

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemáticas



Sobre la interacción entre tres álgebras de Hopf construidas con árboles

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Licenciado Expedito J. Cedeño E.**, para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Matemáticas.

Tutor: Dr. Jean Carlos Liendo.

Caracas-Venezuela

Mayo 2017

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
POSTGRADO DE MATEMATICA.

**DESCRIPCIÓN DE LA TESIS, TRABAJO DE GRADO O
 TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

Información para ser llenada por el estudiante	
Estudiante	Lic. Expedito J. Cedeño E.
Tutor	Dr. Jean Carlos Liendo
Título del trabajo final del Postgrado en Español	
Título	Sobre la interacción de tres álgebras de Hopf construidas con árboles
Resumen	<p>En este trabajo se estudia la interacción entre tres álgebras de Hopf construidas con árboles, estas son: El álgebra de Hopf natural $H_{N\blacktriangle\blacklozenge}$, el álgebra de Hopf de Connes-Kreimer H_{CK} y la de Calaque-Ebrahimi-Manchon H_{CEM}. El trabajo inicia con un estudio sencillo y conciso de las nociones teóricas de álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf, que serán necesarias a lo largo del presente trabajo, así mismo se discuten en detalle algunos ejemplos clásicos presentes en la amplia literatura acerca de álgebras de Hopf.</p> <p>Posteriormente se hace un recuento bastante sencillo y conciso de la teoría de grafos concerniente a los árboles, las cuales serán de utilidad para construir las álgebras de Hopf de árboles. Por último se construyen las álgebras de Hopf $H_{N\blacktriangle\blacklozenge}$, H_{CK} y H_{CEM} haciendo uso de coloraciones y cortes admisibles sobre los lados de un árbol, para cada una de estas álgebras se estudian fórmulas de coproducto y antípoda para ordenes lineales, corolas y palmeras, luego se hace una breve revisión sobre los duales graduados de $H_{N\blacktriangle\blacklozenge}$, H_{CK} y H_{CEM}, para cerrar estudiamos las relaciones de bicomódulo entre estas tres álgebras y sus aplicaciones sobre sus respectivos grupos de caracteres.</p>

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
POSTGRADO DE MATEMATICA.**

Palabras Claves	Álgebras, coálgebras, álgebras de Hopf, árboles, antípoda
Título del trabajo final del Postgrado en Ingles	
Title	About the interaction of three Hopf algebras built with trees
Abstract	<p>In this work, it studies the interaction of three Hopf algebras built with trees, these are: the natural Hopf algebra $H_{NA\mathcal{P}}$, the Hopf algebra of Connes-Kreimer H_{CK} and the Calaque-Ebrahimi-Manchon H_{CEM}. Firstly it studies the theoretical notions of algebras, coalgebras and algebras of Hopf, which will be necessary for the development of the present work, and also discuss in detail some classic examples present in the extensive literature on Hopf algebras.</p> <p>Later a fairly simple and concise account of the graph theory concerning trees is made, which will be useful for constructing the Hopf algebras of trees. Finally the Hopf algebras $H_{NA\mathcal{P}}$, H_{CK} and H_{CEM} are built, making use of admissible colorings and cuts on the sides of a tree. For each of these algebras, co-product and antipoda formulas for linear orders, corollas and palm trees are studied, then a brief review is done on the dual graduates of $H_{NA\mathcal{P}}$, H_{CK} and H_{CEM}. To close it studies the bicomodule relations between these three algebras and their applications on Their respective groups of characters.</p>
Keywords	Algebras, coalgebras, Hopf algebras, trees, antipode



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado de Maestría presentado por el LIC. EXPEDITO JESÚS CEDEÑO ESPINOZA, C.I.V-18.099.367, bajo el título "SOBRE LA INTERACCIÓN DE TRES ÁLGEBRAS DE HOPF CONSTRUIDAS CON ÁRBOLES", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGISTER EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 01 de Diciembre del 2017 a las 2:00 p.m., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala Raimundo Chela de la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo**, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado es un aporte significativo en la teoría de las álgebras de Hopf combinatorias, específicamente en las que derivan de arborescencias y su aplicación en métodos computacionales iterativos.

3.- El jurado por unanimidad decidió otorgar la calificación de **EXCELENTE** al presente trabajo por considerarlo de excepcional calidad. Este trabajo fue realizado en un tiempo excepcional, en el cual el estudiante logró familiarizarse y dominar diferentes conceptos abstractos de la teoría de las álgebras de Hopf. También, este material representa una interpretación sencilla, en términos de coloraciones de grafos, de las que ya se conocen. Por último, también representa un punto de partida para diversos proyectos de investigación, tanto en maestría como en doctorado.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 01 días del mes de Diciembre del año 2017, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Actuó como Coordinador del jurado el **DR. JEAN CARLOS LIENDO (UCV)**.

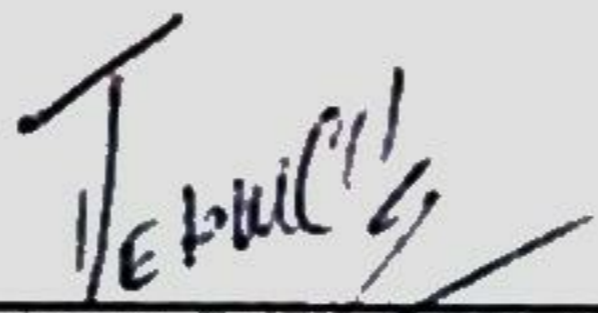


DR. MANUEL MAIA (UCV)
C.I.V-16.378.282
Jurado designado por el Consejo
de la Facultad



DR. YANNIC VARGAS (UCV-IVIC)
C.I.V-16.887.367
Jurado designado por el Consejo
de la Facultad





DR. JEAN CARLOS LIENDO (UCV)
C.I.V-16.525.859
Tutor

A mis padres

Agradecimientos

- A Jehovah por darme la inteligencia, conocimiento y fortaleza necesaria para poder culminar de manera exitosa el presente trabajo.
- A mis padres por su amor y apoyo incondicional en cada una de las etapas y ciclos de mi vida.
- A mis hermanos por su cariño, amor y apoyo a lo largo de mi vida, por todas sus bromas alusivas a mi amor y pasión por las matemáticas.
- A mi tutor el Dr. Jean Carlos Liendo, por haberme brindado la oportunidad de ser su tutorado, por su apoyo y respaldo, por sus constantes y reiteradas correcciones, sugerencias y comentarios, por su paciencia y buena disposición para conmigo, por buscar la excelencia y perfección en cada aspecto y detalle mientras se desarrollaba este trabajo.
- A los jurados por tomarse su tiempo para leer y revisar el presente trabajo.
- A todas aquellas personas que de manera directa o indirecta contribuyeron a la culminación de mis estudios de maestría.

Índice general

1	Álgebras de Hopf	9
1.1	Módulos	9
1.1.1	Definiciones básicas y ejemplos	9
1.1.2	Operaciones de módulos	12
1.2	\mathbb{K} -Álgebras sobre un cuerpo	21
1.3	\mathbb{K} -coálgebras	31
1.4	\mathbb{K} - biálgebras y \mathbb{K} -álgebras de Hopf	40
1.5	Grupo de Caracteres de una álgebra de Hopf	54
2	Árboles	58
2.1	Grafos	58
2.1.1	Tipos básicos de Grafos	60
2.1.2	Operaciones básicas con grafos	65
2.2	Árboles	67
3	Sobre álgebras de Hopf de árboles	73
3.1	Álgebra de Hopf natural H_{NAP}	74
3.1.1	H_{NAP} como coálgebra	75
3.1.2	Fórmulas de Δ_{NAP} para ordenes lineales corolas y palmeras	80
3.1.3	Antípoda para H_{NAP}	82
3.1.4	Fórmulas de S_{NAP} para ordenes lineales corolas y palmeras	83
3.2	Álgebra de Hopf de Konnes-Kreimner H_{CK}	86
3.2.1	H_{CK} como coálgebra	86
3.2.2	Fórmulas de Δ_{CK} para ordenes lineales corolas y palmeras	88
3.2.3	Antípoda para H_{CK}	90
3.2.4	Fórmulas de S_{CK} para ordenes lineales corolas y palmeras	92
3.2.5	Operadores B_-, B_+ y la propiedad universal	93

3.3	Álgebra de Calaque-Ebrahimi-Manchon H_{CEM}	101
3.3.1	H_{CEM} como coálgebra	102
3.3.2	Fórmulas de Δ_{CEM} para ordenes lineales corolas y palmeras	104
3.3.3	Antípoda para H_{CEM}	106
3.3.4	Fórmulas de S_{CEM} para ordenes lineales y corolas	110
3.4	Dual graduado	111
3.4.1	Dual graduado de un álgebra de Hopf graduada conexa y de tipo finita	111
3.4.2	Dual graduado de H_{CK}	112
3.4.3	Dual graduado de H_{CEM}	114
3.4.4	Dual graduado de H_{NAP}	115
3.5	Relación de bicomódulo entre H_{NAP} , H_{CEM} y H_{CK}	117

Introducción

Entre los objetos combinatorios mas estudiados en la literatura se encuentran los árboles. Un árbol es una representación gráfica que muestra la manera en que se conectan ciertos vértices de tal manera que partiendo de un vértice fijo no se puede viajar a través de conexiones diferentes y retornar en el mismo vértice. Cuando el árbol tiene un vértice distinguido a este se le suele llamar la *raíz* debido a que este vértice permite orientar o jerarquizar por niveles de conexión a todos los demás vértices. El estudio de la teoría de los grafos llamados árboles tiene gran cantidad de aplicaciones en ciencias de la computación por su versatilidad en la organización estructurada de la información. En matemática los árboles son utilizados con frecuencia para el calculo recursivo de operaciones, la organización de elementos de un conjunto, la enumeración de configuraciones construidas con objetos combinatorios, el cálculo operacional entre funciones generatrices, entre otros. Desde los estudios de Cayley en [1] hasta hoy en día han sido numerosos los resultados que se obtienen en matemática en donde la estructura de los árboles cumple un rol relevante. El matemático Neozelandés John C. Butcher es considerado uno de los pioneros en utilizar la estructura de los árboles para obtener importantes resultados en el campo de los métodos numéricos, las ecuaciones diferenciales y técnicas algebraicas para métodos de integración, en este sentido sus trabajos [7, 8, 9] han contribuido considerablemente al desarrollo de la teoría.

Heinz Hopf, introdujo la estructura de álgebra de Hopf en conexión con la homología de los grupos de Lie en 1939. Después de varios años éstas han ganado mucha importancia debido a sus aplicaciones en ramas de la física tales como los grupos cuánticos, la renormalización y la geometría no conmutativa. La topología algebraica gradualmente ha contribuido al incremento de una variedad compleja de nuevas álgebras de Hopf. Por otra parte, la combinatoria comenzó a acumular una serie de impresionantes construcciones de estas estructuras las cuales han sido bautizadas con el nombre de *álgebras de Hopf combinatoria*. Se puede decir que los primeros en abrir el puente de conexión entre las álgebras de Hopf y ciertos problemas combinatorios fueron Joni y Rota en [21], quienes inspirados en la idea de armar y desarmar piezas de objetos combinatorios construyeron de manera natural coálgebras y

biálgebras sobre espacios generados por ciertos tipos de estas piezas. W. Schmitt en [20] utilizando una técnica similar a la de Joni y Rota también construye álgebras de Hopf sobre ciertas clases de equivalencia de conjuntos formados por objetos combinatorios los cuales se encuentran parcialmente ordenados.

Los árboles figuran entre los objetos combinatorios mas utilizados en la construcción de las álgebras de Hopf combinatoria. Existen varios investigadores que han construido álgebras de Hopf utilizando árboles, entre estos se encuentran Fossy, Grossman-Larson, M. Hoffman, Loday-Ronco, A. Murua [13, 15, 16, 2, 17] entre otros. Sin embargo, entre los trabajos mas relevantes de los últimos 20 años se encuentra sin lugar a dudas el trabajo de Connes-Kreimer [3] que relaciona los procesos de renormalización en la teoría de campos cuánticos con el estudio de las álgebras de Hopf construida con árboles. A ellos se le debe la hoy reconocida *álgebra de Hopf de Connes-Kreimer*, denotada por H_{CK} . Algunos investigadores aseguran que H_{CK} se conocía bajo el nombre de *álgebra de Butcher*, esto se debe a que Ch. Brouder en [12] encuentra una conexión interesante entre el álgebra H_{CK} y los métodos numéricos estudiados por J. Butcher. Esta es, el grupo de caracteres de H_{CK} consiste en los métodos numéricos expresados como B -series con respecto a la *ley de composición* de B -series. Existe otra operación sobre B -series que ha sido estudiada, esta es la *ley de substitución*, Chartier-Hairer-Vilmart estudian esta operación en [10] la cual generaliza el error de analisis hacia atrás que se comete cuando aproximamos la solución de una ecuación diferencial mediante un método numérico. El cálculo subyacente a la ley de substitución de B -series es modelado por árboles los cuales representan gráficamente a las derivadas iteradas sobre B -series. Calaque-Ebrahimi-Manchon en [6] construyen un álgebra de Hopf sobre árboles denotada por H_{CEM} y demuestran que la ley de substitución entre B -series es el producto convolución de álgebra H_{CEM} , más aún H_{CEM} actúa como un bicomodulo sobre H_{CK} , obteniéndose interesantes relaciones entre esta estructura de bicomódulo y el coproducto de H_{CK} , y que posteriormente tienen importantes resultados sobre sus grupos de caracteres.

Jean C. Liendo y M. Mendez en [4] construyen una familia de álgebras de Hopf para cada operad conjuntístico. En particular para el operad de los árboles con raíz conocido por siglas en inglés por NAP (*Non associative permutative*) se obtiene el álgebra de Hopf sobre árboles H_{NAP} . Utilizando una técnica de cloraciones sobre los lados de un árbol ellos obtienen formulas interesantes de coproducto y antípoda para H_{NAP} que permiten demostrar de forma ilustrada que H_{NAP} se proyecta sobre H_{CK} . Este resultado ya había sido demostrado por Chapoton-Livernet en [18], sin embargo la prueba en [4] es mucho mas simple si se usa coloraciones.

Nuestro trabajo en este proyecto consiste en estudiar las álgebras de Hopf H_{CK} , H_{NAP} y H_{CEM} y reescribir formulas de antípoda y coproducto para las tres usando la técnica de coloraciones admisibles sobre los lados y cortes admisibles sobre los lados. Utilizaremos como material fundamental de referencia el artículo [6], definiremos una acción de bicomodulo de H_{CEM} sobre H_{NAP} según la acción de bicomodulo de H_{CEM} sobre H_{CK} que se plantea en [6]. Finalmente estudiaremos el impacto que tienen la estructura de bicomodulo sobre los respectivos productos convolución y las operaciones entre B -series.

Capítulo 1

Álgebras de Hopf

Las Álgebras de Hopf deben su nombre a Heinz Hopf, quien estudió estos sistemas algebraicos cuando investigaba propiedades topológicas sobre los grupos de Lie, sin embargo fue a finales de los años sesenta con los trabajos de Sweedler, Moore y Sullivan, cuando las álgebras de Hopf se comenzaron a estudiar como estructuras algebraicas adquiriendo una relevante importancia en la teoría algebraica. En la actualidad, las Álgebras de Hopf juegan un papel importante en la teoría algebraica de grupos, topología algebraica, teoría de representaciones, entre otros. En este capítulo se hará un estudio conciso de las Álgebras de Hopf y sus propiedades algebraicas mas importantes, pero antes es necesario un breve revisión a través de las noción de Módulo.

1.1 Módulos

1.1.1 Definiciones básicas y ejemplos

Definición 1.1.1. Sea R un anillo con unidad, un R -módulo *a izquierda*, es un grupo abeliano M , con una operación binaria $(\cdot) : R \times M \rightarrow M$ que satisface:

1. $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y \quad \forall r \in R; \forall x, y \in M$
2. $(r_1 + r_2) \cdot x = r_1 \cdot x + r_2 \cdot x \quad \forall r_1, r_2 \in R; \forall x \in M$
3. $(r_1 r_2) \cdot x = r_1 \cdot (r_2 \cdot x) \quad \forall r_1, r_2 \in R; \forall x \in M$
4. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in M$

Un módulo a la derecha, es nuevamente un grupo abeliano M con una operación binaria $(\cdot) : M \times R \rightarrow R$ que satisface las cuatro propiedades de arriba, pero esta vez a la

derecha de los elementos de M . Cuando un grupo abeliano es un módulo a izquierda y a derecha, diremos simplemente módulo.

Observación 1.1.1. Por comodidad escribiremos rx en vez de $r \cdot x$.

Ejemplo 1.1.1. Sea R un anillo conmutativo con unidad, entonces R es en si mismo un R -módulo.

Ejemplo 1.1.2. Sea R un anillo conmutativo con unidad, el conjunto de los polinomios $R[x]$ sobre R es un R -módulo.

Un concepto importante en la teoría de R -módulos es la noción de base, pues nos permite introducir el concepto de R -módulo libre.

Definición 1.1.2. Dado M un R -módulo y $B \subset M$, diremos que B es una **base** de M si B satisface:

1. Cualquier colección finita $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subseteq B$ es linealmente independiente.
2. Para todo x en M , se pueden escoger adecuadamente un subconjunto $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subseteq B$ y $\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subset R$ tales que x se puede escribir de manera única como:

$$x = \sum_{i=1}^n r_i \beta_i$$

Definición 1.1.3. Un R -módulo es **libre** si posee una base, en cuyo caso diremos que el R -módulo es libremente generado por dicha base.

Ejemplo 1.1.3. Sean R un anillo conmutativo con unidad y S un conjunto no vacío, sea

$$R^S = \{f : S \longrightarrow R : f \text{ es función}\}$$

El módulo libremente generado por S , es el subconjunto de R^S que consiste de todas las funciones $f : S \longrightarrow R$ tales que $f(s) = 0$ para casi todo $s \in S$, mas formalmente

$$RS = \{f \in R^S : |\{s \in S : f(s) \neq 0\}| \text{ es finito}\}$$

Un elemento de RS lo denominaremos suma formal finita de S , es decir:

$$f := \sum_{s \in S} f(s)s$$

La suma y el producto del anillo hacen de RS un R -módulo. La suma en RS es la suma punto a punto de funciones:

$$\sum_{s \in S} f(s)s + \sum_{s \in S} g(s)s = \sum_{s \in S} (f(s) + g(s))s$$

Si r es un elemento del anillo, entonces:

$$r \left(\sum_{s \in S} f(s)s \right) = \sum_{s \in S} r f(s)s$$

Para el ejemplo anterior hay tres casos frecuentemente utilizados en la teoría, a saber:

1. Si $S = \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $RS = R^n$ el conjunto de las n -tuplas con entradas en R .
2. Si $S = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $RS = M_{m \times n}(R)$, el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con entradas en R .
3. Si $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ entonces $RS = R[x]$, el conjunto de los polinomios con coeficientes en R .

Observación 1.1.2. Cuando $R = \mathbb{K}$ es un campo entonces, la definición de R -módulo coincide con el concepto de espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Definición 1.1.4. Sea N un subgrupo de un R -módulo M , diremos que N es un **R -submódulo a izquierda** de M si $rx \in N$ para todo $r \in R$ y para todo $x \in N$.

El **R -submódulo a derecha** se define de manera análoga, a lo largo del presente trabajo siempre que no de lugar a confusión, omitiremos la palabra izquierda y simplemente diremos R -submódulo.

Definición 1.1.5. Sean R un anillo con unidad, M, N dos R -módulos, una función $f: M \rightarrow N$ es un **morfismo** de R -módulos, si f satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in M$$

$$f(rx) = rf(x) \quad \forall r \in R, \quad \forall x \in M$$

Denotaremos al conjunto de todos los R -módulos por $Mod(R)$ y al conjunto de todos los R -morfismos de M en N lo denotaremos por $Hom_R(M, N)$.

Podemos dotar a $Hom_R(M, N)$ con una estructura de R -módulo, primeramente notemos que $Hom_R(M, N)$ con la operación $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ adquiere la estructura de grupo abeliano, ahora bien si definimos la operación

$$(rf)(x) = rf(x) \quad \forall r \in R, \quad \forall x \in M$$

Entonces $Hom_R(M, N)$ adquiere estructura de R -módulo. El **dual** de M , denotado por M^* , es el R -módulo formado por todas los morfismos de M en R , es decir $M^* = Hom_R(M, R)$.

Definición 1.1.6. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos,

1. El **kernel o núcleo** de f es el conjunto $Ker(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$.
2. La **imagen** de f es el conjunto $Im(f) = \{f(x) : x \in M\}$.

Proposición 1.1.1. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos, entonces $Ker(f)$ es un R -submódulo de M e $Im(f)$ es un R -submódulo de N .

Definición 1.1.7. Un isomorfismo de R -módulos, es un morfismo de R -módulos biyectivo, dos R -módulos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos, en tal caso escribiremos $M \cong N$.

1.1.2 Operaciones de módulos

Cuando trabajamos con R -módulos, podemos operar mediante, sumas, intersecciones, productos y cocientes, en esta sección haremos una breve revisión de estas operaciones.

Sea M un R -módulo y sean N, U submódulos de M , si $N \cap U = \emptyset$, entonces $N \cap U$ es trivialmente un submódulo de M . Supongamos que $N \cap U \neq \emptyset$, si $x \in N \cap U$ entonces $x \in N$ y $x \in U$, así para todo r en R se tiene $rx \in N$ y $rx \in U$ luego $rx \in N \cap U$ y por tanto $N \cap U$ es un submódulo de M . Hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. Sea M un R -módulo, la intersección de submódulos de M es nuevamente un R -submódulo de M .

Definición 1.1.8. Sea M un R -módulo y S un subconjunto de M . El **R -submódulo generado** por S es la intersección de todos los R -submódulos que contienen a S , lo denotaremos por $\langle S \rangle$.

Por la definición, tenemos que el R -submódulo generado por S , es el menor R -módulo que contiene a S . El conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S es un submódulo que contiene a S y por tanto a $\langle S \rangle$; por otro lado, dado que $S \subset \langle S \rangle$, el R -submódulo constituido por tales combinaciones lineales está contenido en $\langle S \rangle$. El razonamiento que acabamos de presentar nos permite establecer la siguiente proposición

Proposición 1.1.3. *Sea M un R -módulo y S subconjunto de M , el R -módulo generado por S , es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S , esto es:*

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i s_i : n \in \mathbb{N}; \quad s_i \in S; \quad r_i \in R \right\}$$

Si S es finito diremos que $\langle S \rangle$ es finitamente generado, además $\langle S \rangle$ se dice cíclico si S posee un solo elemento. Por otro lado, cuando los únicos R -submódulos en M son $\{0\}$ y M , diremos que M es un R -módulo simple.

Definición 1.1.9. *Sea N un R -submódulo de un R -módulo M , para todo $x, y \in M$ diremos que x está relacionado con y , en cuyo caso escribiremos $x \sim y$, cuando $x - y \in N$.*

La relación que hemos definido arriba es de equivalencia, la clase de un elemento x de M es igual al conjunto suma $x + N = \{x + n : n \in N\}$, denotaremos por M/N al conjunto de todas las clases de equivalencia. Si definimos las operaciones

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \quad \forall x, y \in M$$

$$r(x + N) = rx + N \quad \forall r \in R; \quad \forall x \in M$$

Entonces M/N adquiere estructura de R -módulo, este es el R -**módulo cociente**. La proyección natural o canónica de M en M/N dada por

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ x & \longmapsto & x + N \end{array}$$

Es un morfismo sobreyectivo de R -módulos. Consideremos M, N dos R -módulos, el **producto cartesiano** de M con N es el conjunto:

$$M \times N = \{(m, n) : m \in M; \quad n \in N\}$$

Con las operaciones

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M; \quad \forall n_1, n_2 \in N$$

$$r(m, n) = (rm, rn) \quad \forall r \in R; \quad \forall m \in M; \quad \forall n \in N$$

El producto cartesiano $M \times N$, adquiere la estructura de R -módulo. El producto cartesiano es una operación asociativa y conmutativa sobre R -módulos, este hecho lo establecemos en la siguiente propocisión.

Proposición 1.1.4. *Sean M, N, S , R -módulos, entonces*

1. $(M \times N) \times S \cong M \times (N \times S)$

2. $M \times N \cong N \times M$

Observación 1.1.3. *En virtud de la proposición anterior cuando estemos operando el producto cartesiano de tres R -módulos escribiremos simplemente $M \times N \times S$ y todo elemento en $M \times N \times S$ lo escribiremos simplemente por (m, n, s) .*

Consideremos ahora una familia arbitraria de R -módulos, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, el axioma de elección nos permite formar una sucesión $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, eligiendo para cada $\lambda \in \Lambda$ un elemento x_λ en M_λ . La colección de todas estas sucesiones recibe el nombre de **producto directo** de los M_λ ; como mostramos en la siguiente definición el producto directo tiene estructura de R -módulo.

Definición 1.1.10. *Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de R -módulos, el **producto directo** de los M_λ , denotado por $P = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ es un R -módulo con las operaciones:*

$$x + y = \{x_\lambda\} + \{y_\lambda\} = \{x_\lambda + y_\lambda\}$$

$$ax = r\{x_\lambda\} = \{rx_\lambda\}$$

Para cada λ consideremos un morfismo $f_\lambda : M \rightarrow M_\lambda$ y sea p_λ la proyección natural de P en M_λ , entonces existe un único morfismo $f : M \rightarrow P$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & P \\
 & \searrow f_\lambda & \downarrow p_\lambda \\
 & & M_\lambda
 \end{array} \tag{1.1}$$

Además cuando R es un anillo conmutativo, existe un isomorfismo natural entre $\text{Hom}_R(M, P)$ y $\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(M, M_\lambda)$ construido de la manera siguiente: Si $f_\lambda : M \rightarrow M_\lambda$, entonces

$$f = \prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$$

Consideremos ahora $S \subset P$ el conjunto de todas las sucesiones cuyas λ -componentes son cero, salvo para un número finito de λ , es claro que S es un submódulo de P , este submódulo de P recibe el nombre de **suma directa** de los M_λ y lo denotamos por $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

Análogo al producto directo, hay un homomorfismo de R -módulos $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow S$ definido como la inclusión natural de M_λ en la coordenada λ de S . Además dada una colección arbitraria de morfismos $\{g_\lambda : M_\lambda \rightarrow M\}_{\lambda \in \Lambda}$, existe un único morfismo $g : S \rightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 M_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & S \\
 & \searrow g_\lambda & \downarrow g \\
 & & M
 \end{array} \tag{1.2}$$

En la construcción anterior supongamos que $M = R$ y además para cada λ se tiene que $g_\lambda : M_\lambda \rightarrow R$ es un isomorfismo de M_λ en R , consideremos $L(\Lambda)$ el R -módulo libremente generado por Λ , existe un isomorfismo entre S y $L(\Lambda)$ que envía $\sum_\lambda m_\lambda$ en $\sum_\lambda g_\lambda(m_\lambda)$, ahora bien según el **ejemplo 1.1.3** este isomorfismo es el que envía a cada $s \in S$ en la función f_s dada por $f_s(\lambda) = g \circ i_\lambda \circ p_\lambda(s)$. De este modo podemos identificar a S con el R -módulo libremente generado por Λ

Antes de pasar al concepto de álgebras de Hopf es necesario abordar una última operación de R -módulos, el **producto tensorial**, a continuación haremos una discusión breve de su construcción.

Definición 1.1.11. Sean M, N, P R -módulos, diremos que la aplicación $f : M \times N \rightarrow P$ es **bilineal**, si es lineal en cada componente, esto es

$$f(kx + y, z) = kf(x, z) + f(y, z)$$

$$f(x, ky + z) = kf(x, y) + f(x, z)$$

Denotaremos por $B_L(M \times N, P)$ al conjunto de las aplicaciones bilineales del conjunto $M \otimes N$ en el conjunto P

Sean M, N, P tres R -módulos, queremos construir un R -módulo T de manera que se pueda establecer una biyección natural entre $B_L(M \times N, P)$ y $\text{Hom}_R(T, P)$, o dicho de otro modo, queremos ver si existen un R -módulo T y un morfismo $\pi : M \times N \rightarrow T$, tales que para todo morfismo $\varphi : M \times N \rightarrow P$ existe un único morfismo $\psi : T \rightarrow P$ tal que $\varphi = \psi \circ \pi$. Este hecho lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. *Sean M, N, P tres R -módulos, entonces:*

1. *Existe un R -módulo T y un morfismo bilineal $\pi : M \times N \rightarrow T$ tales que para toda aplicación bilineal $\varphi : M \times N \rightarrow P$ existe un único morfismo $\psi : T \rightarrow P$ que hace al siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \varphi & \\
 T & \xrightarrow{\psi} & P
 \end{array} \tag{1.3}$$

2. *El par (T, π) es único salvo isomorfismo, esto es, si (T', π') es otro par que satisface el diagrama anterior, entonces existe un único isomorfismo $g : T \rightarrow T'$ tal que $\pi' = g \circ \pi$*

Demostración. 1. Para probar la existencia, haremos la siguiente construcción: Consideremos $R(M \times N)$ el R -módulo libre generado por $M \times N$ como en el **ejemplo 1.1.3**, y consideremos $C \subset R(M \times N)$ el R -submódulo generado por todos los elementos de la forma

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$

$$(rm, n) - r(m, n)$$

$$(m, rn) - r(m, n)$$

Tomemos ahora el cociente $T = R(M \times N)/C$, el cual denotaremos por $M \otimes_R N$. La clase $(m, n) + C$ la denotaremos por $x \otimes y$ y $\pi : M \times N \rightarrow T$ es la proyección canónica. El R -módulo $T = M \otimes_R N$ recibe el nombre de **producto tensorial** de M con N sobre el anillo R .

Cada morfismo bilineal $\varphi : M \times N \rightarrow P$ se extiende bilinealmente a un morfismo $\varphi : R(M \times N) \rightarrow P$ que se anula en los generadores de C , y por tanto en todo C , de esta manera φ induce un homomorfismo bien definido ψ de $M \otimes N$ en P , dado por $\psi(m \otimes n) := \varphi(m, n)$.

2. Supongamos ahora que existe otro par (T', π') que satisface el ítem anterior, entonces por la parte anterior los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} M \times N & & M \times N \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \downarrow \pi' & \searrow \pi \\ T & \xrightarrow{\psi} & T' & \xrightarrow{\psi'} & T \end{array}$$

De los dos diagramas anteriores obtenemos $\pi' = \psi \circ \pi$ y $\pi = \psi' \circ \pi'$, más aún de estas dos igualdades se sigue $\pi' = (\psi \circ \psi') \circ \pi'$ y $\pi' = (\psi' \circ \psi) \circ \pi'$, por lo que $\psi \circ \psi' = \psi' \circ \psi = id$; así podemos concluir que ψ es isomorfismo y $\psi' = \psi^{-1}$

□

Observación 1.1.4. Por comodidad escribiremos $M \otimes N$ en lugar de $M \otimes_R N$ siempre y cuando esto no de lugar a confusiones. Una consecuencia directa de lo anterior es que podemos establecer un isomorfismo entre $B_L(M \times N, P)$ y $Hom_R(M \otimes N, S)$, el cual está determinado por las funciones φ y ψ .

Notemos que por la construcción, la proyección canónica es un morfismo bilineal, lo cual trae como consecuencia la bilinealidad del producto tensorial, es decir:

$$\begin{aligned} (m + m') \otimes n &= m \otimes n + m' \otimes n & \forall m, m' \in M; \quad \forall n \in N \\ m \otimes (n + n') &= m \otimes n + m \otimes n' & \forall m \in M; \quad \forall n, n' \in N \\ (rm) \otimes n &= r(m \otimes n) & \forall m \in M; \quad \forall n \in N; \quad \forall r \in R \\ m \otimes (rn) &= r(m \otimes n) & \forall m \in M; \quad \forall n \in N; \quad \forall r \in R \end{aligned}$$

Cuando M, N son R -módulos libres con bases $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $\{\beta_j\}_{j \in J}$ entonces $M \otimes N$ es también un R -módulo libre con base $\{\alpha_i \otimes \beta_j\}_{(i,j) \in I \times J}$. En particular si M y N son finitamente generados también lo es $M \otimes N$

La construcción realizada en el teorema anterior se puede extender a funciones multilineales $f : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow P$, para obtener el producto multitensoresial $T = M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n$, este hecho, lo establecemos en el siguiente corolario.

Corolario 1.1.1. Sean M_1, M_2, \dots, M_n, P R -módulos, entonces:

1. Existe un R -módulo T y un morfismo bilineal $\pi : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow T$ tales que para toda aplicación bilineal $\varphi : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow P$ existe un único morfismo $\psi : T \rightarrow P$ que hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \dots \times M_n & \xrightarrow{\pi} & T \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & P \end{array}$$

2. El par (T, π) es único salvo isomorfismo, esto es, si (T', π') es otro par que satisface el ítem anterior, entonces existe un único isomorfismo $g : T \rightarrow T'$ tal que $\pi' = g \circ \pi$

El siguiente teorema resume las propiedades más importantes del producto tensorial.

Teorema 1.1.2. Sean M, N, P tres R -módulos, entonces

1. $M \otimes N \cong N \otimes M$
2. $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$
3. $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$
4. $R \otimes M \cong M$ y $M \otimes R \cong M$

Demostración. La idea de la demostración es construir en cada caso morfismos sobre los productos cartesianos que permitan inducir morfismos sobre los productos tensoriales respectivos, tal como se hizo en la construcción del producto tensorial. A continuación haremos la prueba de 1, 2 y 4.

1. La aplicación

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow N \otimes M \\ (m, n) &\longmapsto n \otimes m \end{aligned}$$

Es claramente un morfismo de R -módulos por tanto en virtud del **teorema 1.1.1**, existe un único morfismo

$$\begin{aligned} \tau : M \otimes N &\longrightarrow N \otimes M \\ m \otimes n &\longmapsto n \otimes m \end{aligned}$$

De manera similar, el morfismo

$$\begin{aligned} N \times M &\longrightarrow M \otimes N \\ (n, m) &\longmapsto m \otimes n \end{aligned}$$

Induce el morfismo

$$\begin{aligned} \tau' : N \otimes M &\longrightarrow M \otimes N \\ n \otimes m &\longmapsto m \otimes n \end{aligned}$$

Por tanto $M \otimes N$ es isomorfo a $N \otimes M$. El morfismo τ expuesto aquí, recibe el nombre de transposición y será usado a lo largo del presente trabajo.

2. En este caso haremos uso del **teorema 1.1.1** y del **corolario 1.1.1**. Sea $p \in P$ fijo, la aplicación

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n \otimes p \end{aligned}$$

Es un morfismo bilineal de R -módulos, por tanto induce un morfismo bilineal

$$\begin{aligned} M \otimes N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ m \otimes n &\longmapsto m \otimes n \otimes p \end{aligned}$$

De modo que el morfismo bilineal

$$\begin{aligned} (M \otimes N) \times P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (m \otimes n, p) &\longmapsto m \otimes n \otimes p \end{aligned}$$

Induce el siguiente morfismo lineal

$$\begin{aligned} (M \otimes N) \otimes P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (m \otimes n) \otimes p &\longmapsto m \otimes n \otimes p \end{aligned}$$

Por otro lado el morfismo multilinear

$$\begin{aligned} M \times N \times P &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ (m, n, p) &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p \end{aligned}$$

Induce el siguiente morfismo bilineal

$$\begin{aligned} M \otimes N \otimes P &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ m \otimes n \otimes p &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p \end{aligned}$$

De la construcción es claro $(M \otimes N) \otimes P$ es isomorfo $M \otimes N \otimes P$. Para demostrar que $M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$ se razona de manera análoga.

3. La aplicación lineal

$$\begin{aligned} \varphi : R \times P &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

Induce la siguiente aplicación lineal

$$\begin{aligned} \psi : R \otimes P &\longrightarrow M \\ r \otimes m &\longmapsto rm \end{aligned}$$

Por otro lado el morfismo

$$\begin{aligned} \psi' : M &\longrightarrow R \otimes M \\ m &\longmapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

Es tal que $\psi' \circ \psi$ y $\psi \circ \psi'$ son ambos el morfismo identidad, por tanto $R \otimes M$ y M son isomorfos.

□

Sean $f : M \rightarrow M'$ y $g : N \rightarrow N'$ dos morfismos de R -módulos, una vez más haciendo uso del **teorema 1.1.1** La aplicación lineal

$$\begin{aligned} \phi : M \times N &\longrightarrow M' \otimes N' \\ (m, n) &\longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

Induce el morfismo

$$\begin{aligned} \psi : M \otimes N &\longrightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n &\longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

Este hecho nos permite establecer la siguiente proposición

Proposición 1.1.5. *Sean $f : M \rightarrow M'$ y $g : N \rightarrow N'$ morfismos de R -módulos, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} f \otimes g : M \otimes N &\longrightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n &\longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

Es un morfismo de R -módulos

1.2 \mathbb{K} -Álgebras sobre un cuerpo

Observación 1.2.1. *A partir de este punto \mathbb{K} representará un campo*

El concepto de álgebra como estructura algebraica tiene mas de 50 años de antigüedad, la definición clásica de álgebra puede ser enunciada de la manera siguiente:

Definición 1.2.1. *Un álgebra sobre un cuerpo \mathbb{K} , es un \mathbb{K} -espacio vectorial, dotado de una operación binaria llamada producto, que asocia a cada par de elementos $a_1, a_2 \in A$ un elemento $a_1 a_2$, de tal modo que se satisfagan las siguientes propiedades*

1. *El producto es asociativo, esto es: $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$, $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$*

2. El producto es distributivo, esto es: $a_1(a_2 + a_3) = a_1a_2 + a_2a_3$ y $(a_2 + a_3)a_1 = a_2a_1 + a_3a_1$
 $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$
3. Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene: $\lambda(a_1a_2) = (\lambda a_1)a_2 = a_1(\lambda a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A$
4. Existe un elemento 1_A que se comporta como la unidad para el producto,
esto es: $1_A a = a 1_A = a \quad \forall a \in A$

Observación 1.2.2. De la definición anterior tenemos que una \mathbb{K} -álgebra es un anillo con unidad que tiene estructura de \mathbb{K} -espacio vectorial y que cumple con la propiedad 3, es decir, el producto del anillo A y el producto por escalares son compatibles.

Ahora bien, el morfismo bilineal

$$\begin{aligned} f: A \times A &\longrightarrow A \\ (a_1, a_2) &\longmapsto a_1 a_2 \end{aligned}$$

Determina de manera unívoca un morfismo $m: A \otimes A \rightarrow A$ dado por $m(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2$, que hace al correspondiente diagrama del producto tensorial conmutativo, de esta manera la definición anterior es equivalente con la siguiente:

Definición 1.2.2. Una \mathbb{K} -álgebra, es un \mathbb{K} -espacio vectorial A , con dos morfismos de \mathbb{K} -espacios vectoriales $m: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: \mathbb{K} \rightarrow A$ que hacen a los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & A \otimes A \otimes A & \\ m \otimes id_A \swarrow & & \searrow id_A \otimes m \\ A \otimes A & & A \otimes A \\ m \searrow & & \swarrow m \\ & A & \end{array} \quad (1.4)$$

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{id_A \otimes u} & A \otimes A & \xleftarrow{u \otimes id_A} & \mathbb{K} \otimes A \\ & \searrow \cong & \downarrow m & \swarrow \cong & \\ & & A & & \end{array} \quad (1.5)$$

En los diagramas de arriba id_A es la función identidad de A en A , en algunos casos sólo escribimos id para indicar a la correspondiente función identidad. La conmutatividad de los diagramas de la definición anterior es equivalente a las siguientes igualdades

Por la definición de m que hicimos previamente, la conmutatividad del primer diagrama es equivalente a la propiedad 1 de la asociatividad en la definición clásica, esta es la

razón por la cual el diagrama se denomine diagrama de asociatividad. Por otro lado la unidad del álgebra A está determinada por $u(1)$ en donde 1 es la unidad del cuerpo \mathbb{K} , de modo que la conmutatividad del segundo diagrama es equivalente a la propiedad 4 de la unidad en la definición clásica, esta es la razón por la cual $u(1) = 1_A$ y el segundo diagrama se denomine el diagrama de la unidad.

Notemos además que las propiedades 2 y 3 de la definición clásica se siguen de la definición del producto tensorial y por el hecho de que m es \mathbb{K} -lineal. La ventaja de usar el producto tensorial es que reduce la definición clásica a la composición orientada de funciones en dos diagramas, uno para el producto m y otro para la unidad u . Quizás el lenguaje sea un poco sofisticado, pero será de gran ayuda para poder enunciar el concepto de coálgebra y la compatibilidad entre ambas estructuras la cual llamaremos biálgebras.

Ejemplo 1.2.1. Sea \mathbb{K} un cuerpo entonces, \mathbb{K} es en si mismo una \mathbb{K} -álgebra, con los siguientes morfismos producto y unidad:

$$\begin{array}{ccc} m : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ k_1 \otimes k_2 & \longmapsto & k_1 k_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ k & \longmapsto & k \end{array}$$

Ejemplo 1.2.2. El conjunto de los polinomios, $\mathbb{K}[x]$ sobre un cuerpo \mathbb{K} con los siguientes morfismos

$$\begin{array}{ccc} m : \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[x] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ p(x) \otimes q(x) & \longmapsto & p(x)q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ k & \longmapsto & k \end{array}$$

Es importante recordar en este punto que $\mathbb{K}[x]$ es el \mathbb{K} -espacio vectorial generado por el conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ por tanto es suficiente verificar los diagramas asociatividad y conmutatividad para los elementos de la base y luego extender linealmente.

Ejemplo 1.2.3. $\mathbb{K}G$, el \mathbb{K} -espacio vectorial libremente generado por un grupo abeliano G , es una \mathbb{K} -álgebra. Para definir el producto y la unidad solo basta hacerlos sobre los elementos de G y luego extender por linealidad, así que para $g, h \in G$ definimos:

$$\begin{array}{ccc} m : \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K}G \\ g_1 \otimes g_2 & \longmapsto & g_1 g_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}G \\ k & \longmapsto & k \end{array}$$

Haciendo uso del morfismo trasposición construido en la parte 1 del **teorema 1.1.2**, podemos construir un morfismo de $(A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$ en $A \otimes B$ dado por la siguiente composición

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B \otimes A \otimes B & \xrightarrow{id_A \otimes \tau \otimes id_B} & A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B \\ (a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') & \longmapsto & a \otimes a' \otimes b \otimes b' \longmapsto aa' \otimes bb' \end{array}$$

Por otro lado, podemos construir un morfismo de \mathbb{K} en $A \otimes B$ definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B \\ k & \longmapsto & k \otimes k \longmapsto u_A(k) \otimes u_B(k) \end{array}$$

Los dos morfismos definidos anteriormente nos permiten establecer la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *El producto tensorial de dos \mathbb{K} -álgebras A, B es de nuevo una \mathbb{K} -álgebra*

Demostración. Sean A, B dos \mathbb{K} -álgebras, consideremos su producto tensorial $A \otimes B$ y definamos los siguientes morfismos

$$\begin{array}{ccc} m : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) & \longrightarrow & A \otimes B & u : \mathbb{K} & \longrightarrow & A \otimes B \\ (a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') & \longmapsto & aa' \otimes bb' & 1 & \longmapsto & 1_A \otimes 1_B \end{array}$$

Verifiquemos que m, u son respectivamente un producto y unidad para $A \otimes B$. Si $a, a', a'' \in A$ y $b, b', b'' \in B$ entonces

$$\begin{aligned} m(id \otimes m((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') \otimes (a'' \otimes b''))) &= m((a \otimes b) \otimes (a'a'' \otimes b'b'')) \\ &= a(a'a'') \otimes b(b'b'') \\ &= (aa')a'' \otimes (bb')b'' & (1.6) \\ &= m((aa' \otimes bb') \otimes (a'' \otimes b'')) \\ &= m(m \otimes id((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') \otimes (a'' \otimes b''))) \end{aligned}$$

Para la unidad tenemos

$$\begin{aligned}
 m(u \otimes id(1 \otimes (a \otimes b))) &= 1_A a \otimes 1_B b \\
 &= a 1_A \otimes b 1_B \\
 &= m((id \otimes u)((a \otimes b) \otimes 1))
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

□

Haciendo uso del **corolario 1.1.1** podemos extender el resultado anterior para una cantidad finita arbitraria $A_1, A_2 \dots A_n$ de \mathbb{K} -álgebras, este hecho lo establecemos en el siguiente corolario

Corolario 1.2.1. *El producto tensorial de una cantidad finita cualquiera de \mathbb{K} -álgebras es una \mathbb{K} -álgebra.*

A continuación, damos los ejemplos de las álgebras tensorial y simétrica, las cuales son precisamente las álgebras de polinomios no conmutativos y conmutativos respectivamente, es de gran relevancia discutir estos ejemplos en este punto pues las álgebras que estudiaremos en el capítulo tres, serán álgebras de polinomios sobre arboles.

Ejemplo 1.2.4. *Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} y S una base de V , Para $v_1, v_2 \dots v_n \in V$ por comodidad escribiremos*

$$v_1 v_2 \dots v_k = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$$

Denotemos por $V^{\otimes n}$ al producto tensorial de V consigo mismo n -veces, esto es $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$, donde convenimos que $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Sea $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$, si definimos los morfismos:

$$\begin{array}{ccc}
 m : T(V) \otimes T(V) & \longrightarrow & T(V) & \qquad u : \mathbb{K} & \longrightarrow & T(V) \\
 x_1 x_2 \dots x_k \otimes y_1 y_2 \dots y_l & \longmapsto & x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l & \qquad 1 & \longmapsto & 1
 \end{array}$$

Entonces $T(V)$ adquiere estructura de \mathbb{K} -álgebra, esta es precisamente la \mathbb{K} -álgebra no conmutativa libremente generada por S . El conjunto $B = \{x_1 x_2 \dots x_k : x_i \in S; k \in \mathbb{N}\}$, es una base para $T(V)$ y los elementos de B los llamaremos monomios o palabras no conmutativas en el alfabeto S , dicho de otro modo $T(V)$ es el álgebra de polinomios no conmutativos $\mathbb{K}\langle S \rangle$. Aquí S puede ser interpretado como el conjunto de variables. El producto m aquí definido es

la concatenación de tensores, la cual es aplicada sobre los elementos de la base y luego se extiende por linealidad. $T(V)$ recibe el nombre de **álgebra tensorial**.

Verifiquemos que en efecto el producto y unidad definidos anteriormente satisfacen los diagramas asociatividad y unidad de la definición de álgebra.

Para $v_1 v_2 \cdots v_k, w_1 w_2 \cdots w_l, x_1 x_2 \cdots x_n \in T(V)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 m((id \otimes m)(v_1 \cdots v_k \otimes w_1 \cdots w_l \otimes x_1 \cdots x_n)) &= m(v_1 \cdots v_k \otimes w_1 \cdots w_l x_1 \cdots x_n) \\
 &= v_1 \cdots v_k w_1 \cdots w_l x_1 \cdots x_n \\
 &= m(v_1 \cdots v_k w_1 \cdots w_l \otimes x_1 \cdots x_n) \\
 &= m((m \otimes id)(v_1 \cdots v_k \otimes w_1 \cdots w_l \otimes x_1 \cdots x_n))
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para la unidad tenemos

$$\begin{aligned}
 m(u \otimes id(1 \otimes v_1 v_2 \cdots v_k)) &= m(1 \otimes v_1 v_2 \cdots v_k) \\
 &= m(v_1 v_2 \cdots v_k \otimes 1) \\
 &= m(id \otimes u(v_1 v_2 \cdots v_k \otimes 1))
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Notemos que para el caso en que $K = Q$ y $S = \{H_1, H_2, \dots, H_n, \dots\}$ es infinito numerable y ordenado, entonces $T(V) = Q\langle S \rangle$ es lo que se conoce como el álgebra de funciones simétricas no conmutativas, la cual denotaremos por N_{Sym} .

Definición 1.2.3. Sea A una \mathbb{K} -álgebra y J un \mathbb{K} -subespacio de A . J es un **ideal lateral izquierdo** de A si $m(A \otimes J) \subseteq J$. Diremos que J es **ideal lateral derecho** de A si $m(J \otimes A) \subseteq J$. Finalmente J es un **ideal bilateral**, si es lateral derecho e izquierdo.

Observación 1.2.3. Cuando J sea un ideal bilateral, omitiremos la palabra bilateral y diremos simplemente ideal.

La siguiente proposición resume las operaciones con ideales mas importantes

Proposición 1.2.2. Sea A una \mathbb{K} -álgebra

1. Si I, J son ideales de A , entonces $I \cap J$ es un ideal bilateral de A
2. Si $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia arbitraria de ideales de A , entonces $\prod_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ es un ideal de A

3. Si $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia arbitraria de ideales de A entonces $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ es un ideal de A

Definición 1.2.4. Sea A un álgebra y S un subconjunto de A , el **ideal generado** por S es la intersección de todos los ideales que contienen a S .

Una consecuencia inmediata de la definición de ideal generado es la siguiente proposición

Proposición 1.2.3. Sea A una \mathbb{K} -álgebra y S un subconjunto de A , el ideal generado por S , es el conjunto formado por todas las sumas finitas de la forma:

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_i \in A \quad \text{y} \quad s_i \in S$$

.

EL concepto de ideal es importante, pues haciendo uso de este se puede construir el **álgebra cociente**. En efecto sea A una \mathbb{K} -álgebra, y J un ideal de A , en virtud del **teorema 1.1.1** el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : A/J \times A/J &\longrightarrow A/J \\ (v + J, w + J) &\longmapsto m(v \otimes w) + J \end{aligned}$$

Induce el morfismo

$$\begin{aligned} \psi : A/J \otimes A/J &\longrightarrow A/J \\ (v + J) \otimes (w + J) &\longmapsto m(v \otimes w) + J \end{aligned}$$

De manera que el cociente A/J hereda la estructura de \mathbb{K} -álgebra de A , el producto y la unidad están definidos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} m_{A/J} : A/J \otimes A/J &\longrightarrow A/J & u_{A/J} : \mathbb{K} &\longrightarrow A/J \\ (v + J) \otimes (w + J) &\longmapsto m(v \otimes w) + J & 1 &\longmapsto u(1) + J \end{aligned}$$

En particular cuando A es una \mathbb{K} -álgebra no conmutativa, se puede construir una \mathbb{K} -álgebra conmutativa a partir de A . En efecto, sea A un álgebra no conmutativa, sean a_1, a_2 elementos de A , el conmutador de a_1 y a_2 , es $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$. Sea J el ideal

bilateral generado por todos los elementos de la forma $[a_1, a_2]$, entonces A/J es un álgebra conmutativa, pues si $a + J, b + J \in A/J$ entonces

$$\begin{aligned} (a + J)(b + J) - (b + J)(a + J) &= ab + J - (ba + J) \\ &= (ab - ba) + J \\ &= [a, b] + J \end{aligned} \tag{1.10}$$

La discusión que acabamos de hacer nos permite construir el álgebra simétrica, la cual es un ejemplo clásico de álgebra.

Ejemplo 1.2.5. Sean V un espacio vectorial y S una base de V . Sea J el ideal de V generado por todos los conmutadores $[x, y]$ con $x, y \in V$, la \mathbb{K} -álgebra simétrica asociada al espacio vectorial V es el cociente $Sym(V) = T(V)/J$. Si definimos $Sym^n(V) = V^{\otimes n}/(J \cap V^{\otimes n})$, entonces tenemos que

$$Sym(V) = \bigoplus_{n \geq 0} Sym^n(V)$$

Además $Sym(V)$ es el álgebra conmutativa libremente generada por el conjunto S . Podemos interpretar a S como un conjunto de variables o indeterminadas y $Sym(V)$ es el álgebra conmutativa de polinomios $\mathbb{K}[S]$, pues todo elemento en $Sym(V)$ es una combinación lineal de elementos del conjunto

$$B = \{s_1^{t_1} s_2^{t_2} \dots s_k^{t_k} : k, t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{N}; \quad s_1, s_2, \dots, s_k \in S\}$$

Los elementos de B son interpretados como monomios o palabras conmutativas construidas con los elementos de S . De este modo B es una base de $\mathbb{K}[S]$ como \mathbb{K} -espacio vectorial. El conjunto \mathbb{K}^B formado por todas las funciones de B en \mathbb{K} es el conjunto de todas las series formales conmutativas cuyo conjunto de variables es S . Aquí cada $f \in \mathbb{K}^B$ es interpretado como la serie formal $f = \sum_{b \in B} f(b)b$, en donde $f(b)$ es el coeficiente correspondiente al monomio b . \mathbb{K}^B será denotado por $\mathbb{K}[[S]]$

Definición 1.2.5. Considere a $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ numerable y totalmente ordenado y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ los racionales. Una serie formal $f \in \mathbb{Q}[[S]]$ es quasi-simétrica, si cada vez que

$$x_{i_1} < \dots < x_{i_k} \quad y \quad x_{j_1} < \dots < x_{j_k}$$

Entonces los coeficientes

$$x_{i_1}^{c_1} \dots x_{i_k}^{c_k} \quad \text{y} \quad x_{j_1}^{c_1} \dots x_{j_k}^{c_k}$$

coinciden. Denotaremos al conjunto de las funciones quasi-simétricas por \mathbb{Q}_{Sym} .

Ejemplo 1.2.6. La serie formal $\mathbb{Q}[[S]] \rightarrow \mathbb{Q}$, dada por $f(x_1, \dots, x_n, \dots) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \dots$ Es una función quasi-simétrica

Definición 1.2.6. Sea $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{N}^k$, diremos que c es una **composición** de n con longitud k , si $c_1 + c_2 + \dots + c_k = n$, en cuyo caso escribiremos $c \vDash n$. Si $c \vDash n$ es una composición, denotaremos por $M_c(X)$ a la serie formal

$$M_c(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1}^{c_1} \dots x_{i_k}^{c_k}$$

Definición 1.2.7. Si c y d son composiciones, la **quasi-mezcla** es el conjunto de todas las composiciones obtenidas al mezclar c con d y la denotaremos por $c \cdot d$.

Notemos que si $c = (c_1, \dots, c_k)$ y $d = (d_1, \dots, d_l)$ son dos composiciones de n y m respectivamente, entonces la quasi-mezcla $c \cdot d$ es una composición de $n + m$ con longitud $k + l$. Si por un momento suponemos por un momento que c y d son dos mazos con k y l cartas respectivamente, entonces la quasi-mezcla puede ser interpretada como todas las posibles mezclas o barajeos arbitrarios de estos dos mazos para obtener uno nuevo con $k + l$ cartas, de manera que la quasi-mezcla es una operación conmutativa. La siguiente proposición establece que el conjunto de las funciones quasi simétricas es un subespacio del álgebra de polinomios conmutativos.

Proposición 1.2.4. Sea $\varsigma = \{c \vDash n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las composiciones. El conjunto Q_{Sym} es un subespacio de $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ y $\{M_c\}_{c \in \varsigma}$ es una base para este subespacio.

Ejemplo 1.2.7. Q_{Sym} es una \mathbb{Q} -álgebra conmutativa cuyo producto sobre la base está definido por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{Sym} \otimes \mathbb{Q}_{Sym} &\longrightarrow \mathbb{Q}_{Sym} \\ M_c \otimes M_d &\longmapsto \sum_{c' \in c \cdot d} M_{c'} \end{aligned}$$

A su vez la unidad es la aplicación identidad de \mathbb{K} en \mathbb{K}

El producto definido en el ejemplo anterior para $QSym$ es conmutativo, esto es una consecuencia directa del hecho que la quasi-mezcla sea conmutativa, ilustremos este hecho con un ejemplo, supongamos que $c = \{c_1\}$ y $d = \{d_1, d_2\}$ son dos composiciones, entonces

$$M_c \otimes M_d = \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1}^{c_1} x_{i_2}^{d_1} x_{i_3}^{d_2} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1}^{d_1} x_{i_2}^{c_1} x_{i_3}^{d_2} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1}^{d_1} x_{i_2}^{d_2} x_{i_3}^{c_1} = M_d \otimes M_c$$

De manera que $QSym$ es una álgebra conmutativa.

Definición 1.2.8. Un **morfismo** de \mathbb{K} -álgebras, es una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ que hace a los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ m_A \uparrow & & \uparrow m_B \\ A \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & B \otimes B \end{array} \quad (1.11)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ u_A \swarrow & & \nearrow u_B \\ & \mathbb{K} & \end{array} \quad (1.12)$$

Proposición 1.2.5. Sean $f : A \rightarrow A'$ y $g : B \rightarrow B'$ dos morfismos de \mathbb{K} -álgebras, entonces $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras.

Demostración. Debemos verificar si los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes B' \\ m_{A \otimes B} \uparrow & & \uparrow m_{A' \otimes B'} \\ A \otimes B \otimes A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes g \otimes f \otimes g} & A' \otimes B' \otimes A' \otimes B' \end{array} \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes B' \\ u_{A \otimes B} \swarrow & & \nearrow u_{A' \otimes B'} \\ & \mathbb{K} & \end{array} \quad (1.14)$$

En efecto, para el **diagrama 1.13** tenemos

$$\begin{aligned} m_{A' \otimes B'} \circ f \otimes g \otimes f \otimes g &= (m_{A'} \otimes m_{B'} \circ (id_{A'} \otimes \tau \otimes id_{B'})) \circ (f \otimes g \otimes f \otimes g) \\ &= m_{A'} \otimes m_{B'} \circ (f \otimes f \otimes g \otimes g) \\ &= (m_{A'} \circ f \otimes f) \otimes (m_{B'} \circ g \otimes g) \\ &= (f \circ m_A) \otimes (g \circ m_B) \\ &= f \otimes g \circ m_{A \otimes B} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Para el *diagrama* [1.14](#) tenemos

$$\begin{aligned}
 f \otimes g \circ u_{A \otimes B} &= (f \circ u_A) \otimes (g \circ g_B) \\
 &= u_{A'} \otimes u_{B'} \\
 &= u_{A' \otimes B'}
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

□

1.3 \mathbb{K} -coálgebras

Hemos visto en la sección anterior que para álgebras multiplicar es equivalente a la conmutatividad del *diagrama* [1.4](#) de la *definición* [1.2.2](#), de manera análoga, la comultiplicación es también equivalente a la conmutatividad del diagrama que se obtiene invirtiendo las flechas del *diagrama* [1.4](#). Esta es la principal ventaja que tiene la definición moderna de álgebra sobre la clásica, el hecho de pasar del producto al coproducto simplemente cambiando el sentido de las flechas en un diagrama simplifica considerablemente todas los cálculos que sean necesarios realizar.

Definición 1.3.1. Una \mathbb{K} -coálgebra C es un \mathbb{K} -espacio vectorial con dos morfismos $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ y $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ llamados coproducto y counidad, tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 & C \otimes C \otimes C & \\
 \Delta \otimes id \nearrow & & \nwarrow id \otimes \Delta \\
 C \otimes C & & C \otimes C \\
 \Delta \nwarrow & & \nearrow \Delta \\
 & C &
 \end{array}
 \tag{1.17}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & C \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{id \otimes \varepsilon} & C \otimes C & \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} & \mathbb{K} \otimes C \\
 & \nwarrow \cong & & \uparrow \Delta & & \nearrow \cong \\
 & & & C & &
 \end{array}
 \tag{1.18}$$

El *diagrama* [1.17](#) se denomina diagrama de coasociatividad y el *diagrama* [1.18](#) se denomina diagrama de counidad. Es importante hacer la aclaratoria que un elemento en la imagen de Δ se descompone como una suma arbitraria de vectores en $C \otimes C$ para escribir esto usaremos la notación empleada por Sweedler

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2$$

Ejemplo 1.3.1. Todo cuerpo \mathbb{K} es en si mismo una \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto y la counidad son los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \Delta : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\ 1 & \longmapsto & 1 \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varepsilon : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ k & \longmapsto & k \end{array}$$

Ejemplo 1.3.2. El conjunto $\mathbb{K}G$ del ejemplo 1.2.3 es una \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto y la counidad son los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \Delta : \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \\ g & \longmapsto & g \otimes g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varepsilon : \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ g & \longmapsto & 1_{\mathbb{K}} \end{array}$$

En efecto, si $g \in \mathbb{K}G$ entonces

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)(\Delta(g)) &= g \otimes \Delta(g) \\ &= \Delta(g) \otimes g \\ &= (\Delta \otimes id)(\Delta(g)) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Para la counidad tenemos

$$\begin{aligned} id \otimes \varepsilon(\Delta(g)) &= g \otimes \varepsilon(g) \\ &= \varepsilon(g) \otimes g \\ &= \varepsilon \otimes id(\Delta(g)) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Si usamos el producto del Grupo G , entonces este define otro coproducto sobre $\mathbb{K}G$ que hace de este una coálgebra, este producto viene dado por $\Delta(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} g_1 \otimes g_2$.

Definición 1.3.2. Sea C una coálgebra y x un elemento de C .

1. Diremos que x es **como grupo** si $\Delta(x) = x \otimes x$ y $\varepsilon(x) = 1$
2. Diremos que x es **primitivo** si $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$

De manera análoga a lo hecho para \mathbb{K} -álgebras, notemos que las definiciones de Δ y ε fueron hechas sobre los elementos de G y de allí extenderemos por linealidad. Gracias al morfismo transposición construido en la **ítem 1** del **teorema 1.1.2**, para dos \mathbb{K} -coálgebras C, D existe un morfismo que va de $C \otimes D$ en $C \otimes D \otimes C \otimes D$, definido de la siguiente manera

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{id_C \otimes \tau \otimes id_D} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

De manera similar haciendo uso del **ítem 5** del **teorema 1.1.2** podemos construir también un morfismo de $C \otimes D$ en \mathbb{K} dado por

$$C \otimes D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}$$

Ejemplo 1.3.3. Consideremos la álgebra tensorial $T(V)$, sea $v_1 v_2 \dots v_n$ un elemento generador de $T(V)$ y sea $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ un subconjunto ordenado de $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, denotaremos por v_I a $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$; para el caso vacío $v_\emptyset = 1$. Haciendo uso de esta notación podemos dotar a $T(V)$ con la estructura de \mathbb{K} -coalgebra, el coproducto y la counidad son los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned} \Delta : T(V) &\longrightarrow T(V) \otimes T(V) & \varepsilon : T(V) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v_1 \dots v_n &\longmapsto \sum_{I \subseteq [n]} v_I \otimes v_{[n]-I} & v &\longmapsto \begin{cases} v & \text{si } v \in V^{\otimes 0} \cong \mathbb{K} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que resulta cuando se le aplica este coproducto al vector $v = xyz$

$$\Delta(xyz) = xyz \otimes 1 + 1 \otimes xyz + x \otimes yz + y \otimes xz + z \otimes xy + xy \otimes z + xz \otimes y + yz \otimes x$$

Verifiquemos que Δ satisface el **diagrama 1.17** de coasociatividad.

$$\begin{aligned} id \otimes \Delta(\Delta(v_1 \dots v_n)) &= \sum_{I \subseteq [n]} v_I \otimes \Delta(v_{[n]-I}) \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} v_I \otimes \left(\sum_{J \subseteq [n]-I} v_J \otimes v_{[n]-I-J} \right) \\ &= \sum_{I \sqcup J \sqcup K = [n]} v_I \otimes v_J \otimes v_K \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} \left(\sum_{J \subseteq I} v_J \otimes v_{I-J} \right) \otimes v_{[n]-I} \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} \Delta(v_I) \otimes v_{[n]-I} \\ &= \Delta \otimes id(\Delta(v_1 \dots v_n)) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Para un elemento general de $T(V)$ extendemos haciendo uso de la linealidad de Δ . Notemos que de la definición del coproducto, para $v \in V$ tenemos $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$, es decir, todo elemento de V es un primitivo.

Verifiquemos ahora la propiedad **diagrama 1.18** de counidad, para $v_1 \dots v_n \in T(V)$, tenemos

$$\varepsilon \otimes id(\Delta(v_1 \dots v_n)) = \sum_{I \subseteq [n]} \varepsilon(v_I) \otimes v_{[n]-I} = 1 \otimes v_{[n]}$$

Por otro lado

$$id \otimes \varepsilon(\Delta(v_1 \dots v_n)) = \sum_{I \subseteq [n]} v_I \otimes \varepsilon(v_{[n]-I}) = v_{[n]} \otimes 1$$

Proposición 1.3.1. Sean C, D \mathbb{K} -coálgebras, el producto tensorial $C \otimes D$ es una \mathbb{K} -coálgebra

Demostración. Sean C, D dos \mathbb{K} -coálgebras, los morfismos

$$\begin{aligned} \Delta : C \otimes D &\longrightarrow C \otimes D \otimes C \otimes D & \varepsilon : C \otimes D &\longrightarrow \mathbb{K} \\ c \otimes d &\longmapsto \sum_{(c),(d)} (c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2) & c \otimes d &\longmapsto \varepsilon_C(c) \otimes \varepsilon_D(d) \end{aligned}$$

Son respectivamente el coproducto y la counidad de $C \otimes D$, en efecto

$$\begin{aligned} id \otimes \Delta(\Delta(c \otimes d)) &= \sum_{(c),(d)} (c_1 \otimes d_1) \otimes \sum_{(c_2),(d_2)} c_{21} \otimes d_{21} \otimes c_{22} \otimes d_{22} \\ &= \sum_{(c),(d)} \sum_{(c_2),(d_2)} (c_1 \otimes d_1) \otimes c_{21} \otimes d_{21} \otimes c_{22} \otimes d_{22} \\ &= \sum_{(c),(d)} c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2 \otimes c_3 \otimes d_3 \\ &= \sum_{(c),(d)} \sum_{(c_1),(d_1)} (c_{11} \otimes d_{11} \otimes c_{12} \otimes d_{12}) \otimes c_2 \otimes d_2 \\ &= \Delta \otimes id(\Delta(c \otimes d)) \end{aligned}$$

Para la unidad se razona de manera bastante similar. □

Definición 1.3.3. Sean C, D dos \mathbb{K} -coálgebras, diremos que $\varphi : C \longrightarrow D$ es un **morfismo** de \mathbb{K} -coálgebras, si los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & D \otimes D \end{array} \quad (1.22)$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \varepsilon_C \searrow & & \swarrow \varepsilon_D \\ & \mathbb{K} & \end{array} \quad (1.23)$$

Proposición 1.3.2. Sean $f : C \longrightarrow C'$ y $g : D \longrightarrow D'$ morfismos de \mathbb{K} -coálgebras, entonces $f \otimes g : C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$ es un morfismo de \mathbb{K} -coálgebras

Demostración. los diagramas correspondientes a $f \otimes g$ son

$$\begin{array}{ccc}
C \otimes D & \xrightarrow{f \otimes g} & C' \otimes D' \\
\Delta_{C \otimes D} \downarrow & & \downarrow \Delta_{C' \otimes D'} \\
C \otimes D \otimes C \otimes D & \xrightarrow{f \otimes g \otimes f \otimes g} & C' \otimes D' \otimes C' \otimes D'
\end{array} \quad (1.24)$$

$$\begin{array}{ccc}
C \otimes D & \xrightarrow{f \otimes g} & C' \otimes D' \\
\varepsilon_{C \otimes D} \searrow & & \swarrow \varepsilon_{C' \otimes D'} \\
& \mathbb{K} &
\end{array} \quad (1.25)$$

Para el *diagrama* [1.24](#) tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{C' \otimes D'} \circ (f \otimes g \otimes f \otimes g) &= \Delta_{C'} \otimes \Delta_{D'} \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (f \otimes g \otimes f \otimes g) \\
&= \Delta_{C'} \otimes \Delta_{D'} \circ (f \otimes f \otimes g \otimes g) \\
&= (\Delta_{C'} \circ f \otimes f) \otimes (\Delta_{D'} \circ g \otimes g) \\
&= (f \circ \Delta_C) \otimes (g \circ \Delta_D) \\
&= (f \otimes g) \circ \Delta_{C \otimes D}
\end{aligned} \quad (1.26)$$

Para el *diagrama* [1.25](#) tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) &= \varepsilon_C(c) \varepsilon_D(d) \\
&= \varepsilon_{C'}(f(c)) \varepsilon_{D'}(g(d)) \\
&= \varepsilon_{C' \otimes D'}(f \otimes g(c \otimes d))
\end{aligned} \quad (1.27)$$

□

Definición 1.3.4. Sea C una \mathbb{K} -coálgebra, diremos que $J \subseteq C$ es un coideal bilateral si:

$$\begin{aligned}
\Delta(J) &\subseteq J \otimes C + C \otimes J \\
\varepsilon(J) &= 0
\end{aligned}$$

Si $J \subseteq C$ es un coideal bilateral y $\pi : C \rightarrow C/J$ es la proyección canónica, los siguientes morfismos

$$\begin{aligned}
\Delta_{C/J} : C/J &\rightarrow C/J \otimes C/J & \varepsilon_{C/J} : C/J &\rightarrow \mathbb{K} \\
c + J &\mapsto \pi \otimes \pi \circ \Delta(c) & c + J &\mapsto \varepsilon(c)
\end{aligned} \quad (1.28)$$

Gozan de buena definición, en efecto si c_1 y c_2 están en la misma clase entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{C/J}(c_1 + J) - \Delta_{C/J}(c_2 + J) &= \Delta_{C/J}((c_1 + J) - (c_2 + J)) \\
&= \Delta_{C/J}(J) \\
&= \pi \otimes \pi(\Delta(J)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Por otro lado

$$\varepsilon(c_1 + J) - \varepsilon(c_2 + J) = \varepsilon((c_1 + J) - (c_2 + J)) = \varepsilon(J) = 0 \tag{1.30}$$

De modo que el cociente tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto y la counidad son los morfismos que acabamos de definir. Podemos ahora abordar en detalle la estructura de coálgebra que posee $Sym(V)$

Ejemplo 1.3.4. *Consideremos V un espacio vectorial, hemos visto que el algebra tensorial $T(V)$ tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, ahora bien el coproducto de $T(V)$ es un morfismo de álgebra, esto es una consecuencia del hecho que los elementos de V sean primitivos, en efecto si $v, w \in V$ entonces,*

$$\begin{aligned}
\Delta(vw) &= 1 \otimes vw + w \otimes v + v \otimes w + vw \otimes 1 \\
&= (1 \otimes v + v \otimes 1)(1 \otimes w + w \otimes 1) \\
&= \Delta(v)\Delta(w)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Para un elemento cualquiera $v_1 \dots v_n$ extendemos por inducción, notemos además que el conmutador de primitivos es primitivo, en efecto

$$\begin{aligned}
\Delta([x, y]) &= \Delta(xy - yx) \\
&= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
&= (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) - (1 \otimes y + y \otimes 1)(1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&= 1 \otimes xy - yx \otimes 1 + xy \otimes 1 - yx \otimes 1 \\
&= 1 \otimes (xy - yx) + (xy - yx) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Sea J el ideal generado por el conjunto de conmutadores de V , dado que el conmutador es primitivo se tiene que $\Delta([x, y]) \in J \otimes T(V) + T(V) \otimes J$, además $\varepsilon([x, y]) = 0$ por tanto

la \mathbb{K} -álgebra cociente $Sym(V)$ adquiere la estructura de \mathbb{K} co-álgebra dada por los morfismos coproducto y counidad definidos en (1.28). Si V posee una base $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces en virtud que el coproducto para $T(V)$ sea multiplicativo tenemos

$$\Delta(x_i^n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x_i^k \otimes x_i^{n-k}$$

Por tal razón, para un elemento $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \in Sym(V)$ tenemos

$$\Delta(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = \sum_{\substack{0 \leq t_1 \leq k_1 \\ \vdots \\ 0 \leq t_n \leq k_n}} \binom{k_1}{t_1} \dots \binom{k_n}{t_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \otimes x_1^{k_1-t_1} \dots x_n^{k_n-t_n} \quad (1.33)$$

Ejemplo 1.3.5. *EL conjunto de las funciones quasi-simétricas \mathbb{Q}_{Sym} , tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto esta definido por*

$$\Delta(c, \dots, c_k) := \sum_{i=1}^k M_{(c_1, c_2, \dots, c_i)} \otimes M_{(c_{i+1}, \dots, c_k)} \quad (1.34)$$

La counidad es el morfismo que envia el 1 de \mathbb{Q}_{Sym} en la unidad del cuerpo y de allí se extiende por linealidad

Ejemplo 1.3.6. *El conjunto de funciones simétricas no conmutativas N_{Sym} , es una \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto esta dado por la desconcatenación, esto es el coproducto esta definido por la expresión*

$$\Delta(H_n) := \sum_{i+j=n} H_i \otimes H_j \quad (1.35)$$

Aqui hemos asumido $H_0 = 1$. La counidad es el morfismo que envia el 1 de en la unidad del cuerpo y de allí se extiende por linealidad

Proposición 1.3.3. *Sea $f : C \rightarrow D$ un homomorfismo de \mathbb{K} -coálgebras entonces $Ker(f)$ es un coideal de C*

Es importante resaltar en este punto que un \mathbb{K} -espacio vectorial puede ser de manera simultánea \mathbb{K} -álgebra y \mathbb{K} -coálgebra y sin embargo, ambas estructuras no tienen que estar necesariamente relacionadas entre si. El siguiente teorema nos permite establecer un criterio para determinar cuando las estructuras de \mathbb{K} -álgebra y \mathbb{K} -coálgebra en un mismo espacio vectorial están relacionadas entre si.

Teorema 1.3.1. *Sea A un \mathbb{K} -espacio vectorial que tiene simultáneamente estructura de \mathbb{K} -álgebra y \mathbb{K} -coálgebra, las siguientes son equivalentes*

a. (Δ, ε) son morfismos de álgebra

b. (m, u) son morfismos de coálgebra

c. Los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes A & \\
 \Delta \otimes \Delta \swarrow & & \searrow m \\
 A \otimes A \otimes A \otimes A & & A \\
 \downarrow id \otimes \tau \otimes id & & \uparrow \Delta \\
 A \otimes A \otimes A \otimes A & & A \otimes A \\
 \searrow m \otimes m & & \swarrow \Delta
 \end{array} \quad (1.36)$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\
 \downarrow m & & \downarrow \cong \\
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K}
 \end{array} \quad (1.37)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{id} & \mathbb{K} \\
 \searrow u & & \swarrow \varepsilon \\
 & A &
 \end{array} \quad (1.38)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{u} & A \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \Delta \\
 \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{u \otimes u} & A \otimes A
 \end{array} \quad (1.39)$$

Demostración. El coproducto es multiplicativo y el producto comultiplicativo, si y solo si,

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes A & \\
 \Delta \otimes \Delta \swarrow & & \searrow m \\
 A \otimes A \otimes A \otimes A & & A \\
 \downarrow id \otimes \tau \otimes id & & \uparrow \Delta \\
 A \otimes A \otimes A \otimes A & & \\
 \searrow m \otimes m & & \swarrow \Delta \\
 & A \otimes A &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \uparrow m & & \uparrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & A \otimes A \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

La unidad es comultiplicativa y el coproducto preserva la unidad si y solo si,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \swarrow u & & \nearrow u_{A \otimes A} \\
 & \mathbb{K} &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{u} & A \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \Delta \\
 \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{u \otimes u} & A \otimes A
 \end{array}$$

El producto preserva la counidad y esta última es multiplicativa si y solo si,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} \\
 \uparrow m & & \uparrow \cong \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\
 \downarrow m & & \downarrow \cong \\
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K}
 \end{array}$$

La counidad preserva a unidad y viceversa si y solo si,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} \\
 \swarrow u & & \nearrow id \\
 & \mathbb{K} &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{id} & \mathbb{K} \\
 \swarrow u & & \nearrow \varepsilon \\
 & A &
 \end{array}
 \tag{1.40}$$

□

1.4 \mathbb{K} - biálgebras y \mathbb{K} -álgebras de Hopf

Definición 1.4.1. Un \mathbb{K} -espacio vectorial A es una \mathbb{K} -biálgebra, si A es \mathbb{K} -álgebra y \mathbb{K} -coálgebra de manera simultánea y además satisface el ítem a o b del **teorema 1.3.1**

Ejemplo 1.4.1. El conjunto $\mathbb{K}G$ es una \mathbb{K} -biálgebra, con las estructuras estudiadas en los **ejemplos 1.2.3** y **1.3.2**.

Ejemplo 1.4.2. Las estructuras que hemos estudiado en los **ejemplos 1.2.4** y **1.3.3** hacen de $T(V)$ una \mathbb{K} -biálgebra. En efecto vimos en el **ejemplo 1.3.4** que el coproducto Δ es un morfismo de álgebras, además la counidad también es un morfismo de álgebras. En efecto $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ y $\varepsilon(u(1)) = 1$

Ejemplo 1.4.3. El conjunto $\text{Sym}(V)$ adquiere estructura de \mathbb{K} -biálgebra si consideramos las estructuras estudiadas en los **ejemplos 1.2.5** y **1.3.4**. Recordemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Sym}(V)} &= \pi \otimes \pi \circ \Delta_{T(V)} \\ \varepsilon_{\text{Sym}(V)}(v_I + J) &= \varepsilon_{T(V)}(v_I)\end{aligned}$$

Además $\Delta_{T(V)}$ y $\varepsilon_{T(V)}$ son ambos morfismos de \mathbb{K} -álgebra, por tanto $\Delta_{\text{Sym}(V)}$ y $\varepsilon_{\text{Sym}(V)}$ son ambos morfismos de \mathbb{K} -álgebras. De modo que $\text{Sym}(V)$ es una \mathbb{K} -biálgebra. Como consecuencia de lo anterior notemos que si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial libremente generado por un conjunto S , entonces el álgebra de polinomios conmutativos $\mathbb{K}[S]$ tiene estructura de \mathbb{K} -biálgebra.

Un razonamiento análogo al realizado con las álgebras tensorial y simétrica, nos permite establecer el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.4.4. \mathbb{Q}_{Sym} con las estructuras estudiadas en los **ejemplos 1.2.4** y **1.3.5** es una \mathbb{K} -biálgebra

Ejemplo 1.4.5. N_{Sym} es una \mathbb{K} -biálgebra con las estructuras estudiadas en los **ejemplos ??** y **1.3.6**.

Definición 1.4.2. Diremos que un \mathbb{K} -espacio vectorial V es **graduado** si V se puede descomponer como suma directa de \mathbb{K} -módulos, esto es si $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$. Diremos además que V es **conexo** si $V_0 \cong \mathbb{K}$; por último x es **homogéneo de grado n** si $x \in V_n$

Notemos que si V, W son espacios graduados entonces $V \otimes W$ es también graduado, la graduación esta dada por: $V \otimes W = \bigoplus_{n \geq 0} (V \otimes W)_n$, donde $(V \otimes W)_n = \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$

Definición 1.4.3. Sean V, W dos \mathbb{K} -espacios vectoriales graduados, diremos que el morfismo $\varphi: V \rightarrow W$ es **graduado** si para cada n se tiene $\varphi(V_n) \subset W_n$

Definición 1.4.4. Diremos que una \mathbb{K} -álgebra (coálgebra, biálgebra) A es **graduada**, si A es graduada y si además los morfismos $(m, u, \Delta, \varepsilon)$ son graduados.

Definición 1.4.5. Una \mathbb{K} -biálgebra graduada $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ se dice **localmente finita** si cada A_n es de dimensión finita.

Ejemplo 1.4.6. La \mathbb{K} -biálgebra $T(V)$ es graduada y conexa. En efecto, recordemos que

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

Además como

$$m(v_1 \dots v_k \otimes w_1 \dots w_l) = v_1 \dots v_k w_1 \dots w_l$$

tenemos que $m(V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes l}) \subset V^{\otimes(n+l)}$. Por otro lado

$$\Delta(v_1 \dots v_n) = \sum_{I \subset [n]} v_I \otimes v_{[n]-I}$$

Por tanto $\Delta(V^{\otimes n}) \subset \bigoplus_{I \subset [n]} V^{|I|} \otimes V^{[n]-|I|}$. Por último recordemos que en la construcción de $T(V)$ se estableció que $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ y además y de la manera en como están definidos ε y u estos también son graduados.

Ejemplo 1.4.7. La \mathbb{K} -biálgebra $Sym(V)$ es graduada y conexa. En efecto recordemos del ejemplo [1.2.5](#) que

$$Sym(V) = \bigoplus_{n \geq 0} Sym^n(V)$$

Además de las definiciones del producto y coproducto de $Sym(V)$ es inmediato que $m(Sym^n(V) \otimes Sym^l(V)) \subset Sym^{n+l}(V)$ y $\Delta(Sym^n(V)) = \bigoplus_{I \subset [n]} Sym^{|I|}(V) \otimes Sym^{[n]-|I|}(V)$. Por último recordemos que en la construcción de la biálgebra simétrica convenimos $Sym^0(V) = \mathbb{K}$.

Ejemplo 1.4.8. Sea $S = \{x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un conjunto de variables, donde convenimos $x_1 = 1_{\mathbb{K}}$, la \mathbb{K} -álgebra de Faá Di Bruno es la \mathbb{K} -álgebra libremente generada por S , esto es:

$$H_{FdB} := \mathbb{K}[S]$$

Para un conjunto C arbitrario denotemos por $\pi(C)$ el conjunto de todas las particiones sobre C . La \mathbb{K} -álgebra H_{FdB} tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, el coproducto y la counidad son los siguientes morfismos,

$$\begin{aligned} \Delta : H_{FdB} &\longrightarrow H_{FdB} \otimes H_{FdB} & \varepsilon : H_{FdB} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_n &\longmapsto \sum_{\pi \in \pi[n]} \left(\prod_{\beta \in \pi} x_{|\beta|} \right) \otimes x_{|\pi|} & x_n &\longmapsto \delta_{n,0} \end{aligned}$$

En la definición del coproducto anterior, se asume que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Veamos que este coproducto es coasociativo,

$$\begin{aligned} \Delta \otimes id(\Delta(x_n)) &= \sum_{\varphi \in \pi[n]} \prod_{B \in \varphi} \Delta(x_{|B|}) \otimes x_{|\varphi|} \\ &= \sum_{\varphi \in \pi[n]} \left(\prod_{B \in \varphi} \left(\sum_{\psi_B \in \pi[B]} \prod_{p \in \varphi_B} x_{|p|} \otimes x_{|\psi_B|} \right) \right) \\ &= \sum_{\varphi \in \pi[n]} \prod_{p \in \bigcup_{B \in \varphi} \varphi_B} x_{|p|} \otimes \prod_{B \in \varphi} x_{|\psi_B|} \otimes x_{|\varphi|} \end{aligned}$$

Notemos que la aplicación que envía el par $(\varphi, \{\psi_B\}_{B \in \varphi})$ en el par (ψ, φ') en donde $\varphi' = \{\psi_B\}_{B \in \varphi}$ y $\psi = \bigcup_{B \in \varphi} \psi_B$ partición de $[n]$, es una biyección, por lo que tenemos que

$$\Delta \otimes id(\Delta(x_n)) = \sum_{\substack{\psi \in \pi[n] \\ \varphi' \in \pi[\psi]}} \prod_{p \in \psi} x_{|p|} \otimes \prod_{\theta \in \varphi'} x_{|\theta|} \otimes x_{|\varphi'|} \quad (1.41)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} id \otimes \Delta(\Delta(x_n)) &= id \otimes \Delta \left(\sum_{\psi \in \pi[n]} \prod_{B \in \psi} x_{|B|} \otimes x_{|\psi|} \right) \\ &= \sum_{\psi \in \pi[n]} \prod_{B \in \psi} x_{|B|} \otimes \left(\sum_{\varphi \in \pi[\psi]} \prod_{\theta \in \varphi} x_{|\theta|} \otimes x_{|\varphi|} \right) \\ &= \sum_{\substack{\psi \in \pi[n] \\ \varphi \in \pi[\psi]}} \prod_{B \in \psi} x_{|B|} \otimes \prod_{\theta \in \varphi} x_{|\theta|} \otimes x_{|\varphi|} \end{aligned}$$

Así $\Delta \otimes id(\Delta(x_n)) = id \otimes \Delta(\Delta(x_n))$ y por tanto H_{FdB} es una \mathbb{K} -biálgebra. Usando un argumento combinatorio se puede probar que la formula anterior para el coproducto es equivalente a la siguiente expresión

$$\Delta(x_n) = \sum_{m=1}^n B_{m,n}(x_2, \dots, x_n) \otimes x_m \quad (1.42)$$

La expresión

$$B_{m,n}(x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n}} \frac{n!}{(1!)^{k_1} k_1! \dots (n!)^{k_n} k_n!} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (1.43)$$

Recibe el nombre de polinomio parcial de Bell

Ejemplo 1.4.9. El álgebra de palabras quasi-simétricas es graduada. En efecto si para cada n en \mathbb{N} definimos $\mathbb{Q}_{Sym_n} = \{M_c : c \vDash n\}$ entonces tenemos que

$$\mathbb{Q}_{Sym} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}_{Sym_n}$$

Ejemplo 1.4.10. El álgebra de palabras simétricas y no conmutativas es graduada, en efecto dada $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ una composición de n , denotemos por H_c al monomio $H_{c_1} H_{c_2} \dots H_{c_k}$ y sea $N_{Sym_n} = \{H_c : C \vDash n\}$, entonces

$$N_{Sym} = \bigoplus_{n \geq 0} N_{Sym_n}$$

Proposición 1.4.1. Sea $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ una \mathbb{K} -biálgebra graduada sea P el conjunto de todos los elementos primitivos de A , entonces

a. P es graduado, es decir $P = \bigoplus_{n \geq 0} P \cap A_n$

b. P es un coideal de A

Demostración. b. Sea p un primitivo, entonces

$$\Delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1 \in A \otimes P + P \otimes A$$

Por tanto $\Delta(P) \subset A \otimes P + P \otimes A$. Por otro lado, dado que A es biálgebra, se tiene

$$\begin{aligned}
1 \otimes p &= \varepsilon \otimes id(\Delta(p)) \\
&= \varepsilon \otimes id(1 \otimes p + p \otimes 1) \\
&= 1 \otimes p + \varepsilon(p) \otimes 1
\end{aligned}$$

Por tanto $\varepsilon(p) \otimes 1 = 0$, de donde $\varepsilon(p) = 0$ y así $\varepsilon(P) = 0$

a. La suma de primitivos es nuevamente un primitivo, en efecto si p y q son primitivos tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(p+q) &= \Delta(p) + \Delta(q) \\
&= 1 \otimes p + 1 \otimes q + p \otimes 1 + q \otimes 1 \\
&= 1 \otimes (p+q) + (p+q) \otimes 1
\end{aligned}$$

Sea $p \in \bigoplus_{n \geq 0} P \cap A_n$, entonces p se puede escribir de la forma

$$p = \sum_{i=1}^m p_i$$

En donde para cada $1 \leq i \leq m$ se tiene $p_i \in P \cap A_i$, por tanto $p \in P$ y además $p \in \bigoplus_{n \geq 0} A_n$, se sigue que $p \in P \cap \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ y así $P \cap \bigoplus_{n \geq 0} A_n = \bigoplus_{n \geq 0} P \cap A_n$ \square

Proposición 1.4.2. *Sea A una biálgebra graduada y conexa, entonces por*

- a. *El \mathbb{K} -espacio vectorial $\mathbb{K}1_A$ es un subespacio de A_0*
- b. *$u : \mathbb{K} \rightarrow A_0$ es isomorfismo*
- c. *$\ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n > 0} A_n$*
- d. *La counidad ε restringida a A_0 es el isomorfismo inverso de u*
- e. *Para todo $x \in A$ tenemos $\Delta(x) \in x \otimes 1 + A \otimes \ker(\varepsilon)$.*
- f. *Para todo $x \in \ker(\varepsilon)$ tenemos $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + \Delta_+(x)$. Donde $\Delta_+(x)$ esta en $\ker(\varepsilon) \otimes \ker(\varepsilon)$*

Demostración. a. Sea a_n homogéneo de grado n . Dado que $a_n = a_n 1_A$ se tiene que $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A \in A_0$.

b. Sabemos que $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$ y además es inyectiva por tanto dado que $\dim(A_0) = \dim(\mathbb{K}) = 1$ es inmediato que u es isomorfismo

c. Como ε es graduada se tiene que $\varepsilon(A_0) \subset \mathbb{K}$ así para todo $k \geq 1$ debe ser $\varepsilon(A_k) = 0$, por tanto $\ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n>0} A_n$

d. Dado que A es biálgebra, el siguiente digrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} \\ & \searrow u & \swarrow id \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

El resultado se sigue del hecho que u restringida a A_0 es un isomorfismo

e. Dado que $\Delta(x) \in A \otimes A = A \otimes A_0 \oplus A \otimes \ker(\varepsilon)$ así por la propiedad counitaria se tiene que $x \otimes 1 = id \otimes \varepsilon(\Delta(x)) \in A \otimes \varepsilon(A_0) \oplus A \otimes \varepsilon(\ker(\varepsilon))$, se por lo tanto tenemos $\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum_{x_2 \in \ker(\varepsilon)} x_1 \otimes x_2$.

f. Análogo al item anterior tenemos que $\Delta(x) \in A \otimes A = A_0 \otimes A \oplus \ker(\varepsilon) \otimes A$, por la propiedad counitaria tenemos que

$$1 \otimes x + x \otimes 1 = (\varepsilon \circ id + id \circ \varepsilon)(\Delta(x)) \in \varepsilon(A_0) \otimes A \oplus \varepsilon(\ker(\varepsilon)) \otimes A + A \otimes \varepsilon(A_0) \oplus A \otimes \varepsilon(\ker(\varepsilon))$$

Por tanto tenemos que

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2 = 1 \otimes x + x \otimes 1 + \Delta_+(x)$$

Donde claramente $\Delta_+(x)$ es un elemento en $\ker(\varepsilon) \otimes \ker(\varepsilon)$

□

Definición 1.4.6. Sean A y B dos \mathbb{K} -biálgebras, diremos que un morfismo f de A en B es un morfismo de \mathbb{K} -biálgebras si f es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras y \mathbb{K} -coálgebras, de manera simultánea.

Definición 1.4.7. Sea C una \mathbb{K} -coálgebra y sea A una \mathbb{K} -álgebra. Para todo $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ la **convolución** de f con g se define como

$$(f \star g)(c) = \sum_{(c)} f(c_1)g(c_2)$$

Es importante observar que la definición de convolución que acabamos de dar es en realidad una composición de funciones de la manera siguiente

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

Además la identidad para la convolución es la composición $u \circ \varepsilon$, este hecho se sigue de los diagramas de unidad y counidad respectivamente, en efecto,

$$\begin{aligned} f \star (u \circ \varepsilon) &= m \circ (f \otimes u \circ \varepsilon) \circ \Delta \\ &= m \circ (id \otimes u \circ f \otimes \varepsilon) \circ \Delta \\ &= (m \circ id \circ u) \circ (f \circ id) \circ (id \otimes \varepsilon \circ \Delta) \\ &= f \end{aligned} \tag{1.44}$$

Haciendo uso de la conmutatividad de los diagramas de unidad y counidad respectivamente se obtiene que $(u \circ \varepsilon) \star f = f$. El producto convolución endosa a $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ con una estructura de \mathbb{K} -álgebra.

Proposición 1.4.3. Sean C, D dos \mathbb{K} -coálgebras y A, B , dos \mathbb{K} -álgebras, son válidas las siguientes afirmaciones

(a) El producto convolución es asociativo

(b) Dadas $f, f' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ y $g, g' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(D, B)$, se tiene

$$(f \otimes g) \star (f' \otimes g') = (f \star f') \otimes (g \star g')$$

(c) La aplicación

$$\begin{aligned} (\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A), \star) \otimes (\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, D), \star) &\longrightarrow (\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C \otimes D, A \otimes B), \star) \\ f \otimes g &\longmapsto f \otimes g \end{aligned}$$

Es un homomorfismo biyectivo de \mathbb{K} -álgebras

Demostración. a. Sean $f, g, h \in \text{Hom}(C, A)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 (f \star g) \star h &= m \circ ((f \star g) \otimes h) \circ \Delta \\
 &= m \circ (m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \otimes h) \circ \Delta \\
 &= m \circ (m \otimes \text{id} \circ ((f \otimes g) \otimes h) \circ \Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \\
 &= m \circ (\text{id} \otimes m \circ (f \otimes (g \otimes h)) \circ \text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\
 &= m \circ (f \otimes m \circ (g \otimes h) \circ \Delta) \circ \Delta \\
 &= m \circ (f \otimes g \star h) \circ \Delta \\
 &= f \star (g \star h)
 \end{aligned}$$

b. Sean $f, f' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ y $g, g' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(D, B)$, entonces

$$\begin{aligned}
 (f \otimes g) \star (f' \otimes g')(c \otimes d) &= (m_{A \otimes B} \circ (f \otimes g \otimes f' \otimes g') \circ \Delta_{C \otimes D})(c \otimes d) \\
 &= \sum_{c, d} f(c_1) f'(c_2) \otimes g(d_1) g'(d_2) \\
 &= \sum_c f(c_1) f'(c_2) \otimes \sum_d g(d_1) g'(d_2) \\
 &= (m_A \circ (f \otimes f') \circ \Delta_C)(c) \otimes (m_B \circ (g \otimes g') \circ \Delta_D)(d) \\
 &= ((f \star f') \otimes (g \star g'))(c \otimes d)
 \end{aligned}$$

c. Es inmediato del ítem b. □

Definición 1.4.8. Sea A una \mathbb{K} -biálgebra, y sea $S \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A)$, diremos que S es la *antípoda* de A si S es la inversa de la identidad bajo el producto convolución, esto es, si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & A \otimes A & & \\
 & \nearrow \Delta & & & & \searrow m & \\
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{K} & \xrightarrow{u} & A & & \\
 & \searrow \Delta & & & & \nearrow m & \\
 & & A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & A \otimes A & &
 \end{array}$$

Sea $a \in A$, del diagrama anterior tenemos que S es antípoda si y solo si satisface

$$(S * id)(a) = \sum_{(a)} S(a_1)a_2 = u(\varepsilon(a)) = \varepsilon(a)1_A = \sum_{(a)} a_1S(a_2)$$

Definición 1.4.9. Una \mathbb{K} -álgebra de Hopf, es una \mathbb{K} -biálgebra que posee antípoda S .

Ejemplo 1.4.11. $\mathbb{K}G$ es una \mathbb{K} -Hopf álgebra con antípoda $S = g^{-1}$

En efecto, si $g \in \mathbb{K}G$ entonces:

$$\begin{aligned} m((S \otimes id)(\Delta(g))) &= m(S(g) \otimes g) \\ &= g^{-1}g \\ &= gg^{-1} \\ &= m(g \otimes S(g)) \\ &= m((id \otimes S)(\Delta(g))) \end{aligned} \tag{1.45}$$

Observemos que para $\mathbb{K}G$ la antípoda no es otra que la inversa de cada elemento del grupo, este hecho es de vital importancia y es lo que hace a la antípoda tan útil y fundamental, en general para cualquier \mathbb{K} -biálgebra la antípoda nos da una manera de hallar elementos inversos, quizás el único inconveniente, es que no siempre es trivial hallar de manera explícita las formulas para la antípoda.

Proposición 1.4.4. Sea A una \mathbb{K} -álgebra de Hopf, con antípoda S , son válidas las siguientes afirmaciones

- (a) La antípoda de A es única
- (b) La antípoda satisface $S(1_A) = 1_A$ y $S(ab) = S(b)S(a)$
- (c) La conmutatividad de A implica que $S^2 = id_A$
- (d) Si x es primitivo, entonces $\varepsilon(x) = 0$ y además $S(x) = -x$

Demostración. (a) Supongamos que hay dos antipodas S, S' entonces

$$S = (u \circ \varepsilon) * S = (S' * id) * S = S' * (id * S) = S' * (u \circ \varepsilon) = S'$$

(b) Como ε preserva unidades, entonces

$$\begin{aligned}
 1_A &= u(\varepsilon(1_A)) \\
 &= m((S \otimes id)(\Delta(1_A))) \\
 &= m(S(1_A) \otimes 1_A) \\
 &= S(1_A)
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Definamos en $Hom_{\mathbb{K}}(A \otimes A, A)$ las siguientes funciones

$$f := m$$

$$g(a \otimes b) = S(b)S(a)$$

$$h(a \otimes b) = S(ab)$$

Las cuales satisfacen

$$\begin{aligned}
 h \star m(a \otimes b) &= \sum_{(a),(b)} S(a_1 b_1) a_2 b_2 \\
 &= S \star id(ab) \\
 &= u(\varepsilon(ab))
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
 m \star g(a \otimes b) &= \sum_{(a),(b)} m(a_1 \otimes b_1) g(a_2 \otimes b_2) \\
 &= \sum_{(a),(b)} a_1 (b_1 S(b_2)) a_2 \\
 &= \varepsilon(b) \sum_{(a)} a_1 S(a_2) \\
 &= u(\varepsilon(ab))
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

De manera que tenemos $m \star g = h \star m = u \circ \varepsilon_{A \otimes A}$, y como esta última es la unidad de $Hom(A \otimes A, A)$ con respecto a la convolución, entonces h es el inverso de m , es decir $h = g$, de donde se concluye que $S(ab) = S(b)S(a)$.

(c) Para verificar esto solo hace falta computar $S \star S^2$, en efecto, usando la conmu-

tatividad de A y el ítem b nos queda

$$\begin{aligned}
S \star S^2(a) &= \sum_{(a)} S(a_1)S^2(a_2) \\
&= \sum_a S(a_1S(a_2)) \\
&= S\left(\sum_a S(a_2)a_1\right) \\
&= S(u(\varepsilon(a))) \\
&= u(\varepsilon(a)) \\
&= S \star id
\end{aligned} \tag{1.49}$$

(d) Si x es primitivo entonces $1 \otimes x = 1 \otimes x + \varepsilon(x) \otimes 1$ y por tanto $\varepsilon(x) = 0$, más aún $0 = u(\varepsilon(x)) = S(x) + x$

□

Ejemplo 1.4.12. La \mathbb{K} -biálgebra tensorial $T(V)$, es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf, su antípoda la podemos construir recursivamente de la manera siguiente:

Sea $S \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T(V), T(V))$, tal que

1. $S(1) = 1$
2. $S(x) = -x$ para todo $v \in V$
3. Si $x = x_1 \dots x_n$, es un elemento de grado n entonces

$$S(x) = -x - \sum_{I \subset [n]} S(x_I)x_{[n]-I}$$

Esta aplicación S satisface la **definición 1.4.6** en efecto,

- 1.

$$\begin{aligned}
S \star id(1) &= m(S \otimes id(\Delta(1))) \\
&= 1 \\
&= \varepsilon(1)1
\end{aligned}$$

2. Si $x \in V$ entonces

$$\begin{aligned} S * id(x) &= m(S \otimes id(\Delta(x))) \\ &= S(x)1 + S(1)x \\ &= 0 \\ &= \varepsilon(x)1 \end{aligned}$$

3. Si $x = x_1 \dots x_n$ es un elemento de grado n , entonces haciendo uso de la **proposición 1.4.4** tenemos

$$\begin{aligned} S * id(x) &= S(x)1 + S(1)x + \sum_{\substack{I \subset [n] \\ I \neq \emptyset}} S(x_I)x_{[n]-I} \\ &= 0 \\ &= \varepsilon(x)1 \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $S * id = id$, si existe otra $S' \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T(V), T(V))$ tal que $id * S' = id$, entonces en virtud del **ítem a** de la **proposición 1.4.4** tenemos que $S = S'$. Por último por el **ítem b** de la **proposición 1.4.4** tenemos que

$$S(x_1 \dots x_n) = S(x_n) \dots S(x_1) = (-1)^n x_n \dots x_1 \quad (1.50)$$

Ejemplo 1.4.13. Sea $\pi : T(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$ la proyección canónica, la antípoda para la \mathbb{K} -biálgebra $\text{Sym}(V)$ está definida por

$$\begin{aligned} \text{Sym}(V) &\longrightarrow \text{Sym}(V) \\ x_1^{x_1} \dots x_n^{k_n} + J &\longmapsto S_{T(V)}(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) + J \end{aligned}$$

De la **ecuación 1.50** tenemos que si $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ es un elemento en $\text{Sym}(V)$ entonces

$$S(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = (-1)^{k_1 + \dots + k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad (1.51)$$

Es decir si $f(x)$ es un polinomio conmutativo en $\text{Sym}(V)$ entonces la antípoda es el morfismo $S_{\text{Sym}(V)}(f(x)) := f(-x)$

Ejemplo 1.4.14. Sea A una \mathbb{K} -álgebra conmutativa con unidad. Sea $\text{Alg}(H_{FdB}, A)$ el conjunto formado por todas las aplicaciones de álgebras. Sean $f, g \in \text{Alg}(H_{FdB}, A)$ el producto convolución viene dado por $(f * g)(x_1) = f(x_1)g(x_1) = 1$ y para todo $n > 1$

$$(f * g)(x_n) = \sum_{\pi \in \pi[n]} g(x_{|\pi|}) \prod_{B \in \pi} f(x_{|B|}) \quad (1.52)$$

Endosa a $(\text{Alg}(H_{FdB}, A), *)$ con una estructura de \mathbb{K} -álgebra, el morfismo identidad es el morfismo $\delta_{1,n}$. De este modo H_{FdB} es una \mathbb{K} -biálgebra graduada con antípoda

$$S(x_n) = \sum_{\substack{\pi \in \pi[n] \\ |\pi| \geq 2}} (-1)^{|\pi|} x_{|\pi|} \prod_{B \in \pi} S(x_{|B|}) \quad (1.53)$$

Ejemplo 1.4.15. La \mathbb{K} -biálgebra \mathbb{Q}_{Sym} es una álgebra de Hopf, graduada y conexa, la antípoda está dada por

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Q}_{Sym}, \mathbb{Q}_{Sym}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Q}_{Sym}, \mathbb{Q}_{Sym}) \\ M_c &\longmapsto (-1)^{l(c)} \sum_{d \leq c} M_d \end{aligned}$$

Donde $l(c)$ es la longitud de la composición c

La \mathbb{K} -biálgebra N_{Sym} es una álgebra de Hopf, graduada y conexa, la antípoda está dada por

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(N_{Sym}, N_{Sym}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(N_{Sym}, N_{Sym}) \\ H_n &\longmapsto \sum_{c \models n} (-1)^{|c|} H_c \end{aligned}$$

La graduación juega un papel fundamental en el estudio de las álgebra de Hopf, de hecho cuando una \mathbb{K} -biálgebra es graduada, entonces esta posee antípoda, esto lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. Toda \mathbb{K} -biálgebra graduada y conexa, posee antípoda graduada, es decir tiene estructura de \mathbb{K} -álgebra de Hopf.

Demostración. Para probar el teorema solo necesitamos construir una antípoda en A , esta construcción la haremos inductivamente tal como se hizo para la antípoda de $T(V)$

Si $n = 0$, dado que la antípoda preserva unidades, tenemos que la antípoda es la identidad en $A_0 \cong \mathbb{K}$

Supongamos que para todo elemento a de grado k , con $k < n$ existe antípoda, esto es $S * id(x) = u(\varepsilon(x))$, por la **proposición 1.4.2** para un elemento x de grado n se tiene que $S(x) = 0 = u(\varepsilon(x))$, por tanto la antípoda viene dada por

$$S(x) := - \sum_{(x)} S(x_1)x_2$$

Razonando de manera análoga podemos obtener la formula de la antipoda para el lado derecho, es decir

$$S(x) := - \sum_{(x)} x_1 S(x_2)$$

□

A continuación enunciaremos la formula de Takeuchi para la antípoda, la cual permite establecer una expresión para la antípoda de cualquier álgebra de Hopf Graduada y conexa.

Teorema 1.4.2 (Takeuchi). *Si A es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf Graduada y conexa, entonces la antípoda tiene la siguiente expresión*

$$S = \sum_{n \geq 0} (-1)^n m^{(n-1)} \circ f^{\otimes n} \circ \Delta^{(n-1)} = S = \sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n)} \quad (1.54)$$

Donde $f := id_A - u \circ \varepsilon$

Demostración. La prueba del teorema es bastante sencilla, solo basta usar la identidad de la serie geométrica,

$$(1 + x)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$$

En efecto notemos que $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n = \mathbb{K} \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 1} A_n \right) = \mathbb{K} \oplus A'$ por lo que tenemos $id_A = u \circ \varepsilon = u \circ \varepsilon + f$, donde f es una función tal que $f|_{\mathbb{K}} = 0$ y $f|_{A'} = id_{A'}$, de esta manera se tiene

$$\begin{aligned}
S * id &= \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n)} \right) * (u \circ \varepsilon + f) \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n)} * u \circ \varepsilon + \sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n+1)} \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n)} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n f^{*(n+1)} \\
&= f^{*(0)} \\
&= u \circ \varepsilon
\end{aligned} \tag{1.55}$$

□

El siguiente teorema caracteriza los morfismos de álgebras de Hopf, mas adelante este teorema será de gran ayuda en el estudio de las álgebras de Hopf que provienen de árboles.

Teorema 1.4.3. *Sean H y H' dos álgebras de Hopf, y sea f de H en H' un morfismo cualquiera. Si f es un morfismo de biálgebras, entonces f preserva antipodas, esto es el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{f} & H' \\
S_H \downarrow & & \downarrow S_{H'} \\
H & \xrightarrow{f} & H'
\end{array}$$

Definición 1.4.10. *Un morfismo de álgebras de Hopf, es un morfismo que satisface el **teorema 1.4.3***

Cerramos el capítulo haciendo breve revisión a la noción de caracteres de una álgebra de Hopf.

1.5 Grupo de Caracteres de una álgebra de Hopf

Definición 1.5.1. *Sea H una \mathbb{K} -álgebra de Hopf, un **carácter** de H es un morfismo de álgebras $f : H \rightarrow \mathbb{K}$. Denotaremos al grupo de caracteres de H por $\text{char}(H)$*

Proposición 1.5.1. *El conjunto $\text{char}(H)$ con el producto convolución del dual H^* tiene estructura de grupo.*

Demostración.

Dado que la counidad ε es un morfismo de álgebras, es un caracter en H . Sean $f, g \in \text{char}(H)$, entonces

$$\begin{aligned}
 (f \star g)(x)(f \star g)(y) &= m(f \otimes g(\Delta(x)))m(f \otimes g(\Delta(y))) \\
 &= \sum_x f(x_1)g(x_2) \sum_y f(y_1)g(y_2) \\
 &= \sum_{(x),(y)} f(x_1)f(y_1)g(x_2)g(y_2) \\
 &= \sum_{(x),(y)} f(x_1y_1)g(x_2y_2) \\
 &= m(f \otimes g(\Delta(xy))) \\
 &= f \star g(xy)
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Si f, g son caracteres en H entonces por la parte anterior, $f \star g(1) = f(1)g(1) = 1$, así el conjunto de los caracteres es cerrado bajo el producto convolución. Por otro lado $f \circ S(1) = f(1) = 1$ y además

$$\begin{aligned}
 f \circ S(xy) &= f(S(y)S(x)) \\
 &= f(S(y))f(S(x)) \\
 &= f(S(x))f(S(y)) \\
 &= f \circ S(x)f \circ S(y)
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

De manera que $f \circ S$ es un caracter de H , más aún es el caracter inverso de f bajo el producto convolución, en efecto

$$\begin{aligned}
 f \circ S \star f(x) &= \sum_x f(S(x_1)f(x_2)) \\
 &= f\left(\sum_x S(x_1)x_2\right) \\
 &= f(u(\varepsilon(x))) \\
 &= \varepsilon(x)f(1) \\
 &= \varepsilon(x)
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

De manera análoga se prueba que $f \star f \circ S(x) = \varepsilon(x)$. □

Es de interés estudiar el grupo de caracteres asociado a las álgebras de Hopf simétrica y Faá di Bruno, respectivamente

Ejemplo 1.5.1. Consideremos el \mathbb{K} -espacio vectorial $V = \mathbb{K}\{x\}$, para $f, g \in \text{char}(\text{Sym}(V))$ tenemos

$$f * g(x^n) = \sum_{i+j=n} f(x^i)g(x^j) \quad (1.59)$$

Sea $\mathbb{K}[[t]]$ el conjunto de las series de potencias sobre el cuerpo \mathbb{K} , con el producto usual de series, el morfismo

$$\begin{aligned} (\text{char}(\text{Sym}(V)), *) &\longrightarrow (\mathbb{K}[[T]], \cdot) \\ f &\longmapsto F_f = \sum_{n \geq 0} f(x^n)t^n \end{aligned}$$

Es tal que

$$\begin{aligned} F_{f * g}(t) &= \sum_{n \geq 0} f * g(x^n)t^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} f(x^i)g(x^j)t^n \\ &= F_f(t)F_g(t) \end{aligned} \quad (1.60)$$

La última expresión nos dice que multiplicar caracteres con el producto convolución es equivalente a multiplicar series, de modo que

$$\text{char}(\text{Sym}(V), *) \cong (K[[t]], \cdot) \quad (1.61)$$

Para el caso que $V = \mathbb{K}\{1, x_2, \dots, x_n\}$, con un razonamiento análogo se obtiene que

$$\text{char}(\text{Sym}(V), *) \cong (K[[t_1, \dots, t_n]], \cdot) \quad (1.62)$$

Ejemplo 1.5.2. Sea $(\mathbb{K}[[t]], ())$ el conjunto de series exponenciales con la sustitución usual de series, para $f, g \in \text{char}(\text{Sym}(V))$ tenemos

$$F_{f * g} := F_g(F_f)$$

Entonces tenemos

$$(\text{char}(\text{Sym}(V)), *_{FdB}) \cong (\mathbb{K}[[t]], ()), \quad (1.63)$$

Más aún, dado que $f \circ S$ es la unidad para el grupo de caracteres, tenemos que

$$F_{f \circ S} = (F_f)^{-1}$$

Esta última expresión es equivalente a la muy conocida fórmula de inversión de Lagrange

Capítulo 2

Árboles

La noción de grafo fue introducida por primera vez por Leonhard Euler en el siglo XVIII, cuando resolvió el problema de los puentes de la hoy conocida Ciudad de Kaliningrado, el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel pasando solo una vez por cada puente; posteriormente en 1847 Gustav Kirchhoff utilizando teoría de grafo enunció las hoy famosas y bien conocidas leyes de Kirchhoff de voltaje y corriente. Sin embargo se puede decir que la teoría de grafos debe su nacimiento al problema propuesto por Francis Guthrie en 1852 cuando planteó el problema de colorear cualquier mapa de países con solo cuatro colores de manera que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. En la actualidad la teoría de Grafos juega un papel fundamental en diversas áreas tales como: matemáticas, computación, genética, química, ingeniería, ciencias sociales, entre otras, en particular en matemáticas podemos utilizar un tipo particular de grafos llamados árboles para construir ejemplos bastante interesantes de álgebras de Hopf, entre estas se encuentran el álgebra de Connes-Kreimier (ver [3],), el álgebra NAP (ver [4]) y el álgebra CEM (ver [6]) los cuales serán el núcleo del presente trabajo, por este motivo en este capítulo haremos una breve discusión sobre los conceptos más importantes de árboles Y luego introduciremos las álgebras ya mencionadas.

2.1 Grafos

Definición 2.1.1. *Un **grafo** es un conjunto de puntos llamados vértices conectados por líneas llamadas aristas o lados del grafo.*

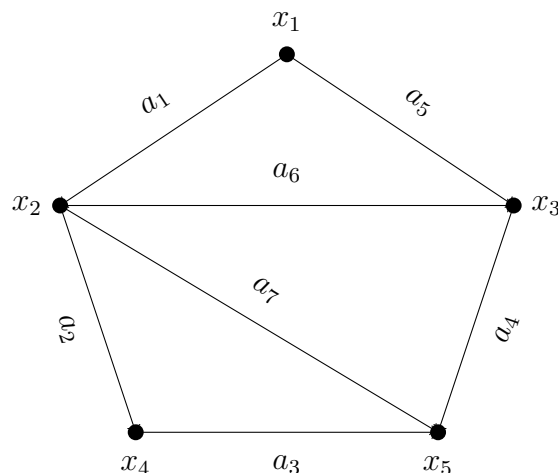
Es importante indicar que las conexiones entre los vértices de un grafo pueden ser o no dirigidas, en el presente trabajo solo trabajaremos grafos no dirigidos y sin lazos o

lados múltiples, estos reciben el nombre de *grafos simples*. Los grafos los denotaremos por $G = (X, E)$, donde X es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas, una arista o lado es un subconjunto $\{x, y\}$ de tamaño 2 en donde $x, y \in X$ son vértices. El número de vértices del grafo G lo denotaremos por $|G|$, mientras que el número de aristas lo denotaremos por $|E(G)|$.

Definición 2.1.2. Sea $G = (X, E)$ un grafo

- i) Dos vértices son *adyacentes* si están conectados por una arista, en caso contrario diremos que son *disjuntos*.
- ii) Dos vértices *adyacentes* son llamados *vecinos*, el conjunto de todos los vértices vecinos a x es llamada la *vecindad* de x y la denotaremos por $N(x)$
- iii) El *grado* de un vértice x , es el número de vértices *adyacentes* a este, lo denotaremos por $d(x)$.
- iv) El *grado del Grafo* G es el *máximo grado* de sus vértices, lo denotaremos por $d(G)$
- v) La *secuencia graduada* de G es el conjunto de los *grados* de todos sus vértices ordenados en orden *creciente*.
- vi) Dos aristas son *adyacentes* si tienen un *vertice* en común en otro caso son *disjuntas*.
- vii) Una arista y un *vertice* son *incidentes* uno al otro, si dicho *vertice* pertenece a la arista. El conjunto de todas las aristas *incidentes* a un vértice x lo escribiremos por $E(x)$

Ejemplo 2.1.1. Para el siguiente grafo



tenemos:

- El grafo tiene cinco vértices, $|G| = 5$ Y siete aristas $|E(G)| = 7$.
- Los vértices x_1 y x_2 son adyacentes, sin embargo los vértices x_1 y x_4 no son adyacentes.
- El grado del vértice x_5 es tres, esto es $d(x_5) = 3$.
- El grado del grafo es cuatro, esto es $d(G) = 4$.
- La secuencia graduada para este grafo es $\{2, 3, 4\}$.
- a_5 y a_4 son aristas adyacentes mientras que a_5 y a_7 son disjuntos.
- El vértice x_1 y la arista a_5 son incidentes.

La siguiente proposición es inmediata

Proposición 2.1.1. Sea $G = (X, E)$ un grafo, con n vertices y m aristas, entonces

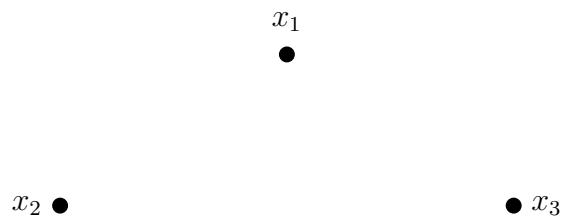
1. $\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2m$

2. G tiene dos vértices con el mismo grado

2.1.1 Tipos básicos de Grafos

Definición 2.1.3. Diremos que un grafo, es un **Grafo vacío** si no tiene aristas o lados.

Ejemplo 2.1.2. El siguiente grafo es un grafo vacío

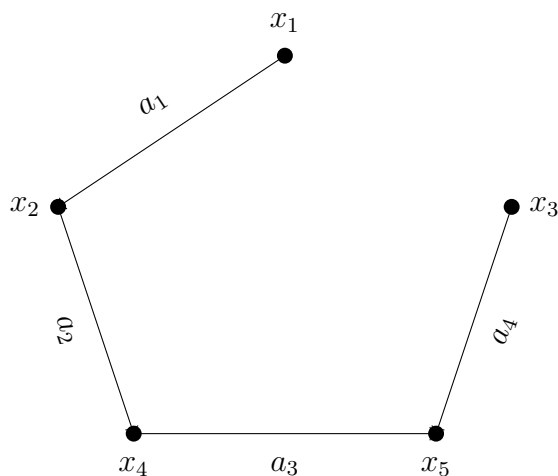


Definición 2.1.4. Diremos que $G' = (X', E')$ es un **subgrafo** de un grafo $G = (X, E)$ si y solo si $X' \subseteq X$ y $E' \subseteq E$

Definición 2.1.5. Diremos que $G' = (X', E')$ es un **subgrafo inducido** de un grafo $G = (X, E)$ si $X' \subseteq X$ y además toda arista de G cuyos vértices estén en G' debe ser también una arista de G' . Para tal caso denotaremos $G' = G_{X'}$.

Definición 2.1.6. Un **Camino** es un grafo en el cual todos sus vértices pueden ser ordenados de manera que solo hay una arista conectando cada dos vértices consecutivos. Denotaremos a los caminos de n vértices por P_n .

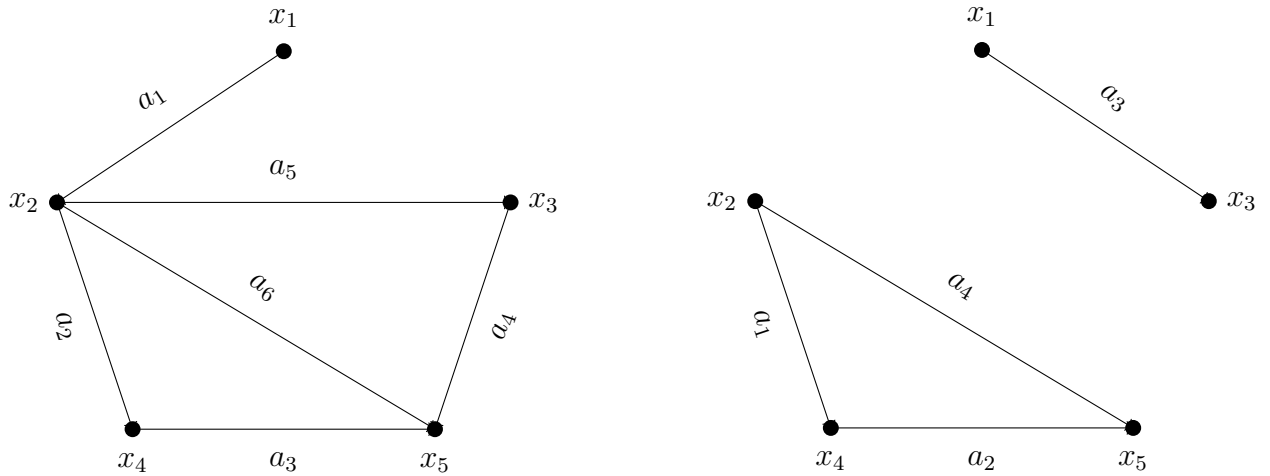
Ejemplo 2.1.3. El siguiente grafo es un ejemplo de camino



Observación 2.1.1. El número de lados en un camino es su longitud, además cuando un camino une los vértices x_1 y x_n lo llamaremos (x_1, x_n) - camino.

Definición 2.1.7. Un **Grafo conexo** es aquel en el que cada par de vértices están conectados por algún camino. Un grafo que no es conexo es llamado **disconexo**, todo grafo disconexo es la unión de grafos conexos, los cuales son llamados **componentes conexas** del grafo disconexo.

Ejemplo 2.1.4. En el siguiente ejemplo el grafo de la izquierda es conexo, mientras que el de la derecha es disconexo



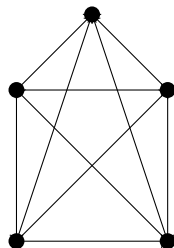
Definición 2.1.8. Un **ciclo** es un grafo en el cual cada vértice tiene grado 2. Si el ciclo tiene una cantidad impar(par) de vértices le llamaremos ciclo impar(par), respectivamente; la longitud del ciclo es el número de aristas que tiene el ciclo. Denotaremos a un ciclo de n vértices por C_n

Ejemplo 2.1.5. A continuación se muestran dos ciclos



Definición 2.1.9. Un **grafo completo** es aquel en el que cada par de vértices están conectados por alguna arista. Denotaremos a los grafos completos de n vértices por K_n

Ejemplo 2.1.6. El siguiente grafo es un ejemplo de grafo completo

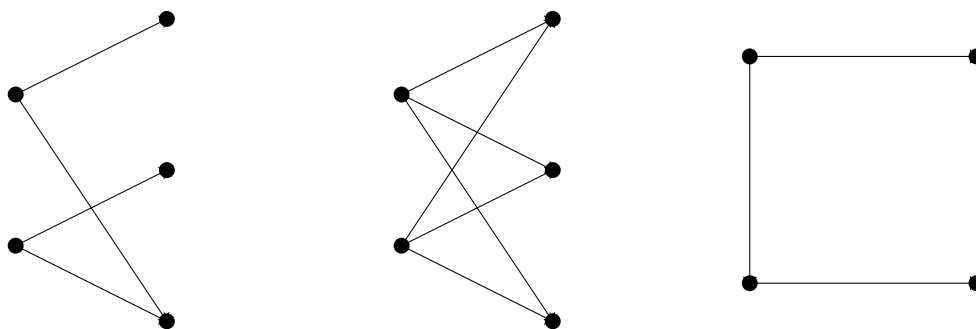


Observemos que en todo grafo completo K_n el número de lados es $\binom{n}{2}$, pues son todas las posibles maneras de elegir dos vértices de los n vértices que tiene el grafo K_n

Definición 2.1.10. Un grafo $G = (X, E)$ es llamado **grafo bipartito** si sus vértices se pueden particionar en dos conjuntos o partes disjuntas X_1, X_2 de manera que cada arista solo conecta vértices de diferentes partes, diremos que un grafo bipartito es un **grafo completo bipartito** si cada vértice de X_1 es adyacente a todo vértice de X_2 .

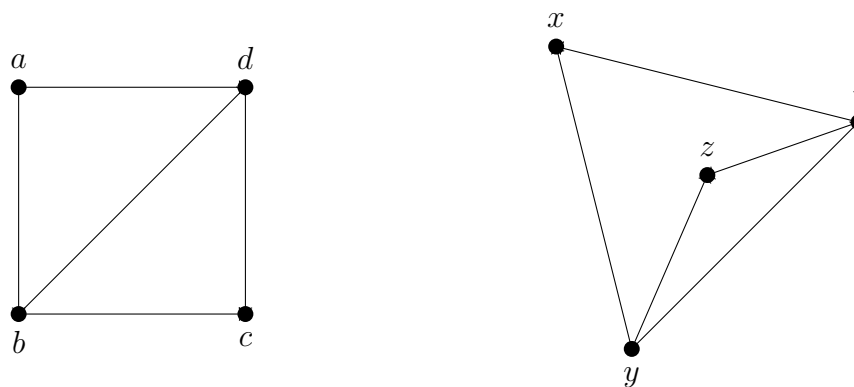
Definición 2.1.11. Un **grafo regular** es un grafo cuyos vértices tienen todos el mismo grado.

Ejemplo 2.1.7. En los ejemplos mostrados abajo el grafo de la izquierda es bipartito, el del centro es bipartito completo y el de la derecha es regular



Definición 2.1.12. Dos grafos $G_1 = (X_1, E_1)$ y $G_2 = (X_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una biyección $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que si $\{x, y\} \in E(G_1)$, entonces $\{f(x), f(y)\} \in E(G_2)$, es decir f preserva las adyacencias de los vértices, escribiremos $G_1 \cong G_2$ para indicar que G_1 y G_2 son isomorfos

Ejemplo 2.1.8. A continuación mostramos dos grafos que son isomorfos,



La biyección $f : X_1 \rightarrow X_2$ está dada por $\{f(a) = z, f(b) = y, f(c) = x, f(d) = t\}$.

Es importante señalar en este punto que si dos grafos son isomorfos entonces tienen el mismo número de vértices y el mismo número de grados para cada vértice pero en general el recíproco no es cierto, esto es dos grafos pueden tener el mismo número de vértices, aristas, y grado para cada vértice y aun no ser isomorfos, el siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 2.1.9. *Los siguientes grafos presentan el mismo número de vértices, lados, sin embargo no son isomorfos*



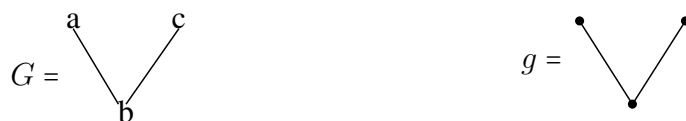
Ya que no se preserva la adyacencia entre los vértices de grado 3. A continuación introducimos la noción de reetiquetamiento de los vértices de un grafo, este concepto será necesario más adelante cuando estudiemos las álgebras de Hopf sobre árboles enraizados. Sea G un grafo, un reetiquetamiento de los vértices de G es una permutación de los vértices de G , más formalmente

Definición 2.1.13. *Sea S_n el grupo de permutaciones de orden n y sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \dots, n\}$, un **reetiquetamiento** de los vértices de G es la aplicación de una permutación σ a cada vértice de G . Denotaremos por $\sigma(G)$ al grafo que resulta de esta aplicación.*

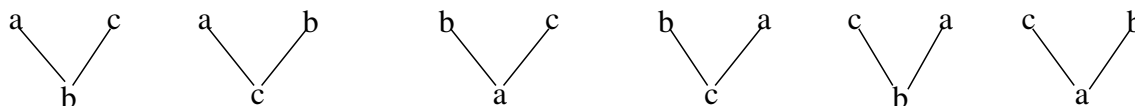
Definición 2.1.14. *Sea G un grafo, un automorfismo es una permutación σ tal que $\sigma(G) = G$, denotaremos por $\text{Aut}(G)$ al conjunto de todos los automorfismos de G .*

Observemos que hay exactamente $o(S_n) = |G| = n!$ reetiquetamientos de G , sin embargo entre estos se encuentran todos aquellos que dejan invariante al grafo G , por lo tanto hay exactamente $\frac{o(S_n)}{o(\text{Aut}(G))}$ reetiquetamientos diferentes del grafo G . Diremos que dos grafos tienen el mismo **tipo de isomorfismo** si uno es un reetiquetamiento del otro, notemos que la relación tipo de isomorfismo es una relación de equivalencia sobre el conjunto formado por todos los grafos con vértices sobre $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, de manera que todos los grafos con el mismo tipo de isomorfismo pertenecen a una misma clase. Denotaremos a la clase de un grafo G con la letra minúscula g y esta representará a la **estructura subyacente** del grafo G , esta estructura subyacente es precisamente el grafo G sin etiquetas.

Ejemplo 2.1.10. *En la figura de abajo, el grafo de la izquierda muestra un grafo G , etiquetado, el grafo g de la derecha es la estructura subyacente del grafo G*



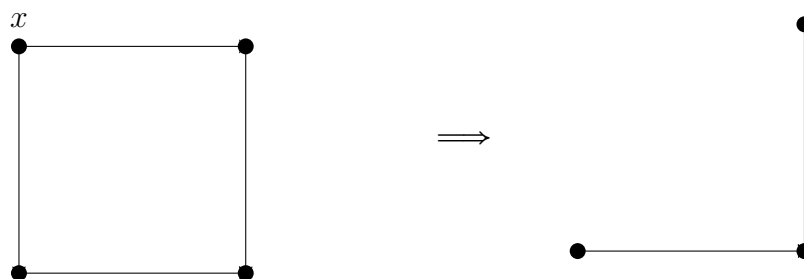
La figura de abajo muestra los seis reetiquetamientos posibles del grafo G



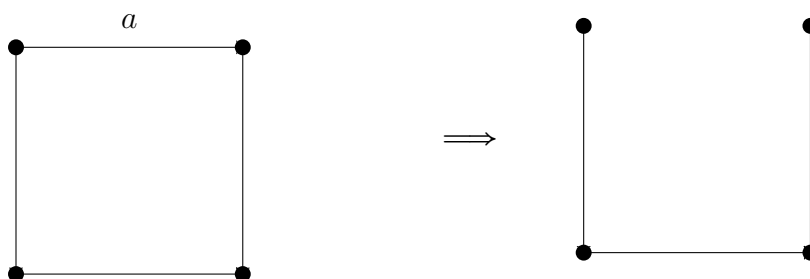
2.1.2 Operaciones básicas con grafos

En esta sección haremos una breve revisión sobre algunas operaciones con grafos, que nos serán fundamentales para la construcción de las álgebras de Hopf sobre árboles que estudiaremos en el capítulo 3

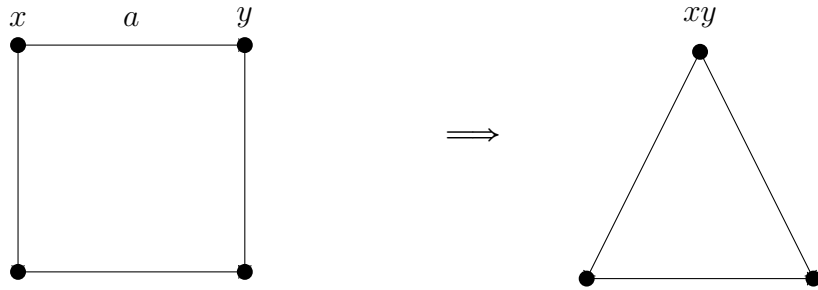
1. **Eliminación o borrado de un vértice:** Consiste en borrar un vértice, junto con todas las aristas incidentes a dicho vértice.



2. **Eliminación o borrado de una arista:** Consiste en eliminar una arista de un grafo dado pero dejando los vértices incidentes a esta



3. **Contracción de una arista:** Para contraer una arista con vértices x, y simplemente eliminamos la arista, hacemos coincidir sus vértices en uno nuevo llamado xy y todas las aristas que antes incidían por separado en tanto x como en y las hacemos incidir en el nuevo vértice xy



Diremos que un grafo G es **contractible** a un grafo G_1 , si G_1 se puede obtener a partir de G mediante una sucesión finita de contracciones de aristas. En ocasiones un grafo puede ser contraído a un grafo K_n cualquiera; el máximo número de contracciones n que permiten contraer un grafo G cualquiera a un grafo K_n es conocido como el número de Hadwiger. Si G' es un subgrafo de un grafo G , entonces la contracción de todas las aristas de G' sobre G se denotará por G/G' .

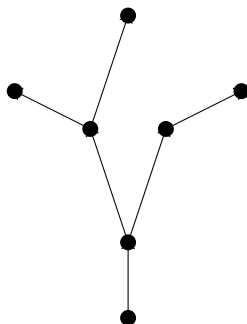
Ejemplo 2.1.11. En la figura de abajo, el grafo ubicado a la derecha es un subgrafo del que está ubicado a la izquierda, el cual se obtuvo al contraer las aristas a, b, c .



4. **Complemento de un grafo:** El complemento de un grafo $G = (X, E)$ es un grafo \overline{G} con el mismo conjunto de vértices de G , en el cual dos vértices serán adyacentes si y solo si son disjuntos en G . Es importante resaltar que si dos grafos de n vértices $G = (X, E)$ y $G_1 = (X, E')$ son complementarios entonces $E \cup E'$ forman el conjunto de aristas de K_n .

2.2 Árboles

Definición 2.2.1. Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos. Un **bosque** es un grafo desconexo sin ciclos, es decir un bosque es una colección de arboles.



Es importante hacer la observación en este punto que las aristas de un árbol son llamadas ramas.

Definición 2.2.2. Diremos que v es un **vértice colgante** de un árbol T , si $d(v) = 1$

Proposición 2.2.1. Un grafo es un árbol si y solo si hay exactamente un camino entre cada par de vértices.

Demostración. Sea G un grafo, si para cualesquieras vértices de G hay un único camino entre ellos entonces, G es conexo y además no posee ciclos, pues de lo contrario se tendrían dos caminos diferentes entre dichos vértices, luego G es un árbol. Supongamos ahora que G es un árbol, entonces G es conexo, por tanto existe camino entre dos cualesquieras vértices de G . Si hay dos vértices conectados por más de un camino entonces la unión de dichos caminos da un ciclo, lo que no es posible ya que G es árbol. \square

Proposición 2.2.2. Sea G un grafo cualquiera

1. Si G es un árbol con n vértices, entonces tiene $n - 1$ ramas
2. Si G es conexo con n vértices y $n - 1$ aristas, entonces G es un árbol

Demostración. 1. Procedamos por inducción. para $n = 1, 2, 3$ no hay nada que probar, supongamos que el resultado es válido para todo árbol con una cantidad de vértices menor a n . Sea T un árbol con n vértices, supongamos que borramos una arista de dicho árbol, entonces se obtienen dos árboles T_1, T_2 con número de vértices n_1, n_2 respectivamente, es evidente que $n = n_1 + n_2$, ahora bien, por hipótesis inductiva el número de ramas en T es $n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$.

2. Supongamos que G es conexo con n vértices y $n - 1$ aristas. Si G tiene un ciclo entonces podemos borrar una arista de dicho ciclo y obtener un nuevo grafo G_1 conexo, podemos repetir este proceso hasta obtener un árbol T con n vértices, por tanto T tiene $n - 1$ aristas lo que no es posible. Luego G no tiene ciclos y así es un árbol.

□

Definición 2.2.3. Diremos que un grafo es conexo minimal si al borrar cualquier arista del mismo, se obtiene un grafo desconexo.

Proposición 2.2.3. Sea G un grafo cualquiera

1. G es un árbol si y solo si es conexo minimal.
2. Si G es acíclico con n vértices y $n - 1$ aristas, entonces G es conexo.
3. Todo árbol tiene al menos dos vértices de grado uno.

Demostración. 1. Si G es un grafo conexo minimal entonces G no tiene ciclos por tanto es un árbol, recíprocamente si G es un árbol, entonces G es acíclico y además si borramos cualquier rama de G obtenemos un bosque, por tanto G es conexo minimal

2. Consideremos un grafo G con n vértices y $n - 1$ aristas. Supongamos que G es desconexo con dos componentes conexas acíclicas G_1, G_2 , si para dos vértices cualesquiera u, v de G_1 y G_2 respectivamente, agregamos una nueva arista a que une dichos vértices entonces $G \cup \{a\}$ es un árbol con n vértices y n aristas, lo cual no puede ser, por tanto G no puede tener componentes conexas.
3. Si T es un árbol con n vértices entonces tiene $n - 1$ aristas, por tanto la suma de los grados de cada uno de sus vértices es $2(n - 1)$, pero como T es conexo no puede contener vértices de grado cero, por tanto deben existir al menos dos vértices de grado uno.

□

Proposición 2.2.4. $\{d_i\}_{i=1}^n$ es la secuencia de graduada de un árbol con n vértices si y solo si

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$$

Demostración. (\implies) Si T es un árbol con n vértices cuya secuencia graduada es $\{d_i\}_{i=1}^n$, cada arista de T aumenta en una unidad el grado de los vértices que están conectados a esta. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

(\impliedby) Procedamos por inducción sobre n . Si $n = 2$ el resultado es evidente, supongamos que el resultado es válido para toda secuencia de longitud menor a n . Sea $\{d_i\}_{i=1}^n$ una secuencia no decreciente, evidentemente $d_1 = 1$ y $d_n > 1$, por hipótesis inductiva la secuencia no decreciente $D = \{d_2, \dots, d_{n-1}, d_n - 1\}$ es una secuencia graduada de algún árbol T' y además

$$\sum_{d \in D} d = 2(n-1-1) = 2(n-2)$$

Si conectamos un nuevo vértice con algún vértice que tenga grado $d_i - 1$ entonces obtenemos un árbol T con secuencia graduada $\{d_i\}_{i=1}^n$ que además satisface

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

□

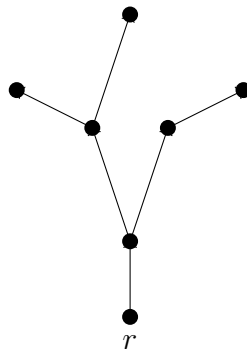
Proposición 2.2.5. Sean T_1, \dots, T_k , k árboles, sea F el bosque formado por estos k árboles, si F n vértices, entonces tiene $n - k$ ramas.

Demostración. Supongamos que para cada $1 \leq i \leq k$ el árbol T_i tiene n_i vértices, entonces T_i tiene $n_i - 1$ ramas, por tanto el número total de ramas de F viene dado por

$$n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 = n - k$$

□

Definición 2.2.4. Un árbol con raíz es un par (T, r) en donde T es un árbol y r es un vértice de T al cual llamaremos la raíz de T .

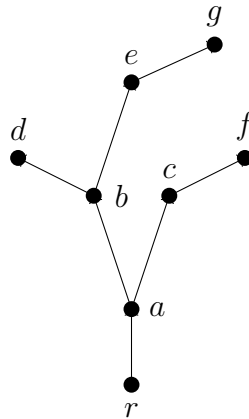


La raíz r de T permite ordenar todos los vértices de T considerando a r como el elemento mas pequeño en el único camino que conecta a r con otro vértice v de T . Esta es la razón por la cual representamos a un árbol con raíz sembrándolo por la raíz. Tal y como lo ilustra la figura anterior.

Definición 2.2.5. Sea T un árbol con raíz,

1. Una **hoja** de T es un vértice diferente a la raíz que posee grado uno. Los vértices que no son hojas se denominan **vértices internos**.
2. Sean x, y dos vértices de T , diremos que x es el **padre** de y o recíprocamente y es el **hijo** de x , si estos son adyacentes y además x está más cerca de la raíz que y .
3. Sean x, y dos vértices de T , diremos que y es un **descendiente** de x si hay un camino que los conecta y si además y está mas alejado de la raíz que x .
4. El **nivel** de un vértice es el número de aristas o longitud del camino que lo une a la raíz.
5. La **altura** de T es la longitud del camino más largo desde la raíz hasta una hoja de T .

Ejemplo 2.2.1. Sea t el siguiente árbol con raíz



- r es la raíz de t
- d, e, f son las hojas de t
- a, b, c son los vértices internos
- a es el padre de b y c

- d, e, g son los descendientes de b
- El nivel de f es tres
- La altura del árbol es cuatro.

Los árboles con raíz juegan un papel bastante relevante en las ciencias de la computación y son muchas sus aplicaciones y usos, entre las mas conocidas encontramos: creación de genealogías, sistemas de toma de decisiones, estructura de datos, algoritmos de búsqueda y extracción de información, estudio de relaciones y niveles jerarquicos en especies y en redes sociales, entre otros.

El reetiquetamiento de árboles viene definido de manera análoga a como se hizo en la **definición 2.1.13**. Sea T un árbol con raíz y sea $t = [t_1 \cdots t_n]$ su estructura subyacente, donde t_1, \dots, t_n son los árboles que al ser insertados a una raíz común permiten obtener t , el grupo de automorfismos de T viene dado de manera recursiva por la expresión,

$$\sigma(t) = \prod_{k=1}^n \sigma(t_k) \quad (2.1)$$

Definición 2.2.6. Diremos que T es un **árbol m -ario** si todo vértice diferente a las hojas de T tiene exactamente m hijos.

Proposición 2.2.6. 1. Todo árbol binario tiene un número impar de vértices

2. Todo árbol binario de n vértices tiene exactamente $\frac{1}{2}(n+1)$ vértices de grado uno.

Demostración. 1. Cada vértice interno tiene grado 2. Por lo tanto la suma de los grados de todos los vértices internos de un árbol binario es par. Es fácil ver que esta suma mas uno es igual al número de vértices del árbol. Es decir, tiene una cantidad impar de vértices.

2. Consideremos un árbol T binario con n vértices, sea k el número de hojas, hay $n - k$ vértices internos, Por otra parte según el ítem 1 se tiene que $2(n - k) + 1 = n$, de donde despejando k obtenemos $k = \frac{1}{2}(n + 1)$

□

Según el principio de multiplicación el número máximo de lados que tiene un grafo con n -vértices es $n(n-1)/2$, una consecuencia inmediata de este hecho es el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. El número de grafos etiquetados con n vértices es $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Demostración. Debemos contar todos los grafos etiquetados con n vértices, notemos que para esto solo basta contar por separados los que tienen $0, 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ aristas respectivamente, por tanto tenemos

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{0} + \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{1} + \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} + \dots + \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

□

Para terminar con esta sección enunciaremos el famoso teorema de Cayley, el cual nos da una manera de contar todos los árboles etiquetados con n vértices.

Teorema 2.2.2 (Cayley). *Hay n^{n-2} árboles con n vértices.*

Demostración. Sea T un árbol con n vértices etiquetados con los números $1, 2, \dots, n$ respectivamente, removamos el vértice colgante con la menor etiqueta digamos x_1 , y consideremos a su vértice adyacente v_1 , ahora de los $n-1$ restantes vértices, removamos nuevamente el de menor etiqueta, digamos x_2 y consideremos a su vértice adyacente v_2 , podemos repetir este proceso hasta que solo queden dos vértices en T , evidentemente el árbol T está unívocamente por la secuencia

$$v_1, v_2 \dots v_{n-2} \quad (1)$$

Y recíprocamente T determina de manera unívoca dicha secuencia. Consideremos ahora la secuencia

$$1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Removamos de (2) el primer número que no aparece en (1) digamos u_1 , removamos además v_1 de (1) y formemos la rama $\{u_1, v_1\}$ repitamos este proceso hasta agotar la secuencia (1). Por la construcción, a cada uno de los $n-2$ elementos de (1) le corresponde algún número en (2) formando así n^{n-2} tuplas, cada una de las cuales definen un árbol con etiquetas de n vértices. □

Capítulo 3

Sobre álgebras de Hopf de árboles

En el presente capítulo haremos un estudio detallado de las álgebras de hopf natural H_{NAP} , Connes-Kreimner H_{CK} y Calaque-Ebrahimi-Manchon H_{CEM} , posteriormente estudiaremos las relaciones de bicomódulo existentes entre estas y terminaremos estudiando las consecuencias y aplicaciones de dichas relaciones en el contexto de los caracteres de las álgebras de Hopf. Las \mathbb{K} -álgebras H_{NAP} , H_{CK} y H_{CEM} son álgebras de polinomios cuyas indeterminadas son árboles con raíz sin etiquetas. Por tal razón introduciremos la siguiente definición para fijar notación.

Definición 3.0.7. *Se define por $A[n]$ al conjunto formado por todos los árboles con raíz no planares que poseen n -vértices no etiquetados.*

Como ejemplo tenemos que $A[3]$ es el siguiente conjunto

$$A[3] = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} , \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Sea $\mathbb{A} = \bigcup_{n \geq 1} A[n]$, denotaremos por \mathbb{T} a la \mathbb{K} -álgebra conmutativa libremente generada por el conjunto \mathbb{A} , es decir

$$\mathbb{T} = \mathbb{K}[t : t \in \mathbb{A}]$$

Un elemento de \mathbb{T} es una suma finita de monomios de la forma $t_a = t_1 t_2 \dots t_k$. Aquí a es el bosque formado por los árboles no etiquetados t_1, t_2, \dots, t_k , para tal caso t_a es el monomio constituido por el producto de los árboles del bosque a . Denotaremos por \mathbb{T}_n al subespacio vectorial de \mathbb{T} generado por todos los monomios de la forma t_a , en donde a es un bosque que tiene n vértices. Convenimos en escribir $\mathbb{T}_0 = \mathbb{K}$. El álgebra de Connes-Kreimner es la

\mathbb{K} -álgebra conmutativa libremente generada por todos los árboles sin etiquetas esto es

$$H_{CK} = \mathbb{T} \quad (3.2)$$

Las \mathbb{K} -álgebras H_{NAP} y H_{CEM} vienen definidas como \mathbb{K} -álgebras de polinomios cuyas indeterminadas son elementos de \mathbb{T} , es decir son árboles sin etiquetas, excepto que hacemos la identificación $\bullet = 1$, mas formalmente

Definición 3.0.8. Las álgebras H_{NAP} y H_{CEM} están definidas como el álgebra cociente

$$H_{NAP} = H_{CEM} = \mathbb{T}/\langle 1 - \bullet \rangle \quad (3.3)$$

En donde $\langle 1 - \bullet \rangle$ es el ideal bilateral generado por el elemento $1 - \bullet$ en \mathbb{T} . Por simplicidad de notación $\mathbb{T}/\langle 1 - \bullet \rangle$ será interpretada como el álgebra de polinomios sobre \mathbb{K} cuyas indeterminadas son árboles sin etiquetas.

Es importante en este punto hacer la aclaratoria que a pesar que los elementos de H_{NAP} y H_{CEM} son clases de equivalencias, por comodidad de notación los escribiremos como los de H_{CK} excepto que \bullet es la unidad de H_{NAP} y H_{CEM} como álgebras. La siguiente figura ilustra lo que acabamos de comentar.

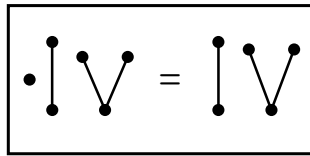


Figura 3.1: Unidad de H_{NAP} y H_{CEM}

3.1 Álgebra de Hopf natural H_{NAP}

El álgebra de Hopf natural H_{NAP} se construye a partir del operad conjuntístico NAP, ha sido ampliamente estudiada por muchos investigadores entre estos, Liendo y Mendez en ([4, 5, 19]) dan formulas para antípodas de H_{NAP} utilizando el concepto de especies y el operad NAP, nuestra intención es estudiar H_{NAP} haciendo uso de coloraciones admisibles sobre los lados de un árbol. Esta idea fue introducida en [5] usando isomorfismos naturales entre especies, en este trabajo presentaremos una versión simple de esta idea.

3.1.1 H_{NAP} como coálgebra

Definición 3.1.1. Sea T un árbol, una **coloración** de los lados de T es una aplicación $c: E(T) \rightarrow [k]$ que asigna a cada arista de T un número(color) del conjunto $[n]$. El **rango** de una coloración c es el subconjunto de colores de $[n]$ con el que fue coloreado el árbol T , lo denotaremos por $rg(c)$.

Denotaremos por $Col(T)$ al conjunto de todas las coloraciones sobre el árbol T y $Col_n(T)$ representará al conjunto de todas coloraciones de T cuyo rango está contenido en el conjunto $[n]$. Sea $c \in Col(T)$ y sea $i \in rg(T)$ denotaremos por $T_c(i)$ al bosque formado por todos los subárboles de T cuyos lados tienen color i , a su vez, denotaremos por $t_c(i)$ al monomio formado por el producto de todos los tipos de isomorfismos correspondientes a los árboles del bosque $T_c(i)$, esto es:

$$t_c(i) = \prod_{T' \in T_c(i)} t' \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1.1. Para el siguiente árbol coloreado con raíz

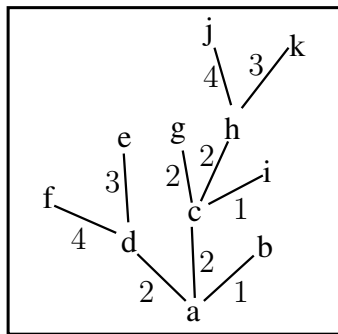


Figura 3.2: Árbol con raíz etiquetado.

Tenemos que

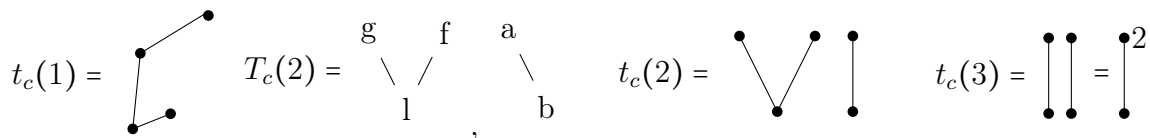


Figura 3.3: Subárboles $T_c(i)$.

Notemos además que para este caso $c \in Col_n(T)$ para $4 \leq n$

Observación 3.1.1. *Las coloraciones admisibles que utilizaremos en la construcción del coproducto de H_{NAP} serán denotadas con la letra e . Según los estudios presentados por Liendo en [4, 5] este tipo de coloraciones se obtienen como una versión equivalente al operad NAP, para entender esto razonamos de la manera siguiente:*

1. *Se selecciona un bosque $\{T_B\}_{B \in \pi}$, en donde cada $B \in \pi$ es el conjunto de vértices del correspondiente árbol T_B .*
2. *Se selecciona un árbol T' cuyos vértices sean los elementos de π*
3. *Finalmente el producto del operad NAP consiste en construir un árbol T usando la data 1 y 2 de la siguiente manera formamos una nueva arista entre las raíces T_{B_1} y T_{B_2} siempre que $\{B_1, B_2\}$ sea un lado de T'*

Las instrucciones 1,2 y 3 definen un único par (T, e) , en donde e es una bicoloración definida por asignar color 2 a todos los lados de cada T_B y color 1 a todos los lados de T' . Esta e es lo que definimos como bicoloración NAP-admisibles sobre T y esta descompone a T en el par $((T, e(2)), (T, e(1)))$. Si descomponemos a cada T_B con bicoloraciones NAP-admisibles y reetiquetamos de manera ascendente partiendo desde los lados de $T_e(1)$ obtendríamos una coloración NAP-admisibles de rango 3 y una única descomposición de T en tres bosques: $(T, e(3)), (T, e(2)), (T, e(1))$. Los colores 3 y 2 indican que hemos aplicado el producto del operad NAP dos veces.

La siguiente figura ilustra lo que acabamos de discutir, el azul representa el color uno, el rojo el color dos y el verde el color 3.

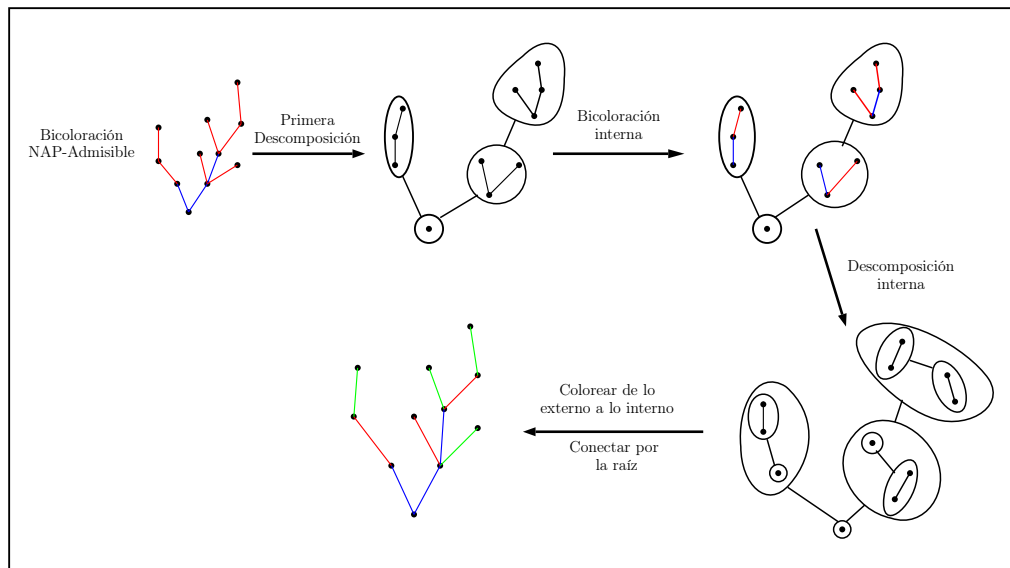


Figura 3.4: Transición de descomposiciones NAP a coloraciones NAP-admisibles.

Definición 3.1.2. Sea T un árbol con raíz r y sea e una coloración de los lados de T , diremos que e es una coloración NAP-admisibles si satisface:

1. e es débilmente creciente desde r hasta las hojas de t , esto es, si $l_1 \cdots l_n$ es un camino ordenado sobre el árbol T , entonces $e(l_{i-1}) \geq e(l_i)$.
2. Si $e^{-1}(1) = \emptyset$ entonces todos los lados de t tienen color dos. En caso contrario para cada $i \geq 2$ y para cada $T' \in T_e(i)$ existe al menos un lado de T incidente a la raíz de T' con color $i - 1$.

Ejemplo 3.1.2. El siguiente árbol muestra un ejemplo de una coloración NAP-admisibles.

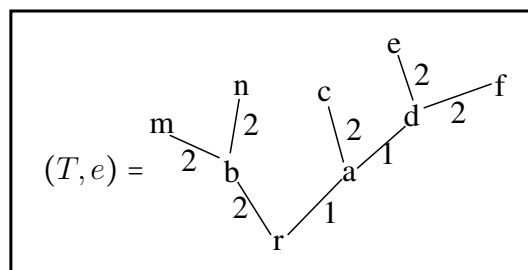


Figura 3.5: Coloración NAP-admisibles.

Denotaremos por $Adm(T)$ al conjunto de todas las coloraciones admisibles sobre el árbol T y por $Adm_n(T)$ al conjunto de las coloraciones admisibles cuyo rango está contenido

en el conjunto $[n]$. Es importante hacer notar que si e es una coloración admisible para la cual $e^{-1}(1) \neq \emptyset$, entonces el subbosque $T_e(1)$ es un único árbol que contiene a la raíz de T . El coproducto de H_{NAP} está definido por la descomposición natural que inducen las bicoloraciones NAP-admisibles sobre un árbol T . Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. H_{NAP} es una \mathbb{K} -coálgebra, la counidad es el morfismo $\varepsilon_{NAP}(t) := \delta_{\bullet, t}$ mientras que el coproducto está definido por la expresión

$$\Delta_{NAP}(t) = \sum_{e \in \text{Adm}_2(T)} t_e(2) \otimes t_e(1) \quad (3.5)$$

La suma anterior esta indexada sobre todas las bicoloraciones NAP-admisibles sobre un árbol T cuyo tipo de isomorfismo es t .

Antes de realizar la prueba de esta proposición es importante resaltar que la definición del coproducto que acabamos de hacer ha sido sobre los elementos de la base de H_{NAP} y a partir de allí extendemos multiplicativamente a todo H_{NAP} . Por otro lado si T fue coloreado solo con color uno, entonces $T_e(2) = \emptyset$ y en este caso $t_e(2) = \bullet$. De manera similar si T fue coloreado solo con color dos, entonces $t_e(1) = \bullet$. A continuación mostramos un ejemplo del coproducto para un árbol sencillo el color rojo representa a uno mientras que el azul a 2.

$$\Delta_{NAP}(t) = t \otimes \bullet + \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{|c} \bullet \\ / \ \backslash \\ \bullet \ \bullet \end{array} + \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{|c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes t$$

Figura 3.6: Coproducto del álgebra NAP

Demostración. Sea T un árbol con tipo de isomorfismo t , si aplicamos una bicoloración e a T y luego aplicamos otra bicoloración e_1 a $T_e(1)$ obtenemos una tricoloración NAP-admisible e' definida sobre los lados de T de la siguiente manera:

1. Sobre los lados de $T_e(1)$, $e' = e_1$.
2. Si l es un lado de $T_e(2)$, entonces $e'(l) = 3$

Claramente e' así definida es NAP-admisibile y la aplicación $(e, e_1) \mapsto e'$ es una biyección. Recíprocamente si e' es una tricoloración admisible sobre T y s representa el bosque formado por todos los lados de T que fueron coloreados con los colores 2 y 3 respectivamente, podemos definir una bicoloración NAP-admisibile e_2 sobre s , de la siguiente manera:

1. Si l es un lado de s es tal que $e'(l) = 2$, entonces $e_2(l) = 1$
2. Si l es un lado de s es tal que $e'(l) = 3$ entonces $e_2(l) = 2$

Por otro lado sea e la bicoloración NAP-admisibile de T definida de la siguiente manera:

1. Si $l \in T_{e'}(1)$ entonces $e(l) = 1$
2. Si $l \notin T_{e'}(1)$ entonces $e(l) = 2$

Con estas dos coloraciones así definidas la aplicación $e' \mapsto (e_2, e)$ resulta ser una biyección. Los razonamientos que acabamos de exponer nos traen como consecuencia los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
id \otimes \Delta_{NAP}(\Delta_{NAP}(t)) &= \sum_{e \in Adm_2(T)} t_e(2) \otimes \Delta_{NAP}(t_e(1)) \\
&= \sum_{e \in Adm_2(T)} t_e(2) \otimes \sum_{e_1 \in Adm_2(t_e(1))} (t_e(1))_{e_1}(2) \otimes (t_e(1))_{e_1}(1) \\
&= \sum_{(e, e_1)} t_e(2) \otimes (t_e(1))_{e_1}(2) \otimes (t_e(1))_{e_1}(1) \\
&= \sum_{e' \in Adm_3(T)} t_{e'}(3) \otimes t_{e'}(2) \otimes t_{e'}(1) \\
&= \sum_{(e_2, e)} t_{e_2}(2) \otimes t_{e_2}(1) \otimes t_e(1) \\
&= \sum_{e \in Adm_2(T)} \Delta_{NAP}(t_e(2)) \otimes t_e(1) \\
&= \Delta_{NAP} \otimes id(\Delta_{NAP}(t))
\end{aligned}$$

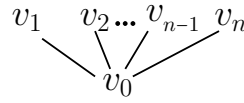
□

Definición 3.1.3. Sea T un árbol cualquiera,

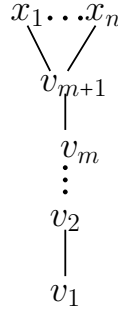
1. Diremos que T es un orden lineal con n lados si es de la forma

$$\begin{array}{c}
v_{n+1} \\
| \\
v_n \\
\vdots \\
v_2 \\
| \\
v_1
\end{array}$$

2. Diremos que T es una corola con n lados si es de la forma



3. Diremos que T es una palmera con parte lineal de m lados y corola de n lados si es de la forma



Denotaremos por l_n al tipo de isomorfismo de un orden lineal de n lados, por C_n al tipo de isomorfismo de una corola con n lados y por $P_{m,n}$ al tipo de isomorfismo de una palmera con parte lineal l_m y corola C_n .

3.1.2 Fórmulas de Δ_{NAP} para ordenes lineales corolas y palmeras

Estudiemos formulas del coproducto de H_{NAP} para los árboles de la definición anterior. Consideremos un orden lineal l_n , para obtener una fórmula del coproducto para l_n razonamos como sigue: En toda bicoloración Nap-admisibles, los lados con color uno deben estar por debajo de los lados con color dos, por tanto solo existe una bicoloración de l_n que tenga k lados de color uno y $n - k$ lados de color dos, los lados de color uno forman un orden lineal l_k , mientras que los de color dos forman un orden lineal l_{n-k} , este hecho lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. Denotemos por l_n un orden lineal de n lados, entonces

$$\Delta_{NAP}(l_n) = \sum_{k+j=n} l_k \otimes l_j \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.1.3. A continuación mostramos el desarrollo del coproducto para l_3

$$\Delta_{NAP}(l_3) = l_3 \otimes \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes l_3$$

Consideremos una corola con n lados C_n y sea $k \geq 0$, contar todas las bicoloraciones de C_n con k lados de color uno, es equivalente a escoger subconjuntos de tamaño k a partir de un conjunto con n elementos, por tanto hay exactamente $\binom{n}{k}$ bicoloraciones de C_n que tienen k lados con color uno, estas bicoloraciones a su vez tienen $n - k$ lados de color 2, así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.3. *Denotemos por C_n una corola con n lados, entonces tenemos que,*

$$\Delta_{NAP}(C_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_k \otimes C_{n-k} \quad (3.7)$$

Estudiemos ahora una fórmula para el coproducto aplicado a palmeras. Consideremos una palmera $P_{m,n}$, dado que las bicoloraciones son admisibles, podemos tener dos posibilidades, la primera cuando el último lado correspondiente al orden lineal tenga color uno y la segunda cuando este lado tenga color dos. Para el primer caso, dado que la bicoloración es admisible, el orden lineal tendrá color uno y la corola puede ser bicolorada como ya se estudió en la **proposición 3.1.3**, de manera que el subárbol de color uno es un orden lineal, mientras que el de color dos es una corola. Para el segundo caso, dado que la bicoloración es admisible, la corola solo puede tener color dos, mientras que el orden lineal puede ser coloreado como ya se estudió en la **proposición 3.1.2**, por lo que el subárbol coloreado con color dos es una palmera, mientras que el de color uno es un orden lineal. Lo que acabamos de exponer nos permite enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4. *Sea $P_{m,n}$ la palmera cuyo orden lineal tiene m lados y cuya corola tiene n lados, entonces*

$$\Delta_{NAP}(P_{m,n}) = \sum_{k=0}^m P_{k,n} \otimes l_{m-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} C_k \otimes P_{m,n-k} \quad (3.8)$$

Las formulas de coproducto que acabamos de estudiar nos permiten construir tres sub-biálgebras contenidas en H_{NAP} , estas son: \mathbb{L} la cual representa la subbiálgebra generada por los ordenes lineales, \mathbb{C} la cual es generada por las corolas y \mathbb{P} que es generada por las palmeras. Notemos que \mathbb{L} y \mathbb{C} están contenidas en \mathbb{P} , esto puede ser generalizado de la siguiente manera: Todas las subcoálgebras de H_{NAP} son espacios vectoriales generados por cierta familia de tipos de isomorfismos de árboles que son cerradas por coloraciones admisibles. Esto es, si F es una familia de subárboles entonces para cada T en F , y para cada coloración NAP-admisibles, se tiene que $T_e(i)$ es un bosque de la familia F para todo i en el rango de e .

3.1.3 Antípoda para H_{NAP}

Sea $E[n]$ el conjunto formado por todos los bosques que tienen n lados y sea \mathbb{E}_n el espacio vectorial generado por $E[n]$. Desde la definición al principio del capítulo se sigue que H_{NAP} como espacio vectorial es la suma directa de los subespacios \mathbb{E}_n , es decir,

$$H_{NAP} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{E}_n \quad (3.9)$$

Más aún de la **ecuación 3.1.1** se sigue que T es un árbol con n lados con tipo de isomorfismo t entonces

$$\Delta_{NAP}(t) \in \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}_{n-k} \quad (3.10)$$

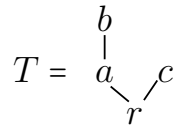
De manera que H_{NAP} es una \mathbb{K} -biálgebra graduada y conexa, esta graduación viene dada por el número de lados del árbol. En virtud del **teorema 1.4.1** tenemos que H_{NAP} posee antípoda y por lo tanto es una \mathbb{K} -álgebra de Hopf. El siguiente teorema nos da una fórmula para la antípoda de H_{NAP} .

Teorema 3.1.1. *La antípoda para la álgebra natural H_{NAP} viene dada de la siguiente manera: $S(\bullet) = \bullet$ y si t tiene por lo menos un lado entonces,*

$$S_{NAP}(t) = \sum_{\substack{c \in \text{Adm}(T) \\ e^{-1}(1) \neq \emptyset}} \prod_{i \in \text{Rg}(e)} (-1)^{|T_e(i)|} t_e(i) \quad (3.11)$$

En la suma anterior el rango de e varia desde 1 hasta el número de lados del árbol T y además $|T_e(i)|$ es el número de elementos que tiene el bosque $T_e(i)$.

Ejemplo 3.1.4. *Consideremos el siguiente árbol*



A continuación mostramos la antípoda aplicada a t ilustrando todas las coloraciones NAP-admisibles. El azul representa el color uno, el rojo el color dos y el verde el color tres.

Demostración. Probaremos que $S_{NAP} * id(t) = 0$ para cualquier árbol que tenga por lo menos

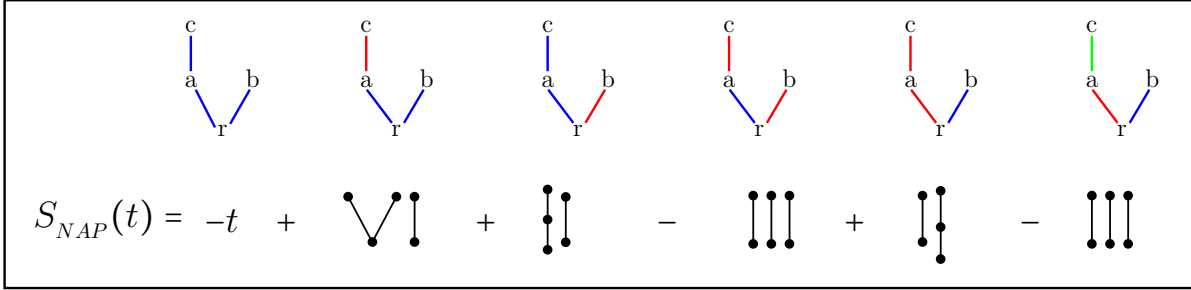


Figura 3.7: Ejemplo de antípoda del álgebra NAP

un lado.

$$\begin{aligned}
S_{NAP} * id(t) &= \sum_{e \in Adm_2(T)} S_{NAP}(t_e(2))t_e(1) \\
&= S_{NAP}(t) + \sum_{\substack{e \in Adm_2(T) \\ e^{-1}(1) \neq \emptyset}} S_{NAP}(t_e(2))t_e(1) \\
&= S_{NAP}(t) + \sum_{\substack{e \in Adm_2(T) \\ e^{-1}(1) \neq \emptyset \\ T_e(2) = \{T_j\}_{j=1}^k}} \prod_{j=1}^k S_{NAP}(t_j)t_e(1) \\
&= S_{NAP}(t) + \sum_{\substack{e \in Adm_2(T) \\ e^{-1}(1) \neq \emptyset \\ T_e(2) = \{T_j\}_{j=1}^k}} \left(\sum_{\substack{e_j \in Adm(T_j) \\ e_j^{-1}(1) \neq \emptyset \\ 1 \leq j \leq k}} \prod_{j=1}^k \prod_{i \in \text{rg}(e_j)} (-1)^{|(T_j)_{e_j}(i)|} (t_j)_{e_j}(i) \right) t_e(1)
\end{aligned}$$

Sea e' la coloración admisible definida sobre los lados de T de la siguiente manera:

- $e'(l) = 1$ si $l \in T_e(1)$
- $e'(l) = e_j(l) + 1$ si $l \in T_j$

La aplicación $(e, \{e_j\}_{j=1}^k) \mapsto e'$ es una biyección y así de la última igualdad de la equación anterior sigue que

$$S_{NAP} * id(t) = S_{NAP}(t) - \sum_{\substack{e' \in Adm(T) \\ (e')^{-1}(1) \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in \text{rg}(e')} (-1)^{|T_{e'}(i)|} t_{e'}(i) \right) (-t_{e'}(1)) = 0$$

□

3.1.4 Fórmulas de S_{NAP} para ordenes lineales corolas y palmeras

Estudiemos fórmulas de antípoda para ordenes lineales, corolas y palmeras. Sea l_n un orden lineal con n lados, notemos que en las coloraciones admisibles de l_n , si $i > j$ entonces el lado

de color j tiene menor altura que el lado de color i , por tanto en las coloraciones admisibles de l_n son aquellas donde el color aumenta débilmente desde la raíz hasta la única hoja de l_n , el razonamiento que acabamos de presentares equivalente a tomar una descomposición fuerte del orden lineal l_n , así tenemos

Proposición 3.1.5. *Sea l_n un orden lineal con n lados, entonces*

$$S_{NAP}(l_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_i \geq 1}} (-1)^k l_{n_1} l_{n_2} \dots l_{n_k} \quad (3.12)$$

Consideremos ahora una corola con n lados C_n notemos que hacer una k coloración admisible de C_n es equivalente al problema de formar k subconjuntos a partir de un conjunto de tamaño n , ahora bien hay exactamente $\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ maneras diferentes de escoger tales subconjuntos, este análisis nos permite establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.1.6. *Si C_n representa una corola con n lados, entonces*

$$S_{NAP}(C_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_i \geq 1}} C_{n_1} C_{n_2} \dots C_{n_k} \quad (3.13)$$

Para el caso de una palmera $P_{m,n}$, podemos asumir que una corolación cualquiera de $P_{m,n}$ es la unión de dos coloraciones: una Para el orden lineal l_m y otra para la corola C_n , además debemos considerar dos casos; primero supongamos que el color del m -ésimo lado de la parte lineal no aparece repetido en un lado de la corola, de esta manera los únicos bosques que resultan de aplicar este tipo de coloración son ordenes lineales y corolas, ahora bien para calcular cuantos ordenes lineales aparecen se razona de manera análoga a como se hizo en la **proposición 3.1.5**, a su vez el análisis para calcular cuantas corolas aparecen es similar al realizado en la **proposición 3.1.6**. Por lo tanto la suma que corresponde a este tipo de coloraciones es

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=m \\ n_1+\dots+n_j=n}} (-1)^{k+j} \binom{n}{n_1, \dots, n_j} l_{m_1} \dots l_{m_k} C_{n_1} \dots C_{n_j} \quad (3.14)$$

Supongamos ahora que el color del lado m en el orden lineal, se repite en algún lado de la corola, en este caso aparecen ordenes lineales, corolas y una única palmera que contiene el lado m -ésimo del orden lineal. Los ordenes lineales y las corolas se cuentan como se hizo anteriormente, con la única diferencia que en este caso el orden lineal l_s y la corola C_r que poseen el mismo color constituyen la palmera $P_{s,r}$, por lo tanto la suma que corresponde a

este tipo de coloraciones es

$$\sum_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq r \leq n}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m-s \\ 1 \leq j \leq n-r}} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = m-s \\ n_1 + \dots + n_j = n-r}} (-1)^{k+j+1} \binom{n}{n_1, \dots, n_j, r} l_{m_1} \dots l_{m_k} P_{s,r} C_{n_1} \dots C_{n_j} \quad (3.15)$$

Notemos que haciendo $r = 0$ en la [3.15](#) se obtiene la [3.14](#). Finalmente tenemos la proposición

Proposición 3.1.7. *Sea $P_{m,n}$ con parte lineal l_m y corola C_n , entonces*

$$S_{NAP}(P_{m,n}) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 0 \leq r \leq n}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m-s \\ 1 \leq j \leq n-r}} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = m-s \\ n_1 + \dots + n_j = n-r}} (-1)^{k+j+1} \binom{n}{n_1, \dots, n_j, r} l_{m_1} \dots l_{m_k} P_{s,r} C_{n_1} \dots C_{n_j} \quad (3.16)$$

Unos últimos comentarios antes de cerrar con esta sección. Las formulas de antípoda que acabamos de mostrar nos permiten obtener formulas de inversión en las subálgebras de Hopf correspondientes a los ordenes lineales y corolas. Para esto razonemos de la siguiente manera: Sea \mathbb{L} la subálgebra de H_{NAP} generada por el conjunto de todos los ordenes lineales y sea A una \mathbb{K} -álgebra conmutativa con unidad, es claro que el conjunto $Hom_{alg}(\mathbb{L}, A)$ forma un grupo con respecto al producto convolución. Sea $A[[x]]$ el álgebra de series formales ordinarias con coeficientes en A . Del [ejemplo 1.2.5](#) se sigue que la aplicación $\varphi : Hom_{alg}(\mathbb{L}, A) \rightarrow A[[X]]$ definida por $\varphi(f) := \sum_{n \geq 0} f(l_n)x^n$ es una aplicación biyectiva, mas aún dado que

$$\begin{aligned} \varphi(f * g) &= \sum_{n \geq 0} f * g(l_n)x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k+j=n} f(l_k)g(l_j)x^n \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} f(l_n)x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} g(l_n)x^n \right) \\ &= \varphi(f)\varphi(g) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tenemos que φ es un isomorfismo de grupos y en consecuencia la antípoda permite hallar la inversa de series formales con coeficientes en \mathbb{L} de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} S(l_n)x^n \sum_{n \geq 0} l_n x^n &= \varphi(S_{NAP})\varphi(id) \\ &= \varphi(S_{NAP} * id) \\ &= \sum_{n \geq 0} S * id(l_n)x^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Razonando de manera análoga si \mathbb{C} representa la subálgebra de H_{NAP} generada por las corolas y esta vez $A[[X]]$ denota el conjunto de todas las series tipo exponencial con coeficientes en A , entonces la aplicación $\varphi : Hom_{alg}(\mathbb{C}, A) \rightarrow A[[x]]$ definida por $\varphi(f) := \sum_{n \geq 0} f(C_n) \frac{x^n}{n!}$ es claramente una aplicación biyectiva. Por otro lado si $f, g \in Hom_{alg}(\mathbb{C}, A)$ entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(f * g) &= \sum_{n \geq 0} f * g(C_n) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k+j=n} \binom{n}{k} f(C_k) g(C_j) \frac{x^n}{n!} \\
&= \left(\sum_{n \geq 0} f(C_n) \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} g(C_n) \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \varphi(f) \varphi(g)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De manera que φ es un isomorfismo de grupos y en consecuencia tenemos que la antípoda permite obtener inversas de series exponenciales de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} S(C_n) \frac{x^n}{n!} \sum_{n \geq 0} C_n \frac{x^n}{n!} &= \varphi(S_{NAP}) \varphi(id) \\
&= \varphi(S_{NAP} * id) \\
&= \sum_{n \geq 0} S * id(C_n) \frac{x^n}{n!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.2 Álgebra de Hopf de Connes-Kreimmer H_{CK}

La álgebra de Connes-Kreimer fue introducida por Connes y Kreimer [3] cuando estudiaban las renormalizaciones de perturbaciones en campos cuánticos, sin embargo esta álgebra ya había sido estudiada previamente por Butcher [7, 8, 9] cuando estudiaba las operaciones entre los métodos numéricos de Runge-Kutta en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta sección haremos un estudio detallado y conciso de esta álgebra de Hopf. Antes de introducir la estructura de \mathbb{K} -coálgebra de H_{CK} es necesario dar algunas definiciones.

3.2.1 H_{CK} como coálgebra

Definición 3.2.1. Sea T un árbol con raíz con tipo de isomorfismo t , un **corte** c sobre T es un subconjunto de lados de t . Denotaremos por $W^c(t)$ al bosque que resulta de suprimirle a T

los lados que pertenecen a c , según la operación borrado de aristas definida en la **subsección 2.1.2** en el capítulo dos.

Definición 3.2.2. Sea T un árbol con raíz r y tipo de isomorfismo t , sea c un corte sobre T , el **tronco** de t es el árbol de $W^c(t)$ que tiene como raíz a r , lo denotaremos por $Tr^c(t)$. Las ramas de t es el bosque es el bosque $W^c(t) \setminus Tr^c(t)$.

Ejemplo 3.2.1. En la siguiente figura se muestra un corte sobre un árbol así como también la rama, el tronco y el bosque $W^c(t)$.

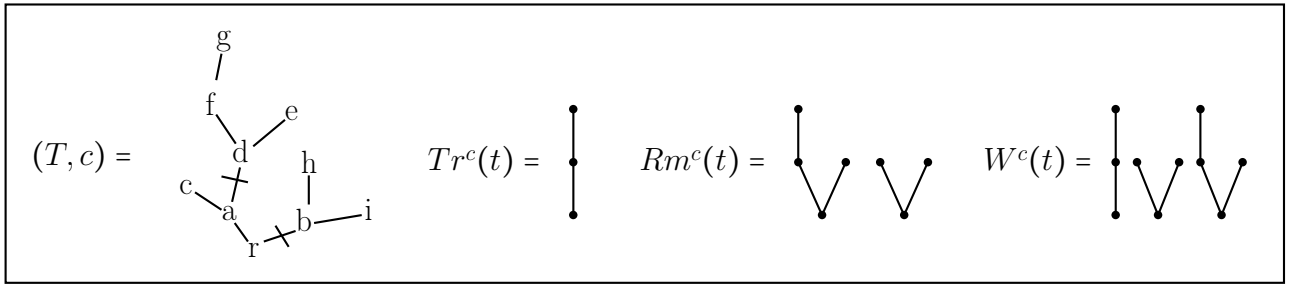


Figura 3.8: Corte admisible sobre un árbol

Definición 3.2.3. Un **corte admisible** c sobre un árbol T , es uno tal que cada camino orientado sobre el árbol t tiene a lo sumo un elemento de c . Denotaremos por $Admc(T)$ al conjunto formado por todos los cortes admisibles del árbol T .

El corte del ejemplo anterior es un corte admisible. La estructura de \mathbb{K} -coálgebra de H_{CK} viene inducida por todos los cortes admisibles sobre un árbol T . Este hecho lo establecemos en la siguiente proposición

Teorema 3.2.1. H_{CK} tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, la counidad es el morfismo definido como $\varepsilon_{CK}(t) = \delta_{\bullet, t}$, mientras que el coproducto es el morfismo definido por la siguiente expresión

$$\Delta_{CK}(t) := t \otimes 1 + \sum_{c \in Admc(T)} Rm^c(t) \otimes Tr^c(t) \quad (3.19)$$

Es importante aclarar que Δ_{CK} ha sido definida sobre los elementos de la base de H_{CK} y desde allí se extiende multiplicativamente a todo H_{CK} .

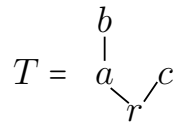
Demostración. Para la counidad ε_{CK} no hay nada que probar. Probemos que Δ_{CK} satisface la propiedad coasociativa; sea T un árbol con tipo de isomorfismo t notemos que una vez

realizado un corte admisible sobre t hay dos posibles opciones: Podemos realizar todos los cortes admisibles sobre las ramas $Rm^c(t)$ o bien sobre el tronco $Tr^c(t)$, sin embargo la familia de bosques que se obtiene en ambos casos es exactamente la misma, por lo tanto tenemos la propiedad coasociativa, formalmente

$$\begin{aligned}
\Delta_{CK} \otimes id(\Delta_{CK}(t)) &= \Delta_{CK}(t) \otimes 1 + \Delta_{CK}(1) \otimes t + \sum_{c \in Admc(T)} \Delta_{CK}(Rm^c(t)) \otimes Tr^c(t) \\
&= t \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes t \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes t \\
&\quad + \sum_{c \in Admc(T)} \left(Rm^c(t) \otimes Tr^c(t) \otimes 1 + (Rm^c(t) \otimes 1 + 1 \otimes Rm^c(t)) \otimes Tr^c(t) \right) \\
&\quad + \sum_{c \in Admc(T)} \left(\sum_{c' \in Admc(Rm^c(T))} Rm^{c'}(Rm^c(t)) \otimes Tr^{c'}(Rm^c(t)) \right) \otimes Tr^c(t) \\
&= t \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes t \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes t + \\
&\quad + \sum_{c \in Admc(T)} \left(Rm^c(t) \otimes Tr^c(t) \otimes 1 + (Rm^c(t) \otimes 1 + 1 \otimes Rm^c(t)) \otimes Tr^c(t) \right) \\
&\quad + \sum_{c \in Admc(T)} Rm^c(t) \otimes \left(\sum_{c'' \in Admc(Tr^c(T))} Rm^{c''}(Tr^c(t)) \otimes Tr^{c''}(Tr^c(t)) \right) \\
&= t \otimes \Delta_{CK}(1) + 1 \otimes \Delta_{CK}(t) + \sum_{c \in Admc(T)} Rm^c(t) \otimes \Delta_{CK}(Tr^c(t)) \\
&= id \otimes \Delta_{CK}(\Delta_{CK}(t))
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.2. Consideremos el siguiente árbol



A continuación mostramos el cálculo del coproducto a este árbol para cada corte admisible de T . El rojo representa el lado al que se le está aplicando el corte.

De modo que H_{CK} es una \mathbb{K} -coálgebra, como hemos definido Δ_{CK} multiplicativamente sobre todos los elementos de H_{CK} , tenemos que H_{CK} es una álgebra.

3.2.2 Fórmulas de Δ_{CK} para ordenes lineales corolas y palmeras

Nuestro siguiente paso es estudiar fórmulas del coproducto Δ_{CK} para ordenes lineales, corolas y palmeras.

$$\Delta_{CK}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \bullet \otimes \vee + \lrcorner \otimes \lrcorner + \bullet \otimes \lrcorner + \bullet \otimes \lrcorner + \bullet \otimes \bullet$$

Figura 3.9: Ejemplo del coproducto para el álgebra CK

Sea l_n un orden lineal, dado que los cortes son admisibles, cada corte solo puede tener un único elemento, además si el corte se realiza en el lado k entonces tenemos que $Tr^c(t) = l_{k-1}$ y $Rm^c(t) = l_{n-k}$, hemos probado la siguiente proposición,

Proposición 3.2.1. *Sea l_n un orden lineal con n lados, entonces*

$$\Delta_{CK}(l_n) = l_n \otimes 1 + 1 \otimes l_n + \sum_{k=1}^n l_{n-k} \otimes l_{k-1} \quad (3.20)$$

Consideremos ahora C_n , una corola con n -lados, dado que todos los vértices de C_n tienen la misma altura, cualquier corte en C_n es admisible, hay exactamente $\binom{n}{k}$ cortes diferentes de tamaño k , para cada uno de estos el tronco siempre es C_{n-k} , mientras que las ramas \bullet^k , por último si queremos obtener todos los cortes admisibles basta variar k desde cero hasta n , el argumento que acabamos de exponer nos permite enunciar la siguiente proposición

Proposición 3.2.2. *Sea C_n una corola con n lados, entonces,*

$$\Delta_{CK}(C_n) = C_n \otimes 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bullet^k \otimes C_{n-k} \quad (3.21)$$

Sea $P_{m,n}$ una palmera con parte lineal de m lados y corola de n lados, sea c un corte admisible sobre $P_{m,n}$, notemos que si c tiene algún lado en la parte lineal entonces no puede tener lados en la corola, así si suponemos que el corte fue realizado sobre el lado k de la parte lineal entonces el tronco es l_{k-1} , mientras que la palmera $P_{m-k,n}$ por lo tanto queda expresado como,

$$P_{m,n} \otimes 1 + \sum_{k=1}^m P_{m-k,n} \otimes l_{k-1} \quad (3.22)$$

De manera similar, si se realizan cortes en la corola, entonces no pueden haber cortes en la parte lineal, en este caso si realizamos un corte de tamaño k , entonces el tronco es la

palmera $P_{m,n-k}$ mientras que las ramas es el bosque \bullet^k , de este modo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bullet^k \otimes P_{m,n-k} \quad (3.23)$$

De las *ecuaciones* [3.22](#) y [3.23](#) tenemos la siguiente proposición,

Proposición 3.2.3. *Sea $P_{m,n}$ una palmera con parte lineal l_m y corola C_n , entonces*

$$\Delta_{CK}(P_{m,n}) = P_{m,n} \otimes 1 + \sum_{k=1}^m P_{m-k,n} \otimes l_{k-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bullet^k \otimes P_{m,n-k} \quad (3.24)$$

Las fórmulas de coproducto que acabamos de estudiar nos permiten construir tres sub-biálgebras contenidas en H_{CK} , estas son: \mathbb{L} la cual representa la sub-biálgebra generada por los ordenes lineales, \mathbb{C} la cual es generada por las corolas y \mathbb{P} que es generada por las palmeras. Notemos que \mathbb{L} y \mathbb{C} están contenidas en \mathbb{P} , esto puede ser generalizado de la siguiente manera: Todas las subcoálgebras de H_{CK} son espacios vectoriales generados por cierta familia de tipos de isomorfismos de árboles que son cerradas por cortes admisibles.

3.2.3 Antípoda para H_{CK}

Desde la definición al principio del capítulo se sigue que H_{CK} como espacio vectorial es la suma directa de los subespacios \mathbb{T}_n , es decir,

$$H_{CK} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{T}_n$$

Más aún del *teorema* [3.2.1](#) se sigue que

$$\Delta_{CK}(t) \in \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{T}_k \otimes \mathbb{T}_{n-k}$$

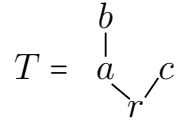
Por lo tanto H_{CK} , una biálgebra graduada y conexa. Aquí la graduación viene dada por el número de vértices. Así en virtud del *teorema* [1.4.1](#) posee antípoda y por lo tanto tiene estructura de álgebra de Hopf. En la siguiente proposición damos una fórmula para la antípoda de H_{CK} .

Proposición 3.2.4. *La antípoda para H_{CK} está dada por la siguiente expresión*

$$S_{CK}(t) := \sum_c (-1)^{|c|+1} W^c(t) \quad (3.25)$$

La suma de arriba está indexada sobre todos los cortes c del árbol T y $|c|$ es número de lados de c .

Ejemplo 3.2.3. Consideremos el siguiente árbol



A continuación mostramos el cálculo de la antípoda a este árbol ilustrando todos los cortes posibles. El rojo representa el lado al que se le está aplicando el corte.

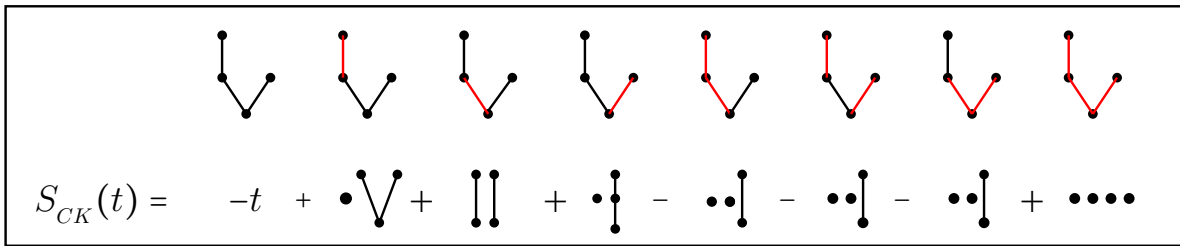


Figura 3.10: Ejemplo de antípoda para el álgebra CK

Demostración. Probaremos que $S * id(t) = 0$ para cualquier árbol con al menos un lado.

$$\begin{aligned} S_{CK} * id(t) &= S_{CK}(t) + t + \sum_{c \in Admc(T)} S_{CK}(Rm^c(t))Tr^c(t) \text{ ahora si } Rm^c(t) = \prod_{j=1}^{|c|} t_j \\ &= S_{CK}(t) + t + \sum_{c \in Admc(T)} \left(\prod_{j=1}^{|c|} \sum_{c_j} (-1)^{|c_j|+1} W^{c_j}(t_j) \right) Tr^c(t) \\ &= S_{CK}(t) + t + \sum_{c \in Admc(T)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq |c| \\ c_j}} (-1)^{\sum_{j=1}^{|c|} |c_j| + |c|} \prod_{j=1}^{|c|} W^{c_j}(t_j) Tr^c(t) \end{aligned}$$

Por otro lado si $c' = \left(\bigcup_{j=1}^{|c|} c_j \right) \cup c$ entonces c' es no vacío y

$$S_{CK} * id(t) = S_{CK}(t) + t - \sum_{c' \neq \emptyset} (-1)^{|c'|+1} W^{c'}(t) = S_{CK}(t) + t - S_{CK}(t) - t = 0$$

□

3.2.4 Fórmulas de S_{CK} para ordenes lineales corolas y palmeras

De manera análoga a como hicimos con la álgebra H_{NAP} , estudiemos fórmulas de la antípoda para ordenes lineales, corolas y palmeras. Sean l_n un orden lineal y $c = \{j_1, \dots, j_k\}$ un corte cualquiera sobre l_n , aquí j_1 representa el lado de menor altura y j_k el lado de mayor altura. Cuando se corta el lado j_1 a l_n se obtienen dos ordenes lineales l_{j_1-1} y l_{n-j_1} , cuando se corta el lado j_2 a l_{n-j_1} se obtienen los ordenes lineales $l_{j_2-j_1-1}$ y l_{n-j_2} . Continuando con este razonamiento inductivo hasta el paso k obtenemos que los últimos dos términos del bosque $W^c(t)$ son $l_{j_k-j_{k-1}-1}$ y l_{n-j_k} . Por otro lado si el corte es vacío se obtiene l_n . Los razonamientos que acabamos de exponer nos permiten formular la siguiente proposición

Proposición 3.2.5. *Sea l_n un orden lineal, entonces*

$$S_{CK}(l_n) = -l_n + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{k+1} l_{j_1} l_{j_2-j_1-1} \dots l_{j_k-j_{k-1}-1} l_{n-j_k} \quad (3.26)$$

Observemos que esta formula se puede escribir usando descomposiciones fuertes de un entero positivo, de la siguiente manera: Sea n_1 el número de vértices que están por debajo del corte j_1 , para cada $2 \leq i \leq k$ sea n_i el número de vértices que se encuentran entre los cortes j_i y j_{i-1} y finalmente sea n_{k+1} el número de vértices que están por encima del corte j_k , entonces naturalmente la tupla $(n_1, \dots, n_k, n_{k+1})$ es una $k+1$ -descomposición fuerte del entero positivo $n+1$. Esto se debe a que $n_1 = j_1 + 1$, $n_i = j_i - j_{i-1}$ y $n_{k+1} = n - j_k + 1$. Aquí el corte vacío se corresponde con la descomposición trivial $n+1$. Finalmente la formula de la antípoda se reescribe como

$$\sum_{r=1}^{n+1} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n+1} (-1)^r \prod_{i=1}^r l_{n_i-1}$$

Consideremos ahora una corola C_n y sea c un corte admisible sobre C_n , como todos los vértices de C_n están a la misma altura, c puede tener de 0 a n elementos, si c es vacío, entonces $W^c(t) = C_n$, ahora bien si el corte c tiene k elementos entonces $W^c(t) = \bullet^k C_{n-k}$, por último notemos que existen $\binom{n}{k}$ cortes sobre t con k elementos. Los argumentos que acabamos de exponer nos permiten establecer la siguiente proposición

Proposición 3.2.6. *Sea C_n una corola, entonces*

$$S_{CK}(C_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \bullet^k C_{n-k} \quad (3.27)$$

Para la palmera $P_{m,n}$ tenemos dos casos. Si el último lado de la parte lineal forma parte del corte entonces se obtienen solo ordenes lineales y corolas. En la parte lineal resultan

ordenes lineales los cuales vienen dados según la **proposición 3.2.5**, a su vez las corolas que se obtienen son el resultado de los cortes realizados a la corola de la palmera y están determinadas según la **proposición 3.2.6**. Por lo tanto los sumandos de la antípoda para este caso quedan expresados como

$$\sum_{k=1}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k = m} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+k+1} \binom{n}{i} l_{j_1} l_{j_2 - j_1 - 1} \dots l_{j_m - j_{k-1} - 1} \bullet^i C_{n-i} \quad (3.28)$$

Si el último lado de la parte lineal no forma parte del corte entonces se obtienen ordenes lineales y palmeras. Si suponemos que $k \neq m$ es el último lado del orden lineal que forma parte del corte, entonces los ordenes lineales que se obtienen vienen determinados por cortes realizados al orden lineal l_{k-1} de acuerdo a la **proposición 3.2.5**. Las palmeras resultantes tienen parte lineal l_{m-k} y su parte corola viene determinada por los cortes realizados a la corola C_n según la **proposición 3.2.6**. Los sumandos de la antípoda para este caso quedan expresados como

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+k+1} \binom{n}{i} l_{j_1} l_{j_2 - j_1 - 1} \dots l_{j_k - j_{k-1} - 1} \bullet^i P_{m-j_k, n-i} \quad (3.29)$$

Notemos que si $j_k = m$, la **ecuación 3.29** se reduce a la **ecuación 3.28**, por último si el corte aplicado es vacío se obtiene simplemente $P_{m,n}$. La siguiente proposición formaliza los razonamientos que acabamos de exponer.

Proposición 3.2.7. *Si $P_{m,n}$ representa una palmera con parte lineal y corola de m y n lados respectivamente, entonces*

$$S_{CK}(P_{m,n}) = \sum_{\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq [m]} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+k+1} \binom{n}{i} l_{j_1} l_{j_2 - j_1 - 1} \dots l_{j_k - j_{k-1} - 1} \bullet^i P_{m-j_k, n-i} \quad (3.30)$$

3.2.5 Operadores B_- , B_+ y la propiedad universal

Antes de cerrar esta sección es necesario abordar la **propiedad universal** de H_{CK} la cual es importante en la categoría de las álgebras. Dado un bosque $s = t_1 t_2 \dots t_n$, podemos construir un árbol t insertando cada t_1, \dots, t_n a una nueva raíz en común, mas formalmente,

Definición 3.2.4. *Sea $s = t_1 t_2 \dots t_n$ un bosque, el operador $B_+ : H_{CK} \rightarrow H_{NAP}$, está definido por enviar al bosque s en un árbol t que se obtiene como el resultado de conectar la raíz de cada árbol t_i a un nuevo vértice que se comporta como la raíz de t . Esto es,*

$$B_+(t_1 t_2 \dots t_n) := \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n \\ \diagdown \quad \diagup \quad \dots \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad (3.31)$$

Si el bosque es vacío entonces $B_+(1) = \bullet$. Denotaremos por $[s]$ a la imagen del bosque s a través de B_+ . El operador insertar por la raíz B_+ es claramente sobreyectivo, sin embargo no es multiplicativo, este último hecho es inmediato de la definición. En la siguiente proposición, establecemos una de las propiedades más importantes del operador B_+ .

Proposición 3.2.8. *Sea $s = t_1 \cdots t_n$ un bosque, el operador B_+ satisface la siguiente ecuación*

$$(\Delta_{CK} \circ B_+)(s) = B_+(s) \otimes 1 + ((id \otimes B_+) \circ \Delta_{CK})(s) \quad (3.32)$$

Demostración. Un corte c sobre un árbol T se dice que es total si este es el resultado de arrancar completamente el árbol T desde el suelo. Para este caso $Rm^c(t) = t$ y $Tr^c(t) = 1$. $\overline{Admc}(T)$ es el conjunto formado por todos los cortes admisibles y el corte total entonces

$$\Delta_{CK}(t) = \sum_{c \in \overline{Admc}(T)} Rm^c(t) \otimes Tr^c(t)$$

Sea $c \in Admc([s])$ y c_i la restricción de c a T_i . La aplicación que envía a c en la n -tupla (c_1, \dots, c_n) es una biyección entre $Admc([s])$ y $\prod_{i=1}^n \overline{Admc}(T_i)$. Aquí c_i es un corte completo de T_i si y solo si el lado que conecta la raíz de T con la raíz de T_i pertenece a c . Más aún:

$$Rm^c([s]) = Rm^{c_1}(t_1) \cdots Rm^{c_n}(t_n) \quad \text{y} \quad Tr^c([s]) = B_+(Tr^{c_1}(t_1) \cdots Tr^{c_n}(t_n))$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Delta_{CK} \circ B_+(s) &= \Delta_{CK}([s]) = [s] \otimes 1 + \sum_{c_i \in \overline{Admc}(T_i)} Rm^{c_1}(t_1) \cdots Rm^{c_n}(t_n) \otimes B_+(Tr^{c_1}(t_1) \cdots Tr^{c_n}(t_n)) \\ &= B_+(s) \otimes 1 + id \otimes B_+ \left(\prod_{i=1}^n \sum_{c_i \in \overline{Admc}(T_i)} Rm^{c_i}(t_i) \otimes Tr^{c_i}(t_i) \right) \\ &= B_+(s) \otimes 1 + id \otimes B_+(\Delta_{CK}(t_1) \cdots \Delta_{CK}(t_n)) \\ &= B_+(s) \otimes 1 + (id \otimes B_+)(\Delta_{CK}(s)) \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es necesario antes de enunciar la propiedad universal de la álgebra de Connes-Kreimer. Este teorema es un resultado que fue inicialmente estudiado por John Butcher en [7]. Posteriormente llamado por Connes-Kreimer Toy Model (Modelo Juguete). Método fundamental que describe la recursividad de los métodos de Runge Kutta para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta interpretación fue estudiada fuertemente por Butcher hace más de 30 años.

Teorema 3.2.2. *Sea A una álgebra conmutativa y sea $L : A \rightarrow A$ un morfismo lineal, existe un único morfismo de álgebras ϕ de H_{CK} en A tal que $\phi \circ B_+ = L \circ \phi$*

Demostración. Probaremos primero la existencia y luego la unicidad.

Existencia: Sea s un bosque cualquiera, definimos por recursividad un elemento $a_s \in A$, de la manera siguiente,

1. $a_1 = 1_A$
2. Si $s = t$ es un árbol, entonces existe un bosque θ que tal que $t = B_+(\theta)$, en este caso definimos $a_t = L(a_\theta)$
3. Si $s = t_1 \cdots t_n$ es un bosque entonces $a_s = a_{t_1} \cdots a_{t_n}$

Observemos que a_s está bien definida, pues A es conmutativa. El morfismo $\phi(s) := a_s$ es un morfismo de álgebras, en efecto, de la definición tenemos que $\phi(1) = 1_A$ además si $s = t_1 \cdots t_n$ y $\theta = \theta_1 \cdots \theta_m$ son dos bosques cualesquiera, entonces $\phi(s\theta) = a_{t_1} \cdots a_{t_n} a_{\theta_1} \cdots a_{\theta_m} = \phi(s)\phi(\theta)$. Por otro lado si s es un bosque cualquiera, entonces $\phi(B_+(s)) = L(a_s) = L(\phi(s))$, por lo que $\phi \circ B_+ = L \circ \phi$

Unicidad: Usaremos el mismo argumento de recursividad que se utilizó en la construcción de ϕ . Supongamos que ψ es otro morfismo de álgebras que satisface $\psi \circ B_+ = L \circ \psi$, si $s = 1$ entonces $\psi(1) = 1_A = \phi(1)$, si $s = t$ es un árbol, existe un bosque θ tal que $t = B_+(\theta)$, así que $\psi(t) = \psi(B_+(\theta)) = L(\psi(\theta)) = L(a_\theta) = a_t = \phi(t)$ y por lo tanto $\phi = \psi$. \square

Estamos ahora en posición de enunciar la propiedad universal del álgebra de Connes-Kreimner H_{CK} . Una prueba bastante clara y bonita de esta propiedad se encuentra en [\[14\]](#), **teorema 87**.

Teorema 3.2.3 (Propiedad universal de H_{CK}). *Sea H un álgebra de Hopf conmutativa y sea $L : H \rightarrow H$ un operador lineal tal que*

$$(\Delta_H \circ L)(x) = L(x) \otimes 1 + ((id_H \otimes L) \circ \Delta_H)(x) \quad (3.33)$$

Entonces existe un único morfismo de álgebras de Hopf ϕ de H_{CK} en H que satisface el teorema [3.2.2](#).

Sea t un árbol con raíz, definimos la operación podar por la raíz, como la inversa de la operación insertar por la raíz, mas formalmente

Definición 3.2.5. Sea t un árbol y sea $s = t_1 \cdots t_n$ un bosque tal que $B_+(s) = t$, El operador podar por la raíz, denotado por B_- , es la aplicación definida por $B_-(\bullet) = 1$ y si t tiene al menos un lado entonces

$$\begin{array}{ccc}
 B_- : H_{NAP} & \longrightarrow & H_{CK} \\
 \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_n \\ \diagdown \quad \diagup \quad \cdots \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} & \longmapsto & t_1 t_2 \cdots t_n
 \end{array} \tag{3.34}$$

El operador B_- es definido sobre la base de H_{NAP} y se extiende multiplicativamente, por tanto es un morfismo de álgebras, además B_- es sobreyectivo pues si s es un bosque cualquiera, entonces $B_-([s]) = s$, más aún esta última igualdad nos dice que

$$B_- \circ B_+ = id_{CK} \quad \text{y} \quad B_+ \circ B_- = id_{NAP}$$

Estamos interesados en probar que B_- es un morfismo de biálgebras para esto introduciremos primero la noción de coloraciones sobre los vértices de un árbol etiquetado T . Esto nos permitirá reescribir el coproducto y la antípoda de H_{CK} usando coloraciones sobre vértices, en lugar de cortes sobre lados.

Definición 3.2.6. Sea T un árbol etiquetado, una coloración de los vértices de T es una aplicación $v : V(T) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ que asigna a cada vértice de T un elemento del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definición 3.2.7. Sea T un árbol etiquetado con raíz r y sea v una coloración de los vértices de T , diremos que v es admisible si satisface,

- Si $v^{-1}(1) = \emptyset$, entonces todos los vértices de T tienen color 2.
- Si $v^{-1}(1) \neq \emptyset$, entonces $v(r) = 1$. Además si y es hijo de x , entonces $v(y) = v(x)$ o $v(y) = v(x) + 1$.

Denotaremos por $Admv(T)$ al conjunto de todas las coloraciones admisibles sobre los vértices de T , y por $Admv_k(T)$ al conjunto de todas las coloraciones admisibles sobre los vértices T cuyos colores son los elementos del conjunto $\{1, \dots, k\}$. Además denotaremos

por $T_v(i)$ al bosque formado por todos los subárboles de T cuyos vértices tienen color i bajo v , por último $t_v(i)$ denotará al monomio formado con el producto de todos los árboles que están en el bosque $T_v(i)$, con la convención que si $v^{-1}(i) = \emptyset$ entonces $t_v(i) = 1$. Observemos que hay una biyección entre el conjunto de los cortes admisibles $Admc(t)$ y el conjunto de todas las bicoloraciones admisibles sobre vértices $Admv_2(t)$, este hecho lo establecemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.9. *Hay una biyección entre los conjuntos $Admv_2(t)$ y $Admc(t)$*

Demostración. Sea $f : Admv_2(t) \rightarrow Admc(t)$ la función que asigna a cada $v \in Admv(t)$ en el corte c cuyos elementos son los lados de T que tienen vértices de diferente color, afirmamos que f es una biyección, en efecto,

- Si $c \in Admc(T)$ entonces la coloración definida por:
 - Si $c = \emptyset$ entonces todos los vértices tienen color dos, caso contrario la raíz tiene color uno.
 - $v(x) = v(y)$ si $\{x, y\} \notin c$
 - $v(x) \neq v(y)$ si $\{x, y\} \in c$

Es tal que $f(v) = c$ y por lo tanto f es una función sobreyectiva.

- Sean v_1, v_2 coloraciones sobre vértices admisibles tales que $f(v_1) = c_1$ y $f(v_2) = c_2$. Si $c_1 = c_2$ entonces dado que v_1 y v_2 son admisibles se tiene:
 - Si $\{x, y\} \in c_1$ entonces $v_1(x) = v_2(x) \neq v_1(y) = v_2(y)$
 - Si $\{x, y\} \notin c_1$ entonces $v_1(x) = v_1(y) = v_2(y) = v_2(x)$

En consecuencia $v_1 = v_2$ y por lo tanto f es inyectiva.

□

La siguiente figura ilustra como funciona el paso de cortes admisibles a coloraciones admisibles sobre vértices. En los vértices el rojo representa el color uno mientras que el verde el color dos, en los lados el color rojo representa el corte realizado.

De la proposición anterior se sigue que si $f(v) = c$ entonces se tiene $t_v(2) = Rm^c(t)$ y $t_v(1) = Tr^c(t)$ por lo tanto el coproducto de H_{CK} puede ser escrito en términos de coloraciones admisibles sobre vértices de la manera siguiente:

$$\Delta_{CK}(t) = 1 \otimes t + t \otimes 1 + \sum_{\substack{v \in Admv_2(T) \\ |v|=1}} t_v(2) \otimes t_v(1) = \sum_{v \in Admv_2(T)} t_v(2) \otimes t_v(1) \quad (3.35)$$

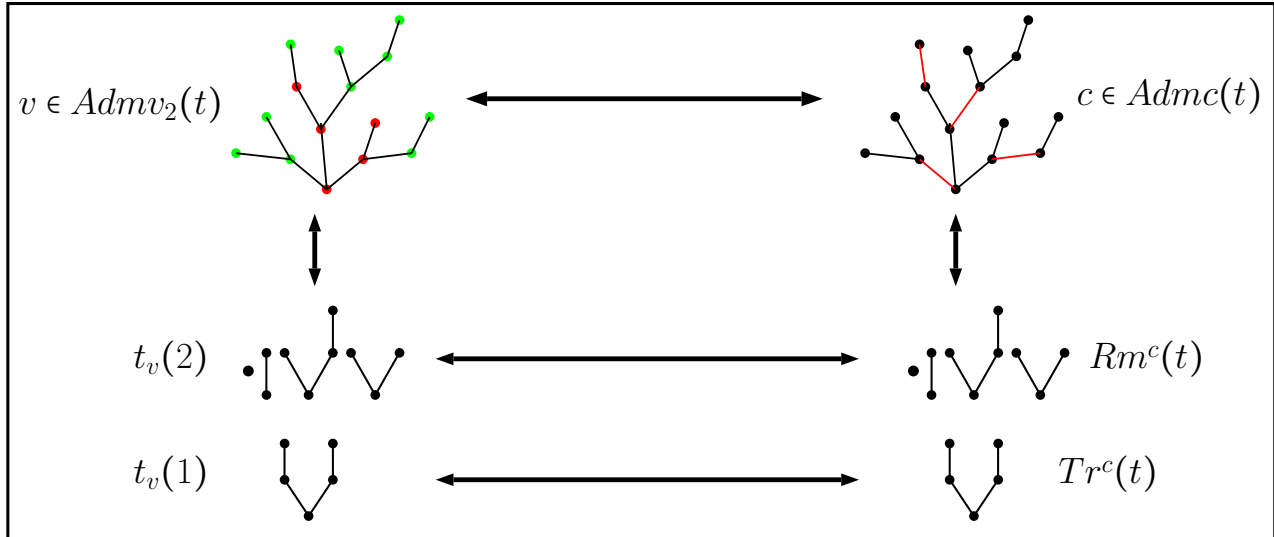


Figura 3.11: Transición entre cortes admisibles y bicoloraciones admisibles de vértices

En la expresión anterior el corte vacío corresponde a que todos los vértices tengan color 1 y el corte total corresponde a cuando todos los vértices tienen color 2. A continuación mostramos un ejemplo del coproducto de H_{CK} en términos de coloraciones admisibles sobre vértices

Ejemplo 3.2.4. Consideremos el siguiente árbol

$$T = \begin{array}{c} b \\ | \\ a \quad r \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} c$$

A continuación mostramos el calculo del coproducto a este árbol para cada coloración admisible sobre los vértices de T . El rojo representa el dos, mientras que el verde el uno.

$$\Delta_{CK}(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \bullet \otimes \text{tree} + \text{tree} \otimes \bullet + \bullet \otimes \text{tree} + \text{tree} \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet$$

Figura 3.12: Coproducto de H_{CK} con coloraciones admisibles de vértices

De forma análoga hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las coloraciones admisibles sobre vértices $\mathbb{P}(V(T))$ y el conjunto $Admv(T)$ formado por todos los cortes sobre el árbol T . Con un razonamiento similar a el de la **proposición 3.2.9** se

demuestra que esta biyección se define enviando a $v \in \text{Admv}(T)$ en el corte c que consiste en todos los lados de T cuyos extremos tienen colores diferentes. Si $v = 1$, entonces c es el corte vacío y si $v = 2$ entonces c es el corte total. una consecuencia inmediata de esta biyección es que si $f(v) = c$ entonces

$$\prod_{i \in \text{Rg}(v)} t_v(i) = W^c(t)$$

Si $v(y) = i$, entonces $i \geq 2$ y el lado $\{x, y\}$ se corresponde con el único árbol del bosque $T_v(i)$ que tiene a y como raíz. Así tenemos $|c| + 1 = \sum_{i \in \text{Rg}(v)} |T_v(i)|$. La siguiente figura ilustra esta igualdad así como la biyección que acabamos de mencionar. En los vértices el color rojo representa uno, el verde el dos, el azul el 3 y el amarillo el cuatro.

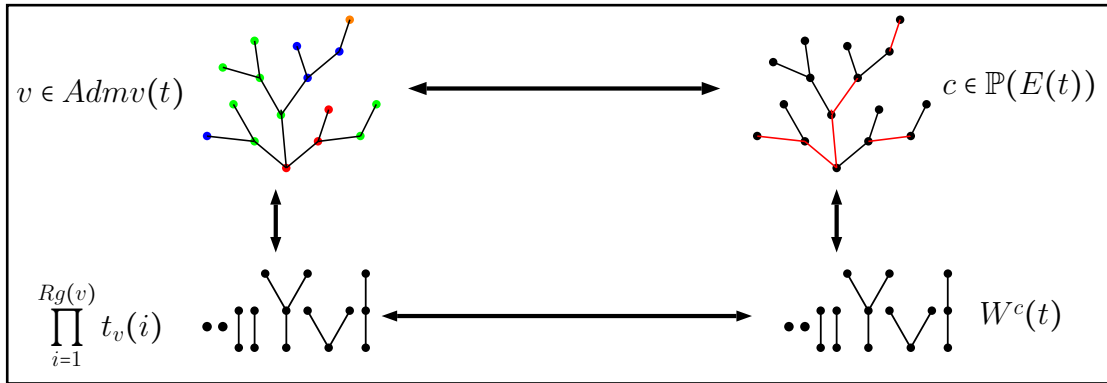


Figura 3.13: Relación entre los conjuntos de cortes y coloraciones admisibles de vértices

Podemos por lo tanto reescribir la formula de la antípoda para H_{CK} en términos de coloraciones admisibles sobre vértices de la manera siguiente:

$$S_{CK}(t) = \sum_{\substack{v \in \text{Admv}(T) \\ v^{-1}(1) \neq \emptyset}} \prod_{i \in \text{Rg}(v)} (-1)^{|T_v(i)|} t_v(i) \tag{3.36}$$

Ejemplo 3.2.5. Consideremos el siguiente árbol

$$T = \begin{array}{c} b \\ | \\ a \text{---} r \text{---} c \end{array}$$

A continuación mostramos el calculo de la antípoda a este árbol mostrando todas las coloraciones posibles sobre los vértices de T . El verde representa el color uno, el rojo representa el color dos y el azul el tres.

Notemos que las nuevas fórmulas de coproducto y antípoda para H_{CK} son parecidas a las dadas anteriormente para H_{NAP} en los **teoremas 3.1.1 y 3.1.1**. Justo aquí es que el

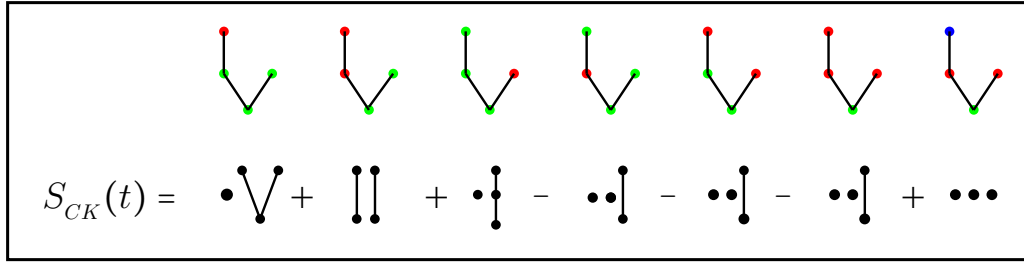


Figura 3.14: Antípoda de H_{CK} con coloraciones sobre vértices

operador B_- establece la conexión entre los coproductos de H_{NAP} y H_{CK} así como también entre las antípodas de H_{NAP} y H_{CK} respectivamente, este último hecho lo resumimos en la siguiente proposición

Proposición 3.2.10. *Sea T un árbol etiquetado con raíz, sea T' el árbol que resulta de conectar la raíz de T a un nuevo vértice r' de tal manera que r' es la raíz de T' , entonces existe una correspondencia biyectiva entre $Adm(T')$ y $Admv(T)$.*

Demostración. Sea $f : Adm(T') \rightarrow Admv(T)$ la aplicación que asigna a cada coloración e en $Adm(T')$ la coloración sobre vértices v en $Admv(T)$ que viene dada de la manera siguiente:

si $e(\{x, y\}) = i$ entonces $v(y) = i$. Aquí y representa el vértice de mayor altura del lado $\{x, y\}$; de la definición de f es inmediato que si e es NAP-admisibles entonces $f(e) = v$ es también una coloración admisible sobre los vértices de T , además aplicación f así definida es una

biyección, en efecto:

- Sea v en $Admv(T)$, y sea e en $Adm(T')$ definida por: $e\{x, y\} = i$ siempre que $v(y) = i$, con e construida así es inmediato que $f(e) = v$ y así f es sobreyectiva.
- Sean e_1, e_2 en $Adm(T')$ tales que $f(e_1) = v_1$ y $f(e_2) = v_2$. Si $v_1 = v_2$, entonces para todo vértice y de T se cumple $v_1(y) = v_2(y)$, por lo tanto si l es el lado de T' cuyo vértice superior es y , entonces $e_1(l) = e_2(l)$ y en consecuencia $e_1 = e_2$; se sigue que f es inyectiva.

□

Es importante hacer notar que la biyección que acabamos de probar aquí es precisamente el operador B_- cuya inversa es precisamente el operador B_+ , una consecuencia inmediata de esto es que $B_-(t'_e(i)) = t_v(i)$, esto se debe a que los colores que asigna e a los lados de t' son trasladados al vértice superior de cada lado y así obtenemos v . La siguiente figura ilustra la proposición e ideas que acabamos de exponer. EL rojo representa el uno, el verde el dos y el azul el tres.

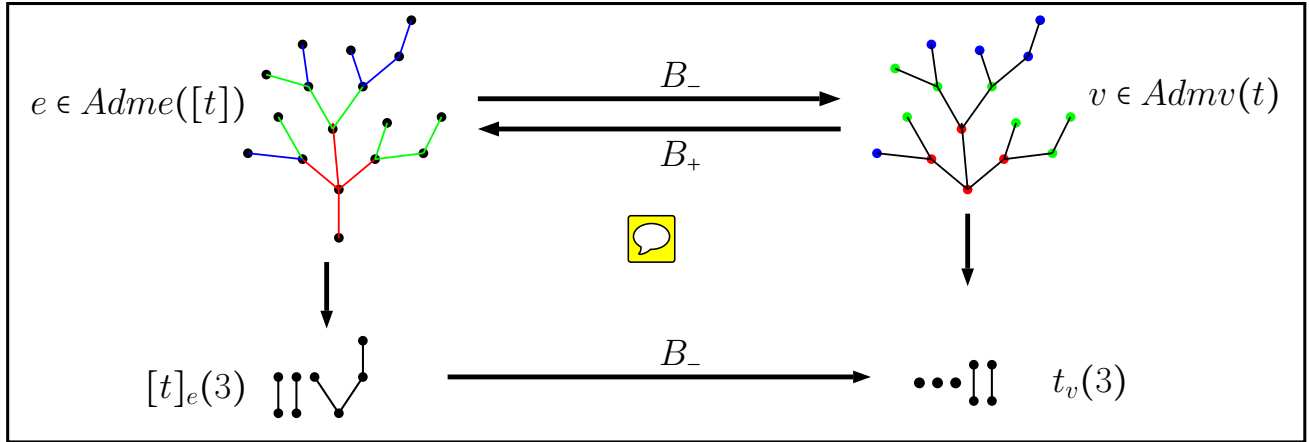


Figura 3.15: Biyección entre coloraciones NAP y CK admisibles

Los argumentos que acabamos de exponer nos permiten establecer la siguiente proposición la cual ya había sido probada anteriormente por Chapoton y Livernet([18]) haciendo uso de la sofisticada noción de operads y álgebras de Hopf de incidencia. La prueba presentada a continuación es una versión un poco mas detallada de la realizada por Mendez y Liendo en [4].

Proposición 3.2.11. *El operador B_- es un morfismo de coálgebras.*

Demostración. Sea T un árbol cualquiera con tipo de isomorfismo t , entonces

$$\begin{aligned}
 B_- \otimes B_- \circ \Delta_{NAP}([t]) &= \sum_{e \in Adm_2([t])} B_-([t]_e(2)) \otimes B_-([t]_e(1)) \\
 &= \sum_{v \in Admv_2(t)} t_v(2) \otimes t_v(1) \\
 &= \Delta_{CK}(t)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

De esta manera B_- es un morfismo de coálgebras y así por el **teorema 1.4.3** tenemos que B_- es un morfismo de álgebras de Hopf, mas aún es un epimorfismo de álgebras de Hopf. \square

3.3 Álgebra de Calaque-Ebrahimi-Manchon H_{CEM}

La álgebra H_{CEM} fue introducida por Calaque-Ebrahimi-Manchon([6]) cuando estudiaban álgebras que provienen de árboles y su relación con la operación de substitución de B -series en el contexto de los métodos numéricos en la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. A continuación haremos un estudio de H_{CEM} haciendo solo uso de coloraciones sobre los lados de un árbol.

3.3.1 H_{CEM} como coálgebra

En la sección anterior vimos que como \mathbb{K} -álgebra H_{CEM} es igual a H_{NAP} , pero como coálgebras son diferentes esto se debe a que el coproducto de H_{CEM} varía sobre todas las bicoloraciones posibles sobre lados de un árbol y la segunda componente del tensor en los sumandos del coproducto es la contracción de todos los lados que poseen color 2. Para ser más específicos introducimos la definición:

Definición 3.3.1. *Sea T un árbol con raíz, una **coloración CEM-admisible** sobre T , es una coloración c sobre los lados de T que satisface lo siguiente:*

1. Si $c^{-1}(1) = \emptyset$, entonces todos los lados de T tienen color 2, en caso contrario,
2. Para cada i en el rango de la coloración, si B_i es el bosque que se obtiene al borrar todos los lados de T que tienen color menor o igual a i , entonces cada árbol de B_i tiene al menos un lado de color $i + 1$.

Denotaremos por $Acem(T)$ al conjunto de todas las coloraciones CEM-admisibles sobre el árbol T y por $Acem_n(T)$ al conjunto de todas las coloraciones CEM-admisibles cuyo rango esté contenido en el conjunto $[n]$. Cuando todos los lados de T tengan color uno, entonces $t_c(2) = \bullet$. Si c es una coloración de los lados de T e i un color en $Rg(c)$, denotaremos por $T/T_c(i)$ a el árbol que resulta de contraer los lados de T que tienen color i y por $t/t_c(i)$ al producto formado por todos los tipos de isomorfismos de los árboles que pertenecen a $T/T_c(i)$. La estructura de \mathbb{K} -coálgebra de H_{CEM} viene inducida por las bicoloraciones CEM-admisibles sobre un árbol cualquiera, esto lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. H_{CEM} tiene estructura de \mathbb{K} -coálgebra, la counidad es el morfismo $\varepsilon_{CEM} := \delta_{\bullet, t}$, mientras que el coproducto viene definido como

$$\Delta_{CEM}(t) := \sum_{c \in Acem_2(T)} t_c(2) \otimes t/t_c(2) \quad (3.38)$$

Demostración. Para la prueba de este teorema razonamos de manera análoga a como lo hicimos con H_{NAP} . Consideremos un árbol T con tipo de isomorfismo t , si c y c_1 son bicoloraciones CEM-admisibles sobre T y $T/T_c(2)$ respectivamente, podemos construir una tricoloración admisible c' sobre los lados de T de la manera siguiente

- $c'(l) = 3$ si $l \in T_c(2)$
- $c'(l) = c_1(l)$ si $l \notin T_c(2)$

La aplicación que asocia al par (c, c_1) con c' es claramente una biyección. Recíprocamente sea c' una tricoloración CEM-admisibles de los lados de T , y sea $s = T_{c'}(2) \cup T_{c'}(3)$, entonces podemos construir bicoloraciones CEM-admisibles c_2 y c sobre s y T respectivamente, de la manera siguiente

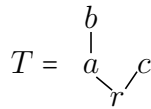
1. $c_2(l) = 2$ si $l \in T_{c'}(3)$
2. $c_2(l) = 1$ si $l \in T_{c'}(2)$
3. $c(l) = 2$ si $l \in s$
4. $c(l) = 1$ si $l \notin s$

La aplicación que asocia a c' con el par (c_2, c) es claramente una biyección. Si denotamos $t' =$ y $t'' =$, entonces del razonamiento que acabamos de exponer se sigue

$$\begin{aligned}
id \otimes \Delta_{CEM}(\Delta_{CEM}(t)) &= \sum_{c \in Acem_2(T)} t_c(2) \otimes \Delta_{CEM}(t/t_c(2)) \\
&= \sum_{c \in Acem_2(T)} t_c(2) \otimes \left(\sum_{c_1 \in Acem_2((T/T_c(2)))} (t/t_c(2))_{c_1}(2) \otimes (t/t_c(2))/_{(t/t_c(2))_{c_1}(2)} \right) \\
&= \sum_{c \in Acem_2(T)} \sum_{c_1 \in Acem_2((T/T_c(2)))} t_c(2) \otimes ((t/t_c(2))_{c_1}(2) \otimes (t/t_c(2))/_{(t/t_c(2))_{c_1}(2)}) \\
&= \sum_{c' \in Acem_3(T)} t_{c'}(3) \otimes t_{c'}(2) \otimes t/t_{c'}(2) \cup t_{c'}(3) \\
&= \sum_{c \in Acem_2(T)} \left(\sum_{c_2 \in Acem_2((T_c(2)))} (t_c(2))_{c_2}(2) \otimes (t_c(2))/_{(t_c(2))_{c_2}(2)} \right) \otimes t/t_c(2) \\
&= \sum_{c \in Acem_2(T)} \Delta_{CEM}(t_c(2)) \otimes t/t_c(2) \\
&= \Delta_{CEM} \otimes id(\Delta_{CEM}(t))
\end{aligned} \tag{3.39}$$

□

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el siguiente árbol



A continuación mostramos el cálculo del coproducto a este árbol para cada coloración de T . El azul representa el color uno, el rojo el color dos.

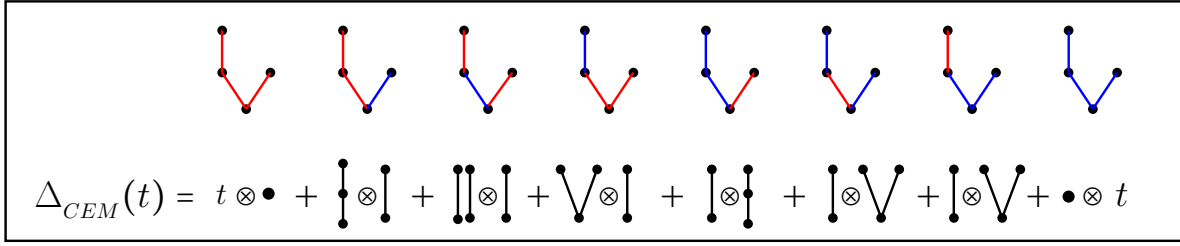


Figura 3.16: Ejemplo coproducto de CEM

Dado que toda coloración NAP-admisibles es también CEM-admisibles, es de esperar que el coproducto Δ_{NAP} aparezca en el desarrollo de Δ_{CEM} , en efecto si T es un árbol con tipo de isomorfismo T entonces

$$\begin{aligned}
 \Delta_{CEM}(t) &= \sum_{c \in Acem_2(T)} t_c(2) \otimes t/t_c(2) \\
 &= \sum_{e \in Adm_2(T)} t_e(2) \otimes t_e(1) + \sum_{\substack{c \in Acem_2(T) \\ c \notin Adm_2(T)}} t_c(2) \otimes t/t_c(2) \\
 &= \Delta_{NAP}(t) + \sum_{\substack{c \in Acem_2(T) \\ c \notin Adm_2(T)}} t_c(2) \otimes t/t_c(2)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.2 Fórmulas de Δ_{CEM} para ordenes lineales corolas y palmeras

Estudiemos formulas de este coproducto para ordenes lineales corolas y palmeras. Sea l_n un orden lineal con n lados y $n + 1$ vértices. Para contar todas bicoloraciones de l_n razonamos de la manera siguiente: Eliminamos todos los lados de l_n que tengan color uno, esto nos permite obtener una descomposición de l_n en subórdenes lineales $l_{n_1}, l_{n_2}, \dots, l_{n_k}$, El número de vértices del orden lineal l_{n_j-1} es n_j y por lo tanto la tupla n_1, \dots, n_k es una descomposición fuerte del entero $n + 1$. Por último notemos que el número de lados de color uno que fueron borrados es exactamente $k - 1$, de manera que el el coproducto viene dado por la siguiente expresión

Proposición 3.3.1. *Sea l_n un orden lineal, entonces*

$$\Delta_{CEM}(l_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n+1 \\ n_i \geq 1}} \left(\prod_{j=1}^k l_{n_j-1} \right) \otimes l_{k-1} \tag{3.41}$$

La expresión anterior es una consecuencia inmediata del hecho que el álgebra H_{CEM} restringida a la subálgebra generada por los ordenes lineales es isomorfa al álgebra natural proveniente del operad conjuntístico de los ordenes lineales. Sea \mathbb{L}_{CEM} la subálgebra de Hopf

de H_{CEM} generada por todos los árboles cuyo tipo de isomorfismo es un orden lineal y sea $N_{\mathbb{L}}$ el álgebra natural construida a partir del operad conjuntístico de los ordenes lineales \mathbb{L} . El producto del operad \mathbb{L} está definido de la manera siguiente:

1. Se considera un conjunto finito U
2. Se toma una partición π de U , que se escribe como $\{B\}_{B \in \pi}$. Cada B es un bloque de π
3. Sobre cada bloque B sea l_B un orden lineal sobre B y sea $l_\pi = B_1 B_2 \cdots B_{|\pi|}$ un orden lineal sobre la partición π . El producto η del operad \mathbb{L} está definido por la concatenación de los ordenes lineales l_B según l_π , esto es:

$$\eta(\{l_B\}_{B \in \pi}, l_\pi) = l_{B_1} l_{B_2} \cdots l_{B_{|\pi|}}$$

Por otro lado Liendo([19]) demuestra que el coproducto para $N_{\mathbb{L}}$ viene dado por la expresión

$$\Delta(x_n) = \sum_{\eta(\{x_B\}_{B \in \pi}, x_\pi) = x_{[n+1]}} \prod_{B \in \pi} x_{|B|} \otimes x_{|\pi|}$$

Consideremos $\phi : \mathbb{L}_{CEM} \longrightarrow N_{\mathbb{L}}$ el morfismo definido de manera multiplicativa por $\phi(l_n) = x_{n+1}$, es trivialmente un morfismo biyectivo de álgebras, además si L_n es un árbol con tipo de isomorfismo l_n y $(L_n)_c(2) = \{L_{n_1}, L_{n_2}, \dots, L_{n_k}\}$ entonces

$$\begin{aligned} \phi \otimes \phi \circ \Delta_{CEM}(l_n) &= \sum_{c \in \text{Acem}_2(L_n)} \prod_{j=1}^k \phi(l_{n_j}) \otimes \phi(l_{k-1}) \\ &= \sum_{\eta(\{x_B\}_{B \in \pi}, x_\pi) = x_{[n+1]}} \prod_{j=1}^k x_{n_j+1} \otimes x_k \\ &= \sum_{\eta(\{x_B\}_{B \in \pi}, x_\pi) = x_{[n+1]}} \prod_{j=1}^k x_{|B_j|} \otimes x_{|\pi|} \\ &= \Delta(x_{n+1}) \\ &= \Delta(\phi(l_n)) \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es un morfismo biyectivo de biálgebras y así en virtud del **teorema 1.4.3** se tiene que ϕ es morfismo de álgebras de hopf. Hemos probado el siguiente teorema

Teorema 3.3.2. \mathbb{L}_{CEM} y $N_{\mathbb{L}}$ son álgebras de Hopf isomorfas.

Del teorema anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\Delta_{CEM}(l_n) &= \phi^{-1} \otimes \phi^{-1} \circ \Delta(x_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{n_1+\dots+n_k=n+1} \prod_{j=1}^k \phi^{-1}(x_{n_j}) \otimes \phi^{-1}(x_k) \\ &= \sum_{n_1+\dots+n_k=n+1} \prod_{j=1}^k l_{n_j-1} \otimes l_{k-1}\end{aligned}$$

La última igualdad anterior como era de esperarse coincide con la expresión dada en la **proposición 3.3.1**. Consideremos una corola C_n , en este caso como todos los vértices están al mismo nivel, hay exactamente $\binom{n}{k}$ maneras de colorear k lados con color dos, por lo tanto tenemos

Proposición 3.3.2. *Sea C_n una corola, entonces*

$$\Delta_{CEM}(C_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_k \otimes C_{n-k} \quad (3.42)$$

Notemos que en este caso Δ_{CEM} y Δ_{NAP} son iguales, esto se debe a que en corolas las NAP-coloraciones y CEM-coloraciones coinciden. Consideremos ahora una palmera $P_{m,n}$, para contar todas las bicoloraciones CEM-admisibles de $P_{m,n}$ razonamos de la manera siguiente: Si los últimos $n_k - 1$ lados de la parte lineal de $P_{m,n}$ fueron coloreados con color dos, entonces en el bosque $t_c(2)$ aparecen ordenes lineales y una palmera cuya parte lineal tiene $n_k - 1$ lados, y cuya corola está determinada por las coloraciones realizadas a la parte corola de $P_{m,n}$ de esta manera en virtud de las **proposiciones 3.3.1 y 3.3.2** podemos establecer la siguiente proposición

Proposición 3.3.3. *Para palmeras $P_{m,n}$ tenemos*

$$\Delta_{CEM}(P_{m,n}) = \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=m+1 \\ n_i \geq 1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left(\prod_{i=1}^{k-1} l_{n_i-1} \right) P_{n_k-1,l} \otimes P_{k-1,n-l} \quad (3.43)$$

La siguiente figura muestra un sumando del coproducto para la palmera $P_{3,4}$. El color verde representa el color uno, el rojo el dos.

3.3.3 Antípoda para H_{CEM}

De la **definición 3.0.8** y la **ecuación 3.9** se sigue que

$$H_{CEM}(t) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{E}_n \quad (3.44)$$

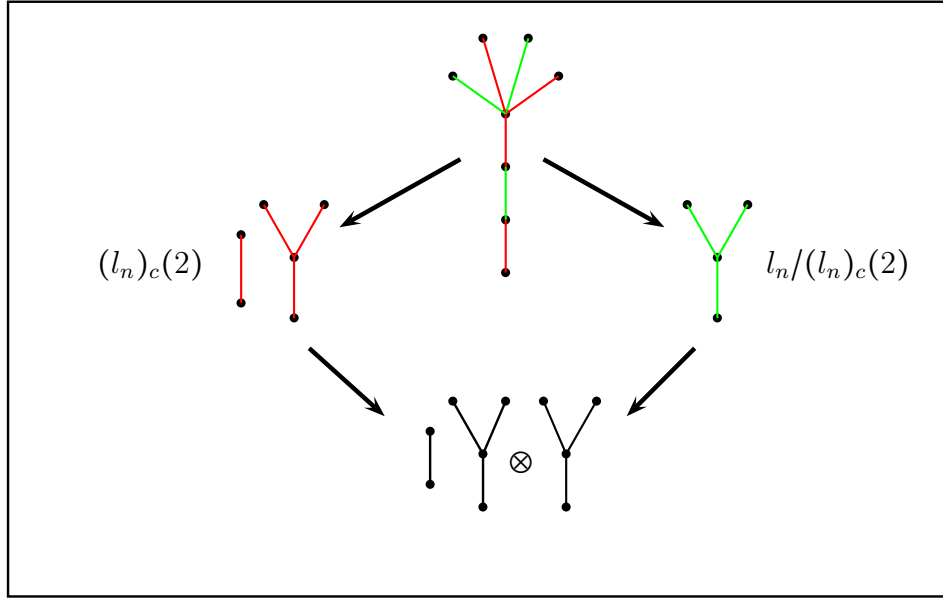


Figura 3.17: Un sumando del coproducto de CEM para la palmera $P_{3,4}$

En donde E_n es el espacio vectorial libremente generado por los bosques que tienen n -lados y E_0 es isomorfo al cuerpo. Además como consecuencia del **teorema 3.3.1** tenemos que si T es un árbol de n lados, cuyo tipo de isomorfismo es t , entonces

$$\Delta_{CEM}(t) = \bigoplus_{k=0}^n \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}_{n-k} \quad (3.45)$$

Por lo que H_{CEM} es una \mathbb{K} -biálgebra graduada y conexa, así por el **teorema 1.4.1** H_{CEM} posee antípoda y en consecuencia es una álgebra de Hopf. El siguiente teorema da una fórmula para la antípoda de H_{CEM} .

Teorema 3.3.3. *La antípoda de H_{CEM} está definida por: $S_{CEM}(\bullet) = \bullet$ y si t tiene al menos un lado entonces:*

$$S_{CEM}(t) := \sum_{\substack{c \in \text{Acem}(t) \\ c^{-1}(1) \neq \emptyset}} \prod_{i \geq 2} (-1)^{|T_c(i)|} t_c(i) \left(-t / \prod_{i=2}^n t_c(i) \right) \quad (3.46)$$

Demostración. Probaremos que $S * id(t) = 0$ para cualquier árbol con al menos un lado.

$$\begin{aligned}
S_{CEM} * id(t) &= \sum_{c \in Acem_2(T)} S_{CEM}(t_c(2))t/t_c(2) \\
&= S_{CEM}(t) + \sum_{\substack{c \in Acem_2(T) \\ c^{-1}(1) \neq \emptyset}} S_{CEM}(t_c(2))t/t_c(2) \\
&= S_{CEM}(t) + \sum_{\substack{c \in Acem_2(T) \\ c^{-1}(1) \neq \emptyset \\ T_c(2) = \{T_j\}_{j=1}^k}} \prod_{j=1}^k S_{CEM}(t_j)t/t_c(2) \\
&= S_{CEM}(t) + \sum_{\substack{c \in Acem_2(T) \\ c^{-1}(1) \neq \emptyset \\ T_c(2) = \{T_j\}_{j=1}^k}} \left(\prod_{j=1}^k \sum_{\substack{c_j \in Acem_2(T_j) \\ c_j^{-1}(1) \neq \emptyset}} \prod_{i \geq 2} (-1)^{|(T_j)_{c_j}(i)|} (t_j)_{c_j}(i) \left(-t_j / \prod_{i \geq 2} (t_j)_{c_j}(i) \right) \right) t/t_c(2)
\end{aligned}$$

Sea c' la coloración CEM-admisibles definida sobre los lados de T de la siguiente manera:

- $c'(l) = 1$ si y solo si $l \in T_c(1)$
- $c'(l) = c_j(l) + 1$ si $l \in T_j$

La aplicación $(c, \{c_j\}_{j=1}^k) \mapsto c'$ es una biyección por lo tanto para todo $i \geq 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\bullet \quad t_{c'}(i) &= \prod_{j=1}^k (t_j)_{c_j}(i-1) & \bullet \quad t_{c'}(2) &= \prod_{j=1}^k t_j / \prod_{i \geq 2} (t_j)_{c_j}(i) \\
\bullet \quad t/t_c(2) &= t / \prod_{i \geq 2} t_{c'}(i) & \bullet \quad |T_{c'}(i)| &= \sum_{j=1}^k |(T_j)_{c_j}(i-1)|
\end{aligned}$$

3.3.4 Fórmulas de S_{CEM} para ordenes lineales y corolas

Estudiemos fórmulas de esta antípoda para ordenes lineales corolas y palmeras.

Definición 3.3.2. *Diremos que un árbol \mathcal{T} es un árbol planar de Schröder con n hojas si satisface*

1. *Los vértices internos de \mathcal{T} no tienen etiquetas. Aunque el conjunto subyacente que lo define es una etiqueta para el vértice.*
2. *Las hojas de \mathcal{T} están etiquetadas con los elementos del conjunto $[n]$*
3. *Todo vértice interno de \mathcal{T} tiene por lo menos dos hijos.*
4. *Los vértices de \mathcal{T} se encuentran ordenados de izquierda a derecha, según el orden subyacente del conjunto $[n]$*

La siguiente figura muestra un ejemplo de un árbol de Schröder

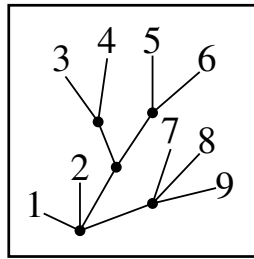


Figura 3.19: Árbol de Schroeder

En su tesis doctoral Liendo([19]) establece una biyección entre el conjunto de las particiones encajadas sobre ordenes lineales y el conjunto de los árboles planares de Schröder, con esta biyección demostró que la antípoda del álgebra natural para ordenes lineales viene dada por

$$S(x_n) = \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} (-1)^{|I_v(\mathcal{T})|} \prod_{v \in I_v(\mathcal{T})} x_{|h(v)|}$$

Donde \mathcal{F} denota el conjunto de los árboles planares de Schröder de n hojas etiquetadas con elementos del conjunto $[n]$, $I_v(\mathcal{T})$ representa el conjunto de vértices internos de \mathcal{T} , a su vez $h(v)$ denota los hijos del vértice v . En virtud del **teorema 3.3.2** tenemos que $S_{CEM}(l_n) = \varphi^{-1} \circ S \circ \varphi(l_n)$ por lo tanto haciendo uso de la expresión **3.3.4** tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.3.4. *Si l_n representa un orden lineal con n lados, entonces*

$$S_{CEM}(l_n) = \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} (-1)^{|I_v(\mathcal{T})|} \prod_{v \in I_v(\mathcal{T})} l_{|h(v)|-1} \quad (3.47)$$

En las corolas las coloraciones NAP Y CEM-admisibles coinciden, debido a que en este caso todos los vértices se encuentran a una misma altura. Por lo que en las corolas las expresiones de las antípodas de H_{NAP} y H_{CEM} son idénticas así tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.3.5. *Si C_n representa una corola con n lados, entonces*

$$S_{CEM}(C_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} (-1)^k \binom{n}{n_1, \dots, n_k} C_{n_1} C_{n_2} \dots C_{n_k} \quad (3.48)$$

3.4 Dual graduado

3.4.1 Dual graduado de un álgebra de Hopf graduada conexa y de tipo finita.

Definición 3.4.1. *Sea $V = \bigoplus_{n \geq 0}$ un \mathbb{K} -espacio vectorial graduado, el dual graduado de V , es el espacio vectorial definido por $V^\circ = \bigoplus_{n \geq 0} V_n^*$*

Notemos que V^* está formado por todos aquellos funcionales lineales que se anulan salvo para una cantidad finita de V_n . La principal ventaja del dual graduado es que en V° se conservan muchas de las propiedades que no se conservan en V^* .

Definición 3.4.2. *Sean V, W dos \mathbb{K} -espacios vectoriales y sea $\varphi : V \rightarrow W$ un morfismo lineal, el transpuesto de φ es el morfismo $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ definido por:*

$${}^t\varphi(f)(v) = f(\varphi(v))$$

Proposición 3.4.1. *Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial graduado, entonces $V^\circ \otimes V^\circ = (V \otimes V)^\circ$*

Demostración. Para una demostración consultar ([14], proposiciones 10 y 38) □

Proposición 3.4.2. *Si H es un álgebra de Hopf graduada conexa y de tipo finita, entonces H° es un álgebra de Hopf*

Demostración. Dado que H es graduada y de tipo finita, podemos garantizar que H posee base, si suponemos $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$ entonces $I = \cup_{n \geq 0} I_n$, donde para cada n , I_n es una base de H_n . Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de H , y sea $\{\delta_{e_i}\}_{i \in I}$ su base dual de H° asociada. El producto de H° es el producto convolución H^* , la unidad está definida por $u^\circ := \varepsilon$, la counidad es el morfismo definido por $\varepsilon^\circ(e_i) := \delta_{e_i, e_0}$, mientras que el coproducto es el morfismo dado por la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccccc} H^\circ & \longrightarrow & (H \otimes H)^\circ & \longrightarrow & H^\circ \otimes H^\circ \\ \delta_{e_i} & \longmapsto & \delta_{e_i} \circ m & \longmapsto & \rho \circ \delta_{e_i} \circ m \end{array}$$

Donde ρ es el morfismo definido como $\rho(\delta_{e_i \otimes e_j}) = \delta_{e_i} \otimes \delta_{e_j}$. De la composición anterior tenemos que si $c_{i,j}^k$ son los escalares de $m_{e_i \otimes e_j}$ en la base $\{e_i\}_{i \in I}$, entonces el coproducto está dado por la expresión $\Delta^\circ(\delta_{e_k}) = \sum_{r,s} c_{r,s}^k \delta_{e_r} \otimes \delta_{e_s}$. Por último la antípoda es el morfismo dado por $S^\circ(\delta_{e_i}) := \delta_{e_i} \circ S$ □

Definición 3.4.3. Sea H un álgebra de Hopf y A un álgebra cualquiera,

1. Diremos que ζ es un caracter infinitesimal si satisface

$$\zeta(xy) = \zeta(x)e(y) + e(x)\zeta(y)$$

2. Diremos que ζ es un caracter si $\zeta(xy) = \zeta(x)\zeta(y)$

3. ζ es multiplicativo si ζ es un homomorfismo de álgebras, esto es si $\psi \circ u_H = u_A$. Es decir ζ es multiplicativo si manda unidad en unidad.

Estamos ahora en posición de hacer una breve revisión a los duales graduados de las tres álgebras de Hopf que hemos venido desarrollando a lo largo de este capítulo. En lo sucesivo la base de H_{CEM}° será denotada por $\{Z_s\}$, la base de $H_{\mathcal{N}P}^\circ$ será denotada por $\{\eta_s\}$, por último denotaremos por $\{\delta_s\}$ la base de H_{CK}° .

3.4.2 Dual graduado de H_{CK}

Definición 3.4.4. Sean t_1, t_2 dos árboles y v un vértice de t_1 , el *grafting* de t_2 en t_1 a través de v se define como el árbol que resulta de conectar la raíz de t_2 con v . Lo denotaremos por $t_2 \rightarrow_v t_1$

Definición 3.4.5. El *grafting* de t_2 en t_1 se define como $t_2 \rightarrow t_1 = \sum_{v \in t_1} t_2 \rightarrow_v t_1$

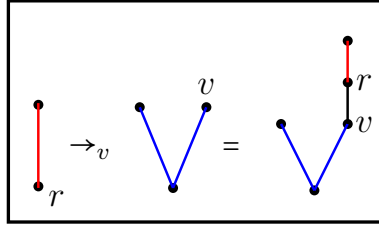


Figura 3.20: Ejemplo de grafting en un vértice

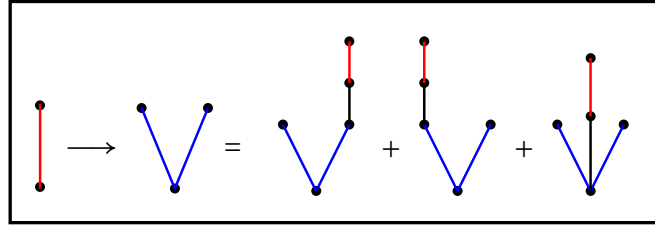


Figura 3.21: Ejemplo de grafting de un árbol sobre otro.

Teorema 3.4.1. Si t_1, t_2 son dos árboles cualesquiera entonces $\delta_{t_2} *_{CK} \delta_{t_1} = \delta_{t_2 \rightarrow t_1}$

Demostración. Sea t un árbol, entonces

$$\delta_{t_2} *_{CK} \delta_{t_1} = \sum_{v \in \text{Admv}_2(T_1)} \delta_{t_2}(t_v(2)) \delta_{t_1}(t_v(1))$$

En la suma anterior, un sumando es cero cada vez que el bosque de color dos tiene al menos dos árboles no triviales. Por lo tanto los términos que aportan a la suma son todos aquellos en donde el bosque de color dos tiene un sólo árbol cuyo tipo de isomorfismo es $t_v(2)$, para este tipo de bicoloraciones denotadas por v siempre existe un único vértice x_v en el cual inciden lados de color 1 y 2 simultáneamente. Dado que la coloración v es admisible se tiene que x_v es la raíz de $t_v(2)$, y por lo tanto $t_v(2) = t_2$ y $t_1 = t_v(1)$. Para este caso el sumando es uno si t es igual a $t_2 \rightarrow_{x_v} t_1$. Sigue que

$$\begin{aligned} \delta_{t_2} *_{CK} \delta_{t_1} &= \sum_{v \in \text{Admv}_2(T_1)} \delta_{t_2}(t_v(2)) \delta_{t_1}(t_v(1)) \\ &= \sum_{v \in \text{Admv}_2(T_1)} \delta_{t_2, t_v(2)} \delta_{t_1, t_v(1)} \\ &= \sum_{x \in V(T_1)} \delta_{t_2 \rightarrow_x t_1} \\ &= \delta_{t_2 \rightarrow t_1} \end{aligned}$$

□

La siguiente figura muestra un ejemplo de $\delta_{t_2 \rightarrow t_1}$ para dos árboles sencillos.

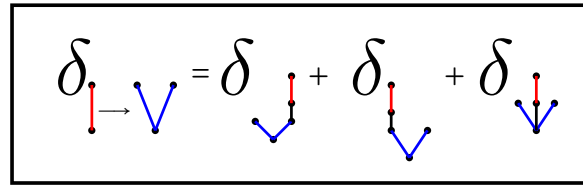


Figura 3.22: Ejemplo de $\delta_{t_2 \rightarrow t_1}$.

3.4.3 Dual graduado de H_{CEM}

Definición 3.4.6. Sean t_1, t_2 árboles y v un vértice de t_1 , la conexión de t_2 en t_1 a través de v es el grafting del bosque $B_{(t_2)}$ sobre el vértice v de t_1 . Es decir $\triangleright_v t_1$.

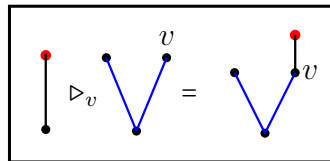


Figura 3.23: Ejemplo de conexión en un vértice

Definición 3.4.7. El grafting de t_2 en t_1 se define como $t_2 \rightarrow t_1 = \sum_{v \in t_1} t_2 \rightarrow_v t_1$

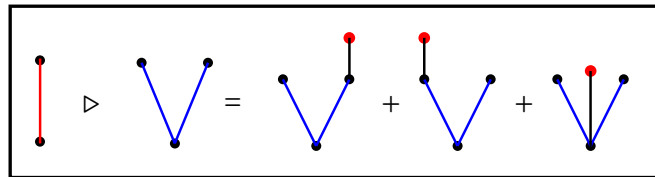


Figura 3.24: Ejemplo de conexión de dos árboles.

Teorema 3.4.2. Si t_1, t_2 son dos árboles cualesquiera entonces $Z_{t_2} \star_{CEM} Z_{t_1} = Z_{t_2 \rightarrow t_1} + Z_{t_1 \rightarrow t_2}$

Demostración. Sea t un árbol, entonces

$$Z_{t_2} \star_{CK} Z_{t_1} = \sum_{c \in \text{Acem}_2(T_1)} Z_{t_2}(t_c(2)) Z_{t_1}(t/t_c(2))$$

Aquí un sumando es cero cada vez que el bosque de color dos tiene al menos dos árboles no triviales. Por lo tanto los términos que aportan a la suma son todos aquellos en donde el bosque de color dos tiene un sólo árbol cuyo tipo de isomorfismo es t_2 , para este tipo de bicoloraciones denotadas por c siempre existe un único vértice v_c en el cual inciden lados de color 1 y 2 simultáneamente. De acuerdo a la definición de coloración CEM-admisibles se tiene la siguiente disjunción:

1. v_c es la raíz de $t_c(2)$, $t_c(2) = t_2$ y $t_1 = t/t_c(2)$. Para este caso el sumando es uno si t es igual a $t_2 \triangleright_{v_c} t_1$
2. v_c no es la raíz de $t_c(2)$, $t_c(2) = t_2$ y $t_1 = t/t_c(2)$. Para este caso el sumando es uno si t es igual a $t_1 \triangleright_{v_c} t_2$

De los casos anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned}
 Z_{t_2} *_{CEM} Z_{t_1} &= \sum_{c \in \text{Acem}_2(T_1)} Z_{t_2}(t_c(2)) Z_{t_1}(t/t_c(2)) \\
 &= \sum_{c \in \text{Acem}_2(T_1)} Z_{t_2, t_c(2)} Z_{t_1, t/t_c(2)} \\
 &= \sum_{v \in V(T_1)} Z_{t_2 \triangleright_v t_1} + \sum_{v \in V(T_1)} Z_{t_1 \triangleright_v t_2} \\
 &= Z_{t_2 \rightarrow t_1} + Z_{t_1 \rightarrow t_2}
 \end{aligned}$$

□

La siguiente figura ilustra como se calcula $Z_{t_2} *_{CEM} Z_{t_1}$

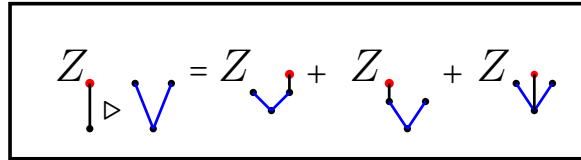


Figura 3.25: Ejemplo de $Z_{t_2} *_{CEM} Z_{t_1}$.

3.4.4 Dual graduado de H_{NAP}

Definición 3.4.8. Sean t_1 y t_2 árboles cualesquiera y sea v un vértice de t_1 la composición parcial de t_2 con t_1 a través del vértice v se define como el árbol que se obtiene al conectar por la raíz el árbol t_2 con el vértice v de t_1 , según el algoritmo expuesto en la **observación 3.1.1**. Aquí el bosque interno es el árbol t_2 mientras que el bosque externo es el árbol t_1 . Denotaremos por $t_2 \curvearrowright_v t_1$ a la composición parcial del árbol t_2 con t_1 a través del vértice v .

Definición 3.4.9. Sean t_1 t_2 dos árboles cualesquiera la composición de t_2 con t_1 se define como $t_2 \curvearrowright t_1 = \sum_{v \in V(T_1)} t_2 \curvearrowright_v t_1$

Teorema 3.4.3. Sean t_1 y t_2 dos árboles, entonces $\eta_{t_2} *_{NAP} \eta_{t_1} = \eta_{t_2 \curvearrowright t_1}$

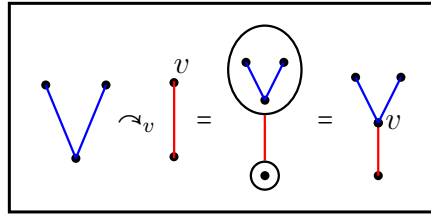


Figura 3.26: Composición a través del vértice v

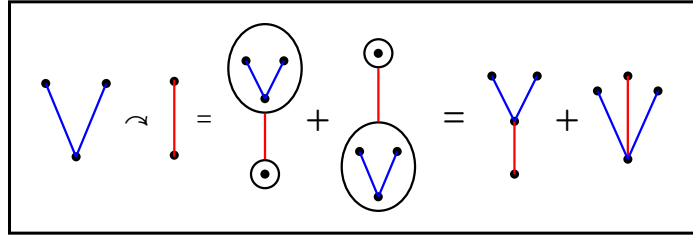


Figura 3.27: Composición a través del vértice v

Demostración.

$$\eta_{t_2} *_{NAP} \eta_{t_1} = \sum_{e \in \text{Adm}(T_1)} \eta_{t_2}(t_e(2)) \eta_{t_1}(t_e(1))$$

En la suma anterior, un sumando es cero cada vez que el bosque de color dos tiene al menos dos árboles no triviales. De manera que los términos que aportan a la suma son todos aquellos en donde el bosque de color dos tiene un sólo árbol cuyo tipo de isomorfismo es $t_e(2)$, para este tipo de bicoloraciones denotadas por e siempre existe un único vértice x_e en el cual inciden lados de color 1 y 2 simultáneamente. Dado que la coloración e es NAP-admisibles se tiene que x_e es la raíz de $t_e(2)$, y por lo tanto $t_e(2) = t_2$ y $t_1 = t_e(1)$. Para este caso el sumando es uno si t es igual a $t_2 \rightsquigarrow_{x_e} t_1$. Sigue que

$$\begin{aligned} \eta_{t_2} *_{NAP} \eta_{t_1} &= \sum_{v \in \text{Adm}_2(T_1)} \eta_{t_2}(t_e(2)) \eta_{t_1}(t_e(1)) \\ &= \sum_{v \in \text{Adm}_2(T_1)} \eta_{t_2, t_e(2)} \eta_{t_1, t_e(1)} \\ &= \sum_{x \in V(T_1)} \eta_{t_2 \rightsquigarrow_x t_1} \\ &= \eta_{t_2 \rightsquigarrow t_1} \end{aligned}$$

□

La siguiente figura muestra un ejemplo de $\eta_{t_2 \rightsquigarrow t_1}$

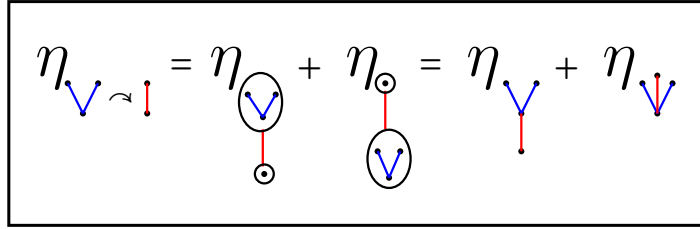


Figura 3.28: Ejemplo de $\eta_{t_2 \sim t_1}$

3.5 Relación de bicomódulo entre H_{NAP} , H_{CEM} y H_{CK}

Definición 3.5.1. Sea A una \mathbb{K} -álgebra, un A -módulo a izquierda es un \mathbb{K} -espacio vectorial M junto con un morfismo lineal $\phi : A \otimes M \rightarrow M$ que hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes A \otimes M & \\
 id_A \otimes \phi \swarrow & & \searrow m_A \otimes id_M \\
 A \otimes M & & A \otimes M \\
 \phi \searrow & & \swarrow \phi \\
 & M &
 \end{array} \quad (3.49)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \otimes M & \xrightarrow{u_A \otimes id_M} & A \otimes M \\
 \cong \searrow & & \swarrow \phi \\
 & M &
 \end{array} \quad (3.50)$$

Cuando M sea un A -módulo diremos que A actúa sobre M . De manera análoga un A -módulo a derecha es un K -espacio vectorial M junto con un morfismo $\psi : M \otimes A \rightarrow M$ tal que $\psi \circ (id_M \otimes m_A) = \psi \circ (\psi \otimes id_A)$ y $\psi \circ (id_M \otimes u_A) = f$, donde f es el isomorfismo natural de $\mathbb{K} \otimes M$ en M . Diremos que M es un C -bimódulo si M posee de manera simultánea estructuras de módulo a izquierda y derecha compatibles, esto es si satisface la igualdad:

$$\phi \circ (id_A \otimes \psi) = \psi \circ (\phi \otimes id_A)$$

Haciendo uso del principio de dualidad podemos definir A -comódulo simplemente invirtiendo el sentido de las flechas en los diagramas de la definición anterior, de esta manera tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5.2. Sea C una \mathbb{K} -coálgebra, un C -comódulo a izquierda es un \mathbb{K} -espacio vectorial M junto con un morfismo lineal $\phi : M \rightarrow C \otimes M$ que hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & C \otimes C \otimes M & \\
 id_C \otimes \phi \swarrow & & \searrow \Delta_C \otimes id_M \\
 C \otimes M & & C \otimes M \\
 \phi \searrow & & \swarrow \phi \\
 & M &
 \end{array} \quad (3.51)$$

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes M & \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes id_M} & \mathbb{K} \otimes M \\
 \phi \searrow & & \swarrow \cong \\
 & M &
 \end{array} \quad (3.52)$$

Análogamente un C -comódulo a derecha es un \mathbb{K} -espacio vectorial junto con un morfismo lineal $\psi : C \rightarrow M \otimes C$ que satisface lo siguiente: $(id_M \otimes \Delta_C) \circ \psi = (\psi \otimes id_C) \circ \psi$ y $(id_M \otimes \varepsilon_C) \circ \psi = g$, donde g es el isomorfismo natural de \mathbb{K} en $\mathbb{K} \otimes$. Diremos que M es un C -bicomódulo si M posee de manera simultánea estructuras de comódulo a izquierda y derecha compatibles, esto es si se satisface la siguiente igualdad

$$(id_C \otimes \psi) \circ \phi = (\phi \otimes id_C) \circ \psi \quad (3.53)$$

ϕ y ψ reciben el nombre de morfismos estructurales; el siguiente teorema establece la relación de bicomódulo existente entre H_{CEM} y H_{CK} . Este teorema es una consecuencia inmediata del diagrama de coasociatividad de H_{CEM}

Teorema 3.5.1. H_{CK} tiene estructura de H_{CEM} bicomódulo con morfismos estructurales definidos de la manera siguiente: Si $t = 1$, entonces $\phi = \bullet \otimes 1 = 1 \otimes \bullet$, si $t \neq 1$ entonces $\phi(t) = \psi(t) = \Delta_{CEM}(t)$

Haciendo uso del principio de dualidad del teorema anterior se sigue de manera inmediata el siguiente corolario

Corolario 3.5.1. H_{CEM}^* tiene estructura de H_{CK}^* bimódulo.

Nuestro propósito ahora es establecer una relación entre la estructura de H_{CEM} -bicomódulo de H_{CK} y el coproducto del álgebra H_{CK} que nos permita estudiar relaciones entre sus respectivos grupos de caracteres.

Lema 3.5.1. Sean T un árbol, v una bicoloración admisible de vértices de T , y c una coloración CEM-admisible de los lados de T que satisface la siguiente propiedad: Si $l = \{x, y\}$ es un lado de T tal que $v(x) \neq v(y)$ entonces $c(l) = 1$. Son válidas las siguientes proposiciones

1. $T_c(2) = (T_v(2))_c(2) \cup (T_v(1))_c(2)$
2. La bicoloración v induce una bicoloración sobre $T/T_c(2)$ denotada con la misma letra v que satisface

$$(a) (T/T_c(2))_v = T_v(1)/(T_v(1))_c(2)$$

$$(b) (T/T_c(2))_v(2) = T_v(2)/(T_v(2))_c(2)$$

Si $x_1 \cdots x_n$ es un vértice que resulta de la contracción bajo c de un subárbol de color 2 entonces $v(x_1 \cdots x_n) = v(x_i)$ para cualquier i en el conjunto $1, \dots, n$

Demostración. 1. Si $l = x, y$ es un lado de $T_c(2)$, entonces $v(x) = v(y)$ de manera que $T_c(2)$ está formado por dos bosques: el primero constituido por los lados de T cuyos vértices tienen color 2 y el segundo cuyos lados tienen color 1, en consecuencia

$$T_c(2) = (T_v(2))_c(2) \cup (T_v(1))_c(2)$$

2. Desde el numeral 1 se sigue que los lados de color 2 solo pueden ser contraídos a vértices monocromáticos, en consecuencia

$$T/T_c(2) = T_v(2)/(T_v(2))_c(2) \cup T_v(1)/(T_v(1))_c(2)$$

De esta última igualdad se sigue que

$$(T/T_c(2))_v(1) = T_v(1)/(T_v(1))_c(2) \quad \text{y} \quad (T/T_c(2))_v(2) = T_v(2)/(T_v(2))_c(2)$$

□

Corolario 3.5.2. *Sean v una bicoloración sobre los vértices de T y c una bicoloración CEM-admisibles sobre los lados de T que cumple con la propiedad del lema de arriba, entonces*

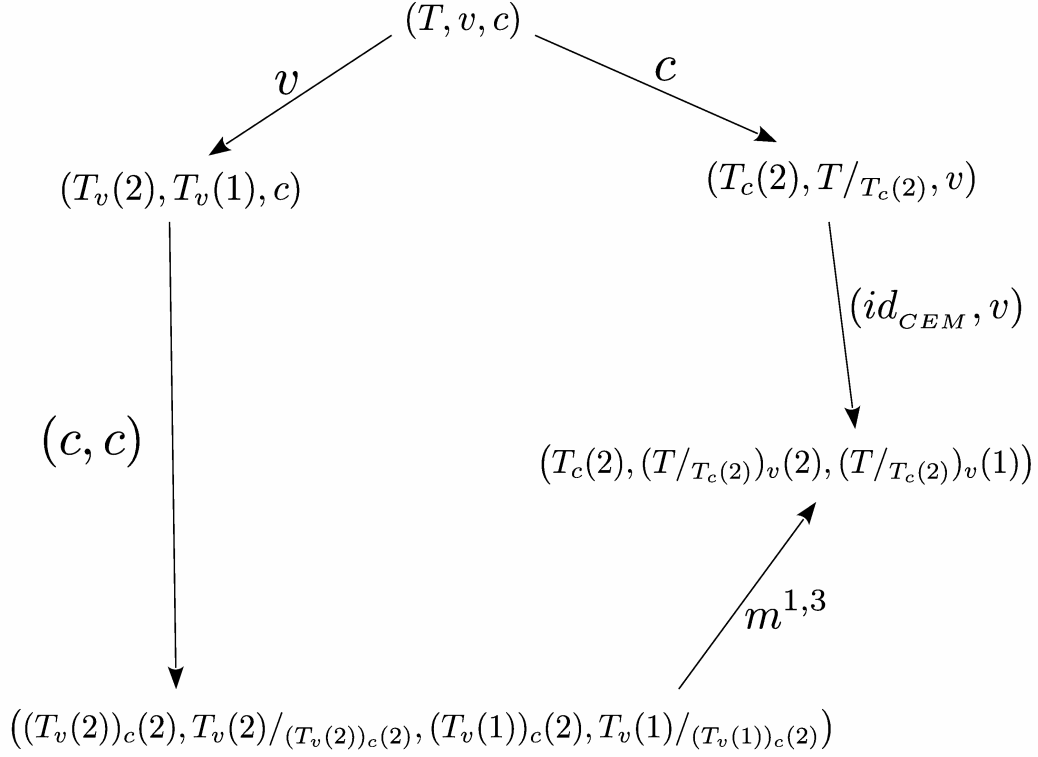
1. $t_c(2) = (t_v(2))_c(2)(t_v(1))_c(2)$
2. $(t/t_c(2))_v(1) = t_v(1)/(t_v(1))_c(2)$
3. $(t/t_c(2))_v(2) = t_v(2)/(t_v(2))_c(2)$

El siguiente teorema es quizás el teorema central del presente trabajo, pues establece la relación entre la estructura de H_{CEM} y el álgebra de Connes-Kreimner. Usando la técnica conjuntística de coloraciones sobre lados y vértices. Este resultado fue probado por Manchon-Ebrahimi y Calaque en [6]. Nosotros haremos una prueba simple usando el lema y corolario de arriba.

Teorema 3.5.2. *Sea $m^{1,3} : H_{CEM} \otimes H_{CK} \otimes H_{CEM} \otimes H_{CK} \longrightarrow H_{CEM} \otimes H_{CK} \otimes H_{CK}$ dada por $m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) := ac \otimes b \otimes d$, entonces*

$$(id_{CEM} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CEM} = m^{1,3} \circ (\Delta_{CEM} \otimes \Delta_{CEM}) \circ \Delta_{CK} \quad (3.54)$$

Demostración. Sea T un árbol con tipo de isomorfismo t , considere v y c coloraciones sobre vértices y lados de T bajo las hipótesis del **lema 3.5.1**. Entonces tenemos el siguiente diagrama: Es importante hacer notar que en el diagrama anterior hemos hecho abuso de



notación para la aplicación $m^{1,3}$. Del diagrama anterior haciendo uso del **corolario 3.5.2** obtenemos

$$(id_{CEM} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CEM} = m^{1,3} \circ (\Delta_{CEM} \otimes \Delta_{CEM}) \circ \Delta_{CK}$$

□

Para cada $a \in H_{CEM}^*$ se define la aplicación lineal $L_a : H_{CK}^* \rightarrow H_{CK}^*$ como la composición

$$H_{CEM}^* \xrightarrow{a \otimes id} H_{CEM}^* \otimes H_{CK}^* \hookrightarrow (H_{CEM} \otimes H_{CK})^* \xrightarrow{\phi^*} H_{CK}^* \quad (3.55)$$

Denotaremos por $L_a(b) = a \cdot b$. Notemos que si $t = 1$ entonces $a \cdot b(1) = 1$ y si $t \neq 1$ entonces $a \cdot b(t) = a *_{CEM} b(t)$. Del diagrama anterior se sigue que el operador transpuesto tL_a viene dado por siguiente composición

$$H_{CK} \xrightarrow{\phi} H_{CEM} \otimes H_{CK} \xrightarrow{a \otimes id} H_{CK} \quad (3.56)$$

Es decir el operador transpuesto viene dada de la siguiente manera: si $t = 1$ entonces ${}^tL_a(1) = 1$ y si $t \neq 1$ entonces

$${}^tL_a(t) = \sum_{c \in Acen} a(t_c(2)) t/t_c(2) \quad (3.57)$$

Por otro lado si $\tilde{\phi} = \tau_{2,3} \circ \phi \otimes \phi$, entonces $\tilde{\phi}$ define una coacción de comódulo a izquierda de $H_{CEM} \otimes H_{CEM}$ sobre $H_{CK} \otimes H_{CK}$, de manera análoga $\tilde{\psi} := \tau_{2,3} \circ \psi$ define una coacción de comódulo a derecha de $H_{CEM} \otimes H_{CEM}$ sobre $H_{CK} \otimes H_{CK}$. Dualizando se tiene que $(H_{CK} \otimes H_{CK})^*$ tiene estructura de $(H_{CEM} \otimes H_{CEM})^*$ -bimódulo, la cual viene dada por la siguiente composición

$$(H_{CEM} \otimes H_{CEM})^* \otimes (H_{CK} \otimes H_{CK})^* \hookrightarrow (H_{CEM} \otimes H_{CEM} \otimes H_{CK} \otimes H_{CK})^* \xrightarrow{\tilde{\phi}} (H_{CK} \otimes H_{CK})^*$$

La acción a derecha se define de manera similar, en el diagrama anterior $f \otimes g$ es enviada a $f \odot g$. Ahora si $a \in H_{CEM}^*$, entonces $m^*a := a \circ m \in (H_{CEM} \otimes H_{CEM})^*$ y por lo tanto la multiplicación a izquierda

$$L_{m^*a} : (H_{CK} \otimes H_{CK})^* \longrightarrow (H_{CK} \otimes H_{CK})^*$$

Definida por $L_{m^*a}(b) = m^*a \odot b$ es un operador lineal. Aquí L_{m^*a} viene dada por la siguiente composición

$$(H_{CK} \otimes H_{CK})^* \xrightarrow{m^*a \otimes id} \otimes (H_{CK} \otimes H_{CK} \otimes H_{CK} \otimes H_{CK})^* \xrightarrow{\tilde{\phi}} (H_{CK} \otimes H_{CK})^* \quad (3.58)$$

Por lo que su transpuesto es la aplicación

$${}^tL_{m^*a} : H_{CK} \otimes H_{CK} \longrightarrow H_{CK} \otimes H_{CK}$$

Es decir su transpuesto es la composición

$${}^tL_{m^*a} = (m^*a \otimes id \otimes id) \circ \tilde{\phi} = m^*a \otimes id \otimes id \otimes \tau_{2,3} \otimes \phi \otimes \phi$$

Corolario 3.5.3. *Sea $a : H_{CEM} \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación lineal, entonces*

$$\Delta_{CK} \circ {}^tL_a = {}^tL_{m^*a} \circ \Delta_{CK}$$

En particular si $a \in H_{CEM}^\circ$ entonces $m^*a = \sum_{(a)} a_1 \otimes a_2$ está en $H_{CEM}^\circ \otimes H_{CEM}^\circ$ y en este caso

$$\Delta_{CK} \circ {}^tL_a = \left(\sum_{(a)} {}^tL_{a_1} \otimes {}^tL_{a_2} \right) \circ \Delta_{CK} \quad (3.59)$$

Demostración. Del **teorema 3.5.2** se tiene que

$$(id_{CEM} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CEM} = m^{1,3} \circ (\Delta_{CEM} \otimes \Delta_{CEM}) \circ \Delta_{CK}$$

Aplicando $a \otimes id_{CK} \otimes id_{CK}$ obtenemos

$$(a \otimes id_{CK} \otimes id_{CK}) \circ (id_{CEM} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CEM} = (a \otimes id_{CK} \otimes id_{CK}) \circ m^{1,3} \circ (\Delta_{CEM} \otimes \Delta_{CEM}) \circ \Delta_{CK}$$

De esta última ecuación sigue que

$$\Delta_{CK} \circ {}^tL_a = {}^tL_{m^*a} \circ \Delta_{CK}$$

□

Notemos que la ecuación $\Delta_{CK} \circ {}^tL_a = {}^tL_{m^*a} \circ \Delta_{CK}$ es equivalente al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_{CK} & \xrightarrow{{}^tL_a} & H_{CK} & \xrightarrow{\Delta_{CK}} & H_{CK} \otimes H_{CK} \\ \Delta_{CK} \downarrow & & & \nearrow & \\ & & & & {}^tL_{m^*a} \\ H_{CK} \otimes H_{CK} & & & & \end{array} \quad (3.60)$$

Dualizando tenemos

$$\begin{array}{ccccc} (H_{CK} \otimes H_{CK})^* & \xrightarrow{\Delta_{CK}^*} & H_{CK}^* & \xrightarrow{L_a} & H_{CK}^* \\ L_{m^*a} \downarrow & & & \nearrow & \\ & & & & \Delta_{CK}^* \\ (H_{CK} \otimes H_{CK})^* & & & & \end{array} \quad (3.61)$$

De este último diagrama se sigue la ecuación

$$L_a \circ \Delta_{CK}^* = \Delta_{CK}^* \circ L_{m^*a} \quad (3.62)$$

Ahora bien si $b_1, b_2 \in H_{CK}^*$, $t \neq 1$ y a es multiplicativa, entonces

$$\begin{aligned}
(L_a \circ \Delta_{CK}^*)(b_1 \otimes b_2)(t) &= L_a \circ (b_1 \otimes b_2 \circ \Delta_{CK})(t) \\
&= a \otimes (b_1 \otimes b_2 \circ \Delta_{CK}) \circ \phi(t) \\
&= a \otimes (b_1 \otimes b_2 \circ \Delta_{CK}) \circ \Delta_{CEM}(t) \\
&= a *_{CEM} (b_1 *_{CK} b_2)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(\Delta_{CK}^* \circ L_{m^*a})(b_1 \otimes b_2)(t) &= (\Delta_{CK}^* \circ m^*a \circ b_1 \otimes b_2)(t) \\
&= (m^*a \circ b_1 \otimes b_2 \circ \Delta_{CK})(t) \\
&= (m^*a \otimes b_1 \otimes b_2 \circ \tilde{\phi} \circ \Delta_{CK})(t) \\
&= (a *_{CEM} b_1) *_{CK} (a *_{CEM} b_2)
\end{aligned}$$

Hemos probado la siguiente corolario

Corolario 3.5.4. *Sea $a \in H_{CEM}^*$ multiplicativa y sean $b_1, b_2 \in H_{CK}^*$, entonces*

$$a *_{CEM} (b_1 *_{CK} b_2) = (a *_{CEM} b_1) *_{CK} (a *_{CEM} b_2) \quad (3.63)$$

Definición 3.5.3. *Sea A una \mathbb{K} -álgebra y B un \mathbb{K} -espacio vectorial que es A -bimódulo. Un operador lineal $L : A \rightarrow B$ es una derivación si satisface la regla de Leibniz:*

$$L(xy) = L(x)y + xL(y) \quad (3.64)$$

Notemos que la regla de Leibniz es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{L} & B \\
\downarrow L \otimes id + id \otimes L & & & \nearrow \psi + \phi & \\
B \otimes A + A \otimes B & & & &
\end{array} \quad (3.65)$$

Definición 3.5.4. *Sean C una \mathbb{K} -coálgebra y B un \mathbb{K} -espacio vectorial, de manera tal que B es un C -bicomódulo. Un operador lineal $L : B \rightarrow C$ es una coderivación si satisface la regla de co-Leibniz:*

$$\Delta \circ L = (L \otimes id_C) \circ \psi + (id_C \otimes L) \circ \psi \quad (3.66)$$

La regla de co-Leibnitz es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C & \xleftarrow{L} & B \\
 & & \uparrow & & & & \swarrow \\
 & & L \otimes id + id \otimes L & & & & \psi + \phi \\
 & & B \otimes C + C \otimes B & & & &
 \end{array} \tag{3.67}$$

Teorema 3.5.3. *Sea $a : H_{CEM} \rightarrow \mathbb{K}$ un caracter infinitesimal de H_{CEM} . El operador ${}^tL_a : H_{CK} \rightarrow H_{CK}$ es una biderivación del álgebra de Hopf H_{CK} . De manera similar si $\varphi : H_{CK} \rightarrow \mathbb{K}$ es un caracter de H_{CEM} , entonces el operador ${}^tL_\varphi : H_{CK} \rightarrow H_{CK}$ es un automorfismo del álgebra de Hopf H_{CK} .*

Demostración. Sea $t_1 t_2$ un monomio de H_{CK} con dos términos y a un caracter infinitesimal de H_{CEM} , entonces si s representa un subbosque de $t_1 t_2$ cuyos lados tienen color 2 bajo una bicoloración CEM-admisibles, se tiene:

$$\begin{aligned}
 {}^tL_a(t_1 t_2) &= \sum_{s \subseteq t_1 t_2} a(s)(t_1 t_2)/s \\
 &= \sum_{t' \subseteq t_1 t_2} a(t')(t_1 t_2)/t' \\
 &= \sum_{t' \subseteq t_1} a(t')(t_1/t')t_2 + \sum_{t' \subseteq t_2} a(t')t_1(t_2/t') \\
 &= {}^tL_a(t_1)t_2 + t_1 {}^tL_a(t_2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto tL_a es una derivación. Probemos ahora que tL_a es una coderivación. Si a es un caracter infinitesimal se tiene que

$$\begin{aligned}
 {}^tL_{m^*a}(t_1 \otimes t_2) &= m^*a \otimes id \otimes id \circ \tau_{2,3} \circ (\Delta_{CEM}(t_1) \otimes \Delta_{CEM}(t_2)) \\
 &= m^*a \otimes id \otimes id \circ \tau_{2,3} \left(\sum_{(c_1), (c_2)} (t_1)_{c_1}(2) \otimes t_1/(t_1)_{c_1}(2) \otimes (t_2)_{c_2}(2) \otimes t_2/(t_2)_{c_2}(2) \right) \\
 &= (a \otimes u \circ \varepsilon + u \circ \varepsilon \otimes a) \otimes id \otimes id \circ \tau_{2,3} \left(\sum_{(c_1), (c_2)} (t_1)_{c_1}(2) \otimes t_1/(t_1)_{c_1}(2) \otimes (t_2)_{c_2}(2) \otimes t_2/(t_2)_{c_2}(2) \right) \\
 &= \sum_{(c_1)} \left(a((t_1)_{c_1}(2)) \otimes t_1/(t_1)_{c_1}(2) \right) \otimes t_2 + \sum_{(c_2)} t_1 \otimes \left(a((t_2)_{c_2}(2)) \otimes t_2/(t_2)_{c_2}(2) \right) \\
 &= \left((a \otimes id) \circ \Delta_{CEM}(t_1) \right) \otimes t_2 + t_1 \otimes \left((a \otimes id) \circ \Delta_{CEM}(t_2) \right) \\
 &= ({}^tL_a \otimes id)(t_1 \otimes t_2) + (id \otimes {}^tL_a)(t_1 \otimes t_2)
 \end{aligned}$$

De esta manera del **corolario 3.5.3** se sigue que

$$\Delta_{CK} \circ {}^tL_a = {}^tL_{m^*a} \circ \Delta_{CK} = ({}^tL_a \otimes id + id \otimes {}^tL_a) \circ \Delta_{CK} \quad (3.68)$$

Como se quería demostrar. Probemos ahora que todo caracter φ de H_{CK} es un automorfismo. Sea $\varphi \in H_{CK}^*$ un caracter, entonces si s representa un subbosque de t_1t_2 cuyos lados tienen color 2 bajo una bicoloración CEM-admisibles, se tiene:

$$\begin{aligned} {}^tL_\varphi(12) &= \sum_{s \subseteq t_1t_2} \varphi(s)(t_1t_2)/s \\ &= \sum_{s \subseteq t_1t_2} \varphi(s \cap t_1)\varphi(s \cap t_2)(t_1/t_1 \cap s)(t_2/t_2 \cap s) \\ &= \left(\sum_{s_1 \subseteq t_1} \varphi(s_1)(t_1/s_1) \right) \left(\sum_{s_2 \subseteq t_2} \varphi(s_2)(t_2/s_2) \right) \\ &= {}^tL_\varphi(t_1) {}^tL_\varphi(t_2) \end{aligned}$$

Además ${}^tL_\varphi(1) = \varphi(\bullet)1 = 1$, así que ${}^tL_\varphi$ es un homomorfismo de álgebras. Veamos que ${}^tL_\varphi$ es un homomorfismo de álgebras de Hopf; por el **corolario 3.5.3** se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{CK} \circ {}^tL_\varphi &= {}^tL_{m^*\varphi} \circ \Delta_{CK} \\ &= (m^*\varphi \otimes id \otimes id) \circ \tau_{2,3} \circ \phi \otimes \phi \circ \Delta_{CK} \\ &= (m \circ \varphi \otimes \varphi) \otimes id \otimes id \circ \tau_{2,3} \circ \phi \otimes \phi \circ \Delta_{CK} \\ &= \left((\varphi \otimes id \circ \phi) \otimes (\varphi \otimes id \circ \phi) \right) \circ \Delta_{CK} \\ &= \left({}^tL_\varphi \otimes {}^tL_\varphi \right) \circ \Delta_{CK} \end{aligned}$$

Y por lo tanto ${}^tL_\varphi$ es un homomorfismo de álgebras de Hopf. Para demostrar que ${}^tL_\varphi$ es un automorfismo notemos que el inverso de L_φ es ${}^tL_{\varphi^{-1}}$, en donde $\varphi^{-1} = \varphi \circ S_{CEM}$, por lo tanto $({}^tL_\varphi)^{-1} = {}^tL_{\varphi^{-1}}$ más aún si s representa un subbosque de t cuyos lados tienen color 2 bajo una bicoloración CEM-admisibles, y s' es un subbosque de t/s entonces se tiene:

$$\begin{aligned} {}^tL_\varphi \circ {}^tL_{\varphi^{-1}} &= \sum_s \varphi^{-1}(s) \sum_{s'} \phi(s')t/(ss') \\ &= \sum_{s,s'} \varphi^{-1}(s) \phi(ss'/s)t/(ss') \\ &= \sum_w \left(\sum_{s \subseteq w} \varphi^{-1}(s) \varphi(w/s) \right) t/w \\ &= \sum_w u \circ \varepsilon(w)t/w \\ &= t \end{aligned}$$

□

Corolario 3.5.5. *La compatibilidad entre las estructuras de álgebra de Hopf y comódulo satisface:*

1. Si a es un caracter infinitesimal de H_{CEM} el operador L_a es una biderivación de H_{CK}°
2. Cualquier caracter φ de H_{CEM} define un automorfismo L_φ sobre H_{CK}^*

Demostración. Es una versión transpuesta del **teorema 3.5.3**. □

Una consecuencia inmediata de todo lo que hemos expuesto hasta ahora desde el **teorema 3.5.2** es el siguiente corolario.

Corolario 3.5.6. *Sean φ un caracter de H_{CEM} y a, b, c aplicaciones lineales de H_{CEM} en \mathbb{K} y sea $\varepsilon = \delta_\emptyset$ la counidad de H_{CK} . Entonces*

1. $L_\alpha(\varepsilon) = \alpha \cdot \varepsilon = \alpha(\bullet)\varepsilon = \varepsilon \cdot \alpha$
2. $L_\alpha(\delta_\bullet) = \alpha *_{CEM} \delta_\bullet = \delta_\bullet *_{CEM} \alpha = \alpha$
3. $L_{Z_\bullet}(b) = Z_\bullet *_{CEM} b = b *_{CEM} Z_\bullet = b$
4. $\varphi *_{CEM} (b *_{CK} c) = L_\varphi(b *_{CK} c) = L_\varphi(b) *_{CK} L_\varphi(c) = (\varphi *_{CEM} b) *_{CK} (\varphi *_{CEM} c)$
5. $(\varphi *_{CEM} b^{*CK})^{-1} = (L_\varphi(b))^{-1} = L_\varphi(b^{-1}) = \varphi *_{CEM} (b^{*CK})^{-1}$

Estamos ahora interesados en establecer una relación entre lo que hemos estudiado en esta última sección y el álgebra H_{NAP} en este punto el operador B_- juega un papel fundamental. De la **proposición 3.2.11** y de los diagramas de coasociatividad y counidad para H_{NAP} y H_{CK} se desprende de manera inmediata el siguiente teorema

Teorema 3.5.4. H_{NAP} tiene estructura de H_{CK} bicomódulo con mapeos estructurales $\phi := (B_- \otimes id_{NAP}) \circ \delta_{NAP}$ y $\psi := (id_{NAP} \otimes B_-) \circ \Delta_{NAP}$.

Demostración. En la prueba de este corolario usaremos los diagramas de coasociatividad y counidad de Δ_{NAP} , la sobreyectividad del operador B_- y el hecho que $\Delta_{CK} \circ B_- = B_- \otimes B_- \circ \Delta_{NAP}$. Para probar la igualdad equivalente a la conmutatividad del **diagrama 3.51** se razona como sigue

$$\begin{aligned}
(\Delta_{CK} \otimes id_{NAP}) \circ [(B_- \otimes id_{NAP}) \circ \Delta_{CK}] &= ((\Delta_{CK} \circ B_-) \otimes id_{NAP}) \circ \Delta_{NAP} \\
&= [(B_- \otimes B_-) \circ \Delta_{CK} \otimes id_{NAP}] \circ \Delta_{NAP} \\
&= (B_- \otimes B_- \otimes id_{NAP}) \circ (\Delta_{NAP} \otimes id_{NAP}) \circ \Delta_{NAP} \\
&= (B_- \otimes B_- \otimes id_{NAP}) \circ (id_{NAP} \otimes \Delta_{NAP}) \circ \Delta_{NAP} \\
&= [B_- \otimes (B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP})] \circ \Delta_{CK} \\
&= [id_{CK} \otimes (B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP})] \circ (B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP})
\end{aligned}$$

La prueba de la igualdad equivalente al **diagrama 3.52** es inmediata, solo basta notar que $\varepsilon_{CK} \otimes id_{NAP} \circ B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP} = \varepsilon_{CK} \circ B_- \otimes \Delta_{NAP} = 1 \otimes id_{NAP}$. Así hemos probado que H_{NAP} es un H_{CK} comódulo a izquierda. La estructura de H_{CK} comódulo a la derecha se prueba de manera bastante similar. Demostremos ahora la relación de compatibilidad establecida en la **ecuación 3.53**

$$\begin{aligned}
[(B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP}) \otimes id_{CK}] \circ (id_{NAP} \otimes B_- \circ \Delta_{NAP}) &= [(B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP}) \otimes B_-] \circ \Delta_{NAP} \\
&= (B_- \otimes id_{NAP} \otimes B_-) \circ (\Delta_{NAP} \otimes id_{NAP}) \circ \Delta_{NAP} \\
&= (B_- \otimes id_{NAP} \otimes B_-) \circ (id_{NAP} \otimes \Delta_{NAP}) \circ \Delta_{NAP} \\
&= [B_- \otimes (id_{NAP} \otimes B_- \circ \Delta_{NAP})] \circ \Delta_{NAP} \\
&= [id_{CK} \otimes (id_{NAP} \otimes B_- \circ \Delta_{NAP})] \circ (B_- \otimes id_{NAP} \circ \Delta_{NAP})
\end{aligned}$$

Así que vale la relación de compatibilidad, como se quería demostrar. \square

Si dualizamos, del teorema anterior se desprende de manera inmediata el siguiente corolario

Corolario 3.5.7. H_{CK}° tiene estructura de H_{NAP}° -bimódulo con mapeos estructurales

Para terminar veamos como interactúa el operador B_- con los operadores L_a y tL_a . Recordemos que en la **proposición 3.2.11** establecimos que el operador B_- es un epimorfismo de álgebras de Hopf, haciendo uso de este hecho podemos reescribir el **corolario 3.5.3** de la manera siguiente

Proposición 3.5.1. Sea $a : H_{CEM} \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicación lineal, entonces

$$\Delta_{CK} \circ {}^tL_a \circ B_- = {}^tL_{m^*a} \circ \Delta_{CK} \circ B_- \quad (3.69)$$

La primera parte del **teorema 3.5.3** puede ser extendido usando el operador lineal B_- como conexión a izquierda y las estructuras de bimódulo y bicomódulo definidas en los numerales del **teorema 3.5.4** Así tenemos

Proposición 3.5.2. Sea $a : H_{CEM} \rightarrow \mathbb{K}$ un caracter infinitesimal, entonces la aplicación ${}^tL_a \circ B_- : H_{NAP} \rightarrow H_{CK}$ es una biderivación.

Demostración. Sea $t_1 t_2$ un monomio de H_{NAP} , entonces

$$\begin{aligned} {}^t L_a \circ B_-(t_1 t_2) &= {}^t L_a(B_-(t_1) B_-(t_2)) \\ &= {}^t L_a(B_-(t_1)) B_-(t_2) + B_-(t_1) {}^t L_a(B_-(t_2)) \\ &= {}^t L_a(B_-(t_1)) \odot t_2 + t_1 \boxtimes {}^t L_a(B_-(t_2)) \end{aligned}$$

En la expresión anterior \odot y \boxtimes representan los productos de módulo de H_{NAP} a derecha e izquierda respectivamente. De la expresión anterior tenemos que ${}^t L_a \circ B_-$ es una derivación. Para ver que es una coderivación tenemos que si ϕ y ψ denotan las acciones de comódulo a izquierda y derecha respectivamente entonces

$$\begin{aligned} ({}^t L_a \circ B_- \otimes id) \circ \psi + (id \otimes {}^t L_a \circ B_-) \circ \phi &= ({}^t L_a \otimes id + id \otimes {}^t L_a) \circ (B_- \otimes B_- \circ \Delta_{CK}) \\ &= \left[({}^t L_a \otimes id + id \otimes {}^t L_a) \circ \Delta_{CK} \right] \circ B_- \\ &= \Delta_{CK} \circ ({}^t L_a \circ B_-) \end{aligned}$$

De manera que ${}^t L_a \circ B_-$ es una coderivación y por lo tanto una biderivación como se quería demostrar. \square

Unos breves comentarios finales: Hemos visto que las álgebras de Hopf H_{CK} , H_{NAP} y H_{CEM} son álgebras cuyas estructuras subyacentes son árboles no planares, por esta razón pueden ser vistas como álgebras de polinomios cuyas variables son los tipos de isomorfismos de dichos árboles. Las fórmulas de coproducto y antípoda para cada una de estas álgebras permiten categorizar y estudiar cierto tipo de subálgebras construidas a partir de ordenes lineales, corolas y palmeras. Así como también encontrar formulas de inversión para series polinómicas de tipo exponencial. Por otro lado una consecuencia natural de su construcción son las acciones de comódulo de H_{CEM} sobre H_{CK} y de H_{CK} sobre H_{NAP} estas acciones cobran vital importancia cuando se estudian los duales graduados de estas álgebras y sus grupos caracteres, ya que permiten establecer relaciones de compatibilidad entre sus duales graduados. Trabajos futuros podrían ser tratar de encontrar una formula explicita para la antípoda de palmeras y ver su relación con las descomposiciones, parentizaciones ordenadas y los árboles de Schröder. Otro posible trabajo podría ser estudiar las aplicaciones de lo expuesto en este trabajo a las leyes de composición y sustitución de B-series, ya que esto tiene incidencia directa en el estudio de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Por último sería bastante bonito e interesante tratar de enriquecer a los árboles con estructuras que nos permitan encontrar generalizaciones de las álgebras estudiadas en el presente trabajo, y siendo algo ambiciosos tratar de categorizar de manera explicita dichas generalizaciones.

Bibliografía

- [1] A. Cayley, A theorem on trees, *Q. J. Math.*, vol.23, 1972, p. 376-378.
- [2] A. Murua, The Hopf algebra of rooted trees, free Lie algebras, and Lie series, *Found. Comput. Math.* 6 (2006) 387–426. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.560.2136>
- [3] A. Connes, D. Kreimer, Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry, August 1998, IHES/M/98/60. Versión electrónica en: <http://arXiv:hep-th/9808042v1> 7 Aug 1998
- [4] M. Mendez, J. C. Liendo, An antipode formula for the natural Hopf algebra of a set operad, *Adv. in App. Math.* 53 (2014) 112–140. <https://arxiv.org/abs/1302.0564>
- [5] J. C. Liendo, Fórmulas de antípodas para el álgebra natural de un operad conjuntístico. Tesis doctoral UCV (2013).
- [6] D. Calaque, K. Ebrahimi, D. Manchon, Two interacting Hopf algebras of trees: A Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series, *Adv. in App. Math.* 47 (2011) 282–308 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196885810000990>
- [7] J. C. Butcher, An algebraic theory of integration methods, *Mathematics of Computation*, vol. 26, 1972, p. 79-106. [www.ams.org/journals/mcom/1972-26-117/S0025-5718-1972-0305608-0/S0025-5718-1972-0305608-0.p](http://www.ams.org/journals/mcom/1972-26-117/S0025-5718-1972-0305608-0/S0025-5718-1972-0305608-0.pdf)
- [8] J.C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, 2003.
- [9] J.C. Butcher, Trees and numerical methods for ordinary differential equations, *Numer. Algor.* vol. 53, 2009 p. 153-170
- [10] P. Chartier, E. Hairer, G. Vilmart, A substitution law for B-series vector fields, <https://hal.inria.fr/inria-00070509>

- [11] P. Chartier, E. Hairer, G. Vilmart. Algebraic Structures of B-series, *Foundations of Computational Mathematics* 10(2002) 407-427. <https://hal.inria.fr/inria-00598369/file/Chartier2.pdf>
- [12] Ch. Brouder, Runge–Kutta methods and renormalization, *Eur. Phys. J. C Part. Fields* 12 (2000) 512–534.
- [13] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II, thèse, Univ. de Reims, 2002, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 193–239, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 249–288. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007449702011132>
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007449702011089>
- [14] L. Foissy. Algèbres de Hopf combinatoires, Laboratoire de Mathématiques - FRE3111, Université de Reims. <http://loic.foissy.free.fr/pageperso/cours3.pdf>
- [15] R. Grossman, R.G. Larson, Hopf-algebraic structure of families of trees, *J. Algebra* 126 (1989) 184–210. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869389903281>
- [16] M. Hoffman, Combinatorics of Rooted Trees and Hopf Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003) 3795–3811. <http://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03317-8/home.html>
- [17] J.-L. Loday, M. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, *Adv. Math.* 139 (1998) 293–309.
- [18] F. Chapoton and M. Livernet, Relating Two Hopf Algebra Built from An Operad, *International Mathematics Research Notices*, Vol. 2007, Article ID rnm131, 27 pages. <https://arxiv.org/pdf/0707.3725.pdf>
- [19] Liendo B. Jean Carlos, El álgebra de Hopf de un operad conjuntístico. Trabajo de Grado de Maestría UCV (2009).
- [20] Schmitt, W. R. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, no. 3 (1994), 299-330. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404994901058>
- [21] S.A. Joni and Rota G.C. , Coálgebras and Biálgebras in Combinatorics, *Studies in Applied Mathematics* 61 (1979), 93-139.

- [22] D. Grinberg, V. Reiner. Hopf algebras in combinatorics, Agosto 2015.
<https://arxiv.org/pdf/1409.8356v3.pdf>
- [23] Sweedler M. , Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.
- [24] E. Abe. Hopf Algebras, Cambridge University Press, 1980.
- [25] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introduction to Conmutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, 1969.
- [26] D. E. Radford. Hopf algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2012.