



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Laura González**, Cédula de Identidad **V-24221056**, bajo el título "**Aspectos globales del espacio-tiempo de de Sitter**", a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciada en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 19 de julio de 2019, a las 9:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 19 días del mes de julio de 2019, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Abraham Lozada.

Firma del jurado evaluador

Prof Ernesto Fuenmayor Di
Prisco
UCV

Prof Nelson Enrique Bolívar
Cova
UCV

Prof Abraham Lozada
UCV

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



ASPECTOS GLOBALES DEL ESPACIO-TIEMPO DE DE SITTER

Trabajo Especial de Grado presentado por
Laura González
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciada en Física**
Con la tutoría de: Dr. Abraham Lozada

Mayo-2019

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



ASPECTOS GLOBALES DEL ESPACIO-TIEMPO DE DE SITTER

Trabajo Especial de Grado presentado por
Laura González
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciada en Física**
Con la tutoría de: Dr. Abraham Lozada

Mayo-2019
Caracas-Venezuela

8 de noviembre de 2019

Consejo de la Escuela de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Estimados miembros del Consejo de Escuela

Reciban un cordial saludo. Conforme a lo establecido en el artículo 13 de la “Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV” les remito tres ejemplares de la monografía de TEG de la estudiante **Laura González**, CI: **24221056**, titulado **ASPECTOS GLOBALES DEL ESPACIO-TIEMPO DE DE SITTER**, los cuales he revisado y considero listos para la evaluación por parte de un jurado.

Agradeciendo la consideración que sirvan prestar a la presente, me despido atentamente,

Dr. Abraham Lozada
4.882.675
Tutor
UCV

“Error never leaves us, yet nevertheless a higher need constantly draws the aspiring mind silently towards the truth .”

GOETHE

Agradecimientos

A mi mamá por dedicarse a mí todos los días de mi vida. Por enseñarme el firme propósito de lograr todo lo que me propongo.

A mi papá por enseñarme a cuestionar.

A Oswaldo por su comprensión y amor infinito. Por incentivarme, consentirme y estar siempre para mí.

A mi familia por su apoyo incondicional.

A mis profesores y a mi amada UCV por permitirme crecer como profesional y hacerme, todos los días, mas humana.

Al profesor Abraham Lozada, por brindarme la oportunidad de trabajar con él. Por compartir sus conocimientos y sus magníficas ideas. Por su paciencia, su tolerancia. Por su apoyo y motivación a diario.

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos la corrección a la simetría de Poincaré, en mecánica cuántica, debido a la curvatura del espacio-tiempo de de Sitter (dS). Hemos encontrado que para establecer la mecánica cuántica en dS es fundamental considerar los aspectos globales de este espacio-tiempo. En particular en (1+1) demostramos que no existen campos vectoriales de Killing tipo tiempo globales. Para considerar los aspectos de la teoría de la relatividad general tomamos como grupo de simetría el grupo de isometría de dS y usamos el teorema de Wigner para representarlo proyectiva y unitariamente. Estas consideraciones, por simplicidad, se hacen para dS en (1+1) dimensiones.

PALABRAS CLAVES

De Sitter, gravedad, mecánica cuántica, campo vectorial de Killing, teorema de Wigner, isometrías, representaciones de grupo.

Índice general

1. Aspectos geométricos de la relatividad general	19
1.1. Variedades y campos tensoriales	19
1.1.1. Variedad topológica diferenciable	19
1.1.2. Vectores en una variedad	20
1.1.3. Tensor métrico	21
1.2. Curvatura	22
1.2.1. Operadores de derivación y transporte paralelo	22
1.2.2. Tensor de Riemann	25
1.2.3. Geodésicas	27
1.3. Simetrías	28
1.3.1. Isometrías	28
1.3.2. Vectores de Killing	29
1.3.3. Álgebra de Lie	30
2. El espacio-tiempo de Minkowski	33
2.1. Aspectos clásicos	33
2.1.1. Tensor métrico	33
2.1.2. Símbolos de Christoffel y tensor de Riemann	34
2.1.3. Geodésicas	34
2.1.4. Simetrías	34
2.1.5. Vectores de Killing	37
2.1.6. Álgebra de Lie	38
2.2. Aspectos cuánticos	39
2.2.1. Mecánica cuántica	39
2.2.2. Cuantización	43
2.2.3. Representaciones unitarias e irreducibles de $\Pi_+^\uparrow(1,1)$	44

3. El espacio-tiempo de de Sitter	49
3.1. dS_4 como solución de vacío a las ecuaciones de Einstein	50
3.2. de Sitter en $(3 + 1)$ dimensiones	52
3.2.1. Aspectos geométricos	52
3.2.2. Vectores de Killing	58
3.2.3. Topología de dS_4	59
3.3. De las coordenadas estáticas a las coordenadas globales en dS_4	61
3.4. de Sitter en $(1+1)$ dimensiones	63
3.4.1. Geometría de dS_2	64
3.4.2. Vectores de Killing	66
3.4.3. Álgebra de Lie de los vectores de Killing	68
4. Mecánica cuántica relativista en dS_2	71
4.1. El grupo de Lorentz y el mapa espinorial	71
4.2. Representaciones unitarias e irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$	74
4.2.1. Partícula masiva sin espín	74
4.2.2. Una representación de $SL(2, \mathbb{R})$ que no es de $L_{3+}^\uparrow$	79
4.2.3. Hamiltoniano y operador posición	81
5. Discusiones y conclusiones	85
A. Algunos conceptos	87
A.1. Funciones	87
A.2. Relaciones y clases de equivalencia	88
A.3. Espacio topológico	88
A.3.1. Grupos de Homotopía	91
B. Cálculo de los vectores de Killing	95

Introducción

El universo en el que vivimos es curvo. Una prueba de ello, dentro de la teoría de la relatividad general, es el movimiento de nuestro planeta Tierra que describe una trayectoria que no es una geodésica en espacio plano. Pero, si una geodésica en espacio curvo. Sin embargo, el considerar el universo plano es una excelente aproximación para muchos sistemas físicos. Por ello, normalmente las teorías clásicas o cuánticas no toman en cuenta el hecho real de que el universo es curvo. Únicamente cuando se consideran efectos gravitatorios de sistemas físicos muy masivos, como las estrellas, se toma en cuenta, clásicamente, la curvatura del espacio-tiempo. No obstante, estos efectos afectan a otros sistemas físicos y otras teorías. Por ejemplo, el electromagnetismo clásico no es el mismo en espacio plano que en espacio curvo. Esto es, las soluciones de las ecuaciones son completamente diferentes. Así sería también para cualquier otra teoría clásica. Evidentemente, la mecánica cuántica también se vería afectada por la curvatura del universo.

En este trabajo queremos considerar los efectos de la curvatura del espacio-tiempo en la mecánica cuántica. Como se induce, estos efectos serán pequeños en la práctica y por ello no son usualmente considerados en la mayoría de la literatura. Más aún, hasta ahora no se ha medido ningún efecto cuántico de la gravedad. Sin embargo, es de vital importancia para nuestro entendimiento de las leyes de la naturaleza que se desarrolle una teoría que nos permita unificar la idea de la relatividad general y la mecánica cuántica. La física está llena de ejemplos de efectos pequeños que después resultaron ser fuente de física teórica fundamental y de aplicaciones (las ondas electromagnéticas de Maxwell, que cambiaron la física teórica y que nadie dudaría de sus usos en el mundo práctico). Por lo tanto, el estudio de tomar en cuenta la curvatura del espacio-tiempo en mecánica cuántica es fundamental. Construir dicha teoría ha sido uno de los problemas que más ha captado la atención de los físicos teóricos en los últimos años (ver, p.e, [1]) .

Nuestro objetivo en esta tesis será tratar con el problema de tomar en cuenta la relatividad general con la mecánica cuántica usando un enfoque muy simple. Usualmente, en

las aplicaciones de la mecánica cuántica la interacción electromagnética, la cual podemos considerar como un campo cuántico, es tratada como un campo clásico, siendo esta una aproximación muy buena. Por lo tanto, tomando en cuenta que los efectos gravitatorios son mucho más débiles que los electromagnéticos, es lógico pensar que una primera aproximación, a los efectos de la curvatura del espacio-tiempo, sería considerar la relatividad general desde es punto de vista clásico. A pesar de esto, existirán consecuencias sobre la mecánica cuántica ya que el cambiar el espacio-tiempo cambiarán, por ejemplo, las simetrías usuales y podría no tener sentido una representación momento que es típica en la teoría de la mecánica cuántica usual.

Es decir, el problema de encontrar una forma de unificar las ideas de la relatividad general y la mecánica cuántica, se podría tratar en primera instancia, formulando la cuántica en un espacio-tiempo con una curvatura distinta de cero. Esta idea ya ha sido considerada en la literatura (ver, p.e.,[2]), en la mecánica cuántica de finitos (partículas) o infinitos (campos) grados de libertad. Siendo el caso de infinitos grados de libertad el más considerado. No obstante, si se quiere formular una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo, se requiere tener una interpretación bien definida de las partículas que serán descritas por el campo. Por ende, es de vital importancia que la mecánica cuántica, en el espacio curvo, para partículas esté bien definida.

Nosotros en este trabajo seguiremos una consideración puramente cuántica para describir las partículas en un espacio-tiempo curvo. Es decir, no partiremos de una teoría clásica para después cuantizarla y realizar la teoría cuántica. La palabra cuantización se usará en el sentido de construir la mecánica cuántica per se. Más bien nuestro pensamiento es que la clásica es un límite de la cuántica y no al revés. La idea básica es definir las partículas como representaciones proyectivas del espacio de Hilbert, donde realizamos la mecánica cuántica, del grupo de isometrías del espacio-tiempo. Lo cual es totalmente análogo a como se definen las partículas en Minkowski. Esta idea funcionará al menos cuando el espacio-tiempo posea un grupo de isometría no trivial, este es el caso del espacio-tiempo de de Sitter, el cual es máximamente simétrico.

Las representaciones proyectivas que, como hemos comentado, aparecen en mecánica cuántica tienen su fundamento en el teorema de Wigner (ver p.e., [3] y [4]). De acuerdo a este teorema las transformaciones de simetría vienen dadas por un operador unitario o anti-unitario definido unívocamente salvo una fase. Esto tiene como consecuencia que los grupos de relatividad, en particular, se representen proyectivamente. Esta consideración es

la que lleva a la existencia de representaciones espinoriales, aparte de las representaciones verdaderas, en el espacio de Hilbert de la teoría. En este sentido, el teorema de Wigner es la piedra angular para establecer la cuantización de los sistemas físicos. Sin embargo, lamentablemente, esto no se destaca en la literatura.

En lo que sigue de esta introducción describiremos brevemente la organización del trabajo y nuestros resultados. En el primer capítulo se resumen aspectos geométricos usuales de la teoría de la relatividad general. Aunque lo que se expone se puede conseguir en la literatura (ver, p.e, [5]), no es tan común en la literatura física discusiones como considerar, por ejemplo, los campos vectoriales como derivaciones. Lo cual nos lleva al importante concepto del corchete de Lie, que usaremos en este trabajo. Por otra parte, esto nos sirve para establecer, desde el inicio, la notación y convenciones que usaremos a lo largo de la tesis.

En el segundo capítulo estudiaremos el espacio-tiempo de Minkowski. Este espacio-tiempo comparte con el espacio de de Sitter la característica de ser maximalmente simétrico y por lo tanto, el estudio de la mecánica cuántica allí nos sirve de base para nuestro objetivo final. Lo que exponemos en este capítulo son los resultados ya conocidos de la literatura de las simetrías del grupo de Poincaré realizadas vía el teorema de Wigner como representaciones proyectivas en un espacio de Hilbert. Esto lo hacemos en $(1+1)$ dimensiones únicamente ya que es el caso que nos interesa para comparar con de Sitter en $(1+1)$.

En el tercer capítulo estudiamos los aspectos geométricos del espacio-tiempo de de Sitter en $(3+1)$ dimensiones. En primer lugar, obtenemos de Sitter como solución local a la ecuación de Einstein. Sin embargo, los aspectos globales se obtienen si interpretamos a de Sitter como una variedad Lorentziana embebida en un espacio-tiempo de Minkowski de cinco dimensiones. En efecto, este espacio-tiempo resulta ser geodésicamente completo y satisface las ecuaciones de Einstein globalmente, previamente consideradas, como dijimos, solo localmente. Consistentemente, dicha variedad podría obtenerse de la solución local de la ecuación de Einstein si esta se completa mediante extensiones tipo Kruskal. Todo esto establece los aspectos globales del espacio-tiempo de de Sitter. También se obtuvieron los vectores de Killing en $(3+1)$ y en $(1+1)$ dimensiones y se calculó el álgebra de Lie de éstos en dos dimensiones. Este último resultado es importante para chequear la cuantización en el capítulo 4. Se demuestra que no existen vectores de Killing tipo tiempo, globales, en $(1+1)$ dimensiones, lo cual tiene consecuencias clásicas y cuánticas.

En el cuarto capítulo abordaremos la formulación de la mecánica cuántica relativista en dS_2 . La denominación relativista se refiere a la realización cuántica de las isometrías de dS_2 como operadores unitarios en un espacio de Hilbert, vía el teorema de Wigner. Afortunadamente, las representaciones irreducibles del grupo de isometrías $SL(2, \mathbb{R})$ fueron calculadas en [6]. Usamos estas representaciones para estudiar el análogo de una partícula masiva sin espín. Para realizar esta interpretación de la partícula se usa la idea de contracción a nivel de la representación del grupo y no del álgebra. Usando los resultados de la referencia [7] se obtienen las representaciones que corresponden a partículas masivas [sin espín, ya que este no existe para Poincaré en $(1+1)$] en dS_2 . En la cuantización se obtienen los observables que son los generadores de las simetrías relativistas. Resulta ser que el Hamiltoniano no es parte de estos generadores debido a la ausencia de vectores de Killing tipo tiempo. Se propone entonces, calcular el Hamiltoniano vía un campo vectorial geodésico. Se discute por último el operador posición que tampoco es parte del álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$.

Finalmente, en el quinto capítulo se hacen algunas discusiones y conclusiones.

Capítulo 1

Aspectos geométricos de la relatividad general

En este capítulo queremos introducir los conceptos básicos para entender la teoría de la relatividad general, como se presentan en algunos libros (Ver p.e. [5]). Esto lo hacemos para precisar el marco teórico que usaremos para obtener resultados con el fin de lograr nuestros objetivos. Además, nos sirve para establecer la notación y convenciones que realizaremos.

1.1. Variedades y campos tensoriales

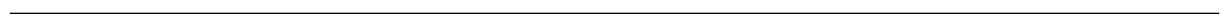
1.1.1. Variedad topológica diferenciable

Una variedad es un espacio topológico (Ver apéndice A) que satisface las siguientes propiedades:

1. Todo $p \in M$ se encuentra en algún abierto U_α de la variedad indexada por un conjunto de índices dados. Así, M está cubierta por el conjunto de abiertos $\{U_\alpha\}$ que forman lo que se denomina el atlas.
2. Para todo α existe un homeomorfismo $\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha)$ donde $\psi_\alpha(U_\alpha) \subset R^n$.
3. Sean U_α y U_β dos conjuntos abiertos del atlas se exige que:

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : R^n \longrightarrow R^n,$$

y su inversa:



$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : R^n \longrightarrow R^n$$

sean funciones infinitamente diferenciables.

Una variedad topológica que satisface estas propiedades recibe el nombre de **variedad diferenciable**. En principio, puede haber varias estructuras diferenciables asociadas a una misma variedad topológica.

Al homeomorfismo y su dominio: $(U_\alpha, \psi_\alpha(U_\alpha))$ con α fijo, se les denomina una **carta** también conocido como **sistema de coordenadas**.

Si los abiertos de la variedad son homeomorfos a R^n , tal que n es constante, diremos que la **variedad es n -dimensional**.

Este tipo de variedades son las que nos interesarán para estudiar la teoría relatividad general, con el requerimiento adicional de que sean tipo Hausdorff y segundo contable (Ver apéndice A). En el caso de la relatividad general de Einstein la variedad será por definición el espacio-tiempo y tendrá usualmente 4 dimensiones.

1.1.2. Vectores en una variedad

En la física pre-relativista donde el tiempo es un absoluto, es natural asociar al espacio de eventos una estructura de espacio vectorial. Esta asociación es válida debido a que el espacio donde ocurren estos eventos es precisamente el espacio euclídeo.

La estructura de espacio vectorial se pierde cuando nos encontramos en presencia de una variedad, un ejemplo de esto es la esfera S^2 (embebida en $\mathbb{R}^3$). Sin embargo, podríamos preguntarnos si existe alguna forma de definir un espacio vectorial sobre la variedad y hablar así de vectores. La respuesta es sí: a través de la noción de vector tangente como derivada direccional.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones infinito diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se define un vector tangente v en el punto $p \in M$ como la función $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual obedece la regla de Leibnitz y es lineal. La forma del vector tangentes vendrá dada por (ver [5]):

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v_{(p)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \psi_\alpha^{-1}) \Big|_{\psi_\alpha(p)} \quad f \circ \psi_\alpha^{-1} : R^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Debido a la linealidad de v el conjunto de vectores tangentes en p definen un espacio vectorial. Se puede demostrar que el conjunto de vectores $X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \psi_\alpha^{-1}) \Big|_{\psi_\alpha(p)}$ forman una base, llamada **base coordenada**, y por lo tanto expanden un espacio vectorial de dimensión n , denotado por $T_p(M)$, el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Un campo vectorial es la asignación de un vector en cada punto p de la variedad, es decir, en cada espacio tangente $T_p(M)$. Dada una carta se puede expresar el campo vectorial como:

$$V = \sum_{\mu=1}^n V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad V^\mu \in \mathcal{F}. \quad (1.2)$$

Como las funciones V^μ son infinitamente diferenciables el **campo vectorial** se denomina **suave**.

1.1.3. Tensor métrico

Sea V un espacio vectorial finito dimensional sobre el campo de los reales, considérese el conjunto V^* de funciones $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ donde se encuentra definida la suma y la multiplicación por un escalar, entonces V^* es un espacio vectorial que recibe el nombre de **espacio vectorial dual** y sus elementos **vectores duales o del dual**.

Sea V un espacio vectorial finito dimensional y V^* su espacio vectorial dual. Un tensor T de tipo (k, l) , k veces contravariante y l veces covariante, sobre V es una transformación multilinear dada por:

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Un tensor transforma el producto cartesiano de k vectores duales y l vectores ordinarios en números reales.

El espacio vectorial dual de $T_p(M)$ será $T_p(M)^*$. El conjunto de los tensores de tipo (k, l) , en un punto p , se escribe:

$$T_p(M) \otimes \dots \otimes T_p(M) \otimes T_p(M)^* \otimes \dots \otimes T_p(M)^*, \quad (1.4)$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial.

Se denominará campo tensorial a la asignación de un tensor, es decir, de un elemento del conjunto (1.4), en cada punto p de la variedad.

Un ejemplo de un campo tensorial lo constituye el tensor métrico, el cual es una transformación bilineal $g : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, un tensor dos veces covariante.

Dado un sistema de coordenadas, se puede escribir el campo tensorial métrico como:

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (1.5)$$

donde dx^μ es la base dual a la base coordenada.

De acuerdo a su definición el tensor métrico induce de forma natural un producto interno simétrico y no degenerado. Luego se puede pensar en la métrica como una distancia cuadrática, expresada como sigue:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.6)$$

Dada la métrica puede encontrarse una base ortonormal, esto es, en cada punto p :

$$\begin{cases} g(v_\mu, v_\nu) = 0, & \text{si } \mu \neq \nu, \\ g(v_\mu, v_\nu) = \pm 1, & \text{si } \mu = \nu. \end{cases} \quad (1.7)$$

Los signos $+$, $-$ de la métrica se denominan la **signatura**.

De acuerdo a la signatura las métricas se pueden clasificar en: 1) **Riemanianas**: aquellas definidas completamente positivas. 2) **Pseudoriemanianas**: aquellas definidas con signos positivos y negativos. 3) **Lorentziana**: si la signatura de la métrica incluye un solo signo menos y el resto de los signos positivos. En este trabajo la signatura que usaremos para la métrica será $(-+++)$ ya que las métricas de la relatividad general son Lorentzianas.

1.2. Curvatura

1.2.1. Operadores de derivación y transporte paralelo

Una de las características de un espacio-tiempo es su curvatura y uno de los intereses de la relatividad general es el estudio de esta característica fundamental. En una variedad diferenciable no está definido el concepto de curvatura esto es una estructura adicional. Por lo tanto, una variedad per se no se puede decir si es curva o plana. Por ejemplo, R^3 como variedad diferenciable no necesariamente se puede considerar plano (esto dependerá del transporte paralelo que se le de a dicho espacio).

Una noción de curvatura se obtiene a partir del llamado **transporte paralelo**, a lo largo de una curva, que se define sobre una superficie embebida en un espacio vectorial. Como tenemos un solo espacio vectorial se entiende lo que es un vector paralelo a otro. Sin embargo, cuando se habla de una variedad la noción de transporte paralelo no es tan

simple y la razón de esto reside en el hecho de comparar el vector final con el inicial, ya que en la variedad estos vectores se encuentran en espacios vectoriales distintos; luego una tarea importante es definir el concepto de transporte paralelo en una variedad.

En una superficie Σ , embebida en un espacio vectorial, se dice que un vector v_0 es paralelamente transportado si su derivada a lo largo de la curva γ (noción heredada de la estructura del espacio vectorial) sobre la cual se transporta, es nula.

La noción de transporte paralelo está relacionada con la definición de la derivada de un vector que resulta en un tensor. Si $v^\beta(u)$ son las componentes del campo vectorial, en una base coordenada, generadas a partir de transportar paralelamente el vector v_0 , de forma “inocente” podemos suponer que $\partial_\mu v^\beta$ transforma como las componente de un tensor, en la base coordenada, una vez covariante y una vez contravariante. Para ver si en efecto esto es así, cconsideremos usar una transformación de coordenadas $v^{\beta'} = X_{\delta}^{\beta'}(u) v^\delta(u)$, luego:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu'} v^{\beta'} &= \frac{\partial x^\theta}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\theta} (X_{\delta}^{\beta'}(u) v^\delta(u)) \\ &= X_{\mu'}^\theta X_{\delta}^{\beta'} \partial_\theta v^\delta + X_{\mu'}^\theta v^\delta \partial_\theta (X_{\delta}^{\beta'}).\end{aligned}\tag{1.8}$$

La presencia del segundo término en (1.8) es lo que hace que nuestra suposición sea incorrecta, ya que no se transforma como las componentes de un tensor una vez covariante y una vez contravariante.

Nos vemos entonces en la necesidad de definir un nuevo operador derivada cuyas componentes al derivar las componentes de un tensor transforme como las componentes de un nuevo tensor.

Se definirá entonces un **operador de derivación**, ∇ , sobre una variedad M como una función lineal que transforma campos tensoriales de rango $k+l$ en campos tensoriales de rango $k+(l+1)$ y que cumple la regla de Leibnitz y la condición de libre torsión ¹. En principio, en una misma variedad, pueden existir muchos operadores de derivación. Aunque estos operadores no son únicos ellos deben coincidir en su acción sobre campos escalares dando como resultado un vector covariante. Sea $\tilde{\nabla}$ otro operador de derivación, ϕ un campo escalar y w_σ un vector covariante, entonces:

$$\tilde{\nabla}_\mu (\phi \omega_\sigma) - \nabla_\mu (\phi \omega_\sigma) = \phi (\tilde{\nabla}_\mu \omega_\sigma - \nabla_\mu \omega_\sigma).\tag{1.9}$$

¹ $\nabla_\mu \nabla_\beta \phi = \nabla_\beta \nabla_\mu \phi$ (ver[5])

Luego, la diferencia de dos operadores cualquiera de derivación define (debido a la linealidad) las componentes de un tensor de tipo $(1, 2)$ a través de:

$$\phi(\tilde{\nabla}_\mu \omega_\sigma - \nabla_\mu \omega_\sigma) = C^\rho{}_{\mu\sigma} \omega_\rho. \quad (1.10)$$

Considerando la condición de libre torsión, se puede probar que $C^\rho{}_{\mu\sigma}$ es simétrico en los índices μ y σ .

Para cualquiera dos vectores contravariante v^α y covariante ω_σ , se puede demostrar que:

$$(\tilde{\nabla}_\mu - \nabla_\mu)(v^\alpha \omega_\alpha) = \omega_\alpha[(\tilde{\nabla}_\mu - \nabla_\mu)v^\alpha + C^\alpha{}_{\mu\nu} v^\nu] = 0. \quad (1.11)$$

Y por lo tanto:

$$\nabla_\mu v^\alpha = C^\alpha{}_{\mu\nu} v^\nu + \tilde{\nabla}_\mu v^\alpha. \quad (1.12)$$

Luego, la diferencia $\tilde{\nabla}_\mu - \nabla_\mu$ está caracterizada por el tensor $C^\alpha{}_{\mu\nu}$. Las propiedades para obtener (1.10) y (1.12) no dependen de que el operador de derivación transforme componentes de campos tensoriales de rango $k + l$ en componentes de campos tensoriales de rango $k + (l + 1)$. Por lo tanto, cuando $\tilde{\nabla}_\mu$ es la derivada ordinaria ∂_μ entonces $C^\alpha{}_{\mu\nu}$ se conoce como símbolo de Christoffel $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ y (1.12) se escribe:

$$\nabla_\mu v^\alpha = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} v^\nu + \partial_\mu v^\alpha. \quad (1.13)$$

La expresión (1.13) define un operador de derivación, aunque la derivada ordinaria no lo es, y recibe el nombre de **derivada covariante**.

A partir de la redefinición del operador de derivación para una variedad M surge una estructura matemática nueva, $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$, que establece como se conectan los diferentes espacios vectoriales tangentes a lo largo de una curva. En efecto, tomando la idea de transporte paralelo en superficies tendremos que todo vector v^μ paralelamente transportado a lo largo de una curva $\gamma(t)$, cuyo vector tangente es $t^\mu = dx^\mu/dt$ debe satisfacer:

$$t^\mu \nabla_\mu v^\alpha = 0 \quad (1.14)$$

ó

$$t^\mu \partial_\mu v^\alpha + t^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} v^\nu = 0. \quad (1.15)$$

Dados dos vectores v^β y w^ν , que satisfacen (1.14), pediremos que el producto interno de esos vectores se conserve al ser paralelamente transportado, esto es:

$$\begin{aligned}
t^\mu \nabla_\mu (g_{\beta\nu} v^\beta w^\nu) &= 0, \\
t^\mu v^\beta w^\nu \nabla_\mu (g_{\beta\nu}) &= 0, \\
\nabla_\mu (g_{\beta\nu}) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Considerando la expresión más general para la derivada covariante de un tensor (Ver [5]), tendremos que:

$$\nabla_\mu (g_{\beta\nu}) = \partial_\mu g_{\beta\nu} - \Gamma^\delta_{\mu\beta} g_{\delta\nu} - \Gamma^\delta_{\mu\nu} g_{\beta\delta}. \tag{1.17}$$

Empleando la simetría del tensor, se encuentra que:

$$\Gamma^\nu_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\delta} [\partial_\mu g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\beta}]. \tag{1.18}$$

1.2.2. Tensor de Riemann

En general, el transporte paralelo, definido por (1.18), es camino dependiente. Lo cual no ocurre si el espacio es plano por definición. Esta dependencia del transporte paralelo con el camino se puede conectar con la existencia de un tensor denominado tensor de Riemann. En efecto, sea ∇_μ el operador de derivación, se puede calcular la acción del operadores de derivación dos veces sobre $(\phi \omega_\nu)$:

$$\nabla_\mu \nabla_\beta (\phi \omega_\nu) - \nabla_\beta \nabla_\mu (\phi \omega_\nu) = \phi (\nabla_\mu \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\mu) \omega_\nu, \tag{1.19}$$

luego la diferencia mostrada en (1.19) define un tensor del tipo (1,3), es decir,

$$\nabla_\mu \nabla_\beta \omega_\nu - \nabla_\beta \nabla_\mu \omega_\nu = R_{\mu\beta\nu}{}^\sigma \omega_\sigma. \tag{1.20}$$

El tensor $R_{\mu\beta\nu}{}^\sigma$ mostrado en la ecuación (1.20) se conoce como **tensor de Riemann**. Es fácil verificar que la dependencia del transporte paralelo con el camino tiene que ver con la no conmutatividad de las segundas derivadas covariantes. Es decir, que si el tensor de Riemann es cero el transporte paralelo no es camino dependiente.

Una variedad diferenciable con la estructura adicional del transporte paralelo, antes definido, se dice **curva** si el tensor de Riemann es distinto de cero. Por ello a este tensor se le conoce también como **tensor de curvatura**.

Consideremos definir: $\nabla_\beta \omega_\nu \equiv T_{\beta\nu}$ y $\nabla_\mu \omega_\nu \equiv T_{\mu\nu}$. Luego,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T_{\beta\nu} &= \partial_\mu \nabla_\beta \omega_\nu - \Gamma_{\mu\beta}{}^\delta T_{\delta\nu} - \Gamma_{\mu\nu}{}^\delta T_{\beta\delta}, \\ &= \partial_\mu \partial_\beta \omega_\nu - \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}{}^\sigma \omega_\sigma - \Gamma_{\mu\beta}{}^\delta \partial_\delta \omega_\nu + \Gamma_{\mu\beta}{}^\delta \Gamma_{\delta\nu}{}^\alpha \omega_\alpha - \Gamma_{\mu\nu}{}^\delta \partial_\delta \omega_\beta + \\ &\quad \Gamma_{\mu\nu}{}^\delta \Gamma_{\beta\delta}{}^\theta \omega_\theta.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Si se efectúa lo mismo para $\nabla_\beta(\nabla_\mu \omega_\nu)$ y se sustituye en (1.20) entonces el tensor de Riemann toma, en una base coordenada, la forma:

$$R_{\mu\beta\nu}{}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\nu}{}^\delta \Gamma_{\beta\delta}{}^\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}{}^\sigma}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\beta}{}^\delta \Gamma_{\mu\delta}{}^\sigma\tag{1.22}$$

El tensor de Riemann de acuerdo a (1.22) tiene 4^n componentes no todas independientes ya que satisface las siguientes propiedades:

1. Es antisimétrico en los dos primeros índices: $R_{\mu\beta\nu}{}^\delta = -R_{\beta\mu\nu}{}^\delta$
2. $R_{[\mu\beta\nu]}{}^\delta = 0$
3. Es simétrico en los dos últimos índices: $R_{\mu\beta\nu\delta} = -R_{\mu\beta\delta\nu}$
4. De las tres propiedades anteriores se puede deducir que: $R_{\mu\beta\nu\delta} = R_{\nu\delta\mu\beta}$
5. Satisface la identidad de Bianchi: $\nabla_\mu R_{\beta\delta\nu}{}^\gamma + \nabla_\nu R_{\beta\mu\delta}{}^\gamma + \nabla_\delta R_{\beta\nu\mu}{}^\gamma = 0$

Se puede definir un nuevo tensor llamado el **tensor de Ricci** según:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\beta\nu}{}^\beta\tag{1.23}$$

Este tensor hereda propiedades de las simetrías del tensor de Riemann.

Tomando la traza del tensor de Ricci, se obtiene el **escalar de curvatura**:

$$R_\beta{}^\beta = R\tag{1.24}$$

Otro escalar también útil que se puede calcular es:

$$R_{\mu\beta\nu\sigma} R^{\mu\beta\nu\sigma} = \mathcal{R}\tag{1.25}$$

1.2.3. Geodésicas

Una geodésica, como imagen, es intuitivamente la línea más recta que se podría dibujar sobre una superficie, luego la característica principal de una curva geodésica es que el vector tangente es paralelamente transportado así mismo, esto es, cumple con la ecuación (1.14), con $v^\mu = t^\mu$, o sea:

$$T^\mu \nabla_\mu T^\beta = 0. \quad (1.26)$$

O en término de las componentes de la base:

$$\frac{dT^\beta}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}{}^\beta T^\mu T^\nu = 0. \quad (1.27)$$

Los vectores tangentes son simplemente $\frac{dx^\mu(t)}{dt}$, luego la ecuación que debe satisfacer toda geodésica se escribe:

$$\frac{d^2 x^\beta(t)}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}{}^\beta \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (1.28)$$

Este conjunto de ecuaciones no es más que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que proporciona una solución general $x^\mu(t)$ y recibe el nombre de **ecuación de la geodésica**. De acuerdo al teorema de existencia y unicidad del cálculo diferencial dadas unas condiciones iniciales existe una única geodésica que las satisface, más precisamente:

Teorema 1 *Dada M una variedad, para todo $p \in M$ y $v \in T_p(M)$ existe una única geodésica $\alpha_v : I_v \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que:*

$$\begin{aligned} \alpha_v(t_0) &= p, \\ \alpha'_v(t_0) &= v. \end{aligned}$$

Cabe destacar que las soluciones que aporta el conjunto de ecuaciones (??) son funciones, **las curvas geodésicas**.

Se puede pensar en la ecuación de la geodésica como una “especie de segunda ley de Newton”, aplicada a una partícula libre. Dando como consecuencia la “primera ley de Newton”, esto es, una partícula sigue una geodésica a menos que existan fuerzas que la desvíe de su movimiento geodésico.

Una característica sumamente importante de las geodésicas es que son curvas de rapidez constante, esto puede verse directamente de la ecuación (1.26). Este resultado puede enunciarse en el siguiente teorema:

Teorema 2 Sea M una variedad espacio-temporal con métrica g y $\alpha : I \rightarrow M$ una geodésica. Entonces $g(\alpha'(t), \alpha'(t))$ es constante sobre I .

Un concepto importante para el desarrollo de esta tesis es el de **completitud geodésica** (ver [5]); una variedad espacio-temporal se dice geodésicamente completa si cada una de sus geodésicas está definida sobre todo $\mathbb{R}$ o existe una singularidad esencial que no permite que su dominio sea todo $\mathbb{R}$. Este concepto es de suma importancia para construir la física en una variedad espacio-temporal. Notemos, que si la curva no está dada como función, no es claro que es una geodésica completa ya que existen muchas parametrizaciones. En ese caso, se escoge que el parámetro sea el parámetro afín. Para nosotros una curva es una función (viene con su parametrización).

1.3. Simetrías

Para la física las simetrías son sumamente importantes ya que están relacionadas con cantidades conservadas, como bien es sabido de la mecánica clásica, por el famoso teorema de Noether. De forma simple, se puede decir que un sistema presenta una simetría si al aplicar alguna transformación sobre los elementos del sistema éste permanece inmutable. En particular, estaremos interesados en aquellas transformaciones que mantienen la métrica.

El lenguaje matemático de las simetrías es la teoría de grupos, específicamente, las simetrías están asociadas a los grupos de Lie y su álgebra.

1.3.1. Isometrías

Sean M y N variedades no necesariamente de la misma dimensión y $\phi : M \rightarrow N$ una transformación diferenciable que envía puntos de una variedad en otra. En cualquier punto p de la variedad se define la **función derivada de ϕ** como una transformación lineal (ver p.e. [5], apéndice C ²):

$$\phi^*(p) : T_p(M) \rightarrow T_{\phi(p)}(N). \quad (1.29)$$

Luego, la derivada de ϕ envía vectores tangentes en $p \in M$ a vectores tangentes en $\phi(p) \in N$. La matriz de componentes de ϕ^* en una base coordenada de un sistema de coordenadas $\{x^\nu\}$ en p y un sistema de coordenadas $\{y^\mu\}$ en $\phi(p)$ es igual a la matriz jacobiana del mapa ϕ entre las coordenadas $(\phi^*)^\mu_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$.

²Nótese la notación no usual de la derivada en [5]

El caso de interés, donde precisamente puede hablarse de simetrías, se logra cuando la transformación es de la variedad en sí misma:

$$\phi : M \longrightarrow M \quad (1.30)$$

y

$$\phi^*(p) : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(M). \quad (1.31)$$

Si se quiere que la transformación ϕ^* envíe campos vectoriales en campos vectoriales entonces la transformación debe ser además una biyección.

Si v^μ es un campo vectorial sobre M tal que:

$$\phi^* v^\mu = v^\mu, \quad (1.32)$$

se dirá que $\phi(p)$ es una **simetría de transformación** para el campo vectorial.

Puesto que toda transformación lineal define una transformación sobre los tensores, se puede ver a ϕ^* como una transformación entre campos tensoriales del mismo tipo. Luego si g es el campo tensorial métrico y ϕ^* actúa sobre él de forma que:

$$\phi^* g = g, \quad (1.33)$$

se dirá que ϕ es una **simetría de transformación para la métrica** o una **isometría**. El conjunto de todas las isometrías forma un grupo vía la composición.

1.3.2. Vectores de Killing

Como se vió en la sección 1.1.2 se puede expresar localmente un campo vectorial en una carta según (1.2). Las componentes V^μ pueden pensarse como las componentes de un campo de velocidades en $\mathbb{R}^n$ y uno podría pensar en calcular las curvas integrales de ese campo resolviendo la siguiente ecuación:

$$V^\mu(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (1.34)$$

con la condición inicial $x_{(p)}^\mu$ en $t = 0$.

Las curvas integrales soluciones de (1.34) forman curvas $x(t)$ en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, mediante la siguiente transformación podemos transformar esas curvas a la variedad:

$$\phi_{t(p)} = \psi_\alpha^{-1}(x(t)). \quad (1.35)$$

Luego, para cada curva $x(t)$ existe una curva $\phi_{t(p)}$ en la variedad M . Al movernos en el parámetro t esta transformación actuará como:

$$\phi_{t(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M. \quad (1.36)$$

Si t está definido para todo $\mathbb{R}$ las funciones $\phi_{t(p)}$ formaran un grupo vía la composición que llamaremos **grupo monoparamétrico** y a V su **campo generador completo**. En caso de que $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ diremos que las funciones $\phi_{t(p)}$ forman un **grupo local monoparamétrico**.

Se denomina **campo vectorial de Killing** a aquel campo vectorial ξ^a que genera un grupo monoparamétrico tal que ese grupo mono-paramétrico es un subgrupo del grupo de isometrías. Por lo tanto, un campo vectorial de Killing, está globalmente definido sobre la variedad. La condición necesaria para que un campo vectorial sea de Killing está dada por:

$$\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\beta} - 2 \sum_{c=1}^n \Gamma_{\mu\beta}{}^\sigma \xi_\sigma = 0. \quad (1.37)$$

El sistema de $n(n+1)/2$ ecuaciones dado por (1.37) se denomina ecuación de Killing, donde $\xi_\sigma = \sum_{\delta=1}^n g_{\sigma\delta} \xi^\delta$. Una demostración de la ecuación puede verse en [5].

Un teorema que conecta los vectores de Killing con las leyes de conservación sigue a continuación.

Teorema 3 *Sea ξ^μ un campo vectorial de Killing y γ una geodésica con vector tangente u^ρ entonces:*

$$\begin{aligned} u^\rho \nabla_\rho (\xi^\mu u^\sigma) &= u^\rho u^\sigma \nabla_\rho \xi^\mu + \xi^\mu u^\rho \nabla_\rho u^\sigma, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

De acuerdo al teorema anterior tendremos que cada uno de los vectores de Killing conlleva a una cantidad conservada.

1.3.3. Álgebra de Lie

Dados dos campos vectoriales v y w es posible definir un nuevo campo vectorial, $[v, w]$, denominado el **corchete de Lie**, por:

$$[v, w](f) = v[w(f)] - w[v(f)] \quad (1.39)$$

Se puede chequear que (1.39) define un funcional bilineal, esto es, lineal en cada uno de sus argumentos. Sea X, Y, Z campos vectoriales en una variedad el corchete de Lie también satisface:

1. Es anti-simétrico: $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Sea $\chi(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre una variedad M , entonces $\chi(M)$ es un espacio vectorial real. $\chi(M)$ con el producto definido en (1.39) forma por definición un **álgebra de Lie** (ver p.e [12]).

Capítulo 2

El espacio-tiempo de Minkowski

El espacio-tiempo de Minkowski $\mathcal{M}^{3,1}$, es el caso más simple de un espacio-tiempo en relatividad general y es el que estudiaremos en este capítulo para exponer algunos conceptos de esta teoría. Este espacio-tiempo es solución de las ecuaciones de Einstein de vacío y se caracteriza por ser un espacio maximalmente simétrico y geodésicamente completo. Consideramos este espacio-tiempo porque la técnica de cuantización que se usa allí es similar a la que aplicaremos en un espacio curvo. Además, el límite de un espacio curvo a curvatura cero, en un cierto sentido, debería de dar Minkowski. Por lo tanto debemos tener claro los resultados de su geometría clásica y de su mecánica cuántica. Los aspectos de la geometría clásica los discutiremos en $(3+1)$ mientras que la mecánica cuántica será discutida solo en el caso simple de $(1+1)$ que es el que nos interesará posteriormente.

2.1. Aspectos clásicos

Minkowski como espacio topológico es un R^4 y obviamente puede ser cubierto por una sola carta: $\{U = R^4, \psi = \text{id.}\}$, que recibe el nombre de coordenadas cartesianas.

2.1.1. Tensor métrico

En el caso de Minkowski en coordenadas cartesianas el tensor métrico viene dado por:

$$[g_{\mu,\nu}] = [\eta_{\mu,\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = 1. \quad (2.1)$$

Debido a la signatura de la métrica, Minkowski es una variedad Lorentziana, como debe ser para cualquier espacio-tiempo.

2.1.2. Símbolos de Christoffel y tensor de Riemann

En el caso del espacio-tiempo de Minkowski, en coordenadas cartesianas, como las componentes del tensor métrico son constantes, entonces los símbolos de Christoffel son nulos y por ende las componentes del tensor de Riemann también, esto significa que el tensor de Riemann será cero independientemente del sistema de coordenadas, pero, en otras coordenadas los símbolos de Christoffel no serán cero (ya que no es un tensor).

2.1.3. Geodésicas

Las geodésicas para $\mathcal{M}^{3,1}$, en coordenadas cartesianas son muy simples de calcular debido a la ausencia de los símbolos de Christoffel, luego, la ecuación de las geodésicas se reduce a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden homogéneas dado por:

$$\frac{d^2 x^\mu(s)}{ds} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Cuya solución más general son funciones lineales de las coordenadas, por ejemplo, sea x_1 una coordenada espacial de $\mathcal{M}^{3,1}$, entonces la geodésica en esta coordenada es de la forma:

$$x^1(t) = C_1 s + C_2, \quad -\infty < s < \infty.$$

Debido a que las curvas geodésicas están definidas para todo número real, este espacio-tiempo es geodésicamente completo.

2.1.4. Simetrías

De acuerdo a lo explicado en la sección (1.3) debemos buscar las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski, es decir, las transformaciones $\phi : \mathcal{M}^{3,1} \rightarrow \mathcal{M}^{3,1}$ tal que satisfacen la expresión (1.33). Como fue dicho allí, estas transformaciones forman un grupo. Este grupo es isomorfo al grupo de Poincaré, el cual precisamos a continuación.

Grupo de Lorentz y Poincaré en (3+1)

Una transformación lineal $L : \mathcal{M}^{3,1} \rightarrow \mathcal{M}^{3,1}$ se dice ortogonal sobre $\mathcal{M}^{3,1}$ si $g(Lx, Ly) = g(x, y) \forall x, y \in \mathcal{M}$. Como el producto interno es no degenerado entonces una transformación ortogonal es uno a uno y L lleva cualquier base ortonormal en una base ortonormal. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de $\mathcal{M}^{3,1}$ entonces los vectores $\hat{e}_1 = Le_1$, $\hat{e}_2 = Le_2$, $\hat{e}_3 = Le_3$ y $\hat{e}_4 = Le_4$ también son una base ortonormal para Minkowski. En particular podemos escribir:

$$e_\mu = \Lambda^1{}_\mu e_1 + \Lambda^2{}_\mu e_2 + \Lambda^3{}_\mu e_3 + \Lambda^4{}_\mu e_4, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (2.2)$$

Y debido a la ortonormalidad de la base se obtiene:

$$\begin{aligned} g(e_\mu, e_\nu) &= \eta_{\mu\nu}, \\ &= \Lambda^1{}_\mu \Lambda^1{}_\nu + \Lambda^2{}_\mu \Lambda^2{}_\nu + \Lambda^3{}_\mu \Lambda^3{}_\nu + \Lambda^4{}_\mu \Lambda^4{}_\nu, \\ &= \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Definiremos la matriz $\Lambda = [\Lambda^\nu{}_\mu]_{\mu, \nu=1,2,3,4}$ asociada con la transformación L y la base ortonormal $\{e_\mu\}$ por:

$$[\Lambda^\nu{}_\mu] = \begin{bmatrix} \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^4{}_1 \\ \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^4{}_2 \\ \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 & \Lambda^4{}_3 \\ \Lambda^1{}_4 & \Lambda^2{}_4 & \Lambda^3{}_4 & \Lambda^4{}_4 \end{bmatrix}, \quad c = 1. \quad (2.4)$$

Se puede demostrar, haciendo la respectiva multiplicación de matrices, que la ecuación (2.3) es equivalente a la expresión:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (2.5)$$

Como las transformaciones ortogonales, son uno a uno y por lo tanto isomorfismos existe la transformación Λ^{-1} y de acuerdo a (2.5) esta satisface:

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \quad (2.6)$$

Cualquier matriz que satisfaga (2.5), es llamada una transformación de Lorentz y se puede demostrar que el conjunto de estas transformaciones forman un grupo bajo la multiplicación de matrices denominado el **grupo de Lorentz**, $L(3, 1)$, que es parte del grupo de isometrías de Minkowski y es por lo tanto un subgrupo del grupo de Poincaré.

Si hacemos $\mu = \nu = 4$ entonces obtendremos de (2.3):

$$(\Lambda_4^1)^2 + (\Lambda_4^2)^2 + (\Lambda_4^3)^2 + (\Lambda_4^4)^2 = -1. \quad (2.7)$$

Luego:

$$(\Lambda_4^4)^2 \geq 1. \quad (2.8)$$

Consecuentemente:

$$\Lambda_4^4 \geq 1 \quad \text{ó} \quad \Lambda_4^4 \leq -1. \quad (2.9)$$

Más aún si calculamos $\det(\Lambda^T \eta \Lambda)$ obtendremos otra restricción para las transformaciones de Lorentz dada por:

$$\det(\Lambda) = \pm 1. \quad (2.10)$$

Debido a (2.5) el grupo de Lorentz en $(3+1)$ se puede ver como un grupo de Lie Matricial, el grupo $\mathcal{O}(3,1)$, y sus elementos serán funciones continuas de los parámetros del grupo. Debido a las restricciones (2.9) y (2.10) y a la continuidad de los parámetros del grupo, el grupo de Lorentz se divide en cuatro componentes conexas pero, disconexas entre sí:

$$L_+^\uparrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(3,1) \mid \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ y } \det \Lambda = 1 \}, \quad (2.11)$$

$$L_+^\downarrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(3,1) \mid \Lambda_0^0 \leq -1 \text{ y } \det \Lambda = 1 \}, \quad (2.12)$$

$$L_-^\uparrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(3,1) \mid \Lambda_0^0 \geq 1 \text{ y } \det \Lambda = -1 \}, \quad (2.13)$$

$$L_-^\downarrow \equiv \{ \Lambda \in \mathcal{O}(3,1) \mid \Lambda_0^0 \leq -1 \text{ y } \det \Lambda = -1 \}, \quad (2.14)$$

de donde solo $L_+^\uparrow$ es un subgrupo de $L(3,1)$, de hecho es la única componente conectada con la identidad.

A $L_+^\uparrow$ se le suele llamar grupo de Lorentz ortocrono propio, o grupo restringido de Lorentz. Este se puede realizar, en una base ortonormal, como grupo de Lie matricial de 6 dimensiones: $\mathcal{SO}^\uparrow(3,1)$.

El grupo de Poincaré $\Pi(3, 1)$ se define como el grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}^{3,1}$, que preserva la “distancia” de Lorentz (boosts, rotaciones y traslaciones):

$$d_L(x, y) = -(x_0 - y_0)^2 + (x_i - y_i)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^{3,1}; \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Un elemento de $\Pi(3, 1)$ se escribirá como (a, Λ) con $a \in \mathbb{R}^{3,1}$ y $\Lambda \in \mathbb{L}$; su producto viene dado por:

$$(a, \Lambda)(b, \Gamma) = (a + \Lambda b, \Lambda \Gamma), \quad (2.16)$$

es decir, es un producto semidirecto (esto se sigue de la acción de Poincaré sobre el espacio-tiempo y que la composición de dos transformaciones es diferente a la de un producto directo). Entonces el grupo de Poincaré se escribe como:

$$\Pi(3, 1) = \mathbb{R}^{(3+1)} \odot \mathcal{O}(3, 1),$$

donde $\mathbb{R}^{(3+1)}$ es el grupo conmutativo de las traslaciones, $\mathcal{O}(3, 1)$ es el grupo de Lorentz y el símbolo $\odot$ denota el producto semidirecto.

El grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(3, 1)$ viene dado por:

$$\Pi_+^\uparrow(3, 1) = \mathbb{R}^{(3+1)} \odot \mathcal{SO}^\uparrow(3, 1). \quad (2.17)$$

2.1.5. Vectores de Killing

Hagamos explícitamente el cálculo de los vectores de Killing en el espacio-tiempo de Minkowski usando coordenadas cartesianas, luego las ecuaciones de Killing en componentes son:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = 0 & \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} = 0 \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} = 0 & \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^0} = 0 \\ \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} = 0 & -\frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^0} = 0 & -\frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} = 0 \\ -\frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^0} = 0 & & \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La solución más general a este conjunto de ecuaciones para las componentes de los

vectores de Killing es:

$$\xi^1(x^2, x^3, x^0) = C_1 x^3 + C_2 x^2 - D_1 x^0 + F_1, \quad (2.19)$$

$$\xi^2(x^1, x^3, x^0) = C_3 x^3 - C_2 x^1 - D_2 x^0 + F_2, \quad (2.20)$$

$$\xi^3(x^1, x^2, x^0) = -C_1 x^1 - C_3 x^2 + D_3 x^0 + F_3, \quad (2.21)$$

$$\xi^0(x^1, x^2, x^3) = -D_1 x^1 + D_3 x^3 + D_2 x^2 + F_0. \quad (2.22)$$

Luego, el vector más general de Killing se escribe como:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} = & C_1 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + C_2 \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + C_3 \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ & - D_1 \left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} \right) + D_2 \left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} \right) + D_3 \left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \\ & + F_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + F_3 \frac{\partial}{\partial x^3} + F_0 \frac{\partial}{\partial x^0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como existen diez constantes independientes que pueden anularse o no, existen diez vectores de Killing independientes. Por lo tanto, el espacio-tiempo de Minkowski es un espacio **maximalmente simétrico**.

2.1.6. Álgebra de Lie

El álgebra de Lie del grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(3, 1)$ es un espacio vectorial de 10 dimensiones, cuyo producto en una base viene dado por:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2.24)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu, \quad (2.25)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}. \quad (2.26)$$

donde $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$. Los elementos de la base $M^{\mu\nu}$ son los generadores asociados al momento angular con la propiedad de antisimetría $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$, y los elementos de la base P^μ son los generadores asociados al momentum lineal.

Consistente con lo discutido en la sección (1.3.3), los vectores de Killing del espacio de Minkowski dados por (2.23) satisfacen un álgebra de Lie isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Poincaré, dada por (2.24), (2.25) y (2.26).

2.2. Aspectos cuánticos

2.2.1. Mecánica cuántica

En esta subsección queremos recordar los postulados fundamentales de la mecánica cuántica en general y el teorema de Wigner, que va a resultar la pieza fundamental en la construcción de los observables en mecánica cuántica, en espacio curvo, que más adelante consideraremos.

Los postulados de la mecánica cuántica son los mismos independientemente del espacio-tiempo, lo que si depende del espacio-tiempo son algunos de los observables. Los postulados son los siguientes:

- Los estados físicos del sistema son representados por rayos unitarios $\hat{\Psi}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Recordemos que:

1. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo y separable, dotado de un producto interno, $\langle . | . \rangle$, el cual permite introducir una norma positiva con respecto a la cual es completo (toda sucesión de Cauchy converge fuertemente en él).
2. Un rayo es un conjunto de vectores normalizados definidos por:

$$\hat{\Psi} = \{ \lambda \Psi : |\lambda| = 1, \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \text{ con } \Psi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C} \}. \quad (2.27)$$

- Toda cantidad medible $\mathcal{A}$ tiene asociado un observable en $\mathcal{H}$. Los observables están representados por operadores lineales y autoadjuntos del espacio de Hilbert.

Esto es, si A es un observable, de dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, se verifica que:

1. $A(\lambda\Psi + \eta\Phi) = \lambda A\Psi + \eta A\Phi$.
2. $A^\dagger = A$, donde $A^\dagger$ es el adjunto de A . Así, para cualquier operador lineal:

$$\langle \Phi | \mathcal{A} \Psi \rangle = \langle \mathcal{A} \Phi | \Psi \rangle \quad \forall \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger).$$

- El valor medio de un observable A en un estado $\Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ que corresponde al rayo $\hat{\Psi}$ vendrá dado por:

$$\langle \Psi | \mathcal{A} \Psi \rangle \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) tendrá exactamente el mismo valor para cualquier vector estado perteneciente a un mismo rayo unitario.

- Los únicos valores medibles posibles son los valores medios de los observables.
- La dinámica viene dada, para sistemas aislados, por una representación unitaria del grupo de los reales, $U(t)$ $t \in \mathbb{R}$, tal que si en el tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ el estado es $\Psi(t_0)$, en el marco de Schroedinger, el estado en el tiempo t vendrá dado por:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t - t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (2.29)$$

con $U(t) = e^{\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}}$, siendo $\hat{H}$ un observable conocido como el **hamiltoniano** (generador de la dinámica). Como consecuencia, se tiene que $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{D}(\hat{H})$, entonces:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.30)$$

Estos son todos los postulados. De ahora en adelante consideraremos tomar, por simplicidad, las unidades donde $\hbar = 1$.

Para garantizar que nuestra teoría de la mecánica cuántica sea relativista debemos pedirle que preserve los valores medios de los observables. Así, si un observador inercial S ve a un sistema físico en estados representados por los rayos unitarios Ψ ó Φ y otro observador inercial S' ve al mismo sistema físico representado por los rayos unitarios Ψ' ó Φ' ambos observadores deberán coincidir en los valores medios, en particular, se debe cumplir que:

$$|\langle \Psi' | \Phi' \rangle|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 \text{ donde } \Psi \in \hat{\Psi}, \Phi \in \hat{\Phi}, \Psi' \in \hat{\Psi}', \Phi' \in \hat{\Phi}',$$

es decir, que la probabilidad de transición se conserve.

Ahora bien, nosotros sabemos cómo actúan las transformaciones de simetría sobre el espacio-tiempo [sección(1.3.1)] pero, podemos preguntarnos como actúan estas transformaciones en el espacio de la mecánica cuántica: el espacio de Hilbert. Para responder a ello, Wigner demostró el siguiente teorema:

Teorema 4 (Teorema de Wigner) Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ espacios de Hilbert y T una transformación de los rayos unitarios en $\mathcal{H}$ a los rayos unitarios en $\mathcal{H}'$, tal que:

$$T : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}', \quad (2.31)$$

que satisface la condición

$$| \langle T\hat{\Psi} | T\hat{\Psi} \rangle |^2 = | \langle \hat{\Psi}' | \hat{\Psi}' \rangle |^2 = | \langle \hat{\Psi} | \hat{\Psi} \rangle |^2, \quad (2.32)$$

entonces existe un operador U definido salvo un factor de fase, cuyo dominio son todos los vectores estados Ψ tal que si $\Psi \in \hat{\Psi}$ entonces $U\Psi \in \hat{\Psi}'$. Este operador inducido por T debe ser unitario y lineal

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle, \quad (2.33)$$

$$U(\lambda\Psi + \gamma\Phi) = \lambda U\Psi + \gamma U\Phi, \quad (2.34)$$

o anti-unitario y anti-lineal.

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}, \quad (2.35)$$

$$U(\lambda\Psi + \gamma\Phi) = \bar{\lambda}U\Psi + \bar{\gamma}U\Phi, \quad (2.36)$$

donde $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$, $\Phi \in \hat{\Phi}$, $\Psi \in \hat{\Psi}$.

La transformación de simetría trivial $\hat{\Phi} \rightarrow \hat{\Phi}$ se representa con el operador identidad $U = 1$ salvo una fase.

En pocas palabras lo que nos dice este teorema es que las transformaciones de simetría del espacio-tiempo T_i , que actúan sobre los rayos, vendrán representadas en el espacio de Hilbert mediante un operador, $U(T_i)$, unitario o antiunitario.

Ya que el conjunto de transformaciones del espacio-tiempo forman un grupo cuyo producto es la composición, es fácil notar que el producto de un par de representaciones así como la representación del producto de un par de transformaciones llevan un vector de $\mathcal{H}$ en un par de vectores de $\mathcal{H}'$ generalmente distintos pero, pertenecientes a un mismo rayo unitario; para ver esto definamos un par de transformaciones T_1 y T_2

$$T_1 : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}', \quad (2.37)$$

$$T_2 : \hat{\Psi}' \rightarrow \hat{\Psi}'', \quad (2.38)$$

Por definición:

$$T_2(T_1) : \hat{\Psi} \rightarrow \hat{\Psi}'', \quad (2.39)$$

Ahora, de acuerdo al teorema:

$$U(T_1) : \Psi \rightarrow \Psi' \text{ si } \Psi \in \hat{\Psi} \rightarrow U\Psi \in \hat{\Psi}', \quad (2.40)$$

$$U(T_2) : \Psi' \rightarrow \Psi'' \text{ si } \Psi' \in \hat{\Psi}' \rightarrow U\Psi' \in \hat{\Psi}'', \quad (2.41)$$

$$U(T_2T_1) : \Psi \rightarrow \Psi'' \in \hat{\Psi}''. \quad (2.42)$$

Luego:

$$U(T_1) \circ U(T_2) = U(T_2)U(T_1) : \Psi \rightarrow \Psi'' \in \hat{\Psi}''. \quad (2.43)$$

Entonces:

$$U(T_2T_1) = e^{i\alpha(T_2, T_1)} U(T_2)U(T_1), \quad \alpha(T_2, T_1) \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

La expresión (2.44) no define una representación de grupo, debido a la fase que aquí aparece. Esta fase es puramente cuántica y es la responsable de numerosos efectos físicos sumamente importantes como por ejemplo el espín.

Las representaciones que cumplen (2.44), se denominan **representaciones proyectivas**. Cuando $\alpha = 0$ se llaman **representaciones verdaderas**. Existen también representaciones proyectivas cuya fase global puede ser llevada a cero convirtiéndose en una representación verdadera, en este sentido las representaciones proyectivas contienen a las verdaderas.

Se puede demostrar que si el grupo de transformaciones de simetría del espacio-tiempo es un grupo de Lie conexo (puede ser conectado continuamente con la identidad) entonces el grupo deberá ser representado proyectivamente por operadores lineales y unitarios. (esto es, no aparecen operadores anti-unitarios en la representación)

Para conocer entonces las simetrías de la mecánica cuántica asociadas con el espacio-tiempo debemos considerar estudiar las representaciones proyectivas de su grupo de isometría. Sin embargo, en algunos casos [para el grupo de Poincaré en (3+1)] bastará con estudiar las representaciones verdaderas del grupo de recubrimiento universal del grupo de isometría ya que estas proporcionan todas las representaciones proyectivas del grupo de interés.

2.2.2. Cuantización

El proceso de construir la mecánica cuántica de un sistema físico dado depende, obviamente, de dicho sistema y de cuales son las cantidades físicas a cuantizar.

La formulación usual parte de un sistema físico definido a través de la clásica. En este caso, se tiene una formulación lagrangiana o hamiltoniana (este último más general) y a partir de ellas con un procedimiento llamado cuantización canónica, por ejemplo, se construyen observables (operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert). Sin embargo, es bien conocido que este procedimiento es muy ambiguo y lleva en muchos casos a una cuantización dependiente de coordenadas, lo cual no debería de ser (ver p.e. [11]), ya que la física es independiente de coordenadas. Otra crítica más fundamental a este procedimiento es su afirmación implícita de obtener la cuántica a partir de la clásica. Cuando, lo que debería de ocurrir es lo contrario, es decir, la clásica se debe obtener de la cuántica.

En este trabajo la idea nuestra es cuantizar cantidades clásicas geométricas que tienen que ver con simetrías del sistema físico en cuestión. Unas simetrías que son universales a todos los sistemas físicos aislados son las simetrías asociadas a las isometrías del espacio-tiempo. Entonces, las cantidades clásicas geométricas a cuantizar, independiente del sistema físico, son los vectores de Killing del espacio-tiempo. Vale decir, a cada vector de Killing del espacio-tiempo debemos asociar un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert. Dicho observable dependerá del sistema físico. Luego, para fijar la cuantización necesitamos fijar el sistema físico.

Para fijar el sistema físico, y por lo tanto la cuantización, consideraremos solo sistemas elementales, de manera que para cualquier otro sistema físico más complejo la cuantización se sigue de esta cuantización básica “vía productos tensoriales”. El carácter elemental queda definido vía la exigencia de que la representación proyectiva asociada al grupo de simetrías que se esta cuantizando sea irreducible. Esto significaría que no hay una representación dentro de esa representación y por lo tanto no habrían partes dentro del sistema elemental. Evidentemente, no toda representación irreducible representa un sistema físico. A los sistemas elementales físicos los llamaremos **partículas fundamentales**.

En conclusión, nuestro procedimiento de cuantización sería:

1. Calcular los vectores de Killing asociados a las isometrías del espacio-tiempo. Esto nos diría el número mínimo de cantidades a cuantizar y cuales. Además de las

reglas de conmutación que se deducen del álgebra de Lie definida por los vectores de Killing, las cuales nos definen el grupo de isometrías.

2. Los sistemas elementales vendrán dados de acuerdo al teorema de Wigner por algunas representaciones proyectivas irreducibles (aquellas que tengan sentido físico) del grupo de isometría obtenido en el ítem 1. Obtendremos así, al tener la representación, el espacio de Hilbert y los generadores del álgebra de Lie que serán los operadores autoadjuntos asociados a los vectores de Killing.

2.2.3. Representaciones unitarias e irreducibles de $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$

En esta sección consideraremos la cuantización en el espacio-tiempo de Minkowski pero, en (1+1). Aunque la cuantización en Minkowski es bien conocida en (3+1), la situación en (1+1), independientemente de la dimensión, tiene ciertas analogías generales con lo que ocurre en (3+1) y con lo que ocurrirá después en la cuantización que nos interesa en espacio-tiempo curvo que justamente consideraremos en (1+1). Es decir, primero estudiaremos (1+1) plano y después (1+1) curvo.

El procedimiento que seguiremos es el descrito en la sección anterior y lo haremos a modo de entrenamiento para la posterior cuantización de espacio curvo (lo que es nuestro interés).

Grupo y álgebra de Lie de Lorentz y Poincaré

El grupo de Lorentz $L(1, 1)$ se puede ver como el grupo de Lie matricial $\mathcal{O}(1, 1)$ cuyos elementos satisfacen (2.5). El tensor métrico, en una base ortonormal, viene dado por:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Cada componente del grupo de Lorentz ((2.11) - (2.14)) se identifica con la variedad $\mathbb{R}$ a través de los difeomorfismos:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L_+^\uparrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L_+^\downarrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} -\cosh w & \sinh w \\ \sinh w & -\cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L_-^\uparrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ \sinh w & -\cosh w \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow L_-^\downarrow \ni \Lambda(w) = \begin{pmatrix} -\cosh w & \sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

El grupo $L_+^\uparrow(1, 1)$ es un grupo de Lie conmutativo, unidimensional, cuya variedad asociada es $\mathbb{R}$ y por ende es un grupo no compacto y simplemente conexo.

El grupo restringido de Poincaré $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ viene dado por:

$$\Pi_+^\uparrow = \mathbb{R}^{(2)} \odot \mathcal{SO}^\uparrow(1, 1).$$

Además, el álgebra de Lie de $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ es un espacio vectorial de dimensión tres (en una base sus elementos independientes son P^0, P^1 y M^{01}) viene dada explícitamente por:

$$\begin{aligned} [P_0, P_1] &= 0, \\ [M_{01}, P_1] &= P_0, \\ [M_{01}, P_0] &= P_1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Representaciones proyectivas, unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré

Si queremos realizar el grupo de simetría en mecánica cuántica, la estrategia, según lo expuesto, es hallar la representaciones proyectivas del grupo de simetría. Ahora, como el grupo restringido de Poincaré es un grupo de Lie conectado con la identidad, sus representaciones de acuerdo con el teorema de Wigner, serán unitarias proyectivas en vez de antiunitarias proyectivas. Finalmente, como buscamos describir las partículas elementales, estas representaciones serán irreducibles.

Como las partículas elementales serán representaciones proyectivas irreducibles del grupo $\Pi_+^\uparrow(1, 1)$ vamos a exponer explícitamente estas representaciones ya calculadas en [13], teniendo presente que las partículas libres corresponden a representaciones verdaderas del grupo restringido de Poincaré, en este caso [13].

Estas representaciones unitarias irreducibles vienen dadas (en la representación de momento) por la acción de grupo:

$$[U(a, \Lambda)\Psi](p) = e^{-i\langle p|a\rangle} \Psi(\Lambda^{-1}p), \quad (2.51)$$

en los siguientes espacios de Hilbert y son:

$$\blacksquare \quad p \in \mathbb{R}^{1,1} \mid \langle p|p\rangle = -\mu^2, p^0 > 0$$

siendo p^0 , la energía, como debe ser en el espacio de momento, ya que como es bien conocido energía y momento se unen formando un bivector, $p = (\sqrt{(p^1)^2 + \mu^2}, p^1)$, p^1 el momento lineal y μ la masa.

El espacio de Hilbert donde actúa esta representación es $L^2(\mathbb{R}, \frac{dp^1}{|p^0|})$, donde $\frac{dp^1}{p^0}$ con $p^0 = \sqrt{(p^1)^2 + \mu^2}$ es la medida invariante Lorentz. El producto escalar está definido por:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(p) \Psi_2(p) \frac{dp^1}{\sqrt{(p^1)^2 + \mu^2}}. \quad (2.52)$$

Sus representaciones asociadas describen las propiedades de transformación de partículas con masa en reposo $m = \mu$ y $p^0 \geq \mu$ (energía positiva).

$$\blacksquare \quad p \in \mathbb{R}^{1,1} \mid \langle p | p \rangle = 0, p^1 = p^0 > 0$$

El espacio de Hilbert donde actúa es $L^2(\mathbb{R}^+, \frac{dp^1}{p^1})$, con producto escalar definido por:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_0^{\infty} \Psi_1^*(p) \Psi_2(p) \frac{dp^1}{p^1}. \quad (2.53)$$

Sus representaciones asociadas describen las propiedades de transformación de partículas con masa cero, con espectro continuo del operador energía perteneciente al intervalo $[0, \infty)$ (energía positiva) y con espectro continuo del operador momento lineal perteneciente a $[0, \infty)$ (momentum lineal hacia la derecha).

$$\blacksquare \quad p \in \mathbb{R}^{1,1} \mid \langle p | p \rangle = 0, -p^1 = p^0 > 0$$

El espacio de Hilbert donde actúa es $L^2(\mathbb{R}^-, \frac{dp^1}{|p^1|})$, con el producto escalar:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^0 \Psi_1^*(p) \Psi_2(p) \frac{dp^1}{|p^1|}. \quad (2.54)$$

Sus representaciones asociadas describen partículas de masa cero, con energía positiva y momentum lineal hacia la izquierda.

Como ejemplo para comparar con la cuantización en espacio-tiempo curvo consideremos la construcción de los observables para la partícula masiva [sin espín ya que no hay en $(1+1)$]. Esta construcción se sigue directamente de las representaciones como veremos a continuación:

Para encontrar el generador de las traslaciones temporales partiremos de la acción (2.51), tomando $\Lambda = \mathbb{1} \in L_+^\uparrow(1+1)$ y $a = (\tau, 0) \equiv a_\tau \in \mathbb{R}^{1,1}$. El producto definido en la representación será:

$$p^\mu a_\mu = p^0 \tau, \quad (2.55)$$

y por lo tanto,

$$[U(a_\tau, \mathbb{1})\Psi](p) = e^{-ip^0\tau}\Psi(p). \quad (2.56)$$

La ecuación (2.56) es la ecuación de la evolución de la partícula, luego:

$$[U(a_\tau, \mathbb{1})\Psi](p) = e^{-\hat{H}\tau}\Psi(p), \quad (2.57)$$

de donde se obtiene que el generador de las traslaciones temporales es:

$$\hat{H}\Psi(p) = p^0\Psi(p). \quad (2.58)$$

Si ahora, consideramos $\Lambda = \mathbb{1} \in L_+^\uparrow(1+1)$ y $a = (0, \tau) \in \mathbb{R}^{1,1}$, obtendremos que el generador de las traslaciones espaciales será:

$$\hat{P}^1 = p^1\Psi(p), \quad (2.59)$$

lo cual era de esperarse porque nos encontramos en la representación de momento.

Capítulo 3

El espacio-tiempo de de Sitter

En este capítulo queremos precisar lo que se entiende por el espacio-tiempo de de Sitter a nivel de la teoría clásica de la relatividad general. Un aspecto de las soluciones a las ecuaciones de Einstein es que estas están escritas, normalmente, en coordenadas, pero, ¿cuáles coordenadas?, ¿de qué variedad?. Esto es paradójico, ya que el objetivo al resolverlas es construir la variedad y la métrica sobre dicha variedad, y ninguna de estas puede ser considerada como dada. El método usual entonces será hacer un *ansatz* basado en alguna intuición física de lo que debería ser el espacio-tiempo en una carta coordenada de la supuesta variedad buscada. Aún si encontráramos una “solución”, el resultado final no sería más que una expresión local de la métrica en un abierto de R^4 ; el resto de la variedad será aún desconocida. Evidentemente, la física reside en los aspectos globales que definen la variedad. Por lo tanto, necesitamos saber cuando hemos encontrado la variedad. Justamente, aquí será fundamental el concepto de completitud geodésica (no muy tomado en cuenta en la literatura).

El espacio-tiempo de de Sitter, que es el que nos interesa, usualmente es una solución local de las ecuaciones de Einstein que cuando se extiende a un espacio geodésicamente completo resulta en una variedad (que es una solución global) que es homeomorfa a una variedad embebida en $\mathcal{M}^{4,1}$, que será Lorentziana, que es además, maximalmente simétrica y de curvatura constante y positiva.

Por comparación con el espacio-tiempo de Minkowski calcularemos los vectores de Killing de de Sitter en $(3+1)$. Para la cuantización que estudiaremos en el próximo capítulo, será fundamental estudiar los vectores de Killing en $(1+1)$ y probaremos que no hay vectores de Killing tipo tiempo para este espacio, en contraposición con Minkowski en $(1+1)$.

3.1. dS_4 como solución de vacío a las ecuaciones de Einstein

Sea la ecuación de Einstein:

$$R_{\mu,\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Los índices en la ecuación anterior pueden contraerse para obtener:

$$R = 4\Lambda - 8\pi T, \quad (3.2)$$

por lo que (3.1) puede escribirse como:

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}). \quad (3.3)$$

Si se considera un universo vacío tal que el tensor de energía momento y su traza sean nulos, entonces (3.56) se simplifica, resultando:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Para resolver la ecuación (3.4) consideraremos una métrica independiente del tiempo y con simetría esférica (ansatz),

$$ds^2 = f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - g(r)dt^2. \quad (3.5)$$

Debido a la signatura $(-+++)$ las funciones $f(r), g(r) > 0$. Luego, podemos proponer que la métrica se escriba como:

$$ds^2 = e^{B(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{A(r)} dt^2. \quad (3.6)$$

Con esta métrica las componentes de ecuación (3.4) pueden escribirse:

$$\Lambda e^{B(r)} = \frac{B'(r)}{r} + \frac{1}{4}(-A'^2(r) + A'(r)B'(r) - 2A''(r)), \quad (3.7)$$

$$\Lambda r^2 = \frac{1}{2}e^{-B(r)}(-2 + 2e^{B(r)} - rA'(r) + rB'(r)), \quad (3.8)$$

$$\Lambda r^2 = R_{2,2}, \quad (3.9)$$

$$-\Lambda e^{A(r)} = \frac{e^{A(r)-B(r)}}{4r}(rA'^2(r) + A'(r)(4 - rB'(r)) + 2rA''(r)). \quad (3.10)$$

De restar las ecuaciones (3.7) y (3.10) y luego integrar en r se obtiene:

$$A(r) = -B(r) + C. \quad (3.11)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.8):

$$e^{A(r)}(1 + rA') = 1 - \Lambda r^2. \quad (3.12)$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{d}{dr}(e^{A(r)}r) = \frac{d}{dr}\left(r - \frac{\Lambda r^3}{3}\right). \quad (3.13)$$

Integrando la ecuación diferencial (3.13), se tiene:

$$A(r) = \ln\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{M}{r}\right). \quad (3.14)$$

Finalmente si se considera $C = 0$, sin pérdida de generalidad, la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{M}{r}}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{M}{r}\right) dt^2. \quad (3.15)$$

Esta métrica se denomina la **métrica de Sitter- Schwarzschild**, las coordenadas que aquí se expresan se denominan **coordenadas estáticas**, puesto que no dependen del tiempo.

Ya que el espacio-tiempo que se quiere modelar no se encuentra bajo la influencia de ningún objeto masivo, $M = 0$, entonces se obtiene la métrica para el **espacio-tiempo de de Sitter**:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2. \quad (3.16)$$

La solución anterior, como habíamos comentado al principio de esta sección, no sabemos si representa toda la variedad. Lo que deberíamos averiguar es si esta solución aparentemente local es geodésicamente completa. Es fácil ver que no lo es, pero, no lo chequearemos explícitamente ya que más adelante construiremos la solución geodésicamente completa, que extiende a esta solución, de otra manera. Por lo tanto, esta solución que se consigue a través del método usual de resolver las ecuaciones de Einstein no es la solución completa y sacar conclusiones de ella sería erróneo. En particular, el cálculo de los vectores de Killing estaría incorrecto y por lo tanto su cuantización de

acuerdo al método que hemos propuesto. Por ejemplo, según (3.16) existe un vector de Killing tipo tiempo en de Sitter. Más adelante veremos que esto no es cierto.

Para construir la variedad geodésicamente completa podemos proceder construyendo otras cartas que extiendan esta solución, análogamente a como se hace con las extensiones de Kruskal para la métrica de Schwarzschild (ver p.e [5]). Sin embargo, no seguiremos ese camino y en la próxima sección daremos la solución global de manera explícita.

3.2. de Sitter en $(3 + 1)$ dimensiones

En esta sección, con la problemática planteada en la sección anterior queremos construir la solución global de de Sitter.

3.2.1. Aspectos geométricos

Consideremos la variedad $\mathcal{D}$ cuadri-dimensional en $\mathcal{R}^5$ dada por el conjunto de puntos que satisfacen:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 - (X^0)^2 = l^2. \quad (3.17)$$

$\mathcal{D}$ es un hiper-hiperboloide, de 4 dimensiones, en $\mathcal{R}^5$ en analogía con el hiperboloide bidimensional: $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$.

Al intersectar $\mathcal{D}$ con el hiper-plano constante X^0 , se obtiene una 3-esfera de radio $r = \sqrt{l^2 + (X^0)^2}$. Luego, con la variación del tiempo tendremos familias de 3-esferas de radios variables. A partir de la relación hiperbólica entre X^0 y X^i ($i = 1, 2, 3, 4$) se puede notar que una opción conveniente para parametrizar esta variedad $\mathcal{D}$ será la función:

$$\chi(t_G, \phi_1, \phi_2, \theta) : (-\infty, \infty) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathcal{R}^5. \quad (3.18)$$

Donde las coordenadas toman la forma:

$$\begin{aligned} X^i &= l \cosh \frac{t_G}{l} w^i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ X^0 &= l \sinh \frac{t_G}{l}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

siendo w^i la parametrización espacial de las tres esferas para X^0 constante.

En este dominio la función es invertible y por lo tanto un homeomorfismo con un abierto de R^4 . Al par de ecuaciones (3.18) y (3.19) se le considera una carta para el hiperboloide. En la literatura se le conoce como carta global, sin embargo, un análisis topológico de de Sitter (ver 3.2.3) muestra que no puede existir una carta global.

Diferentes parametrizaciones del hiperboloide exponen distintos aspectos de su geometría local, sin embargo, el estudio de los distintos sistemas coordenados para $\mathcal{D}$ no es el objetivo de este trabajo y será innecesario ya que los aspectos globales los tomaremos en cuenta de otra manera. Otras parametrizaciones de $\mathcal{D}$ pueden encontrarse en [10].

El tensor métrico

En $\mathcal{R}^5$ podemos definir una variedad con métrica Lorentziana $\mathbf{g}$, especificando que el producto interno satisface:

$$g_p(x_\mu, x_\nu) = g_p(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

$\mathcal{R}^5$ con esta métrica se denota por $\mathcal{M}^{4,1}$ y es justamente el espacio-tiempo de Minkowski en 5 dimensiones, luego $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}^{4,1}$ y podemos darle la métrica de éste restringida a $\mathcal{D}$. La pregunta sería: ¿el resultado será una variedad Lorentziana?

Cada punto $p \in \mathcal{D}$ tiene asociado un plano tangente, $T_p(D)$, cuya base de vectores coordenados, $\left\{ \frac{\partial}{\partial_{\phi_1}}, \frac{\partial}{\partial_{\phi_2}}, \frac{\partial}{\partial_{\theta}}, \frac{\partial}{\partial_{t_G}} \right\}$, de acuerdo a (1.1), vendrá dada explícitamente por sus componentes con respecto a la base coordenada cartesiana de $\mathcal{M}^{4,1}$:

$$\begin{aligned} x_{t_G} &= \sinh \frac{t_G}{l} \left(\cosh \frac{t_G}{l}, \sin \phi_1 \cos \phi_2, \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \theta, \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \theta, \cos \phi_1 \right), \\ x_{\phi_1} &= l \cosh \frac{t_G}{l} (0, \cos \phi_1 \cos \phi_2, \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \theta, \cos \phi_1 \sin \phi_2 \sin \theta, -\sin \phi_1), \\ x_{\phi_2} &= l \cosh \frac{t_G}{l} (0, -\sin \phi_1 \sin \phi_2, \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \theta, \sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \theta, 0), \\ x_{\theta} &= l \cosh \frac{t_G}{l} (0, 0, -\sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \theta, \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \theta, 0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Al restringir el producto interno definido en (3.20) a cada espacio tangente $T_p(D)$, $p \in \mathcal{D}$ en la variedad, se define una métrica Lorentziana, cuyas componentes son:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \sin^2 \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

O en la forma usual:

$$ds^2 = \cosh^2 \frac{t_G}{l} d\Omega_3^2 - dt_G^2. \quad (3.23)$$

donde $d\Omega_3^2$ es el diferencial de volumen de la tres-esfera.

Con esta métrica Lorentziana, heredada de $\mathcal{M}^{4,1}$, la variedad cuadri-dimensional $\mathcal{D}$ es un espacio-tiempo (3+1) dimensional. Para interpretar este espacio-tiempo lo introduciremos en las ecuaciones de Einstein y veremos que es solución de vacío con constante cosmológica positiva en la sección que sigue. La métrica en (3.23) tiene singularidades en $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\phi_i = 0$ y $\phi_i = \pi$, con ($i = 1, 2$) pero, estas singularidades son consecuencia del uso de las coordenadas.

Tensor de Einstein

Se puede demostrar que las únicas componentes del tensor de Ricci distintas de cero para la métrica en (3.23) son:

$$\begin{aligned} R_{0,0} &= -\frac{3}{l^2}, \\ R_{1,1} &= 3 \cosh^2 \frac{t_G}{l}, \\ R_{2,2} &= 3 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \sin^2 \phi_1, \\ R_{3,3} &= 3 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Luego las componentes del tensor de Ricci obedecen

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2} g_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

Al contraer el tensor de Ricci con la métrica se obtendrá entonces el **escalar de curvatura**:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2} \delta^\nu_\nu = \frac{12}{l^2}. \quad (3.26)$$

Luego, las componentes del **tensor de Einstein** serán:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 12 \frac{g_{\mu\nu}}{l^2} = -\frac{3}{l^2} g_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Si la distribución de masa-energía es nula, es decir, en presencia de vacío, se tendrá que la ecuación de Einstein escrita en (3.3) toma la forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.28)$$

Luego, la variedad Lorentziana $\mathcal{D}$, definida por el hiperboloide, es un espacio-tiempo solución a la ecuación de Einstein con constante cosmológica $\Lambda = \frac{3}{l^2}$. Esta solución, como debe ser y como verificaremos, es una extensión de la solución local (3.16) y es llamada el **espacio-tiempo de de Sitter**, el cual denotaremos por dS_4 . Aunque la carta coordenada no cubre el hiperboloide completo es fácil ver que todo el hiperboloide es solución.

Geodésicas

Considérese el espacio-tiempo dS_4 con la métrica (3.23) y $\alpha(t) = (u^1(t), \dots, u^5(t))$ un curva suave, luego:

$$(\alpha(t), \alpha(t)) = l^2. \quad (3.29)$$

Si consideramos la derivada temporal de la expresión anterior se obtendrá:

$$u^1(t) \frac{du^1}{dt} + \dots + u^4(t) \frac{du^4}{dt} - u^5(t) \frac{du^5}{dt} = 0. \quad (3.30)$$

Lo cual en $t = t_0$, se escribe como:

$$(\alpha(t_0), \alpha'(t_0)) = 0. \quad (3.31)$$

Lo que implica que $p = \alpha(t_0)$ es un vector normal a cualquier vector $v \in T_p(dS_4)$.

Para obtener las geodésicas del espacio-tiempo de de Sitter no se resolverá la ecuación de la geodésica, sino que se considerará el hecho de que el corte del hiperboloide con los distintos planos bidimensionales en $\mathcal{M}^{4,1}$, que pasan por el origen, determinan curvas

cuyas parametrizaciones satisfacen la ecuación (1.28). A su vez toda geodésica determina un plano, vía el vector tangente a la geodésica y el vector posición $\alpha(t)$ (ver, p.e., [10]).

Considérese $p \in dS_4$ un vector arbitrario fijo de $\mathcal{M}^{4,1}$ y $v \in T_p(dS)$, debido al teorema (2) solo hay geodésicas tipo espacio, tipo tiempo y nulas. Luego, para probar la completitud geodésica, estudiemos cada uno de estos tipos de geodésicas.

Sea v : *Tipo espacio*

Se define $e_E = \frac{v}{(v,v)^{\frac{1}{2}}}$ y $\hat{p} = \frac{p}{l^2}$ vectores unitarios y ortonormales. Luego $\hat{p}$ y e_E expanden un espacio bidimensional denotado por:

$$Span \{\hat{p}, e_E\} = a\hat{p} + be_E : a, b \in \mathcal{R}. \quad (3.32)$$

La intersección de dicho plano con dS_4 consiste de todos aquellos puntos que satisfacen:

$$\begin{aligned} (a\hat{p} + be_E, a\hat{p} + be_E) &= l^2, \\ a^2 + b^2 &= l^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Podemos parametrizar la circunferencia en $Span \{\hat{p}, e_E\}$ por:

$$\alpha_v(t) = \cos(kt)\hat{p} + \sin(kt)e_E; \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.34)$$

Donde

$$\begin{aligned} k &= (v, v)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha_v(0) &= p, \\ \alpha'_v(0) &= ke_E, \\ g(\alpha'_v(t), \alpha'_v(t)) &= k^2, \\ \alpha''_v(t) &= -k^2\alpha_v(t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Luego (3.34) define la geodésica *tipo espacio* para el espacio de de Sitter.

Sea v : *Tipo tiempo*

Se define el vector unitario $e_t = \frac{v}{-(v, v)^{\frac{1}{2}}}$ ortonormal a $\hat{p}$. Luego e_t y $\hat{p}$ expanden un espacio bidimensional denotado por:

$$Span \{ \hat{p}, e_t \} = a\hat{p} + be_t : a, b \in \mathcal{R}. \quad (3.36)$$

La intersección de dicho plano con dS_4 consiste de todos aquellos puntos que satisfacen:

$$\begin{aligned} (a\hat{p} + be_t, a\hat{p} + be_t) &= l^2, \\ a^2 - b^2 &= l^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La ecuación (3.39) consiste en una hipérbola y una de sus ramas puede parametrizarse de acuerdo a:

$$\alpha_v(t) = \cosh(kt)\hat{p} + \sinh(kt)e_t; \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.38)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha_v(0) &= p, \\ \alpha'_v(0) &= ke_t, \\ g(\alpha'_v(t), \alpha'_v(t)) &= k^2, \\ \alpha''_v(t) &= k^2\alpha_v(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Luego (3.38) define la geodésica tipo tiempo en el espacio de de Sitter.

Finalmente, sea v nulo:

Entonces $\{\hat{p}, v\}$ es una base ortonormal para el espacio bidimensional:

$$Span \{ \hat{p}, v \} = a\hat{p} + bv : a, b \in \mathcal{R}. \quad (3.40)$$

y su intersección con dS_4 consiste de todos aquellos puntos:

$$\begin{aligned}
(a\hat{p} + bv, a\hat{p} + bv) &= l^2, \\
a^2 &= l^2, \\
a &= \pm l.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

La ecuación (3.41) consiste de dos rectas nulas que pueden ser parametrizadas por:

$$\alpha_v(t) = \hat{p} + tv; \quad -\infty < t < \infty. \tag{3.42}$$

Donde se puede chequear:

$$\begin{aligned}
k &= -(v, v)^{\frac{1}{2}}, \\
\alpha_v(0) &= p, \\
\alpha'_v(0) &= v, \\
g(\alpha'_v(t), \alpha'_v(t)) &= 0, \\
\alpha''_v(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

(3.44)

Luego (3.42) define la geodésica nula en el espacio de de Sitter.

Como los parámetros naturales de cada geodésica tipo tiempo, tipo espacio y nula están definidos sobre todo $\mathbb{R}$, y puesto que todas las geodésicas son de alguno de estos tipos [teorema (2)], entonces de Sitter, definido por $\mathcal{D}$, es un espacio-tiempo geodésicamente completo.

3.2.2. Vectores de Killing

De acuerdo a (1.37), las ecuaciones de killing, en coordenadas globales, vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\partial_{\phi_1} \xi_{\phi_1} - \cosh \frac{t_G}{l} \sinh \frac{t_G}{l} \xi_{t_G} &= 0, \\
\partial_{\phi_1} \xi_{\phi_2} + \partial_{\phi_2} \xi_{\phi_1} &= 0, \\
\partial_{\phi_1} \xi_{\theta} + \partial_{\theta} \xi_{\phi_1} - 2 \cot \phi_1 \xi_{\theta} &= 0, \\
\partial_{t_G} \xi_{\phi_1} + \partial_{\phi_1} \xi_{t_G} - 2 \tanh \frac{t_G}{l} \xi_{\phi_1} &= 0, \\
\partial_{\phi_2} \xi_{\phi_2} + \sin \phi_1 \cos \phi_1 \xi_{\phi_1} - \cosh \frac{t_G}{l} \sin^2 \frac{t_G}{l} \xi_{t_G} &= 0, \\
\partial_{\theta} \xi_{\phi_2} + \partial_{\phi_2} \xi_{\theta} - 2 \cot \phi_1 \xi_{\theta} &= 0, \\
\partial_{t_G} \xi_{\phi_2} + \partial_{\phi_2} \xi_{t_G} - 2 \tanh \frac{t_G}{l} \xi_{\phi_2} &= 0, \\
\partial_{\theta} \xi_{\theta} + \sin \phi_1 \sin^2 \phi_2 \cos \phi_1 \xi_{\phi_1} + \sin \phi_2 \cos \phi_1 \xi_{\phi_2} - \\
\cosh \frac{t_G}{l} \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 \sinh \frac{t_G}{l} \xi_{t_G} &= 0, \\
\partial_{t_G} \xi_{\theta} + \partial_{\theta} \xi_{t_G} - 2 \tanh \frac{t_G}{l} \xi_{\theta} &= 0, \\
\partial_{t_G} \xi_{t_G} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Con la ayuda del Software Maple 18, se obtuvieron los vectores de Killing de este espacio-tiempo, los cuales pueden verse en el apéndice B. Cabe destacar que V_1, V_2, V_3 y V_4 , en el apéndice B, se corresponden con $\xi_{\phi_1}, \xi_{\phi_2}, \xi_{\theta}$ y ξ_{t_G} , respectivamente (las componentes contravariantes se hallan de la manera usual con la métrica).

En principio se puede destacar que de Sitter es un espacio maximalmente simétrico, ya que tiene un número de vectores de Killing independientes igual a 10 (ver apéndice B). Es importante notar que, aunque ∂_{t_G} , no es un vector de Killing, esto no implica que no pueda existir un vector de Killing tipo tiempo, ya que habría que tomar en consideración la combinación lineal de todos los vectores de Killing obtenidos. No hemos encontrado una demostración de este resultado en la literatura pero, al parecer, se da por conocido que en de Sitter no existe un vector de Killing tipo tiempo. Luego, una cantidad conservada análoga a la energía en Minkowski, donde existen vectores de Killing tipo tiempo, no existe en de Sitter. En el caso de dS_2 es más sencillo demostrar que no existen vectores de Killing tipo tiempo, porque al ser el número total de vectores de Killing 3 (en lugar de 10) los cálculos son más simples, y lo haremos más adelante.

3.2.3. Topología de dS_4

Como hemos visto es importante considerar los aspectos globales de de Sitter. Localmente de Sitter (como cualquier variedad cuatri-dimensional) es un R^4 pero, globalmente no. En esta sección, queremos probar este hecho usando los invariantes topológicos que son los grupos de homotopía.

La manera de saber que dos espacios topológicos son globalmente equivalentes es vía la existencia de un homeomorfismo. Entonces, queremos ver que dS_4 no es homeomorfo a

R^4 .

Un espacio topológico (X, Θ) puede poseer distintas propiedades topológicas. Si dos espacios topológicos son homeomorfos estos compartirán una serie de propiedades que se conocen como **invariantes topológicos**. Por lo tanto, basta que un invariante topológico sea diferente para que los espacios no sean homeomorfos. Precisamente, esto es lo que haremos para demostrar que R^4 no es homeomorfo a dS_4 (de paso, esto significa que no existe una carta global que cubra a de Sitter). Algunos invariantes topológicos importantes son: los grupos de homotopía, la simple conexidad y la contractibilidad.

Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si toda curva cerrada en X es deformable continuamente a un punto; si además, todo el espacio puede contraerse o deformarse en un punto continuamente, el espacio topológico se dice **contráctil**. Evidentemente ser contráctil implica ser simplemente conexo pero, lo contrario no es necesariamente cierto (por ejemplo: las esferas n -dimensionales $n \geq 2$).

La idea de deformar una curva en otra, se aborda rigurosamente a través de la definición de **homotopía**. La cual recordamos a continuación (ver también apéndice A):

Sea $f : I \rightarrow X$ y $g : I \rightarrow X$ dos curvas continuas, con $I = [0,1]$, que tienen el mismo punto inicial, $p \in X$ y final, $q \in X$. Se dirá que f es homotópica a g , lo cual podemos denotar por $f \simeq g$, si $\exists H : I \times I \rightarrow X$ tal que:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) & H(0, t) &= p, \\ H(s, 1) &= g(s) & H(1, t) &= q. \end{aligned}$$

Una utilidad del concepto de homotopía es que se puede generalizar a deformar objetos más complicados que curvas, por ejemplo, el concepto de contractibilidad. No entraremos en el detalle de precisar estas deformaciones generales (ver apéndice A). Sin embargo, diremos que un espacio topológico es contráctil si es homotópico, en un cierto sentido, al espacio topológico más simple, el punto. También, diremos que un espacio topológico es simplemente conectado si toda curva cerrada constante es homotópicamente igual a la curva constante.

Un cilindro bidimensional, por ejemplo, no es homeomorfo a R^2 porque no es simplemente conectado. El hiperboloide bidimensional en $\mathcal{M}^{2,1}$, el cual sería dS_2 , es un cilindro de radio variable. Por lo tanto, no sería simplemente conectado. Luego, en este caso resulta trivial que dS_2 no es homeomorfo a R^2 . Para dS_4 la situación es menos trivial.

El ser simplemente conexo se puede sintetizar en el concepto del primer grupo de homotopía o grupo fundamental (ver apéndice A). En términos del grupo fundamental el

ser simplemente conexo implica que el primer grupo de homotopía es la identidad (grupo trivial). Entonces, en el caso de dS_2 , el grupo de homotopía de R^2 es la identidad pero, el de dS_2 es no trivial. Resulta ser que para dS_4 el primer y segundo grupo de homotopía son triviales como ocurre con R^4 .

Empleando el teorema 7 del apéndice A se puede calcular el primer grupo de homotopía no trivial para de Sitter, que resulta ser el tercero:

$$\begin{aligned}\pi_3(dS_4) &= \pi_3(R \times S^3) \\ \pi_3(R \times S^3) &\cong \pi_3(R) \times \pi_3(S^3), \\ &\cong 0 \times \mathbb{Z}, \\ &\cong \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

donde $\times$ es el producto directo de grupos y $\cong$ indica que los grupos son isomorfos.

Luego, por lo comentado anteriormente, al ser $\pi_3(dS_4)$ no trivial se sigue que este no es homeomorfo a R^4 , ya que este último tiene todos sus grupos de homotopía triviales. Notemos, que al ser $\pi_3(dS_4)$ no trivial, esto significa que este espacio topológico no es contráctil (todo espacio contráctil tiene todos sus grupos de homotopía triviales) y por lo tanto de aquí también se concluiría que no es homeomorfo a R^4 ya que este último es contráctil.

Tomar una carta global para una variedad 4-dimensional implica establecer un homeomorfismo entre todo el dominio de la variedad y un abierto de R^4 . En el caso de de Sitter dicho homeomorfismo global no existe, porque la variedad no es homeomorfa a R^4 . Luego, la llamada carta global o coordenadas globales, si se consideran bien los dominios, es en realidad una carta local de de Sitter.

3.3. De las coordenadas estáticas a las coordenadas globales en dS_4

A continuación vamos a considerar las llamadas coordenadas estáticas que son muy utilizadas para describir de Sitter. De la topología de dS_4 sabemos que no hay coordenadas globales y por lo tanto estas coordenadas estáticas serán locales también. Justamente, estas coordenadas son las que se obtuvieron cuando resolvimos la ecuación de Einstein en la sección 3.1. En esta sección probaremos que esa solución está incluida en el sistema de coordenadas llamado global. Esto significa que dS_4 , que es más “grande” que la región descrita por las coordenadas globales, es una extensión de la solución (3.16).

Si se introduce un nuevo parámetro r de forma que:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = r^2. \quad (3.46)$$

Entonces, al imponer esta restricción en (3.17), se obtiene una hipérbola dada por:

$$-(X^0)^2 + (X^4)^2 = l^2 - r^2. \quad (3.47)$$

Una parametrización que tome en cuenta dicha restricción puede escribirse como:

$$\begin{aligned} X^i &= r w^i, \quad i = 1, 2, 3, \\ X^d &= -l \sqrt{1 - r^2} \cosh \frac{t}{l}, \quad d = 4, \\ X^0 &= -l \sqrt{1 - r^2} \sinh \frac{t}{l}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Donde w^i es la parametrización espacial de la 2-esfera y r puede ser identificado como la coordenada radial ($0 < r < \infty$).

Consideremos analizar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} -X^0 + X^d &= -\sqrt{l^2 - r^2} e^{-\frac{t}{l}} \leq 0, \\ X^0 + X^d &= -\sqrt{l^2 - r^2} e^{\frac{t}{l}} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Luego, para la región $r < l$ estas coordenadas cubren solo un cuarto del de Sitter global que se obtuvo del encajamiento. Las coordenadas expuestas en (3.48) se denominan estáticas ya que la métrica dada por (3.23), escrita en estas coordenadas, no dependen del tiempo. Al cubrir solo una parte del espacio-tiempo se puede notar que la solución a la ecuación de Einstein (3.16) es incompleta, ya que no cubre toda la variedad geodésicamente completa (el hiper-hiperboloide). Para corroborar esto consideraremos el cambio de coordenadas en la intersección de estas cartas y partiendo de (3.23) llegaremos a (3.16).

Comparando el cambio de coordenadas expuesto en (3.48) con el de la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\phi = \theta_G, \quad (3.50)$$

$$\theta_E = \phi_2, \quad (3.51)$$

$$t_G = \sinh^{-1} \left(-\sqrt{1-r^2} \sinh t \right), \quad (3.52)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(-\frac{r}{\sqrt{1-r^2} \cosh t} \right). \quad (3.53)$$

Luego para los cambios triviales se tendrá:

$$d\phi = d\theta_G,$$

$$d\theta_E = d\phi_2,$$

Y para los otros dos cambios, no triviales:

$$dt_G = -\frac{\sqrt{1-r^2} \cosh t}{\sqrt{1-(-1+r^2 \sinh^2 t)}} dt - \frac{r \sinh t}{\sqrt{1-r^2} \sqrt{1+(1-r^2) \sinh^2 t}} dr,$$

$$d\phi_1 = \frac{r \cosh^{-1} t \tanh t \sqrt{1-r^2}}{1-r^2+r^2 \cosh^{-2} t} dt - \frac{\cosh^{-1} t}{\sqrt{1-r^2} \sqrt{1+(1-r^2) \sinh^2 t}} dr.$$

Sustituyendo estos resultados anteriores en la métrica (3.23) se obtiene la métrica para de Sitter (3.16), corroborando lo dicho.

Notemos, que de la métrica estática obtenemos el vector de Killing tipo tiempo ∂_t . Si tomamos a esta como la solución de de Sitter su cuantización nos llevaría a un hamiltoniano asociado al vector de Killing ∂_t . Como hemos probado, esta solución no es geodésicamente completa ya que es una parte de dS_4 . Y puesto que globalmente no existen vectores de Killing tipo tiempo en dS_4 este hamiltoniano cuántico estaría incorrecto.

3.4. de Sitter en (1+1) dimensiones

Con los objetivos que hemos planteado, el próximo paso sería establecer la mecánica cuántica en dS_4 . Sin embargo, por simplicidad consideraremos el espacio de de Sitter en (1+1) dimensiones para esta tarea, ya que no se pierde mucho, porque globalmente dS_2 también es no trivial. Esta simplificación es muy usada en la literatura (ver, p.e., [16], [17], [18], [19], [20]). En esta sección consideraremos los aspectos clásicos de dS_2 y como consecuencia de la no trivialidad de dS_2 probaremos que no existen vectores de Killing tipo tiempo globales. En el próximo capítulo estudiaremos los aspectos cuánticos.

3.4.1. Geometría de dS_2

Sea dS_2 la variedad (hiperboloide) bidimensional dada por el conjunto de puntos $p \in \mathcal{M}^{2,1}$ que satisfacen:

$$(p, p) = l^2. \quad (3.54)$$

Lo que en términos de las coordenadas se escribe como:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 - (X^0)^2 = l^2. \quad (3.55)$$

De la relación hipérbolica en (3.55) es trivial notar que una parametrización posible para el hiperboloide es:

$$\chi(\phi_1, t_G) = (l \cos \phi_1 \cosh \frac{t_G}{l}, l \sin \phi_1 \cosh \frac{t_G}{l}, l \sinh \frac{t_G}{l}). \quad (3.56)$$

La parametrización descrita en (3.56) es invertible en el intervalo $(0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ y por ende es una carta en este dominio. Llamaremos a estas coordenadas las coordenadas globales para dS_2 . Sin embargo, como ya hemos discutido de Sitter en (1+1) dimensiones no es cubierto por una sola carta ya que no es simplemente conectado.

Tensor métrico

Restringiendo el producto interno de $\mathcal{M}^{2,1}$ a cada espacio tangente en la variedad se obtiene que la métrica, en estas coordenadas, adquiere la forma:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Luego, el elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = l^2 \cosh^2 t_G d\phi_1^2 - dt_G^2. \quad (3.58)$$

El tensor de Riemann y el escalar de curvatura

Se puede demostrar que las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en este espacio-tiempo de dos dimensiones son:

$$R_{221}^1 = \frac{1}{l^2}, \quad R_{212}^1 = -\frac{1}{l^2}, \quad R_{121}^2 = \cosh^2 \frac{t_G}{l}, \quad R_{112}^2 = -\cosh^2 \frac{t_G}{l}.$$

Por lo que este espacio-tiempo posee curvatura distinta de cero en cada punto. Además, el tensor de Ricci obedece:

$$R_{ij} = \frac{1}{l^2} g_{ij}. \quad (3.59)$$

Al contraer este tensor con la métrica se obtiene:

$$R = g^{ij} R_{ij} = \frac{1}{l^2} g^{ij} g_{ij} = \frac{1}{l^2} \delta_j^j = \frac{2}{l^2}. \quad (3.60)$$

Entonces dS_2 es un espacio-tiempo de curvatura constante y positiva.

Geodésicas

Las geodésicas para dS_2 serán aquellas calculadas en la sección 3.2.1, para dS_4 , restringidas obviamente, con la acotación de que los vectores p y v viven ahora en un espacio de tres dimensiones.

No obstante, consideraremos una familia de geodésicas que son importantes para consideraciones posteriores. Estas son las generadas por el campo vectorial, inducido por el sistema de coordenadas global:

$$v = \frac{\partial}{\partial t_G}. \quad (3.61)$$

Este define, esencialmente, un vector global tipo tiempo. A continuación demostramos que este campo vectorial es geodésico.

$$\begin{aligned} v^a \nabla_a v^\mu &= v^a (\partial_a v^\mu) + v^a (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\beta), \\ &= v^1 (\partial_1 v^1) + v^2 (\partial_2 v^1) + v^1 (\Gamma^1_{1\beta} v^\beta) + v^1 (\partial_1 v^2) + v^1 (\Gamma^2_{1\beta} v^\beta) + v^2 (\Gamma^1_{2\beta} v^\beta) + \\ &\quad v^2 (\partial_2 v^2) + v^2 (\Gamma^2_{2\beta} v^\beta), \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ya que la componente v^1 es nula y la componente v^2 es constantemente igual a uno, la expresión (3.62) se escribe como:

$$\begin{aligned} v^a \nabla_a v^\mu &= v^2 (\tanh \frac{t_G}{l} v^1) + v^2 (\partial_2 v^2), \\ &= v^2 (\partial_2 v^2), \\ &= \frac{\partial}{\partial t_G} (1), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.4.2. Vectores de Killing

Las ecuaciones de Killing para este espacio-tiempo, en coordenadas globales, vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\partial_{\phi_1} \xi_{\phi_1} - \cosh \frac{t_G}{l} \sinh \frac{t_G}{l} \xi_{t_G} &= 0, \\ \partial_{\phi_1} \xi_{t_G} + \partial_{t_G} \xi_{\phi_1} - 2 \tanh \frac{t_G}{l} \xi_{\phi_1} &= 0, \\ \partial_{t_G} \xi_{t_G} &= 0.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Las componentes covariantes de los vectores de Killing en la base de coordenadas globales pueden ser calculadas fácilmente de (3.64). Para calcular sus componentes contravariantes consideramos que: $\xi_{\phi_1} = \sum_{b=1}^2 g_{\phi_1 b} \xi^b = l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \xi^{\phi_1}$ y $\xi_{t_G} = \sum_{b=1}^2 g_{t_G b} \xi^b = -\xi^{t_G}$. Luego, las componentes contravariantes de los vectores de Killing resultan:

$$\xi^{\phi_1} = \frac{B}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 - \frac{A}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 + \frac{F}{l},\tag{3.65}$$

$$\xi^{t_G} = A \cos \phi_1 + B \sin \phi_1,\tag{3.66}$$

donde A, B y F son constantes arbitrarias reales. Por lo tanto, el campo vectorial de Killing más general se escribirá, introduciendo los vectores bases coordenadas $\{\partial_{\phi_1}, \partial_{t_G}\}$, como:

$$\vec{\xi} = A \left(\cos \phi_1 \partial_{t_G} - \frac{1}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 \partial_{\phi_1} \right) + B \left(\frac{1}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 \partial_{\phi_1} + \sin \phi_1 \partial_{t_G} \right) + \frac{F}{l} \partial_{\phi_1}.\tag{3.67}$$

Como existen tres constantes arbitrarias entonces existirán tres vectores de Killing linealmente independientes, luego el espacio dS_2 es maximalmente simétrico. Para la métrica (3.58), ∂_{t_G} no es un vector de Killing, sin embargo, esto no implica que no exista un vector de Killing tipo tiempo, ya que puede ser un problema de coordenadas.

A continuación probaremos que no existen vectores de Killing tipo tiempo (globales) en dS_2 . En efecto, supongamos que estos existen, esto implicaría:

$$\vec{\xi} \cdot \vec{\xi} < 0.\tag{3.68}$$

Luego,

$$l^2 \cosh^2 \frac{t_G}{l} \left(-\frac{A}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 + \frac{B}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 + \frac{F}{l} \right)^2 - (A \cos \phi_1 + B \sin \phi_1)^2 < 0.$$

Definamos:

$$\begin{aligned} C(t_G, \phi_1) &\equiv \cosh \frac{t_G}{l} \left(-A \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 + B \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 + F \right), \\ D(\phi_1) &\equiv (A \cos \phi_1 + B \sin \phi_1). \end{aligned}$$

Notemos que $D(\phi_1)$ está acotada superiormente:

$$\begin{aligned} |D(\phi_1)| &= |A \cos \phi_1 + B \sin \phi_1| \leq |A \cos \phi_1| + |B \sin \phi_1|, \\ &< |A| + |B|. \end{aligned}$$

Esto es:

$$|D(\phi_1)|^2 < (|A| + |B|)^2 = M.$$

Entonces, $D(\phi_1)$ está acotada superiormente por una constante. Puesto que t_G es arbitrario, $C(t_G, \phi_1)$ puede hacerse crecer tanto como se quiera. Luego, la cantidad $C^2(t_G, \phi_1) - D^2(\phi_1)$ solo será tipo tiempo si el coeficiente que acompaña al $\cosh^2 \frac{t_G}{l}$ se anula. Esto es:

$$\left(-A \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 + B \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 + F \right)^2 = 0. \quad (3.69)$$

De donde se sigue:

$$-A \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 + B \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 + F = 0. \quad (3.70)$$

Multiplicando esta ec. por $\sin \phi_1$ e integrando en ϕ_1 se obtiene:

$$A \left(\tanh \frac{t_G}{l} \right) \pi = 0. \quad (3.71)$$

Por lo tanto, $A = 0$. Luego, (3.70) se reduce:

$$B \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 + F = 0. \quad (3.72)$$

Análogamente, multiplicando por $\cos \phi_1$ e integrando en ϕ_1 se obtiene:

$$B \left(\tanh \frac{t_G}{l} \right) \pi = 0. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, $B = 0$. Lo que implica a su vez que $F = 0$. Lo cual es una contradicción ya que si es tipo tiempo no puede ser el campo vectorial 0. En conclusión, no existe un vector de Killing tipo tiempo para dS_2 .

En (3+1) dimensiones para demostrar que no existen vectores de Killing tipo tiempo habría que considerar la superposición con diez constantes reales de los diez vectores de Killing de dS_4 . Aunque la demostración puede ser larga, porque existen diez constantes arbitrarias, es claro del elemento de línea (3.23) que el término $\cosh^2 \frac{t_G}{l}$ va a crear el mismo efecto que en dS_2 y por lo tanto, no existirían vectores de Killing tipo tiempo en (3+1) dimensiones.

3.4.3. Álgebra de Lie de los vectores de Killing

De (3.67) tenemos los tres vectores de Killing:

$$\xi^1 = \cos \phi_1 \partial_{t_G} - \frac{1}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \sin \phi_1 \partial_{\phi_1}, \quad (3.74)$$

$$\xi^2 = \frac{1}{l} \tanh \frac{t_G}{l} \cos \phi_1 \partial_{\phi_1} + \sin \phi_1 \partial_{t_G}, \quad (3.75)$$

$$\xi^3 = \frac{1}{l} \partial_{\phi_1}. \quad (3.76)$$

El álgebra de Lie para estos vectores de Killing con $[,]$, el conmutador, viene dada por:

$$[\xi^1, \xi^2] = \frac{1}{l} \xi^3, \quad (3.77)$$

$$[\xi^1, \xi^3] = \frac{1}{l} \xi^2, \quad (3.78)$$

$$[\xi^2, \xi^3] = -\frac{1}{l} \xi^1. \quad (3.79)$$

Esta álgebra de Lie es isomorfa al álgebra de lie del grupo de Lorentz $L_{3+}^\uparrow$, este grupo tiene tres parámetros, los cuales en una base toman la forma ¹:

¹Se ha intentado mantener la notación usada para $L_4^\uparrow$ [21]

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

donde K_1 y K_3 se corresponden con los dos generadores de los boost y S_1 con un generador de la rotación.

El álgebra de Lie de estos tres generadores viene dada por:

$$[K_1, S_1] = K_3, \quad (3.81)$$

$$[K_3, S_1] = -K_1, \quad (3.82)$$

$$[K_1, K_3] = S_1. \quad (3.83)$$

Haciendo el cambio $K_1 = l\xi^1$, $K_3 = l\xi^2$ y $S_1 = l\xi^3$ obtenemos el álgebra de Lie de los vectores de Killing. Luego podemos interpretar que ξ^1 y ξ^2 serían el análogo de los generadores de los boost en nuestro espacio-tiempo y ξ^3 sería el generador de las rotaciones.

Capítulo 4

Mecánica cuántica relativista en dS_2

En este capítulo el objetivo es el de formular la mecánica cuántica de una partícula simple (análogo al caso con masa y sin espín en Minkowski) en el espacio-tiempo dS_2 . De esta manera estaríamos estudiando parte de los efectos de la curvatura sobre la mecánica cuántica al ver como se afecta la partícula masiva sin espín debido a la curvatura del espacio-tiempo.

Como ya se comprobó el álgebra de Lie de los vectores de Killing mostrada en las ecuaciones: (3.77), (3.78) y (3.79) es el álgebra de Lie del grupo de Lorentz en tres dimensiones y por lo tanto del grupo $SO(2,1)$. Ahora bien, como el álgebra de Lie de los vectores de Killing es isomorfa al álgebra de Lie del grupo de simetrías, entonces para encontrar las simetrías de la cuántica en el espacio-tiempo de de Sitter habrá que estudiar las representaciones proyectivas del grupo de Lorentz $L_{3+}^\uparrow$ que vendrán dadas, de acuerdo al teorema de Wigner, por operadores unitarios y lineales ya que este grupo es un grupo de Lie conexo.

Afortunadamente algunas representaciones proyectivas del grupo de Lorentz $L_{3+}^\uparrow$ fueron estudiadas por Bargmann [6], quien estudió las representaciones unitarias de $SL(2, \mathbb{R})$ (un cubrimiento de $L_{3+}^\uparrow$)

4.1. El grupo de Lorentz y el mapa espinorial

Para estudiar el grupo de Lorentz $L_{3+}^\uparrow$ consideraremos estudiar primero a $L_{4+}^\uparrow$, este grupo está dado explícitamente por:

$$L_{4+}^\uparrow = \left\{ \Lambda_{4 \times 4} \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \Lambda_0^0 \geq 1, \quad \det(\Lambda) = 1 \right\}. \quad (4.1)$$

Denominaremos $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ al conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas complejas, a su vez al subconjunto de estas matrices que son hermíticas lo llamaremos $\mathcal{H}_2$. Se puede demostrar que estas matrices hermíticas pueden escribirse como:

$$H = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 + x_4 \sigma_4, \quad (4.2)$$

donde σ_μ ($\mu = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli, $\sigma_4 = \mathbb{1}$ y x_i ($i = 1, 2, 3$) son reales.

Denotaremos por $SL(2, \mathbb{C})$ al subconjunto de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ con determinante uno. Cada matriz en $SL(2, \mathbb{C})$ conlleva a una transformación definida por:

$$M_A(H) = A H A^\dagger, \quad A \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (4.3)$$

Es fácil chequear que esta transformación envía matrices hermíticas en matrices hermíticas y además:

$$\det(A H A^\dagger) = \det(H). \quad (4.4)$$

Luego, si:

$$M_A(H) = \begin{bmatrix} \hat{x}^3 + \hat{x}^4 & \hat{x}^1 + i\hat{x}^2 \\ \hat{x}^1 - i\hat{x}^2 & -\hat{x}^3 + \hat{x}^4 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Entonces de acuerdo a (4.4)

$$(\hat{x}^0)^2 - (\hat{x}^1)^2 - (\hat{x}^2)^2 - (\hat{x}^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (4.6)$$

Luego, existe una transformación $[x^a] \rightarrow [\hat{x}^a]$ que preserva la métrica y por lo tanto es una transformación de Lorentz asociada a la matriz A, que llamaremos Λ_A . Se puede demostrar que dicha transformación está dada por:

$$\Lambda_A = G^{-1} R_A G, \quad (4.7)$$

donde:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$R_A = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} & \bar{\alpha}\beta & \beta\bar{\beta} \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \gamma\bar{\alpha} & \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\delta & \bar{\beta}\delta \\ \gamma\bar{\gamma} & \gamma\bar{\delta} & \bar{\gamma}\delta & \delta\bar{\delta} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

La matriz dada por (4.7) cumple:

- $\Lambda_4^4 = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \geq 1$.
- $\det(\Lambda_A) = \det(G^{-1}) \det(R_A) \det(G) = \det(A) = 1$.

por lo cual esta transformación pertenecen a $L_{4+}^\uparrow$.

El mapa $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ se denomina **mapa espinorial** y se puede chequear que es dos a uno (A y $-A$ producen el mismo Λ_A). Las matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ forman un grupo de Lie que tiene 6 parámetros reales y es simplemente conectado, luego, este grupo de Lie es el grupo de recubrimiento universal de $L_{4+}^\uparrow$.

Ahora si consideramos que $L_{3+}^\uparrow$ es un subgrupo de $L_{4+}^\uparrow$ que además de dejar invariante la forma cuadrática: $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$, deja invariante una coordenada espacial: $x^3 = 0$. Entonces, el subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ que deja invariante el determinante de estas matrices, de acuerdo a (4.4) con $x^3 = 0$, realizará al grupo de Lorentz $L_{3+}^\uparrow$ dos a uno también. Se puede demostrar que dicho subgrupo esta dado por las matrices de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1. \quad (4.11)$$

Este grupo es conocido en la literatura como $SU(1,1)$. Se puede chequear que bajo la transformación:

$$\tilde{B} = TBT^{-1}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

este grupo va a todo $SL(2, \mathbb{R})$, es uno a uno, y por lo tanto (4.12) define un isomorfismo entre $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(1,1)$. $SL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie de 3 parámetros pero, no es el grupo de recubrimiento universal de $L_{3+}^\uparrow$ ya que $SL(2, \mathbb{R})$ es homeomorfo, como espacio topológico, a $\mathbb{R}^2 \times S^1$ y por lo tanto no es simplemente conexo (ver p.e [22]).

4.2. Representaciones unitarias e irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$

En la sección anterior hemos demostrado que $SL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento de $L_{3+}^\uparrow$ y en consecuencia ambos grupos tendrán la misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la cual se resume en la siguiente expresión:

$$[L_0, L_1] = -L_2, \quad [L_1, L_2] = -L_0, \quad [L_0, L_2] = L_1. \quad (4.13)$$

Recordemos que para estudiar la cuántica debemos estudiar las representaciones proyectivas del grupo de simetrías, en nuestro caso deberíamos estudiar las representaciones proyectivas de $L_{3+}^\uparrow$ pero, aprovecharemos que $SL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento de este grupo de simetrías y que para él ya están estudiadas sus representaciones.

En este trabajo, no vamos a considerar todas las representaciones unitarias e irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ ya que nuestro objetivo es ilustrar la cuantización en los casos más simples. En las subsecciones siguientes consideraremos dos representaciones relativamente simples. Una de ellas se puede interpretar como el análogo en dS_2 de una partícula masiva y sin espín en $\mathcal{M}^{1,1}$.

4.2.1. Partícula masiva sin espín

Sea la variedad M dada por el conjunto de puntos que satisfacen:

$$M = \{|z| = 1, \quad z \in \mathbb{C}\}.$$

Si usamos la coordenada polar $\phi \in (-\pi, \pi)$ para parametrizar la circunferencia unitaria podemos escribir un punto de la variedad como $z = e^{i\phi}$. La acción de G sobre M vendrá dada por:

$$e^{i\phi'} = e^{i\phi} \frac{\bar{w}(a, \phi)}{w(a, \phi)} \quad \text{con} \quad a \in G. \quad (4.14)$$

donde:

$$w(a, \phi) = \alpha + \beta e^{i\phi}. \quad (4.15)$$

Esta acción es una transformación sobre puntos del espacio M , ya que a cada punto ϕ lo envía en un punto ϕ' .

Se puede demostrar que el jacobiano de esta transformación está dado por:

$$\frac{d\phi}{d\phi'} = |w(a, \phi)|^2. \quad (4.16)$$

Definiremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ como el espacio de todas las funciones $f(\phi)$, de cuadrado integrables sobre M , con el producto interno definido por:

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\phi) g(\phi) d\phi. \quad (4.17)$$

La acción de G sobre el espacio de Hilbert vendrá dada por la representación $T_\sigma(a)$:

$$T_\sigma(a) = \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f(a^{-1}\phi), \quad (4.18)$$

donde, $\mu(a, \phi) \equiv |w(a, \phi)|^2$ y $\sigma = is$ con $s \in \mathbb{R}$. De acuerdo al teorema de Wigner esta representación debe ser unitaria (en este caso). A continuación probaremos que (4.18) realmente define una representación de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ que además es unitaria.

En efecto, para chequear que (4.18) es una representación consideraremos que el factor $\mu(a, \phi)^{\frac{1}{2}+\sigma}$ es un multiplicador, es decir, que verifica:

$$\nu(e, \phi) = 1 \quad (4.19)$$

$$\nu(ab, \phi) = \nu(a, b\phi) \nu(b, \phi). \quad (4.20)$$

Primero chequearemos que $\mu(a, \phi)$ es un multiplicador ya que: 1) Satisface trivialmente (4.19) cuando $a = e$ ya que $\alpha = 1, \beta = 0 \rightarrow w(e, \phi) = 1$ y 2) Si $a b \equiv c$ con:

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \bar{\beta}_3 & \bar{\alpha}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

podemos escribir el lado izquierdo de (4.20) como:

$$\mu(ab, \phi) \equiv \mu(c, \phi) = |\alpha_3 + \beta_3 e^{i\phi}|^2, \quad (4.22)$$

mientras que desarrollando el lado derecho de (4.20), tendremos:

$$\begin{aligned} \mu(a, b\phi) \mu(b, \phi) &= |\alpha_1 + \beta_1 e^{i\phi}|^2 |\alpha_2 + \beta_2 e^{i\phi}|^2, \\ &= \left| \alpha_1 + \beta_1 e^{i\phi} \frac{\bar{w}(b, \phi)}{w(b, \phi)} \right|^2 |\alpha_2 + \beta_2 e^{i\phi}|^2, \\ &= |\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 e^{i\phi} + \beta_1 \bar{\alpha}_2 e^{i\phi} + \beta_1 \bar{\beta}_2|^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por otro lado, consideremos hacer la multiplicación de las matrices a y b :

$$c = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 \alpha_2 + \bar{\alpha}_1 \beta_2 & \bar{\beta}_1 \beta_2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Si comparamos las entradas de la matriz c dada por (4.24) con la ecuación dada por (4.23) veremos que podemos reescribir esta última como:

$$\mu(a, b\phi) \mu(b, \phi) = |\alpha_3 + \beta_3 e^{i\phi}|^2, \quad (4.25)$$

por lo que se satisface la propiedad expresada en (4.20) y podemos afirmar que $\mu(a, \phi)$ es un multiplicador.

Ahora bien, nosotros queremos demostrar en realidad que $\mu(a, \phi)^{\frac{1}{2}+\sigma}$ es un multiplicador, pero, esto es claro ya que (4.19) se satisface y usando que $\mu(a, \phi)$ es un multiplicador y que la potencia del producto es el producto de las potencias se demuestra (4.20)

Si (4.18) es una representación con su respectivo multiplicador, entonces se debe satisfacer:

$$T_\sigma(a)(T_\sigma(b)f(\phi)) = T_\sigma(ab)f(\phi). \quad (4.26)$$

Del lado izquierdo de la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned} T_\sigma(a)(T_\sigma(b)f(\phi)) &= T_\sigma(a)(\mu(b, b^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f(b^{-1}\phi)), \\ &= T_\sigma(a)g(\phi), \\ &= \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} g(a^{-1}\phi), \\ &= \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} \mu(b, b^{-1}a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f(b^{-1}a^{-1}\phi). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por otra parte, el lado derecho de la expresión tiene la forma:

$$T_\sigma(ab)f(\phi) = \mu(ab, (ab)^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f((ab)^{-1}\phi),$$

como $\mu(a, \phi)^{\frac{1}{2}+\sigma}$ es un multiplicador y satisface (4.20), entonces:

$$\begin{aligned} T_\sigma(ab)f(\phi) &= \mu(a, b b^{-1}a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} \mu(b, b^{-1}a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f(b^{-1}a^{-1}\phi), \\ &= \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} \mu(b, b^{-1}a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} f(b^{-1}a^{-1}\phi). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Se puede demostrar también que (4.18) es una representación unitaria si $\sigma = is$ con $s \in \mathbb{R}$, esto implica:

$$\langle T_\sigma(a)f(\phi) | T_\sigma(a)g(\phi) \rangle = \langle f | g \rangle. \quad (4.29)$$

Para demostrar (4.29) usaremos el producto interno definido según (4.17), luego:

$$\begin{aligned} \langle T_\sigma(a)f(\phi) | T_\sigma(a)g(\phi) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}+is} \bar{f}(a^{-1}\phi) \mu(a, a^{-1}\phi)^{\frac{1}{2}-is} g(a^{-1}\phi) d\phi, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mu(a, a^{-1}\phi) f(a^{-1}\phi) g(a^{-1}\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Consideremos el cambio $\phi' = a^{-1}\phi$:

$$\begin{aligned} \langle T_\sigma(a)f(\phi) | T_\sigma(a)g(\phi) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \mu(a, \phi') \bar{f}(\phi') g(\phi') \frac{d\phi}{d\phi'} d\phi', \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mu(a, \phi') \bar{f}(\phi') g(\phi') \mu(a^{-1}, a\phi') d\phi'. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Usando la propiedad de multiplicadores (4.20) y cambiando $a \rightarrow a^{-1}$ y $b \rightarrow a$ se obtiene $\mu(a^{-1}, a\phi') \mu(a, \phi') = 1$

$$\begin{aligned} \langle T_\sigma(a)f(\phi) | T_\sigma(a)g(\phi) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\phi') g(\phi') d\phi', \\ &= \langle f | g \rangle. \end{aligned} \tag{4.31}$$

De acuerdo a [6] los elementos del álgebra, $\mathfrak{g}$, son representados por los siguientes operadores diferenciales sobre $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} L_0 = -\frac{\partial}{\partial \phi}, \\ L_1 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right), \quad L_2 = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right). \end{cases} \tag{4.32}$$

Exponenciando cada uno de estos operadores se obtiene un grupo monoparamétrico asociado, a cada operador, que es subgrupo de la representación (4.18) de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Con la finalidad de que los operadores definidos en (4.32) sean hermíticos y concluir la cuantización, definiremos:

$$H_\chi = iL_\chi. \tag{4.33}$$

Explícitamente:

$$\begin{cases} H_0 \equiv -i \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ H_1 \equiv i \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right), \end{cases} \quad H_2 \equiv i \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right). \quad (4.34)$$

Recordemos que para (4.33) se usó $\hbar = 1$. Se puede chequear que los operadores definidos en (4.34) satisfacen el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$, como debe ser, y que la correspondencia de estos generadores con los vectores de Killing viene dada por:

$$H_0 = i \xi^3, \quad (4.35)$$

$$H_1 = i \xi^2, \quad (4.36)$$

$$H_2 = i \xi^1. \quad (4.37)$$

Hemos completado el procedimiento de cuantización ya que asociado a la simetría tenemos los operadores autoadjuntos H_0 , H_1 y H_2 . Esto es, hemos realizado, lo cual era nuestro objetivo, el álgebra de Lie del grupo de isometrías de dS_2 . Otros observables como el hamiltoniano, que debe ser una función de los generadores del álgebra de $SL(2, \mathbb{R})$, y la posición, que no esta relacionada con el álgebra, serán discutidos más adelante. No es difícil, ver [6], chequear que esta representación ademas de proyectiva del grupo de Lorentz, es verdadera. Esto último lo usamos, a continuación, para obtener el límite de curvatura cero de esta representación y así poder hacer su interpretación.

Nos queda, entonces, entender la física de esta representación. La mecánica cuántica en espacio-tiempo curvo no es fácil de interpretar. Sin embargo, teniendo la posibilidad de tomar la curvatura tendiendo a cero, se debería de obtener una representación del grupo de Poincaré, en este caso en (1+1). Por lo que, el método usual es considerar un límite en que el álgebra de Lie del grupo de isometrías del espacio-curvo va al álgebra de Lie del grupo de isometrías del espacio plano. Este método es conocido como el método de las contracciones (ver, p.e., [23] y las referencias allí citadas). Este método no está bien establecido matemáticamente. Pero, como lo fundamental no es el álgebra sino la representación lo mejor es considerar el límite a nivel de las representaciones. Afortunadamente, en la referencia [7], se estudia el límite de representaciones y uno de ellos se aplica a nuestro caso de dS_2 . En efecto, particularizando a nuestra representación, de esta referencia tenemos, de su teorema 2, que ella, dada por (4.18), puede ser contraída a una suma directa de representaciones con masa diferente de cero de Poincaré en (1+1), de la

misma masa $|\sigma| = |s|$ y con espín igual a cero (ya que el grupo de Poincaré en $(1+1)$ no da representaciones con espín). Por esta razón, a esta sección la hemos llamado cuantización de la partícula masiva ($m = |\sigma|$) sin espín.

Este método de cuantización tiene la bondad de que automáticamente está garantizada la covariancia frente al grupo de isometrías. Otros métodos de cuantización que están basados en cuantizar el álgebra de Lie no garantizan la covariancia. Ya que no toda representación del álgebra de Lie por operadores autoadjuntos viene de una representación del grupo. En ese caso, en esos otros métodos de cuantización, habría que chequear si la representación del álgebra viene de una representación del grupo (esto es, si la representación del álgebra es integrable a la representación del grupo). En conclusión toda cuantización, haga lo que haga, tiene que tomar en cuenta el método de cuantización aquí realizado.

4.2.2. Una representación de $SL(2, \mathbb{R})$ que no es de $L_{3+}^\uparrow$

En esta subsección consideraremos una representación de $SL(2, \mathbb{R})$ que no es una representación del grupo de Lorentz restringido $L_{3+}^\uparrow$ (a diferencia del caso anterior). Esto no debe preocuparnos, ya que como sabemos, necesitamos, de acuerdo al teorema de Wigner, representaciones proyectivas. En este caso, tenemos una representación genuinamente proyectiva, que no es una representación verdadera de $L_{3+}^\uparrow$, que es generada por una representación verdadera de $SL(2, \mathbb{R})$.

Consideremos ahora la acción de G sobre $\mathcal{H}$, definido por (4.17), viene dada por la siguiente representación:

$$T'_\sigma(a)f(\phi) = \mu'(a, a^{-1}\phi)f(a^{-1}\phi), \quad (4.38)$$

donde, $\mu'(a, \phi) = \mu(a, \phi)^{\frac{1}{2}+\sigma} \nu(a, \phi)$ y $\nu(a, \phi) = \frac{w(a, \phi)}{|w(a, \phi)|}$.

Luego la representación dada por (4.38) puede escribirse como:

$$T'_\sigma(a)f(\phi) = \nu(a, a^{-1}\phi) T_\sigma(a)f(\phi), \quad (4.39)$$

donde, $T_\sigma(a)$ está definido en (4.18).

Podemos chequear fácilmente que ν es un multiplicador, ya que anteriormente demostramos que $w(a, \phi)$ y $\mu(a, \phi)^h$ (En este caso $h = -\frac{1}{2}$) son multiplicadores, por ende $\nu(a, \phi)$ es un multiplicador y por lo tanto $\mu'(a, \phi)$ es un multiplicador (ya que el producto de multiplicadores es un multiplicador lo que es fácilmente verificable). Luego, (4.38), y por lo

tanto (4.39), define la representación canónicamente asociada al multiplicador $\mu'(a, \phi)$ para G . De la misma forma que para la representación anterior, se puede demostrar que esta nueva representación es unitaria.

Se puede observar de (4.39) que existe una relación entre la representación de la sección 4.1.1 y esta nueva representación dada por (4.38). Por lo tanto, existirá una relación entre los operadores de dichas representaciones. Esta relación ya fue calculada en [6] obteniéndose una representación de los vectores de Killing en el espacio de Hilbert dada por:

$$L'_\chi = \rho(\phi) L_\chi(f(\phi)/\rho(\phi)), \quad \rho(\phi) = e^{-i\phi/2}. \quad (4.40)$$

Explícitamente:

$$\begin{cases} L'_0 = -\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{i}{2}, & L'_2 = \sin\phi \left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{i}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \cos\phi, \\ L'_1 = \cos\phi \left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{i}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \sin\phi, \end{cases} \quad (4.41)$$

Para que estos operadores sean hermíticos, definamos:

$$H'_\chi = i L'_\chi. \quad (4.42)$$

Tal que (4.41) se escribe como:

$$\begin{cases} H'_0 = -\left(i\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2} \right), & H'_2 = \left(\sin\phi \left(i\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2} \right) + i\cos\phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right), \\ H'_1 = \left(\cos\phi \left(i\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2} \right) - i\sin\phi \left(\frac{1}{2} + \sigma \right) \right), \end{cases} \quad (4.43)$$

Se puede demostrar que estos operadores son autoadjuntos en el producto escalar (4.17) y además satisfacen el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$. La correspondencia de cada uno de estos generadores del álgebra con los vectores de Killing viene dada por el cambio:

$$H'_0 = i\xi^3, \quad (4.44)$$

$$H'_1 = i\xi^2, \quad (4.45)$$

$$H'_2 = i\xi^1. \quad (4.46)$$

Nuevamente, hemos obtenido la mecánica cuántica de otro sistema, estableciendo el espacio de Hilbert y los observables, todo ello dentro de una representación proyectiva del grupo de isometría, como debe ser de acuerdo al teorema de Wigner. La física de esta representación, si es que la tiene, está fuera de los objetivos del trabajo y no será interpretada.

4.2.3. Hamiltoniano y operador posición

Hamiltoniano

De acuerdo a la subsección 2.2.1, para considerar la dinámica en dS_2 , de los sistemas gobernados por las representaciones en las secciones 4.2.1 y 4.2.2, debemos considerar una representación unitaria del grupo de los reales en un espacio de Hilbert: $U(t)$ $t \in \mathbb{R}$. Este grupo monoparamétrico tiene un generador que es el hamiltoniano.

En algunos espacio-tiempo el grupo que genera la dinámica es parte del grupo de isometría. Por ejemplo, este es el caso de Minkowski, donde las traslaciones en el tiempo, que generan la dinámica, son un subgrupo de Poincaré. Esto tiene su origen en la existencia de un vector de Killing tipo tiempo para el espacio de Minkowski.

El problema en dS_2 es que, como ya se demostró, al no existir vectores de Killing tipo tiempo no es posible que la dinámica venga dada por un subgrupo del grupo de isometrías (el grupo de Lorentz en tres dimensiones). Luego, el hamiltoniano no forma parte del álgebra de $SL(2, \mathbb{R})$. Sin embargo, esto no significa que no exista dinámica. Más aún, puede existir una dinámica generada por un operador autoadjunto independiente del tiempo. La cuestión es que el parámetro t no tiene que ver, en este caso, con la existencia de un vector de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ (tipo tiempo). Si llamamos al generador de estas traslaciones, en t , hamiltoniano, podemos resumir lo dicho así: el hamiltoniano genera las traslaciones en un tiempo t asociado a un campo vectorial tipo tiempo (que no será de Killing, en el caso de dS_2).

En dS_2 , al ser un espacio-tiempo, existen muchos campos vectoriales tipo tiempo (globales). La cuestión sería elegir un criterio para escoger uno. En $\mathcal{M}^{3,1}$ como sabemos el campo vectorial de Killing tipo tiempo asociado a Poincaré es además geodésico. Por lo tanto, una posibilidad, más cercana al caso de Minkowski, ya que no existen vectores de

Killing tipo tiempo sería exigir que el campo vectorial sea geodésico. Como ya se discutió en la subsección (3.4.1) existen campos vectoriales tipo tiempo geodésicos. Estos campos vectoriales tienen la ventaja de que físicamente se pueden interpretar como observadores inerciales (que es el caso también de los vectores de Killing en Minkowski).

De lo dicho en los dos párrafos anteriores, una posibilidad es que el hamiltoniano genera las traslaciones en el tiempo t_G asociado al vector geodésico $\frac{\partial}{\partial t_G}$ en las coordenadas globales. Aunque estamos usando unas coordenadas, esta asociación no depende de coordenadas ya que el objeto es un campo vectorial y por lo tanto es un objeto geométrico. Luego, la ecuación de Schoedinger, en la base de coordenadas globales, se escribe como:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\phi, t_G)}{\partial t_G} = \hat{H} \Psi(\phi, t_G) \quad \forall \Psi(\phi, t_G) \in \mathfrak{D}(\hat{H}) \subset L^2(-\pi, \pi) \quad (4.47)$$

La obtención del hamiltoniano $\hat{H}$ en el espacio de Hilbert, asociado a la partícula masiva y sin espín, dada en la sección 4.2.1, por ejemplo, la consideraremos en otro trabajo. Aquí, por ahora, hemos aclarado en qué sentido se tiene una dinámica en un espacio-tiempo que no tiene vectores de Killing tipo tiempo.

Operador posición

En el caso de $\mathcal{M}^{3,1}$, el observable posición se refiere a la localización de la partícula en una hiper-superficie $t \equiv \text{cte}$, lo cual resulta en el espacio euclídeo tridimensional. Donde t es el tiempo asociado al vector de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$. Puesto que el espacio euclídeo tridimensional puede ser cubierto globalmente por una sola carta, esto va a llevar a las componentes del observable posición que son multiplicativas por las coordenadas cartesianas. Aunque esta construcción es válida en coordenadas cartesianas, ella es geométrica obviamente. La manera de hacerla claramente independiente de coordenadas es vía el observable que localiza la partícula en un subconjunto de Borel arbitrario (sin especificar lo que es un Borel, este sería a los efectos prácticos un subconjunto “arbitrario” de $\mathbb{R}^3$, entre los posibles estarían: todos los abiertos, todos los cerrados y sus complementos y uniones numerables). Este observable viene dado por un proyector cuyo valor medio responde a la pregunta de si la partícula está localizada en el subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^3$ asociado al proyector. Este proyector viene dado en la representación posición por la función característica:

$$\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in A, \\ 0 & \vec{x} \notin A, \end{cases} \quad (4.48)$$

donde, A es un Borel y $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Es decir, si $\hat{P}_A$ denota el proyector asociado, en la representación posición, entonces este viene dado por:

$$\hat{P}_A \Psi(\vec{x}) = \chi_A(\vec{x}) \Psi(\vec{x}), \quad \forall \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (4.49)$$

Evidentemente, toda la física que está en el operador posición está en la familia de proyectores $\{\hat{P}_A, \text{tal que } A \text{ es un Borel}\}$ y viceversa. Por esta razón, la localización usual es independiente de coordenadas ya que estos proyectores, a diferencia de las componentes del operador posición, no dependen de coordenadas.

En el caso de dS_2 la evolución viene dada por el parámetro t_G , asociado al vector geodésico $\frac{\partial}{\partial t_G}$, como ya fue explicado en la sección precedente del hamiltoniano. Lo cual nos dice que la partícula se localiza en una circunferencia. Como la circunferencia S^1 no es cubierta por una sola carta entonces, asociar coordenadas a la localización no tiene sentido (por ejemplo, la coordenada ϕ), ver, p.e., [11]. No obstante, podemos definir el proyector $\hat{P}_A$ con A un Borel de S^1 . Luego, el proyector asociado a un Borel $A \subset S^1$ viene dado por:

$$\hat{P}_A \Psi = \chi_A \Psi, \quad \forall \Psi \in L^2(S^1). \quad (4.50)$$

Si identificamos a $L^2(S^1)$ con $L^2(-\pi, \pi)$ entonces:

$$\hat{P}_A \Psi(\phi) = \chi_A(\phi) \Psi(\phi), \quad \forall \Psi \in L^2(-\pi, \pi). \quad (4.51)$$

Finalmente, en el mismo espacio de Hilbert (4.17) tenemos la representación de la localización y de los observables asociados a la simetrías del espacio-tiempo. Estos forman un conjunto de observables básicos de nuestra teoría en base a los cuales se podría escribir otro observable como función de ellos, en particular, el hamiltoniano. Por ejemplo, para la partícula masiva sin espín, los observables fundamentales son: $\{\hat{P}_A, \hat{H}_0, \hat{H}_1, \hat{H}_2\}$ con A un Borel arbitrario de S^1 .

Capítulo 5

Discusiones y conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el problema de formular la mecánica cuántica en el espacio de de Sitter dS_2 para el sistema de una partícula, el cual es la base para construir otros sistemas cuánticos más complicados en esta geometría. En este sentido, se aborda, de manera simple, uno de los grandes problemas de la física que es la unificación de la teoría de la relatividad general y la mecánica cuántica. La simplicidad en este caso es que la teoría de la gravedad es clásica. No obstante, como se ha probado esto tiene efectos sobre la cuántica.

Con el objeto de formular la mecánica cuántica en de Sitter hemos visto que los aspectos globales de este espacio-tiempo son sumamente importantes. En efecto, si consideramos una región de de Sitter, como la descrita por las coordenadas estáticas, llegaríamos a la conclusión errónea de que existen vectores de Killing tipo tiempo, lo que nos lleva a una cuantización incorrecta. En este sentido, es fundamental el concepto de completitud geodésica. Ya que este concepto nos define el espacio-tiempo. Por ejemplo, podemos conseguir una solución que sea una parte de Minkowski, sin embargo, al realizar la completitud geodésica es que obtendremos el espacio-tiempo completo que es el Minkowski que conocemos. En la literatura a veces se cuantiza una parte de de Sitter (ver p.e. [14]) .

En la construcción de la mecánica cuántica normalmente se considera representaciones de álgebras de Lie. Por ejemplo, cuando se construye la mecánica cuántica de partículas en Minkowski se consideran representaciones del álgebra de Lie del grupo de Poincaré. Sin embargo, como es bien conocido, no toda representación del álgebra de Lie de un grupo se integra a una representación del grupo. Si fuese el caso de que no es integrable la cuantización vía el álgebra estaría errónea. Por ello, en este trabajo consideramos la cuantización vía las representaciones del grupo de isometría del espacio-tiempo, en nuestro

caso de dS_2 . Todo esto consistente con el teorema de Wigner, que es fundamental en la obtención de la mecánica cuántica. En este punto, es bueno hacer una reflexión ya que al teorema de Wigner no se le da la importancia debida en la literatura.

Aunque en este trabajo consideramos el espacio de de Sitter en dos dimensiones, dS_2 , los resultados obtenidos nos dan una idea de lo que puede ocurrir en dS_4 , que es un modelo más realista. En particular, la no existencia de vectores de Killing tipo tiempo en $(3+1)$ se induce. Como pareciera ser el caso en la literatura donde se da por hecho, aunque no hemos visto una demostración. Luego, la problemática que se presenta en dos dimensiones para la cuántica se va a presentar también en dS_4 . Este problema se puede resolver usando la construcción de un vector geodésico tipo tiempo en lugar de uno de Killing tipo tiempo, como propusimos en dS_2 . Por ejemplo, en dS_4 tenemos “coordenadas globales” y justamente también ahí $\frac{\partial}{\partial t_G}$ es geodésico.

Finalmente, en este trabajo hemos obtenido los observables y la mecánica cuántica de una partícula masiva sin espín (esta interpretación obtenida del límite de curvatura cero) sin partir de una formulación clásica. Esto es lo deseable, ya que la cuántica no se debería derivar de la clásica. Más bien, la clásica, por el principio de correspondencia de Bohr, debería ser un límite de la cuántica. En este sentido, sería deseable obtener la clásica (de una partícula masiva sin espín) en dS_2 , ó dS_4 , como un límite de la mecánica cuántica que nosotros construimos. Esto es, su formulación hamiltoniana (espacio de fase y función de Hamilton) o su formulación lagrangiana (fibrado tangente del espacio de configuraciones y su función de Lagrange). Todo esto en principio es posible y queda como una extensión natural de nuestro trabajo.

Apéndice A

Algunos conceptos

En este apéndice queremos explicar las ideas básicas de topología que hemos usado en nuestro trabajo y que pueden ayudar al lector a guiarse a través de un tema que no es común para los físicos. La idea es que esto pueda servir como: 1) una referencia de acceso inmediato para algunos conceptos utilizados a lo largo del trabajo, 2) una guía para profundizar en estos conceptos. No podemos hacer un tratamiento completo pero, esperamos que este apéndice sirva como guía para encontrar bibliografía (ver por ejemplo [24],[25],[26]) y elaborar los detalles que han sido dejados de lado en el trabajo.

A.1. Funciones

Sean X y Y dos conjuntos, **una función** f es una regla por la cual asignamos uno y solo un $y \in Y$ por cada $x \in X$, esto se puede escribir como:

$$f : X \rightarrow Y \tag{A.1}$$

El subconjunto de X para los cuales esta definida la función se denomina **dominio de f** y el subconjunto de Y para el cual $\exists x : y = f(x)$ se llama **rango de f** . Pueden haber varios elementos del dominio a los que les corresponda el mismo elemento del rango. El subconjunto de X cuyos elementos son mapeados a un conjunto $B \subseteq Y$ bajo la acción de f se le denomina **imagen inversa de B** :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B \text{ con } f(x) = y\} \tag{A.2}$$

Una función se denomina:

- **Inyectiva:** Si $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$, es decir, cada elemento del rango viene de un único elemento del dominio.
- **Sobreyectiva:** Si para $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que: $f(x) = y$.
- **Biyectiva:** Si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Una función $f : [0, 1] \rightarrow Y$ cuyo punto final es igual a su punto inicial, esto es, $f(0) = f(1) = p$, es una **curva cerrada en p** o **lazo basado en p**. La **función constante** $c(x) = p$, donde p es un elemento fijo del rango y x cualquier elemento del dominio, es un ejemplo de una curva cerrada. Las curvas implícitamente serán funciones continuas pero, para definir este concepto necesitamos de la topología, que definiremos más adelante.

A.2. Relaciones y clases de equivalencia

Una relación R entre un conjunto X y otro Y es un subconjunto de $X \times Y$.

Sea X un conjunto distinto del vacío y a un elemento de dicho conjunto, se define una relación de equivalencia entre X y X como una relación que satisface:

1. Es **reflexiva**: $a \sim a$.
2. Es **simétrica**: $a \sim b \rightarrow b \sim a$.
3. Es **transitiva**: Si $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $a \sim c$.

La relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto X determina una partición de este en subconjuntos disjuntos, denominados **clases de equivalencia**. Una clase de equivalencia está dada por:

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\} \quad (\text{A.3})$$

El elemento a , o cualquier elemento en $[a]$, se le denomina **representativo de la clase**.

A.3. Espacio topológico

Sea X un conjunto distinto del conjunto vacío, $\emptyset$, y $\Theta = \{U_i \mid i \in I\}$ una clase de subconjuntos de X , el par (X, Θ) es un **espacio topológico** si se verifican los siguientes axiomas:

1. Los conjuntos $\emptyset, X \in \Theta$.
2. Si J es cualquier sub-colección de I , la familia $\{U_j | j \in J\}$ satisface:

$$\bigcup_j U_j \in \Theta. \quad (\text{A.4})$$

3. Si K es una sub-colección finita de I , la familia $\{U_k | k \in K\}$ satisface:

$$\bigcap_k U_k \in \Theta. \quad (\text{A.5})$$

En caso de que se cumplan los axiomas se dice que Θ es una **topología** para X . A los U_i se le conoce como los **abiertos de la topología**.

Algunos tipos de topología

- Discreta: La topología está dada por todos los subconjuntos de X .
- Indiscreta: La topología está dada por el conjunto total y el conjunto vacío: $\Theta = \{X, \emptyset\}$
- Relativa: Si (X, Θ) es un espacio topológico y $A \subset X$, A será un espacio topológico definiendo τ como su topología, si $\tau = \{U | U = A \cap B, B \in \Theta\}$.
- Topología producto: Si (X_1, Θ_1) y (X_2, Θ_2) son dos espacios topológicos, podemos hacer $X_1 \times X_2 \equiv \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1 \text{ y } x_2 \in X_2\}$ un espacio topológico $(X_1 \times X_2, \Theta)$ con Θ el conjunto de todos los subconjuntos $X_1 \times X_2$ que puede ser expresado como uniones de conjuntos de la forma $U_1 \times U_2, U_1 \in \Theta_1 \text{ y } U_2 \in \Theta_2$.
- Topología estándar de R^n : A R^n se le pueden dar infinitas topologías. La topología usual se define como sigue. Sea, la n -bola de radio r y centro p , dada por:

$$B_r(p) = \left\{ x \in R^n : \sqrt{\sum_j (x_j - p_j)^2} < r \right\}, \quad r > 0 \quad (\text{A.6})$$

Un subconjunto $A \subset R^n$ se dice abierto si $\forall p \in A \exists r > 0$ tal que $A \cap B_r(p) = B_r(p)$. Es fácil verificar que esta definición de abierto satisface los axiomas de una topología.

Espacio topológico de Hausdorff

Un espacio topológico (X, Θ) es de Hausdorff si para cualquier par de puntos $p, q \in X, p \neq q$, existen abiertos, que contienen a p y a q , U_p y U_q tal que $U_p \cap U_q = \emptyset$.

Base de un espacio topológico

Una colección de conjuntos abiertos de X , $\mathfrak{B} \subset \Theta$ se llama una **base de un espacio topológico** si cada conjunto abierto puede ser expresado como la unión de elementos de $\mathfrak{B}$. Diremos que la topología es **segundo contable** si tiene una base contable, es decir, si $\mathfrak{B}$ tiene un número contable de elementos.

Funciones continuas

Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos. Una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es continua si la imagen inversa de todo abierto en X_2 es un abierto de X_1 . La función f se dice continua en un punto $p \in X_1$ si para todo abierto que contiene a $f(p)$ su imagen inversa es un abierto en X_1 que contiene a p .

Homeomorfismo e invariantes topológicos

Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos. Una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo si es continua y tiene inversa, $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$, la cual es también continua. Si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 se dice que estos espacios topológicos son idénticos. Para diferenciar los espacios topológicos el concepto de homeomorfismo es fundamental. Este vendría a sustituir la idea imprecisa de que dos espacios topológicos son equivalentes si es posible “deformar uno en el otro” por una deformación continua. Esto es intuitivamente una deformación sin “romper” un espacio para obtener el otro. No obstante estas ideas, intuitivas, no pueden sustituir al concepto de homeomorfismo (el cual es muy simple).

Existen propiedades de los espacios topológicos que son invariantes ante homeomorfismos, estas propiedades reciben el nombre de **invariantes topológicos**, luego, dado un espacio topológico X que posee una propiedad invariante **P** todo espacio homeomorfo a X poseerá la misma propiedad. Por lo tanto, si queremos probar que dos espacios no son topológicamente idénticos basta con encontrar al menos un invariante topológico que sea distinto para ambos.

Algunos invariantes topológicos son:

- **Conexidad:** Un espacio topológico se dice conexo si no puede ser escrito como $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son abiertos y $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

- Arco-conexidad: Un espacio topológico X se dice arco-conexo si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ existe una curva continua, $f : [0, 1] \rightarrow X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.
- Simple-conexidad: Un espacio topológico es simplemente conectado si cada curva continua cerrada puede ser continuamente encogida a un punto.

Espacio de cubrimiento de un espacio topológico

Un **espacio de cubrimiento** de X es un espacio topológico C junto con una función continua sobreyectiva, $\pi : C \rightarrow X$, tal que para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta U de x tal que $\pi^{-1}(U)$ es la unión de abiertos disjuntos en C , cada uno de los cuales es transformado homeomórficamente sobre U por π . Si además el espacio C es simplemente conexo se dice que el espacio es un **espacio de cubrimiento universal**.

A.3.1. Grupos de Homotopía

Intuitivamente diremos que dos curvas son homotópicas si una puede deformarse en la otra y llamaremos homotopía al mapa de transformación. Los grupos de homotopía son otro invariante topológico. La relación de homotopía es una relación de equivalencia por lo que a partir de ella se generan clases de equivalencia cuyos elementos son curvas homotópicas entre sí. Justamente en nuestro trabajo usaremos los invariantes topológicos asociados a homotopía por lo que, explicaremos esta idea a continuación.

El grupo fundamental

A continuación damos la definición de homotopía de curvas. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ y $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ dos curvas continuas que tienen el mismo punto inicial $p \in X$ y final $q \in X$, diremos que α es homotópica a β si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(0, t) &= p, \\ H(s, 1) &= \beta(s), & H(1, t) &= q. \end{aligned} \tag{A.7}$$

La función H se denomina una **homotopía**.

Se puede demostrar que “homotópico a” es una relación de equivalencia: $\alpha \sim \beta$. Dicha relación genera clases de equivalencia entre las curvas que llamaremos **clases de homotopía** $[\alpha]$.

Podemos definir homotopía para curvas cerradas. Diremos que una curva cerrada $f : [0, 1] \rightarrow X$ es **contráctil en un punto** si es homotópica la curva constante. Análogamente podemos definir clases de equivalencia. En el caso de lazos en un punto p , $\alpha(0) = \alpha(1) = p$, también se puede definir un producto así:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq 1/2, \\ \beta(2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

resultando que el producto de dos lazos en p es un lazo en p .

Las clases de equivalencia formadas con la homotopía heredan la propiedad del producto (A.8) ya que este no depende del representativo, es decir:

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]. \quad (\text{A.9})$$

Luego, el producto de lazos basados en p está bien definido. Por lo tanto, nos podemos quedar con un producto a nivel de las clases de equivalencia.

Se puede probar que el conjunto de todas las clases de equivalencia de lazos basados en p forman un grupo con el producto definido en (A.9) (a diferencia de los lazos). Esto es, si $\alpha, \beta, \dots$, son curvas cerradas entonces satisfacen:

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma]), \quad (\text{A.10})$$

$$[\alpha] * [c(x)] = [c(x)] * [\alpha] = [\alpha], \quad (\text{A.11})$$

$$[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c(x)]. \quad (\text{A.12})$$

con $[c(x)]$ la clase de equivalencia de la curva constante y $\alpha^{-1} \equiv \alpha(1 - s)$ con $[\alpha^{-1}]$ su clase de equivalencia inversa a $[\alpha]$.

El grupo formado es conocido como **el grupo fundamental** y denotado por $\pi_1(X, p)$. Si el espacio es arco-conectado, se puede probar que el grupo fundamental no depende del punto p , salvo isomorfismos. En ese caso, escribiremos $\pi_1(X)$. Si $\pi_1(X)$ consiste únicamente de la clase de equivalencia de la curva constante diremos que es trivial, en caso contrario será no trivial.

De la propia definición de simplemente conexo, si un espacio topológico tiene un grupo fundamental trivial entonces es simplemente conexo.

Un teorema que resulta ser muy útil, lo usamos para el espacio de de Sitter en (1+1) dimensiones, es el que enunciamos a continuación. (Ver por ejemplo [25])

Teorema 5 Sean X y Y dos espacios topológicos arco-conectados entonces el grupo de homotopía del espacio producto viene dado por:

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

donde $\times$ es el producto directo y $\cong$ denota isomorfismo de grupo.

Homotopía en general

Uno frecuentemente considera homotopía en un sentido más general. Esto es, en lugar de considerar deformaciones de curvas, que son funciones particulares, se deforman funciones más generales en otras funciones. Intuitivamente diremos que dos funciones son homotópicas si una puede deformarse en la otra y llamaremos homotopía al mapa de transformación.

A continuación damos la definición de homotopía de funciones. Dos transformaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos son llamadas **homotópicas**, $f \simeq g$, si existe una **homotopía** H entre ellas, esto es, una transformación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ con $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$.

Si $\mathfrak{C}(X, Y)$ denota el espacio de todas las transformaciones continuas de un espacio topológico X a un espacio topológico Y . Una homotopía define una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{C}(X, Y)$. Dos espacios topológicos X e Y se dicen **homotópicamente equivalentes** si existen transformaciones $f \in \mathfrak{C}(X, Y)$ y $g \in \mathfrak{C}(Y, X)$ tal que las transformaciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a I_X e I_Y , las transformaciones identidad en los espacios topológicos respectivos (esto es, si f posee una “inversa de homotopía” g). Espacios homeomorfos son obviamente homotópicamente equivalentes. En efecto, este concepto es una “relajación” del concepto de homeomorfismo entre dos espacios topológicos. Ya que, si f es un homeomorfismo f^{-1} es también su “inversa homotópica”.

El espacio topológico más simple (no vacío) es un punto. Un espacio topológico X se dice **contráctil** si es homotópicamente equivalente a al espacio topológico de un punto. Se puede probar que un espacio contráctil es simplemente conexo, pero, al revés no es cierto. Ser contráctil es un invariante topológico.

Puesto que un homeomorfismo es una transformación continua entre espacios topológicos, las clases de equivalencia definidas por homotopía en $\mathfrak{C}(X, Y)$ “no cambian” bajo homeomorfismo de X o de Y . Estas clases de equivalencia serían “invariantes topológicos” del par de espacios X e Y . Pero, a nosotros nos interesan son invariantes topológicos de un espacio topológico. ¿Cómo podemos entonces usar la homotopía para clasificar espacios topológicos?. La estrategia es fijar uno de los espacios topológicos, X ó Y . Por ejemplo, $X = S^n$, la n -esfera es la elección común. Así entenderemos como un espacio Z difiere de un espacio Y cuando lo comparamos, en el sentido de homotopía, al mismo espacio, en este caso, $X = S^n$.

Se estudian por lo tanto las clases de equivalencia bajo homotopía de $\mathfrak{C}(S^n, Y)$ cuando Y cambia a otro espacio topológico. Una gran mayoría de invariantes topológicos son justamente invariantes de homotopía. A las clases de equivalencia de $\mathfrak{C}(S^n, Y)$ puede dársele una estructura de grupo. Por ejemplo, en el caso de $n = 1$, sin entrar en detalles, la construcción de este grupo lleva a $\pi_1(Y)$, el grupo fundamental de Y , que ya sabemos como se hace su construcción y que es un invariante topológico. En el caso en el que $n > 1$ estos grupos se conocen como grupos de homotopía mayores, $\pi_n(Y)$. La construcción explícita de estos grupos está fuera del objetivo de este apéndice y puede verse en [25]. Evidentemente, estos grupos también serán invariantes topológicos.

Un teorema que resulta ser muy útil, y se utilizó para el espacio de de Sitter (3+1) dimensiones, es el que enunciamos a continuación.

Teorema 6 *Sean X y Y dos espacios topológicos arco-conectados entonces:*

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y).$$

donde $\times$ es el producto directo y $\cong$ denota isomorfismo de grupo.

Apéndice B

Cálculo de los vectores de Killing

En este apéndice queremos exponer el cálculo de los vectores de Killing para de Sitter en (3+1) dimensiones que hicimos empleando el software Maple 18. Con la métrica señalada en (3.22), calculada en las coordenadas gobales, el software Maple 18 calculó los vectores de Killing. En una base las componentes de los co-vectores de Killing (asociados a los vectores de Killing) pueden calcularse de acuerdo a la ecuación (??). En particular, en la base de coordenadas globales, mostrada en la sección 3.2.1 resultan diez ecuaciones de Killing. Las componentes de los co-vectores para de Sitter en (3+1) dimensiones serán, de acuerdo a la notación empleada por Maple 18, V_1, V_2, V_3 y V_4 . Donde la componente V_4 la tomaremos, en este apéndice, como la componente temporal. Si agrupamos por las constantes las cuatro componentes e introducimos los vectores de la base coordenada podemos escribir el campo vectorial de Killing más general y, debido a la existencia de diez constantes arbitrarias existirán 10 vectores de Killing linealmente independientes. Cada vector se obtiene anulando 9 de las 10 constantes, las cuales Maple 18 denota por C_i , $i = 1, 2, \dots, 10$.

with (Physics)

‘’, ‘.’, Annihilation, AntiCommutator, Antisymmetrize, Bra, Bracket, Check, Christoffel, Coefficients, Commutator, Coordinates, Creation, D-, Dagger, Define, Dgamma, Einstein, Expand, ExteriorDerivative, FeynmanDiagrams, Fundiff, Geodesics, GrassmannParity, Gtaylor, Intc, Inverse, Ket, KillingVectors, Kronecker, LeviCivita, Library, LieBracket, LieDerivative, Normal, Parameters, PerformOnAnticommutativeSystem, Projector, Psigma, Ricci, Riemann, Setup, Simplify, SpaceTimeVector, SubstituteTensorIndices, SumOverRepeatedIndices, Symmetrize, TensorArray, ToFieldComponents, ToSuperfields, Trace, TransformCoordinates, Vectors, Weyl, ‘^’, dAlembertian, d-, diff, g-*

‘Default differentiation variables for d₋, D₋ and dAlembertian are: ‘ $\{X = (\phi, \psi, \theta, t)\}$

‘Systems of spacetime Coordinates are: ‘ $\{X = (\phi, \psi, \theta, t)\}$

$$[metric = \left\{ 1, 1 = l^2 \left(\cosh \left(\frac{t}{l} \right) \right)^2, 2, 2 = l^2 \left(\cosh \left(\frac{t}{l} \right) \right)^2 (\sin(\phi))^2, 3, 3 = l^2 (\sin(\phi))^2 \left(\cosh \left(\frac{t}{l} \right) \right)^2 (\sin(\psi))^2, 4, 4 = -1 \right\}]$$

Define (V)

‘Defined objects with tensor properties‘

$$\{V, \text{'\&Dscr';}, \text{'\textsubscript{\mu};}, C_{\mu,\nu,\alpha,\beta}, G_{\mu,\nu}, \Gamma_{\mu,\nu,\alpha}, R_{\mu,\nu}, R_{\mu,\nu,\alpha,\beta}, X_{\mu}, \delta_{\mu,\nu}, g_{\mu,\nu}, \gamma_{\mu}, \sigma_{\mu}, \partial_{\mu}, \epsilon_{\alpha,\beta,\mu,\nu}\}$$

Killing Vectors (V)

$$V_1(X) = l \sinh \left(\frac{t}{l} \right) \cosh \left(\frac{t}{l} \right) (((-C3 \sin(\theta) - C4 \cos(\theta)) \sin(\psi) - C2 \cos(\psi)) \cos(\phi) + C1 \sin(\phi)) \\ + 1/2 ((-C6 \sin(\theta) + C7 \cos(\theta)) \sin(\psi) + C5 \cos(\psi)) \left(\cosh \left(2 \frac{t}{l} \right) + 1 \right)$$

$$V_2(X) = \frac{1}{\cos(\psi) \sin(\psi)} \left(\cosh \left(\frac{t}{l} \right) l \sinh \left(\frac{t}{l} \right) \sin(\phi)^2 (((-C3 \sin(\theta) + C4 \cos(\theta)) \sin(\psi) + C2 \cos(\psi)) \sin(\phi) \right. \\ \left. + C1 \cos(\phi)) \sin(\psi)^2 - \cos(\phi) \sin(\phi) \left(l \sinh \left(\frac{t}{l} \right) \cosh \left(\frac{t}{l} \right) (((-C3 \sin(\theta) - C4 \cos(\theta)) \sin(\psi) \right. \right. \\ \left. \left. - C2 \cos(\psi)) \cos(\phi) + C1 \sin(\phi)) + \frac{((-C6 \sin(\theta) + C7 \cos(\theta)) \sin(\psi) + C5 \cos(\psi)) \left(\cosh \left(\frac{2t}{l} \right) + 1 \right)}{2} \right) \\ \sin(\psi)^2 + \frac{1}{8 \tan(\phi)} \left(\left(2 \tan(\phi) (-C9 \cos(\theta) - C10 \sin(\theta)) \cos(\psi) (-1 + \cos(2\phi)) \sqrt{1 - \cos(2\psi)} \right. \right. \\ \left. \left. + \tan(\phi) \tanh \left(\frac{t}{l} \right) \sin(-\psi - \theta + \phi) - C3l - \cos(-\psi - \theta + \phi) \tan(\phi) \tanh \left(\frac{t}{l} \right) - C4l + \right. \right. \\ \left. \left. + l \tan(\phi) (-C3 \sin(-\psi + \theta + \phi) - C3 \sin(\psi - \theta + \phi) + C3 \sin(\psi + \theta + \phi) - C4 \cos(-\psi + \theta + \phi) \right. \right. \\ \left. \left. + C4 \cos(\psi - \theta + \phi) + C4 \cos(\psi + \theta + \phi)) \tanh \left(\frac{t}{l} \right) - (C7 \sin(-\theta + \psi) + C7 \sin(\theta + \psi)) \right. \right. \\ \left. \left. + C6 \cos(-\theta + \psi) - C6 \cos(\theta + \psi)) (-1 + \cos(2\psi)) \right) \left(\cosh \left(\frac{2t}{l} \right) + 1 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
V_3(X) = & -\frac{1}{8 \tan(\phi)} \left(\left(2 \tan(\phi) ((-C9 \sin(\theta) + -C10 \cos(\theta)) \cos(\psi) + \sin(\psi) - C8) (-1 + \cos(2\phi)) \sqrt{1 - \cos(2\psi)} \right. \right. \\
& + \tan(\psi) \tanh\left(\frac{t}{l}\right) \cos(-\psi - \theta + \phi) - C3l + \sin(-\psi - \theta + \phi) \tan(\psi) \tanh\left(\frac{t}{l}\right) - C4l + \\
& + l \tan(\phi) (-C3 \cos(-\psi + \theta + \phi) - C3 \cos(\psi - \theta + \phi) - C3 \cos(\psi + \theta + \phi) - C4 \sin(-\psi + \theta + \phi) \\
& - C4 \sin(\psi - \theta + \phi) + C4 \sin(\psi + \theta + \phi)) \tanh\left(\frac{t}{l}\right) - (-C7 \cos(-\theta + \psi) - C7 \cos(\theta + \psi) \\
& - C6 \sin(-\theta + \psi) - C6 \sin(\theta + \psi)) (-1 + \cos(2\phi)) \left. \right) \\
& \left(\cosh\left(\frac{2t}{l}\right) + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$V_4(X) = ((-C3 \sin(\theta) + -C4 \cos(\theta)) \sin(\psi) + -C2 \cos(\psi)) \sin(\phi) + -C1 \cos(\phi)$$

Bibliografía

- [1] Sciama D., C. Isham, and R. Penrose. *Quantum Gravity: an Oxford Symposium*. Clarendon Press, Oxford, (1975).
 - [2] N.D. Birrell and P.C. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, (1982).
 - [3] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. University Press, Cambridge, (1995).
 - [4] Logunov A.A Bogolubov N.N and Torodov I.T. *Introduction to axiomatic quantum field theory*. Moscow, (1972).
 - [5] R. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Universidad de Chicago, (1984).
 - [6] V. Bargmann. Irreducible unitary representations of the lorentz group. *Annals of Mathematics*, pages 568–640, 1947.
 - [7] Mickelsson J. and Niederle J. Contraction representations of de sitter groups. *Comm. Math. Phys.*, pages 167–180, 1972.
 - [8] A. Zee. *Einstein Gravity in a nutshell*. Princeton University Press, Universidad de Princeton, (2013).
 - [9] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. Springer, New York, (1972).
 - [10] G. Naber. *The Geometry of Minkowski Spacetime: An introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*. Springer, New York, (2010).
 - [11] E. Castro. *Tesis de licenciatura: Mecánica cuántica en el espacio esférico*. Caracas, Venezuela, 2013.
 - [12] P. Szekeres. *A Course in Modern Mathematical Physics*. Cambridge, 2004.
-

- [13] W. Martinez. *Tesis de grado de maestría Representaciones proyectivas del grupo de Poincaré en $(1+1)$* . Venezuela, 2007.
- [14] C. Ripken. *Coordinate system in the de Sitter space*. The Netherlands, 2013.
- [15] Yoonbai K, Chae Y, and N Park. Classical geometry of de sitter spacetime : An introductory review. *Journal Korean Physical Society*, pages 573–592, 2003.
- [16] J. Garriga. Pair production by an electric field in $(1+1)$ -dimensional de sitter space. *Physical Review D*, pages 6343–6346, 1994.
- [17] J. Gazeau and W. Piechocki. Coherent state quantization of a particle in de sitter space. *Journal of physics A: Mathematical and General.*, pages 6977–6986, 2004.
- [18] G. Jorjadze and W. Piechocki. Geometry of 2d spacetime and quantization of particle dynamics.
- [19] Ashok K. and Pushpa Kalauni. Proper time method in de sitter space. *Physical Review D.*, 2015.
- [20] W. Piechocki. Quantum particle on hyperboloid. *Classical and Quantum Gravity.*, pages 331–336, 2003.
- [21] D. Jackson. *Introduction to electrodynamics*. (1999).
- [22] S. Tabban. *Tesis de licenciatura: Aspectos de Mecánica cuántica relativista en dimensiones bajas*. Venezuela, 2009.
- [23] L. Sequera. *Tesis de grado de maestría: Mecánica cuántica en el espacio-tiempo AdS*. Venezuela, 2015.
- [24] Nash C. and Siddartha S. *Topology and Geometry for Physicist*. Academic Press, Great Britain, (1988).
- [25] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Adam Hilger, New York, (1991).
- [26] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, University of Cambridge, (2002).