

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**PARTÍCULAS Y CUERDAS EN INTERACCIÓN MEDIANTE
CAMPOS DE CALIBRE EN UNA REPRESENTACIÓN
GEOMÉTRICA.**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Miguel Eduardo García Marcano
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Dr. Ernesto Fuenmayor Di Prisco

Mayo-2018
Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**PARTÍCULAS Y CUERDAS EN INTERACCIÓN MEDIANTE
CAMPOS DE CALIBRE EN UNA REPRESENTACIÓN
GEOMÉTRICA.**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Miguel Eduardo García Marcano
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**

Con la tutoría de: Dr. Ernesto Fuenmayor Di Prisco

Mayo-2018
Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



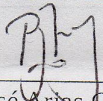
VEREDICTO

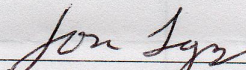
Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Miguel Eduardo García Marcano**, Cédula de Identidad **V-19401172**, bajo el título "**Partículas y cuerdas en interacción mediante campos de calibre en una representación geométrica**", a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

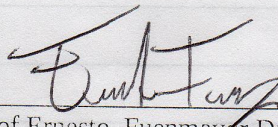
1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 28 de mayo de 2018, a las 2:00 pm, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 28 días del mes de mayo de 2018, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Ernesto Fuenmayor Di Prisco.

Firma del jurado evaluador


Prof Pío José Arias González
UCV


Prof. José Antonio López
Rodríguez
UCV


Prof Ernesto Fuenmayor Di
Prisco
UCV



Las preguntas verdaderamente serias son aquéllas que pueden ser formuladas hasta por un niño. Sólo las preguntas más ingenuas son verdaderamente serias. Son preguntas que no tienen respuesta. Una pregunta que no tiene respuesta es una barrera que no puede atravesarse. Dicho de otro modo: precisamente las preguntas que no tienen respuesta son las que determinan las posibilidades del ser humano, son las que trazan las fronteras de la existencia del hombre.

Milan Kundera.

Agradecimientos

Primeramente, a mis padres, Pilar García y Elsa Marcano, por no desistir para que yo este acá, por forjar innumerables valores, no alcanzan las palabras, ni las acciones para mostrar mi agradecimiento.

A mis hermanas, María y Elena, por ser un ejemplo de éxito, de constancia y lucha, y por darme la certeza que siempre contaré con su apoyo en todos los aspectos de la vida.

A mi compañera de vida, Andreína Rivera, que durante 11 años (y contando) ha luchado conmigo en todo momento y en cualquier tipo de situación, por hacerme seguir adelante, y demostrarme cada día, que seguir adelante es mucho mas fácil con ella a mi lado.

A todos mis compañeros de la Academia, especial mención a Ayrton Reyes, Camilo las Heras, Christian Medina, Daniel Bachour, Fabián Ruiz, Gustavo Martínez, Manuel Gutiérrez, Rixy Plata, por hacer el camino un tanto mas fácil y ameno, y a todos aquellos que no menciono por tener memoria corta. Siempre agradeceré su apoyo.

A mi tutor, Dr. Ernesto Fuenmayor Di Prisco, por los conocimientos aportados, por no desistir y confiar en mí para realizar este trabajo. Al Dr. Lorenzo Leal, por el apoyo brindado durante la realización del trabajo, y a los profesores, Vidal Alonso, Miroslav Vectrovec, Pío Arias, José López, entre otros, por todos los valiosos conocimientos impartidos durante esta etapa académica.

Por último, pero no menos importante, a todos esos gigantes de la física, que han permitido que las nuevas generaciones caminen sobre sus hombros.

RESUMEN

Se estudia la cuantización de partículas y cuerdas no-relativistas cargadas interactuando con campos de calibre Abelianos (no topológicos y topológicos) a través de la teoría de representaciones geométricas. Para ello se realiza la cuantización a través del Método de Dirac, y se representan geoméricamente en el espacio de caminos o el espacio de superficies. En el caso no topológico, se considera primeramente la interacción de partículas no relativistas cargadas con el campo de Maxwell. Posteriormente, se estudia la autointeracción de una cuerda cerrada no relativista “cargada” con el campo de Kalb-Ramond. En ambos casos, se obtiene que una representación apropiada resuelve las ligaduras de forma trivial siempre y cuando se exija la cuantización de la carga. Luego se realiza el estudio de teorías topológicas, donde las ligaduras obtenidas del estudio canónico imponen restricciones sobre los funcionales de onda siendo esta una característica de dichas teorías. Se comienza con la descripción de la Teoría Topológica Masiva (T.T.M), la cual describe al campo electromagnético con masa. Se obtiene una representación de caminos donde los estados físicos se describen en términos del ángulo total subtendido por los tramos de camino, medido desde los extremos de los mismos. El siguiente caso a tratar es la interacción de una partícula cargada con el campo de Chern-Simons, donde se observa que una representación de caminos es apropiada siempre y cuando la carga este cuantizada. Además, los funcionales de onda que describen el espacio físico están restringidos por las ligaduras topológicas y los mismos se describen en términos del ángulo formado por los tramos de camino medidos desde sus extremos, uno de los cuales coincide con la posición de la partícula. Posteriormente, se estudia la interacción de “dos tipos” de partículas a través de un campo BF en $2 + 1$ dimensiones donde se obtiene una representación en el espacio de caminos abeliano, que por consistencia exige que la carga de las partículas este cuantizada, además de estar los estados físicos restringidos por las ligaduras topológicas. Se obtiene que los funcionales de onda físicos están descritos por el ángulo subtendido por los extremos de los caminos que están atados a una partícula medido desde la posición de la partícula sin objetos geométricos asociados.

Palabras claves: Teorías de Campos de Calibre, Método de cuantización de Dirac, Representaciones geométricas, Teorías Topológicas.

Índice general

1. Introducción	13
2. Método de Cuantización de Dirac para Campos de Calibre y la Teoría de las Representaciones Geométricas	19
2.1. Método de Cuantización de Dirac	19
2.1.1. Cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de primera clase.	22
2.1.2. Cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de segunda clase.	23
2.2. Teoría de las Representaciones Geométricas	25
2.2.1. El grupo de Caminos Abelianos.	25
2.2.2. Generalizaciones del grupo de caminos. Grupos de Ciclos y Grupo de Superficies.	30
3. Teorías de campos de calibre no topológicas.	33
3.1. Partículas cargadas no relativistas interaccionando con un campo de Maxwell.	34
3.2. Cuerda cerrada en autointeracción con campo de Kalb-Ramond.	38
4. Teoría de Chern-Simons en $2 + 1$ dimensiones.	45
4.1. Cuantización Canónica	45
4.2. Transformaciones de Calibre.	49
4.2.1. Acción extendida y Hamiltoniano Extendido	50
4.3. A_0 sin dinámica (actuando como multiplicador de Lagrange).	52
4.3.1. Transformaciones de calibre.	52
4.4. Método de Jackiw-Carroll (Cuantización sin lágrimas).	53
5. Teorías de Campos de Calibre Topológicas	57
5.1. Teoría Topológica Masiva	58

5.2. Partículas no relativistas interaccionando a través de un campo de Chern-Simons.	63
6. Modelo Juguete: Partículas no relativistas interactuando a través de un campo BF en $2 + 1$ dimensiones.	73
7. Discusión	85

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las teorías de campos calibre tiene una gran relevancia para la física actual. En las últimas décadas ha constituido una manera elegante de analizar las interacciones entre campos y materia en el marco de la mecánica cuántica, al proporcionar herramientas matemáticas necesarias para interpretar de forma precisa como se comportan fenómenos fundamentales de la naturaleza. Su importancia radica en la existencia de un grupo de transformaciones (transformaciones de calibre), que simplifican el estudio de un sistema, al reducir el número de grados de libertad presentes, dejando invariantes cantidades como la acción y las ecuaciones de movimiento. Muchas teorías fundamentales son teorías de calibre; por ejemplo, la teoría electromagnética clásica y cuántica, las teorías de interacción nuclear débil y fuerte, e incluso el modelo estándar de las partículas elementales y algunas teorías de gravedad cuántica.

En el marco de las teorías de campo de calibre, existen aquellas donde la acción depende de la métrica (teorías no topológicas), y aquellas donde la acción no depende de la métrica (teorías topológicas). El hecho de que las teorías topológicas sean independientes de la métrica, implica que las mismas se comportan de igual manera al cambiar la forma de la variedad en la que son analizadas. Muchas teorías actuales son de este tipo, por ejemplo, la teoría topológica masiva, las teorías de Chern-Simons, la teoría de Yang-Mills, así como las teorías que describen la dinámica de objetos materiales interactuando con campos del tipo BF.

Por otra parte, la teoría de representaciones geométricas, proporciona una herramienta útil para el análisis de teorías de calibre, ya que permite visualizar las ligaduras de primera clase que surgen sobre los funcionales de onda de una forma geométrica. Utilizar caminos para describir una interacción fue propuesto por Mandelstam en [1], donde desarrolla una

forma de estudiar el campo electromagnético sin la introducción de potenciales. Allí se expone que los funcionales de onda cuyos argumentos descritos en términos de objetos geométricos (camino) sirven para describir la interacción electromagnética. Posteriormente, Gambini y Trías en [2], amplían el formalismo de espacio de caminos, considerando un espacio de caminos cerrados o ciclos. Esta generalización tiene aplicaciones en diversas teorías de campos, gravedad cuántica y teoría de nudos. Además, en [3], describen la estructura básica del espacio de caminos, pudiendo así obtener una descripción precisa de las cantidades presentes en una teoría de calibre en términos de objetos geométricos, sustentada en la invariancia de los campos bajo la estructura básica del grupo de caminos. Su contribución también se extiende a trabajos como [4], donde explican la interacción del campo electromagnético con una carga magnética (monopolo) en la formulación del espacio de caminos. En [5], Gambini y Trías describen el campo electromagnético libre en términos de ciclos o caminos cerrados.

Hoy en día, existe una variedad de formulaciones en términos de objetos geométricos. Para el caso de la gravedad cuántica, tenemos numerosos aportes, como [6], donde se obtienen los vínculos presentes en la teoría en una representación de ciclos. Por otra parte, ciertas generalizaciones al espacio de caminos y ciclos han sido encontradas. Por ejemplo, en [7], se expone una representación de puntos y antipuntos para cuantizar el modelo auto dual. En [8], se considera una representación de superficies y caminos para describir la interacción de una cuerda abierta con el campo de Kalb-Ramond.

Muchos modelos no topológicos encuentran ventaja en la teoría de representación geométrica, ya que la misma permite resolver las ligaduras impuestas sobre los funcionales de onda de forma inmediata, exigiendo condiciones sobre los objetos geométricos (camino, ciclo o superficie). Para el campo de Maxwell libre, una representación de ciclos o caminos cerrados satisface automáticamente la ligadura de Gauss. Para el campo de Maxwell en interacción con partículas cargadas [9], los caminos abiertos son los apropiados para describir la interacción entre la materia y el campo, estando el sector libre de carga descrito en términos de caminos cerrados o ciclos. En el caso de una cuerda en autointeracción con un campo de Kalb-Ramond, expuesta en [10], la ligadura es satisfecha trivialmente si suponemos un espacio de superficies [11].

En las teorías topológicas, la imposición sobre los objetos geométricos que describen la interacción no es suficiente. El espacio físico esta restringido por funcionales de onda que presentan una forma particular, la cual es fácil encontrar en términos de objetos geométricos. Numerosas teorías de campos de calibre topológicas han tomado ventaja de la representación geométrica para interpretar los resultados obtenidos. En [12], [13], se presenta la forma que adquiere la ligadura topológica escrita en el espacio de caminos, además de encontrar las restricciones que la misma impone sobre los funcionales de onda que describen el espacio físico. En [9], se explica en términos de funcionales dependientes de caminos la autointeracción de partículas cargadas no relativistas con el campo de Chern-Simons. Esto demuestra la gran utilidad que reside, tanto en el estudio de las teorías de calibre, como en la teoría de las representaciones geométricas, para describir fenómenos que aún hoy en día son de gran interés para la física, teniendo numerosas aplicaciones tanto experimentales como teóricas. Por ello, el presente trabajo utiliza estas herramientas para describir las interacciones consideradas en el mismo. Nuestro trabajo esta estructurado de la siguiente forma:

Primeramente, estudiamos y desarrollamos la cuantización de teorías de Campos de Calibre (topológicas y no topológicas) en el contexto de las representaciones de caminos y ciclos (o sus generalizaciones). En el primer capítulo de este trabajo presentamos un breve resumen del método de cuantización de Dirac [14], el cual generaliza el proceso canónico estándar al considerar sistemas singulares, es decir, sistemas donde existen dependencias funcionales entre las coordenadas generalizadas que impiden obtener las velocidades en términos de los momentos conjugados. Presentamos los casos de sistemas con ligaduras o vínculos tanto de primera clase como de segunda clase, exponiendo por separado los pasos a seguir en cada caso para concretar la cuantización.

Posteriormente revisamos el estudio de las representaciones geométricas, haciendo énfasis en el grupo de caminos, el grupo de ciclos, y el grupo de superficies. En cada caso, presentamos la forma en que se define el producto entre los elementos geométricos a tratar, para que dicho espacio constituya un grupo. Presentamos los operadores pertinentes y relaciones fundamentales que cumplen los mismos en dichos espacios. Con esto asentamos las bases para el estudio de las teorías de campos de calibre en el marco de la representación geométrica.

En el capítulo 3, presentamos el estudio de teorías de campos de calibre no topológicas, enfocándonos inicialmente en la interacción de una partícula cargada no relativista con

el campo de Maxwell en $3 + 1$ dimensiones [9]. Presentamos la cuantización por medio del método de Dirac y la representación en el espacio de caminos. Exponemos la forma que toma el momento covariante de la partícula en dicha representación, el cual se corresponde con el operador diferencial introducido por Mandelstam en [1], así como la forma en la cual se escribe la ligadura. Para que la realización sea consistente, la posición de la partícula debe coincidir con uno de los extremos de los tramos de camino, que “emergen” o “arriban” a la partícula, además de exigir la cuantización de la constante de acoplo o carga q . Esto proporciona un esquema de líneas de Faraday para describir la interacción.

A modo de generalización del caso anterior, consideramos ahora la interacción de un objeto material extendido. Presentamos la interacción entre una cuerda cerrada no relativista con el campo de Kalb-Ramond. Siguiendo el mismo esquema, realizamos la cuantización por el método de Dirac, y la posterior representación en el espacio de superficies, donde, en analogía al caso anterior, se observa que la realización del momento covariante de la cuerda es una generalización del operador de Mandelstam, además de observar que la ligadura obtenida queda resuelta de forma inmediata si se exige que la frontera de los manojos u hojas de superficie coincidan con la “posición” de la cuerda. De nuevo, la realización es consistente cuando la constante de acoplo o carga de la cuerda ϕ este cuantizada, es decir, que sea un entero n del valor de la carga fundamental de Kalb-Ramond, proporcionando un esquema de “superficies de Faraday”.

En el capítulo 4 introducimos el estudio de teorías de campos de calibre topológicas. Presentamos, a modo introductorio, la Teoría de Chern-Simons en $2 + 1$ dimensiones, enfocándonos en diferentes métodos para realizar la cuantización de la misma. Presentamos tres métodos de cuantización; el método de Dirac usual, otro donde se consideran desde el inicio ciertas cantidades como multiplicadores de Lagrange, sustentado en el hecho de que dichas cantidades no poseen dinámica alguna, y por último, el método propuesto en [15] por R. Jackiw, que permite obtener los resultados encontrados por el método de Dirac de una forma directa, al obtener las relaciones de conmutación y el hamiltoniano de manera inmediata, y obteniendo los vínculos de la teoría sin necesidad de clasificarlos en vínculos de primera o segunda clase. Este método se puede utilizar siempre y cuando el lagrangiano sea a lo sumo, lineal en las derivadas temporales.

En el capítulo 5, abordamos inicialmente la Teoría Topológica Masiva, la cual consta de un término de campo electromagnético sumado a un término tipo Chern-Simons libre. Se realizó la cuantización, y se procedió a representar las cantidades de interés en el es

pacio de caminos. Se observa que, a diferencia de las teorías anteriormente estudiadas, la ligadura no se resuelve de forma directa con la exigencias antes mencionadas (cuantización de la constante de acoplo y la coincidencia de los extremos o fronteras de los objetos geométricos con la posición de la materia). La ligadura impone restricciones sobre los funcionales de onda que describen al espacio físico. Esta característica es intrínseca a las teorías de carácter topológico. En esta sección presentamos el método general propuesto en [13] para encontrar los funcionales de onda que satisfacen este tipo de ligaduras, donde se proporciona la forma general que tendrán dichos funcionales, para luego ser obtenidos explícitamente al resolver la ligadura.

Posteriormente, y como modo preparativo para la última sección del trabajo, estudiamos la interacción topológica entre una partícula cargada no relativista con el campo de Chern-Simons. Luego de la correspondiente cuantización, consideramos una realización en el espacio de caminos, obteniendo que el momento covariante de la partícula contiene un término que corresponde al operador de Mandelstam sumado a un término que explica como deben trasladarse los tramos de camino atados a las partículas en orden de preservar la invariancia de calibre. Por otro lado, se expone que, al ser la ligadura de carácter topológico, no resulta suficiente exigir la cuantización de la carga. Se obtienen imposiciones sobre los funcionales de onda físicos, las cuales encontramos de forma análoga al caso TM. Veremos que la interacción está descrita en términos geométricos, por el ángulo subtendido por tramos de camino medidos desde uno de los puntos extremos de dichos tramos, estando el otro extremo “ocupado” por la partícula.

Por último, y como objetivo principal del trabajo, presentamos la interacción entre dos partículas cargadas, no relativistas, mediada a través de un campo BF en $2+1$ dimensiones. Realizamos la cuantización canónica y la posterior representación en el espacio de caminos. Se muestra que el momento covariante de ambas partículas concuerda, al igual que para otras teorías estudiadas, con el operador diferencial de Mandelstam. Además, surgen dos ligaduras, siendo una análoga al caso de Maxwell con partículas, y la otra de naturaleza topológica. Para resolver dicha ligadura, las imposiciones presentes sobre los funcionales de onda son similares a los casos anteriores. Sin embargo, en contraste con la teoría de autointeracción de Chern-Simons con partícula masiva cargada, la interacción viene descrita en términos del ángulo subtendido por tramos de caminos, los cuales están “atados” a una de las partículas, medidos esta vez, desde la posición de la otra partícula, que se encuentra “sola”. Esto elimina los problemas de autointeracción o de auto-ángulo que pueden ser complicados de resolver, como ocurre en teoría de autointeracción entre

campos de Chern-Simons con partículas cargadas no relativistas.

Capítulo 2

Método de Cuantización de Dirac para Campos de Calibre y la Teoría de las Representaciones Geométricas

El método de cuantización de Dirac, aún hoy en día, representa uno de los métodos más factibles para realizar el estudio de un sistema físico, inicialmente clásico, en el marco de la teoría cuántica. El mismo constituye una herramienta directa y precisa, que generaliza el tratamiento canónico clásico para el caso de lagrangeanos singulares. Por otra parte, la Teoría de Representaciones Geométricas permite un enfoque elegante para el tratamiento de las teorías de calibre, ya que permite describir un sistema físico en términos de objetos geométricos (curvas y superficies). En particular, representa una forma interesante y muy útil para escribir y resolver las ligaduras que se presentan al tratar teorías de campos de calibre. A continuación, presentaremos una breve introducción a ambos formalismos, ya que en ellos se basa la idea central de nuestro trabajo.

2.1. Método de Cuantización de Dirac

Es bien conocido que la formulación canónica estándar constituye una herramienta esencial para el estudio de la dinámica de un sistema físico, siempre y cuando, el lagrangeano a estudiar no presente ningún tipo de singularidades. En el caso de un lagrangeano singular, es decir, cuando el determinante de la matriz Hessiana es nulo:

$$\det \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j} = 0, \quad (2.1)$$

la formulación canónica usual presenta dificultades. El método presentado por Dirac (cita) también parte de la formulación Hamiltoniana, pero se diferencia del método estándar en

el hecho de que no exige la no singularidad del lagrangeano mencionado, representando así una generalización del mismo. Por simplicidad, trabajaremos con una teoría dinámica con un número finito de grados de libertad. Luego, la generalización a sistemas con infinitos grados de libertad (campos), es muy sencilla de obtener de manera formal. Cuando el lagrangeano es singular, en general, existen dependencias funcionales entre las velocidades y los momentos que no permite obtener las velocidades de forma sencilla, de hecho, en este caso, existen un número de relaciones del tipo:

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad \text{con } m = 1, \dots, M \quad (2.2)$$

que relacionan a las variables dinámicas de la teoría. A las ϕ_m se les llama vínculos o ligaduras primarias. Consideremos ahora la cantidad:

$$H = p\dot{q} - L \Big|_{p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}, \quad (2.3)$$

la variación funcional de esta cantidad respecto a las coordenadas q y p será entonces:

$$\delta(p\dot{q} - L) = \delta p\dot{q} - \left(\frac{\delta L}{\delta q} \right) \delta q, \quad (2.4)$$

es decir, las variaciones solo ocurren en q y p , estando las mismas restringidas por las relaciones (2.2). A (2.3) se le llama Hamiltoniano Canónico, sin embargo, éste no está definido de forma única, ya que cualquier combinación lineal de las ϕ_m puede ser agregada. Entonces, podemos introducir la cantidad:

$$H^* = H + u_m \phi_m, \quad (2.5)$$

donde los u_m representan multiplicadores de Lagrange (coeficientes que en general, son funciones de q , p y el tiempo). Este H^* , con la salvedad de que no es único, es tan bueno para describir la teoría, como H . La aplicación del método variacional a H^* , permite deducir las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p}, \quad (2.6)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q}, \quad (2.7)$$

$$\phi_m \approx 0. \quad (2.8)$$

las cuales describen la evolución dinámica del sistema con ligaduras. Con la introducción de los corchetes de Poisson, definidos como:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$$

(donde f y g son funciones de las coordenadas q y p), las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\dot{q} = \{q, H^*\}, \quad (2.9)$$

$$\dot{p} = \{p, H^*\}, \quad (2.10)$$

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad (2.11)$$

donde (\approx) representa una igualdad débil, es decir, ϕ_m , aún estando restringida a ser cero, presenta corchetes de Poisson no nulos con las variables canónicas, por lo tanto, se igualara a cero luego de calculados dichos corchetes. Para que las ecuaciones de movimiento describan la evolución dinámica del sistema, y sean consistentes, es necesario exigir que las ligaduras o vínculos se preserven en el tiempo,

$$\dot{\phi}_m(q, p) = \{\phi_m, H^*\} \approx 0, \quad (2.12)$$

es decir, que no presenten dinámica alguna. Esta exigencia, siempre y cuando el lagrangeano no conlleve a inconsistencias en las ecuaciones de movimiento, establece tres tipos de casos a tratar:

1. Se obtienen relaciones del tipo $0 = 0$. La ecuación resultante de la preservación en el tiempo se satisface idénticamente, con ayuda de los vínculos primarios.
2. Se obtienen relaciones independientes de los u_m , es decir, del tipo:

$$\chi_k(q, p) = 0 \quad \text{con } k = 1, \dots, K.$$

3. Se obtiene relaciones para los coeficientes u_m , del tipo:

$$u_m = u_m(q, p).$$

En el primer caso, no se obtiene mas información relevante de la proporcionada anteriormente por el método, y entonces el proceso culmina. Si se obtiene el caso (3), las relaciones obtenidas para los coeficientes puede ser sustituidas en H^* para determinar las ecuaciones de movimiento. En caso de obtener el caso (2), las χ_k representan nuevas ligaduras de la teoría, llamadas ligaduras secundarias, y las mismas, imponen nuevas relaciones de consistencia al exigirles que se preserven en el tiempo débilmente, es decir:

$$\dot{\chi}_k \approx 0.$$

Se debe entonces repetir el proceso anteriormente mencionado hasta obtener un conjunto de ligaduras secundarias mas un número de relaciones para las coeficientes u_m . En

resumen, siempre que las sucesivas condiciones de consistencia conlleven al caso (2), se debe repetir el proceso, culminando el mismo solo al obtener (1) o (3). El hecho de que existan ligaduras secundarias, no implica un tratamiento diferente de las primarias, la única diferencia entre ambas es que unas son obtenidas como consecuencia del cálculo de los momentos conjugados (primarias), mientras que las otras (secundarias), se obtienen, utilizando a su vez, las ecuaciones de movimiento. Es conveniente entonces, definir todas las ligaduras obtenidas como el conjunto:

$$\phi_s(q, p) \approx 0 \quad \text{con } s = 1, \dots, M, M + 1, \dots, M + K \equiv S,$$

donde las ligaduras primarias son desde $s = 1$ hasta $s = M$, y las restantes son llamadas secundarias, las cuales son obtenidas al realizar el procedimiento de preservación y el posterior análisis de los casos antes mencionados.

Existe una clasificación para las ligaduras que resulta mas relevante para el método de Dirac que la clasificación en primarias o secundarias, la cual consiste en clasificarlas en ligaduras de primera o segunda clase. Supongamos cualquier variable dinámica

$$R = R(q, p),$$

se establece que R es de primera clase si cumple con:

$$[R, \phi_s] \approx 0 \quad \text{con } s = 1, \dots, S, \quad (2.13)$$

en caso contrario, R es de segunda clase. Entonces, una ligadura que cumpla con la condición (1.13), será llamada de primera clase, en caso contrario, será de segunda clase, no siendo reelevant el hecho de que sea primaria o secundaria.

Con lo anterior expuesto, se termina la generalización del método clásico para el tratamiento de sistemas donde el lagrangeano es singular. En orden de realizar la consecuente cuantización del sistema a tratar, es importante diferenciar si el sistema presenta ligaduras de primera clase o ligaduras de segunda clase, ya que ambos caso difieren notablemente en el tratamiento.

2.1.1. Cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de primera clase.

En este caso, el procedimiento es directo, se prescribe:

1. Las variables canónicas pasan a ser operadores en el espacio de Hilbert correspondiente a la teoría:

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow \hat{q}, \\ p &\longrightarrow \hat{p}. \end{aligned}$$

2. Los corchetes de Poisson entre las variables canónicas se convierten en relaciones de conmutación entre operadores, es decir:

$$\{ \quad , \quad \} \rightarrow -i[\quad , \quad],$$

siendo el corchete fundamental:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}.$$

3. Los funcionales de onda físicos son aquellos que cumplen con las condiciones impuestas por las ligaduras, esto es:

$$\hat{\phi}_s(\hat{q}, \hat{p}) |\psi\rangle = 0.$$

4. La evolución temporal del sistema esta determinada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle.$$

Por último, se hace corresponder con operadores, a cada objeto de primera clase obtenido mediante este análisis. Dicho operador es llamado observable en el sentido de Dirac, y los mismos deben cumplir con:

$$[\hat{O}, \hat{\phi}_s] |\psi\rangle \approx 0,$$

es decir, deben conmutar con las ligaduras de primera clase, por lo tanto son clasificados como objetos invariantes de calibre.

2.1.2. Cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de segunda clase.

La existencia de ligaduras de segunda clase indica que en la teoría existen grados de libertad adicionales que no son de interés físico, es necesario entonces redefinir los corchetes de Poisson. Dirac en [14], propuso una generalización, la cual es denominada Corchetes de Dirac. A continuación se expondrá someramente el procedimiento para obtenerlos.

Para sistemas con un número finito de grados de libertad, los corchetes de Dirac se definen como:

$$\{A, B\}^D = \{A, B\} - \{A, \phi_s\}(C_{ss'})^{-1}\{\phi_{s'}, B\}, \quad (2.14)$$

donde A y B son variables dinámicas del sistema, ϕ_s las ligaduras de segunda clase de la teoría, y $(C_{ss'})^{-1}$ es la inversa de la matriz:

$$C_{ss'} = \{\phi_s, \phi_{s'}\},$$

la cual es antisimétrica y tiene determinante distinto de cero, asegurando su invertibilidad. Al obtener los corchetes de Dirac, el proceso de cuantización prescribe los siguientes pasos:

1. Se igualan fuertemente a cero las ligaduras de segunda clase.
2. Las variables canónicas pasan a ser operadores en el espacio de Hilbert.

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow \hat{q}, \\ p &\longrightarrow \hat{p}. \end{aligned}$$

3. Los corchetes de Dirac entre las variables canónicas se convierten en relaciones de conmutadores entre operadores.

$$\{ \quad , \quad \}^D \longrightarrow -i[\quad , \quad],$$

siendo el conmutador fundamental:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}.$$

4. Los funcionales de onda físicos son los que cumplen con las condiciones impuestas por las ligaduras, es decir

$$\hat{\phi}_s(\hat{q}, \hat{p})|\psi\rangle = 0,$$

donde es de importancia destacar que las $\hat{\phi}_s$ son las ligaduras de primera clase, ya que las de segunda clase se colocan como fuertemente cero, tal como lo indica el paso 1.

5. La evolución temporal del sistema esta determinada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle.$$

Todo lo expuesto anteriormente, constituye la generalización del método canónico clásico para lagrangeanos singulares, y expone el procedimiento a seguir para la cuantización de un sistema físico, ya sea con ligaduras de primera clase, o con ligaduras de segunda clase. Es importante mencionar que la generalización de este procedimiento para campos (sistemas continuos con infinitos grados de libertad) es directa, esto es, las variables canónicas dependen ahora una variable x , la cual es continua; se generaliza la noción de derivada parcial a una derivada parcial funcional, y los lagrangeanos y hamiltonianos corresponden ahora a la integral de una densidad (lagrangeana o hamiltoniana respectivamente) en el espacio. En el presente trabajo trataremos con teorías de campos, siendo numerosos los ejemplos de esta generalización.

2.2. Teoría de las Representaciones Geométricas

Diversas teorías de calibre han encontrado una herramienta útil en la representación geométrica para su cuantización. Esta herramienta proporciona una forma esquemática para resolver e interpretar las ligaduras de calibre que surgen de forma inherente al cuantizar una teoría de campos, ya que establece un esquema visual (en términos de objetos geométricos) de las mismas. Desarrollaremos a manera de introducción la formulación de caminos introducida originalmente en [16], enfocándonos solamente en el caso abeliano, principalmente por ser el caso de interés en el presente trabajo. Expondremos esta teoría guiados por los trabajos previos realizados por (citar Álgebras Duales en $2 + 1$ dimensiones y la Representación de Caminos) y (tesis ernesto). Además, estudiaremos el grupo de ciclos abeliano y el grupo de superficies abeliano, constituyendo estos últimos generalizaciones al grupo de caminos.

2.2.1. El grupo de Caminos Abeliano.

Es relevante comenzar la exposición de la teoría de representación de caminos realizando algunas definiciones pertinentes.

Producto entre curvas

Consideremos el intervalo $I = [0, 1]$ contenido en un espacio topológico X . Sea $\gamma_1 : I \rightarrow X$ una trayectoria definida desde un punto a a un punto b y $\gamma_2 : I \rightarrow X$ una trayectoria definida desde el punto b a un punto c . Entonces, la composición o producto

entre las dos trayectorias γ_1 y γ_2 , denotado como $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ es la función definida por:

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.15)$$

donde s constituye un parámetro utilizado para describir a las curvas. Como los casos a tratar en el presente trabajo son mas generales (no están limitados a un espacio X), consideraremos curvas pertenecientes a una variedad diferencial n -dimensional M_n , en la cual se define al conjunto de curvas orientadas, suaves a trozos como $P(M_n)$. A los elementos de este conjunto los denotaremos como γ_α^β , con α todos los puntos iniciales y β todos los puntos finales de los tramos continuos de γ . La definición (2.15) define un producto entre los elementos $P(M_n)$ tal que el resultado de esta operación sea un elemento perteneciente a M_n . Sin embargo, debido a no existir un elemento identidad usando solo esta definición, es necesario introducir un producto entre curvas distinto en M_n , en orden de dotar a este conjunto de curvas de una estructura de grupo abeliano. Para ello, definimos el objeto:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = \int_\gamma dy^i \delta^n(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.16)$$

conocido como factor de forma de la curva γ o T-objeto de un índice (cita). Este objeto extrae el vector tangente a la curva γ en el punto \vec{x} , y el mismo es independiente de la parametrización de la curva a tratar, siempre y cuando dicha parametrización preserve la orientación, es decir, se cumple:

$$\int_\gamma \frac{dy^i}{dt} \delta^n(\vec{x} - \vec{y}) dt = \int_\gamma \frac{dy^i}{dt'} \delta^n(\vec{x} - \vec{y}) dt',$$

por lo que, de ahora en adelante, se obviara la parametrización de la curva al escribir el factor de forma. Habiendo definido el factor de forma, se puede establecer una relación de equivalencia R entre curvas. Se dice que dos curvas γ y γ' , ambas pertenecientes a $P(M_n)$, son equivalentes sí y solo sí se cumple:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma') \quad (\gamma \sim \gamma'),$$

es decir, si sus factores de forma son iguales. Esta relación cumple con las siguientes propiedades:

- Es reflexiva: $\gamma \sim \gamma$

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma).$$

- Es simétrica: $\gamma \sim \gamma' \implies \gamma' \sim \gamma$

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma') \implies T^i(\vec{x}, \gamma') = T^i(\vec{x}, \gamma).$$

- Es transitiva: $\gamma \sim \gamma'$ y $\gamma' \sim \gamma'' \implies \gamma \sim \gamma''$

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma') \quad \text{y} \quad T^i(\vec{x}, \gamma') = T^i(\vec{x}, \gamma'') \implies T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma'').$$

Entonces, el conjunto de todas las curvas equivalentes descrito anteriormente define una clase de equivalencia. Denominaremos a esta clase de equivalencia $P(M_n)$, y a los elementos de dicha clase de equivalencia los denotaremos como caminos, es decir, se entiende como camino al conjunto de curvas suaves a trozo con el mismo factor de forma. Al ser los caminos curvas equivalentes, el producto entre ellos se define de forma directa como la composición entre caminos, es decir,

$$[\gamma] \bullet [\gamma'] = [\gamma \cdot \gamma'],$$

donde $[\gamma]$ indica la clase de equivalencia a la que pertenece el elemento γ . Es fácil ver, por medio de la definición de composición de curvas, que este producto es abeliano, esto es:

$$[\gamma_1] \bullet [\gamma_2] = [\gamma_1 \cdot \gamma_2] = [\gamma_2 \cdot \gamma_1] = [\gamma_2] \bullet [\gamma_1],$$

siendo esta relación sustentada por

$$T^i(\vec{x}, \gamma_1 \cdot \gamma_2) = T^i(\vec{x}, \gamma_2 \cdot \gamma_1).$$

Además, se asegura que el producto definido anteriormente, no depende del elemento escogido como representante de cada clase de equivalencia, es decir, si sustituimos γ y γ' por γ_0 y γ'_0 , se obtiene

$$[\gamma_0] \bullet [\gamma'_0] = [\gamma_0 \cdot \gamma'_0] = [\gamma] \cdot [\gamma'] = [\gamma] \bullet [\gamma'],$$

debido a que

$$T^i(\vec{x}, \gamma_0 \cdot \gamma'_0) = T^i(\vec{x}, \gamma \cdot \gamma'). \quad (2.17)$$

Con esta definición de producto entre clases de equivalencia, podemos comprobar que las mismas constituyen un grupo, es decir, cumplen las siguientes condiciones:

- Clausura: Por la forma en que está definido el producto, se cumple

$$[\gamma] \bullet [\gamma'] \in P(M_n).$$

- Asociatividad: El hecho que la composición de curvas sea una operación dotada de asociatividad, implica

$$[\gamma] \bullet ([\gamma'] \bullet [\gamma'']) = [\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')] = [(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''] = ([\gamma] \bullet [\gamma']) \bullet [\gamma''].$$

- Elemento Neutro: Definamos una curva constante $\gamma_p \in M_n$. Dicha curva cumple con la propiedad

$$[\gamma] \bullet [\gamma_p] = [\gamma \cdot \gamma_p] = [\gamma],$$

es decir, dicha curva es el Elemento Identidad o Elemento Neutro $[e]$ del grupo de caminos abeliano. Es usual denotar con el nombre de árbol a todos los miembros de la clase de equivalencia que cumpla con estas características. Como consecuencia se tiene que cada vez que se componga un camino con un árbol, el camino no presenta cambios (permanece inalterado). Para un árbol se tiene:

$$T^i(\vec{x}, \gamma_p) = 0,$$

relación que define completamente dicho concepto. Aunado a esto, se comprueba, por medio de la relación descrita arriba, que cualquier curva compuesta con su inversa constituirá también un árbol, esto es:

$$T^i(\vec{x}, \gamma \cdot \gamma^{-1}) = 0,$$

debido a que el proceso de componer dos curvas con orientaciones contrarias, da como resultado la cancelación de las mismas. Se comprueba además, que $[e]$ es único. Consideremos la existencia de un elemento $[e']$ cuyo representante es la curva $e' \in P(M_n)$, tal que se cumpla

$$[e'] \bullet [\gamma] = [\gamma] \quad \forall \gamma \in P(M_n),$$

lo cual implica:

$$T^i(\vec{x}, \gamma \cdot e') = T^i(\vec{x}, \gamma \cdot \gamma_p) \Rightarrow T^i(\vec{x}, e') = T^i(\vec{x}, \gamma_p),$$

es decir, se comprueba, al tener los mismos factores de forma, que $[e'] = [\gamma_p]$, es decir, e' y γ_p son equivalentes, demostrando así la unicidad del elemento neutro.

- Elemento Inverso: consideremos el elemento $[\gamma]^{-1}$ tal que $[\gamma] \bullet [\gamma]^{-1} = [\gamma]^{-1} \bullet [\gamma] = [e]$. Este elemento será la clase de equivalencia de la curva $\bar{\gamma}$, trazada con orientación inversa a la curva γ . De hecho, se comprueba:

$$T^i(\vec{x}, \gamma \cdot \bar{\gamma}) = T^i(\vec{x}, \gamma) + T^i(\vec{x}, \bar{\gamma}) = T^i(\vec{x}, \gamma) - T^i(\vec{x}, \gamma) = 0 = T^i(\vec{x}, \gamma_p).$$

Entonces, con todas las características presentadas, podemos asegurar que el producto definido entre clases de equivalencia dota a $P(M_n)$ de una estructura de grupo abeliano.

Por su utilidad a lo largo de todo el trabajo, es conveniente presentar que significado tiene la divergencia del factor de forma:

$$\partial_i T^i(\vec{x}, \gamma) = - \int dy^i \partial_i^{\vec{y}} \delta^n(\vec{x} - \vec{y}) = -\rho(\vec{x}, \gamma), \quad (2.18)$$

definida como la distribución de extremos de camino

$$\rho(\vec{x}, \gamma) = \sum_s (\delta^n(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^n(\vec{x} - \vec{\alpha}_s)). \quad (2.19)$$

Dicha distribución tiene soporte en los bordes de los tramos de camino $\partial\gamma$, diferenciado los puntos iniciales y finales por α_s y β_s respectivamente.

Derivación y operadores derivativos en la formulación de caminos.

Debido a su característica de grupo, es posible definir ciertos operadores de derivación en el espacio de caminos, los cuales actúan sobre funcionales de onda dependientes de dichos caminos. Consideremos funcionales de onda complejos:

$$\psi(\gamma) \in C \quad P(M_n) \ni \gamma,$$

de forma tal que ellos representan las funciones de onda correspondientes a los estados físicos. Consideremos el cambio experimentado por $\psi(\gamma)$ cuando se modifica el camino γ , entendiéndose dicha modificación como la composición de γ con un camino que es infinitesimal. Sea este camino infinitesimal $u_{\vec{x}}$, el cual tiene como extremo inicial el punto \vec{x} y su extremo final esta desplazado infinitesimalmente según la dirección del vector tangente \vec{u} , es decir, el camino denotado como $u_{\vec{x}}^{x+u}$. Entonces, el efecto de esta modificación sobre los funcionales $\psi(\gamma)$ será:

$$\psi(\gamma \bullet u_{\vec{x}}) = \psi(\gamma) + u^i \delta_i(\vec{x}) \psi(\gamma).$$

Esta relación define la derivada de caminos $\delta_i(\vec{x})$, que consiste en el generador infinitesimal de las deformaciones de camino γ al agregar nuevos tramos a los mismos. Este operador derivativo actúa sobre cualquier funcional definido en el espacio de caminos; en particular, es de interés ver como es la acción del mismo sobre el factor de forma:

$$\begin{aligned} T^i(\vec{x}, \gamma \bullet u_{\vec{y}}) &= \int_{\gamma \bullet u_{\vec{y}}} dz^i \delta^n(\vec{x} - \vec{z}) = T^i(\vec{x}, \gamma) + u^i \delta^n(\vec{x} - \vec{y}) \\ \implies \delta_i(\vec{y}) T^j(\vec{x}, \gamma) &= \delta^j_i \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.2. Generalizaciones del grupo de caminos. Grupos de Ciclos y Grupo de Superficies.

Grupo de ciclos.

El grupo de caminos abeliano contiene un subgrupo constituido por el subconjunto de curvas cerradas. Es denominado el grupo de ciclos abeliano, y si bien cumple con todas las propiedades y definiciones estudiadas para el grupo de caminos, esto es, el concepto de curva orientada y sus propiedades, la definición de factor de forma y del producto entre curvas; es necesario definir de manera análoga una derivada de ciclos, que consiste en agregar a un camino dado un camino cerrado o ciclo infinitesimal. En este caso, el incremento se denota como el ciclo $\delta C = u_{\vec{x}} \bullet v_{\vec{x}+\vec{u}} \bullet \bar{u}_{\vec{x}+\vec{u}+\vec{v}} \bullet \bar{v}_{\vec{x}+\vec{v}}$, el cual delimita el borde de un área infinitesimal σ , de elemento de área $\sigma^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$, generada por los vectores \vec{u} y \vec{v} . Esta variación infinitesimal, actuando sobre los funcionales de onda, da como resultado:

$$\psi(\gamma \bullet \delta C) - \psi(\gamma) = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \Delta_{ij}(\vec{x}) \psi(\gamma),$$

relación que define la derivada de ciclo $\Delta_{ij}(\vec{x})$, la cual se relaciona con la derivada de caminos de siguiente manera:

$$\Delta_{ij}(\vec{x}) = \partial_i \delta_j(\vec{x}) - \partial_j \delta_i(\vec{x}). \quad (2.21)$$

Grupo de Superficies.

De manera similar a la descrita para definir el grupo de caminos y el subgrupo de ciclos, podemos definir grupos para estructuras geométricas p-dimensionales (cita). En particular, para p=2, es decir, para una estructura 2-dimensional, podemos definir el grupo de superficies, siendo posible realizar el estudio de forma completamente análoga, es decir, podemos dotar a este nuevo grupo de una estructura similar al factor de forma, de un producto entre sus elementos, y de ciertos operadores derivativos convenientes, los cuales actúan ahora sobre funcionales de ondas dependientes de superficies.

Consideremos el espacio de pedazos de superficies suaves (la aplicación de los reales a la variedad es continua) y orientadas en R^3 . Entonces, una aplicación $[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M_n$, tal que:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (s, t) \longrightarrow \Sigma(s, t) \in M_n,$$

contiene todos los puntos de una superficie Σ (s y t son parámetros para describir a la superficie). Un elemento de este espacio será la unión de varios pedazos de superficies, incluyendo aquellas que son cerradas. Se denotan a dichos elementos por Σ . Se entiende

como producto en este espacio o variedad, a la composición de superficies (de manera análoga al producto de curvas). También es útil generalizar el concepto de factor de forma:

$$T^{ij}(x, \Sigma) = \int_{\Sigma} d\Sigma_y^{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.22)$$

con

$$d\Sigma_y^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial s} \frac{\partial y^j}{\partial t} - \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s}.$$

Este factor de forma o T objeto de dos índices, define una relación de equivalencia entre superficies, es decir, sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies, entonces $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ sí y solo sí

$$T^{ij}(x, \Sigma_1) = T^{ij}(x, \Sigma_2),$$

siendo importante aclarar que al igual que para curvas, esta relación no depende de la parametrización dada a las superficies. De esta forma, es posible establecer una clase de equivalencia de superficies $[\Sigma]$. Entonces, la composición de superficies, aunada a la relación de equivalencia definida, definen un producto entre clases de equivalencias de superficie que tiene la estructura de un grupo abeliano. El grupo obtenido es llamado el Grupo de Superficies Abiertas.

Consideremos funcionales de onda en el espacio de superficies abiertas $\psi(\Sigma)$ y veamos el cambio que experimentan cuando modificamos su argumento “pegando” un elemento de superficie de área infinitesimal σ^{ij} , en el punto x . Entonces, la relación:

$$\psi(\delta\Sigma \bullet \Sigma) - \psi(\Sigma) = \sigma^{ij} \delta_{ij}(\vec{x}) \psi(\Sigma), \quad (2.23)$$

define la derivada de superficies abiertas δ_{ij} , siendo $\sigma^{ij} = u^i v^j - v^j u^i$ el elemento de superficie generado por los vectores \vec{u} y \vec{v} . De forma similar a la derivada de ciclos para el caso del grupo de caminos, (entendiéndose ciclo como un camino cerrado), podemos definir una derivada de superficies cerradas Δ_{ijk} ,

$$\psi(\delta\Sigma \bullet \Sigma) - \psi(\Sigma) = V^{ijk} \Delta_{ijk}(\vec{x}) \psi(\Sigma), \quad (2.24)$$

teniendo como efecto agregar un cubo infinitesimal de volumen V^{ijk} (generado por los vectores infinitesimales \vec{u} , \vec{v} y \vec{w}), al argumento de $\psi(\Sigma)$. La relación existente entre δ_{ij} y Δ_{ijk} (análoga a la relación establecida entre la derivada de caminos y la derivada de ciclos) esta definida por:

$$\Delta_{ijk} = \partial_i \delta_{jk} + \partial_j \delta_{ki} + \partial_k \delta_{ij}. \quad (2.25)$$

De manera conveniente e ilustrativa, veamos como actúa la derivada de superficies abierta sobre el T-objeto de dos índices:

$$\delta_{ij}(\vec{x}) T^{kl}(\vec{y}, \Sigma) = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.26)$$

Veamos también que significado tiene la divergencia de T^{ij} , esto es:

$$\partial_i T^{ij}(\vec{x}, \Sigma) = -T^j(\vec{x}, \partial\Sigma), \quad (2.27)$$

donde $\partial\Sigma$ representa la frontera de la superficie Σ , es decir, la divergencia del T objeto de dos índices es una distribución de curvas. Esta distribución de curvas coincide con el factor de forma de caminos evaluado justo donde se encuentra la frontera de Σ .

Por último, es importante recalcar que la contracción $\epsilon_{ijk} T^{ij}(\vec{x}, \Sigma)$ produce una distribución de normales con soporte en la superficie, ya que la cantidad $\epsilon_{ijk} d\Sigma_y^{ij}$ proporciona el vector normal a la superficie en el punto \vec{y} , siendo esta totalmente análoga a la distribución de puntos extremos para el caso de caminos.

Con esto damos por concluida esta breve introducción al método de cuantización de Dirac, y la teoría de Representaciones Geométricas. En los sucesivos capítulos, daremos varios ejemplos del uso del formalismo de Dirac para cuantizar teorías de calibre, y de como las representaciones geométricas constituyen un método útil para facilitar la resolución de sistemas con ligaduras tanto no topológicas, como topológicas.

Capítulo 3

Teorías de campos de calibre no topológicas.

El método de cuantización de Dirac constituye una herramienta de gran importancia para el estudio de sistemas físicos de calibre, el mismo permite pasar del caso clásico, al caso cuántico, evitando las dificultades presentes en otros métodos utilizados. A su vez, la teoría de representaciones geométricas se ha utilizado en las teorías de calibre ya que permite expresar los funcionales de onda en términos de elementos pertenecientes al espacio de caminos o superficies. De esta forma, es posible imponer las ligaduras o vínculos sobre dichos funcionales de forma geométrica, lo cual, proporciona un enfoque práctico y elegante. En el caso de las teorías no topológicas, se obtiene que las restricciones obtenidas para la resolución de las ligaduras están impuestas solamente sobre la forma de los caminos (o superficies) que son argumento de los funcionales de onda.

A modo introductorio al trabajo posterior a realizar, y de forma ilustrativa tanto de la aplicación del Método de cuantización de Dirac, como de la teoría de las representaciones geométricas, estudiaremos dos interacciones de gran interés e importancia. Se realiza un análisis para la interacción de partículas no relativistas interaccionando con un campo de Maxwell y para la teoría de interacción de una cuerda cerrada no relativista a través de un campo de Kalb-Ramond. En ambos casos se utiliza la representación geométrica (de caminos y de superficies respectivamente), para la resolución de las ligaduras, y se observa que las restricciones son impuestas solo en la forma de los caminos (o superficies) y no sobre los funcionales de onda, presentando una visión de “líneas (o superficies) de Faraday”, así como la imposición de la cuantización de las constantes de acoplo en cada caso.

3.1. Partículas cargadas no relativistas interaccionando con un campo de Maxwell.

Consideremos una partícula no relativista con carga q , interaccionando a través de un campo de Maxwell. Esta interacción esta descrita por la acción:

$$S = \int dt \frac{1}{2} m (\dot{r}^i)^2 - \frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu}(\vec{x}, t) F_{\mu\nu}(\vec{x}, t) - \int d^4x j^\mu(\vec{x}) A_\mu(\vec{x}, t), \quad (3.1)$$

siendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.2)$$

el tensor electromagnético y

$$j^\mu = q v^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{r}), \quad (3.3)$$

la corriente generalizada, con $v^\mu = (1, \dot{\vec{r}})$. Haciendo uso de (3.3) podemos reescribir:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - eq \dot{r}^i A_i(\vec{r}, t) - eq A_0(\vec{r}, t) \right] - \frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu}(\vec{x}, t) F_{\mu\nu}(\vec{x}, t), \quad (3.4)$$

donde se ha utilizado

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \int d^3x \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) A_\mu(\vec{x}, t). \quad (3.5)$$

Luego de realizar la descomposición en 3 + 1 dimensiones obtenemos el lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - eq \dot{r}^i A_i(\vec{r}, t) - eq A_0(\vec{r}, t) - \int d^3x \left[\frac{1}{2} F_{0i}(\vec{x}) F^{0i}(\vec{x}) + \frac{1}{4} F_{ij}(\vec{x}) F^{ij}(\vec{x}) \right] \quad (3.6)$$

En orden de realizar el análisis canónico de la teoría, obtenemos el conjunto de momentos conjugados, esto es:

$$\pi^i(\vec{x}) = \dot{A}_i(\vec{x}) - \partial_i A_0(\vec{x}), \quad (3.7)$$

$$p_i = m \dot{r}^i - eq A_i(\vec{r}, t). \quad (3.8)$$

Cabe destacar que (3.7) y (3.8) permiten despejar las velocidades, por lo tanto, no constituyen ligaduras de la teoría, esto es:

$$\dot{r}^i = \frac{1}{m} [p_i + eq A_i(\vec{r}, t)], \quad \dot{A}_i(\vec{x}) = \pi^i(\vec{x}) + \partial_i A_0(\vec{x}).$$

Realizando la transformada de Legendre, y luego de algunos cálculos sencillos, se obtiene el Hamiltoniano:

$$H_0 = \frac{1}{2m} [\pi^i(\vec{x}) + eq A_i(\vec{r}, t)]^2 + eq A_0(\vec{r}, t) + \int d^3x \left(\frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2} + \pi_i(\vec{x}) \partial_i(\vec{x}) A_0(\vec{x}) \right), \quad (3.9)$$

donde se ha usado $\pi^i \pi^i = |\vec{E}|^2$ y $\vec{B} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} F^{ij}$. Si no poseer dinámica alguna, observamos que A_0 se comporta como un multiplicador de Lagrange, entonces reconocemos que:

$$\varphi(\vec{x}) = \partial_i(\vec{x})\pi^i(\vec{x}) - eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) \approx 0 \quad (3.10)$$

representa un vínculo de la teoría, y de su posterior preservación no se obtienen nuevas ligaduras. Además, $\varphi(\vec{x})$ resulta ser de primera clase, con lo cual el proceso de cuantización canónica es el usual:

- Las variables canónicas pasan a ser operadores en algún espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned} A_i(\vec{x}) &\longrightarrow \hat{A}_i(\vec{x}), & \pi^i(\vec{x}) &\longrightarrow \hat{\pi}^i(\vec{x}), \\ p_i &\longrightarrow \hat{p}_i, & r^i &\longrightarrow \hat{r}^i. \end{aligned}$$

- Se remplazan los corchetes de Poisson por los conmutadores:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\} &\longrightarrow i[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{r^i, p_j\} &\longrightarrow i[\hat{r}^i, \hat{p}_j] = i\delta_j^i. \end{aligned}$$

- El espacio físico esta constituido por los funcionales que satisfacen las relaciones:

$$\phi(\vec{x})|\psi\rangle = 0 \quad \varphi(\vec{x})\psi = [\partial_i(\vec{x})\pi^i(\vec{x}) - eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r})]|\psi\rangle = 0.$$

- La evolución temporal del sistema esta descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$H|\psi\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi\rangle,$$

donde

$$H = \frac{1}{2m} [p^i + eqA_i(\vec{r}, t)]^2 + \int d^3x \left(\frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right).$$

Los observables en el sentido de Dirac se obtienen de calcular $[\hat{O}(\vec{x}), \phi_s(\vec{y})] = 0$, en nuestro caso, se comprueba que el campo eléctrico \hat{E}^i , el campo magnético \hat{B}^i , la posición de la partícula \hat{r}^i y su momento covariante $\hat{p}_i + eq\hat{A}_i(\vec{r}, t)$ constituyen el conjunto de observables. Culminado el proceso de cuantización, procedemos a proponer una realización en el espacio de caminos que permita resolver las ligaduras obtenidas y que a su vez cumpla

con el álgebra de observables. Veamos que al realizar:

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}), \quad (3.11)$$

$$\hat{\pi}^i(\vec{x}) \longrightarrow eT^i(\vec{x}, \gamma), \quad (3.12)$$

$$\hat{F}_{ij}(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e}\Delta_{ij}(\vec{x}), \quad (3.13)$$

$$\hat{r}^i \longrightarrow r^i, \quad (3.14)$$

$$\hat{p}_i \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial r^i}, \quad (3.15)$$

el álgebra de observables se preserva, es decir, con la representación de caminos escogida se cumple:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})]\psi(\gamma) &= \left[\frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] \psi(\gamma) \\ &= i\delta_i^j\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} [\hat{r}^i, \hat{p}_j] &= \left[r^i, -i\frac{\partial}{\partial r^j} \right] \psi(\gamma) \\ &= i\delta_j^i\psi(\gamma). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Procedamos ahora a realizar (3.10) en la representación escogida. Entonces:

$$\varphi(\vec{x})\psi(\gamma) = 0 \rightarrow [e\partial_i(\vec{x})T^i(\vec{x}, \gamma) - eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r})]\psi(\gamma) = 0, \quad (3.18)$$

la cual, utilizando (2.18), se reescribe de la forma:

$$\left(e \sum_s [\delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s)] - q\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) \right) \psi(\gamma) = 0. \quad (3.19)$$

Se observa que la ligadura queda completamente resuelta cuando, se exige que la posición \vec{r} de la partícula coincida con alguno de los puntos extremos de los tramos de camino, además de exigir que la carga q sea un múltiplo entero de la constante de acoplo e , ($q = ne$). Se obtiene entonces n tramos de camino (correspondientes con el múltiplo de e) donde se presentan dos casos:

1. Para $n > 0$, entonces se tiene que:

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s) = n\delta^3(\vec{x} - \vec{r}),$$

lo que implica que los tramos de camino empiezan justamente en la posición de la partícula ($\vec{\alpha}_s = \vec{r}$), y terminan en el infinito ($\vec{\beta}_s \rightarrow \infty$).

2. Para $n < 0$, la situación es la siguiente:

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s) = -n\delta^3(\vec{x} - \vec{r}),$$

con lo cual, podemos establecer que los tramos de camino comienzan en el infinito ($\vec{\alpha}_s \rightarrow \infty$) y finalizan (entran) en la posición de la partícula ($\vec{r} = \vec{\beta}_s$).

Entonces, se establece un esquema donde los n tramos caminos se interpretan como líneas de Faraday, las cuales salen de las partículas y terminan en el infinito si n es positiva, y vienen del infinito y terminan en la posición de la partícula si n es negativa. Cabe destacar que la representación de caminos utilizada en la resolución de esta ligadura no admite múltiplos semi-enteros de la constante e , es decir, cada partícula emite (o absorbe) n líneas de Faraday con valor e .

Por último, mostraremos que en efecto, esta realización mantiene la invariancia de calibre de la teoría. Por medio de las relaciones de conmutación, es directo observar que tanto el campo eléctrico, como el magnético, al cumplir el álgebra de la teoría, preservan la invariancia de calibre. Veamos que sucede en el caso del momento covariante. En la realización escogida, el momento covariante tiene la forma:

$$[p_i + eqA_i(\vec{r}, t)]\psi(\gamma) \quad \longrightarrow \quad \left[-i\frac{\partial}{\partial r^i} + iq\delta_i(\vec{x}) \right] \psi(\gamma), \quad (3.20)$$

o, escrito de manera compacta:

$$-iD_i(\vec{r})\psi(\gamma), \quad (3.21)$$

donde $D_i(\vec{r})$ coincide con el operador diferencial introducido por Mandelstam en [1]. El efecto de esta derivada de Mandelstam sobre los funcionales de onda tiene una interpretación geométrica de gran importancia. En esta representación, las partículas están etiquetadas por puntos en el espacio (la posición \vec{r}), y los campos por caminos abiertos. El operador de Mandelstam desplaza a las partículas por medio de $\frac{\partial}{\partial r^i}$, mientras que los tramos de camino atados a dichas partículas son desplazados simultáneamente por medio de la derivada de caminos $\delta_i(\vec{x})$, es decir, $D_i(\vec{r})$ mide el cambio cuando tanto las partículas como sus tramos de camino asociados son desplazados infinitesimalmente. La forma en que actúa el operador de Mandelstam nos permite expresar los funcionales de onda como

$$\psi(\gamma) = \psi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{r}),$$

donde la dependencia de caminos y de las posiciones de las partículas esta expresada de forma explícita.

En conclusión, se observa que la representación de caminos describe la interacción entre partículas cargadas con un campo de Maxwell como una representación de líneas de Faraday, donde la carga de las partículas necesariamente esta cuantizada, siendo e la unidad fundamental de carga que, en este contexto, es la unidad de flujo eléctrico llevada por cada línea.

3.2. Cuerda cerrada en autointeracción con campo de Kalb-Ramond.

Consideremos ahora la generalización del estudio de la interacción de partículas cargadas con un campo de Maxwell, estudiando ahora un objeto extendido, es decir una cuerda, no relativista y cargada (esto es, presenta una constante de acoplo análoga a la carga eléctrica). Al igual que en el caso de Maxwell con partículas, trabajaremos bajo la condición de acoplo minimal, es decir, la cuerda considerada ahora interacciona con el campo a través de un potencial, que ahora es de carácter antisímtrico y tensorial $B_{\mu\nu}$. Este potencial tensor es el indicado para describir el acoplo con la corriente $j^{\mu\nu}$ de la cuerda. Recordando el caso de partículas puntuales, donde se presenta un tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, se hace la analogía para el caso de cuerda, esto es, se hará uso del tensor completamente antisímtrico de 3 índices $H_{\mu\nu\lambda}$. Esta aproximación es descrita por [10], y la misma será seguida de cerca para el desarrollo de esta parte de nuestro trabajo. Procedamos entonces al estudio canónico para luego aplicar el Método de cuantización de Dirac. La teoría esta descrita por la acción:

$$S = -\frac{1}{12g^2} \int d^4x H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \frac{\alpha}{2} \int dt \int d\sigma [(z^i - z'^i)] + \frac{1}{2} \int d^4x j^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

donde el campo de Kalb-Ramond $H_{\mu\nu\lambda}$ y el potencial $B_{\mu\nu}$ están relacionados mediante:

$$H_{\mu\nu\lambda} = 3\partial_{[\mu} B_{\nu\lambda]} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}, \quad (3.23)$$

con $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Se observa también que la acción contiene un término cinético para la cuerda, donde $z^i(t, \sigma)$ representan las coordenadas espaciales de la misma, dadas en términos del tiempo t y el parámetro σ que especifica la longitud de la cuerda. Indicaremos por puntos a las derivadas temporales de estas coordenadas y por primas a las derivadas correspondientes al parámetro σ . El término restante considera el acoplo minimal entre la cuerda y el potencial de Kalb-Ramond, a través de la corriente de la misma. Esta corriente esta descrita mediante:

$$j^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \phi \int dt \int d\sigma [\dot{z}^\mu z'^\nu - \dot{z}^\nu z'^\mu] \delta^4(\vec{x} - \vec{z}), \quad (3.24)$$

donde ϕ representa la constante de acople de la cuerda. Además, es importante mencionar que las constantes g y α representan la “masa” del campo de Kalb-Ramond y la tensión de la cuerda respectivamente. Haciendo uso de (3.24), podemos reescribir el término de acoplo como:

$$S_{int} = \frac{\phi}{2} \int dt \int d\sigma [\dot{z}^\mu z'^\nu - \dot{z}^\nu z'^\mu] B_{\mu\nu}(z) = \phi \int dt \int d\sigma \dot{z}^\mu z'^\nu B_{\mu\nu}(z).$$

Considerando la métrica $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$, al realizar la descomposición en 3 + 1 dimensiones y luego de algunos cálculos, la acción se reescribe como:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x & \left[\frac{1}{12g^2} H_{ijk} H_{ijk} - \frac{1}{4g^2} \left(\dot{B}_{ij} + \partial_j B_{0i} - \partial_i B_{0j} \right)^2 \right] \\ & + \int d\sigma \left[\frac{\alpha}{2} \left((\dot{z}^i)^2 - (z'^i)^2 \right) + \phi \dot{z}^i z'^j B_{ij}(\vec{z}) - \phi z'^i B_{0i}(\vec{z}) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En orden de aplicar el Método de Cuantización de Dirac, procedamos a definir los momentos conjugados, para luego calcular el hamiltoniano. Estos momentos serán:

$$p_i(\sigma) = \alpha \dot{z}^i(\sigma) + \phi B_{ij}(z) z'^j, \quad (3.26)$$

$$\pi^{ij}(\vec{x}) = -\frac{1}{2g^2} [\dot{B}_{ij} + \partial_j B_{0i} - \partial_i B_{0j}], \quad (3.27)$$

donde (3.26) y (3.27) permiten obtener las velocidades en términos de las coordenadas, es decir:

$$\dot{z}^i(\sigma) = \frac{1}{\alpha} \left[p_i(\sigma) - \phi B_{ij}(z) z'^j(\sigma) \right], \quad (3.28)$$

$$\dot{B}_{ij} = -2g^2 \pi^{ij} + \partial_j B_{0i} - \partial_i B_{0j} \quad (3.29)$$

Haciendo uso de lo anterior, definimos el hamiltoniano H_0 como:

$$\begin{aligned} H_0 = \int d^3x & \left[-g^2 \pi^{ij} \pi^{ij} - \frac{1}{12g^2} H_{ijk} H_{ijk} \right] + \int d\sigma \frac{1}{2\alpha} \left(P_i(\sigma) - \phi z'^j(\sigma) B_{ij}(z) \right)^2 \\ & + \int d\sigma \frac{\alpha}{2} (z'^j)^2 + \int d^3x [2\partial_j \Pi^{ij}(\vec{x}) + \rho^i(\vec{x})] B_{0i}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Es notable mencionar el hecho de que B_{0i} , al no poseer evolución dinámica en el tiempo, se comporta como un multiplicador de Lagrange, por lo cual, se puede definir como una ligadura secundaria la cantidad:

$$\varphi(\vec{x}) = \rho^i(\vec{x}) + 2\partial_j \pi^{ij}(\vec{x}), \quad (3.31)$$

siendo

$$\rho^i(\vec{x}) = \phi \int d\sigma z'^i(\sigma) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}). \quad (3.32)$$

El álgebra corchetes de Poisson esta descrita por:

$$\{z^\mu(\sigma), p_\nu(\sigma')\} = \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.33)$$

$$\{B_{\mu\nu}(\vec{x}), \pi^{\rho\lambda}(\vec{y})\} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\rho) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.34)$$

con los cuales es fácil comprobar que la ligadura mencionada no generan nuevos vínculos al ser preservada, además de resultar de primera clase. Entonces, el proceso de cuantización para esta situación prescribe:

- Las variables canónicas pasan a ser operadores en algún espacio de Hilbert:

$$B_{ij}(\vec{x}) \longrightarrow \hat{B}_{ij}(\vec{x}), \quad (3.35)$$

$$\pi^{ij}(\vec{x}) \longrightarrow \hat{\pi}^{ij}(\vec{x}), \quad (3.36)$$

$$z^i(\sigma) \longrightarrow \hat{z}^i(\sigma), \quad (3.37)$$

$$p_i(\sigma) \longrightarrow \hat{p}_i(\sigma). \quad (3.38)$$

- Se remplazan los corchetes de Poisson por los conmutadores:

$$\{z^i(\sigma), p_j(\sigma')\} \longrightarrow [\hat{z}^i(\sigma), \hat{p}_j(\sigma')] = i \delta_j^i \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.39)$$

$$\{B_{il}(\vec{x}), \pi^{jm}(\vec{y})\} \longrightarrow [\hat{B}_{il}(\vec{x}), \hat{\pi}^{jm}(\vec{y})] = \frac{i}{2} (\delta_i^j \delta_l^m - \delta_i^m \delta_l^j) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.40)$$

- El espacio físico esta constituido por los funcionales que satisfacen las relaciones:

$$\varphi(\vec{x}) |\psi\rangle = [\rho^i(\vec{x}) + 2\partial_i \pi^{ij}(\vec{x})] |\psi\rangle = 0. \quad (3.41)$$

- La evolución temporal del sistema, esta descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H} |\psi\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi\rangle, \quad (3.42)$$

con

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \sigma) &= \int d^3x \left[-g^2 \Pi^{ij} \Pi^{ij} - \frac{1}{12g^2} H_{ijk} H_{ijk} \right] \\ &+ \int d\sigma \left[\frac{1}{2\alpha} \left(P_i(\sigma) - \phi z'^j(\sigma) B_{ij}(z) \right)^2 + \frac{\alpha}{2} (z'^j)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Se comprueba entonces, que los observables en el sentido de Dirac están conformados por el campo eléctrico generalizado

$$\hat{\pi}^{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2g^2} \hat{H}_{0ij}(\vec{x}), \quad (3.44)$$

el campo magnético generalizado

$$\hat{B}(\vec{x}) = \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \hat{H}_{ijk}(\vec{x}), \quad (3.45)$$

la posición de la cuerda

$$\hat{z}^i(\sigma), \quad (3.46)$$

y su momento covariante

$$\hat{p}_i(\sigma) - \phi \hat{B}_{ij}(z) z'^j(\sigma). \quad (3.47)$$

Culminado el proceso de cuantización, y obtenidos los observables, procedemos a proponer una realización en el espacio de superficies que permita resolver la ligadura obtenida y que a su vez cumpla con el álgebra de observables. Vemos que hacer la siguiente realización:

$$\hat{B}_{ij}(\vec{x}) \longrightarrow 2i\delta_{ij}(\vec{x}), \quad (3.48)$$

$$\hat{\pi}^{ij}(\vec{x}) \longrightarrow \frac{1}{2} T^{ij}(\vec{x}, \Sigma), \quad (3.49)$$

$$\hat{z}_i(\sigma) \longrightarrow z_i(\sigma), \quad (3.50)$$

$$\hat{p}_i(\sigma) \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial z_i(\sigma)}, \quad (3.51)$$

el álgebra de conmutadores queda satisfecha, es decir:

$$\begin{aligned} [\hat{z}_i(\sigma), \hat{p}_j(\sigma')] \psi(\vec{z}, \Sigma) &= \left[z_i(\sigma), -i \frac{\partial}{\partial z_j(\sigma')} \right] \psi(\vec{z}, \Sigma) \\ &= i \delta_j^i \delta(\sigma - \sigma') \psi(\vec{z}, \Sigma), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} [\hat{B}_{ij}(\vec{x}), \hat{\pi}^{lm}(\vec{y})] \psi(\vec{z}, \Sigma) &= \left[2i\delta_{ij}(\vec{x}), \frac{1}{2} T^{lm}(\vec{y}, \Sigma) \right] \psi(\vec{z}, \Sigma) \\ &= \frac{i}{2} (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \psi(\vec{z}, \Sigma), \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde hemos establecido que los funcionales de onda dependen de la posición $z^i(\sigma)$ de la cuerda y de las superficies Σ correspondientes a la realización escogida. Estudiemos ahora como se escribe (3.31) en la realización escogida:

$$\left[\partial_i T^{ij}(x, \vec{\Sigma}) + \phi \int d\sigma z'^j(\sigma) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \right] \psi(\vec{z}, \Sigma) = 0. \quad (3.54)$$

Usando la relación (2.27), se obtiene:

$$\left(- \int_{\partial\Sigma} = \gamma d\sigma z'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) + \phi \int_{cda} d\sigma z'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \right) \psi(\vec{x}, \Sigma) = 0, \quad (3.55)$$

siendo $\partial\Sigma$ la frontera o borde de Σ . La forma de resolver esta ligadura es análoga a la utilizada para el caso de partículas puntuales interaccionando con un campo de Maxwell,

donde se adopta un esquema de líneas de Faraday y los caminos coinciden con la posición de las partículas. Similarmente, si exigimos que la posición de la cuerda y la frontera de la superficie coincidan, podemos escribir la ligadura como:

$$(\phi - 1) \left[\int_{cda} d\sigma z'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \right] \psi(\vec{z}, \Sigma) = 0, \quad (3.56)$$

con lo cual se puede observar que la misma queda resuelta si tomamos $\phi = 1$. En este caso se puede decir que la superficie emana o sale de la cuerda. Supongamos ahora que la frontera de la superficie tiene orientación contraria a la cuerda. Entonces, este caso es interpretado como si la superficie termina o llega a la cuerda. Hemos expuesto la resolución de la ligadura para el caso en que ϕ sea la unidad, a modo de generalizar, podemos tener $\phi = n$ con n un entero, y su signo dependiendo de que las n hojas o capas que componen a la superficie sean emanadas (n positivo) o absorbidas (n negativo) por la cuerda. De nuevo obtenemos que, para resolver la ligadura, es necesario que la carga de la cuerda este cuantizada, es decir, cada superficie tendrá n hojas o capas, cada una de estas hojas llevando una unidad de flujo eléctrico de Kalb-Ramond.

Es interesante realizar también el estudio de momento covariante de la cuerda bajo el esquema de esta representación de superficies. Con la realización escogida, podemos entonces escribir dicho momento como:

$$\left[P_i(\sigma) - \phi B_{ij}(\vec{z}) z'^j \right] \psi(\vec{z}, \Sigma) \rightarrow -i \left[\frac{\delta}{\delta z^i(\sigma)} - 2i\phi \delta_{ij}(\vec{z}) z'^j \right] \psi(\vec{z}, \Sigma), \quad (3.57)$$

el cual actúa como un especie de derivada de Mandelstam generalizada (cita), es decir, la derivada funcional respecto a las coordenadas $z^i(\sigma)$ de la cuerda desplazan a la misma de forma infinitesimal, mientras que el termino $2i\phi \delta_{ij}(\vec{z}) z'^j$, que contiene a la derivada de superficies, desplaza infinitesimalmente a la superficie atada a la cuerda, especificando a través de la contracción con z'^j (que resulta ser la dirección tangente a la coordenada posición) la forma como debe trasladarse y luego unirse la cuerda y su superficie en orden de mantener el espacio físico. Si tenemos un manajo de n hojas o capas, el hecho de que aparezca la constante de acople ϕ en este término asegura que el manajo se mantenga unido al trasladarse con la cuerda, permitiendo conservar la invariancia de calibre.

En resumen, hemos realizado la cuantización de la interacción de cuerdas cerradas con un campo tipo Kalb-Ramond, y su posterior representación geometrica, obteniendo una representación de superficies cuya consistencia radica en la cuantización de la carga de la cuerda, es decir, los valores permitidos para la constante de acople ϕ son números enteros de la unidad fundamental de flujo eléctrico de la cuerda, siendo completamente similar a

la teoría de partículas puntuales interaccionando a través de un campo de Maxwell. De hecho, al igual que para el caso mencionado donde se obtuvo una representación de líneas de Faraday y una dependencia de caminos en los funcionales de onda, para la cuerda en autointeracción se obtiene una visión de Superficies de Faraday, donde, en similitud a la interpretación dada para los tramos de camino (son los portadores de la unidad fundamental de flujo eléctrico para el caso puntual), las hojas o capas que conforman a la superficie que emana de una cuerda son los portadores de la unidad de flujo de Kalb-Ramond, existiendo n hojas o capas, equivalentes a el valor entero n de la constante de acoplo, mostrando así explícitamente la cuantización de la misma.

Capítulo 4

Teoría de Chern-Simons en $2 + 1$ dimensiones.

A continuación, expondremos la Teoría de Chern-Simons libre en $2 + 1$ dimensiones, como introducción a las teorías topológicas. Desarrollaremos tres métodos para realizar la cuantización de la misma, enfocandonos solo en este proceso, con el sentido de realizar la escogencia de método único a utilizar en las siguientes secciones.

4.1. Cuantización Canónica

La acción que describe esta teoría esta dada por:

$$S_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda. \quad (4.1)$$

De la cual se obtiene que, las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del sistema serán:

$$\frac{\delta S_{CS}}{\delta A_\mu} = 0 \implies \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left(\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) = 0 \quad (4.2)$$

$$\implies \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = 0 \quad (4.3)$$

$$\implies k \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = 0. \quad (4.4)$$

Consideremos ahora las transformaciones de calibre:

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda \quad (4.5)$$

Tomando variaciones en (4.1) obtenemos:

$$\delta S_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x \delta(\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda) = 0 \quad (4.6)$$

$$= \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{\mu\nu\lambda} (\delta A_\mu) \partial_\nu A_\lambda + \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu (\delta A_\lambda)] = 0 \quad (4.7)$$

$$= \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{\mu\nu\lambda} (\delta A_\mu) \partial_\nu A_\lambda + \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu (A_\mu \delta A_\lambda) - \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\partial_\nu A_\mu) \delta A_\lambda] = 0 \quad (4.8)$$

$$= k \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda) \delta A_\mu = 0. \quad (4.9)$$

con lo cual, además de obtenerse las ecuaciones de movimiento, se verifica que dicha acción es invariante de calibre. En efecto, al sustituir (4.5), obtenemos:

$$\delta S_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{\mu\nu\lambda} (\delta A_\mu) \partial_\nu A_\lambda - \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\mu (\delta A_\lambda)] = 0 \quad (4.10)$$

$$= \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \Lambda \partial_\nu A_\lambda - \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\mu \partial_\lambda \Lambda] = 0 \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

que permite establecer:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} (\partial_\mu \Lambda) \partial_\nu A_\lambda - \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\partial_\lambda \Lambda) \partial_\nu A_\mu = 0 \quad (4.13)$$

En orden de realizar el procedimiento de cuantización canónica, procedamos a descomponer (4.1) en 2 + 1 dimensiones:

$$S_{CS} = \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{0ij} A_0 \partial_i A_j + \epsilon^{j0i} A_j \partial_0 A_i + \epsilon^{ij0} A_i \partial_j A_0] \quad (4.14)$$

$$= \frac{k}{2} \int d^3x [\epsilon^{ij} A_0 \partial_i A_j + \epsilon^{ij} A_j \dot{A}_i - \epsilon^{ij} A_0 \partial_j A_i] \quad (4.15)$$

$$= \int d^3x \left[A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j + \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \dot{A}_i \right], \quad (4.16)$$

donde se ha usado la integración por partes, despreciado términos de borde, además de definir $\epsilon^{0ij} = \epsilon^{ij}$. Los momentos conjugados están dados por:

$$\pi^0 = 0 \quad \pi^i = \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j, \quad (4.17)$$

con los que se obtienen los vínculos primarios:

$$\phi = \pi^0 \approx 0 \quad \phi^i = \pi^i - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \approx 0. \quad (4.18)$$

Por medio de la transformación de Legendre, obtenemos entonces el Hamiltoniano, esto es:

$$H_0 = \int d^2x \left[\pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i - A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j - \dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right] \quad (4.19)$$

$$= \int d^2x \left[\pi^0 \dot{A}_0 + \dot{A}_i \left(\pi^i - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) - A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right] \quad (4.20)$$

$$= \int d^2x - A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (4.21)$$

Entonces, el Hamiltoniano H se define como:

$$H = H_0 + \int d^2x (\lambda \phi + \lambda_i \phi^i). \quad (4.22)$$

Consideremos los corchetes de Poisson fundamentales, definidos por:

$$\{A_\mu(\vec{x}), \pi^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.23)$$

Observamos que el corchete correspondiente a $\pi^0 = 0$ es incongruente, esto es:

$$\{A_0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})\} \neq 0, \quad (4.24)$$

siendo $\pi^0 = 0$. Entonces, es necesario proyectar dichos corchetes sobre la variedad de los vínculos primarios

$$\Sigma_1 = \phi = 0 \cup \phi^i = 0 \quad (4.25)$$

Preservando los vínculos primarios obtenemos:

$$\dot{\phi} = 0 \implies k \epsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0 \quad (4.26)$$

$$\dot{\phi}^i = 0 \implies k \epsilon^{ij} \partial_j A_0 - k \epsilon^{ij} \lambda_j = 0 \quad (4.27)$$

con lo cual obtenemos los multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_i = \partial_i A_0 \quad (4.28)$$

además de el vínculo secundario:

$$\varphi = k \epsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0 \quad (4.29)$$

La preservación de este nuevo vínculo da como resultado:

$$k \epsilon^{ij} \partial_i \lambda_j = 0 \quad (4.30)$$

lo cual es consecuente con (4.28), además de no proporcionar información relevante. Consideremos ahora el hamiltoniano total, el cual se obtiene al sustituir en (4.22) el valor encontrado para los multiplicadores de Lagrange. Entonces:

$$H_T = \int d^2x [-A_0\varphi + \lambda\phi + \lambda_i\phi^i] \quad (4.31)$$

$$= \int d^2x [-A_0\varphi + \lambda\phi + (\partial_i A_0)\phi^i] \quad (4.32)$$

$$= \int d^2x [-A_0\varphi + \lambda\phi - A_0\partial_i\phi^i] \quad (4.33)$$

$$= \int d^2x [\lambda\phi + A_0\Theta] \quad (4.34)$$

donde hemos definido el nuevo vínculo:

$$\Theta = -\varphi - \partial_i\phi^i = -\partial_i\pi^i - \frac{k}{2}\epsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \quad (4.35)$$

Es importante destacar que, el multiplicador λ , el cual esta asociado al vínculo ϕ , no se puede despejar debido a que este vínculo debe ser de primera clase. Además, como el multiplicador λ_i asociado al vínculo ϕ^i fue determinado, es indicativo de que dicho vínculo es de segunda clase. En efecto, al realizar los corchetes de Poisson entre las ligaduras, obtenemos:

$$\{\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})\} = 0 \quad , \quad \{\phi(\vec{x}), \phi^i(\vec{y})\} = 0 \quad , \quad \{\phi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})\} = 0 \quad (4.36)$$

con lo cual, se comprueba que ϕ es de primera clase. Luego:

$$\{\phi^i(\vec{x}), \phi^j(\vec{y})\} = -k\epsilon^{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.37)$$

es decir, $\phi^i \approx 0$ es de segunda clase. Considerando el conjunto de vínculos $\{\phi, \phi^i, \Theta\}$, se comprueba que $\Theta \approx 0$ es un vínculo de primera clase, esto es:

$$\{\varphi(\vec{x}), \phi(\vec{y})\} = 0 \quad , \quad \{\varphi(\vec{x}), \phi^i(\vec{y})\} = 0 \quad , \quad \{\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})\} = 0 \quad (4.38)$$

Entonces, tenemos el conjunto de vínculos de primera clase $\{\phi, \varphi\}$ y el conjunto de vínculos de segunda clase $\{\phi^i\}$. Procedemos entonces a calcular los corchetes de Dirac, para esto, necesitamos usar la inversa de la matriz definida por:

$$C^{ss'} = \{\phi^s(\vec{x}), \phi^{s'}(\vec{y})\} = -k\epsilon^{ss'}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.39)$$

donde ϕ^s son los vínculos de segunda clase. Se obtiene que:

$$(C^{ss'})^{-1} = \frac{1}{k}\epsilon_{ss'}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.40)$$

Utilizando la definición de los corchetes de Dirac (2.14), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D = \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.41)$$

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D = \frac{1}{2}\Delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.42)$$

$$\{\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D = \frac{k}{4}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.43)$$

$$\{A_0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})\}^D = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.44)$$

El proceso de cuantización termina al postular:

- Los campos pasan a ser operadores en algún espacio de Hilbert:

$$A_\mu \longrightarrow \hat{A}_\mu.$$

- Los corchetes del álgebra fundamental pasan a ser relaciones de conmutadores:

$$\{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D \longrightarrow [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{A}_j(\vec{y})] = i\frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D \longrightarrow [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i\frac{1}{2}\Delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D \longrightarrow [\hat{\pi}^i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i\frac{k}{4}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{A_0(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})\}^D \longrightarrow [\hat{A}_0(\vec{x}), \hat{\pi}^0(\vec{y})] = i\delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

- El espacio físico está constituido por los funcionales de onda que cumplen con las relaciones:

$$\hat{\varphi}|\psi\rangle = \left(k\epsilon^{ij}\partial_i\hat{A}_j\right)|\psi\rangle = 0.$$

- La evolución del sistema está descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi\rangle.$$

4.2. Transformaciones de Calibre.

Por definición, el hamiltoniano total está compuesto por dos términos, uno correspondiente a los vínculos primarios de primera clase, y el otro, denominado hamiltoniano de primera clase H' . En nuestro caso tenemos:

$$H_T = H' + \int d^2x \lambda \phi \quad (4.45)$$

donde, $H' = \int d^2x A_0 \Theta$. Por otro lado, las transformaciones de calibre son generadas por:

- Los vínculos primarios de primera clase ($\phi = \pi^0 \approx 0$)
- El corchete de Poisson de H' con los vínculos primarios de primera clase:

$$\{H'(\vec{x}), \phi(\vec{y})\} = \Theta(\vec{x}) \quad (4.46)$$

- Conjetura de Dirac: Los vínculos secundarios de primera clase ($\Theta(\vec{x})$).

Entonces, el generador de las transformaciones de calibre será:

$$G = \int d^2x (\bar{\Lambda}\varphi + \Lambda\Theta) \quad (4.47)$$

y las transformaciones de calibre se obtendrán al realizar:

$$\delta_* = \{*, G\} \quad (4.48)$$

Obtenemos que las transformaciones de calibre serán:

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= \bar{\Lambda} & \delta \pi^0 &= 0 \\ \delta A_i &= \partial_i \Lambda & \delta \pi^i &= \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \Lambda \\ \delta \Theta &= 0 & \delta \phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.2.1. Acción extendida y Hamiltoniano Extendido

Se define, de forma general, el hamiltoniano extendido como:

$$H_E = \int d^d x \left[P_a \dot{Q}_a - H' - \lambda_a \Theta^A \right] \quad (4.50)$$

siendo H' el hamiltoniano de primera clase y Θ^A el conjunto de vínculos de primera clase.

En particular, para nuestro caso:

$$H_E = \int d^2 x \left[\pi^\mu \dot{A}_\mu - A_0 \Theta - \bar{\lambda} \Theta - \lambda \phi \right] \quad (4.51)$$

La acción extendida será entonces:

$$S_E = \int d^3 x \left[\pi^\mu \dot{A}_\mu - A_0 \Theta - \bar{\lambda} \Theta - \lambda \phi \right] \quad (4.52)$$

Estudiemos la variación de dicha acción, esto es:

$$\delta S_E = \int d^3 x \left[\dot{A}_\mu \delta \pi^\mu + \pi^\mu \delta \dot{A}_\mu - \Theta \delta A_0 - A_0 \delta \Theta - \Theta \delta \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \delta \Theta - \phi \delta \lambda - \lambda \delta \phi \right] \quad (4.53)$$

Usando (4.50), podemos reescribir como:

$$\delta S_E = \int d^3x \left[\pi^0 \dot{\bar{\Lambda}} + \dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \Lambda + \pi^i \partial_i \Lambda - \Theta \bar{\Lambda} - \Theta \delta \bar{\lambda} - \phi \delta \lambda \right], \quad (4.54)$$

usando la relación:

$$\frac{d}{dt} \left(A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \Lambda \right) = \frac{dA_i}{dt} \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \Lambda + A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \frac{d\Lambda}{dt} \quad (4.55)$$

y agrupando términos, reescribimos:

$$\delta S_E = \int d^3x \left[(\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda) \phi - (\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda}) \Theta - \dot{\Lambda} \partial_i \pi^i - A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \dot{\Lambda} \right] \quad (4.56)$$

donde hemos despreciado las contribuciones en la frontera. Además, como:

$$\partial_j \left(A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \dot{\Lambda} \right) = \partial_j A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \dot{\Lambda} + A_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j \dot{\Lambda}, \quad (4.57)$$

reescribimos nuevamente:

$$\delta S_E = \int d^3x \left[(\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda) \phi - (\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda}) \Theta - \dot{\Lambda} \partial_i \pi^i + \dot{\Lambda} \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_j A_i \right] \quad (4.58)$$

$$\delta S_E = \int d^3x \left[(\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda) \phi - (\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda}) \Theta - \dot{\Lambda} \partial_i \pi^i + \dot{\Lambda} \frac{k}{2} \epsilon^{ji} \partial_i A_j \right] \quad (4.59)$$

$$\delta S_E = \int d^3x \left[(\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda) \phi - (\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda}) \Theta - \dot{\Lambda} \partial_i \pi^i - \dot{\Lambda} \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right] \quad (4.60)$$

y, reconociendo que $\Theta = -\partial_i \pi^i - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_i A_j$, tenemos:

$$\delta S_E = \int d^3x \left[(\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda) \phi - (\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda} - \dot{\Lambda}) \Theta \right]. \quad (4.61)$$

Si consideramos que $\Lambda(t_1) = \Lambda(t_2)$, entonces, $\delta S_E = 0$, además de obtener:

$$\dot{\bar{\Lambda}} - \delta \lambda = 0 \implies \delta \lambda = \dot{\bar{\Lambda}} \quad (4.62)$$

$$\bar{\Lambda} + \delta \bar{\lambda} - \dot{\Lambda} = 0 \implies \delta \bar{\lambda} = \dot{\Lambda} - \bar{\Lambda} \quad (4.63)$$

Escojamos ahora el calibre $\bar{\lambda} = 0$, lo que implica que $\bar{\Lambda} = \dot{\Lambda}$. Esto indica que (4.52) es invariante bajo transformaciones del tipo:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad (4.64)$$

además de

$$\delta A_0 = \partial_0 \Lambda \quad , \quad \delta \lambda = \dot{\bar{\Lambda}} = \ddot{\Lambda} \quad (4.65)$$

Este resultado es el mismo que se obtiene al tomar el Hamiltoniano Total (4.34) y exigir que la acción total sea invariante de calibre.

4.3. A_0 sin dinámica (actuando como multiplicador de Lagrange).

Comparemos ahora este resultado con el obtenido al suponer desde el inicio A_0 como un multiplicador de Lagrange, debido a que el mismo no posee dinámica. La descomposición de la acción es la misma, sin embargo, ahora solo tendremos los momentos conjugados y vínculos asociados a la variable A_i . Al ser A_0 un multiplicador de Lagrange, identificamos el término que acompaña al mismo como el vínculo φ . Se obtiene el mismo Hamiltoniano canónico (4.21) y el Hamiltoniano H queda definido ahora como:

$$H = \int d^2x [-A_0\varphi + \lambda_i\phi^i] \quad (4.66)$$

Nuestro conjunto de vínculos primarios será entonces ϕ^i, φ , y la preservación de los mismos da como resultado (4.28) y (4.30). Nuevamente, al sustituir el valor obtenido para el multiplicador λ_j , en H , obtenemos el Hamiltoniano Total, es decir:

$$H_T = \int d^2x [-A_0\varphi + (\partial_i A_0)\phi^i] \quad (4.67)$$

$$= \int d^2x A_0\Theta \quad (4.68)$$

con Θ definido por (4.35). De igual forma, se comprueba que (4.35) es de primera clase, y $\phi^i \approx 0$ es de segunda clase, por lo que, los corchetes de Dirac para este caso serán:

$$\{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D = \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.69)$$

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D = \frac{1}{2}\delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.70)$$

$$\{\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D = \frac{k}{4}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.71)$$

4.3.1. Transformaciones de calibre.

En este caso, se comprueba que el generador de las transformaciones de calibre esta dado por:

$$G = \int d^2x \Lambda\Theta \quad (4.72)$$

y las transformaciones de calibre serán:

$$\delta A_i = \partial_i \Lambda \quad , \quad \delta \pi^i = \frac{k}{2}\epsilon^{ij}\partial_j \Lambda \quad , \quad \delta \Theta = 0 \quad (4.73)$$

Tomando la variación de la acción extendida, que para este caso es:

$$S_E = \int d^3x (\dot{A}_i \pi^i - \bar{\lambda} \Theta) \quad (4.74)$$

obtenemos:

$$\delta S_E = \int d^3x \Theta (\dot{\bar{\lambda}} - \delta \bar{\lambda}) \quad (4.75)$$

con lo cual, al exigir que $\Lambda(t_1) = \Lambda(t_2)$, entonces, $\delta S_E = 0$ y se obtiene:

$$\delta \bar{\lambda} = \dot{\bar{\lambda}} \quad (4.76)$$

lo cual, al ser $\bar{\lambda}$ arbitrario, podemos decir que $\delta \bar{\lambda} = \delta A_0 = \dot{\bar{\lambda}}$. Luego de realizar el proceso de cuantización, se puede hacer los vínculos de segunda clase fuertemente cero, esto es:

$$\pi^i - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j = 0 \implies \pi^i = \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \quad (4.77)$$

relación que, al sustituir en (4.74), obtenemos:

$$S_E = \int d^3x (\dot{A}_i \pi^i - A_0 \Theta) \quad (4.78)$$

$$= \int d^3x \left(\dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j - A_0 \left(-\partial_i \left(\frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \right) - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \quad (4.79)$$

$$= \int d^3x \left(\dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j + A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \quad (4.80)$$

$$= S_{CS} \quad (4.81)$$

con lo cual se concluye que, si consideramos desde un principio a (4.71) como un corchete de Poisson, además de considerar A_0 como un multiplicador de Lagrange, se obtiene la misma acción en ambos casos. Este es el método propuesto por Jackiw-Carroll en [15].

4.4. Método de Jackiw-Carroll (Cuantización sin lágrimas).

Supongamos un lagrangiano general de la forma:

$$L = a_i(\xi) \dot{\xi}^i - H(\xi), \quad (4.82)$$

del cual se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}(a_i(\xi)) - \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j + \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} = 0, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j - \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j + \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} = 0, \quad (4.84)$$

$$f_{ij}(\xi) \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (4.85)$$

donde se ha definido $f_{ij}(\xi) = \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j}$. Es de nuestro interés, el caso donde:

$$a_i(\xi) = \frac{1}{2} \xi^j w_{ji}, \quad (4.86)$$

con $w_{ji} = -w_{ij}$, y $(w_{ij})^{-1} = w^{ij}$, tal que se cumpla $w^{ij} w_{jk} = \delta_k^i$. Si $i = 1, 2$, obtenemos que:

$$w^{ij} = \alpha \epsilon_{ij}, \quad (4.87)$$

con lo cual:

$$f_{ij}(\xi) = \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j}, \quad (4.88)$$

$$= f_{ij}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{1}{2} \xi^k w_{kj} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{1}{2} \xi^k w_{ki} \right), \quad (4.89)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \delta_i^k \epsilon_{kj} - \frac{\alpha}{2} \delta_j^k \epsilon_{ki}, \quad (4.90)$$

$$= \alpha \epsilon_{ij} \quad (4.91)$$

con lo cual, reescribimos (85) como:

$$\alpha \epsilon_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (4.92)$$

lo que implica que:

$$\dot{\xi}^j = \frac{1}{\alpha} \epsilon^{ij} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (4.93)$$

Considerando que:

$$\dot{\xi}^k = \{\xi^k, H\} = -\frac{1}{\alpha} \epsilon^{ki} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} = \{\xi^k, \xi^i\} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (4.94)$$

se define:

$$\{\xi^k, \xi^i\} = -\frac{1}{\alpha} \epsilon^{ki} \quad (4.95)$$

y así, para dos cantidades arbitrarias, tendremos:

$$\{A(\xi), B(\xi)\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial B}{\partial \xi^j} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^i} \frac{1}{\alpha} \epsilon^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j}. \quad (4.96)$$

Utilicemos este método para resolver nuestra teoría. Tenemos entonces que, el lagrangiano será:

$$L = \int d^2x \left[\frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \dot{A}_i + k A_0 \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right], \quad (4.97)$$

como $a_i(\xi) = \frac{1}{2} \xi^j \alpha \epsilon_{ji}$, obtenemos:

$$a_i(\xi) \dot{\xi}^i = \frac{1}{2} \xi^j \alpha \epsilon_{ji} \dot{\xi}^i, \quad (4.98)$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \dot{\xi}^i \epsilon_{ij} \xi^j. \quad (4.99)$$

Al comparar términos, se obtiene:

$$\frac{k}{2}\epsilon^{ij}A_j\dot{A}_i = -\frac{\alpha}{2}\epsilon_{ij}\xi^j\dot{\xi}^i \implies \alpha = -k, \quad (4.100)$$

además de:

$$\{\xi^i, \xi^j\} = -\frac{1}{\alpha}\epsilon^{ij} \implies \{A_i(\vec{x}), A_j\} = \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.101)$$

En conclusión, el método de Jackiw-Carroll permite postular de antemano el corchete $\{\xi^i, \xi^j\} = -\frac{1}{\alpha}\epsilon^{ij}$, el cual corresponde al corchete de Dirac obtenido a través del método usual. Si bien lo expuesto en este capítulo representa una gran ventaja, al simplificar el proceso de cuantización, en lo que resta de trabajo utilizaremos el método donde consideramos desde el inicio a cantidades que no poseen dinámica como multiplicadores de Lagrange, debido a que este método no exige una forma particular para el lagrangeano.

Capítulo 5

Teorías de Campos de Calibre Topológicas

Presentamos ahora el estudio de teorías de calibre topológicas, es decir, teorías donde la acción contiene términos independientes de cualquier métrica. Se utiliza el mismo enfoque de los capítulos previos, donde aplicamos el método de Dirac para la cuantización, además de la Representación Geométrica, ya que la misma constituye una buena técnica para estudiar las diferentes ligaduras que surgen. En las teorías topológicas, las ligaduras no se resuelven de forma directa como era en el caso no topológico; son necesarias ciertas imposiciones sobre los funcionales de onda. En todos los casos a tratar en esta sección, veremos que las ligaduras tienen cierta similitud y que el método utilizado para hallar las restricciones sobre los funcionales de onda es característico en las teorías topológicas.

Empezaremos el estudio con la Teoría Topológica Masiva (cita Oswald), ya que constituye uno de los primeros trabajos desarrollados sobre el tema, además de proporcionar los pasos a seguir para la resolución de las ligaduras de este tipo en forma explícita. Posteriormente estudiaremos la teoría de partículas interactuando a través de un campo de Chern-Simons, la cual permite generalizar la interacción de partículas cargadas no relativistas al caso topológico. Esto nos servirá de introducción para poder abordar, en el siguiente capítulo, el estudio de la interacción topológica entre dos partículas a través de un campo BF en $2 + 1$ dimensiones.

5.1. Teoría Topológica Masiva

La acción que describe esta teoría esta compuesta por un término correspondiente a Maxwell libre sumado a un término correspondiente a la interacción tipo Chern-Simons,

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu A_\nu A_\lambda \right), \quad (5.1)$$

siendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor de campo electromagnético y k una constante de “masa”. Descomponiendo en $3 + 1$ dimensiones, obtenemos:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\dot{A}_i - \partial_i A_0 \right)^2 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} \dot{A}_i A_j + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} A_0 F_{ij} \right]. \quad (5.2)$$

Consideraremos desde el inicio, debido a que no posee dinámica, a la variable A_0 como un multiplicador de Lagrange. Entonces, en orden de construir el hamiltoniano de la teoría, y tomando las consideraciones antes mencionadas, definimos los momentos conjugados:

$$\pi^i(\vec{x}) = \dot{A}_i(\vec{x}) - \partial_i A_0(\vec{x}) + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} A_j(\vec{x}), \quad (5.3)$$

expresión que permite despejar las velocidades,

$$\dot{A}_i(\vec{x}) = \pi^i(\vec{x}) + \partial_i A_0(\vec{x}) - \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} A_j(\vec{x}). \quad (5.4)$$

Por medio de la transformada de Legendre, y luego de algunos cálculos, podemos a escribir el hamiltoniano como:

$$H_0 = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \left(\pi^i - \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} A_j \right)^2 - \left(\partial_i \pi^i + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} \partial_i A_j \right) A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right], \quad (5.5)$$

donde se observa explícitamente el carácter de multiplicador de A_0 . Entonces, inmediatamente se puede establecer que la cantidad:

$$\varphi(\vec{x}) = \partial_i \pi^i(\vec{x}) + \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} \partial_i A_j(\vec{x}) \approx 0, \quad (5.6)$$

representa un vínculo de la teoría. Haciendo uso del corchete de Poisson fundamental:

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.7)$$

se comprueba que dicho vínculo es de primera clase. Entonces, el proceso de cuantización canónica es directo en este caso. Se prescribe:

- Los campos pasan a operadores de un espacio de Hilbert:

$$A_i(\vec{x}) \longrightarrow \hat{A}_i(\vec{x}), \quad \pi^i(\vec{x}) \longrightarrow \hat{\pi}^i(\vec{x}).$$

- Los corchetes del álgebra fundamental pasan a ser relaciones de conmutadores:

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\} \longrightarrow [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

- El espacio físico es el constituido por los funcionales de onda que cumplen con las relaciones:

$$\left[\partial_i \hat{\pi}^i(\vec{x}) + \frac{k}{4\pi} \hat{B}(\vec{x}) \right] \psi = 0,$$

donde se ha definido el campo magnético $\hat{B}(\vec{x}) = \epsilon^{ij} \partial_i \hat{A}_j(\vec{x})$.

- La evolución temporal del sistema esta descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H} |\psi\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi\rangle, \quad (5.8)$$

con

$$\hat{H} = \int d^2x \frac{1}{2} \left[\left(\hat{\pi}^i - \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} \hat{A}_j \right)^2 + \hat{B}^2 \right], \quad (5.9)$$

donde se ha usado $\frac{1}{2} \hat{B}^2 = \frac{1}{4} \hat{F}_{ij} \hat{F}^{ij}$.

Las cantidades $A_i(\vec{x})$ y $\pi^i(\vec{x})$ no resultan ser observables de la teoría, sin embargo, el campo eléctrico definido por:

$$E^i = \hat{\pi}^i - \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ij} \hat{A}_j, \quad (5.10)$$

y el campo magnético, definido por:

$$B = \epsilon^{ij} \partial_i \hat{A}_j, \quad (5.11)$$

sí son observables, y cualquier observable de la teoría puede ser construido a partir de una combinación de los mismos. Por esta razón, es recomendable establecer las relaciones de conmutación:

$$[\hat{E}^i(\vec{x}), \hat{B}(\vec{y})] = \epsilon^{ij} \partial_j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.12)$$

$$[\hat{E}^i(\vec{x}), \hat{E}^j(\vec{y})] = -\frac{k}{2\pi} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.13)$$

Procedamos ahora a realizar la representación de caminos, es decir, consideraremos un espacio de funcionales de onda camino dependientes $\psi(\gamma)$. Al utilizar la realización:

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), \quad (5.14)$$

$$\hat{\pi}^i(\vec{x}) \longrightarrow e T^i(\vec{x}, \gamma), \quad (5.15)$$

se verifica el álgebra de la teoría,

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})]\psi(\gamma) = \left[\frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] = i\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma). \quad (5.16)$$

Se comprueba la relación de conmutadores establecida para los observables \hat{E}^i y \hat{B} a través de su realización:

$$\hat{E}^i(\vec{x}) = eT^i(\vec{x}, \gamma) - \frac{k}{4\pi e} \epsilon^{ij} \delta_j(\vec{x}), \quad (5.17)$$

$$\hat{B}(\vec{x}) = \frac{i}{2e} \epsilon^{ij} \Delta_{ij}(\vec{x}), \quad (5.18)$$

donde se ha usado que

$$\epsilon^{ij} \Delta_{ij} = 2\epsilon^{ij} \partial_i \delta_j. \quad (5.19)$$

En la representación escogida, e es una constante con dimensiones de $l^{-1/2}$, la cual es introducida con la intención de hacer a la realización consistente dimensionalmente, a la vez que es útil para las interpretaciones físicas posteriores [17]. Realizando la ligadura (5.6) en la realización escogida obtenemos:

$$\left(e\partial_i T^i(\vec{x}, \gamma) + i\frac{k}{4\pi e} \epsilon^{ij} \partial_i \delta_j(\vec{x}) \right) \psi(\gamma) = 0, \quad (5.20)$$

o, escrita de forma mas compacta, haciendo uso de (2.18), (2.19) y (5.19):

$$\left(-\rho(\vec{x}, \gamma) + i\frac{k}{8\pi e^2} \epsilon^{ij} \Delta_{ij}(\vec{x}) \right) \psi(\gamma) = 0. \quad (5.21)$$

Esta ligadura no se resuelve de forma directa como en los casos correspondientes a teorías de calibre no topológicas, donde basta restringir la forma de los objetos geométricos (tramos de camino o superficie). En el caso topológico, la imposición sobre la forma de los caminos no es suficiente para que las ligaduras se satisfagan, son necesarias, además ciertas restricciones sobre los funcionales de ondas $\psi(\gamma)$. Esto constituye una característica intrínseca de las ligaduras presentes en teorías de carácter topológico. Para resolver (5.21), sin pérdida de generalidad, proponemos para los funcionales de onda $\psi(\gamma)$ la forma:

$$\psi(\gamma) = e^{\chi(\gamma)} \Phi(\gamma), \quad (5.22)$$

constituidos por el producto de dos funciones dependientes de camino, cuyas propiedades se obtendrán al imponer la ligadura sobre las mismas. Observemos como actúa el operador:

$$\Delta(\vec{x}) = \epsilon^{ij} \Delta_{ij}(\vec{x}), \quad (5.23)$$

sobre estos funcionales,

$$\Delta(\vec{x})\psi(\gamma) = \left(\Delta(\vec{x})\chi(\gamma)\right)\psi(\gamma) + e^{\chi(\gamma)}\left(\Delta(\vec{x})\Phi(\gamma)\right). \quad (5.24)$$

Al substituir en (5.21), obtenemos:

$$-\rho(\vec{x}, \gamma)\psi(\gamma) + i\frac{k}{8\pi e^2}\left(\Delta(\vec{x})\chi(\gamma)\right)\psi(\gamma) + i\frac{k}{8\pi e^2}e^{\chi(\gamma)}\left(\Delta(\vec{x})\Phi(\gamma)\right) = 0. \quad (5.25)$$

Si se escoge:

$$\Delta(\vec{x})\chi(\gamma) = -i\frac{8\pi e^2}{k}\rho(\vec{x}, \gamma), \quad (5.26)$$

se obtiene para las funciones $\Phi(\gamma)$:

$$\Delta(\vec{x})\Phi(\gamma) = 0, \quad (5.27)$$

es decir, al agregar un ciclo infinitesimal al argumento de las funciones $\Phi(\gamma)$, ésta permanece invariante, con lo cual, podemos asegurar que $\Phi(\gamma)$ solo depende de los caminos a través de su frontera (puntos extremos):

$$\Phi(\gamma) = \Phi(\partial\gamma) = \Phi(\vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_s). \quad (5.28)$$

En orden de encontrar la forma explícita de las funciones $\chi(\gamma)$, de modo que satisfagan (5.26), [13] propone la forma general:

$$\chi(\gamma) = iC \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma), \quad (5.29)$$

donde C es una constante a determinar. La acción de $\Delta(\vec{x})$ sobre (5.29) será entonces:

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{y})\chi(\gamma) &= 2iC \epsilon^{ij} \partial_i(\vec{y}) \delta_j(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\ &= 2iC \epsilon^{ij} \partial_i \int d^2x \int d^2x' \left(\delta_j(\vec{y})\rho(\vec{x}', \gamma)\right) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\ &+ 2iC \epsilon^{ij} \partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_j(\vec{y}) T^k(\vec{x}, \gamma). \end{aligned}$$

Usando las relaciones

$$\delta_j(\vec{y})\rho(\vec{x}', \gamma) = \frac{\partial}{\partial y^j} \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \quad \text{y} \quad \delta_j(\vec{y})T^k(\vec{x}, \gamma) = \delta_j^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(\vec{y})\chi(\gamma) &= 2iC\epsilon^{ij} \int d^2x \int d^2x' \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\
&+ 2iC\epsilon^{ij} \int d^2x \int d^2x' \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_j^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \right) \\
&= 2iC \int d^2x \int d^2x' \epsilon^{ij} \epsilon^{lj} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \frac{\partial}{\partial x^l} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \right) \\
&= -2iC \int d^2x \int d^2x' \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'|) \delta^{li} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -2iC \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \nabla_{x^i}^2 (\ln|\vec{x} - \vec{x}'|).
\end{aligned}$$

Recordando la relación $\nabla^{-2}\delta^2(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln|\vec{x} - \vec{x}'|$ finalmente se obtiene:

$$\Delta(\vec{x})\chi(\gamma) = -4i\pi C \rho(\vec{x}, \gamma),$$

con lo cual podemos establecer:

$$-i \frac{8\pi e^2}{k} \rho(\vec{x}, \gamma) = -4i\pi C \rho(\vec{x}, \gamma) \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{2e^2}{k},$$

es decir, la función encontrada será:

$$\chi(\gamma) = i \frac{2e^2}{k} \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma). \quad (5.30)$$

En orden de obtener una interpretación mas completa de esta función, es conveniente escribirla de forma explícita, esto es:

$$\begin{aligned}
\chi(\gamma) &= i \frac{2e^2}{k} \int d^2x \int d^2x' \sum_s (\delta^2(\vec{x}' - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x}' - \vec{\alpha}_s)) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \int_\gamma dy^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= i \frac{2e^2}{k} \int d^2x \sum_s (\ln|\vec{x} - \vec{\beta}_s| - \ln|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|) \epsilon^{lk} \int_\gamma dy^k \frac{\partial}{\partial x^l} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -i \frac{2e^2}{k} \int d^2x \epsilon^{lk} \sum_s \frac{\partial}{\partial x^l} (\ln|\vec{x} - \vec{\beta}_s| - \ln|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|) \int_\gamma dy^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}),
\end{aligned}$$

es decir

$$\chi(\gamma) = -i \frac{2e^2}{k} \int_\gamma dy^k \epsilon^{lk} \sum_s \left[\frac{(y - \beta_s)^l}{|\vec{y} - \vec{\beta}_s|^2} - \frac{(y - \alpha_s)^l}{|\vec{y} - \vec{\alpha}_s|^2} \right], \quad (5.31)$$

donde indentificamos

$$\Theta = \int_T dy^k \epsilon^{lk} \frac{(y - x)^l}{|\vec{y} - \vec{x}|^2}, \quad (5.32)$$

como el ángulo subtendido por el tramo T de camino medido desde el punto \vec{y} . Entonces, la función se escribe de forma compacta como:

$$\chi(\gamma) = -i \frac{2e^2}{k} \Delta\Theta, \quad (5.33)$$

siendo $\Delta\Theta$ la diferencia entre los ángulos subtendidos por los tramos de camino medidos desde sus puntos extremos (finales e iniciales). Se observa que los estados que cumplen con la restricciones impuestas por la ligadura (estados físicos) son los que tienen la forma:

$$\psi(\gamma) = e^{\left(-i \frac{2e^2}{k} \Delta\Theta(\gamma)\right)} \Phi(\vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_s), \quad (5.34)$$

los cuales están compuestos por el producto de una función dependiente de ángulos subtendidos por tramos de caminos y una función dependiente de los extremos de caminos.

Observamos que, a diferencia de las teorías de carácter no topológico, donde es suficiente escoger una representación geométrica adecuada para resolver las ligaduras impuestas, para la TTM obtenemos una ligadura que restringe la forma de los funcionales de onda. En esta situación, los estados físicos quedan determinados al especificar los puntos extremos de cada tramo de camino y por el número de veces que dichos tramos se “enrollan” sobre dichos puntos extremos.

5.2. Partículas no relativistas interaccionando a través de un campo de Chern-Simons.

La acción que describe a esta teoría esta descrita por:

$$S = \int dt \frac{1}{2} m (\dot{r}^i)^2 - \int d^3x j^\mu A_\mu + \int d^3x \left(\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right), \quad (5.35)$$

donde se observa un término correspondiente a la energía cinética de las partículas, un término donde se expone el acople minimal de las partículas con el campo de Chern-Simons a través de la corriente conservada

$$j^\mu = eqv^\mu \delta^2(\vec{x} - \vec{r}) \quad \text{con} \quad v^\mu = (1, \dot{r}^i) \quad (5.36)$$

y el potencial vector A_μ , y por último, un término correspondiente a la parte cinética del campo de Chern-Simons. Por simplicidad, trabajaremos con una sola partícula (la generalización al caso de n partículas es directa). Realizando la descomposición en 2 + 1

dimensiones, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} S &= \int dt \frac{1}{2} m(\dot{r}^i)^2 - \int dt [eqA_0(\vec{r}) + eq\dot{r}^i A_i(\vec{r})] + \int d^3x \left(A_0 k \epsilon^{ij} \partial_i A_j + \dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \\ &= \int dt \left(\frac{1}{2} m(\dot{r}^i)^2 - eq\dot{r}^i A_i(\vec{r}) \right) - \int d^3x \left[A_0 (k \epsilon^{ij} \partial_i A_j - eq\delta(\vec{x} - \vec{r})) + \dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde hemos utilizado:

$$A_\mu(\vec{r}) = \int d^3x \delta^3(\vec{x} - \vec{r}) A_\mu(\vec{x}). \quad (5.38)$$

Considerando A_0 como multiplicador de Lagrange desde el inicio, ya que no posee dinámica, procedemos a calcular los momentos conjugados asociados a las variables restantes, esto es:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^i} = m\dot{r}^i - eqA_i(\vec{r}) \quad , \quad \pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j$$

de lo cual se obtiene:

$$m\dot{r}^i = p_i + eqA_i(\vec{r}) \quad (5.39)$$

$$\phi^i = \pi^i - \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \approx 0 \quad (5.40)$$

donde (5.39) corresponde a las velocidades de las partículas determinadas a través de sus momentos conjugados asociados, y (5.40) constituye un vínculo primario de la teoría. Luego, el Hamiltoniano canónico se obtiene a través de la transformación de Legendre:

$$\begin{aligned} H_0 &= p_i \dot{r}^i - \frac{1}{2} m(\dot{r}^i)^2 + eq\dot{r}^i A_i(\vec{r}) + \int d^2x \left(\dot{A}_i \pi^i + A_0 \varphi - \dot{A}_i \frac{k}{2} \epsilon^{ij} A_j \right) \\ &= \frac{1}{2m} (p_i + eqA_i(\vec{r}))^2 + \int d^2x A_0 \varphi, \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde hemos identificado que:

$$\varphi = eq\delta^2(\vec{x} - \vec{r}) - k\epsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0 \quad (5.42)$$

representa un vínculo de la teoría, debido a que A_0 se comporta como un multiplicador. El hamiltoniano H queda definido como:

$$H = H_0 + \int d^2x \lambda_i \phi^i \quad (5.43)$$

donde λ_i representa el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo $\phi^i \approx 0$. Procedemos a preservar las ligaduras primarias en el tiempo, considerando para ello el corchete de Poisson fundamental:

$$\{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.44)$$

Entonces, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}^i &= \{\phi^i(\vec{x}), H(\vec{y})\} \\
 &= \frac{1}{m}(p_j + eqA_j(\vec{r}))\{\pi^i(\vec{x}), eq \int d^2y A_j(\vec{y})\delta^2(\vec{y} - \vec{r})\} + \int d^2y A_0(\vec{y})(-k\epsilon^{jm})\partial_j(\vec{y})\{\pi^i(\vec{x}), A_m(\vec{y})\} \\
 &+ \int d^2y \lambda_j(\vec{y})(-k\epsilon^{jm})\{\pi^i(\vec{x}), A_m(\vec{y})\} + \int d^2y \lambda_j(\vec{y})(-k\epsilon^{il})\{A_l(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene:

$$\dot{\phi}^i = -j^i + k\epsilon^{ij}\partial_j A_0 - k\epsilon^{ij}\lambda_j = 0 \quad (5.45)$$

con j^i dado por la ecuación (5.36). La relación obtenida permite determinar el multiplicador de Lagrange λ_i , así:

$$\begin{aligned}
 k\epsilon^{ij}\lambda_j &= k\epsilon^{ij}\partial_j A_0 - j^i \implies \epsilon_{im}\epsilon^{ij}\lambda_j = \epsilon_{im}\epsilon^{ij}\partial_j A_0 - \frac{\epsilon_{im}}{K}j^i \\
 &\implies \delta_m^j \lambda_j = \delta_m^j \partial_j A_0 - \frac{\epsilon_{im}}{k}j^i,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\lambda_m = \partial_m A_0 - \Gamma_m, \quad (5.46)$$

donde hemos definido $\Gamma_m = \frac{\epsilon_{im}}{k}j^i$. La preservación de $\varphi \approx 0$ no proporciona información relevante a nuestro problema, se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial r^i}j^i - k\epsilon^{ij}\partial_i\lambda_j = 0 \quad (5.47)$$

lo cual se satisface al usar (5.46). A su vez, si hacemos uso de (5.46) en la ecuación para H , obtenemos el hamiltoniano total, esto es:

$$\begin{aligned}
 H_T &= H_0 + \int d^2x (\partial_i A_0 - \Gamma_i)\phi^i \\
 &= H_0 + \int d^2x [(\partial_i A_0 \phi^i) - \Gamma_i \phi^i] \\
 &= H_0 + \int d^2x [\partial_i (A_0 \phi^i) - A_0 (\partial_i \phi^i) - \Gamma] \\
 &= \frac{1}{2m}[p_i + eqA_i(\vec{r})]^2 + \int d^2x [A_0 \varphi + \partial_i (A_0 \phi^i) - A_0 (\partial_i \phi^i) - \Gamma]
 \end{aligned}$$

es decir:

$$H_T = \frac{1}{2m}[p_i + eqA_i(\vec{r})]^2 + \int d^2x [A_0 \Theta - \Gamma], \quad (5.48)$$

donde hemos desechado los términos de borde, además de definir:

$$\Gamma = \Gamma_i \phi^i, \quad (5.49)$$

y de obtener el nuevo vínculo:

$$\Theta = \varphi - \partial_i \phi^i \approx 0. \quad (5.50)$$

Procedemos a clasificar los vínculos obtenidos en vínculos de primera o segunda clase, para ello, consideramos $\{\phi^i, \Theta\}$ como nuestro conjunto de vínculos, entonces obtenemos:

$$\{\phi^i(\vec{x}), \phi^j(\vec{y})\} = -k\epsilon^{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \quad \{\phi^i(\vec{x}), \Theta(\vec{y})\} = 0 \quad \{\Theta(\vec{x}), \Theta(\vec{y})\} = 0$$

con lo cual establecemos que $\Theta \approx 0$ es de primera clase, mientras que $\phi^i \approx 0$ es de segunda clase. Al existir vínculos de segunda clase, es necesario construir los corchetes de Dirac en orden de realizar el proceso de cuantización. Recordando que los mismos están dados en forma general por:

$$\{A(\vec{x}), B(\vec{y})\}^D = \{A(\vec{x}), B(\vec{y})\} - \{A, \phi_s\}(C_{ss'})^{-1}\{\phi_{s'}, B\},$$

donde A y B son variables canónicas, ϕ_s constituyen las ligaduras de segunda clase y $(C_{ss'})^{-1}$ es la inversa de la matriz definida como:

$$C^{ss'} = \{\phi^s(\vec{x}), \phi^{s'}(\vec{y})\} = -k\epsilon^{ss'}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.51)$$

En nuestro caso, la inversa será:

$$(C^{ss'})^{-1} = C_{ss'} = \frac{1}{k}\epsilon_{ss'}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.52)$$

A modo de ejemplo al procedimiento, calculemos el corchete:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D &= \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\} - \int d^2z \int d^2z' \{A_i(\vec{x}), \phi^l(\vec{z})\} (c^{lm}(\vec{z}, \vec{z}'))^{-1} \{\phi^m(\vec{z}'), A_j(\vec{y})\}, \\ &= - \int d^2z \int d^2z' \{A_i(\vec{x}), \pi^l(\vec{z}) - \frac{k}{2}\epsilon^{ln}A_n(\vec{z})\} \frac{1}{k}\epsilon_{lm}\delta^2(\vec{z} - \vec{z}') \{\pi^m(\vec{z}') - \frac{k}{2}\epsilon^{mp}A_p(\vec{z}'), A_j(\vec{y})\}, \\ &= \int d^2z \int d^2z' \delta_i^l \delta^2(\vec{x} - \vec{z}) \frac{1}{k}\epsilon_{lm}\delta^2(\vec{z} - \vec{z}') \delta_j^m \delta^2(\vec{z}' - \vec{y}), \\ &= \int d^2z \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{z})\delta^2(\vec{z} - \vec{y}), \\ &= \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

De forma similar, obtenemos todos los corchetes de Dirac no nulos, esto es :

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D &= \frac{1}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), & \{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D &= \frac{1}{2}\delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D &= \frac{k}{4}\epsilon^{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), & \{r_i, p^j\}^D &= \delta_i^j. \end{aligned}$$

Entonces, calculados los corchetes de Dirac, podemos establecer la cuantización de la teoría, es decir:

- Los campos pasan a operadores en un espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned} A_i(\vec{x}) &\longrightarrow \hat{A}_i(\vec{x}), & \pi_i(\vec{x}) &\longrightarrow \hat{\pi}_i(\vec{x}), \\ r_i &\longrightarrow \hat{r}_i, & p^i &\longrightarrow \hat{p}^i. \end{aligned}$$

- Los corchetes de Dirac pasa a ser relaciones de conmutadores:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{A}_j(\vec{y})] = \frac{i}{k} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{A_i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = \frac{i}{2} \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi^i(\vec{x}), \pi^j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [\hat{\pi}^i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i \frac{k}{4} \epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{r_i, p^j\}^D &\longrightarrow [\hat{r}_i, \hat{p}^j] = i \delta_i^j. \end{aligned}$$

- Las ligaduras de segunda clase pasan a ser fuertemente cero, es decir:

$$\hat{\phi}^i(\vec{x}) = \hat{\pi}^i(\vec{x}) - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \hat{A}_j(\vec{x}) = 0.$$

- El espacio físico es el constituido por los funcionales de onda que cumplen con la relación:

$$\hat{\phi}(\vec{x}) |\psi\rangle = [k \hat{B}(\vec{x}) + eq \delta^2(\vec{x} - \vec{r})] |\psi\rangle = 0.$$

- La evolución temporal del sistema, esta descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$H |\psi\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi\rangle,$$

donde

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - eq \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2.$$

Los observables en el sentido de Dirac resultan ser la posición \hat{r}_i y el momento covariante $\hat{\vec{p}} - eq \hat{\vec{A}}(\vec{r}, t)$. Procedemos entonces a realizar la representación geométrica de la teoría, considerando la formulación de caminos. Haremos uso de funcionales de onda de la forma $\psi : \psi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{r})$, es decir, dependientes de la posición de las partículas y de los caminos. Escogemos la realización:

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}) - \frac{e}{k} \epsilon_{ij} T^j(\vec{x}, \gamma), \quad (5.53)$$

$$\hat{r}_i \longrightarrow r_i, \quad (5.54)$$

$$\hat{p}^i \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial r_i}. \quad (5.55)$$

Además, con ayuda de $\hat{\pi}^i(\vec{x}) = \frac{k}{2}\epsilon^{ij}\hat{A}_j(\vec{x})$ (relación obtenida al hacer las ligaduras de segunda clase fuertemente cero), podemos escribir:

$$\hat{\pi}^i(\vec{x}) \longrightarrow i\frac{k}{2e}\epsilon^{ij}\delta_j(\vec{x}) + \frac{e}{2}T^i(\vec{x}, \gamma). \quad (5.56)$$

Esta realización es consistente con el álgebra de los corchetes de Dirac, en efecto, se comprueba:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{A}_j(\vec{y})] \psi(\gamma) &= \left[\frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}) - \frac{e}{k}\epsilon_{il}T^l(\vec{x}, \gamma), \frac{i}{e}\delta_j(\vec{y}) - \frac{e}{k}\epsilon_{jm}T^m(\vec{y}, \gamma) \right] \psi(\gamma) \\ &= \frac{i}{k}\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma), \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\Pi}^j(\vec{y})] \psi(\gamma) = \left[\hat{A}_i(\vec{x}), \frac{k}{2}\epsilon^{jm}\hat{A}_m(\vec{x}) \right] \psi(\gamma) = \frac{i}{2}\delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma), \quad (5.58)$$

$$[\hat{\Pi}^i(\vec{x}), \hat{\Pi}^j(\vec{y})] \psi(\gamma) = \frac{k^2}{4}\epsilon^{il}\epsilon_{jm}[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{A}_j(\vec{y})]\psi(\gamma) = i\frac{k}{4}\epsilon_{jl}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma), \quad (5.59)$$

$$[\hat{r}_i(p), \hat{p}^j(q)] \psi(\gamma) = \left[r_i(p), -i\frac{\partial}{\partial r_j(p)} \right] \psi(\gamma) = i\delta_i^j\delta_{pq}\psi. \quad (5.60)$$

Veamos ahora como se escribe el momento covariante en esta realización. Utilizando (5.53) y (5.55), obtenemos:

$$\hat{p} - eq\hat{A}(\vec{r}, t) \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial r_i} - eq\left(\frac{i}{e}\delta_i(\vec{r}) - \frac{e}{2k}\epsilon_{ij}T^j(\vec{x}, \gamma) \right), \quad (5.61)$$

lo cual podemos reescribir como:

$$-iD_i(\vec{r}) + \frac{e^2q}{2k}\epsilon_{ij}T^j(\vec{r}, \gamma), \quad (5.62)$$

donde $D_i(\vec{r}_p)$ es la derivada de Mandelstam, que hemos definido en el capítulo anterior. Además, presenta un término que corresponde a la contracción de (2.16) en la dirección tangente a los tramos de camino, lo cual asegura la preservación de la invariancia calibre al desplazar infinitesimal a la partícula y sus tramos de caminos asociados. Al igual que en el enfoque dado para partículas acopladas a través de un campo de Maxwell, vemos que esta derivada generalizada de Mandelstam preserva la invariancia de calibre al trasladar simultáneamente a las partículas y su manojito de tramos de camino.

Estudiemos ahora como se realiza la ligadura (5.42). Haciendo uso de (5.53)-(5.55), podemos escribir:

$$\left(-\frac{i}{2e}\epsilon^{ij}\Delta_{ij}(\vec{x}) + \frac{e}{2k}\partial_i T^i(\vec{x}, \gamma) + \sum_p^N eq\delta^2(\vec{x} - \vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, \gamma) = 0. \quad (5.63)$$

Usando (2.18)-(2.19), obtenemos:

$$\left(-\frac{i}{2e}\epsilon^{ij}\Delta_{ij}(\vec{x}) + \frac{e}{2k}\sum_s \left[\delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right] + \frac{e}{k}q\delta^2(\vec{x} - \vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, \gamma) = 0, \quad (5.64)$$

donde se observa que, al igual que en Maxwell con partículas, se exige que la carga de las partículas sea proporcional al número n de tramos de caminos y que los puntos extremos de dichos tramos de camino coincidan con la posición de las partículas. Tomando estas consideraciones, se puede escribir:

$$\frac{i}{e}\epsilon^{ij}\Delta_{ij}(\vec{x}) + \frac{e}{2k}(2\alpha - 1)\sum_s \left[\delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right] \psi(\vec{r}, \gamma) = 0. \quad (5.65)$$

En este caso, las exigencias consideradas no son suficientes para resolver la ligadura, es necesario imponer ciertas condiciones sobre los funcionales de onda dependiente de caminos. Siguiendo de cerca el procedimiento realizado para la Teoría Topológica Masiva, proponemos como funcionales de onda:

$$\psi(\vec{r}, \gamma) = e^{\chi(\gamma)}\Phi(\gamma). \quad (5.66)$$

Utilizando la definición (5.23), obtenemos:

$$\frac{i}{2e}\Delta(\vec{x})\chi(\gamma)\psi(\gamma) + \frac{i}{e}\Delta(\vec{x})\Phi(\gamma)e^{\chi(\gamma)} + \frac{e}{2k}(2\alpha - 1)\rho(\vec{x}, \gamma)\psi(\gamma) = 0. \quad (5.67)$$

Si establecemos que:

$$\Delta(\vec{x})\chi(\gamma) = i\frac{e^2}{k}(2\alpha - 1)\rho(\vec{x}, \gamma), \quad (5.68)$$

obtenemos que $\Delta(\vec{x})\Phi(\gamma) = 0$, es decir, los funcionales $\Phi(\gamma)$ dependen de los caminos solamente a través de sus fronteras (puntos extremos). Podemos encontrar explícitamente la forma de los funcionales $\chi(\gamma)$ estableciendo que los mismos se pueden escribir de forma general como:

$$\chi(\gamma) = iC \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln |\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma), \quad (5.69)$$

donde, (5.23) opera sobre los mismos como:

$$\begin{aligned}
\Delta(\vec{y})\chi(\gamma) &= 2iC\epsilon^{ij}\partial_i(\vec{y})\delta_j(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\
&= 2iC\epsilon^{ij}\partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \delta_j(\vec{y}) \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\
&+ 2iC\epsilon^{ij}\partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_j(\vec{y}) T^k(\vec{x}, \gamma) \\
&= 2iC\epsilon^{ij}\partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \partial_m(\vec{x}') \delta_m^j \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \\
&+ 2iC\epsilon^{ij}\partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_j^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -2iC \int d^2x \int d^2x' \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma) \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \\
&- 2iC \int d^2x \int d^2x' \epsilon^{ij} \epsilon^{lj} \rho(\vec{x}', \gamma) \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= -2iC \int d^2x' \delta^{il} \rho(\vec{x}', \gamma) \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^l} \ln|\vec{y} - \vec{x}'| \\
&= -2iC \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \nabla_{\vec{y}}^2 \ln|\vec{y} - \vec{x}'| \\
&= -4\pi iC \int d^2x' \rho(\vec{x}', \gamma) \delta^2(\vec{y} - \vec{x}')
\end{aligned}$$

de donde finalmente obtenemos:

$$i \frac{e^2}{k} (2\alpha - 1) \rho(\vec{x}, \gamma) = -4i\pi C \rho(\vec{x}, \gamma), \quad (5.70)$$

con lo cual determinamos que $C = -\frac{e^2}{4\pi k} (2\alpha - 1)$. Podemos escribir entonces:

$$\chi(\gamma) = -i \frac{e^2}{4\pi k} (2\alpha - 1) \int d^2x \int d^2x' \sum_s \left[(\delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}_s)) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} \int_{\gamma} dy^k \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \right],$$

o, escrito de forma explícita:

$$\chi(\gamma) = i \frac{e^2}{4\pi k} (2\alpha - 1) \int_{\gamma} dx^k \epsilon^{lk} \sum_s \left[\frac{(x - \beta_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\beta}_s|^2} - \frac{(x - \alpha_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|^2} \right], \quad (5.71)$$

donde se reconoce:

$$\Delta\Theta(\gamma) = \sum_s \int_{\gamma} dx^k \epsilon^{lk} \left[\frac{(x - \beta_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\beta}_s|^2} - \frac{(x - \alpha_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|^2} \right], \quad (5.72)$$

como la suma de los ángulos subtendidos por los tramos de caminos medidos desde los puntos finales $\vec{\beta}_s$, menos la suma de los ángulos subtendidos por los tramos de caminos medidos desde los puntos iniciales $\vec{\alpha}_s$, uno de los cuales coincidirá con la posición de la

partícula, dependiendo esto del signo de la carga de la misma. Entonces, los funcionales de ondas que satisfacen la ligadura (y por ende, los que tienen significado físico) serán:

$$\psi(\vec{r}, \gamma) = e^{\left(i \frac{e^2}{4\pi k} (2\alpha-1) \Delta\Theta(\gamma)\right)} \Phi(\vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_s), \quad (5.73)$$

en los cuales, la dependencia en términos de la diferencia de ángulos subtendidos por tramos de camino esta presente. Se describe la interacción por el número de veces que se “enrollan” los tramos de camino alrededor de uno de sus extremos, estando el otro “ocupado” por la partícula.

Capítulo 6

Modelo Juguete: Partículas no relativistas interactuando a través de un campo BF en 2 + 1 dimensiones.

Consideremos ahora la interacción de dos partículas mediada por un campo BF en 2 + 1 dimensiones. Dicha interacción esta descrita por la acción:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^i)^2 + \frac{1}{2} M (\dot{R}^i)^2 \right] + \int d^3x [j^\mu A_\mu + J^\mu B_\mu] + \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu F_{\nu\lambda}, \quad (6.1)$$

donde observamos un término correspondiente a la energía cinética de las partículas, un término donde se expone el acople minimal de las partículas con el campo BF y un término que describe la parte cinética del campo BF. Hemos considerados dos partículas de igual naturaleza, pero por motivos de identificación, se ha establecido que las partículas “tipo 1” estén etiquetadas por letras minúsculas, mientras que las partículas “tipo 2” por letras mayúsculas. Cada partícula se acopla al campo a través de los potenciales A_μ y B_μ respectivamente. Dicho acople se realiza a través de las corrientes:

$$j^\mu(\vec{x}, t) = eqv^\mu \delta^2(\vec{x} - \vec{r}), \quad v^\mu = (1, \dot{r}^i), \quad (6.2)$$

$$J^\mu(\vec{x}, t) = eQV^\mu \delta^2(\vec{x} - \vec{R}), \quad V^\mu = (1, \dot{R}^i), \quad (6.3)$$

donde es importante destacar que, si bien, la unidad de carga fundamental e es la misma para ambas partículas, hemos considerado que la constante de acople es distinta, identificando cada una como q y Q respectivamente. Realizando la descomposición en 2 + 1 dimensiones obtenemos:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^i)^2 + \frac{1}{2} M (\dot{R}^i)^2 \right] + \int d^3x [j^0 A_0 + J^0 B_0 + j^i A_i + J^i B_i] \quad (6.4)$$
$$+ \int d^3x \frac{1}{2} [\epsilon^{0ij} B_0 F_{ij} + \epsilon^{j0i} B_j F_{0i} + \epsilon^{ij0} B_i F_{j0}],$$

lo cual, usando (6.2), (6.3) y la definición de $F_{\mu\nu}$, se reescribe como:

$$S = \int dt \left[\left(\frac{1}{2} m (\dot{r}^i)^2 + eq \dot{r}^i A_i(\vec{r}) \right) + \left(\frac{1}{2} M (\dot{R}^i)^2 + eQ \dot{R}^i B_i(\vec{R}) \right) \right] \quad (6.5)$$

$$+ \int d^3x \left[eq A_0 \delta^2(\vec{x} - \vec{r}) + eQ B_0 \delta^2(\vec{x} - \vec{R}) \right] + \int d^3x \left[\epsilon^{ij} B_0 \partial_i A_j + \epsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j + \epsilon_{ij} B_j \dot{A}_i \right].$$

En orden de construir el Hamiltoniano, procedemos a calcular los momentos conjugados, tomando a las variables A_0 y B_0 , por no poseer dinámica, como multiplicadores de Lagrange. Así,

$$\pi_{\vec{A}}^i = \epsilon^{ij} B_j \quad , \quad \pi_{\vec{B}}^i = 0, \quad (6.6)$$

son los momentos conjugados, y:

$$\phi_{\vec{A}}^i = \pi_{\vec{A}}^i - \epsilon^{ij} B_j \approx 0 \quad , \quad \phi_{\vec{B}}^i = \pi_{\vec{B}}^i \approx 0, \quad (6.7)$$

constituyen vínculos primarios de la teoría. A su vez, se obtiene:

$$p_i = m \dot{r}^i + eq A^i(\vec{r}) \quad , \quad P_i = M \dot{R}^i + eQ B_i(\vec{R}) \quad (6.8)$$

con lo cual se obtiene:

$$m \dot{r}^i = p_i - eq A^i(\vec{r}) \quad , \quad M \dot{R}^i = P_i - eQ B_i(\vec{R}), \quad (6.9)$$

es decir, se despejan las velocidades en términos de los momentos conjugados. Calculemos el hamiltoniano H_0 por medio de la transformación de Legendre,

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p_i - eq A^i(\vec{r}))^2 + \frac{1}{2M} (P_i - eQ B_i(\vec{R}))^2 \quad (6.10)$$

$$+ \int d^2x \left[A_0 (-\epsilon^{ij} \partial_i B_j - eq \delta^2(\vec{x} - \vec{r})) + B_0 (-\epsilon^{ij} \partial_i A_j - eQ \delta^2(\vec{x} - \vec{R})) \right],$$

donde, al actuar A_0 y B_0 como multiplicadores de Lagrange, podemos reconocer inmediatamente:

$$\chi_1 = B_{\vec{B}} - \rho_1 \approx 0 \quad , \quad \chi_2 = B_{\vec{A}} - \rho_2 \approx 0 \quad (6.11)$$

como vínculos de la teoría, donde hemos definido:

$$B_{\vec{B}} = -\epsilon^{ij} \partial_i B_j, \quad \rho_1 = -eq \delta^2(\vec{x} - \vec{r}), \quad B_{\vec{A}} = -\epsilon^{ij} \partial_i A_j \quad \text{y} \quad \rho_2 = -eQ \delta^2(\vec{x} - \vec{R}). \quad (6.12)$$

Considerando las ligaduras obtenidas, procedemos a escribir:

$$H = H_0 + \int d^2x \left(\lambda_i^{\vec{A}} \phi_{\vec{A}}^i + \lambda_i^{\vec{B}} \phi_{\vec{B}}^i \right). \quad (6.13)$$

Preservemos entonces las ligaduras en el tiempo, para ello, consideremos los corchetes de Poisson fundamentales:

$$\{A_i(\vec{x}), \pi_{\vec{A}}^j(\vec{y})\} = \{B_i(\vec{x}), \pi_{\vec{B}}^j(\vec{y})\} = \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (6.14)$$

así, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\vec{A}}^i &= \{\phi_{\vec{A}}^i, H\} = \frac{1}{m} [p_j - eq A_j(\vec{r})] \{\pi_{\vec{A}}^i(\vec{x}), -eq \int d^2y A_j(\vec{y}) \delta^2(\vec{y} - \vec{r})\} \\ &+ \int d^2y B_0(\vec{y}) \{\pi_{\vec{A}}^i(\vec{x}), -\epsilon^{jm} \partial_j(\vec{y}) A_m(\vec{y})\} + \int d^2y \lambda_j^{\vec{B}}(\vec{y}) \{-\epsilon^{il} B_l(\vec{x}), \pi_{\vec{B}}^j(\vec{y})\}, \end{aligned}$$

de lo cual,

$$\dot{\phi}_{\vec{A}}^i = j^i + \epsilon^{ij} \partial_j B_0 - \epsilon^{ij} \lambda_j^{\vec{B}} = 0,$$

donde j^i es la corriente correspondiente a las partículas tipo 1. La relación obtenida permite obtener los multiplicadores $\lambda_i^{\vec{B}}$:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij} \lambda_j^{\vec{B}} &= \epsilon^{ij} \partial_j B_0 + j^i \\ &\Rightarrow \epsilon_{im} \epsilon^{ij} \lambda_j^{\vec{B}} = \epsilon_{im} \epsilon^{ij} \partial_j B_0 + \epsilon_{im} j^i, \\ &\Rightarrow \delta_m^j \lambda_j^{\vec{B}} = \delta_m^j \partial_j B_0 + \Gamma^m, \end{aligned}$$

es decir:

$$\lambda_m^{\vec{B}} = \partial_m B_0 + \Gamma^m, \quad (6.15)$$

donde se ha definido $\Gamma^m = \epsilon_{im} j^i$.

Al preservar $\phi_{\vec{B}}^i$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\vec{B}}^i &= \{\phi_{\vec{B}}^i, H\} = \frac{1}{M} [P_j - eQ B_j(\vec{R})] \{\pi_{\vec{B}}^i(\vec{x}), -eQ \int d^2y B_j(\vec{y}) \delta^2(\vec{y} - \vec{R})\} \\ &+ \int d^2y A_0(\vec{y}) \{\pi_{\vec{B}}^i(\vec{x}), -\epsilon^{jm} \partial_j(\vec{y}) B_m(\vec{y})\} + \int d^2y \lambda_j^{\vec{A}}(\vec{y}) \{\pi_{\vec{B}}^i(\vec{x}), -\epsilon^{jm} B_m(\vec{y})\}, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos:

$$\dot{\phi}_{\vec{B}}^i = J^i + \epsilon^{ij} \partial_j A_0 - \epsilon^{ij} \lambda_j^{\vec{A}} = 0,$$

que de forma similar, permite obtener:

$$\lambda_m^{\vec{A}} = \partial_m A_0 + \Lambda^m, \quad (6.16)$$

donde se ha definido $\Lambda^m = \epsilon_{im} J^i$. La preservación de las ligaduras $\chi_1 \approx 0$ y $\chi_2 \approx 0$ no proporciona información relevante al estudio de la teoría.

Usando (6.15) y (6.16) en (6.13), obtenemos el Hamiltoniano total:

$$\begin{aligned}
 H_T &= H_0 + \int d^2x [(\partial_i A_0 + \Lambda^i) \phi_{\vec{A}}^i + (\partial_i B_0 + \Gamma^i) \phi_{\vec{B}}^i] \\
 &= H_0 + \int d^2x [(\partial_i(A_0 \phi_{\vec{A}}^i) - A_0 \partial_i \phi_{\vec{A}}^i + \Lambda) + (\partial_i(B_0 \phi_{\vec{B}}^i) - B_0 \partial_i \phi_{\vec{B}}^i + \Gamma)] \\
 &= \frac{1}{2m} (p_i - e q A^i(\vec{r}))^2 + \frac{1}{2M} (P_i - e Q B_i(\vec{R}))^2 + \int d^2x [A_0 \chi_1 + B_0 \chi_2] \\
 &\quad + \int d^2x [(A_0 \partial_i(\phi_{\vec{A}}^i) - A_0(\partial_i \phi_{\vec{A}}^i + \Lambda) + (\partial_i(B_0 \phi_{\vec{B}}^i) - B_0 \partial_i \phi_{\vec{B}}^i + \Gamma))],
 \end{aligned}$$

que, despreciando términos de borde y reagrupando, se reescribire como:

$$H_T = \frac{1}{2m} (p_i - e q A^i(\vec{r}))^2 + \frac{1}{2M} (P_i - e Q B_i(\vec{R}))^2 + \int d^2x [A_0 \theta + B_0 \varphi + \Lambda + \Gamma], \tag{6.17}$$

con $\Lambda = \Lambda^i \phi_{\vec{A}}^i$ y $\Gamma = \Gamma^i \phi_{\vec{B}}^i$, además de las ligaduras:

$$\theta = \chi_1 - \partial_i \phi_{\vec{A}}^i \approx 0, \tag{6.18}$$

y

$$\varphi = \chi_2 - \partial_i \phi_{\vec{B}}^i \approx 0. \tag{6.19}$$

Considerando el conjunto de vínculos $\{\phi_{\vec{A}}^i, \phi_{\vec{B}}^i, \theta, \varphi\}$, procedemos a clasificarlos en primera o segunda clase. Se obtiene que:

$$\{\phi_{\vec{A}}^i(\vec{x}), \phi_{\vec{B}}^i(\vec{y})\} = -\epsilon^{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{6.20}$$

es decir, $\phi_{\vec{A}}^i$ y $\phi_{\vec{B}}^i$, son las únicas ligaduras de segunda clase. Al existir ligaduras de segunda clase, es necesario construir los corchetes de Dirac, en orden de realizar la cuantización de la teoría. Considerando que nuestra matriz es:

$$C^{ss'} = -\epsilon^{ss'} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \tag{6.21}$$

su inversa es:

$$(C^{ss'})^{-1} = C_{ss'} = \epsilon_{ss'} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}); \tag{6.22}$$

calculemos, usando la relación (2.14), uno de estos corchetes a modo de ejemplo. :

$$\begin{aligned}
 \{A_i(\vec{x}), B_j(\vec{y})\}^D &= - \int d^2z \int d^2z' \{A_i(\vec{x}), \pi_{\vec{A}}^m(\vec{z}) - \epsilon^{ml} B_l(\vec{z})\} \epsilon_{mn} \delta^2(\vec{z} - \vec{z}') \{\pi_{\vec{B}}^n(\vec{z}'), B_j(\vec{y})\} \\
 &= \int d^2z \int d^2z' \{A_i(\vec{x}), \pi_{\vec{A}}^m(\vec{z}) - \epsilon^{ml} B_l(\vec{z})\} \epsilon_{mn} \delta^2(\vec{z} - \vec{z}') \{B_j(\vec{y}), \pi_{\vec{B}}^n(\vec{z}')\} \\
 &= \int d^2z \int d^2z' \delta_i^m \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \epsilon_{mn} \delta^2(\vec{z} - \vec{z}') \delta_j^n \delta^2(\vec{y} - \vec{z}') \\
 &= \int d^2z' \epsilon_{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{z}') \delta^2(\vec{y} - \vec{z}'),
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\{A_i(\vec{x}), B_j(\vec{y})\}^D = \epsilon_{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}).$$

Los corchetes de Dirac restantes, distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), \pi_A^j(\vec{y})\}^D &= \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), & \{B_i(\vec{x}), \pi_B^j(\vec{y})\}^D &= \delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{r^i, p_j\}^D &= \{R^i, P_j\}^D = \delta_i^j. \end{aligned}$$

Entonces el proceso de cuantización establece:

- Las variables canónicas pasan a ser operadores de un espacio de Hilbert:

$$\begin{aligned} A_i &\longrightarrow \hat{A}_i, & B_i &\longrightarrow \hat{B}_i, & \pi_A^i &\longrightarrow \hat{\pi}_A^i, & \pi_B^i &\longrightarrow \hat{\pi}_B^i, \\ r^i &\longrightarrow \hat{r}^i, & R^i &\longrightarrow \hat{R}^i, & p_i &\longrightarrow \hat{p}_i, & P_i &\longrightarrow \hat{P}_i. \end{aligned}$$

- Los corchetes de Dirac se convierten en relaciones de conmutación entre los operadores:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), B_j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [A_i(\vec{x}), B_j(\vec{y})] = i\epsilon_{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{A_i(\vec{x}), \pi_A^j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [A_i(\vec{x}), \pi_A^j(\vec{y})] = i\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{B_i(\vec{x}), \pi_B^j(\vec{y})\}^D &\longrightarrow [B_i(\vec{x}), \pi_B^j(\vec{y})] = i\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{r^i, p_j\}^D &\longrightarrow [r^i, p_j] = i\delta_j^i, \\ \{R^i, P_j\}^D &\longrightarrow [R^i, P_j] = i\delta_j^i. \end{aligned}$$

- Las ligaduras de segunda clase se hacen fuertemente cero:

$$\phi_A^i = \pi_A^i - \epsilon^{ij} B_j = 0. \quad (6.23)$$

- El espacio físico es el constituido por los funcionales de onda que cumplen con las condiciones:

$$\chi_1(\vec{x}) |\psi\rangle = [-eq\delta^2(\vec{x} - \vec{r}) - \epsilon^{ij} \partial_i B_j] |\psi\rangle = 0, \quad (6.24)$$

$$\chi_2(\vec{x}) |\psi\rangle = [-eQ\delta^2(\vec{x} - \vec{R}) - \epsilon^{ij} \partial_i A_j] |\psi\rangle = 0. \quad (6.25)$$

- La evolución temporal del sistema está descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$H |\psi\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi\rangle, \quad (6.26)$$

donde

$$H = \frac{1}{2m} \left[\hat{p}_i - eq\hat{A}_i(\vec{r}) \right]^2 + \frac{1}{2M} \left[\hat{P}_i - eq\hat{B}_i(\vec{R}) \right]^2. \quad (6.27)$$

Los observables en el sentido de Dirac son, las posiciones \hat{r}^i y \hat{R}^i de las partículas, los campos magnéticos $\hat{B}_{\vec{A}}$ y $\hat{B}_{\vec{B}}$ y los momentos covariantes de las partículas, $\hat{p}_i - eq\hat{A}_i(\vec{r})$ y $\hat{P}_i - eq\hat{B}_i(\vec{R})$. Procedemos a representar geoméricamente, considerando la realización:

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}), \quad \hat{\pi}_{\vec{A}}^i(\vec{x}) \longrightarrow eT^i(\vec{x}, \gamma), \quad (6.28)$$

además de la realización usual para las posiciones y momentos de las partículas:

$$\hat{r}^i \longrightarrow r^i, \quad \hat{p}_i \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial r^i}, \quad (6.29)$$

$$\hat{R}^i \longrightarrow R^i, \quad \hat{P}_i \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial R^i}. \quad (6.30)$$

Haciendo uso de (6.23), obtenemos:

$$\hat{\pi}_{\vec{A}}^i = \epsilon^{ij}\hat{B}_j \longrightarrow \hat{B}_j = \epsilon_{ij}\hat{\pi}_{\vec{A}}^i \implies \hat{B}_j \longrightarrow e\epsilon_{ij}T^i(\vec{x}, \gamma). \quad (6.31)$$

Con la realización propuesta, se comprueba el álgebra de conmutadores:

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_j(\vec{y})]\psi(\gamma) = \left[\frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}), e\epsilon_{mj}T^m(\vec{y}, \gamma) \right] \psi(\gamma) \quad (6.32)$$

$$= i\epsilon_{ij}\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma),$$

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \pi_{\vec{A}}^j(\vec{y})]\psi(\gamma) = \left[\frac{i}{e}\delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] \psi(\gamma) \quad (6.33)$$

$$= i\delta_i^j\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\psi(\gamma),$$

$$[\hat{r}^i, \hat{p}_j]\psi(\gamma) = \left[r^i, -i\frac{\partial}{\partial r^i} \right] \psi(\gamma) \quad (6.34)$$

$$= i\delta_j^i\psi(\gamma),$$

$$[\hat{R}^i, \hat{P}_j]\psi(\gamma) = \left[R^i, -i\frac{\partial}{\partial R^i} \right] \psi(\gamma) \quad (6.35)$$

$$= i\delta_j^i\psi(\gamma).$$

Veamos ahora como quedan realizados los momentos covariantes de las partículas con la realización escogida. Para la partícula tipo 1 obtenemos:

$$\hat{p}_i - eq\hat{A}_i(\vec{r}) \longrightarrow -i\left(\frac{\partial}{\partial r^i} + q\delta_i(\vec{r}) \right) = -iD_i(\vec{r}), \quad (6.36)$$

es decir, obtenemos, al igual que en casos estudiados previamente, el operador diferencial de Mandelstam. Por otra parte, para la partícula tipo 2, usando (6.31) se obtiene:

$$\hat{P}_i - eQ\hat{B}_i(\vec{R}) \longrightarrow -i\left(\frac{\partial}{\partial R^i} + ie^2Q\epsilon_{ij}T^j(\vec{R}, \gamma) \right). \quad (6.37)$$

La forma en que se realizan los momentos covariantes, nos hacen proponer funcionales de onda en el espacio de caminos de la forma $\psi(\gamma) : \psi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma)$, es decir, funcionales que dependen de la posición de las partículas y de los tramos de caminos γ . Representemos ahora las ligaduras; usando (6.31) en (6.24), obtenemos:

$$\left(-eq\delta^2(\vec{x} - \vec{r}) + e \sum_s \left[\delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right] \right) \psi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma) = 0, \quad (6.38)$$

la cual reconocemos como la ligadura presente en la teoría que describe partículas interactuando a través de un campo electromagnético. Esta ligadura se satisface de forma inmediata si exigimos que los tramos de camino salgan de la posición de la partícula “tipo 1” hacia el infinito ($q < 0$) o lleguen desde el infinito a la posición de partícula “tipo 1” ($q > 0$), es decir $\vec{\alpha}_s = \vec{r}$ o $\vec{\beta}_s = \vec{r}$ respectivamente, además de exigir que la constante de acople q sea un múltiplo entero de la unidad de flujo fundamental e , es decir, que la carga este cuantizada.

Veamos ahora la realización de (6.25):

$$\left(\rho_2 + \frac{i}{2e} \epsilon^{ij} \Delta_{ij} \right) \psi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma) = 0 \quad (6.39)$$

donde $\rho_2 = eQ\delta^2(\vec{x} - \vec{R})$ es la densidad de carga de la partícula tipo 2, y Δ_{ij} es la derivada de ciclos presentada en capítulos previos. Esta ligadura es de carácter topológico, es decir, para su resolución es necesario imponer restricciones tanto en los tramos de caminos como en la forma de los funcionales de onda. Siguiendo el esquema de teorías estudiadas anteriormente, proponemos:

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma) = e^{\chi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma)} \Phi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma). \quad (6.40)$$

Veamos entonces como actua (6.39) sobre estos funcionales, esto es:

$$\rho_2 \psi + \frac{i}{2e} \Delta \chi \psi + \frac{i}{2e} e^{\chi} \Delta \Phi = 0, \quad (6.41)$$

donde hemos usado (5.23). Si se exige que:

$$\rho_2 \psi = -\frac{i}{2e} \Delta \chi \psi \quad (6.42)$$

entonces, inmediatamente se obtiene:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (6.43)$$

es decir, $\Phi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma)$, solo depende de los tramos de camino a través de su frontera, la cual, en este caso, concuerda con la posición de las partículas tipo 1 ($\partial\gamma = \vec{r}$), esto es

$\Phi(\vec{r}, \vec{R}, \gamma) = \Phi(\vec{r}, \vec{R})$. Podemos a su vez, encontrar la forma explícita de los funcionales $\chi(\gamma)$, proponiendo que estos se pueden escribir de forma general como:

$$\chi(\gamma) = iC \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}', \gamma) \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l} T^k(\vec{x}, \gamma), \quad (6.44)$$

que implica:

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{y})\chi(\gamma) &= 2iC \epsilon^{ij} \partial_i(\vec{y}) \delta_j(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lm} \frac{\partial}{\partial x^l} T^m(\vec{x}, \gamma) \\ &= 2iC \epsilon^{ij} \partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lm} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_i(\vec{y}) T^m(\vec{x}, \gamma) \\ &= 2iC \epsilon^{ij} \partial_i(\vec{y}) \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lm} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_j^m \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= 2iC \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{lj} \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= 2iC \int d^2x \int d^2x' \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'|) \delta^{li} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= 2iC \int d^2x' \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^i} (\rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{y} - \vec{x}'|) \\ &= 2iC \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^i} (\ln|\vec{y} - \vec{x}'|) \\ &= 2iC \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \nabla_{\vec{y}}^2 \ln|\vec{y} - \vec{x}'| \\ &= 2iC \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') 2\pi \delta^2(\vec{y} - \vec{x}'), \end{aligned}$$

donde finalmente obtenemos:

$$\rho_2 = -\frac{i}{2e} 4\pi i C \rho_2, \quad (6.45)$$

con lo cual determinamos que $C = \frac{e}{2\pi}$. Entonces, la función χ se escribe como:

$$\chi(\gamma) = i \frac{e}{2\pi} \int d^2x \int d^2x' \rho_2(\vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} T^j(\vec{x}, \gamma). \quad (6.46)$$

Podemos reescribir (6.46) de forma explícita como:

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) &= i \frac{e}{2\pi} \int d^2x \int d^2x' eQ \delta^2(\vec{x} - \vec{x}') \ln|\vec{x} - \vec{x}'| \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{\gamma} dy^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= -i \frac{e^2 Q}{2\pi} \int_{\gamma} dy^j \int d^2x \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \ln|\vec{x} - \vec{R}| \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned}$$

es decir:

$$\chi(\gamma) = -i \frac{e^2 Q}{2\pi} \int_{\gamma} dy^j \epsilon^{ij} \frac{(y - R)^i}{|\vec{y} - \vec{R}|^2}, \quad (6.47)$$

donde se identifica $\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} dy^j \epsilon^{ij} \frac{(y-R)^i}{|\vec{y}-\vec{R}|^2}$ como el ángulo subtendido por tramos de camino, medido desde la posición \vec{R} de la partícula “tipo 2”. Así, los funcionales de onda que satisfacen la ligadura, y por lo tanto preservan la invariancia de calibre, tienen la forma:

$$\psi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R}) = e^{\left(-i\frac{e^2 Q}{2\pi} \Theta(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R})\right)} \Phi(\vec{r}, \vec{R}). \quad (6.48)$$

Existe también una representación dual para esta teoría, en la cual, las partículas “tipo 2” ahora son las que tienen objetos geométricos (tramos de camino asociados), y las partículas “tipo 1” están solas. Consideremos la siguiente realización en el espacio de camino:

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow -e\epsilon_{ij} T^j(\vec{x}, \gamma) \quad , \quad \hat{B}_i(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}),$$

con la cual, comprobamos el álgebra de conmutadores:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_j(\vec{y})] \psi &= \left[-e\epsilon_{il} T^l(\vec{x}, \gamma), \frac{i}{e} \delta_j(\vec{x}) \right] \psi \\ &= -i\epsilon_{il} \{ -\delta_j(\vec{y}) T^l(\vec{x}, \gamma) \} \psi, \\ &= i\epsilon_{il} \delta_j^l \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \psi, \\ &= i\epsilon_{ij} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}_A^j(\vec{y})] \psi &= \left[-e\epsilon_{il} T^l(\vec{x}, \gamma), \frac{i}{e} \epsilon^{jm} \delta_m(\vec{x}) \right] \psi \\ &= -i\epsilon_{il} \epsilon^{jm} \{ -\delta_m(\vec{y}) T^l(\vec{x}, \gamma) \} \psi, \\ &= i\epsilon_{il} \epsilon^{jm} \delta_m^l \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \psi, \\ &= i\epsilon_{il} \epsilon^{jl} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \psi, \\ &= i\delta_i^j \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \psi. \end{aligned}$$

Además, los momentos covariantes en esta realización dual serán:

$$\hat{p}_i - eq\hat{A}_i(\vec{r}) \longrightarrow -i \left(\frac{\partial}{\partial r^i} + ie^2 q \epsilon_{ij} T^j(\vec{r}, \gamma) \right), \quad (6.49)$$

para la partícula “tipo 1”, mientras que para la partícula “tipo 2” obtenemos:

$$\hat{P}_i - eQ\hat{B}_i(\vec{r}) \longrightarrow -i \left(\frac{\partial}{\partial R^i} + Q\delta_i(\vec{R}) \right) = -D_i(\vec{R}), \quad (6.50)$$

es decir, de nuevo obtenemos el operador diferencial de Mandelstam. Se observa entonces que, en dicha realización dual, el papel de las partículas se intercambia. Veamos ahora las ligaduras bajo esta representación:

$$\begin{aligned}
 \chi_2 &= \hat{\rho}_2 + \epsilon^{ij} \partial_i \hat{A}_j = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_2 + \epsilon^{ij} \partial_i (-e \epsilon_{jm} T^m(\vec{x}, \gamma)) = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_2 - e \epsilon^{ij} \epsilon_{jm} \partial_i T^m(\vec{x}, \gamma) = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_2 + e \delta_m^i \partial_i T^m(\vec{x}, \gamma) = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_2 + e \partial_m T^m(\vec{x}, \gamma) = 0 \\
 &\Rightarrow \rho_2 - e \sum_s \left[\delta^2(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^2(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Se obtiene entonces que, de las partículas “tipo 2” entran (o salen) tantos tramos de camino como sea el valor de la constante de acople Q en términos de la unidad de carga fundamental e . La ligadura restante queda realizada como:

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \hat{\rho}_1 + \epsilon^{ij} \partial_i \hat{B}_j = 0, \\
 &\Rightarrow \rho_1 + \frac{i}{e} \epsilon^{ij} \partial_i \delta_j = 0, \\
 &\Rightarrow \rho_1 + \frac{i}{2e} \epsilon^{ij} \Delta_{ij} = 0,
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

es decir, es una ligadura de carácter topológico, y su solución, siguiendo lo expuesto anteriormente en el trabajo, serán los funcionales de onda:

$$\psi(\gamma_{\vec{R}}, \vec{r}) = e^{\left(-i \frac{e^2 q}{2\pi} \Theta(\gamma_{\vec{R}}, \vec{r})\right)} \Phi(\vec{r}, \vec{R}), \tag{6.53}$$

donde

$$\Theta(\gamma_{\vec{R}}, \vec{r}) = \int_{\gamma} dy^j \epsilon^{ij} \frac{(y - r)^j}{|\vec{y} - \vec{r}|^2}, \tag{6.54}$$

es el ángulo subtendido por tramos de camino, medidos ahora desde la posición \vec{r} de la partícula “tipo 1”, los cuales preservan la invariancia de calibre de la teoría. Entonces, se obtiene una representación autodual, es decir, no importa cual de las dos partículas se encuentra “sola”, y cual tiene objetos geométricos asociados, como era de esperarse, ya que las partículas son indistinguibles. La interacción es entendida de una forma geométrica, en términos de ángulos subtendidos por tramos de camino, esto es, por como se enrollan dichos tramos “atados” a una partícula alrededor de la otra, sin importar la realización escogida.

Es notable mencionar que, a diferencia de otras teorías topológicas, en esta teoría, los ángulos subtendidos por los tramos de caminos son medidos desde la posición de las partículas “tipo dos” (o de la partícula “tipo 1”, de acuerdo a la realización escogida), y no desde los puntos extremos de dichos tramos, lo cual elimina el problema de autointeracción o auto-ángulo, presente en la autointeracción de partículas cargadas con el campo de Chern-Simons.

Capítulo 7

Discusión

Hemos estudiado la cuantización de diferentes teorías físicas que describen la interacción entre campos de calibre con objetos materiales (partículas y cuerdas), en el marco de la representación geométrica, haciendo énfasis en el espacio de caminos y el espacio de superficies. Partimos, de modo introductorio, explicando de forma concisa el método de cuantización de Dirac [14], el cual constituye una generalización para sistemas singulares, esto es, sistemas donde están presentes dependencias funcionales (denominadas vínculos o ligaduras) entre las variables canónicas, que impiden obtener las velocidades generalizadas en términos de los momentos conjugados. Se presentan los casos donde las ligaduras son de primera o segunda clase, lo cual determina el procedimiento a seguir para realizar la cuantización.

Posteriormente, se realizó una introducción a la teoría de representaciones geométricas, debido a la versatilidad que la misma aporta al estudio de teorías de campos de calibre, esta permite visualizar en términos de objetos geométricos, las interacciones descritas por las teorías antes mencionadas. Estudiamos la representación de caminos abelianos y la representación de superficies abelianas. Se encontró que la teoría de representaciones geométricas se presenta útil históricamente para la resolución de las ligaduras presentes en las teorías de campos de calibre en general, e incluso para aquellas de carácter topológico.

Comenzamos realizando el análisis de teorías de campos de calibre no topológicas bajo este esquema de trabajo. Inicialmente, consideramos la interacción de una partícula cargada, no relativista, con el campo de Maxwell en $3 + 1$ dimensiones. Dicha interacción esta descrita por una acción donde se observa un término cinético correspondiente a la partícula, un término que describe la cinética del campo electromagnético y por último, un término correspondiente al acople mínimo de dicha partícula con el campo, realizado

a través de la corriente generalizada de la partícula y el potencial vector A_μ . Se obtuvo una ligadura que para su resolución, es conveniente el uso de la representación de caminos abelianos, esto es, un espacio de funcionales de onda camino-dependientes. Esta ligadura es resuelta de forma inmediata en dicha representación, si se exige la cuantización de la carga de la partícula, es decir, que la misma sea un múltiplo entero de la unidad de flujo fundamental e , además de exigir que los extremos de los caminos coincidan con los puntos donde las partículas se encuentran, obteniendo como resultado que cuando el valor de la carga q es positivo, los extremos de tramos de camino iniciales coinciden con la posición de las partículas y los extremos finales terminan en el infinito y, en caso contrario, es decir, cuando la carga q es negativa, se tiene que los caminos tienen sus puntos iniciales en el infinito y terminan en las partículas. El sector libre de carga queda entonces satisfecho con ciclos o caminos cerrados. Obtuvimos que el momento covariante de la partículas en dicha realización concuerda con el operador diferencial de Mandelstam:

$$-iD_i(\vec{r}) = -i \left(\frac{\partial}{\partial r^i} - q\delta_i(\vec{r}) \right).$$

Dicho operador mantiene la invariancia de calibre, al desplazar simultáneamente, de forma infinitesimal, a la partícula y los $n = q$ tramos de camino “atados” a la misma.

Luego, estudiamos la interacción de una cuerda cerrada con un Campo de Kalb-Ramond. La acción que describe esta interacción, similar al caso Maxwell+partícula, contiene un término cinético tanto para la cuerda como para el campo de Kalb-Ramond, además de un término de acople minimal expuesto a través de un potencial tensor antisimétrico y la corriente $j^{\mu\nu}$ de la cuerda. Los funcionales de onda que constituyen el espacio físico pertenecen ahora al espacio de superficies abelianas, y se obtuvo que la representación de superficies es la apropiada en este caso. Encontramos que, en orden de satisfacer la ligadura impuesta por la teoría, la posición de la cuerda tiene que coincidir con la frontera de la superficie, además de exigir la cuantización de la constante de acople ϕ de la cuerda, es decir, la misma es un múltiplo entero n de la unidad de flujo fundamental de Kalb-Ramond. Entonces, de la cuerda “emanan” (o “absorben”), tantas hojas o capas de superficie como sea el valor de ϕ . Se obtiene también, que el momento covariante de la cuerda, escrito como:

$$-i \left(\frac{\delta}{\delta z^i} - 2i\phi\delta_{ij}(\vec{z})z'^j \right) \quad (7.1)$$

constituye una generalización al operador diferencial de Mandelstam, el cual desplaza de forma infinitesimal a la cuerda en conjunto con las n hojas o capas de superficies que

están “atadas” a la misma, preservando así la invariancia de calibre.

Como conclusión al estudio de las teorías no topológicas, tenemos que, el espacio físico se encuentra constituido por funcionales de ondas cuyos argumentos son objetos geométricos (“objetos extendidos de Faraday”), los cuales emanan o se absorben (dependiendo del signo de la constante de acople) de las posiciones de los objetos materiales (partículas o cuerdas, respectivamente), obteniéndose líneas o caminos para el caso de Maxwell, y superficies para Kalb-Ramond.

En contraste, para las teorías topológicas, se obtuvo que las exigencias impuestas a los objetos geométricos que representan los campos (caminos, ciclos y superficies), para los casos no topológicos, por si solas, no son suficientes para resolver las ligaduras. Debemos imponer además, ciertas restricciones para los funcionales de onda físicos. Para las teorías de carácter topológico, los funcionales de onda tienen la siguiente estructura:

$$\Psi(\gamma) = e^{\chi(\gamma)}\Phi(\gamma),$$

donde las funciones $\chi(\gamma)$ y $\Phi(\gamma)$ quedan determinadas por la ecuación diferencial obtenida al realizar la ligadura topológica en la representación geométrica apropiada. A modo introductorio y pedagógico a este análisis, estudiamos la Teoría Topológica Masiva (TTM), expuesta en [12],(cita oswaldo), donde obtiene por primera vez la forma que presentan las ligaduras de carácter topológico en el grupo de representaciones geométricas, así como un método para la resolución de las mismas. Los funcionales de onda que constituyen el espacio físico en la TTM tiene la forma:

$$\psi(\gamma) = e^{\left(-i\frac{2e^2}{k}\Delta\Theta(\gamma)\right)}\Phi(\vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_s),$$

donde $\Phi(\vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_s)$ depende de los tramos de camino solamente a través de su frontera (puntos extremos), y $\Delta\Theta(\gamma)$ representa la suma de los ángulos subtendidos por tramos de camino γ medidos desde sus puntos finales β_s , menos la suma de los ángulos subtendidos desde sus puntos iniciales α_s , es decir:

$$\Delta\Theta(\gamma) = \sum_s \int_{\gamma} dx^k \epsilon^{lk} \left[\frac{(x - \beta_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\beta}_s|^2} - \frac{(x - \alpha_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|^2} \right],$$

por lo que podemos concluir que la interacción está descrita en términos de cómo los tramos de camino se “enrollan” alrededor de sus puntos extremos.

Posteriormente, analizamos la interacción de una partícula no relativista con el campo de Chern-Simons en 2+1 dimensiones, donde, en contraste con la TTM, tenemos presente

ahora objetos materiales (partículas). La ligadura topológica obtenida queda resuelta si se exige que la carga de la partícula este cuantizada, que los extremos de tramos de camino concuerden con la posición de dicha partícula, además de imponer que los funcionales de onda tenga la forma:

$$\psi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{r}) = e^{\left(-i \frac{e^2(2\alpha-1)}{4\pi k} \Delta\Theta(\gamma)\right)} \Phi(\partial\gamma_{\vec{r}}, \vec{r}),$$

donde, en este caso

$$\Delta\Theta(\gamma) = \sum_s \int_{\gamma} dx^k \epsilon^{lk} \left[\frac{(x - \beta_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\beta}_s|^2} - \frac{(x - \alpha_s)^l}{|\vec{x} - \vec{\alpha}_s|^2} \right],$$

es decir, los ángulos esta medidos desde los extremos de tramos de camino, de igual forma que en la TTM. En conclusión, obtuvimos que en este caso, la interacción esta descrita en términos de cuántas veces se enrollan los tramos de camino alrededor sus puntos extremos, y que dichos tramos de caminos “emanan” (o “llegan”) a la partícula que es frontera de los mismos, es decir, dependiendo del signo de la carga, $\vec{\alpha}_s$ o $\vec{\beta}_s$ concuerda con la posición de la partícula.

Luego, consideramos al interacción de dos “tipos” de partículas no relativistas, acopladas a través de un campo BF en 2 + 1 dimensiones. Nuevamente, la interacción esta descrita por una ligadura de carácter topológico, la cual queda resuelta exigiendo que la carga de ambas partículas (q y Q, respectivamente) este cuantizada, que los extremos de tramos de camino coincidan con la posición de una de las partículas, además de tener funcionales de onda de la forma:

$$\psi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R}) = e^{\left(-i \frac{e^2 Q}{2\pi} \Theta(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R})\right)} \Phi(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R}),$$

donde:

$$\Theta(\gamma_{\vec{r}}, \vec{R}) = \int_{\gamma} dx^j \epsilon^{ij} \left[\frac{(x - R)^i}{|\vec{x} - \vec{R}|^2} \right],$$

es el ángulo subtendido por tramos de camino (que coinciden con la posición \vec{r} de las partículas “tipo 1”), medidos desde la posición \vec{R} de las partículas “tipo 2”. Concluimos que la interacción se encuentra descrita por el número de veces que los tramos de camino atados a \vec{r} se enrollan alrededor de \vec{R} . Es importante destacar, que, a diferencia de la TTM y CS+partículas, esta teoría elimina el problema de autointeracción o autoángulo [18]; es decir, en los casos mencionados, la diferencia de ángulos subtendidos es medida desde extremos de dichos caminos, mientras que en teoría BF+partículas en 2 + 1 dimensiones, dicho ángulo es medido desde la posición de las partículas “tipo 2”.

Cabe destacar a su vez, que en esta teoría surge una especie de “autodualidad”, al intercambiar los roles desempeñados por los dos tipos de partículas, es decir, podríamos considerar también la situación en la cual, los caminos “emanan” de las partículas “tipo 2” (extremos de tramos de camino coinciden con la posición \vec{R}), estando ahora las partículas “tipo 1” sin ningún objeto geométrico asociado a las mismas, entonces, el ángulo subtendido por dichos tramos de camino es medido desde la posición \vec{r} , obteniendo la misma interpretación en ambos casos.

Por último, es importante mencionar que lo expuesto en este trabajo puede ser generalizado a otras teorías, que sean dimensionalmente mayores; por ejemplo, se podría considerar la interacción entre una partícula cargada con un objeto extendido (cuerda), ambos no relativistas, a través de un campo BF en 3 + 1 dimensiones, descrita por la acción:

$$S = \int dt \frac{1}{2} [m(\dot{r}^i)^2] + \int dt \int d\sigma [(\dot{z}^i)^2 - (z'^i)^2] + \int d^4x \left[j^\mu A_\mu + \frac{1}{2} j^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \quad (7.2)$$

donde observamos un término correspondiente a la energía cinética de la partícula y un término para la energía de la cuerda. α es una constante que representa la tensión de la misma. También incluye un término de acople que consta en una contribución para el acople de la partícula y el campo, expresado con la corriente j^μ de la partícula y el potencial vector A_μ , más un término que describe la interacción cuerda-campo, por medio de la corriente $j^{\mu\nu}$ de la cuerda y el potencial tensor $B_{\mu\nu}$. Por último, tenemos un término correspondiente al campo BF en 3 + 1 dimensiones. Luego de la descomposición en 3 + 1 dimensiones, obtenemos:

$$S = \int dt \frac{1}{2} [m(\dot{r}^i)^2] + \int dt \int d\sigma [(\dot{z}^i)^2 - (z'^i)^2] + \phi \int dt \int d\sigma [B_{0i} z'^i + \dot{z}^i z'^j B_{ij}] + \int d^4x \left[\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{0i} F_{jk} + A_0 \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_i B_{jk} + eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) \right) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{jk} \dot{A}_i \right], \quad (7.3)$$

donde ϕ es la constante de acople del campo BF con la cuerda. Considerando desde el inicio A_0 y B_{0i} como multiplicadores de Lagrange, entonces, obtenemos los momentos conjugados:

$$p_i = m\dot{r}^i + eqA_i(\vec{r}) \quad , \quad P_i = \alpha\dot{z}^i + \phi B_{ij} z'^j, \quad (7.4)$$

$$\pi^i - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{jk} \approx 0 \quad , \quad \pi^{ij} \approx 0, \quad (7.5)$$

de los cuales obtenemos las velocidades:

$$m\dot{r}^i = p_i - eqA_i(\vec{r}) \quad , \quad \alpha\dot{z}^i = P_i - \phi B_{ij}z'^j. \quad (7.6)$$

y las ligaduras:

$$\phi^i = \pi^i - \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}B_{jk} \approx 0 \quad , \quad \phi^{ij} = \pi^{ij} \approx 0. \quad (7.7)$$

El Hamiltoniano H_0 queda definido por:

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p_i - eqA_i(\vec{r}))^2 + \int d\sigma \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{\alpha^2} (P_i - \phi B_{ij}z'^j)^2 + (z'^i)^2 \right] \\ + \int d^3x [A_0\chi + B_{0i}\chi^i], \quad (7.8)$$

donde

$$\chi = -eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) - \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i B_{jk} \approx 0, \quad (7.9)$$

y

$$\chi^i = -\phi \int d\sigma z'^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) - \epsilon^{ijk}\partial_j A_k \approx 0, \quad (7.10)$$

son ligaduras obtenidas al considerar A_0 y B_{0i} como multiplicadores de Lagrange.

Luego de realizar la correspondiente cuantización, obtenemos el álgebra de conmutadores:

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_{jk}(\vec{y})] = i\epsilon_{ijk} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\hat{B}_{jk}(\vec{x}), \hat{\pi}^{km}(\vec{y})] = \frac{i}{2}(\delta_i^k \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^k) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad [\hat{r}^i, \hat{P}_j] = i\delta_j^i, \\ [\hat{z}^i(\sigma), \hat{P}_j(\sigma')] = i\delta_j^i \delta(\sigma - \sigma').$$

Analicemos de forma cualitativa cómo se realizan (7.9) y (7.10). La interacción puede describirse en términos de caminos abelianos (atados a las partículas), estando la cuerda “sola”, sin objetos geométricos asociados; o por una representación dual donde la cuerda tiene asociados objetos geométricos (esta vez superficies), y la partícula está “sola”, sin objetos geométricos asociados. Consideremos la realización en el espacio de caminos:

$$\hat{A}_i \longrightarrow \frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), \quad (7.11)$$

$$\hat{\pi}^i \longrightarrow eT^i(\vec{x}, \gamma) \quad \Longrightarrow \quad \hat{B}_{lm} \longrightarrow e\epsilon_{ilm}T^i(\vec{x}, \gamma). \quad (7.12)$$

Veamos entonces, que dicha realización satisface el álgebra de conmutadores:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})]\psi &= \left[\frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] \psi, \\ &= i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_{jk}(\vec{y})]\psi &= \left[\frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), e\epsilon_{ijk}T^l(\vec{y}, \gamma) \right] \psi, \\ &= i\epsilon_{ijk} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Las ligaduras en la realización escogida quedan como:

$$[eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + e\partial_i T^i(\vec{x}, \gamma)] \psi(\gamma) = 0. \quad (7.15)$$

$$\left[\phi \int d\sigma z^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) + \frac{i}{2e} \Delta^i(\vec{x}) \right] \psi = 0, \quad (7.16)$$

donde $\Delta^i = \epsilon^{ijk} \Delta_{jk}$. Observamos que dicha ligadura es topológica en la realización escogida. Por otra parte, consideremos la representación dual:

$$\hat{A}_i \longrightarrow -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^{jk}(\vec{x}, \Sigma) \quad (7.17)$$

$$\hat{B}_{ij} \longrightarrow 2i\delta_{ij}(\vec{x}), \quad (7.18)$$

y vemos que la misma satisface el álgebra de conmutadores:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{y})]\psi &= \left[-\frac{1}{2e} \epsilon_{ilm} T^{lm}(\vec{x}, \Sigma), ie\epsilon^{jpq} \delta_{pq}(\vec{y}) \right] \psi, \\ &= i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_{jk}(\vec{y})]\psi &= \left[-\frac{1}{2e} \epsilon_{ilm} T^{lm}(\vec{x}, \Sigma), 2ie\delta_{jk}(\vec{y}) \right] \psi, \\ &= i\epsilon_{ijk} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

En esta representación dual escribimos (7.9) como:

$$[eq\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + ie\epsilon^{ijk} \partial_i \delta_{jk}] \psi(\Sigma) = 0 \quad (7.21)$$

que se reescribe como:

$$\left[q\delta^3(\vec{x} - \vec{r}) + \frac{i}{3} \Delta(\vec{x}) \right] \psi(\Sigma) = 0 \quad (7.22)$$

con $\Delta(\vec{x}) = \epsilon^{ijk} \Delta_{ijk}$. Por otro lado, (7.10) se escribe como:

$$\left[-\phi \int d\sigma z^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) + \frac{1}{2e} \epsilon^{ijk} \epsilon_{kmn} T^{mn} \right] \psi(\Sigma) = 0, \quad (7.23)$$

$$\left[-\phi \int d\sigma z^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) - \partial_j T^{ji} \right] \psi(\Sigma) = 0, \quad (7.24)$$

que podemos reescribir, usando (2.27), como:

$$\left[\phi \int d\sigma z'^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) - T^i(\vec{x}, \partial\Sigma) \right] \psi(\Sigma) = 0. \quad (7.25)$$

Observamos entonces que (7.25) corresponde a una ligadura de Gauss, como la obtenida para la teoría de Kalb-Ramond+cuerda mientras (7.22) es una ligadura topológica.

Concluimos en general que, la representación geométrica es útil para el estudio de teorías de campo de calibre, ya que permite visualizar las interacciones descritas por las mismas en término de objetos geométricos. Para el caso de teorías no topológicas, obtenemos un esquema de líneas o superficies de Faraday, además de proporcionar una justificación cuantitativa para la cuantización de la constante de acoplo (o carga) entre la materia y los campos. Además proporciona una forma concisa para resolver las ligaduras existentes en las teorías de carácter topológico, que de otra forma son complicadas de estudiar. Obtuvimos que la interacción se encuentra descrita por ángulos subtendidos por los objetos geométricos, medidos desde sus puntos extremos (frontera), es decir, la interacción se describe por la forma en que se “enrollan” los caminos (o superficies) alrededor de un punto, que puede estar libre (como en la TTM), o puede concordar con la posición de un objeto material, el cual que interactúa con el campo o con otro tipo de materia (por ejemplo, BF+partículas).

Podemos suponer que en el caso planteado para la interacción de una cuerda con una partícula por medio de un campo BF en 3 + 1 dimensiones, la interacción topológica se describirá en términos del ángulo sólido (debido a que tenemos 3 dimensiones espaciales) subtendido por los objetos geométricos (caminos o superficies, según la representación que se escoja) medidos desde sus fronteras, las cuales coincidirán con alguno de los objetos materiales (ya sea la cuerda, o la partícula). Tendremos una representación en el espacio de caminos, en la cual, dichos caminos estarán atados a la partícula y donde la cuerda no tendrán objetos geométricos asociados. Se supone que la interacción esta descrita por el ángulo sólido subtendido por dichos tramos de camino medido desde la posición de la cuerda. Además, suponemos una representación dual en el espacio de superficies, donde dichas superficies estarán asociadas a la cuerda, mientras que la partícula estará sola. La interacción quedará descrita por el ángulo sólido subtendido por dichas superficies, medido desde la posición de la partícula.

El estudio a profundidad de la interacción anteriormente descrita, y de otros problemas que seguramente surgirán, son de nuestro interés, y serán objeto para estudios posteriores.

Bibliografía

- [1] Stanley Mandelstam. Quantum electrodynamics without potentials. *Annals of Physics*, 19(1):1 – 24, 1962.
 - [2] Cayetano Di Bartolo, Rodolfo Gambini, and Jorge Griego. The extended loop group: an infinite dimensional manifold associated with the loop space. *Communications in mathematical physics*, 158(2):217–240, 1993.
 - [3] R Gambini and A Trias. Geometrical origin of gauge theories. *Physical Review D*, 23(2):553, 1981.
 - [4] R Gambini and A Trias. Path-dependent quantum formulation of electromagnetism with magnetic charges. *Journal of Mathematical Physics*, 21(6):1539–1545, 1980.
 - [5] C Di Bartolo, F Nori, R Gambini, and A Trias. Loop-space quantum formulation of free electromagnetism. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 38(15):497–502, 1983.
 - [6] Bernd Brügmann and Jorge Pullin. On the constraints of quantum gravity in the loop representation. *Nuclear Physics B*, 390(2):399–438, 1993.
 - [7] Lorenzo Leal. Space of signed points and the self-dual model. *Physical Review D*, 66(10):105027, 2002.
 - [8] PJ Arias, N Bolívar, E Fuenmayor, and Lorenzo Leal. Quantization of interacting non-relativistic open strings using extended objects. *arXiv preprint hep-th/0512115*, 2005.
 - [9] Ernesto Fuenmayor, Lorenzo Leal, and Ryan Revoredo. Loop representation of charged particles interacting with maxwell and chern-simons fields. *Physical Review D*, 65(6):065018, 2002.
 - [10] Michael Kalb and Pierre Ramond. Classical direct interstring action. *Physical Review D*, 9(8):2273, 1974.
-

- [11] PJ Arias, E Fuenmayor, and Lorenzo Leal. Interacting particles and strings in path and surface representations. *Physical Review D*, 69(12):125010, 2004.
 - [12] Lorenzo Leal and Oswaldo Zapata. Maxwell chern-simons theory in a geometric representation. *Physical Review D*, 63(6):065010, 2001.
 - [13] Oswaldo Zapata. Formulación de caminos de la teoría topológicamente masiva abeliana, 1999.
 - [14] Paul Adrien Maurice Dirac. *Lectures on quantum mechanics*, volume 2. Courier Corporation, 2001.
 - [15] R Jackiw. Constrained quantization without tears. *arXiv preprint hep-th/9306075*, 1993.
 - [16] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2000.
 - [17] Ernesto Fuenmayor. Estudio de representaciones geométricas e invariantes de nudo en teorías topológicas de calibre acopladas con la materia, 2005.
 - [18] Pio J Arias, Lorenzo Leal, and Jean Carlos Perez-Mosquera. Geometric approach to a massive p form duality. *Physical Review D*, 67(2):025020, 2003.
-