

y por convención se escoge el tensor de Ricci como

$$R_{\mu\sigma\nu}^\sigma = R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\kappa}^\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\kappa, \tag{1.60}$$

siendo un tensor simétrico de segundo orden. La importancia de definir el tensor de Ricci es la relación entre este y el tensor de energía-momento,  $T_{\mu\nu}$  que se obtendrá en la siguiente sección a través de las ecuaciones de Einstein. La derivada covariante del tensor de Ricci no es cero, pero la siguiente combinación si lo es

$$\nabla^\nu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0, \tag{1.61}$$

conocida como identidad diferencial de Bianchi. El tensor de Ricci contraído con el tensor métrico resulta en un escalar

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R, \tag{1.62}$$

conocido como escalar de Ricci o curvatura, que además coincide con la traza total del tensor de Ricci.

### 1.3.4. Acción de Hilbert-Einstein y Ecuaciones de Einstein

Con el objetivo de obtener ecuaciones de campo que relacionen la geometría del espacio tiempo con la energía asociada a la materia, se define la acción de Hilbert-Einstein a través

del escalar de Ricci  $R$  (invariante más simple que contiene la métrica y sus derivadas), la constante cosmológica  $\Lambda$  y una acción masiva  $S_M$  de la siguiente forma

$$S_{EH} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} (R + \Lambda) + S_M, \quad (1.63)$$

donde  $\kappa$  es la constante de Einstein relacionada con la constante gravitacional  $\kappa = 8\pi G$ . Una vez aplicado el principio de Hamilton sobre la acción se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_{EM} &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta_g \left[ \sqrt{|g|} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \Lambda) \right] + \delta_g S_M = 0 \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ \left( \delta \sqrt{|g|} \right) (R + \Lambda) + \sqrt{|g|} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

El primer término de la expresión anterior corresponde a la variación del elemento de volumen  $\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})}$ . Con la derivación para determinantes  $\delta g = \delta[\det(g_{\mu\nu})] = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$  y la relación  $g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ , la variación del elemento de volumen es

$$\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} |g|^{-\frac{1}{2}} \delta g = \frac{\sqrt{|g|}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{|g|}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.65)$$

Por otra parte, para la variación del tensor de Ricci se tiene

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}) + \delta (\Gamma^\rho_{\mu\lambda}) \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta (\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}) - \delta (\Gamma^\rho_{\nu\lambda}) \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta (\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}), \quad (1.66)$$

con  $\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}$  la variación de la conexión, por tanto es un tensor y puede calcularse su derivada covariante

$$\nabla_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) = \partial_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda}, \quad (1.67)$$

$$\nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}) = \partial_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}) + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda}, \quad (1.68)$$

que introducida en (1.66) se reduce a la siguiente expresión

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}). \quad (1.69)$$

La cantidad de interés es la variación del tensor de Ricci, por lo que es suficiente con calcular la traza en (1.69), esto es

$$g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\rho (g^{\sigma\nu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho} \delta \Gamma^\mu_{\mu\sigma}), \quad (1.70)$$

usando la condición de métrica compatible  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ . La expresión (1.70) introducida en la acción resulta en un término de superficie que no contribuye en la variación de la acción

$$\int d^4x \sqrt{|g|} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.71)$$

Finalmente para la variación de la acción masiva se tiene

$$\begin{aligned}
\delta_g S_M &= \delta \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L} \\
&= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} + \mathcal{L} \delta \sqrt{|g|} \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{1.72}$$

donde se identifica el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L} g_{\mu\nu}. \tag{1.73}$$

Los resultados (1.65), (1.71) y (1.72) conducen a la siguiente variación de la acción de Hilbert-Einstein

$$-\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0, \tag{1.74}$$

de esta forma, para toda variación en la métrica  $\delta g^{\mu\nu}$ , se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.75}$$

que relacionan la geometría del espacio-tiempo (izquierda) con la energía (derecha), donde  $G_{\mu\nu}$  se denomina tensor de Einstein.

En el vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$  y  $\Lambda = 0$ ), la ecuación de Einstein se reduce a

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\
g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 0 \\
R_{\mu\nu} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

conocida como condición de planitud de Ricci, y no es equivalente a que el tensor de curvatura sea idénticamente igual a cero ( $R_{\nu\mu\alpha\beta} = 0$ ), que solo ocurre para métricas que describen un espacio-tiempo plano. Ejemplo de esto es la métrica de Schwarzschild, que es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein que describe la distorsión del espacio-tiempo por una estrella o una masa esférica. En este caso, el tensor de Ricci es igual a cero, debido a que se trata de una solución de vacío, pero las componentes del tensor de Curvatura son distintas de cero.

Otro aspecto relevante de la ecuación de Einstein es la conservación del tensor de energía-momento, que resulta de la derivación covariante y la identidad de Bianchi  $\nabla_\nu R^\nu_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu R$ , esto es

$$\begin{aligned}\nabla^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\nu R &= 8\pi\kappa\nabla^\nu T_{\mu\nu} \\ \nabla_\nu R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu R &= 8\pi\kappa\nabla^\nu T_{\mu\nu} \\ \nabla^\nu T_{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}\tag{1.77}$$

Lo anterior representa la conservación de la corriente de Noether asociada a traslaciones espacio-temporales.

### 1.3.5. Ecuaciones de Maxwell-Einstein

En el marco de la relatividad general, la interacción electromagnética puede incluirse al considerar el tensor de energía momento para la radiación electromagnética

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial[F_{\rho\gamma}F_{\alpha\beta}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}]}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\gamma}F_{\rho\gamma} = F_{\mu\rho}F^{\rho\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\gamma}F_{\rho\gamma},\tag{1.78}$$

producto de la variación en la acción de Einstein-Maxwell

$$S_{EM} = \frac{1}{16\pi\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}[R + \Lambda] - \int d^4x\sqrt{|g|}\frac{1}{4}[F_{\rho\gamma}F_{\alpha\beta}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}].\tag{1.79}$$

Luego de aplicado el principio de Hamilton en (1.79), resultan las ecuaciones de movimiento

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi\kappa\left[F_{\mu\rho}F^{\rho\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right],\tag{1.80}$$

que incluye la interacción gravitacional y electromagnética. Esto no es una teoría de unificación en el sentido de que el electromagnetismo no resulta de los elementos de la geometría del espacio-tiempo.

### 1.3.6. Gravedad Linealizada

La relatividad general puede tratarse como una teoría de campo ordinaria al asumir que el tensor métrico está dado por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},\tag{1.81}$$

con métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}.\tag{1.82}$$

esto es, un espacio-tiempo fijo dado por el tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  más un tensor simétrico  $h_{\mu\nu}$ . Esta aproximación es válida cuando la interacción gravitacional es débil, por tanto  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . La traza o contracción de índices en el término  $h_{\mu\nu}$  se realiza a través de la métrica  $\eta$  como

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad (1.83)$$

$$h^\mu_\nu \equiv \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}, \quad (1.84)$$

$$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (1.85)$$

Con esta métrica el elemento de volumen se expande suprimiendo términos con orden cuadrático en  $h_{\mu\nu}$ , tal que

$$\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h. \quad (1.86)$$

Bajo una transformación general de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x)$ , el tensor métrico cambia

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \right) \left( \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} \right) g^{\sigma\tau} \\ &= \frac{\partial(x^\mu - \varepsilon^\mu)}{\partial x^\sigma} \frac{\partial(x^\nu - \varepsilon^\nu)}{\partial x^\tau} (\eta^{\sigma\tau} - h^{\sigma\tau}) \\ &= (\delta^\mu_\sigma - \partial_\sigma \varepsilon^\mu) (\delta^\nu_\tau - \partial_\tau \varepsilon^\nu) (\eta^{\sigma\tau} - h^{\sigma\tau}) \\ &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} - \partial^\nu \varepsilon^\mu - \partial^\mu \varepsilon^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (1.87)$$

encontrando así que  $h_{\mu\nu}$  transforma como

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu, \quad (1.88)$$

similar en estructura a la transformación de calibre para el electromagnetismo  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ , lo que indica que la gravedad puede ser tratada como una teoría de calibre bajo esta aproximación.

Por supuesto, como su nombre lo indica, en gravedad linealizada solo se consideran términos de primer orden en  $h$ , para cantidades derivadas de la métrica como símbolos de Christoffel y tensor de curvatura. Sin embargo, para la acción se buscan términos cuadráticos en  $h$  y sus derivadas con el objeto de encontrar una acción análoga a la acción de electromagnetismo.

Una forma de encontrar la acción linealizada y evitar el cálculo del escalar de Ricci, es considerar todos los posibles términos con productos de primeras derivadas en  $h_{\mu\nu}$ ,

$$S = \int d^4x \left[ a \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} + b \partial^\lambda h \partial_\lambda h + c \partial_\lambda h^{\lambda\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + d \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} \right], \quad (1.89)$$

con constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  que pueden obtenerse al aplicar variaciones sobre la acción con  $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$ . La variación sobre cada término resulta en

$$a \delta(\partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu}) = a[\delta(\partial_\lambda \delta(h^{\mu\nu}) \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \delta(\partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda \delta(h_{\mu\nu}))] = a(4\varepsilon^\nu \partial^2 \partial^\mu h_{\mu\nu}), \quad (1.90)$$

$$b \delta(\partial^\lambda h \partial_\lambda h) = b(4\varepsilon^\nu \partial^2 \partial_\nu h), \quad (1.91)$$

$$c \delta(\partial_\lambda h^{\lambda\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu}) = 2c(\varepsilon^\lambda \partial_\lambda \partial^\nu \partial^\mu h_{\mu\nu} + \varepsilon^\nu \partial^2 \partial^\mu h_{\mu\nu}), \quad (1.92)$$

$$d \delta(\partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu}) = 2d(\varepsilon_\lambda \partial^\lambda \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \varepsilon_\nu \partial^2 \partial^\nu h), \quad (1.93)$$

tres ecuaciones independientes con respecto a  $h$ ,  $\varepsilon$  y  $\partial$ , permitiendo fijar las constantes  $a = -b = 1/2$ ,  $c = -d = -1$ . Con esto, la combinación invariante es

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\lambda h \partial_\lambda h - \partial_\lambda h^{\lambda\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu}, \quad (1.94)$$

y la acción para un campo gravitacional débil es entonces

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{32\pi G} \mathcal{I} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right), \quad (1.95)$$

siendo

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \quad (1.96)$$

el tensor de energía-momento que proporciona el acople del campo  $h_{\mu\nu}$  con la materia  $S_M$ .

A lo largo de este capítulo se presentaron los fundamentos de las teorías de electromagnetismo y relatividad general en forma de teorías de campos, con el propósito de estudiar la unificación de ambas en la teoría de Kaluza-Klein, que se abordará en capítulos subsiguientes. Con respecto al electromagnetismo, se llegó a una formulación Lagrangiana para ésta, comenzando con la expresión de las ecuaciones de Maxwell en su forma covariante, y además considerando la invariancia bajo una transformación de calibre sobre el potencial electromagnético. En el caso de la relatividad general, se estudiaron algunas consecuencias de la geometría curva del espacio-tiempo como lo son el tensor y escalar de Ricci, que forman parte de la acción para la teoría y relacionan la geometría del espacio-tiempo con la energía a través de las ecuaciones de Einstein. Finalmente, se trató la relatividad general como una teoría de calibre ordinaria, llegando así a una acción similar en estructura a la descrita para el electromagnetismo.

# Capítulo 2

## Teoría de Kaluza-Klein

En el presente capítulo se estudiarán los aspectos básicos de la teoría de Kaluza-Klein que involucra elementos del electromagnetismo y relatividad general, mostrados en el capítulo anterior. Específicamente se abordará esta teoría a través de la compactificación de una dimensión extra en una geometría circular, y así mediante este mecanismo dar con un posible candidato para resolver el problema de materia oscura.

Inmediato a la publicación de la teoría de relatividad general por Einstein en 1915, existieron numerosos intentos que trataban de unificar la interacción electromagnética y gravitacional, muchos de estos fuera de la interpretación geométrica del espacio-tiempo. Nordström en 1914 e independientemente Kaluza en 1921, fueron los primeros en tratar de unificar gravedad con electromagnetismo en una teoría de cinco dimensiones. Ambos evadieron el hecho de la no existencia de observaciones sobre la quinta dimensión, al imponer que todas las derivadas con respecto a la coordenada extra son cero, es decir, restringiendo la física a solo las cuatro dimensiones conocidas. Con esta imposición, se obtuvieron ecuaciones de campo del electromagnetismo y gravedad a partir de una única teoría en cinco dimensiones. Nordström [3] por su parte asumió un campo gravitacional; mientras que Kaluza usó el tensor de Einstein. Específicamente, Kaluza trabajó con una teoría de relatividad general en cinco dimensiones en el vacío ( $\hat{G}_{AB} = 0$ ), conteniendo relatividad general en cuatro dimensiones en presencia de un campo electromagnético ( $G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{EM}$ ), junto a las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. Además obtuvo una ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar no masivo, que Kaluza suprimió al considerar un campo escalar constante. Posteriores intentos de teorías de unificación en  $4 + d$  dimensiones se derivan del resultado logrado por Kaluza.

La teoría desarrollada por Kaluza y teorías de este tipo para dimensiones extras, tienen

---

en común las siguientes características:

1. El campo electromagnético y gravitacional están completamente contenidos en una versión del tensor de Einstein en  $4 + d$  dimensiones ( $G_{AB}^{4+d}$ ); esto es en la métrica y sus derivadas. No se requiere de un tensor de energía-momento en  $4 + d$  dimensiones.
2. Este tipo de teorías son extensiones mínimas de la relatividad general de Einstein, en el sentido de que no hay modificación en la estructura matemática.
3. La física no dependerá de las coordenadas extras.

En consideración con estas propiedades, se busca la teoría más simple que a su vez permita recuperar las ecuaciones de movimiento definidas en cuatro dimensiones para el electromagnetismo y relatividad general.

## 2.1. Mecanismo de Kaluza

La idea de Kaluza consistió en expresar el campo gravitacional y el potencial electromagnético como elementos de un único tensor métrico  $\hat{g}_{AB}$ , para la teoría en cinco dimensiones. Denotaremos con índices latinos y en mayúsculas las cantidades en 5 dimensiones,  $A = 0, 1, 2, 3, 4$  y con letras griegas las cantidades en el espacio-tiempo en 4 dimensiones. La parametrización propuesta por Kaluza incluye el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , el potencial electromagnético  $A_\mu$ , y un campo escalar  $\phi$  dispuestos en la siguiente forma matricial

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa \phi^2 A_\alpha \\ \kappa \phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con métrica inversa

$$(\hat{g}^{AB}) = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -\kappa A^\alpha \\ -\kappa A^\beta & \phi^{-2} + \kappa^2 g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El parámetro  $\kappa$  se relaciona con la constante gravitacional  $G$

$$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}. \quad (2.3)$$

Los elementos de la geometría en cinco dimensiones: conexión, tensor y escalar de Ricci, se definen de igual forma que en cuatro dimensiones en función de la métrica  $\hat{g}_{AB}$  y su inversa  $\hat{g}^{AB}$

$$\hat{\Gamma}_{AB}^C = \frac{1}{2} \hat{g}^{CD} (\partial_A \hat{g}_{DB} + \partial_B \hat{g}_{DA} - \partial_D \hat{g}_{AB}), \quad (2.4)$$

$$\hat{R}_{AB} = \partial_C \hat{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \hat{\Gamma}_{AC}^C + \hat{\Gamma}_{AB}^C \hat{\Gamma}_{CD}^D - \hat{\Gamma}_{AD}^C \hat{\Gamma}_{BC}^D, \quad (2.5)$$

$$\hat{R} = \hat{g}^{AB} \hat{R}_{AB}. \quad (2.6)$$

Con el objetivo de explicar la materia en cuatro dimensiones como una manifestación puramente geométrica en dimensiones extras, Kaluza [4] presentó las ecuaciones de Einstein para esta geometría sin una versión en cinco dimensiones del tensor de energía-momento

$$\hat{G}_{AB} = \hat{R}_{AB} - \frac{1}{2} \hat{R} \hat{g}_{AB} = 0, \quad (2.7)$$

equivalente a una condición Ricci de planitud

$$\hat{R}_{AB} = 0. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) pueden derivarse al efectuar variaciones  $\delta \hat{g}_{AB}$ , sobre una versión en cinco dimensiones de la acción de Einstein

$$S = -\frac{1}{16\pi \hat{G}} \int \hat{R} \sqrt{|\hat{g}|} d^4x dy, \quad (2.9)$$

donde  $y = x^4$  representa la dimensión extra y  $\hat{G}$  se interpreta como una constante gravitacional en cinco dimensiones. Este cálculo es semejante al realizado en la sección 1.3.4, para obtener las ecuaciones de Einstein en cuatro dimensiones.

### 2.1.1. Ecuaciones de Movimiento

La métrica (2.1) y la acción (2.9) son indicios de la posibilidad de encontrar ecuaciones de movimiento para la teoría mediante un procedimiento similar al realizado en el electromagnetismo clásico y relatividad general. Primero se considera la restricción sobre el tensor métrico

$$\partial_4 \hat{g}_{AB} = 0, \quad (2.10)$$

que garantiza la independencia con respecto a la dimensión extra de cualquier elemento de la métrica (2.1) y su inversa (2.2). Con esta condición los símbolos de Christoffel no

nulos se reducen a lo siguiente

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\beta} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\beta\gamma}(\partial_{\alpha}\hat{g}_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}\hat{g}_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}\hat{g}_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\beta 4}(\partial_{\alpha}\hat{g}_{4\nu} + \partial_{\nu}\hat{g}_{4\alpha}) \\ &= \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \frac{\kappa^2}{2}g^{\beta\gamma}[\partial_{\alpha}(\phi^2 A_{\gamma}A_{\nu}) + \partial_{\nu}(\phi^2 A_{\gamma}A_{\alpha}) - \partial_{\gamma}(\phi^2 A_{\alpha}A_{\nu})] \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{2}A^{\beta}[\partial_{\alpha}(\phi^2 A_{\nu}) + \partial_{\nu}(\phi^2 A_{\alpha})],\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\partial_{\sigma}(\phi^2),\tag{2.12}$$

$$\hat{\Gamma}_{44}^4 = \frac{1}{2}\kappa A^{\sigma}\partial_{\sigma}(\phi^{-2} + \kappa^2 A^2),\tag{2.13}$$

$$\hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu} = -\frac{1}{2}\kappa A^{\mu}\partial_{\alpha}(\phi^2) + \frac{1}{2}\kappa g^{\mu\sigma}[\partial_{\alpha}(A_{\sigma}\phi^2) - \partial_{\sigma}(A_{\alpha}\phi^2)],\tag{2.14}$$

$$\hat{\Gamma}_{4\sigma}^4 = -\frac{1}{2}\kappa^2 A^{\gamma}[\partial_{\sigma}(\phi^2 A_{\gamma}) - \partial_{\gamma}(\phi^2 A_{\sigma})] + (\phi^{-2} + \kappa^2 A^2)\partial_{\sigma}(\phi^2),\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^C &= \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^4 = \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}g^{4\gamma}(\partial_{\alpha}\hat{g}_{\gamma\nu} + \partial_{\nu}\hat{g}_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}\hat{g}_{\alpha\nu}) \\ &= \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} - A^{\gamma}\left\{\kappa g_{\mu\gamma}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \frac{\kappa^3}{2}[\partial_{\alpha}(\phi^2 A_{\gamma}A_{\beta}) + \partial_{\beta}(\phi^2 A_{\gamma}A_{\alpha}) - \partial_{\gamma}(\phi^2 A_{\alpha}A_{\beta})]\right\}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Luego aislando en (2.9) las componentes referidas a la coordenada  $x^4$  y usando la definición del tensor de Ricci, se tiene

$$\hat{R}_{AB} = \hat{R}_{\alpha\beta} + \hat{R}_{4\beta} + \hat{R}_{\alpha 4} + \hat{R}_{44} = 0,\tag{2.17}$$

con componentes que se definen en función de la conexión como

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} &= \partial_{\mu}\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\hat{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\mu} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\nu} - \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\beta\mu}^{\nu} - \partial_{\beta}\hat{\Gamma}_{\alpha 4}^4 + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^4\hat{\Gamma}_{4\nu}^{\nu} \\ &\quad - \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^4\hat{\Gamma}_{\beta 4}^{\nu} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^4\hat{\Gamma}_{44}^4 - \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^4\hat{\Gamma}_{\beta 4}^4 + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 - \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\beta\mu}^4,\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\hat{R}_{\alpha 4} = \partial_{\mu}\hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu} + \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\mu 4}^4 - \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu}\hat{\Gamma}_{4\mu}^4 + \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^4\hat{\Gamma}_{4\nu}^{\nu} - \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^4\hat{\Gamma}_{44}^{\nu} + \hat{\Gamma}_{\alpha 4}^{\mu}\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\nu} - \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\mu}\hat{\Gamma}_{4\mu}^{\nu},\tag{2.19}$$

$$\hat{R}_{44} = \partial_{\mu}\hat{\Gamma}_{44}^{\mu} + \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\mu}\hat{\Gamma}_{44}^{\nu} - \hat{\Gamma}_{4\nu}^{\mu}\hat{\Gamma}_{4\mu}^{\nu} + \hat{\Gamma}_{\mu 4}^{\mu}\hat{\Gamma}_{44}^4 - \hat{\Gamma}_{44}^{\mu}\hat{\Gamma}_{4\mu}^4 + \hat{\Gamma}_{4\nu}^4\hat{\Gamma}_{44}^{\nu} - \hat{\Gamma}_{4\nu}^4\hat{\Gamma}_{44}^{\nu}.\tag{2.20}$$

En primer lugar, de la expresión (2.20) igual a cero se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{R}_{44} &= -\partial_{\mu}[g^{\mu\gamma}\phi\partial_{\gamma}(\phi)] + g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}(\phi)\partial_{\mu}(\phi) + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu}[g^{\epsilon\nu}\phi\partial_{\epsilon}(\phi)] \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{4}g^{\mu\gamma}g^{\nu\epsilon}\phi^4[(\partial_{\nu}A_{\gamma} - \partial_{\gamma}A_{\nu})(\partial_{\epsilon}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\epsilon})] = 0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

resultando así una ecuación de movimiento para el campo escalar

$$\square\phi = \frac{\kappa^2\phi^3}{4}F_{\nu\gamma}F^{\nu\gamma},\tag{2.22}$$

de donde se identifica el tensor de campo electromagnético  $F_{\nu\gamma} = \partial_\nu A_\gamma - \partial_\gamma A_\nu$ , y el D'Alembertiano del campo escalar  $\square\phi = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi) = g^{\alpha\beta}[\partial_\beta(\partial_\alpha\phi) - \partial_\rho\phi\Gamma_{\alpha\beta}^\rho]$ . Un cálculo similar sobre (2.19) conduce a

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha 4} &= \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\partial_\mu(\partial_\alpha A_\gamma) - \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\partial_\mu(\partial_\gamma A_\alpha) + \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\Gamma_{\alpha\mu}^\nu\partial_\alpha(A_\nu) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\Gamma_{\alpha\mu}^\nu\partial_\nu(A_\alpha) + \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\Gamma_{\gamma\mu}^\nu\partial_\mu(A_\alpha) - \frac{\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi^2\Gamma_{\gamma\mu}^\nu\partial_\alpha(A_\mu) \\ &\quad + \frac{3\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi\partial_\mu(\phi)\partial_\alpha A_\gamma - \frac{3\kappa}{2}g^{\mu\gamma}\phi\partial_\mu(\phi)\partial_\gamma A_\alpha + \kappa A_\alpha\hat{R}_{44} = 0,\end{aligned}\quad (2.23)$$

que a su vez se reduce a la ecuación de movimiento

$$\nabla^\gamma(\phi^3 F_{\gamma\alpha}) = 0,\quad (2.24)$$

para el potencial electromagnético. En este caso se trata de la derivada covariante del tensor de campo electromagnético  $g^{\rho\gamma}\nabla_\rho F_{\gamma\alpha} = \partial^\gamma F_{\gamma\alpha} - g^{\rho\gamma}\Gamma_{\rho\gamma}^\beta F_{\beta\alpha} - g^{\rho\gamma}\Gamma_{\rho\alpha}^\beta F_{\gamma\beta}$ . Por último, de la componente  $\hat{R}_{\alpha\beta}$  del tensor de Ricci (2.17) se obtiene

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\kappa^2\phi^2 g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} - \frac{1}{\phi}\nabla_\alpha(\partial_\beta\phi) - A_\beta A_\alpha\hat{R}_{44} + A_\alpha\hat{R}_{\beta 4} - A_\beta\hat{R}_{\alpha 4},\quad (2.25)$$

siendo  $R_{\alpha\beta}$  el tensor de Ricci en cuatro dimensiones. Los resultados anteriores permiten calcular el escalar de Ricci de la siguiente forma

$$\hat{R} = \hat{R}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2\hat{R}_{\alpha 4}g^{\alpha 4} + \hat{R}_{44}g^{44} = R + \frac{1}{4}\kappa^2\phi^2 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\frac{\nabla^\alpha(\partial_\alpha\phi)}{\phi},\quad (2.26)$$

y el tensor de Einstein ( $\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - 1/2\hat{g}_{\mu\nu}\hat{R} = 0$ ) como

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2\phi^2}{2}T_{\alpha\beta}^{EM} - \frac{1}{\phi}[\nabla_\alpha(\partial_\beta\phi) - g_{\alpha\beta}\square\phi],\quad (2.27)$$

donde  $T_{\alpha\beta}^{EM} = F_{\alpha\rho}F_{\beta}^\rho - 1/4g_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ , corresponde con el tensor de energía-momento para la radiación electromagnética. Las ecuaciones (2.22), (2.24) y (2.27), obtenidas por primera vez por Jordan-Thiry [5, 6], representan las ecuaciones de campo para la teoría de Kaluza-Klein. La ecuación (2.22) es una ecuación de Klein-Gordon, donde el campo electromagnético se interpreta como una fuente para el campo escalar. La expresión (2.24) tiene la forma de la ecuación de Maxwell para el vacío,  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ , esto si el campo escalar es constante. De la ecuación (2.27) se obtiene el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento para el electromagnetismo, siendo un resultado notable de la teoría de Kaluza-Klein que el electromagnetismo se obtiene de las ecuaciones de campo para el vacío en cinco dimensiones.

Una vez calculado el escalar de Ricci (2.26), la acción para la teoría es la siguiente

$$S = - \int d^4x \sqrt{|g|} \phi \left( \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \phi^2 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{2}{3\kappa^2} \frac{\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi}{\phi^2} \right), \quad (2.28)$$

expresada en términos de cantidades cuatridimensionales al definir la constante gravitacional en cinco dimensiones  $\hat{G}$  como

$$G \equiv \frac{\hat{G}}{\int dy}, \quad (2.29)$$

garantizando así la independencia con respecto a la quinta coordenada de todos los elementos que componen la acción. Las ecuaciones de movimiento obtenidas a través de las componentes del tensor de Ricci, pueden derivarse a través de variaciones de la acción (2.28) con respecto a los campos correspondientes.

### 2.1.2. Transformación conforme

Para que la acción (2.28) corresponda a una teoría de gravedad en 4 dimensiones como la planteada por la relatividad general, debe ocurrir que el campo  $\phi$  sea constante. Sin embargo, según lo trabajado hasta ahora, esto no ocurre. Por lo tanto se realizarán una serie de transformaciones que nos conduzcan a una teoría de gravedad canónica más unos términos adicionales que deben ser interpretados. Consideramos realizar una transformación conforme a la métrica en cinco dimensiones

$$\hat{g}_{AB} \rightarrow \hat{g}'_{AB} = \Omega^2 \hat{g}_{AB}, \quad (2.30)$$

donde  $\Omega^2 > 0$  es una función del campo escalar  $\phi$ , y es independiente de la coordenada  $x^4$ . La métrica cuatridimensional  $g_{\alpha\beta}$  es reescalada por el mismo factor  $g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}$ , produciendo el siguiente cambio en el escalar de Ricci (ver referencia [7])

$$R \rightarrow R' = \Omega^{-2} \left( R + 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right). \quad (2.31)$$

Es conveniente realizar la redefinición  $\phi^2 \rightarrow \phi$  y así, introduciendo el factor conforme  $\Omega^2 = \phi^{-1/3}$ , la métrica queda expresada de la forma

$$(\hat{g}'_{AB}) = \phi^{-1/3} \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi A_\alpha A_\beta & \kappa \phi A_\alpha \\ \kappa \phi A_\beta & \phi \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

y elemento de volumen

$$\sqrt{|\hat{g}'|} = \phi^{-5/6} \phi^{1/2} \sqrt{|g'|} = \Omega^2 \sqrt{|g'|}. \quad (2.33)$$

Bajo esta transformación en la métrica y definiendo  $\sigma = \ln \phi / (\kappa\sqrt{3})$ , la acción resultante es

$$S' = - \int d^4x \sqrt{|g'|} \left( \frac{R'}{16\pi G} + \frac{1}{4} e^{\sigma\sqrt{3}\kappa} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial'^{\alpha} \sigma \partial'_{\alpha} \sigma \right), \quad (2.34)$$

con parte gravitacional en forma convencional. La métrica reescalada (2.32) es referida en la literatura como métrica de Einstein, mientras que la métrica (2.1) es conocida como la métrica de Jordan.

## 2.2. Compactificación

Para tratar de explicar la independencia de las cantidades derivadas de la teoría con respecto a la quinta dimensión, Klein [8] asumió que la quinta coordenada es de tipo espacial y además le asoció dos propiedades: una geometría circular ( $S^1$ ) y una escala pequeña. Bajo esta imposición, toda cantidad se convierte en periódica;  $f(x, y) = f(x, y + 2\pi r_0)$ , donde  $r_0$  es el parámetro de escala o radio de la quinta dimensión. Los campos pueden ser expandidos en series de Fourier

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\alpha\beta}^{(n)}(x) e^{iny/r_0}, & A_{\alpha}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_{\alpha}^{(n)}(x) e^{iny/r_0}, \\ \phi(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x) e^{iny/r_0}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

El superíndice ( $n$ ) se refiere al  $n$ -ésimo modo de Fourier con momento en la dirección de la coordenada extra  $y$ , de orden  $|n|/r_0$ . En el caso de un campo escalar sin masa  $\Phi(\mathbf{x}, y)$  con densidad Lagrangiana en cinco dimensiones, se tiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_A \Phi \partial^A \Phi. \quad (2.36)$$

La compactificación de la quinta coordenada en un círculo se expresa a través de una expansión de Fourier

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) e^{iny/r_0}, \quad (2.37)$$

y para un campo escalar real se cumple la relación  $\Phi_n^*(x) = \Phi_{-n}(x)$ , que introducido en (2.36) resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left( \partial_{\mu} \Phi_n \partial^{\mu} \Phi_m - \frac{nm}{r_0^2} \Phi_n \Phi_m \right) e^{i(n+m)y/r_0}, \quad (2.38)$$

e integrando sobre el espacio-tiempo y la coordenada extra  $y$ , se obtiene la acción

$$S = \int d^4x \int_0^{2\pi r_0} dy \mathcal{L}, \quad (2.39)$$

donde  $2\pi r_0$  es el perímetro para la quinta dimensión. La integral sobre la exponencial define una delta de Kronecker

$$\int_0^{2\pi r_0} dy e^{i(m+n)y/r_0} = 2\pi r_0 \delta_{m,-n}, \quad (2.40)$$

así la acción toma la forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi r_0}{2} \int d^4x \delta_{m,-n} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left( \partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_m - \frac{nm}{r_0^2} \Phi_n \Phi_m \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi_0 \partial^\mu \Psi_0 \right) + \int d^4x \sum_{k=1}^{\infty} \left( \partial_\mu \Psi_k \partial^\mu \Psi_k^* + \frac{k^2}{r_0^2} \Psi_k \Psi_k^* \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

con la definición  $\Psi_n = \sqrt{2\pi r_0} \phi_n$  y haciendo  $m = -n = k$ , se obtiene el doble de los elementos de la suma  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty}$  para  $k \neq 0$ .

La acción (2.41) que resulta de considerar un campo escalar no masivo en 5D y realizar la compactificación de la dimensión espacial extra en un círculo, contiene un modo cero ( $\Psi_0$ ) como un campo escalar real y un número infinito de campos escalares masivos ( $\Psi_k$ ) con masa para cada modo determinado por  $m_k = k/r_0$ . Estos modos se conocen como modos o torres de Kaluza-Klein. El número  $k$  es denominado número Kaluza-Klein (KK).

### 2.3. Partícula de Kaluza-Klein

La expresión (2.41) muestra la posibilidad de encontrar campos masivos al efectuar una compactificación de la quinta coordenada en una geometría circular. A continuación, se muestra cómo es el acople de este resultado con la acción (2.34) para obtener un campo escalar real masivo asociado a la partícula de Kaluza-Klein. En 4+1 dimensiones la acción de gravedad está descrita por

$$S = -\frac{1}{16\pi \hat{G}} \int d^4x \sqrt{|\hat{g}'|} \hat{R}', \quad (2.42)$$

con el tensor métrico  $\hat{g}' = \det[\hat{g}'_{AB}]$  y escalar Ricci  $\hat{R}'$  definidos a través de la siguiente transformación conforme

$$\hat{g}'_{AB} = \omega(\phi) \hat{g}_{AB}, \quad (2.43)$$

siendo  $\omega(\phi)$  una función escalar dependiente de  $\phi$ . En su forma matricial el tensor métrico queda parametrizado

$$(\hat{g}'_{AB}) = \omega(\phi) \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - \phi A_\alpha A_\beta & \phi A_\alpha \\ \phi A_\beta & -\phi \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

y métrica inversa

$$(\hat{g}'^{AB}) = \omega^{-1}(\phi) \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & A^\alpha \\ A^\beta & -\frac{1}{\phi} + g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

El elemento de volumen en la acción cambia bajo esta transformación

$$\sqrt{|\hat{g}'|} = \omega^{5/2} \phi^{1/2} \sqrt{|g|}, \quad (2.46)$$

y el escalar de Ricci bajo la transformación (2.43) queda expresado en función de cantidades en 4 + 1 dimensiones como

$$\hat{R}' = \hat{g}'^{AB} \hat{R}'_{AB} = \omega^{-1} [\hat{R} - 4 \partial_A (\partial^A \ln \omega) - 3 \partial^A \ln \omega \partial_A \ln \omega]. \quad (2.47)$$

Ahora, se sustituye (2.46) y (2.47) en la acción

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int dy \int d^4x \sqrt{|g|} \phi^{1/2} \omega^{3/2} [\hat{R} - 4 \partial_A (\partial^A \ln \omega) - 3 \partial^A \ln \omega \partial_A \ln \omega], \quad (2.48)$$

de nuevo es conveniente escoger  $\omega = \phi^{-1/3}$  para obtener la parte gravitacional en su forma canónica tal como aparece en (2.32). La expansión de  $\hat{R}$  a través de la métrica  $\hat{g}_{AB}$  es el resultado ya obtenido (2.26) y en conjunto con la relación con el campo dilatón  $\sigma = -(1/\sqrt{3}) \ln \phi$  introducida en (2.34), se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{R} &= R + \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \ln \phi \partial^\mu \ln \phi \\ &= R + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma, \end{aligned} \quad (2.49)$$

aquí se procede a reescalar apropiadamente el campo escalar y electromagnético  $A_\mu \rightarrow \kappa A_\mu$ ,  $\sigma \rightarrow \kappa \sigma$  con  $\kappa = 4\sqrt{\pi\hat{G}}$ , y además se considera la relación entre la constante gravitacional y su representación en 5D:  $G = 2\pi r_0 \hat{G}$ , para dar lugar a la acción

$$S = -\frac{1}{2\pi r_0} \int d^4x \int dy \sqrt{|g|} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}\kappa\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{3}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \partial_A \sigma \partial^A \sigma - \frac{4}{\sqrt{3}} \partial_A (\partial^A \sigma) \right] \quad (2.50)$$

Se observa que los dos últimos términos en la expresión anterior tienen derivadas con respecto a la dimensión extra, por lo cual se aplica la compactificación de la quinta coordenada solo en el sector dilatón  $\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^{(n)} e^{iny/r_0}$  con  $0 < y < 2\pi r_0$ , que al sustituir en (2.50) resulta lo siguiente

$$S_\sigma = -\frac{\sqrt{|g|}}{2\pi r_0} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \int d^4x \int_0^{2\pi r_0} dy \left[ \left( -\frac{5}{2} \partial_\mu \sigma^{(n)} \partial^\mu \sigma^{(m)} + \frac{nm}{r_0^2} \sigma^{(n)} \sigma^{(m)} \right) e^{i(n+m)y/r_0} + \left( -\frac{4}{\sqrt{3}} \partial_\mu (\partial^\mu \sigma^{(n)}) + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{n^2}{r_0^2} \sigma^{(n)} \right) e^{iny/r_0} \right], \quad (2.51)$$

donde se identifica un elemento de superficie  $\partial_\mu (\partial^\mu \sigma^{(n)}) = (\sqrt{|g|})^{-1} \partial_\mu (\sqrt{|g|} \partial^\mu \sigma^{(n)})$  que por teorema de Gauss no contribuye a la acción. La integral sobre la quinta coordenada es equivalente a la solución encontrada en la sección 2.2, esto es

$$S_\sigma = - \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ -\frac{5}{2} \partial_\mu \sigma^{(0)} \partial^\mu \sigma^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -5 \partial_\mu \sigma^{(k)} \partial^\mu \sigma^{(k)} + \frac{2k^2}{r_0^2} \left( \sigma^{2(k)} + \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma^{(k)} \right) \right] \right\}. \quad (2.52)$$

Esta acción contiene un campo escalar no masivo  $\sigma^{(0)} = \sigma$  y un conjunto de campos masivos  $\sigma^{(k)}$  de masa  $m_k^2 = 2k^2/5r_0^2$ . Con  $r_0$  referido a la escala de la quinta dimensión, que en general se asume lo suficientemente pequeña para explicar su no observación experimental. Considerando solo los modos hasta  $k = 0, 1$  y la definición  $\sigma^{(1)} = \chi/\sqrt{10}$  y  $m_\chi^2 = 2/5r_0^2$ , la acción (2.50) para la teoría resulta en

$$S = - \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4} \left( 1 - \kappa\sqrt{3}\sigma - \kappa\sqrt{\frac{3}{10}}\chi \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{5}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} m_\chi^2 \left( \chi^2 - \frac{4}{\sqrt{30}} \chi \right) \right], \quad (2.53)$$

donde se expresa la exponencial como una serie de potencias,  $e^{-\sqrt{3}\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}\sigma)^k}{k!}$ , solo para primeros ordenes en los campos  $\sigma$  y  $\chi$ . El sector de gravedad, electromagnetismo y dilatón se identifica de la acción anterior como consecuencia de la inclusión del potencial electromagnético y campo escalar en una métrica con  $4 + 1$  dimensiones  $\hat{g}_{AB}$ . Adicionalmente un sector escalar masivo se deriva de la compactificación de la coordenada extra en un círculo de radio  $r_0$ . A este campo escalar  $\chi$  se asociará una partícula sin carga y con masa  $m_\chi = \sqrt{2}/\sqrt{5}r_0$ .

En términos del tensor  $h_{\mu\nu}$  para gravedad linealizada (ver sección 1.3.6), la acción se transforma en

$$S = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{32\pi G} \left( \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right) + \left( \eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} h \right) \left[ \left( 1 - \kappa\sqrt{3}\sigma - \kappa\sqrt{\frac{3}{10}}\chi \right) \left( \eta^{\nu\beta} - h^{\nu\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} h \right) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} - \frac{5}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\alpha \sigma - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial_\alpha \chi \right] + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \right\}, \quad (2.54)$$

que resulta del elemento de volumen  $\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h$ . Una expansión completa se realiza en el apéndice A. En la expresión 2.54 no se considera el último término

lineal en  $\chi$ , ya que no está acoplado a otros campos presentes y en tanto no será relevante en cálculos posteriores.

En este capítulo se presentó la teoría de Kaluza-Klein que unifica el electromagnetismo y la relatividad general, al incluirlos en un único tensor métrico para cinco dimensiones. La exigencia de mantener independientes los elementos de esta métrica con respecto a la quinta coordenada, dio como resultado las ecuaciones de movimiento para la interacción electromagnética y gravitacional, sin embargo para lograr esto es necesario introducir un campo escalar en la métrica para cinco dimensiones. La compactificación de la dimensión extra en una geometría circular y pequeña, permitió explicar su no contribución a la física definida para las cuatro dimensiones convencionales. La transformación conforme en conjunto con el mecanismo de compactificación enfocado en el sector dilatón, resultó en un número infinito de campos escalares con masas dependientes del radio de compactificación para la dimensión extra. El primer modo para este campo dilatónico masivo se asociará a una partícula que podría considerarse como candidato para resolver el problema de materia oscura. El formalismo para describir procesos que involucran las partículas asociadas a los campos hasta ahora estudiados, es el tema a tratar en el siguiente capítulo.

---



# Capítulo 3

## Formulación de la Integral de Camino

Para proceder a estudiar procesos que involucran los campos presentes en la teoría de Kaluza-Klein, desarrollada en el capítulo precedente, es necesario definir un mecanismo de cuantización. En teoría cuántica de campos, existe una descripción conveniente de la mecánica cuántica a través de la generalización de la acción vista en mecánica clásica. La idea surge del experimento de doble rendija, donde la amplitud total de transición desde un punto a otro, es la suma de las dos amplitudes para los dos caminos posibles. Un experimento mental, es pensar qué pasaría si existieran infinitas pantallas y a su vez cada una de ellas con infinitas rendijas, posicionadas entre la trayectoria de una partícula. La amplitud de transición en este caso es entonces la suma sobre todos los posibles caminos, que en el continuo se traduce en una integral de camino. Entre las ventajas de este formalismo, se encuentra la invariancia Lorentz intrínseca de la densidad Lagrangiana que entra en la integral de camino.

La formulación de Feynman de la mecánica cuántica usando la integral de camino se resume en la siguiente ecuación

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{iS[q(t)]}. \quad (3.1)$$

El significado de esta ecuación es: si se quiere calcular la amplitud en mecánica cuántica de una partícula puntual en el punto  $x_i$  y tiempo  $t_i$  para alcanzar el punto  $x_f$  en el instante  $t_f$ , se debe integrar sobre todos los posibles caminos que conectan estos puntos, con una función peso dada por la acción clásica. La expresión (3.1) luego es generalizada para más dimensiones y distintas partículas de forma directa, a través de la densidad Lagrangiana para la teoría de interés. Esta formulación de la mecánica cuántica es equivalente a la

---

formulación estándar desarrollada por Schrödinger y Heisenberg.

### 3.1. Integral de Camino

En mecánica cuántica la amplitud de propagación desde un punto  $q_I$  a un punto final  $q_F$  en un tiempo  $T$  está determinada por el operador unitario  $e^{-iHT}$ , siendo  $H$  el Hamiltoniano. En notación de Dirac, la amplitud es  $\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle$  y si el tiempo  $T$  se divide en  $N$  segmentos con duración  $\delta t = T/N$ , la amplitud queda expresada

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \langle q_F | e^{-iH\delta t} e^{-iH\delta t} \dots e^{-iH\delta t} | q_I \rangle, \quad (3.2)$$

con estados normalizados  $\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q)$ . El operador  $|q\rangle$  forma un conjunto completo de estados, por tanto se tiene  $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$ , que pueden insertarse entre los factores  $e^{-iH\delta t}$  y así obtener

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \langle q_F | e^{-iH\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\delta t} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q_I \rangle. \quad (3.3)$$

En el caso del Hamiltoniano  $H = \hat{p}^2/2m$ , donde  $\hat{p}$  es el operador momento con autoestado  $|p\rangle$ , que satisface la relación  $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$  y normalización  $\int (dp/2\pi) |p\rangle \langle p| = 1$ , se tiene para el factor  $j$ -ésimo

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | q_j \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\delta t(p^2/2m)} e^{ip(q_{j+1}-q_j)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

siendo  $p$  el autovalor que resulta de actuar sobre el estado  $|p\rangle$ , y el segundo factor proviene de la relación  $\langle q | p \rangle = e^{ipq}$ . Para resolver la integral (3.4) se hace uso de

$$\langle q_{j+1} | e^{-i\delta t(\hat{p}^2/2m)} | q_j \rangle = \left( \frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\delta t(m/2)[(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}, \quad (3.5)$$

presente  $N$  veces en (3.3), por lo cual

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \left( \frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \right) e^{i\delta t(m/2) \sum_{j=0}^{N-1} [(q_{j+1}-q_j)/\delta t]^2}. \quad (3.6)$$

Si  $N \rightarrow \infty$ , se define la integral sobre caminos como

$$\int \mathcal{D}q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-im}{2\pi\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \right), \quad (3.7)$$

y así la representación de integral de camino es

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{i \int_0^T dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2}. \quad (3.8)$$

Esto es, para obtener la amplitud de transición desde el punto  $q_I$  al punto  $q_F$  se debe integrar sobre todos los posibles caminos  $q(t)$ . El mismo procedimiento se sigue para una partícula interactuando con un potencial  $V(\hat{q})$ , entonces el Hamiltoniano toma la forma  $H = \hat{p}^2/2m + V(\hat{q})$ , que al sustituirse en (3.3) resulta

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{i \int_0^T dt [\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)]} = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS}. \quad (3.9)$$

En el límite clásico,  $S \gg \hbar$ , el camino que extremiza la acción domina la integral debido a que la fase de cualquier otro camino fluctúa rápidamente y diferentes contribuciones se cancelan entre sí.

### 3.1.1. Funcional Generador del Vacío

Un caso de interés es el estado base o vacío con amplitud  $\langle 0 | e^{-iHT} | 0 \rangle$ , con lo cual (3.9) toma la forma

$$Z = \langle 0 | e^{-iHT} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{-\int_{-\infty}^{\infty} dt [\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)]}. \quad (3.10)$$

A partir de este resultado es posible obtener una expresión para una teoría de campos, siguiendo un argumento análogo al ya presentado. La invariancia Lorentz junto con la premisa de que el Lagrangiano solo involucra derivadas de segundo orden, lleva a la forma del Lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$  y así la integral de camino para una teoría de campo escalar en un espacio-tiempo con dimensión  $d = (D + 1)$  es

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^d x \mathcal{L}} = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^d x [\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)]}. \quad (3.11)$$

El interés en esta formulación recae en la posibilidad de expresar procesos de creación y aniquilación de partículas en puntos del espacio-tiempo así como posibles interacciones, para esto se introducen las fuentes  $J(x)$  con el término  $J(x)\varphi(x)$  en el funcional generador

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^d x [\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) + J(x)\varphi(x)]}. \quad (3.12)$$

En particular,  $J(x)$  puede ser una función con valor distinto de cero solo para regiones localizadas del espacio-tiempo.

## 3.2. Teoría de Campo Escalar Libre

El Lagrangiano para la teoría de un campo escalar real libre es el siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2), \quad (3.13)$$

y su ecuación de movimiento es  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi$  obtenida a través de la ecuación de Euler-Lagrange. Esta ecuación admite soluciones de la forma  $\varphi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$  y es consistente con la relación de energía-momento para una partícula de masa  $m$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (3.14)$$

La densidad Lagrangiana (3.13), entra en el funcional generador (3.12) a través de la acción  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ , presente en el argumento de la exponencial

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\frac{1}{2}[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2] + J(x)\varphi(x))} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}\varphi(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi + J(x)\varphi(x)]}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esta última igualdad es resultado de la integración por partes, donde aparece un término de frontera que se anula al aplicar el teorema de Gauss. Ahora, para resolver (3.15) se usa el resultado para una integral de tipo Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \cdots dq_N e^{(i/2)q \cdot A \cdot q + iJ \cdot q} = \left( \frac{(2\pi i)^N}{\det[A]} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-(i/2)J \cdot A^{-1} \cdot J} = C e^{-(i/2)J \cdot A^{-1} \cdot J}, \quad (3.16)$$

que al ser comparada con (3.15), se observa que  $A$  corresponde con el operador diferencial  $-(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$ , y  $C = Z[0]$  el factor independiente de la fuente. El funcional generador  $Z[J]$  es entonces

$$Z[J] = Z[0] e^{-\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y)} = Z[0] e^{iW[J]}. \quad (3.17)$$

La función en el argumento de la exponencial se conoce como funcional generador de las funciones de Green conectadas y se define

$$W[J] = -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y). \quad (3.18)$$

La ecuación para la inversa,  $A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$  se representa en el límite continuo como

$$-(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D(x-y) = \delta^4(x-y), \quad (3.19)$$

donde la función  $D(x-y)$ , conocida como propagador, es la inversa de un operador diferencial y por tanto relacionada con la función de Green. En el espacio de momentos, los elementos en (3.19) son

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)}, \quad (3.20)$$

y

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D(k) e^{ik(x-y)}. \quad (3.21)$$

El propagador en el espacio de momentos para el teoría libre es entonces

$$D(k) = \frac{1}{k^\mu k_\mu - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.22)$$

el término  $i\epsilon$  se agrega para evitar que la función  $D(x)$  alcance un polo en  $k^2 = m^2$ . La magnitud de  $\epsilon$  no es importante, sin embargo su signo sí lo es. El integrando en (3.22) tiene dos polos en el plano complejo  $k^0$  para  $\pm\sqrt{\omega_k^2 - i\epsilon}$  con  $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  son iguales a  $\omega_k - i\epsilon$  y  $-\omega_k + i\epsilon$ . Entonces para  $\epsilon$  positivo, uno de los polos se localiza en la mitad del plano inferior y el otro polo en la mitad del plano superior. Con esto la exponencial en  $D(x)$  toma dos valores posibles para  $t$  y  $-t$ . El resultado en conjunto a través de la función de Heaviside  $\Theta(t)$  es

$$D(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \Theta(t) + e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \Theta(-t) \right]. \quad (3.23)$$

La función  $D(x)$  describe la amplitud para una perturbación en el campo que se propaga desde el origen hasta el punto  $x$ .

En el capítulo 2, se estudió la compactificación de una dimensión extra de tipo espacial en una geometría circular, que permitió obtener un conjunto de campos escalares reales masivos. La acción para el campo  $\chi$ , que es el primer modo de la torre de Kaluza-Klein para el sector dilatón, es la siguiente

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - m_\chi^2 \chi^2 \right], \quad (3.24)$$

que corresponde con la acción para un campo escalar libre. Siguiendo el mismo procedimiento anterior es directo obtener el propagador en el espacio de momentos

$$D(k) = \frac{1}{k^\mu k_\mu - m_\chi^2 + i\epsilon} \quad (3.25)$$

con  $m_\chi^2 = 2/5r_0^2$  la masa de la partícula asociada al campo  $\chi$  para el primer modo de la torre de Kaluza-Klein.

### 3.2.1. Propagador para la Teoría de Maxwell Masiva

El tratamiento aplicado a un campo escalar puede extenderse de forma análoga a campos de tipo tensorial como el campo electromagnético. La acción para el electromagnetismo con un fotón masivo es

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu + A_\mu J^\mu \right). \quad (3.26)$$

con término masivo  $m^2 A_\mu A^\mu$ , y se asume la conservación de corriente  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . A diferencia del electromagnetismo ordinario, la teoría masiva no es singular y por ello puede hallarse el propagador siguiendo métodos completamente análogos a los ya estudiados. La acción (3.26) puede reescribirse haciendo uso de integración por partes y la antisimetría del tensor de campo electromagnético  $\int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \int d^4x \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} = -2 \int d^4x A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$ , tal que

$$\begin{aligned} S(A) &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu + A_\mu J^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A_\nu (\partial_\mu \partial^\mu (A_\mu g^{\mu\nu}) - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + m^2 A_\mu g^{\mu\nu}) + A_\mu J^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A_\nu ((\partial^2 + m^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu + A_\mu J^\mu \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

y que al introducirse en el funcional generador resulta

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\nu [(\partial^2 + m^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] A_\mu + A_\mu J^\mu \right\}}. \quad (3.28)$$

El operador diferencial  $[(\partial^2 + m^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu]$  inversa del propagador  $D_{\nu\lambda}(x)$  sigue la relación en el espacio de momentos

$$[(-k^2 + m^2) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] D_{\nu\lambda}(k) = \delta_\lambda^\mu, \quad (3.29)$$

con solución de la forma  $D_{\nu\lambda}(k) = A g_{\nu\lambda} + B k_\nu k_\lambda$ . Una vez introducida esta solución en la ecuación, A y B toman los valores:  $A = \frac{-1}{k^2 - m^2}$  y  $B = \frac{1}{m^2(k^2 - m^2)}$ . Así pues, el propagador en espacio de momentos para la teoría de Maxwell masiva es

$$D_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda} + \frac{k_\nu k_\lambda}{m^2}}{k^2 - m^2}. \quad (3.30)$$

El propagador (3.30) presenta un problema al considerar el fotón no masivo, sin embargo en este caso esto no representará ningún inconveniente debido a la condición  $\partial_\mu J^\mu = 0 \leftrightarrow k_\mu J^\mu = 0$ , que anula convenientemente el término  $k_\mu k_\nu / m^2$  en el funcional

$$\begin{aligned} W(J) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} J^\nu(k) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} J_\mu(k). \end{aligned} \quad (3.31)$$

De esta manera para  $m = 0$ , la expresión (3.30) se reduce a

$$D_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (3.32)$$

y es la ecuación a usar como el propagador asociado al fotón. Esta expresión concuerda con la que se obtiene en la cuantización canónica al usar el calibre de Feynman.

Por otra parte, se propone una solución de onda plana en función del momento  $p$ , asociado al fotón

$$A^\mu(x) = a \exp[-ip_\mu x^\mu] \epsilon^\mu(p), \quad (3.33)$$

aquí  $\epsilon^\mu$  es el cuadrivector de polarización y  $a$  es un factor de normalización. El fotón libre satisface la ecuación

$$\square A^\mu = 0, \quad (3.34)$$

con  $j^\mu = 0$ , que resulta de la ecuación de onda. Es directo obtener de (3.34) la relación

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad (3.35)$$

que implica  $E = |\mathbf{p}|$ , característico de una partícula no masiva. Además, la condición Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , requiere que

$$p_\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (3.36)$$

conocida como condición de transversalidad. Adicionalmente en el calibre de Coulomb se tiene

$$\epsilon^0 = 0, \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad (3.38)$$

es decir, que el vector de polarización es perpendicular a la dirección de propagación, entonces el fotón libre está transversalmente polarizado. Existen dos vectores linealmente independientes que son perpendiculares a  $p$ , en el caso de que el momento solo apunta en la dirección  $z$ , puede escogerse

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(1)} = (1, 0, 0), \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(2)} = (0, 1, 0), \quad (3.40)$$

representando dos soluciones independientes para un momento  $p$ .

### 3.2.2. Propagador de la Teoría Relativista Linealizada

En la sección 1.3.6 se introdujo la posibilidad de describir la gravedad como una teoría de campo a través del tensor simétrico  $h_{\mu\nu}$ , que bajo una transformación de calibre sigue una estructura similar al campo electromagnético. La expansión del escalar de Ricci  $R$  considerando la métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , permite obtener la acción

$$S_G = \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{32\pi G} \left( \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right) - h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right]. \quad (3.41)$$

Se procede a integrar por partes, con lo cual la acción queda expresada

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{32\pi G} \left( h \partial_\lambda \partial^\lambda h - h^{\mu\nu} \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - h^{\nu\mu} \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} \right) - h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{32\pi G} \left[ -h_{\mu\nu} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}) \partial^2 h_{\lambda\sigma} \right] - h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

con el operador diferencial que satisface la relación

$$\frac{1}{2} \left[ k^2 (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}) \right] D_{\mu\nu, \omega\epsilon}(k) = \delta_\lambda^\omega \delta_\sigma^\epsilon, \quad (3.43)$$

para el cual se propone una solución de la forma  $D_{\mu\nu, \omega\epsilon}(k) = A(\eta_{\mu\omega} \eta_{\nu\epsilon} + \eta_{\mu\epsilon} \eta_{\nu\omega} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\epsilon\omega})$ , que al ser sustituida en (3.43), resulta  $A = \frac{1}{2k^2}$ . Así el propagador en el espacio de momentos es

$$D_{\mu\nu, \omega\epsilon}(k) = \frac{1}{2} \frac{\eta_{\mu\omega} \eta_{\nu\epsilon} + \eta_{\mu\epsilon} \eta_{\nu\omega} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\epsilon\omega}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (3.44)$$

para el campo  $h_{\mu\nu}$  asociado a una partícula sin masa con espín 2, conocida como gravitón.

Análogo al caso del fotón, que es descrito con un vector de polarización  $\epsilon_\mu$ , se propone una solución para el tensor simétrico  $h_{\mu\nu}$  de la forma

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \exp[-ik_\alpha x^\alpha], \quad (3.45)$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu}$  es un tensor de polarización. Al igual que en electromagnetismo, hay una condición de calibre que debe satisfacerse

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h, \quad (3.46)$$

consistente con las siguientes relaciones de traza nula

$$\eta^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = 0, \quad (3.47)$$

y transversalidad

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = \mathbf{0}, \quad (3.48)$$

con  $k$  el cuádrimomento para el gravitón.

### 3.3. Teoría con Interacciones ( $\lambda\phi^4$ )

La teoría de campo libre descrita en la sección anterior se resume en usar el resultado ya conocido de una integral de tipo Gaussiana, que corresponde a resolver la ecuación

para el oscilador armónico en mecánica cuántica. Ahora bien, en esta teoría las partículas asociadas no interactúan entre sí por lo que debe agregarse términos anarmónicos en el Lagrangiano, que resultará en una ecuación de movimiento de tipo no lineal. En el caso más simple se introduce el término anarmónico  $(-\lambda/4!)\varphi^4$ , tal que el funcional generador queda expresado

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - (\lambda/4!) \varphi^4 + J\varphi \right]}. \quad (3.49)$$

Para  $\lambda = 0$ , el funcional generador (3.49) se transforma en una integral de tipo Gaussiana, además si  $J = 0$  se obtiene el factor  $Z[0, 0]$ . Para tratar de evaluar la integral (3.49) se expande en términos de  $\lambda$

$$Z[J] = \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \varphi^8 + \dots \right] \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + J\varphi \right]}, \quad (3.50)$$

que es equivalente a expresar los campos  $\varphi$  como derivadas con respecto a la fuente  $J$  aplicadas a la exponencial, de la siguiente forma

$$Z[J] = \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \left( \frac{\delta}{\delta J(\omega)} \right)^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \left( \frac{\delta}{\delta J} \right)^8 + \dots \right] \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + J\varphi \right]} \quad (3.51)$$

y una vez aplicadas las derivadas se recupera la expresión (3.50). De (3.51), se identifica la integral para un campo escalar libre obtenida en la sección anterior, por lo que al usar el resultado (3.16) se tiene

$$Z[J] = Z[0, 0] e^{-(i/4!)\lambda \int d^4\omega [\delta/i\delta J(\omega)]^4} e^{-(i/2) \int \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y)}. \quad (3.52)$$

Por otra parte, si se expande  $Z[J]$  en términos de  $J$ , la potencia de  $J$  es indicativo del número de partículas involucradas en el proceso. Al expandir (3.49) en términos de  $J$  se tiene

$$Z[J] = Z[0, 0] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int dx_1 \dots dx_s J(x_1) \dots J(x_s) G^{(s)}(x_1, \dots, x_s), \quad (3.53)$$

donde  $G^{(s)}(x_1, \dots, x_s)$  representa la función de Green para  $s$ -puntos, definida como

$$G(x_1, \dots, x_s) \equiv \frac{1}{Z[0, 0]} \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - (\lambda/4!) \varphi^4 \right]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s). \quad (3.54)$$

Específicamente para dos y cuatro puntos la función de Green adquiere la forma

$$G(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{Z[0, 0]} \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - (\lambda/4!) \varphi^4 \right]} \varphi(x_1) \varphi(x_2), \quad (3.55)$$

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \frac{1}{Z[0, 0]} \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) - (\lambda/4!) \varphi^4 \right]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_4). \quad (3.56)$$

Es así como el funcional generador  $Z[J]$  genera las funciones de Green. Además podemos notar que las expresiones anteriores corresponden a promedios de operadores. Por invariancia traslacional,  $G(x_1, x_2)$  no depende de  $x_1$  y  $x_2$ , pero si de  $x_1 - x_2$ . De igual manera,  $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$  solo depende de las diferencias  $x_1 - x_4$ ,  $x_2 - x_4$  y  $x_3 - x_4$ . Si  $\lambda = 0$ ,  $G(x_1, x_2)$  se reduce a  $iD(x_1 - x_2)$ , el propagador introducido anteriormente. Mientras que  $D(x_1, x_2)$  describe la propagación de una partícula entre  $x_1$  y  $x_2$  en la ausencia de interacción,  $G(x_1, x_2)$  describe la propagación de una partícula entre  $x_1$  y  $x_2$  en presencia de interacción. Análogamente, la función  $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$  describe la dispersión de dos partículas. Si existen interacciones, el funcional generador tiene correcciones adicionales a la cantidad  $Z_0[J]$  derivada de una teoría libre. Estas correcciones son proporcionales al término  $\lambda$  y estarán dados por derivadas de la fuente  $J$  aplicada sobre la función  $e^{iW(J)}$  (ver apéndice B).

Un ejemplo es el caso de dispersión de dos partículas asociadas al campo  $\varphi$  ( figura 3.1).

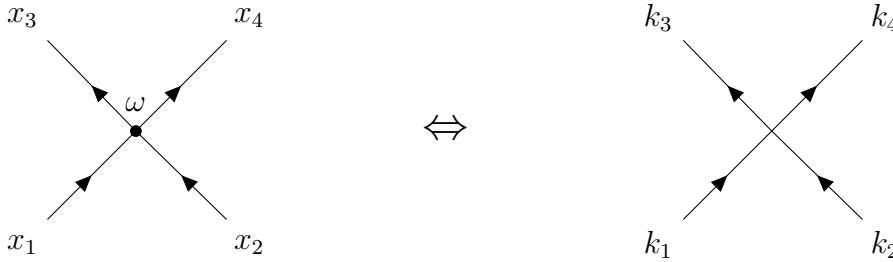


Figura 3.1: Diagrama para dispersión de partículas.

Para este caso, es suficiente encontrar el término con  $J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4)$  en el funcional generador  $Z[J]$ , que a su vez corresponde a la función de Green

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4)^{(4)} &= \frac{1}{Z_0[0]} \left( -\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^4\omega \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)]} \\ &= -\lambda \int d^4\omega D(x_1 - \omega)D(x_2 - \omega)D(\omega - x_3)D(\omega - x_4). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esto se interpreta como dos partículas creadas en  $x_1$  y  $x_2$ , que se propagan hasta el punto en el espacio-tiempo  $\omega$  con amplitud  $D(x_1 - \omega)D(x_2 - \omega)$ , se dispersan con amplitud  $-\lambda$  y finalmente se propagan desde  $\omega$  hasta sus puntos de aniquilación ubicados en  $x_3$  y  $x_4$ . La integración sobre  $\omega$  significa que la interacción puede ocurrir en cualquier punto del espacio-tiempo. En el espacio de momentos se encuentra que los propagadores son

$$D(x_i - \omega) = \int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_i(x_i - \omega)}}{k_i^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.58)$$

haciendo que la integral sobre  $\omega$  en (3.57) se transforme en

$$\int d^4\omega e^{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)\omega} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4), \quad (3.59)$$

que se traduce en la conservación de momento  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$  (el signo menos en  $k_3$  y  $k_4$  indica que se trata de momentos salientes comparados con los momentos  $k_1$  y  $k_2$ ).

### 3.3.1. Reglas de Feynman para la teoría $\lambda\phi^4$

Cuando se calculan cantidades para un proceso, primero se representan gráficamente los diagramas de Feynman correspondientes al mismo. Luego siguiendo las reglas de Feynman se buscan los elementos geométricos constituyentes de estos diagramas. El producto de las reglas de Feynman da lugar a  $i$  veces la amplitud  $\mathcal{M}$  para el diagrama de interés. Si un proceso físico tiene más de un diagrama posible, la amplitud de cada uno de estos diagramas debe agregarse.

Para una teoría que solo involucra la interacción de campos escalares  $\varphi$ , se tienen las siguientes reglas de Feynman en el espacio de momentos:

1. Dibujar el diagrama para el proceso de interés.
2. Etiquetar cada línea externa con  $k_i$  y cada línea interna con  $q_i$ .
3. A cada propagador interno se asocia

$$\frac{-i}{q_i^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.60)$$

4. A cada vértice se le asocia un factor  $-i\lambda$ , así como la conservación de momento para el vértice correspondiente

$$(2\pi)^4 \delta^4\left(\sum k_i - \sum k_f\right), \quad (3.61)$$

donde  $i$  y  $f$  es la suma sobre los momentos iniciales y finales respectivamente.

5. Se integra sobre cada momento interno

$$\int \frac{d^4q_i}{(2\pi)^4}. \quad (3.62)$$

6. Se agrega un factor de simetría apropiado.

La amplitud de Feynman  $\mathcal{M}$  no es la amplitud de transición en el sentido descrito para mecánica cuántica, cuyo módulo al cuadrado proporciona la probabilidad de transición. La probabilidad de transición debe ser adimensional, mientras que la amplitud Feynman en general no lo es. La amplitud de mecánica cuántica puede obtenerse al multiplicar la amplitud de Feynman por ciertos factores que no dependerán de la interacción.

Un ejemplo, es el diagrama de Feynman en la figura 3.2 que ocurre a orden  $\lambda^2$ . En él se identifican seis partículas  $k_i$  entre iniciales y resultantes, dos vértices y un momento interno  $q$ . El producto de las reglas de Feynman lleva a la siguiente expresión

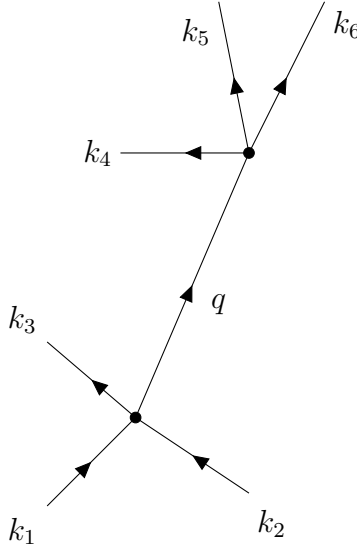


Figura 3.2: Ejemplo diagrama de Feynman a nivel árbol

$$\begin{aligned}
 &= S \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-\lambda)^2 \left( \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - q) \delta^4(q - k_4 - k_5 - k_6) \\
 &= (-i\lambda)^2 \frac{i}{(k_4 + k_5 + k_6)^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4 - k_5 - k_6). \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

La amplitud de Feynman para este proceso es

$$\mathcal{M} = (-i\lambda)^2 \frac{i}{(k_4 + k_5 + k_6)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.64)$$

dependiente de los momentos finales y el vértice  $\lambda$ . Las reglas y diagramas de Feynman son así una forma conveniente de representar  $Z[J]$ , en términos de una doble expansión en serie de  $\lambda$  y  $J$ , con el objetivo de construir la amplitud de transición para un proceso

---

determinado.

El propósito de este capítulo fue introducir los conceptos de la formulación de la integral de camino, mediante el funcional generador  $Z[J]$  definido como la exponencial de la acción clásica, e integrado sobre todas las trayectorias o caminos posibles. Se analizaron los casos de campos escalares y tensoriales, como el potencial electromagnético y el campo  $h_{\mu\nu}$  para gravedad, mediadores de sus partículas asociadas: fotón y gravitón respectivamente. Se obtuvieron los propagadores, siendo una función que especifica la probabilidad de una partícula de moverse desde un punto a otro con una cierta energía y momento, y que estará presente en procesos que involucren partículas virtuales. Las interacciones entre partículas están descritas por términos de interacción en el Lagrangiano, que incluyen sus campos correspondientes. Por último, cada interacción puede ser representada visualmente mediante los llamados diagramas de Feynman, que funcionan como herramientas para calcular la amplitud de transición de un proceso. Una vez conocida la amplitud de Feynman, es posible obtener cantidades de medición como tasas de decaimiento y secciones eficaces para procesos de interés.

---



# Capítulo 4

## Materia Oscura y Partícula de Kaluza-Klein

En el presente capítulo, se abordará el problema de materia oscura a través de las evidencias sobre su existencia y los posibles candidatos que han sido propuestos, basados en las propiedades observadas para este tipo de materia. Se presenta la partícula de Kaluza-Klein como solución a esta problemática y se procede a calcular secciones eficaces para procesos derivados de los términos de interacción en la acción obtenida en el capítulo 2. Esto se realiza cuantizando la teoría aplicando el formalismo de la integral de camino desarrollado en el capítulo 3.

El entendimiento del universo cambió al descubrir que la materia bariónica ordinaria representa solo una pequeña proporción del contenido material en el universo. Una forma de materia imposible de detectar a través de relaciones de masa-luminosidad y por ello conocida como materia oscura, ocupa gran parte del universo conocido y es, en algunos casos, hasta diez veces más abundante que la materia luminosa. Aunque la materia oscura no ha sido detectada experimentalmente, múltiples evidencias apuntan a su influencia gravitacional en galaxias y estructuras mayores a nivel cósmico. El estudio de materia oscura requiere un esfuerzo conjunto de distintas ramas de la física y la astronomía. La creación de la materia oscura durante la expansión caliente del universo se entiende a través de la mecánica estadística y termodinámica. La física de partículas es necesaria para proponer candidatos para materia oscura y explorar sus posibles interacciones con la materia ordinaria. La relatividad general, astrofísica y cosmología dictan cómo la materia oscura actúa a grandes escalas y cómo el universo puede ser visto como un laboratorio para su estudio.

---

## 4.1. Antecedentes y Primeras Indicaciones

La fotometría ha sido usada por astrónomos para realizar estimaciones de masa sobre cuerpos distantes. Al medir la intensidad de luz proveniente de un objeto, como una galaxia o cúmulos de galaxias, pueden usarse relaciones de masa-luminosidad conocidas para estimar la masa del objeto. Una vez determinada la masa, pueden realizarse cálculos sobre el movimiento de estrellas u otras estructuras en galaxias mediante la interacción gravitacional. Esto fue lo realizado en 1932 por el astrónomo Jan Oort[10], quien postuló que debía existir mayor presencia de masa en la Vía Láctea para explicar las órbitas observadas de las estrellas en la galaxia. A través del efecto Doppler calculó las velocidades de estrellas moviéndose cerca del plano galáctico, descubriendo en el proceso que deberían moverse lo suficientemente rápido para escapar de la atracción gravitacional producto de la materia luminosa en la galaxia. La materia visible solo contribuía a un 40% de la masa requerida para explicar el movimiento de las estrellas. En su momento Oort expresó poca preocupación sobre este hecho al asumir que la masa faltante podría estar asociada a estrellas muy tenues y gas interestelar. Contemporáneo a Oort, el astrónomo Zwicky[11] encontró indicaciones similares sobre un tipo de masa desconocida pero a una escala mayor. Zwicky estudió el cúmulo de Coma, ubicado a 322 millones de años luz de la Tierra, y usando el efecto Doppler en el espectro galáctico, fue capaz de calcular la velocidad de dispersión de las galaxias que conforman este cúmulo. Una vez conocida la velocidad de las galaxias individuales, empleó el teorema virial para calcular la masa del cúmulo. Asumió solo la interacción gravitacional a través de la gravedad Newtoniana, que lleva a la siguiente relación conocida como teorema virial

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle, \quad (4.1)$$

donde  $\langle T \rangle$  es el promedio de la energía cinética y  $\langle U \rangle$  el promedio de la energía potencial. Luego usó la relación de masa-luminosidad para las galaxias individuales y estimó la masa de la materia luminosa en cada una. Estas dos mediciones mostraron una enorme discrepancia, que le llevo a concluir que la mayoría de la masa en el cúmulo Coma estaba por alguna razón perdida o se trataba de algún tipo de materia no luminosa.

El estudio realizado por Vera Rubin[12] sobre curvas de rotación en galaxias espirales muestra una evidencia aún más significativa de la presencia de materia oscura en este tipo de galaxias. El análisis de una curva de rotación para una galaxia espiral, se basa en la medida de la velocidad rotacional  $\nu(r)$  de una estrella o gas en la galaxia como una función de su distancia  $r$  desde el centro galáctico. En esta situación existe un balance

entre la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga dada por la ecuación

$$\frac{m\nu(r)^2}{r} = \frac{GmM_{<r}}{r^2}, \quad (4.2)$$

donde  $M_{<r}$  es la masa encerrada por una esfera de radio  $r$ . Una galaxia espiral tiene una región central densa, por lo tanto si una estrella se encuentra dentro de esta región entonces  $M_{<r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , con  $\rho$  la densidad de masa. Así se esperaría una velocidad

$$\nu(r) \sim r, \quad (4.3)$$

derivada de (4.2). Por otra parte, si una estrella se encuentra fuera de la región central, la masa  $M_{<r}$  puede tomarse como un valor constante y en tanto de (4.2) se obtiene

$$\nu(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (4.4)$$

De esta forma la variación de  $\nu(r)$  con respecto a  $r$  para una galaxia espiral, debería mostrar un incremento inicial (4.3) y luego presentaría un decrecimiento proporcional a (4.4), al aumentar la distancia  $r$  al centro galáctico. No obstante, las medidas observacionales muestran un comportamiento constante de  $\nu(r)$  a partir de una cierta distancia del centro, por lo que de (4.2) se obtiene  $M_{<r} \sim r$ , lo que indica una enorme cantidad de materia invisible. La materia oscura no solo está presente en las galaxias espirales, investigaciones posteriores han revelado la presencia de materia oscura en galaxias enanas y galaxias elípticas en porcentajes que van desde el 50 al 90 por ciento de la materia constituyente de estas estructuras [13, 14].

La existencia de una materia no visible también es evidente a través del fenómeno de lentes gravitacionales. Una lente gravitacional es una consecuencia de la teoría de relatividad general de Einstein, en el cual la gravedad de objetos masivos induce una curvatura del espacio-tiempo en su vecindad. Mientras mayor es la influencia gravitacional, mayor es la distorsión de la geometría del espacio-tiempo, sugiriendo la presencia de un objeto muy masivo. Si la luz de un objeto distante se mueve en este espacio-tiempo curvado, seguirá esta curvatura local dando lugar a un efecto de lente que se manifiesta con la aparición de múltiples imágenes del objeto alrededor de la masa gravitacional que causa el lente. Astrónomos han encontrado este fenómeno al observar ciertos cúmulos de galaxias y en algunos casos una enorme cantidad de masa permanece invisible, indicativo de grandes concentraciones de materia oscura.

En relación a la proporción de abundancia entre materia oscura y bariónica, las mediciones de anisotropías en la radiación cósmica de fondo de Microondas (CMBR) ofrece

una estimación de las cantidades de materia presente en el universo. La CMBR es la radiación primordial del universo temprano en la etapa donde los electrones libres comenzaron a combinarse con iones y átomos, permitiendo a los fotones viajar libremente sin ser dispersados. La longitud de onda de estos fotones sufre una elongación producto de la expansión del universo, por lo que en la presente época la longitud de onda de los fotones primordiales se encuentra en el orden de microondas. En principio la CMBR debería ser uniforme en toda dirección del universo, sin embargo cualquier no-uniformidad (anisotropía) por pequeña que sea, es indicativo de diferentes concentraciones de masa. El análisis de data observacional de proyectos satelitales que buscan por estas pequeñas anisotropías (WMAP o más reciente el satélite PLANCK [16, 17]), sugieren que alrededor de 27% del contenido de masa-energía del universo lo constituye la materia oscura, mientras que cerca de un 4% corresponde al resto de la masa conocida, que incluye estrellas, cúmulos y supercúmulos de galaxias, entre otros. El restante 69% se asocia a una energía desconocida denominada energía oscura que se presume es responsable de la expansión acelerada del universo.

## 4.2. Candidatos a Materia Oscura

Posibles candidatos a materia oscura son los denominados MACHOs (MAssive Compact Halo Objets), que son objetos astrofísicos constituidos por materia bariónica ordinaria. Como una de las principales características de la materia oscura es que debe ser no visible, estos posibles candidatos incluyen enanas marrones, estrellas de neutrones, agujeros negros y planetas errantes. En la búsqueda de estos objetos, dos colaboraciones: MACHO Collaboration y EROS-2 Survey han observado microlentes gravitacionales, esto es, el cambio en la intensidad luminosa de un objeto distante debido a la interferencia de un objeto cercano a este. Los resultados de MACHO Collaboration muestran solo 13-17 eventos de este tipo en 11.9 millones de estrellas estudiadas [18]. En 2007, EROS-2 Survey reportó solo un candidato de microlente en los 7 millones de estrellas observadas [19]. Este número de posibles MACHOs solo puede contribuir a un pequeño porcentaje de la materia no luminosa en la galaxia, revelando que la materia oscura no puede estar densamente concentrada o existir en la forma de objetos astrofísicos de tipo bariónico.

Las partículas del modelo estándar podrían considerarse como otra posibilidad en la búsqueda de la naturaleza de la materia oscura, siendo un modelo probado hasta energías de 1 TeV. Sin embargo, de las 17 partículas del modelo estándar confirmadas experimentalmente, solo los neutrinos se ajustan a las propiedades de la materia oscura deducidas

---

de las observaciones cosmológicas. Los neutrinos son partículas sin carga, con masa casi despreciable y que interactúan con el resto de la materia vía la interacción débil e interacción gravitacional. Por otra parte, las mediciones sobre su abundancia muestran que solo podrían contribuir en un 1% del contenido total de materia oscura en el universo. Es así como la materia oscura, o al menos en su mayoría, no pertenece a las partículas fundamentales, de otra forma sus interacciones pertenecerían al modelo estándar, haciendo posible su detección con las técnicas experimentales actuales. Además la invisibilidad de la materia oscura indica su incapacidad de emisión de radiación o interacción electromagnética, sugiriendo que debe tratarse de partículas neutrales. Por todo esto, deben invocarse teorías más allá del modelo estándar que permitan predecir una partícula candidata que se ajuste a las características conocidas. Según el tipo de materia oscura se han propuesto las siguientes categorías:

- **Materia oscura bariónica**

- **Materia oscura no bariónica**, que se divide en tres tipos distintos:

- Materia oscura caliente: partículas no bariónicas que se mueven con velocidades ultrarrelativistas.

- Materia oscura templada: partículas no bariónicas que se mueven con velocidades relativistas.

- Materia oscura fría: partículas no bariónicas que no se mueven relativísticamente.

El problema con la materia oscura caliente es que no puede explicar cómo se formaron las galaxias desde el Big Bang. La radiación de fondo de microondas es increíblemente homogénea: indica que la materia se ha agrupado en escalas muy pequeñas. Sin embargo, las partículas de movimiento rápido no pueden agruparse en tales pequeñas escalas y, de hecho, suprimen la agrupación de otra materia. Con la materia oscura fría, las estructuras crecen jerárquicamente desde pequeños objetos colapsando por su propia gravedad para así formar estructuras mayores. Las predicciones realizadas con la materia oscura fría como modelo principal concuerdan con las observaciones sobre las estructuras cosmológicas a gran escala [15]. El punto de vista más aceptado es que la materia oscura es principalmente no bariónica, compuesta de una o más partículas elementales distintas de las normales (electrones, protones, neutrones y los neutrinos conocidos). Las partículas propuestas más comunes son los axiones, neutrinos estériles y WIMPs (partículas masivas de interacción débil). Ninguna de estas es parte del modelo estándar de física de partículas, pero pueden aparecer en ampliaciones del modelo. Por otra parte, los esfuerzos experimentales en la

---

búsqueda de estos candidatos pueden dividirse en dos tipos: detección directa, en los que las partículas de materia oscuras se observan en un detector; y la detección indirecta, que busca los productos de aniquilaciones de materia oscura.

Las propiedades de las partículas de materia oscura pueden resumirse en:

- La materia oscura es un objeto no luminoso. No tiene interacción con fotones y es incapaz de emitir radiación electromagnética.
- Sus partículas constituyentes no tienen carga, lo que explicaría su no interacción electromagnética.
- Las partículas de materia oscura son estables; de otra forma es posible que un decaimiento en partículas fundamentales sería detectado.
- Son partículas masivas, en el caso de pertenecer a la materia oscura fría (no relativista).

Una partícula candidata a materia oscura deriva de las teorías de dimensiones extras espaciales. La idea de que el universo puede tener dimensiones extras comenzó con Kaluza y Klein al escribir la relatividad general en cinco dimensiones, siendo capaces de obtener gravedad en cuatro dimensiones, las ecuaciones de Maxwell y una partícula escalar extra. Klein explicó la no observación de la quinta dimensión al compactificarla en un círculo con un radio  $r_0$  extremadamente pequeño. En teorías con dimensiones extras compactificadas, las partículas pueden propagarse en estas dimensiones extras y tener su momento cuantizado como  $p^2 \sim 1/r_0^2$ . Por tanto, para cada partícula libre de moverse en estas dimensiones aparecen un conjunto de modos de Fourier llamados estados de Kaluza-Klein. Estos modos tienen una masa que viene dada por

$$m^2 \sim \frac{k^2}{r_0^2}, \quad (4.5)$$

siendo el procedimiento desarrollado en el capítulo 2. La idea de postular al dilatón como candidato a materia oscura fue por primera vez desarrollada por Y. M. Cho en su trabajo *Dilatonic Dark Matter*, donde relaciona al dilatón con el gravitón como fuente de la interacción gravitacional, y procede a calcular secciones eficaces para algunos procesos de interacción de materia oscura con fotones y electrones [20].

### 4.3. Partícula de Kaluza-Klein como candidato a Materia Oscura

Una propiedad de la partícula de Kaluza-Klein (KK), que denotaremos  $\chi$ , y que la convierte en un posible candidato a materia oscura es su masa dependiente del radio de compactificación. Si el radio de la quinta coordenada es lo suficientemente pequeño, la masa de la partícula alcanza un valor en el rango de los miles de gigaelectrovoltios. Asimismo, al tratarse de un campo escalar sin carga, la interacción electromagnética es inexistente, lo que concuerda con la no luminosidad de la materia oscura.

En la sección 2.3, se encontró una partícula asociada a un campo escalar masivo  $\chi$  con masa  $m_\chi^2 = 2/5r_0^2$ . Este campo representa el primer modo o estado de Kaluza-Klein ( $k = 1$ ) obtenido al aplicar la compactificación del sector dilatón en la acción en cinco dimensiones, que a su vez fue resultado del mecanismo de Kaluza. La acción en cuestión contiene un sector gravedad  $h_{\mu\nu}$ , electromagnetismo  $A_\mu$  y de campos escalares  $\chi$  y  $\sigma$ , de la forma

$$\begin{aligned}
 S = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{32\pi G} \left( \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right) + \left( \eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} h \right) \right. \\
 \left[ \left( 1 - \kappa\sqrt{3}\sigma - \kappa\sqrt{\frac{3}{10}}\chi \right) \left( \eta^{\nu\beta} - h^{\nu\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} h \right) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right. \\
 \left. \left. - \frac{5}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\alpha \sigma - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial_\alpha \chi \right] + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \right\}, \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

De esta acción se identifican términos de interacción del campo  $\chi$  con el campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left( \kappa\sqrt{3}\sigma + \kappa\sqrt{\frac{3}{10}}\chi + \dots \right), \quad (4.7)$$

donde los puntos suspensivos indican posibles términos de interacción con ordenes superiores para los campos  $\sigma$  y  $\chi$ . Por otra parte, también existen términos de interacción que incluyen la presencia del gravitón mediado por el campo  $h_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4} g_\kappa \chi F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \left( \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} + \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h \right). \quad (4.8)$$

donde  $h$  es la traza del tensor  $h_{\mu\nu}$ . Aunque existen otros tipos de interacción posibles a través de la acción (4.6), en este trabajo solo habrá enfoque en procesos que involucren la interacción electromagnética.

En resumen, nuestra hipótesis de trabajo es que el campo escalar (dilatón) de la teoría de Kaluza-Klein es nuestro candidato a materia oscura. Debido a la forma que tiene la acción (4.6), existen acoples del dilatón con el campo de Maxwell aunque el campo escalar es real y por lo tanto no tiene carga eléctrica. Lo que haremos a continuación es calcular algunas secciones eficaces usando las reglas de Feynman para esta teoría.

### 4.3.1. Secciones Eficaces

A continuación se consideran los procesos que involucran la partícula de Kaluza-Klein, considerando los términos de interacción para la acción resultante de la teoría de Kaluza-Klein (Apéndice A). Para realizar esto se utiliza la regla de oro de Fermi que permitirá realizar el cálculo de secciones eficaces.

#### Regla de Oro de Fermi y Sección Eficaz

La tasa de transición para un proceso dado está determinada por la regla de oro de Fermi

$$\text{Tasa de transición} = 2\pi |\mathcal{M}|^2 \times (\text{Espacio de fase}). \quad (4.9)$$

Para calcular tasas de decaimiento o secciones eficaces, se requiere de la amplitud  $\mathcal{M}$  para el proceso y el espacio de fase, en la configuración mostrada en (4.9). La amplitud contiene toda la información dinámica, que se calcula al evaluar los diagramas de Feynman relevantes. Por otra parte, el espacio de fase contiene solo la información cinemática, que depende de las masas, energías y momentos de las partículas. En el caso de un proceso donde dos partículas interactúan produciendo dos partículas en el estado final

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (4.10)$$

se tiene la siguiente sección eficaz

$$\sigma = \frac{1}{v_{rel}} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2 \quad (4.11)$$

donde  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$  es el cuadrimomento para la  $i$ -ésima partícula con masa  $m_i$ , por tanto su energía sigue la relación  $E_i^2 = m_i^2 + \mathbf{p}_i^2$ . Para una partícula no masiva la energía se reduce a  $E_i^2 = p_i^2$ . La sección eficaz es una medida de la probabilidad para que ocurra un evento. El número de eventos por segundo  $N_{ev}$ , para un resultado en específico está dado por

$$N_{ev} = L \cdot \sigma \quad (4.12)$$

donde  $L$  es la luminosidad, cuyo valor es característico del desempeño de un acelerador de partículas. En el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), el más grande y energético

acelerador y colisionador de partículas actualmente, la luminosidad alcanza valores de  $10^{34}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ , siendo hasta dos ordenes de magnitud mayor en comparación con otros aceleradores.

### Proceso de Aniquilación

Un diagrama de Feynman permitido por la acción, es la aniquilación de dos partículas de Kaluza-Klein en dos fotones, con un fotón en el estado intermedio (figura 4.1). Existen dos diagramas que resultan del término de interacción en el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}g_\kappa \chi F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

con  $g_\kappa = \sqrt{\frac{3}{10}}\kappa$ . De la figura 4.1a se identifican dos vértices

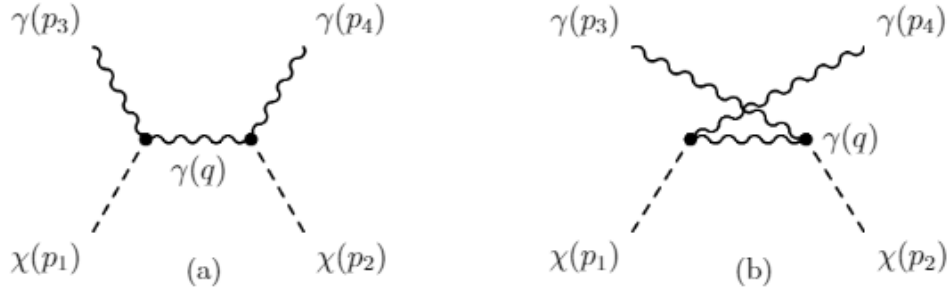


Figura 4.1: Diagramas de aniquilación de partículas de Kaluza-Klein a nivel árbol

$$\begin{array}{c} \gamma(p_3) \\ \diagup \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_1) \end{array} \begin{array}{c} \gamma(q) \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_2) \end{array} \begin{array}{c} \gamma(p_4) \\ \diagup \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_2) \end{array} \quad = \quad i g_\kappa (\eta^{\gamma\sigma} p_3^\mu q_\mu - p_3^\gamma q^\sigma), \quad (4.14)$$

y

$$\begin{array}{c} \gamma(p_4) \\ \diagup \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_2) \end{array} \begin{array}{c} \gamma(q) \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_1) \end{array} \begin{array}{c} \gamma(p_3) \\ \diagup \\ \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \\ \chi(p_1) \end{array} \quad = \quad i g_\kappa (\eta^{\alpha\sigma} p_4^\mu q_\mu - p_4^\alpha q^\sigma). \quad (4.15)$$

La amplitud construida siguiendo las reglas de Feynman para el primer diagrama (4.1a)

es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & \frac{g_\kappa^2}{(p_1 - p_3)^2} \epsilon_\alpha^{(s)*}(3) [\eta^{\alpha\gamma} p_3^\mu (p_1 - p_3)_\mu - p_3^\alpha (p_1 - p_3)^\gamma] \\ & \eta_{\gamma\sigma} [\eta^{\rho\sigma} p_4^\nu (p_1 - p_3)_\nu - p_4^\rho (p_1 - p_3)^\sigma] \epsilon_\rho^{(s)*}(4), \end{aligned} \quad (4.16)$$

mientras que para el segundo diagrama (4.1b) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 = & \frac{g_\kappa^2}{(p_1 - p_4)^2} \epsilon_\alpha^{(s)*}(4) [\eta^{\alpha\gamma} p_4^\mu (p_1 - p_4)_\mu - p_4^\alpha (p_1 - p_4)^\gamma] \\ & \eta_{\gamma\sigma} [\eta^{\rho\sigma} p_3^\nu (p_1 - p_4)_\nu - p_3^\rho (p_1 - p_4)^\sigma] \epsilon_\rho^{(s)*}(3), \end{aligned} \quad (4.17)$$

que corresponde al intercambio de los momentos para los fotones resultantes. Usando la condición de transversalidad  $\epsilon_\alpha^{(s)*}(3)p_3^\alpha = \epsilon_\rho^{(s)*}(4)p_4^\rho = 0$ , la amplitud total  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  se reduce a

$$\mathcal{M} = g_\kappa^2 \epsilon_\alpha^{(s)*\rho}(3) \epsilon_\rho^{(s)*}(4) \left[ \frac{p_3^\mu (p_1 - p_3)_\mu p_4^\nu (p_1 - p_3)_\nu}{(p_1 - p_3)^2} + \frac{p_4^\mu (p_1 - p_4)_\mu p_3^\nu (p_1 - p_4)_\nu}{(p_1 - p_4)^2} \right], \quad (4.18)$$

donde  $s = 1, 2$  representa los dos estados de polarización posibles para los fotones. La sección eficaz para este proceso se calcula siguiendo la ecuación (4.11)

$$\sigma_{v_{rel}} = \frac{1}{64\pi^2 E_1 E_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{E_4} \sum_{s=1,2} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (4.19)$$

donde la función delta puede separarse en su parte temporal y espacial

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4). \quad (4.20)$$

Es conveniente escoger el sistema de centro de masa para evaluar la integral en (4.19). En este sistema de referencia los momentos iniciales siguen la relación  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ , por tanto de (4.20) se obtiene de igual forma  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$  para los momentos finales. En consideración con lo anterior, se escogen los siguientes momentos

$$p_1 = (E_1, 0, 0, |\mathbf{p}_1|), \quad (4.21)$$

$$p_2 = (E_2, 0, 0, -|\mathbf{p}_1|), \quad (4.22)$$

$$p_3 = (|\mathbf{p}_4|, -|\mathbf{p}_4| \sin \theta, 0, -|\mathbf{p}_4| \cos \theta), \quad (4.23)$$

$$p_4 = (|\mathbf{p}_4|, |\mathbf{p}_4| \sin \theta, 0, |\mathbf{p}_4| \cos \theta), \quad (4.24)$$

con  $E_1 = E_2 = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{p}_1|^2}$ . Además se escogen las siguientes polarizaciones

$$\epsilon_\alpha^{(1)*}(3) = \epsilon_\rho^{(1)*}(4) = (0, 0, 1, 0), \quad (4.25)$$

$$\epsilon_\alpha^{(2)*}(3) = \epsilon_\rho^{(2)*}(4) = (0, -\cos \theta, 0, \sin \theta). \quad (4.26)$$

Así, la parte temporal de la función delta toma la forma

$$\begin{aligned}\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) &= \delta\left(2\sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{p}_1|^2} - 2|\mathbf{p}_4|\right) \\ &= \frac{1}{2}\delta\left(|\mathbf{p}_4| - \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{p}_1|^2}\right).\end{aligned}\quad (4.27)$$

y la suma sobre polarizaciones en (4.19) es la siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{s=1,2} \left[\epsilon^{(s)*\rho}(3)\epsilon_\rho^{(s)*}(4)\right]^2 &= \left[\epsilon^{(1)*\rho}(3)\epsilon_\rho^{(1)*}(4)\right]^2 + \left[\epsilon^{(2)*\rho}(3)\epsilon_\rho^{(2)*}(4)\right]^2 \\ &= 2\end{aligned}\quad (4.28)$$

Ahora, usando coordenadas esféricas, tal que  $d^3\mathbf{p}_4 = |\mathbf{p}_4|^2 d|\mathbf{p}_4| d\Omega$ , se obtiene la expresión para la sección eficaz diferencial

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} v_{rel} &= \frac{g_\kappa^4 (m_\chi^2 + p^2)}{32\pi^2} \left[ \frac{\left(\sqrt{m_\chi^2 + p^2} + p \cos \theta\right)^2}{m_\chi^2 + 2p^2 + 2p\sqrt{m_\chi^2 + p^2} \cos \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\sqrt{m_\chi^2 + p^2} - p \cos \theta\right)^2}{m_\chi^2 + 2p^2 - 2p\sqrt{m_\chi^2 + p^2} \cos \theta} \right]^2,\end{aligned}\quad (4.29)$$

esto al evaluar la integral con la función delta (4.20) y así  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_4| = p$ . La integración sobre el ángulo de dispersión  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , resulta en la sección eficaz para este proceso. Una vez efectuada la descomposición de (4.29) en fracciones simples, la integral a calcular es igual a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 dx &\left[ \frac{49E^{12} + 112E^{10}p^2 + 50E^8p^4 - 44E^6p^6 - 31E^4p^8 + 4E^2p^{10} + 4p^{12}}{8E^2 (E^4 + 4E^2p^2x^2 + 2E^2p^2 + p^4)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3E^2 - 2p^2)^2}{8E^2} - \frac{21E^8 + 10E^6p^2 - 19E^4p^4 - 4E^2p^6 + 4p^8}{4E^2 (E^4 + 4E^2p^2x^2 + 2E^2p^2 + p^4)} \right],\end{aligned}\quad (4.30)$$

donde  $x = \cos \theta$ . Estas cantidades son independientes del parámetro  $\phi$ , por lo que el resultado es múltiplo de  $2\pi$ . Al sustituir en (4.29) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\sigma v_{rel} &= \frac{g_\kappa^4}{16\pi} \left\{ (7m^4 + 15m^2p^2 + 6p^4) \left[ \frac{7m^6 + 29m^4p^2 + 36m^2p^4 + 12p^6}{8(m^2 + p^2)(m^2 + 2p^2)(m^4 + 8m^2p^2 + 8p^4)} \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{5m^8 + 53m^6p^2 + 146m^4p^4 + 120m^2p^6 + 16p^8}{16p(m^2 + p^2)^{3/2}(m^2 + 2p^2)(m^4 + 8m^2p^2 + 8p^4)} \right] \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{m^2 + p^2}p}{m^2 + 2p^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3m^2 - p^2)^2}{4m^2 + 4p^2} \right\},\end{aligned}\quad (4.31)$$

siendo una cantidad dependiente del momento inicial  $|\mathbf{p}_1| = p$  y la masa asociada a la partícula de Kaluza-Klein  $m_\chi$ . Si la masa de la partícula de Kaluza-Klein alcanza el valor

de  $m_\chi = 100\text{TeV}$ , el radio de compactificación es  $r_0 = 6,3 \times 10^{-15}\text{eV}^{-1}$ , que explicaría su no observación experimental al encontrarse fuera del alcance energético actual en aceleradores de partículas. Con este valor y la constante de acople  $g_\kappa = 5,8 \times 10^{-28}\text{eV}^{-1}$ , se realiza la representación gráfica de la sección eficaz diferencial en función del momento.

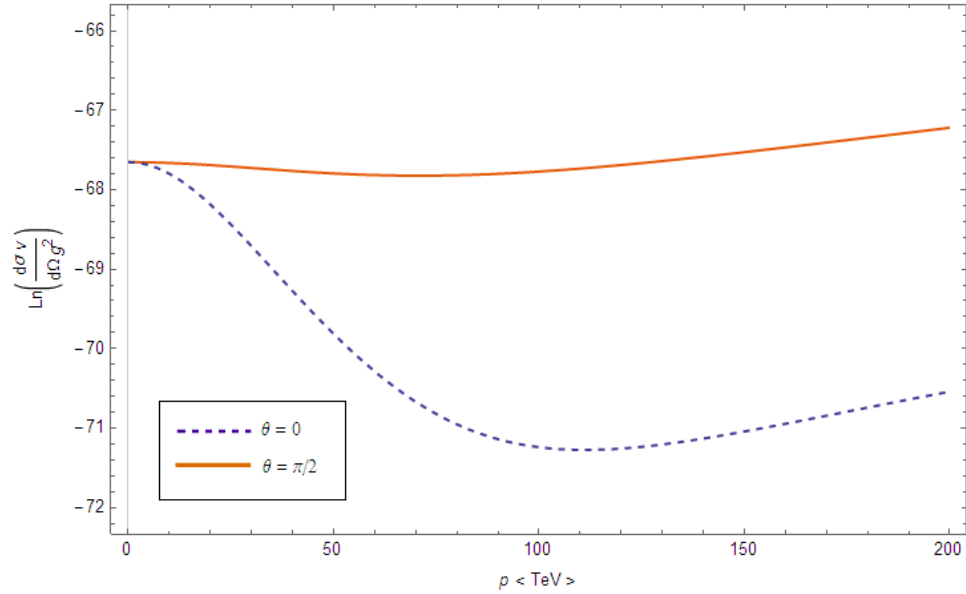


Figura 4.2: Sección eficaz diferencial para  $\chi + \chi \rightarrow \gamma + \gamma$  en función del momento  $p$ .

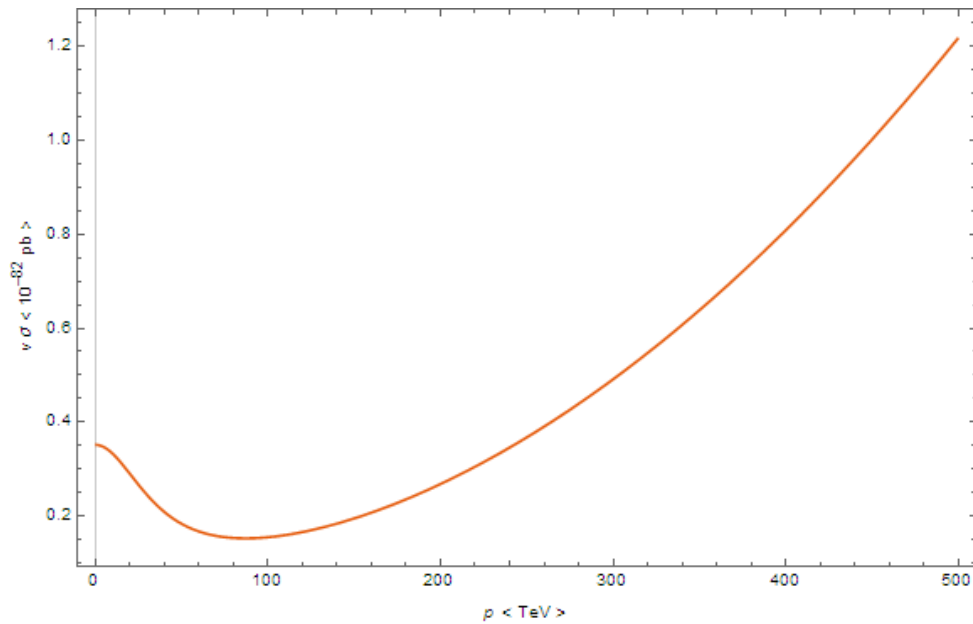


Figura 4.3: Sección eficaz total para  $\chi + \chi \rightarrow \gamma + \gamma$  en función del momento  $p$ .

En el gráfico 4.2, el argumento dentro de la función logaritmo es una combinación adimen-

sional entre la constante de acople  $g_\kappa$  y la sección eficaz. Se muestra el comportamiento para dos ángulos de dispersión distintos,  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , donde existe una diferencia que aumenta con el valor del momento  $p$ , lo que indica una mayor probabilidad de observar este evento cuando el ángulo de dispersión en los fotones resultantes es de  $\theta = \pi/2$ . Por otra parte la sección eficaz total se representa en la gráfico 4.3, usando la unidad de medida usual picobarns ( $2,57\text{pb} \approx 1\text{eV}^{-2}$ ). El comportamiento que se observa es un máximo local en  $p = 0$ , es decir, una partícula KK estática. Luego se tiene la disminución de la sección eficaz hasta un valor cercano al escogido para la masa de la partícula KK (100TeV), y a partir de este la función es creciente en términos del momento. Lo que se interpreta de esta situación, es que existe una mayor probabilidad para que este evento ocurra cuando  $p > m_\chi$ , que se traduce en una partícula KK en movimiento. Además el momento de los fotones resultantes en este proceso de aniquilación ( $|\mathbf{p}_4|$ ), está relacionado con la energía de la partícula KK ( $|\mathbf{p}_4| = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{p}_1|^2}$ ), en tanto la energía de los fotones pertenecería al rango de los rayos gamma.

### Proceso de Dispersión

Otro proceso a considerar es el caso de fotones en los estados finales e iniciales, con la partícula  $\chi$  en el estado intermedio, representado en el diagrama de la figura 4.4.

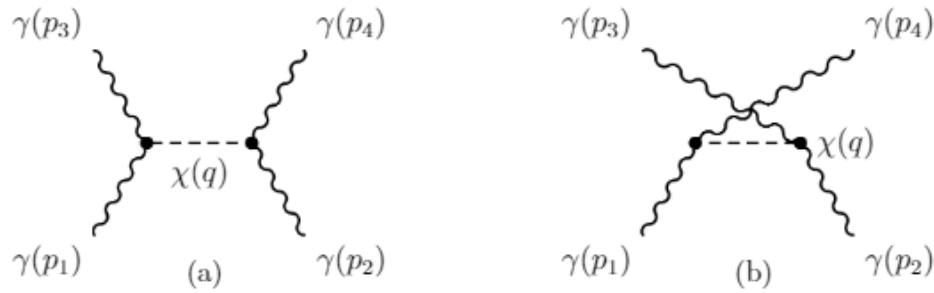
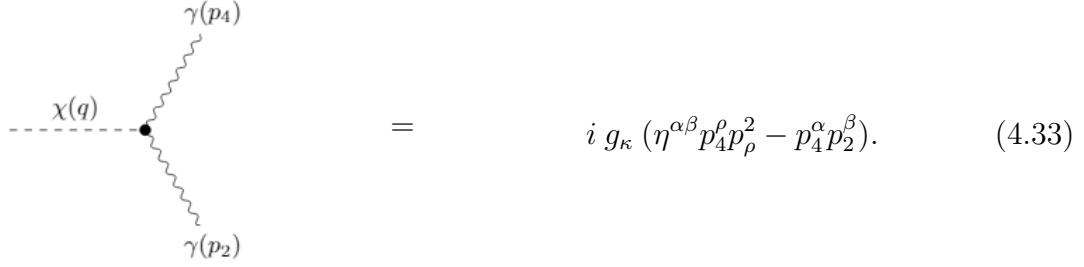


Figura 4.4: Diagramas de dispersión de fotones a nivel árbol

Este proceso a nivel árbol tiene dos vértices

$$\begin{array}{c} \gamma(p_3) \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \gamma(p_1) \end{array} \text{---} \chi(q) = i g_\kappa (\eta^{\gamma\sigma} p_3^\mu p_\mu^1 - p_3^\gamma p_1^\sigma), \quad (4.32)$$

y



$$= i g_\kappa (\eta^{\alpha\beta} p_4^\rho p_\rho^2 - p_4^\alpha p_2^\beta). \quad (4.33)$$

La amplitud de Feynman para el primer diagrama (4.4a) de este proceso es

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_\kappa^2 (\eta^{\gamma\sigma} p_3^\mu p_\mu^1 - p_3^\gamma p_1^\sigma) (\eta^{\alpha\beta} p_4^\rho p_\rho^2 - p_4^\alpha p_2^\beta)}{(p_1 - p_3)^2 - m_\chi^2} \epsilon_\sigma^{(s)}(1) \epsilon_\gamma^{(s)*}(3) \epsilon_\beta^{(s)}(2) \epsilon_\alpha^{*(s)}(4), \quad (4.34)$$

por otra parte, para el segundo diagrama (4.4b) la amplitud toma la forma

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_\kappa^2 (\eta^{\gamma\sigma} p_4^\mu p_\mu^1 - p_4^\gamma p_1^\sigma) (\eta^{\alpha\beta} p_3^\rho p_\rho^2 - p_3^\alpha p_2^\beta)}{(p_1 - p_4)^2 - m_\chi^2} \epsilon_\sigma^{(s)}(1) \epsilon_\gamma^{(s)*}(4) \epsilon_\beta^{(s)}(2) \epsilon_\alpha^{*(s)}(3), \quad (4.35)$$

y una vez aplicada la condición de transversalidad se obtiene la amplitud total

$$\mathcal{M} = g_\kappa^2 \epsilon^{(s)\gamma}(1) \epsilon_\gamma^{(s)*}(3) \epsilon^{(s)\alpha}(2) \epsilon_\alpha^{*(s)}(4) \left[ \frac{p_3^\mu p_\mu^1 p_4^\rho p_\rho^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_\chi^2} + \frac{p_4^\mu p_\mu^1 p_3^\rho p_\rho^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_\chi^2} \right]. \quad (4.36)$$

Para el sistema de centro de masa se escogen los siguientes momentos

$$p_1 = (|\mathbf{p}_1|, 0, 0, |\mathbf{p}_1|), \quad (4.37)$$

$$p_2 = (|\mathbf{p}_1|, 0, 0, -|\mathbf{p}_1|), \quad (4.38)$$

$$p_3 = (|\mathbf{p}_4|, -|\mathbf{p}_4| \sin \theta, 0, -|\mathbf{p}_4| \cos \theta), \quad (4.39)$$

$$p_4 = (|\mathbf{p}_4|, |\mathbf{p}_4| \sin \theta, 0, |\mathbf{p}_4| \cos \theta), \quad (4.40)$$

y polarizaciones

$$\epsilon^{(1)}(1) = \epsilon^{(1)}(2) = \epsilon^{(1)*}(3) = \epsilon^{(1)*}(4) = (0, 0, 1, 0), \quad (4.41)$$

$$\epsilon^{(2)}(1) = \epsilon^{(2)}(2) = (0, 1, 0, 0), \quad (4.42)$$

$$\epsilon^{(2)*}(3) = \epsilon^{(2)*}(4) = (0, -\cos \theta, 0, \sin \theta), \quad (4.43)$$

así la suma de polarizaciones en (4.19) es

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} \left( \epsilon^{(s)\gamma}(1) \epsilon_\gamma^{(s)*}(3) \epsilon^{(s)\alpha}(2) \epsilon_\alpha^{*(s)}(4) \right)^2 &= \left( \epsilon^{(1)\gamma}(1) \epsilon_\gamma^{(1)*}(3) \epsilon^{(1)\alpha}(2) \epsilon_\alpha^{(1)*}(4) \right)^2 \\ &\quad + \left( \epsilon^{(2)\gamma}(1) \epsilon_\gamma^{(2)*}(3) \epsilon^{(2)\alpha}(2) \epsilon_\alpha^{(2)*}(4) \right)^2 \\ &= 1 + \cos^4 \theta, \end{aligned} \quad (4.44)$$

por lo que la sección eficaz diferencial es la siguiente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} v_{rel} = \frac{g_\kappa^4 p^6 (1 + \cos^4 \theta)}{128\pi^2} \left[ \frac{(1 + \cos \theta)^2}{2(1 + \cos \theta)p^2 + m_\chi^2} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2(\cos \theta - 1)p^2 + m_\chi^2} \right]^2, \quad (4.45)$$

cuya integral con respecto al ángulo de dispersión  $\Omega$  se reduce en calcular una integral de fracciones simples

$$\int_{-1}^1 dx \left[ \frac{m^{16} + 8m^{14}p^2 + 24m^{12}p^4 + 32m^{10}p^6 + 32m^8p^8}{256p^{10}(m^2 + 2p^2x + 2p^2)^2} + \frac{x^2(5m^8 + 8m^4p^4 + 16p^8)}{16p^6} \right. \\ - \frac{m^{16} + 32m^{14}p^2 + 216m^{12}p^4 + 640m^{10}p^6 + 992m^8p^8 + 1024m^6p^{10} + 512m^4p^{12}}{512p^{12}(m^2 + 2p^2x + 2p^2)} \\ + \frac{m^{16} - 32m^{14}p^2 + 216m^{12}p^4 - 640m^{10}p^6 + 992m^8p^8 - 1024m^6p^{10} + 512m^4p^{12}}{512p^{12}(m^2 + 2p^2x - 2p^2)} \\ \left. + \frac{m^4(7m^8 + 80m^4p^4 + 80p^8)}{64p^{10}} + \frac{m^{16} - 8m^{14}p^2 + 24m^{12}p^4 - 32m^{10}p^6 + 32m^8p^8}{256p^{10}(m^2 + 2p^2x - 2p^2)^2} \right. \\ \left. \frac{3m^4x^4}{4p^2} + p^2x^6 \right], \quad (4.46)$$

y así se obtiene de (4.45) la sección eficaz

$$\sigma_{v_{rel}} = \frac{g_\kappa^4}{64\pi} \left[ \frac{m^8(m^8 - 8m^4E^4 - 96E^8)}{64E^{10}(m^4 - 16E^4)} + \frac{7m^{12}}{32E^{10}} + \frac{65m^8}{24E^6} + \frac{47m^4}{15E^2} + \frac{20}{21E^2} \right. \\ + \frac{m^4}{1024E^{14}}(m^{12} + 216m^8E^4 + 992m^4E^8 + 512E^{12}) \ln \left( \frac{m^4}{m^4 - 16E^4} \right) \\ \left. + \frac{m^6}{32E^{12}}(m^8 + 20m^4E^4 + 32E^8) \ln \left( \frac{m^2 - 4E^2}{m^2 + 4E^2} \right) \right], \quad (4.47)$$

definida para  $m > 2E$ . En este caso, la sección eficaz es función de la energía de los fotones  $E = p$  y la masa asociada a la partícula de Kaluza-Klein  $m_\chi = m$ . La sección eficaz diferencial en función del momento se muestra en el gráfico 4.5. Para  $\theta = \pi/2$  existe una singularidad en la sección eficaz correspondiente al valor  $E = \sqrt{2}m$ , que se obtiene del segundo término en (4.45) y que proviene del propagador de la partícula KK para el diagrama 4.4b. La sección eficaz total para este proceso se presenta en el gráfico 4.6. Se tienen dos singularidades, la primera es debido a la dependencia polinómica del denominador en (4.47) con respecto a la energía, mientras que la segunda singularidad proviene del argumento de la función logaritmo. En el intervalo de energía  $10\text{TeV} < E < 40\text{TeV}$  la sección eficaz es decreciente con valores del orden  $10^{-83}\text{pb}$ .

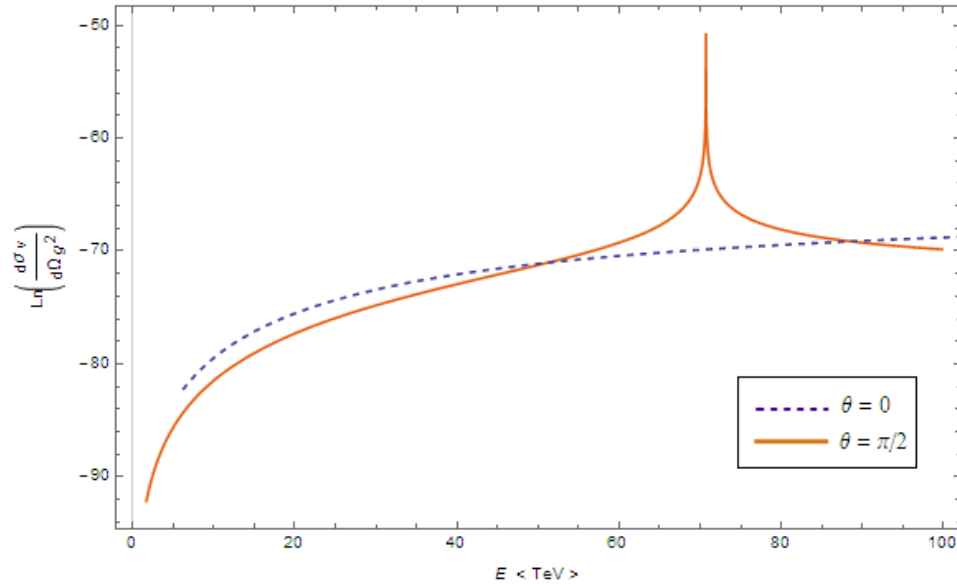


Figura 4.5: Sección eficaz diferencial para  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$  en función de la energía  $E$ .

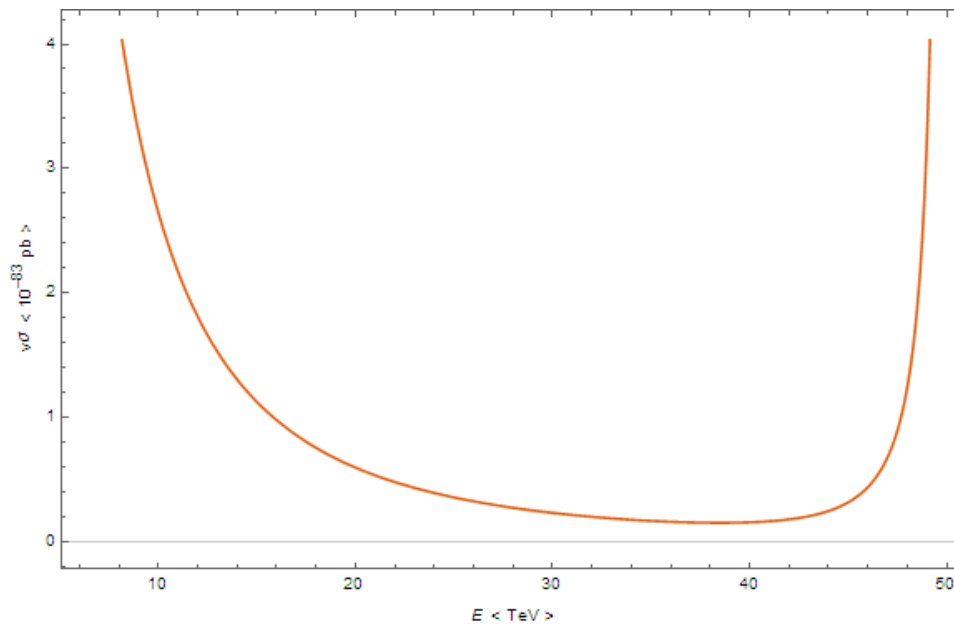


Figura 4.6: Sección eficaz total  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$  en función del momento  $p$ .

Ambos procesos tienen un valor de sección eficaz similar al considerar la masa de la partícula KK  $m_\chi = 100\text{TeV}$ .

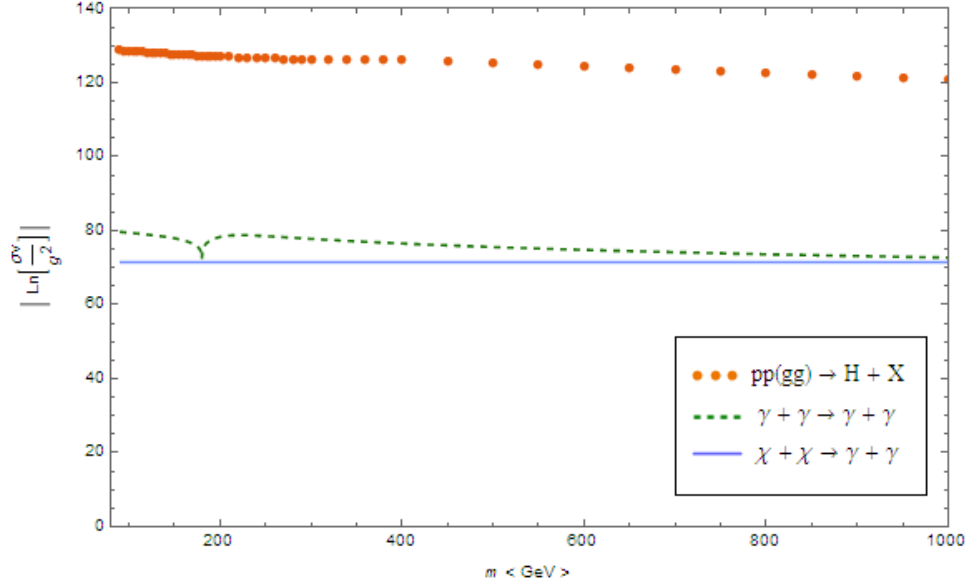


Figura 4.7: Sección eficaz total para tres procesos distintos: producción de bosón de Higgs, dispersión de fotones y aniquilación de partículas KK.

En el gráfico 4.7 se muestra la comparación de estos valores con la sección eficaz para el bosón de Higgs [21]. La diferencia entre ambos es de 65 órdenes de magnitud, lo que convierte a los procesos calculados en eventos imposibles de detectar con el potencial energético actual. Para entender esto, la luminosidad en el LHC es de  $10^{34} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  lo que resulta en  $5 \times 10^{-4}$  eventos por segundo, en comparación con los  $10^{-78}$  eventos por segundo para la aniquilación de partículas KK, que resulta de la relación (4.12). Como se muestra en el gráfico 4.3, la sección eficaz aumenta con el momento asociado a la partícula  $\chi$  haciendo de este un proceso más probable en el límite relativista. La función (4.31) también es creciente con respecto a la masa  $m_\chi$ , y toma un valor similar a la sección eficaz para el bosón de Higgs si  $m_\chi \sim 10^{50} \text{eV}$  que es igual a un radio de compactificación 23 órdenes de magnitud mayor a la longitud de Planck ( $10^{-28} \text{eV}^{-1}$ ). Debido a que ambos procesos tienen fotones como partículas finales es posible la detección de tales eventos a través de rayos gamma muy energéticos. Existen múltiples experimentos terrestres y espaciales que buscan detectar rayos gamma de altas energías provenientes de fuentes galácticas y extragalácticas, como el telescopio Espacial de Rayos Gamma Fermi (FGST)[22], sensible a fotones con energías en el rango de 20MeV a 300GeV. Entre los telescopios de rayos gamma terrestres se encuentran VERITAS, MAGIC y H.E.S.S con la capacidad de detectar fotones con energías hasta los 100TeV. Estos últimos experimentos se basan en la lluvia de partículas cargadas por la interacción de fotones con núcleos en la atmósfera terrestre. Bajo cualquiera de estos métodos en discusión, la detección de materia oscura

es indirecta a través de productos de su aniquilación.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

El estudio desarrollado en este trabajo sobre la teoría de Kaluza-Klein, el tratamiento del sector escalar dilatónico y su aplicación al problema de materia oscura, nos permiten concluir lo siguiente:

Se comprueban las ecuaciones de movimiento que se obtienen mediante el mecanismo de Kaluza al definir un tensor métrico en cinco dimensiones. El resultado son tres ecuaciones en cuatro dimensiones que relacionan estas tres variables, siendo una de ellas la ecuación de Einstein con tensor de energía-momento para el electromagnetismo, otra relaciona el potencial electromagnético con el campo escalar similar a la ecuación de Maxwell para el vacío y por último una ecuación de Klein-Gordon donde el campo electromagnético se interpreta como una fuente del campo escalar. Lo notable de estas expresiones es que el electromagnetismo se obtiene de las ecuaciones de campo para el vacío en cinco dimensiones.

Se obtuvo una acción para la teoría de Kaluza-Klein que involucra tres sectores: gravedad, electromagnetismo y escalar (dilatón), mediante los mecanismos de compactificación de la quinta dimensión y una transformación conforme. El primer modo de la torre de Kaluza-Klein para el sector dilatón tiene una masa inversamente proporcional al radio de compactificación y su partícula mediadora presenta las propiedades características que han sido observadas para la materia oscura, que en principio debería tratarse de una partícula masiva y sin carga.

Se construyeron las reglas de Feynman y fueron calculados los vértices para la teoría, que además de ser usadas en este trabajo permitirá la ampliación del modelo al considerar otros procesos que incluyan la interacción de fotones, gravitones y partículas de Kaluza-Klein. Nos limitamos a los procesos de aniquilación de partículas KK en dos fotones y la dispersión de fotones con una partícula KK en el estado intermedio, que son permitidos

---

por la acción y cuyos productos pueden ser detectados por experimentos actuales.

La sección eficaz calculada para la aniquilación de partículas KK es dependiente de su energía cinética, aumentando la probabilidad de este evento si su momento es superior al valor de su masa, lo que la convertiría en un candidato a la materia oscura templada o caliente. Por otra parte, en el caso del proceso de dispersión se tienen dos singularidades en la sección eficaz, una de ellas derivada del propagador de la partícula KK para uno de los diagramas de Feynman. Debido al acople tan débil entre el campo electromagnético y dilatónico ( $g_\kappa \sim 10^{-28} \text{eV}^{-1}$ ), la sección eficaz alcanza un valor del orden  $10^{-82} \text{eV}^{-2}$  lo que requeriría una luminosidad 50 órdenes de magnitud superior a la disponible actualmente para su detección en un acelerador de partículas. Sin embargo, la baja probabilidad de que estos eventos ocurran indica la estabilidad de la partícula KK, siendo una propiedad que se espera para un candidato a materia oscura.

La masa  $m_\chi = 100 \text{TeV}$  para la partícula de Kaluza-Klein y su correspondiente radio de compactificación  $r_0 = 10^{-21} \text{m}$ , es un valor usado en este trabajo para obtener el orden de magnitud de la sección eficaz. La idea original de Kaluza y Klein es que el radio de compactificación, que es inversamente proporcional a la masa, se encuentra en el orden de magnitud de la longitud de Planck ( $\sim 10^{-35} \text{m}$ ), por tanto la masa adquiere el valor  $10^{19} \text{GeV}$ . La restricción más fuerte sobre el tamaño de una cuarta dimensión espacial, proviene de la física de altas energías que prueba escalas de masa cada vez mayores y por tanto escalas menores de longitud correspondientes. Experimentos de este tipo restringen  $r_0$  a un tamaño menor a un attómetro ( $10^{-18} \text{m}$ ) [23, 24].

Los procesos estudiados en este trabajo corresponden a eventos que involucran a la partícula KK en un estado inicial o intermedio respectivamente, lo que hace de su búsqueda una forma indirecta en el estudio de la materia oscura y su naturaleza. Asimismo estos procesos tienen fotones como partículas resultantes, por tanto un método de detección para el proceso de aniquilación son los rayos gamma con energías superiores a  $1 \text{TeV}$ , en el caso de que la masa de la partícula de Kaluza-Klein alcance este valor.

El tratamiento del sector dilatón presentado en este trabajo es similar al realizado por Y.M. Cho [20], que estudia las condiciones bajo las cuales el dilatón puede considerarse el constituyente de materia oscura en el universo. En este caso el campo escalar dilatón se interpreta como fuente para la gravedad, y la compactificación no es el mecanismo usado para asignarle masa a su partícula asociada. Un proceso en común es la aniquilación de materia oscura en dos fotones, lo que resulta en un tiempo de decaimiento de  $10^{26}$  años, implicando la estabilidad de esta partícula. Cho concluye que el tiempo de decaimiento es debido al acople muy débil entre el fotón y dilatón, imposibilitando así la detección de este evento en los aceleradores de partículas actuales por lo que propone otros métodos

de detección indirecta. Trabajos más recientes proponen la partícula de Kaluza-Klein más ligera como candidato a materia oscura, pero cambiando la geometría de la dimensión extra que da lugar a una cantidad conocida como paridad KK [25, 26].

Una extensión del presente estudio es la renormalización de posibles procesos que requieran correcciones radiativas, al considerar más de un bucle en los diagramas de Feynman correspondientes. Otro aspecto que podría considerarse es el acople del campo dilatónico con otras formas de materia, como por ejemplo fermiones. Por otra parte, también es posible un estudio del modelo cosmológico que se deriva de la partícula de Kaluza-Klein como constituyente de materia oscura, y su comparación con otros modelos propuestos. Con respecto a la sección eficaz, puede realizarse un análisis más exhaustivo de los parámetros involucrados a través de simulaciones.

---



# Apéndice A

## Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman para la acción de Kaluza-Klein (A.9) son las siguientes:

1. Se etiqueta cada línea externa con momento  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Cada línea interna con momento  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

2. Por cada vértice escribir un factor

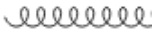
$$-i\lambda \tag{A.1}$$

donde  $\lambda$  dependerá de las partículas involucradas en el proceso.

3. Conservación de momento en cada vértice

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum k_i - \sum k_f \right), \tag{A.2}$$

4. Por cada línea interna se escribe el propagador correspondiente a las partículas involucradas

Gravitón	h		$\frac{1}{2} \frac{(\eta_{\mu\omega}\eta_{\nu\kappa} + \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\omega} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\omega})}{p^2},$	(A.3)
----------	---	---	---	-------

Fotón	$\gamma$		$\frac{-g_{\nu\lambda}}{p^2},$	(A.4)
-------	----------	---	--------------------------------	-------

Dilatón (modo cero)	$\sigma$		$\frac{1}{p^2},$	(A.5)
------------------------	----------	---	------------------	-------

Partícula KK	$\chi$		$\frac{1}{p^2 - m_\chi^2}.$	(A.6)
-----------------	--------	---	-----------------------------	-------

---

5. Integrar sobre cada momento interno

$$\int \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}. \quad (\text{A.7})$$

El producto de las reglas anteriores resulta en  $i$  veces la amplitud de Feynman  $\mathcal{M}$ . Para calcular el vértice  $\lambda$  de un proceso particular se sigue la fórmula:

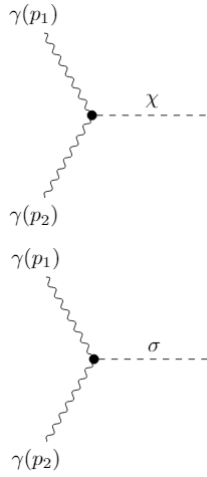
$$\text{Vértice con l-m-n líneas externas} = i \frac{\partial^{l+m+n} \mathcal{L}}{\partial A_\mu^l \partial h_{\alpha\beta}^m \partial \chi^n}, \quad (\text{A.8})$$

con  $\mathcal{L}$  correspondiente al Lagrangiano de la acción  $S = \int d^4 x \mathcal{L}$ , obtenida en el capítulo 2 y cuya expansión completa es la siguiente

$$\begin{aligned} S = & - \int d^4 x \left[ \frac{1}{32\pi G} \left( \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right) \right. \\ & + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} \left( 1 - \kappa\sqrt{3}\sigma - \kappa\sqrt{\frac{3}{10}}\chi \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \sigma \\ & + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\kappa}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \chi + \frac{\sqrt{3}}{8} \kappa F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} h \sigma \\ & + \frac{\kappa}{8} \sqrt{\frac{3}{10}} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} h \chi + \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} \sigma \\ & + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\kappa}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \chi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} \\ & - \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} h - \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} h + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} \\ & - \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \sigma - \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\kappa}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} h^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} \chi \\ & + \frac{\sqrt{3}}{8} \kappa F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} h \sigma + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\kappa}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha} h \chi \\ & - \frac{\sqrt{3}}{8} \kappa F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} h \sigma - \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{\kappa}{8} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} h \chi + \frac{1}{8} h F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - \frac{\sqrt{3}}{16} \kappa F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} h^2 \sigma - \frac{\kappa}{16} \sqrt{\frac{3}{10}} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} h^2 \chi + \frac{1}{16} h^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ & - \frac{5}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{5}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\alpha \sigma h^{\mu\alpha} - \frac{5}{4} h \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \\ & + \frac{1}{2} h^{\mu\alpha} \partial_\alpha \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{4} h \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} m_\chi^2 \left( \chi^2 + \frac{4}{\sqrt{30}} \chi \right) \\ & \left. - \frac{1}{2} m_\chi^2 h \left( \chi^2 + \frac{4}{\sqrt{30}} \chi \right) \right], \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

donde  $\chi = \sqrt{10} \sigma_{(1)}$  y  $m_\chi^2 = 2/5r_0^2$ . Los vértices para los procesos de interacción permitidos por la acción se separan en aquellos que contienen o no la presencia de gravitones

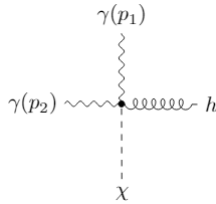
Sin gravitón



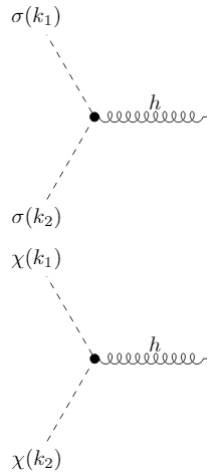
$$AA\sigma : = i\sqrt{10} g_\kappa (\eta^{\rho\gamma} p_\mu^1 p_2^\mu - p_1^\gamma p_2^\rho), \quad (\text{A.10})$$

$$AA\chi : = i g_\kappa (\eta^{\rho\gamma} p_\mu^1 p_2^\mu - p_1^\gamma p_2^\rho), \quad (\text{A.11})$$

Con un gravitón



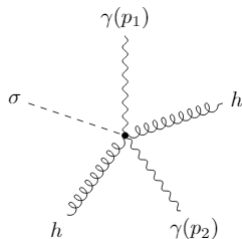
$$AAh\chi : = i\frac{1}{2} g_\kappa \left[ (\eta^{\sigma\gamma} p_\mu^1 p_2^\mu - p_1^\gamma p_2^\sigma) \eta^{\epsilon\rho} \right. \\ \left. + (p_\epsilon^1 p_\rho^2 \eta^{\sigma\gamma} - p_\epsilon^1 p_2^\sigma \delta_\gamma^\rho - p_\gamma^1 p_2^\rho \delta_\sigma^\epsilon \right. \\ \left. + p_1^\beta p_\beta^2 \delta_\sigma^\epsilon \delta_\gamma^\rho + p_\rho^1 p_\epsilon^2 \eta^{\gamma\sigma} - p_1^\gamma p_\epsilon^2 \delta_\sigma^\rho \right. \\ \left. - p_\rho^1 p_2^\sigma \delta_\gamma^\epsilon + p_1^\nu p_\nu^2 \delta_\sigma^\rho \delta_\gamma^\epsilon \right), \quad (\text{A.12})$$



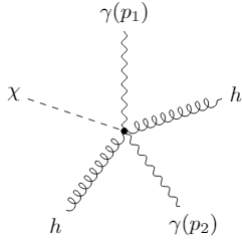
$$\sigma\sigma h : = i\frac{5}{2} (k_\gamma^1 k_\rho^2 - \eta^{\rho\gamma} k_\alpha^1 k_2^\alpha), \quad (\text{A.13})$$

$$\chi\chi h : = i\frac{1}{2} (k_1^\alpha k_2^\beta \eta^{\rho\gamma} - k_1^\rho k_2^\gamma - 4m_\chi^2 \eta^{\rho\gamma}), \quad (\text{A.14})$$

Con dos gravitones



$$AAhh\sigma : = i\frac{\sqrt{10}}{4} g_\kappa \left[ \eta^{\epsilon\rho} (\eta^{\rho\gamma} p_\mu^1 p_2^\mu - p_1^\gamma p_2^\rho) + 2(p_\mu^1 p_2^\mu \delta_\sigma^\epsilon \delta_\rho^\rho \right. \\ \left. - p_\rho^2 p_1^\gamma \delta_\sigma^\epsilon - p_\epsilon^1 p_2^\sigma \delta_\gamma^\rho + p_\epsilon^1 p_\rho^2 \eta^{\gamma\sigma} \right], \quad (\text{A.15})$$



$$AAhh\chi : = i\frac{1}{4}g_\kappa \left[ \eta^{\epsilon\rho}(\eta^{\rho\gamma}p_\mu^1 p_2^\mu - p_1^\gamma p_2^\rho) + 2(p_\mu^1 p_2^\mu \delta_\sigma^\epsilon \delta_\gamma^\rho - p_\rho^2 p_1^\gamma \delta_\sigma^\epsilon - p_\epsilon^1 p_2^\sigma \delta_\gamma^\rho + p_\epsilon^1 p_\rho^2 \eta^{\gamma\sigma}) \right], \quad (\text{A.16})$$

donde la constante de acople se define como  $g_\kappa = \sqrt{\frac{3}{10}}\kappa$ .

# Apéndice B

## Funcional Generador

En este apéndice se desarrolla el cálculo del funcional generador y función de Green hasta orden cuadrático en la perturbación  $\lambda$ , así como su representación diagramática. Considerando un término inarmónico  $\lambda\varphi^4$  en la acción, el funcional generador toma la forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + J\varphi\right)\right]. \quad (\text{B.1})$$

Expandiendo la exponencial en términos de  $\lambda$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\varphi \left[1 - i \int d^4x \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \dots\right] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right] \\ &= \left[1 - i \int d^4\omega \frac{\lambda}{4!} \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(\omega)^4} + \dots\right] Z_0[0] e^{iW(J)} \\ &= Z_0[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Con los funcionales  $Z_0[J]$ ,  $Z_1[J]$  y  $Z_2[J]$  correspondientes a los ordenes  $\lambda^0$ ,  $\lambda^1$  y  $\lambda^2$  respectivamente

$$\underline{\mathcal{O}(\lambda^0)} \quad Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\varphi)} = Z_0[0] e^{iW[J]}, \quad (\text{B.3})$$

$$\underline{\mathcal{O}(\lambda^1)} \quad Z_1[J] = -i \frac{\lambda}{4!} Z_0[0] \int d^4\omega \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(\omega)^4} e^{iW(J)}, \quad (\text{B.4})$$

$$\underline{\mathcal{O}(\lambda^2)} \quad Z_2[J] = \frac{(i\lambda)^2}{2!} \left(\frac{1}{i^4 4!}\right)^2 Z_0[0] \left(\int d^4\omega_1 \frac{\delta^4}{\delta J(\omega_1)^4}\right) \left(\int d^4\omega_2 \frac{\delta^4}{\delta J(\omega_2)^4}\right) e^{iW(J)}. \quad (\text{B.5})$$

---

Si existe interacción, la función de Green con  $n$  puntos se define como

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (\text{B.6})$$

Reinterpretando de manera discreta  $W = -1/2 \sum J_{\omega_1} D_{\omega_1, \omega_2} J_{\omega_2}$ , las derivadas del funcional  $Z_0[J]$  con respecto a las fuentes en los puntos  $x_2$  y  $x_1$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J_{x_2}} e^{\overbrace{\left(-i/2 \sum_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_1} D_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_2}\right)}^A} &= A \frac{\partial}{\partial J_{x_2}} \left( -\frac{i}{2} \sum_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_1} D_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_2} \right) \\ &= -\frac{i}{2} A \underbrace{\left( \sum_{\omega_2} J_{\omega_2} D_{x_2 \omega_2} + \sum_{\omega_1} J_{\omega_1} D_{\omega_1 x_2} \right)}_B, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial J_{x_1} \partial J_{x_2}} e^{\left(-i/2 \sum_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_1} D_{\omega_1 \omega_2} J_{\omega_2}\right)} &= \frac{\partial}{\partial J_{x_1}} \left( -\frac{1}{2} AB \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left( -\frac{i}{2} AB^2 + 2AD_{x_1 x_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Así, la función de Green  $G(x_1, x_2)$  a orden  $\lambda^0$  es

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= \left[ \frac{i}{4Z_0[0]} \left( \int d^4 \omega_2 D_F(x_2 - \omega_2) J(\omega_2) + \int d^4 \omega_2 D_F(\omega_1 - x_2) J(\omega_1) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + i \frac{D_F(x_1 - x_2)}{Z_0[0]} \right] Z_0[J] \Big|_{J=0} \\ &= iD_F(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

que corresponde con el propagador para una teoría sin interacciones. Ahora, el término del funcional generador para el primer orden en  $\lambda$  (B.4) se obtiene a través de la derivada

$$\frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(\omega)^4} = -\frac{i}{2} \left[ \left( -\frac{i}{2} \right)^3 B^4 + \left( -\frac{i}{2} \right)^2 12 B^2 D_F(0) + \left( -\frac{i}{2} \right) 6 D_F^2(0) \right],$$

por tanto la corrección a primer orden  $Z_1[J]$  es

$$\begin{aligned} Z_1[J] &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 \omega \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J^4(\omega)} Z_0[J] \\ &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 \omega \left\{ -3D_F^2(0) + 6iD_F(0) \left[ \int d^4 \omega_1 D_F(\omega - \omega_1) J(\omega_1) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int d^4 \omega_1 D_F(\omega - \omega_1) J(\omega_1) \right]^4 \right\} Z_0[J], \end{aligned}$$

generando la función de Green hasta el primer orden en  $\lambda$

$$G(x_1, x_2) = iD_F(x_1 - x_2) + \frac{(-i\lambda)}{2} i^3 \int d^4\omega D_F(x_1 - \omega) D_F(0) D_F(\omega - x_2),$$

con representación diagramática

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ x_1 \qquad \qquad x_2 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ x_1 \qquad \qquad x_2 \\ \text{---} \\ \omega \end{array}$$

donde el segundo diagrama representa una interacción a un bucle. Finalmente a orden  $\lambda^2$  la corrección en  $Z[J]$  produce un término en la función de Green proporcional a

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4}{\delta J^4(\omega_1)} \frac{\delta^4}{\delta J^4(\omega_2)} \exp(iW[J]) \Big|_{J=0} &= 4! D_{\omega_1\omega_2}^4 + (6)(12)(-i^2) D_{\omega_1\omega_1} D_{\omega_1\omega_2}^2 D_{\omega_2\omega_2} \\ &+ (-3D_{\omega_1\omega_1}^2)(-3D_{\omega_2\omega_2}^2), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

equivalente a diagramas de vacío

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \omega_1 \qquad \qquad \omega_2 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \omega_1 \qquad \omega_2 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \omega_1 \qquad \omega_2 \end{array}$$

$$D_{\omega_1\omega_2}^4 \qquad \qquad D_{\omega_1\omega_1} D_{\omega_1\omega_2}^2 D_{\omega_2\omega_2} \qquad \qquad D_{\omega_1\omega_1}^2 D_{\omega_2\omega_2}^2$$

que se suman a los diagramas anteriores de primer orden. En el caso de la función de Green para cuatro puntos, esto es para un proceso de dispersión, el procedimiento a seguir es análogo pero más extenso al incluir derivadas con respecto a los puntos  $x_3$  y  $x_4$ , adicionales a las ya calculados.



# Apéndice C

## Notación

En este trabajo se usan unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ), que permiten expresar unidades de longitud, masa y tiempo en términos de unidades de energía (eV). A continuación se presenta la notación usada

$\mu, \nu, \dots$	Indices espacio-temporales (0, ..., 3) de un vector o tensor
$A, B, \dots$	Indices en cinco dimensiones (0, ..., 4)
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico con diagonal (1, -1, -1, -1)
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski
$\hat{g}_{AB}$	Tensor métrico en 5 dimensiones
$p^\mu$	Cuadrivector contravariante
$p_\mu$	Cuadrivector covariante
$\mathbf{p}$	Cantidad vectorial en 3 dimensiones
$\mathcal{L}$	Densidad Lagrangiana
$S$	Acción
$T_{\mu\nu}$	Tensor energía-momento
$\phi, \varphi$	Campo escalar
$A_\mu$	Potencial electromagnético
$F_{\mu\nu}$	Tensor de campo electromagnético
$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$	Conexión o Símbolos de Christoffel
$\nabla_\mu$	Derivada covariante
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$G$	Constante gravitacional
$\chi$	Primer modo de campo dilatónico, Partícula de Kaluza-Klein
$r_0$	Radio de compactificación

---

$m_\chi$	Masa partícula de Kaluza-Klein
$h_{\mu\nu}$	Gravitón
$Z$	Funcional generador
$D(k)$	Propagador en el espacio de momentos
$\mathcal{M}$	Amplitud de Feynman
$v_{rel}$	Velocidad relativa
$g_\kappa$	Constante de acople
$\sigma$	Sección eficaz
$\Omega$	Ángulo sólido
$L$	Luminosidad

Cantidades con el símbolo “^” están definidas con la métrica en cinco dimensiones  $\hat{g}_{AB}$ . Letras y símbolos repetidos se interpretan según el contexto.

---

# Bibliografía

- [1] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, (2013).
  - [2] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson International, (2003).
  - [3] G. Nordstrom. Unifying electromagnetic and gravitational fields. *Physikalische Zeitschrift*, 15, 504-506., Reproduced in O’Raifertaigh’s book. (1914).
  - [4] Th. Kaluza. On the Unification Problem in Physics. *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss.*, Reproduced in O’Raifertaigh’s book. (1921).
  - [5] Y. Thiry. Mathematical study of the equations of a theory with 15 field variables. *Thèse. Paris.*, Math. Appl. 9na serie (1950).
  - [6] P. Jordan. Projective Theory of Relativity. *Wiss. Gottingen*, (1945).
  - [7] D.F Carneiro. On Useful Conformal Transformations In General Relativity. *Juiz de Fora, CEP: 36036-330, MG, Brasil*, (2004).
  - [8] O. Klein. Unified Field Theories of More Than 4 Dimensions. *Z. Phys.*, World Scientific (1983).
  - [9] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, (2010).
  - [10] J.H. Oort. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol 4, p. 249, (1932).
  - [11] F. Zwicky. On the masses of nebulae and cluters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, vol 86, pp. 217-246, (1937).
  - [12] V. C. Rubin. Dark matter in spiral galaxies. *Scientific American*, vol. 248, no. 6, pp.96-108, (1983).
-

- [13] M. Aaronson. Accurate Radial Velocities for Carbon Stars in Draco and Ursa Minor: The First Hint of a Dwarf Spheroidal Mass-to-Light Ratio. *Astrophysics Journal* 266: L11, (1983).
  - [14] C. Forman, W. Jones. Hot Coronae Around Early-Type Galaxies. *Astrophysics Journal* 293: 102, (1985).
  - [15] D. Majumdar. *Dark Matter, An Introduction*. CRC Press, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, (2014).
  - [16] N. Jarosik. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP1) observations: sky maps, systematic errors, and basic results. *arXiv:1001.4744* - DOI: 10.1088/0067-0049/192/2/14, (2010).
  - [17] N. Aghanim. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv:1807.06209*, (2018).
  - [18] R.A Alcock, C. Allsman. The MACHO project: microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations. *Astrophysical Journal* vol.542 *arXiv:astro-ph/0001272*, (2000).
  - [19] P. Tisserand. Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. *Astrophysical Journal* vol.542, (2000).
  - [20] Y. Y. Keum Y. M. Cho. Dilatonic Dark Matter - A New Paradigm -. *Mod.Phys.Lett. A13* 109-117, (1998).
  - [21] C Dittmaier. Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 1. Inclusive Observables. *CERN-2011-022 arXiv:1101.0593*, (2011).
  - [22] R. Martii T. Elmo, H. Andi. Fermi 130 GeV gamma-ray excess and dark matter annihilation in sub-haloes and in the Galactic centre. *JCAP* 09 032, (2012).
  - [23] S. Samuel V. Kostelecky. Experimental constraints on extra dimensions. *Phys.Lett. B270*, (1991).
  - [24] P. Adansom. Constraints on Large Extra Dimensions from the MINOS Experiment. *Phys. Rev. D* 94, 111101, (2016).
  - [25] R. Sundrum L. Randall. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Phys.Rev.Lett.*83:3370-3373, (1999).
  - [26] L. Feng H. C. Cheng. Kaluza-Klein Dark Matter. *Phys.Rev.Lett.*89:211301, (2002).
-