

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**CARACTERIZACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES A PARTIR
DE LOS PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Jovanna Moya
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciada en Física**
Con la tutoría de: Dr. José Ramírez
Dr. Nelson Bolívar

Mayo-2018

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**CARACTERIZACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES A PARTIR
DE LOS PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Jovanna Moya
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciada en Física**
Con la tutoría de: Dr. José Ramírez
Dr. Nelson Bolívar

Mayo-2018
Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Jovanna de los Angeles Moya Rodríguez**, Cédula de Identidad **V-24625115**, bajo el título “**Caracterización de Ondas Gravitacionales a partir de los parámetros físicos del sistema**”, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciada en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 24 de mayo de 2018, a las 2:00 pm, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 24 días del mes de mayo de 2018, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Nelson Enrique Bolivar Cova.

Firma del jurado evaluador

Profa. Rosa Elena Mujica
Paredes
UCV

Prof. José Antonio López
Rodríguez
UCV

Prof Nelson Enrique Bolivar
Cova
UCV



“Un científico en su laboratorio no es sólo un técnico: es también un niño colocado ante fenómenos naturales que le impresionan como un cuento de hadas.”

Marie Curi.

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mi familia por todo el esfuerzo que han realizado todo este tiempo; especialmente le agradezco a mi papá Carlos Moya ya que sin su apoyo, paciencia y consejo este trabajo no hubiera sido posible. También quiero agradecer a mis tutores José Ramírez y Nelson Bolívar por sus enseñanzas y guía durante este proceso, gracias por los conocimientos que me han transmitido.

También quiero agradecer a las personas y amigos que de una u otra forma colaboraron a lo largo de este trayecto; a mis amigas: Dayanna Pereira y Mariana Gamboa por siempre estar allí para mi; a Kilver Campos por ayudarme a resolver los problemas de la computadora cuando me hacía perder la paciencia; a Alfredo Mejía por sacarme de ciertos apuros del código y a Luis Fernando Pérez por hacerme reír y darme ánimos cuando me estresaba.

Un profundo agradecimiento a la Universidad Central de Venezuela y a todos mis profesores por todo su esfuerzo para que pudiera convertirme no solo en una Licenciada merecedora de ese título sino también en una excelente y mas madura persona. Al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas por prestar el espacio físico y los recursos donde desarrollar con tranquilidad este trabajo.

RESUMEN

Se ha realizado un código que ajusta los datos de la primera observación de ondas gravitacionales detectadas por LIGO, utilizando simulaciones llevadas a cabo con el código SpEC y almacenadas en el catálogo público SXS Catalog; para obtener los parámetros físicos de la fuente de dichas ondas asignando los parámetros de la forma de onda teórica que mejor ajusta a la forma de onda observada. De esta manera se obtuvieron valores para las características de la fuente similares a los reportados por LIGO en sus publicaciones [1] y TABLA I de [2]; por ejemplo se observan coincidencias con las masas con respecto al sistema de referencia de la fuente en la TABLA I; también las magnitudes de los espines que se suelen mostrar en su forma adimensional y los valores de la excentricidad e y de la frecuencia orbital inicial.

Palabras claves: Ondas gravitacionales, LIGO, Relatividad General, Simulaciones.

Índice general

Lista de figuras	13
Lista de tablas	15
Introducción.	16
1. Teoría de la Relatividad General	19
1.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein	19
1.2. Sólo dos polarizaciones	21
2. Fuentes de Ondas Gravitacionales	25
2.1. Esquema General	25
2.2. Principales fuentes de Ondas Gravitacionales	26
2.2.1. Supernovas	26
2.2.2. Inflación	27
2.2.3. Sistemas binarios tales como los formados por:	27
2.3. Relación entre las fuentes y los detectores de Ondas Gravitacionales	27
2.4. Generación de ondas gravitacionales por un Sistema Binario de Agujeros Negros (BBH)	29
3. Detección de Ondas Gravitacionales y Metodología	31
3.1. Esquema General	31
3.2. Aparato utilizado por LIGO para la detección de Ondas Gravitacionales	32
3.3. Propiedades de la fuente y sus parámetros	33
3.4. Formato de las Formas de Ondas	35
3.5. Simulaciones con Spectral Einstein Code (SpEC)	38
3.6. SXS Catalog	39
3.7. Análisis de la forma de onda	41

4. Resultados y Conclusiones	49
4.1. Resultados	49
4.1.1. Resultado 1: Gráficas de las trayectorias, distancia relativa y velocidad del sistema de cada simulación.	49
4.1.2. Resultado 2: Lectura de los archivos que contienen el pseudo escalar Ψ_4 para la obtención del strain teórico de cada simulación y obtención del strain observado.	63
4.1.3. Resultado 3: Cálculo de los valores de χ^2 para escoger la simulación que mejor ajusta.	73
4.2. Conclusiones	86
A. Obtención detallada de la ecuación de Ondas Gravitacionales a partir de las ecuaciones de Relatividad General	89

Índice de figuras

1.1. Representación de las matrices de polarización.	23
2.1. Espectro de las ondas gravitacionales.	28
2.2. Proceso de generación de ondas gravitacionales por un BBH.	30
3.1. Diagrama simplificado de un detector de LIGO.	33
3.2. Esquematización de una forma de onda teórica.	36
3.3. Características de las simulaciones de SpEC.	39
3.4. Estructura interna jerárquica de los archivos h5 de SpEC.	43
3.5. Magnitud de los armónicos esféricos en el tiempo de la etapa del merger. .	44
3.6. Orientación relativa del cielo y el marco del detector	45
3.7. Proceso realizado para obtener los parámetros de los datos observados a partir de las simulaciones.	48
4.1. Trayectorias de las 10 simulaciones elegidas. En todos los casos la línea azul es la correspondiente al agujero negro de mayor masa (m_1) mientras que la naranja es la del que posee menor masa (m_2).	56
4.2. Proyección en el plano xy de las trayectorias.	57
4.3. Proyección en el plano xz de las trayectorias.	58
4.4. Variación de la distancia en el tiempo entre los dos cuerpos de las 10 simulaciones elegidas.	60
4.5. Variación de la velocidad del sistema en el tiempo de las 10 simulaciones elegidas.	61
4.6. Comparación de la variación de la distancia entre los dos cuerpos y de la velocidad del sistema en el tiempo para las 10 simulaciones.	62
4.7. Parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 (componente del tensor de Weyl que representa la radiación emitida) para las 10 simulaciones elegidas. 64	
4.8. Fase entre la parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 de las 10 simulaciones elegidas.	65

4.9. Formas de ondas multiplicadas por r de las 10 simulaciones elegidas.	66
4.10. Parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 proyectadas en la orientación del detector.	68
4.11. Parte real del strain proyectado en la orientación del detector.	69
4.12. Formas de ondas de las 10 simulaciones elegidas.	70
4.13. Conjunto de datos observados por LIGO.	71
4.14. Ondas Gravitacionales observadas por LIGO.	72
4.15. Ajuste y residuo para la simulación 0010.	74
4.16. Ajuste y residuo para la simulación 0147.	75
4.17. Ajuste y residuo para la simulación 0155.	76
4.18. Ajuste y residuo para la simulación 0201.	78
4.19. Ajuste y residuo para la simulación 0206.	79
4.20. Ajuste y residuo para la simulación 0211.	80
4.21. Ajuste y residuo para la simulación 0295.	81
4.22. Ajuste y residuo para la simulación 0305.	83
4.23. Ajuste y residuo para la simulación 0322.	84
4.24. Ajuste y residuo para la simulación 0324.	85

Índice de cuadros

3.1. Parámetros iniciales de la simulación.	40
3.2. Datos dados en los archivos del catálogo.	42
4.1. Parámetros de la simulación 0010.	50
4.2. Parámetros de la simulación 0147.	50
4.3. Parámetros de la simulación 0155.	51
4.4. Parámetros de la simulación 0201.	51
4.5. Parámetros de la simulación 0206.	52
4.6. Parámetros de la simulación 0211.	52
4.7. Parámetros de la simulación 0295.	53
4.8. Parámetros de la simulación 0305.	53
4.9. Parámetros de la simulación 0322.	54
4.10. Parámetros de la simulación 0324.	54
4.11. χ^2 para cada simulación estudiada (cada número esta multiplicado por 10^{-18}).	73

Introducción

La teoría de la Relatividad General fue presentada por primera vez por Albert Einstein en 1915. Estas ecuaciones de campo relacionan la curvatura del espacio-tiempo con el tensor energía-momento causante de tal curvatura y, desde entonces, incentivaron a la comunidad científica a buscarles soluciones analíticas. A pesar de que hoy en día se utilizan métodos computacionales para resolverlas, en esa época se hicieron diversas aproximaciones que llevaron a resultados muy interesantes; entre tales resultados se encuentra una solución en forma de ecuación de onda plana que resulta de la linealización de dichas ecuaciones, es decir; se llegó a una perturbación que se propaga en el espacio-tiempo a la velocidad de la luz como una onda en un estanque de agua completamente tranquila. Desde ese momento se pudo notar que la onda sería de intensidad tan pequeña que se teorizaba que nunca podría ser observada.

En septiembre de 2015, 100 años después de que Albert Einstein formulara su teoría de la Relatividad General, el Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) detectó por primera vez la señal de una onda gravitacional (GW), producto de la fusión de un sistema binario de agujeros negros (BBH). Debido al rango de la longitud de onda de dicha señal, estos binarios compactos coalescentes constituyen las fuentes principales para los detectores terrestres. Mientras que para sistemas que tienen una combinación de baja masa, solo la parte inicial de la evolución del binario, el inspiral, es accesible para el detector, para sistemas de gran masa también las etapas posteriores; en particular el merger y el ringdown del agujero negro final, son visibles en la banda de sensibilidad de LIGO.

Las ondas gravitacionales no sólo son radiadas por sistemas de agujeros negros sino también por objetos astronómicos masivos y acelerados, mientras mas masivo sea el cuerpo o mas acelerado se encuentre mayor será la radiación emitida. En este sentido actualmente se conocen varias fuentes de radiación gravitacional desde supernovas, pasando por pulsares, hasta un fondo de radiación cósmica.

Esta clase de observaciones le entrega al detector una gran cantidad de datos para ser procesados, obteniendo de allí las características de la fuente de GW, a través de un ajuste o comparación con formas de ondas teóricas obtenidas previamente con simulaciones para un conjunto de parámetros de la fuente. En esas simulaciones se utilizan distintos métodos como aproximación Post-Newtoniana (PN) o se resuelven las ecuaciones de campo de la relatividad general utilizando algún algoritmo que permita llegar a datos teóricos

más exactos con un mediado coste computacional. Distintos grupos e instituciones han logrado obtener diferentes formas de ondas organizandolas en lo que se conoce como un catálogo. En nuestro caso hemos decido utilizar las formas generadas con Spectral Einstein Code (SpEC) que se encuentran agrupadas en el SXS Catalog, pues este es uno de los códigos que goza de mayor prestigio (incluso fue utilizado por LIGO para algunas de sus pruebas) y su correspondiente catálogo es uno de los más extensos.

El objetivo de este trabajo ha sido crear un código que utilice las simulaciones del SXS Catalog para ajustar los datos de la primera observación de ondas gravitacionales (denominada GW150914) realizada por LIGO y, a partir de la simulación que mejor ajuste, asignar los parámetros de la fuente de esa simulación a los datos obtenidos por los detectores. Por lo tanto se han planteado los siguientes objetivos, general y específicos:

Objetivo General: Caracterizar los datos de la observación de ondas gravitacionales GW150914 realizada por el Large Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), a partir de los parámetros físicos que definen la fuente de éstas.

Objetivos Específicos:

- Estudiar la documentación teórica relacionada a la generación y detección de ondas gravitacionales.
- Extraer y analizar la información contenida en los archivos de cada simulación seleccionada del SXS Catalog.
- Realizar el ajuste de los datos observados y la prueba de χ^2 para obtener la simulación mas semejante a los datos.

Capítulo 1

Teoría de la Relatividad General

Las ondas gravitacionales fueron predichas originalmente a partir de la teoría de Albert Einstein como solución al sistema de ecuaciones que surge de la Relatividad General, resultando en una ecuación de onda plana con polarizaciones y velocidad definidas. A partir de dicha linealización se obtuvieron resultados tales como las polarizaciones de estas ondas y la velocidad a la que se propagan.

1.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein

Las ecuaciones de campo se pueden escribir en su forma covariante, como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

Siguiendo el procedimiento de la referencia [3]; las ondas gravitacionales se pueden traducir como una pequeña perturbación a la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

y

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu},$$

donde:

- $h_{\mu\nu}$ junto con su primera derivada $h_{\mu\nu,\rho}$, y derivadas mayores son pequeñas, y todos los productos de estas pueden ser ignorados.
 - Los índices son subidos y bajados utilizando $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$, en vez de $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$.
 - No se tiene la condición cuasi-estática ($\partial_0 h_{\mu\nu} \ll \partial_i h_{\mu\nu}$).
-

Utilizando lo anterior, las ecuaciones de campo de la Relatividad General se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\implies h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha + h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha}^\alpha + \eta_{\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 2kT_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

Para simplificar se hace:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + (\eta_{\mu\nu} \bar{h}_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \bar{h}_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - \bar{h}_{\mu,\nu\alpha}^\alpha) = 2kT_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

Se define una transformación de calibre como:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha), \quad (1.5)$$

donde ξ^μ es tan pequeño como $h_{\mu\nu}$.

Luego de simplificaciones, utilizando las ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5; se obtiene:

$$\bar{h}_{,\alpha'}^{\mu'\alpha'} = \bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} - \xi_{\alpha}^{\mu,\alpha}, \quad (1.6)$$

Se puede escoger ξ^μ convenientemente para que sea solución de 1.6:

$$\xi_{,\alpha}^{\mu\alpha} = \bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha}, \quad (1.7)$$

En este sistema cada término dentro del paréntesis en 1.4 es cero por separado, quedando:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = 2kT_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

(1.8) es válida mientras que $\bar{h}^{\mu\nu}$ cumpla con la condición de calibre,

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0, \quad (1.9)$$

Observamos que:

- Parecido al *calibre de Lorentz*: $A_{,\mu}^\mu = 0$, $A_\mu \longrightarrow A_\mu - \psi_{,\mu}$ si y sólo si $\psi_{,\mu}^\mu = 0$, donde $\bar{h}^{\mu\nu}$ corresponde a A^μ .
- Se observa que se preservará la condición de calibre si:

$$\xi_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0.$$

Se introduce el d'Alembertiano $\square^2$ definido por:

$$\square^2 \equiv -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta, \quad (1.10)$$

El cual se conoce como:

$$\nabla^2 - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

Por lo cual se puede escribir la ecuación 1.8 como:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -2kT^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

La ecuación 1.11 es una ecuación de ondas siempre que se cumpla la **condición de calibre**:

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0.$$

La transformación de calibre

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu,$$

conserva la condición de calibre mientras que ξ^μ satisfaga:

$$\square^2 \xi^\mu = 0, \quad (1.12)$$

Se tiene, entonces, una *ecuación de ondas*; con fuente:

$$-2kT^{\mu\nu} \equiv \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu},$$

En el espacio vacío: $\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0$

Se ve que la radiación gravitacional se propaga a la velocidad de la luz:

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}^{\mu\nu} = 0.$$

1.2. Sólo dos polarizaciones

La forma más simple de la ecuación de onda es:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0,$$

Según la referencia [3], se observa que es la ecuación de una onda plana por lo cual tiene como solución:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \text{Re}[A^{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \quad (1.13)$$

- $[A^{\mu\nu}]$ es la matriz de las amplitudes.
- $k^\mu = \eta^{\mu\alpha} k_\alpha$ es el cuadvectores de la dirección de propagación.

→ Como $\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$, la matriz de amplitud tiene sólo diez entradas diferentes.

→ Por la condición, derivada de 1.13; $A^{\mu\nu}k_\nu = 0$, estas entradas se reducen a seis.

Desarrollando $A^{\mu\nu}k_\nu = 0$ implica la condición:

$$A^{\mu 0} = A^{\mu 3}, \quad (1.14)$$

Por lo cual se eliminan otras cuatro entradas diferentes.

Al final $A^{\mu\nu}$ se puede escribir en función de A^{00} , A^{01} , A^{02} , A^{11} , A^{12} y A^{22} .

$$[A^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

La libertad de calibre $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ reduce aún más las entradas diferentes, hasta llevarlas a dos, que son las *dos polarizaciones*.

Se debe considerar ahora:

$$\xi^\mu = -Re[i\varepsilon^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \quad (1.16)$$

Donde ε^μ son constantes y ξ^μ satisface $\square^2 \xi^\mu = 0$.

Se usa entonces $A^{\mu\nu}$ y k^μ para obtener:

$$\begin{aligned} \diamond A^{0'0'} &= A^{00} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) & \diamond A^{1'2'} &= A^{12} \\ \diamond A^{0'1'} &= A^{01} - k\varepsilon^1 & \diamond A^{1'1'} &= A^{11} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3) \\ \diamond A^{0'2'} &= A^{02} - k\varepsilon^2 & \diamond A^{2'2'} &= A^{22} - k\varepsilon^0 - \varepsilon^3 \end{aligned} \quad \text{y}$$

De estos resultados se observa que:

$$A^{0'0'} = A^{0'1'} = A^{0'2'} = 0 \text{ y } A^{1'1'} = -A^{2'2'}.$$

Si se olvidan las primas anteriores, en el nuevo calibre sólo *dos entradas de la matriz amplitud son independientes* $A^{11} = -A^{22}$ y $A^{12} = A^{21}$. Este calibre es llamado *Calibre transversal sin traza*. En el cual:

- $\bar{h} = h = h^\mu_\mu = 0 \rightarrow$ no hay diferencia entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$ por lo que es llamado sin traza.
- Como $h_{0\mu} = \bar{h}_{\mu 0}$ es llamado transversal.

Si se introduce dos matrices de polarización lineal $[e_1^{\mu\nu}]$ y $[e_2^{\mu\nu}]$:

$$[e_1^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [e_2^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz amplitud es una combinación lineal de ellas: $A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} + \beta e_2^{\mu\nu}$, con α y β constantes complejas.

Esta situación es análoga al caso electromagnético, donde la solución de onda plana a $\square A^\mu = 0$ es

$$A^\mu = \text{Re}[B^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha)],$$

$$B^\mu = \text{constante}.$$

De esto se tiene que $B^\mu = \alpha e_1^\mu + \beta e_2^\mu$.

Cuando las vibraciones de una partícula de prueba afectada por la onda son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda se dice que esta es *transversa*.

Para ilustrar el significado de las matrices de polarización se supone un conjunto de partículas en forma de círculo en el plano perpendicular a la dirección de propagación; de manera que cuando la onda pase estas partículas permanecen coplanares.

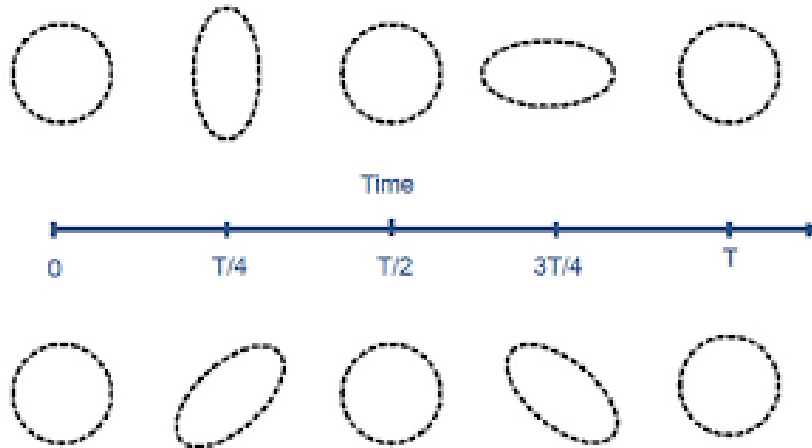


Figura 1.1: Representación de las matrices de polarización.

Si β es cero se tiene la polarización de la parte superior de la figura 1.1 y si α es cero se tiene la configuración inferior. Se observa que si α y β son iguales se tiene una

polarización circular. Ondas polarizadas circularmente tienen oscilaciones mutuamente ortogonales que se combinan.

Capítulo 2

Fuentes de Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales son radiadas por objetos cuyo movimiento implica aceleración y cambio, siempre que este movimiento no sea esféricamente simétrico (como una esfera en expansión o contracción); o simétrico en su rotación (como un disco giratorio o una esfera). Cuanto más masivo sea dicho objeto, y cuanto más rápido se mueva, mayor será la radiación gravitacional que emitirá. En un caso extremo, como cuando son cuerpos masivos como estrellas de neutrones o agujeros negros, orbitándose rápidamente, entonces se desprenderán cantidades significativas de radiación gravitacional.

2.1. Esquema General

De la teoría de Relatividad General se tiene una relación entre la perturbación que se propaga $\bar{h}^{\mu\nu}$ y la fuente $T^{\mu\nu}$ dada por:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -2kT^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

La solución de esta ecuación viene dada, de electromagnetismo [3], por:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\chi^0, x) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(\chi^0 - |x - x'|, x')}{|x - x'|} dV', \quad (2.2)$$

Donde x representa la coordenada espacial del campo donde $\bar{h}^{\mu\nu}$ está determinada, x' representa los puntos de la fuente y $|x - x'|$ es la distancia entre ellas.

Si se supone que la fuente es una cierta cantidad de materia distribuida en un origen O , y que las partículas se mueven a una velocidad mucho menor que c , además que el punto en cual se mide el campo esta a una distancia mayor que el desplazamiento de las partículas de la fuente del origen; entonces la ecuación anterior se puede aproximar a:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, x) = \frac{-4G}{c^4 r} \int T^{\mu\nu}(ct - r, x') dV', \quad (2.3)$$

Donde se ha colocado $\kappa = \frac{-8\pi G}{c^4}$ y $x^0 = ct$. Esta aproximación es apropiada para la zona lejana a la fuente o la *zona de ondas gravitacionales* donde se obtienen ondas planas; en cuyo caso la parte radiativa de $\bar{h}^{\mu\nu}$ esta completamente determinada por su parte espacial $\bar{h}^{ij}$ y por lo tanto solo necesitamos considerar $\int T^{ij} dV$.

El tensor de energía-momento satisface la ecuación de conservación $T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$. Ahora se considera la integral:

$$\int (T^{ik} x^j)_{,k} dV = \int T_{,k}^{ik} x^j dV + \int T^{ij} dV;$$

donde la integral esta tomada en una región que encierra la fuente y $T^{\mu\nu} = 0$ en la frontera de la región. Luego de intercambiar índices y utilizar el teorema de Gauss, nos queda:

$$\int T^{ij} dV = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^i x^j dV.$$

Para movimientos lentos de las partículas de la fuente $T^{00} \approx \rho c^2$, donde ρ es la densidad propia; quedando entonces:

$$\bar{h}^{ij}(ct, x) = \frac{-2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \int [\rho x^i x^j dV]_{ret}, \quad (2.4)$$

Esta integral está evaluada en el tiempo retardado $t - \frac{r}{c}$. El integrando es conocido como el segundo momento de la distribución de la masa, e indica que la radiación gravitacional es generada esencialmente por la variación en el tiempo del *momento cuadrupolar* de la fuente.

2.2. Principales fuentes de Ondas Gravitacionales

2.2.1. Supernovas

Una supernova es un evento astronómico que ocurre durante los últimos estados evolutivos de la vida de una estrella masiva, cuyo núcleo colapsa expulsando las capas exteriores a gran velocidad (hasta el 10 % de la velocidad de la luz) en una fuerte explosión. A menos que exista una perfecta simetría esférica en estas explosiones (es decir, a menos que la materia se envíe uniformemente en todas las direcciones), habrá radiación gravitacional en la explosión, ya que habrá un momento cuadrupolar cambiante, que sólo puede ocurrir cuando hay movimiento asimétrico de masas. Dado que el mecanismo exacto por el cual se producen ondas gravitacionales durante las supernovas no se entiende completamente, no es fácil modelar la radiación gravitacional emitida por ellas.

2.2.2. Inflación

Muchos modelos del Universo postulan que hubo una época inflacionaria en la historia temprana del Universo cuando el espacio se expandió por un factor grande en un tiempo muy corto. Si esta expansión no fue simétrica en todas las direcciones, puede haber emitido radiación gravitacional detectable hoy en día como un fondo de onda gravitacional. Esta señal de fondo es demasiado débil para que algún detector de ondas gravitacionales actualmente operativo pueda observarla, y se cree que pueden haber décadas antes de que se pueda hacer tal observación.

2.2.3. Sistemas binarios tales como los formados por:

Estrellas de neutrones rotantes (pulsar)

Como se señaló anteriormente, una distribución de masa esférica emitirá radiación gravitacional sólo cuando haya movimiento asimétrico entre las masas. Una estrella de neutrones giratoria generalmente no emite radiación gravitacional porque las estrellas de neutrones son objetos altamente densos con un campo gravitatorio fuerte que los mantiene casi perfectamente esféricos. En algunos casos, sin embargo, puede haber pequeñas deformidades en la superficie llamadas "montañas", que son protuberancias muy pequeñas (del orden de centímetros) por encima de la superficie, que hacen que la estrella sea esféricamente asimétrica. Esto le da un momento cuadrupolar que cambia con el tiempo y emite ondas gravitacionales hasta que las deformidades se suavizan.

Agujeros negros

Debido a que los datos a utilizar en este trabajo (evento GW150914) fueron generados por un sistema binario de agujeros negros, nos enfocaremos en esta fuente mas adelante.

2.3. Relación entre las fuentes y los detectores de Ondas Gravitacionales

Es muy importante conocer la fuente de las ondas gravitacionales pues a partir de ello se puede inferir el detector mas apropiado para estas; aunque en la vida real este proceso es al revés, se construye el detector sabiendo que señales (fuentes) se podrán observar.

Si se estudia el periodo de las ondas gravitacionales generadas por cada tipo de fuente se obtiene el *Espectro de las ondas gravitacionales*. Este nos permite agrupar las siguientes características en la onda en cuanto a generación y detección:

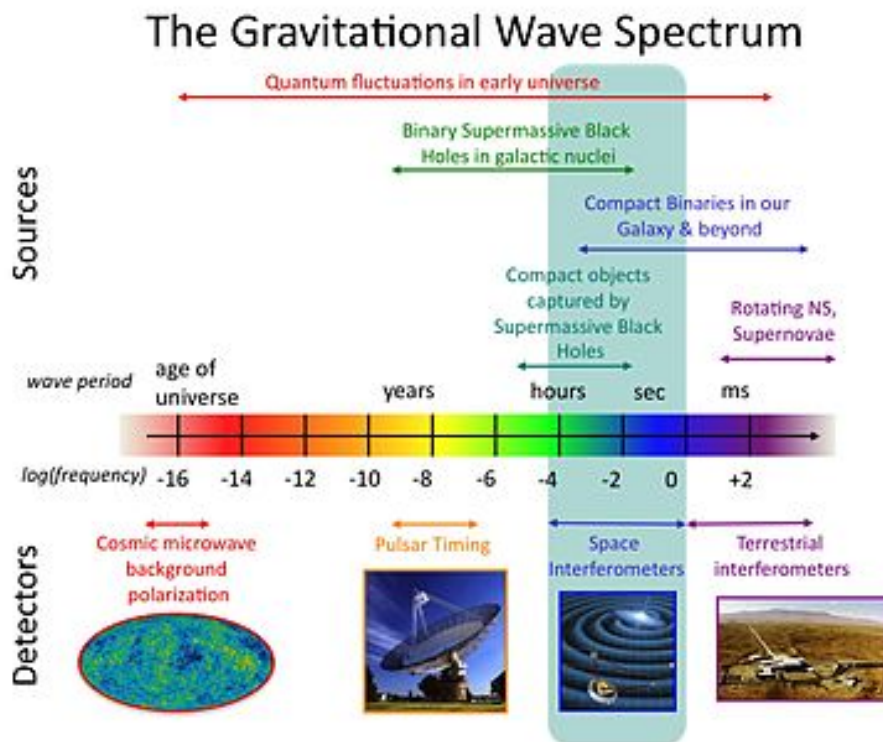


Figura 2.1: Espectro de las ondas gravitacionales.

En la figura 2.1 se observan los distintos peldaños para de detección de ondas según la fuente, es decir, las ondas generadas en las fluctuaciones del universo temprano pueden ser observadas por casi todos los medios llegando al límite de los detectores terrestres. Por otro lado, las que provienen de agujeros negros supermasivos en núcleos galácticos solo pueden detectarse por estudios del pulsar timing (en este metodo se mide las variaciones que sufre la señal electromagnética que emite el pulsar, permitiendo detectar y estudiar objetos diversos) o por interferómetros espaciales.

Las ondas generadas cuando un objeto es capturado por un agujero negro supermasivo son bien observadas por interferómetros espaciales, y están en el límite para ser observadas por el método de pulsar timing. Sin embargo, las ondas generadas por sistemas binarios en nuestra Galaxia y sus alrededores pueden ser detectadas tanto por interferómetros espaciales como por los terrestres; mientras que, las que provienen de es-

trellas de neutrones rotantes y supernovas sólo pueden ser detectadas por interferómetros terrestres.

2.4. Generación de ondas gravitacionales por un Sistema Binario de Agujeros Negros (BBH)

Se conoce como Sistema de Agujeros Negros Binarios o BBH por sus siglas en inglés a un sistema de dos agujeros negros que se orbitan uno al otro. Según teorías actuales estos sistemas pueden formarse a partir de estrellas muy masivas que ya se estaban orbitando o, por procesos dinámicos como colisiones entre galaxias con agujeros negros en sus núcleos; pero, en realidad, un modelo concreto de como se forman estos sistemas aún está en proceso.

Durante mucho tiempo no se tuvo la certeza de la existencia de tales sistemas, pero se pensaba que podrían hallarse detectando ondas gravitacionales. Efectivamente eso ocurrió cuando el Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) hizo la primera detección de las ondas el 14 de septiembre de 2015 a las 09:50:45 UTC; así se pudo mostrar que la radiación gravitacional puede servir para estudiar estos objetos compactos.

El proceso en el cual un BBH genera ondas gravitacionales esta dividido en tres partes: inspiral, merger y ringdown, por sus nombres en inglés [4].

•**Inspiral**: esta es la primera parte de la vida de un BBH donde la órbita del sistema se va compactando cada vez más. La primera parte del inspiral puede durar mucho tiempo y las ondas gravitacionales producidas son muy débiles. A medida que la órbita se compacta los cuerpos se van acercando y la velocidad con la que se orbitan aumenta mientras aumenta también la radiación gravitacional generada lo cual, a su vez, hace que el sistema vaya perdiendo energía rápidamente.

•**Merger**: en esta etapa los agujeros negros están en las órbitas de inmersión hasta que finalmente ocurre la fusión. En este momento ocurre el pico de emisión de la señal de las ondas gravitacionales.

•**Ringdown**: en esta última etapa, la generación de ondas gravitacionales esta dada por la oscilación remanente del agujero negro único resultante de la fusión; el cual, en un principio, tiene forma de esferoide distorsionado, alargado o un esferoide aplastado. La

oscilación se reduce por la producción de ondas gravitacionales y el cuerpo estable final difiere poco de la forma esférica.

En la figura 2.2 se observa una esquematización de este proceso.

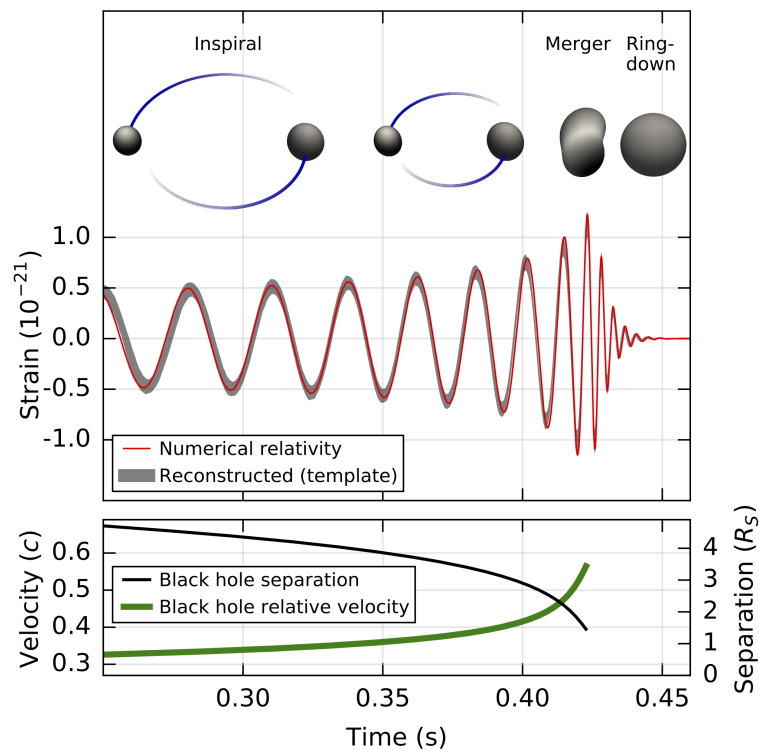


Figura 2.2: Proceso de generación de ondas gravitacionales por un BBH.

Capítulo 3

Detección de Ondas Gravitacionales y Metodología

Desde que se obtuvo por primera vez en 1916 una solución linealizada para las ecuaciones de campo de la Relatividad General, se encontró con el problema de la casi imposible detección de la radiación gravitacional debido a que la perturbación que esta causa es muy pequeña. Sin embargo, actualmente existen observatorios de ondas gravitacionales como LIGO (que pudo detectarlas) y Virgo, en funcionamiento.

3.1. Esquema General

La expresión que se obtiene al calcular la tasa de energía perdida por radiación de un objeto [3], viendo la energía- momento llevada por el campo gravitacional es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32GI^2w^6}{5c^5}, \quad (3.1)$$

Los valores típicos de laboratorio para el momento de inercia I y la frecuencia w muestran que la pérdida de energía en estos casos es muy pequeña, por lo cual sólo fenómenos astronómicos producen radiación gravitacional observable, por ejemplo en el caso del pulsar B1913+16 descubierto por Hulse y Taylor en cuyo caso el periodo medido del pulsar fue $P_P = 59.0299983444181(5)$ ms.

Los sistemas que producen radiación gravitacional observable para detectores terrestres están formados por agujeros negros (BH) y estrellas de neutrones (NS), es decir; pares BH/BH, BH/NS y NS/NS. Debido a que estos cuerpos tienen una relación inversa entre su radio y su masa ($R \propto M^{-\frac{1}{3}}$); suelen tener masas mayores a la del Sol con un radio mucho menor que el de la Tierra, por lo cual causan una enorme distorsión en el

espacio-tiempo, generando ondas gravitacionales cuando se encuentran orbitando en un sistema con algún compañero.

La discusión de la polarización muestra que el efecto de una onda gravitacional en partículas de prueba libres es una variación en la separación, es como si una fuerza de marea variable estuviera actuando sobre el conjunto de partículas. Si las partículas de prueba no son libres, pero son los constituyentes de un cuerpo elástico, entonces estas fuerzas de marea darían lugar a vibraciones del cuerpo, y aquí se tiene un detector de ondas gravitacionales rudimental.

Este problema de radiación en la Relatividad General tuvo un renombrado interés luego del descubrimiento del ya nombrado pulsar B1913+16 hecho por Hulse y Taylor [5,6]; que dió la primera oportunidad de estudiar los efectos de campos gravitacionales internos fuertes (relativísticos) en órbitas dinámicas, y también los efectos de la reacción de radiación gravitacional [7]. Así se propuso construir una red de interferómetros mundial: LIGO en USA, Virgo en Italia, TAMA300 en Japón, GEO600 en Alemania y AIGO en Australia. A pesar de que el aparato utilizado para medir es similar en cada uno de los detectores, en este trabajo se describirá en detalle sólo el empleado por LIGO ya que de allí provienen los datos a utilizar.

3.2. Aparato utilizado por LIGO para la detección de Ondas Gravitacionales

El sistema está basado en el interferómetro de Michelson [1], pero a una escala mayor. Este detector mide la señal de ondas gravitacionales como una diferencia en la longitud de sus brazos ortogonales. Cada brazo contiene dos espejos que actúan como medidores de masas, separados por una longitud de $L_x = L_y = L = 4km$; por cada brazo pasa un haz de luz proveniente de una barra divisora del haz de luz original generado con una fuente de laser. Cuando una onda gravitacional pasa altera la longitud de uno de los brazos, lo cual es medido como una diferencia dada por $\Delta L(t) = \delta L_x - \delta L_y = h(t)L$ donde $h(t)$ es la amplitud de la señal proyectada en el detector. Esta variación diferencial en la longitud, altera la diferencia de fase entre los dos haces de luz que regresan de la barra divisora, transmitiendo una señal óptica proporcional a la onda gravitacional en el fotodetector externo.

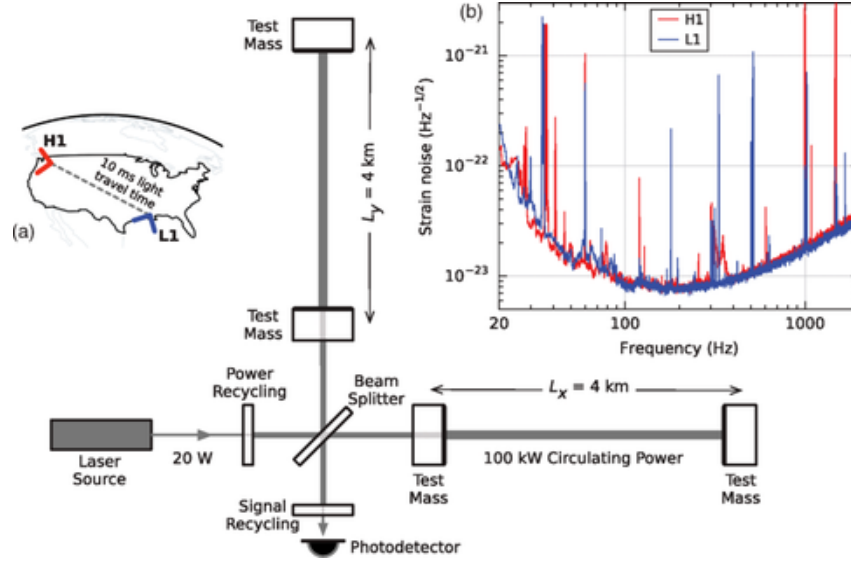


Figura 3.1: Diagrama simplificado de un detector de LIGO.

En la figura 3.1 si se supone que una onda gravitacional se propaga ortogonalmente al plano del detector y que está polarizada linealmente paralela a las cavidades ópticas de 4 km, esta onda tendrá el efecto de alargar uno de los brazos de 4 km y acortar el otro durante su primer medio ciclo: estos cambios de longitud se invertirán durante el otro medio ciclo. El fotodetector de la salida registra estas variaciones diferenciales en la longitud de la cavidad. Si bien la respuesta direccional del detector es máxima para este caso, esta es todavía significativa para la mayoría de los ángulos de incidencia o polarizaciones ya que se debe recordar que la radiación gravitacional se propaga en cualquier dirección a través de la Tierra.

3.3. Propiedades de la fuente y sus parámetros

Los dos agujeros negros son descritos por ocho parámetros intrínsecos: las masas $m_{1,2}$ definida como la masa gravitacional de cada BH aislado, y los espines $S_{1,2}$ (magnitud y orientación) de los BH individuales. Para un BH individual, el espín puede tener un valor máximo de $\frac{Gm^2}{c}$, por lo tanto, es conveniente definir una magnitud adimensional referente al espín $a = \frac{c|S|}{(Gm^2)} \leq 1$. Nueve parámetros más son necesarios para describir completamente el sistema binario: la localización (distancia luminosa D_L , ascensión recta α , y declinación δ); orientación (la inclinación orbital del sistema binario ι y la polarización ψ); el tiempo t_c y la fase ϕ_c de fusión; y dos parámetros que describen la excentricidad (la magnitud e y el argumento del periapsis) del sistema.

Como la etapa de *inspiral* esta bien descrita por la teoría de aproximación post newtoniana (PN), que se basa en agregar términos de potencias de $\frac{v}{c}$ al potencial de Newton; en el orden principal de esta aproximación, la evolución está conducida por una combinación particular de las dos masas, llamada *masa chirp*

$$\mathbb{M} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{M^{\frac{1}{5}}} \simeq \frac{c^3}{G} \left[\frac{5}{96} \pi^{\frac{-8}{3}} \dot{f}^{\frac{-11}{3}} f \right]^{\frac{3}{5}};$$

donde f es la frecuencia de la onda gravitacional, $\dot{f}$ es su derivada respecto al tiempo y $M = m_1 + m_2$ es la masa total. Algunos parámetros adicionales entran en juego para mayores ordenes de PN. Primero, la tasa de masa, $q = \frac{m_1}{m_2} \leq 1$ y las componentes de espín de los BH afectan la fase de evolución. Así del *inspiral* se puede medir la masa chirp [1,2].

Los espines son responsables de otros efectos importantes: primero, si no están alineados con respecto a L (momento angular), ellos causan que el plano orbital del sistema binario precese alrededor de una dirección casi constante del momento angular total del sistema $J = L + S_1 + S_2$. Esto quita la amplitud característica y las modulaciones de la señal. Segundo, S_1 y S_2 tienen efecto sobre la fase y la evolución de la amplitud de la señal. Las proyecciones del espín a lo largo de la dirección del momento angular orbital afectan la tasa de *inspiral* del sistema. En particular, si las componentes del espín están alineadas (no alineadas) con L , incrementa (decrece) el número de órbitas con respecto al caso sin espín. Para parametrizar este efecto se define una combinación lineal de los espines pesados por las masas:

$$\chi_{eff} = \frac{c}{GM} \left(\frac{S_1}{m_1} + \frac{S_2}{m_2} \right) \frac{L}{|L|},$$

que toma valores entre -1 para espines no alineados con respecto a L , hasta 1 para espines alineados [2].

Como ya se mencionó, cuando los BH se encuentran uno muy cercano al otro y su velocidad se incrementa, la aproximación PN deja de ser útil y se necesita de las ecuaciones completas de Einstein. Los detalles del *ringdown* son gobernados por la masa y el espín del cuerpo final. En particular la masa y el espín del BH final determinan la frecuencia y tiempo de decaimiento de los BH en su estado final. La última etapa de la fusión permite medir la masa total que junto a la masa chirp y la tasa de masa producen estimaciones de las masas individuales de los componentes del sistema.

La frecuencia observada de la señal está corrida hacia el rojo por un factor de $(1+z)$, donde z es el redshift cosmológico. Un redshift de la frecuencia es indistinguible

de un reescalamiento de las masas por el mismo factor; por lo tanto se puede medir la masa m de corrimiento hacia el rojo, que está relacionada con la masa en el sistema de la fuente por $m = (1 + z)m^{source}$. Sin embargo la amplitud de la onda gravitacional, A_{GW} , escala linealmente con la masa e inversamente proporcional a la distancia en un universo en expansión. Por lo tanto la amplitud escala inversamente con la distancia luminosa, D_L , así de la señal de las ondas gravitacionales se puede medir la distancia luminosa directamente pero no el redshift.

El tiempo de retraso observado (que es obtenido cuando se registra la señal en dos sitios diferentes para ser consistentes con la amplitud y la fase), permite localizar la fuente en un *anillo* en el cielo. Si no hay cambios de precesión, los cambios en el ángulo de vista del sistema simplifican la forma de onda observada por una fase y amplitud general. Más aún, las dos polarizaciones son las mismas para toda la fase y amplitud. Así, para sistemas con precesión mínima, la distancia, orientación binaria, fase en la fusión y localización en el cielo de la fuente cambian en general la amplitud y fase de la fuente en cada detector, pero no cambia la morfología de la señal. La consistencia entre la fase y la amplitud permite desenredar la geometría de la fuente. Si el sistema binario está precesando, la amplitud y fase de la onda gravitacional tienen dependencia con la orientación del sistema [2].

3.4. Formato de las Formas de Ondas

La forma de onda teórica (utilizada para ajustar los datos observados) puede obtenerse bastante bien utilizando la teoría de aproximación Post Newtoniana (PN), para las etapas tempranas del *inspiral* y campo gravitacional débil. Para la etapa de *merger* y campo fuerte es necesario resolver las ecuaciones completas de Relatividad General utilizando relatividad numérica (NR). Se utiliza teoría de perturbaciones para la etapa del *ringdown*. Muchos algoritmos actuales realizan un acople entre estos métodos con el fin de obtener la forma de onda con la mejor exactitud mientras que otros códigos de relatividad numérica han demostrado ser suficientes para las tres etapas. También se toman en cuenta parámetros importantes de la fuente (BH en este caso) como su espín y el acople de este con el momento angular orbital L [2].

En Relatividad Numérica se resuelve el espacio-tiempo completo del sistema binario [8]. Sin embargo, para fines del análisis de datos, se requiere el strain $h(t)$ de la onda gravitacional lejos de la fuente, que es la magnitud que mide la perturbación que

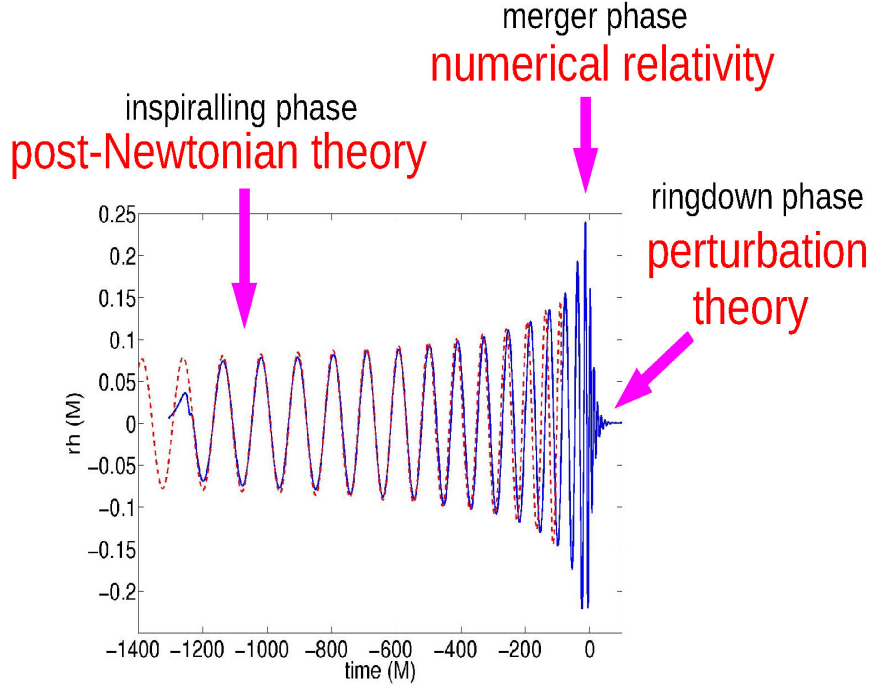


Figura 3.2: Esquematzación de una forma de onda teórica.

sufre el espacio-tiempo cuando pasa una onda gravitacional. La cantidad numérica relevante es la perturbación de la métrica h_{ij}^{TT} calculada en el calibre transversal sin traza (TT). Hay formas diferentes de calcular la perturbación de la métrica a partir de una simulación numérica. Los métodos más comunes incluyen el uso del formalismo Regge-Wheeler-Zerilli [9] [10] que calcula la perturbación métrica en la zona de onda como una perturbación del espacio-tiempo de Schwarzschild; y el escalar de Newmann-Penrose Ψ_4 [11] .

La segunda técnica está basada en el escalar de Newmann-Penrose (o de Weyl) que puede ser definido a partir del tensor de Weyl:

$$\Psi_4 = -C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha \bar{m}^\beta l^\mu \bar{m}^\nu, \quad (3.2)$$

donde $C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - g_{\alpha[\mu} R_{\nu]\beta} + g_{\beta[\mu} R_{\nu]\alpha} + \frac{1}{3} g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta} R$ es el tensor de Weyl; y el tetrahedro

l , m y n vienen definidos por:

$$\begin{aligned} l &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_t - \mathbf{e}_R), \\ n &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_R), \\ m &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\phi). \end{aligned}$$

En el calibre TT, como ya se vió, la perturbación métrica tiene dos polarizaciones reales independientes, h_+ y $h_\times$, que se pueden escribir como una deformación compleja por

$$h = h_+ - ih_\times \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

donde h_+ , $h_\times \in \mathbb{R}$. Así lo mas importante en este contexto es que el pseudo escalar Ψ_4 en el límite asintótico para $r \rightarrow \infty$ (donde r es el radio de extracción que marca hasta que punto se extraen los datos de la simulación), describe la radiación gravitacional como:

$$\Psi_4 = \ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times := \ddot{\bar{h}}, \quad (3.4)$$

relacionados entonces por dos derivadas en el tiempo.

En simulaciones numéricas Ψ_4 es computado en una superficie esférica lejos de la fuente usando la ecuación 3.2 y entonces es expandido en armónicos esféricos pesados por espín de peso -2:

$$\Psi_4(t, R, \theta, \phi) = \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=-l}^l \Psi_4^{lm}(t, R) {}_{-2}Y^{lm}(\theta, \phi). \quad (3.5)$$

Gracias al teorema de Pelling los escalares de Newmann-Peronse tienen una propiedad muy importante: en espacios-tiempos asintóticamente planos, Ψ_n decae para $r \rightarrow \infty$ como r^{n-5} . Por lo tanto, como Ψ_4 disminuye como $\frac{1}{r}$, los resultados que se obtienen para $r\Psi_4$ y también para el strain rh; pueden ser analizados. Esto es necesario cuando, por ejemplo, se quieren comparar las formas de ondas extraídas de esferas con radios diferentes como a menudo se hace.

Los dos problemas principales en la extracción de ondas gravitacionales basada en Ψ_4 a partir de una simulación numérica son: Primero; la necesidad de extrapolar el resultado al infinito espacial, para que la relación 3.4 sea válida; y segundo realizar la integración doble del tiempo para obtener el strain de onda gravitacional (que es objetivo final si se quiere comparar los resultados de la simulación numérica con detecciones experimentales directas de ondas gravitacionales). Parte del trabajo de esta tesis se centró en leer los

datos guardados en el escalar de Wayl de las simulaciones utilizadas y transformarlos a strain [12].

3.5. Simulaciones con Spectral Einstein Code (SpEC)

Tal como está definido en la página principal del Spectral Einstein Code [13]; esta es una infraestructura flexible dirigida a resolver ecuaciones diferenciales parciales utilizando métodos espectrales de multi-dominio (el cual es muy utilizado en cómputo científico para resolver ecuaciones diferenciales expresando la solución de dicha ecuación como una suma de varias funciones de base). A pesar de que el código fue escrito para este fin, su principal aplicación actual es la simulación de objetos compactos, mas específicamente es uno de los códigos con mayor exactitud y eficiencia para computar las formas de onda gravitacional durante las fases de *inspiral* y *merger* de agujeros negros binarios.

Esta es la herramienta utilizada para obtener la forma de onda teórica con la cual se han ajustado los datos observados de LIGO para así obtener las características de la fuente de Ondas Gravitacionales.

SpEC utiliza un método existente en relatividad numérica para modelar a los agujeros negros, denominado Técnica de Excisión (referencias [14] [15] [16]). Este método se propuso por primera vez en la década de 1990, consiste en suponer que una porción del espacio-tiempo dentro del horizonte de eventos que rodea a un agujero negro (o la singularidad) no evoluciona. En teoría, esto no debería afectar la solución a las ecuaciones fuera del horizonte de sucesos y las propiedades de este (es decir, nada dentro del agujero negro puede influir en ninguna de las propiedades físicas fuera del horizonte). Por lo tanto, si simplemente no se resuelven las ecuaciones dentro del horizonte todavía se debería ser capaz de obtener soluciones válidas afuera. Por lo tanto se suprime el interior al imponer condiciones de frontera en el límite que rodea la singularidad en la parte interna del horizonte. La desventaja con esta técnica es que a medida que los agujeros negros se mueven, se debe ajustar continuamente la ubicación de la región de excisión para moverse en conjunto con la singularidad. Actualmente se conocen numerosas condiciones de calibre que aumentan la capacidad de la excisión para moverse por lo que conoce como la rejilla o cuadrícula computacional; este último no es mas que el mallado en cual se desarrolla la simulación. En el caso de SpEC, el dominio computacional necesita establecer dos límites internos de excisión esférica para evitar que la singularidad modelada de esta manera cause faltas de fluidez y pérdidas de precisión. Vease referencia [17] para mas detalles.

Las simulaciones de SpEC se basan en una rejilla que está compuesta de un pequeño número de capas esféricas alrededor de cada límite de excisión (es decir, la singularidad); rotulado como EsferaAn y EsferaBn, donde $n = 0, 1, \dots$ (ver figura 3.3); tal como se detalla en la referencia [17]. La zona de ondas gravitacionales esta etiquetada como EsferaCn, $n = 0, 1, \dots$. En esta zona se tienen cilindros que se distorsionan según la radiación alrededor de las singularidades como se muestra en la figura 3.3.

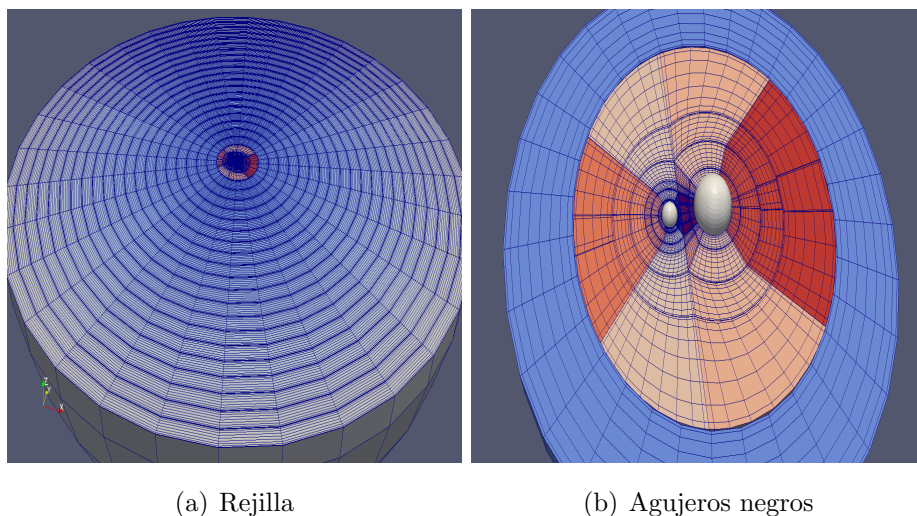


Figura 3.3: Características de las simulaciones de SpEC.

3.6. SXS Catalog

Las formas de onda generadas con SpEC se encuentran disponibles en la referencia [18]. Este es un catálogo, que ha sido llamado *SXS catalog* (Simulating Extreme Spacetimes), el cual contiene los resultados de la simulación para un conjunto de parámetros iniciales, dados en el cuadro 3.1 para distintas resoluciones numéricas. Cada simulación está identificada por un nombre específico en la lista del catálogo que indica el nombre del catálogo, los tipos de cuerpos que forman la simulación; es decir agujeros negros (BH) o estrellas de neutrones (NS) y un número que permite ordenar la lista a través de este.

Las formas de onda para una determinada simulación están organizadas según su grado de resolución como Lev1, Lev2, $\dots$. Por ejemplo Lev2 tiene mayor resolución que Lev1 para esa determinada simulación (no tiene sentido comparar el Lev1 con el Lev2 de

Columnas de Datos	
Columna	Descripción
ID	Nombre de una simulación dada. Contiene la colaboración, tipo de binario y número
Data	Link a la metadata y datos descargables para la simulación
m_1/m_2	Tasa de la masa de Christodoulou en el tiempo de relajación. Usamos $m_1 > m_2$
$\chi_{1,2}$	Magnitudes adimensionales de espín en el tiempo de relajación
$\chi_{\{1,2\}\{X,Y,Z\}}$	Componentes del vector adimensional de espín en el tiempo de relajación
Ecc	Excentricidad estimada $d\omega_{orb}/dt$ para 2.5 órbitas después del tiempo de relajación
$M\omega_{orb}$	Frecuencia orbital multiplicada por la masa total de Christodoulou en el tiempo de relajación
Orbits	Número de órbitas desde $t=0$ hasta que la región dentro del horizonte común se ha retirado
Email	Link a el e-mail de SXS Collaboration acerca de una simulación particular

Cuadro 3.1: Parámetros iniciales de la simulación.

dos simulaciones distintas). También se tienen para distintos radios de extracción extrapolados al infinito, lo cual está denotado como $N=1,2,3,\dots$; el mejor orden de la extrapolación depende de la simulación y del fin para el cual vaya ser usada la forma de onda correspondiente. Altos ordenes suelen hacer mejor el inspiral pero empeoran el ringdown.

Para cada simulación del catálogo están disponibles los archivos: `Horizons.h5`, `metadata.txt`, `rh_FiniteRadii_CodeUnits.h5`, `rhOverM_Asymptotic_GeometricUnits.h5`, `rM_Psi_Asymptotic_GeometricUnits.h5` y `rPsi4_FiniteRadii_CodeUnits.h5`. Los archivos del catálogo utilizados para obtener la forma de onda teórica son los llamados **rMPsi4_Asymptotic_GeometricUnits.h5**; este archivo contiene coeficientes armónicos-esféricos pesados por espín para la radiación gravitacional extrapolada a un radio infinito, Y_{lm} así como la fase, Φ_{lm} , y la amplitud A_{lm} . En este archivo los datos están dados en su extracción directa de la simulación en el escalar complejo de Weyl del cual se puede obtener el strain como ya se mencionó. Todas las cantidades se han redimensionado a unidades en las que la masa de cada agujero negro se mide en el tiempo de relajación como se muestra en la metadata de esa simulación (el tiempo esta pesado por la Masa de Christoudoulu que se suele reescalar para que sea 1).

Para cada orden de extrapolación, los datos están contenidos en un archivo de formato h5 etiquetado como **Extrapolated_Nx.dir**, donde x es el orden del polinomio de extrapolación utilizado. Nótese que se utiliza la ventaja del formato h5 de poder almacenar mucha información en una estructura jerárquica según los directorios que se deseen como se puede ver en la figura 3.4, donde se da la esquematización del contenido del archivo y la ubicación de los armónicos esféricos utilizados. La información del cuadro 3.2 es dada en cada archivo de datos.

Los demás archivos (aparte de `rhOver_Asymptotic_Geometric_Unit.h5`) que se pueden encontrar en el catálogo contienen la salida en bruto de las simulaciones hechas con SpEC, las cuales no deben ser usadas para estudios o investigaciones ya que se encuentran en unidades código y no están refinadas.

3.7. Análisis de la forma de onda

Las propiedades de la fuente de ondas gravitacionales y los parámetros mostrados en la sección 3.3 se obtienen a partir de la señal observada por los interferómetros, reconstruyendo de la manera mas exacta posible la forma de onda o *waveform*. Esta forma

Columnas de Datos y descripción		
Datos	Columnas	Descripción
Y_1[L].m[M].dat	t\ M_{Ch} , $R^*[R_{areal}Q_{lm}]$, $I^*[R_{areal}Q_{lm}]$	Q_{lm} es el coeficiente del strain de la GW h\ M_{Ch}

Cuadro 3.2: Datos dados en los archivos del catálogo.

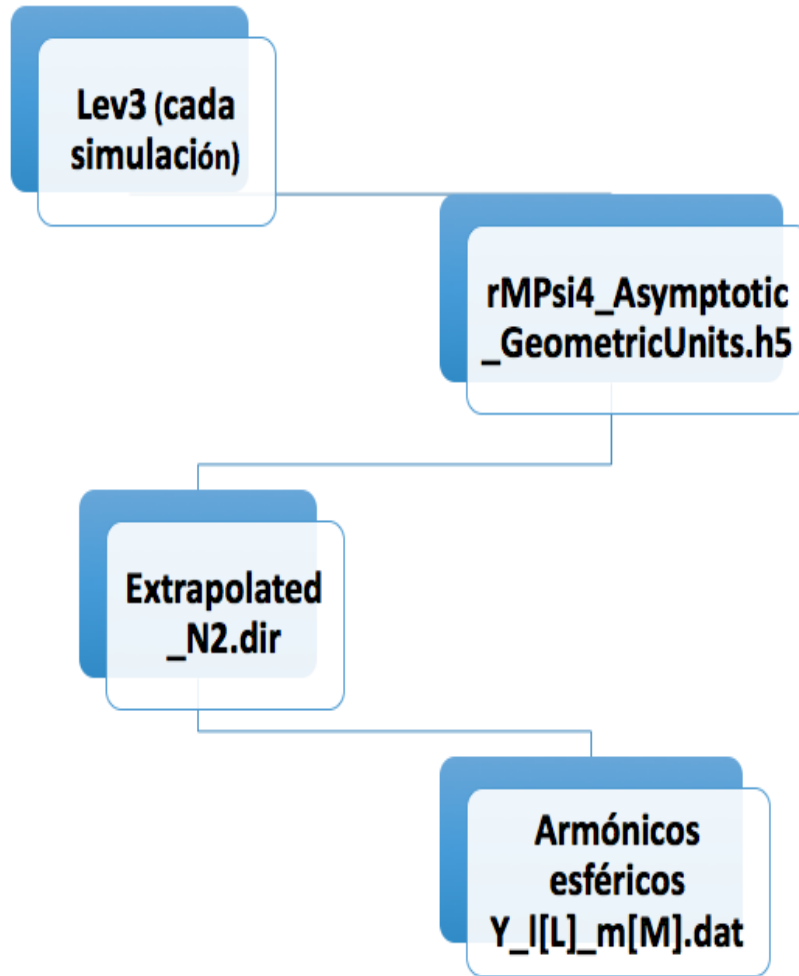


Figura 3.4: Estructura interna jerárquica de los archivos h5 de SpEC.

de onda observada se compara entonces con una forma de onda teórica generada por simulaciones computarizadas del evento; pudiéndose así asignar los parámetros de la fuente (masa, espín, etc) de la simulación a dicha forma de onda observada. Este es el proceso que se ha realizado con los datos observados por LIGO.

El proceso para obtener la forma de onda teórica a partir de los archivos del SXS Catalog es el siguiente: Se decidió tomar el Lev3, es decir, resolución intermedia para no descuidar ninguna etapa del proceso; de 10 simulaciones distintas que cumplen con el requisito de ser BH-BH (sistema binario de agujeros negros). Se leen los datos almacenados en el archivo `rMPsi4_Asymptotic_GeometricUnits.h5` específicamente en *Extrapolated_N2.dir* (se eligió la extrapolación 2 para utilizar un orden de resolución intermedio) a través de un código escrito en *Wolfram Mathematica*; dentro del cual se encuentran los armónicos esféricos listados por cada l y sus correspondientes m (`Y_l[L]_m[M].dat`). Este

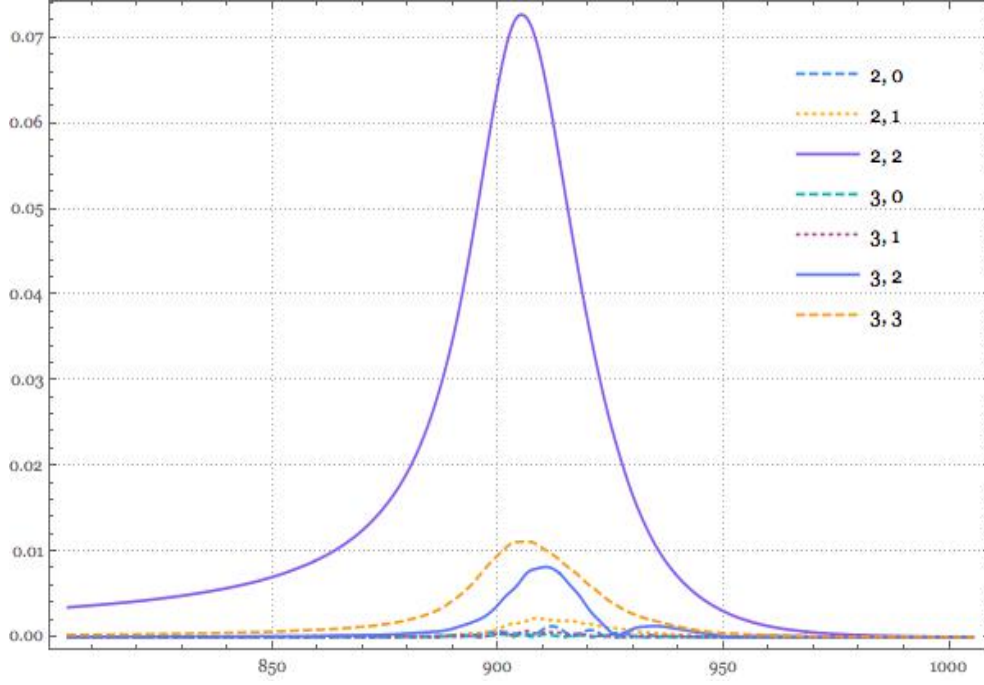


Figura 3.5: Magnitud de los armónicos esféricos en el tiempo de la etapa del merger.

código va calculando el strain a partir del pseudo escalar Ψ_4 en varias etapas, estudiando primero la parte real e imaginaria de este así como también la fase y amplitud. La simulación computa todos los armónicos desde $l=8$ pero para facilitar el cálculo y disminuir las horas de cómputo se decidió utilizar los armónicos esféricos dominantes comenzando por el armónico esférico principal ($l=2$, $m=\pm 2$) el cual, como se puede ver en la figura 3.5 (realizada por el grupo de simulaciones Einstein Toolkit [19]), tiene la mayor magnitud que determina la onda gravitacional, además sólo se necesita computar los modos con $m \geq 0$ ya que por la simetría ecuatorial los modos negativos están relacionados con los positivos por una conjugación compleja.

En el paso de Ψ_4 a strain se obtiene primero los valores de rh que no es mas que el strain multiplicado por un radio de extracción, después cada uno de estos armónicos esféricos pesados por espín pueden ser combinados para formar el strain observado en una determinada ubicación con respecto al sistema de referencia de la fuente, es decir, se transforma el strain teórico a uno que sería “observado” por el detector para un sistema con una determinada orientación respecto de este.

Luego se obtiene la forma de onda que debería llegar a la tierra utilizando el redshift y el tiempo en el detector. Seguidamente se calcula la forma de onda que miden los

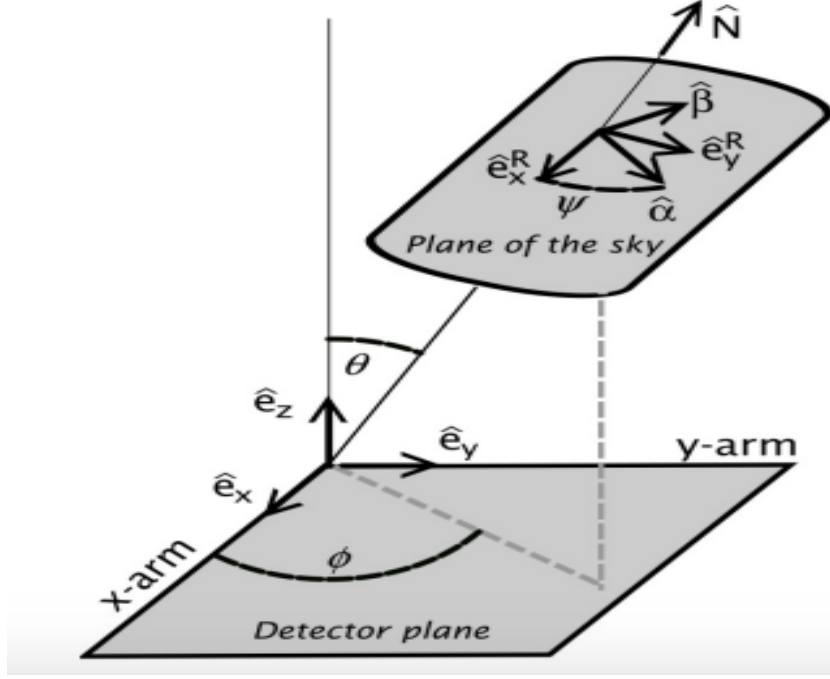


Figura 3.6: Orientación relativa del cielo y el marco del detector

detectores la cual depende de la respuesta de los brazos a la señal (ya que la intensidad de esta varía según el ángulo de incidencia sobre el detector), dicha respuesta viene dada por:

$$h_k = F_k^{(+)} h_+ + F_k^{(\times)} h_\times, \quad (3.6)$$

donde $F^{(+)}$ y $F^{(\times)}$ son las funciones de patrón de antena del interferómetro a las dos polarizaciones de las ondas definidas en el plano del cielo que, según la figura 3.6, vienen dadas por

$$\begin{aligned} F^{(+)} &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\phi \cos 2\psi - \cos\theta \sin 2\phi \sin 2\psi, \\ F^{(\times)} &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\phi \sin 2\psi + \cos\theta \sin 2\phi \cos 2\psi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Posteriormente se obtiene el strain teórico, el cual fue corrido hasta que el tiempo del merger era cero, es decir, $t_{merger} = 0$ que es la convención que suele utilizarse. También se realizaron variaciones en la distancia teórica a la que deberían estar las fuentes de las simulaciones para que estas y los datos observados estuviesen en un mismo rango y pudieran ser comparadas. De esta forma el strain teórico estuvo preparado para ser usado con los datos.

En el mismo código de Wolfram Mathematica los archivos **Horizons.h5** de cada una de las simulaciones (estos archivos se encuentran disponible en el catálogo junto a los

demás) los cuales contienen las trayectorias de cada uno de los componentes del sistema durante toda la simulación; también se estudiaron y a partir de estos se obtuvieron las gráficas de posición y velocidad del sistema en función del tiempo hasta llegar al merger, así como hacer las gráficas de las trayectorias en 3D.

Los datos de la primera observación se encuentran disponibles en la página principal de LIGO [20] donde también está disponible un código open source escrito en el lenguaje de programación *Python* [21] en cual nos basamos para realizar en ese mismo lenguaje el blanqueado y filtrado de los datos observados. La primera técnica consiste, esencialmente, en llevar los datos al dominio de frecuencia utilizando transformadas de Fourier para luego calcular la Densidad Espectral de Amplitud y usarla para sólo tener el rango de frecuencia cercano al evento; es decir, suprimiendo en este caso altas y bajas frecuencias donde el ruido es mayor, posteriormente se regresa al dominio del tiempo. El blanqueado es uno de los primeros pasos a realizar en el análisis de datos astrofísicos ya que suprime el ruido extra en las bajas frecuencias y en las líneas espectrales, lo cual permite visualizar mejor las señales débiles. Para eliminar el ruido de alta frecuencia restante, también se utilizó un pasa-bandas.

El filtrado o la técnica de filtrado combinado utilizada por LIGO y por nosotros en este código se basa en comprimir toda la señal en un bin de tiempo de esta forma se pueden encontrar señales ocultas en un ruido Gaussiano; luego se comparan todos los datos con una plantilla (en este caso una con la morfología de una onda gravitacional) para buscar la coincidencia de dicha plantilla dentro de las observaciones. Esta es la forma mas eficaz de encontrar dichas señales y es una técnica ampliamente usada por los que buscan ondas gravitacionales de objetos binarios entre datos con ruido.

Una vez realizado el proceso anterior se obtiene la data alrededor del evento completamente limpia. Estos datos se colocaron dentro de una archivo de formato txt para facilitar su manipulación como tres columnas: tiempo, parte real y parte imaginaria. Este archivo txt luego fue utilizado en el código escrito en *Wolfram Mathematica* para así poder compararlos con los datos de las simulaciones.

Una vez obtenidas las formas de onda teóricas, se comparó los datos con cada una de estas para así determinar el mejor ajuste utilizando la prueba de χ^2 . Esta prueba consiste en calcular cuanto difiere la distribución de los datos observados respecto al modelo teórico escogido. La expresión de χ^2 utilizada en este trabajo es la forma general [22], que viene

dada por:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}. \quad (3.8)$$

En la ecuación anterior se tiene que n es el número de datos, el numerador de la fracción mide la desviación de los valores observados O_k respecto a los valores esperados E_k , pesados por los valores esperados.

El criterio para determinar la bondad o no de un ajuste es el siguiente: si el ajuste es bueno entonces χ^2 será del orden o menor a n ; pero si difiere mucho de los datos observados, χ^2 será mucho mas grande que n . Este criterio es ampliamente utilizado en la ciencia y prueba ser un buen discriminante para datos de ondas gravitacionales como se ve en la referencia [23].

Los ajustes realizados internamente en el código, para fines de convertir de escalar de Wayl a strain, tales como las masas de cada agujero negro y la distancia del sistema binario; se relizarón a través de un barrido en un rango que se consideraba adecuado y a un paso pequeño, así para cada valor del intervalo se realizaba una interpolación con los datos y se calculaba el valor de χ^2 de cada número en ese rango para luego sólo dejar el mejor χ^2 . Por otro lado los ajustes entre los datos observados y los teóricos también se hicieron interpolando entre ellos.

Posteriormente, la forma de onda con el menor χ^2 se escogió para comparar sus parámetros físicos con los reportados por LIGO en la referencia [2]. Los datos físicos de cada simulación están almacenados en un archivo **metadata.txt** que puede ser descargado del catálogo; estos datos se encuentran en unidades geométricas [24] [25] comúnmente utilizadas en simulaciones de Relatividad General.

Una esquematización del proceso realizado se encuentra en la figura 3.7.

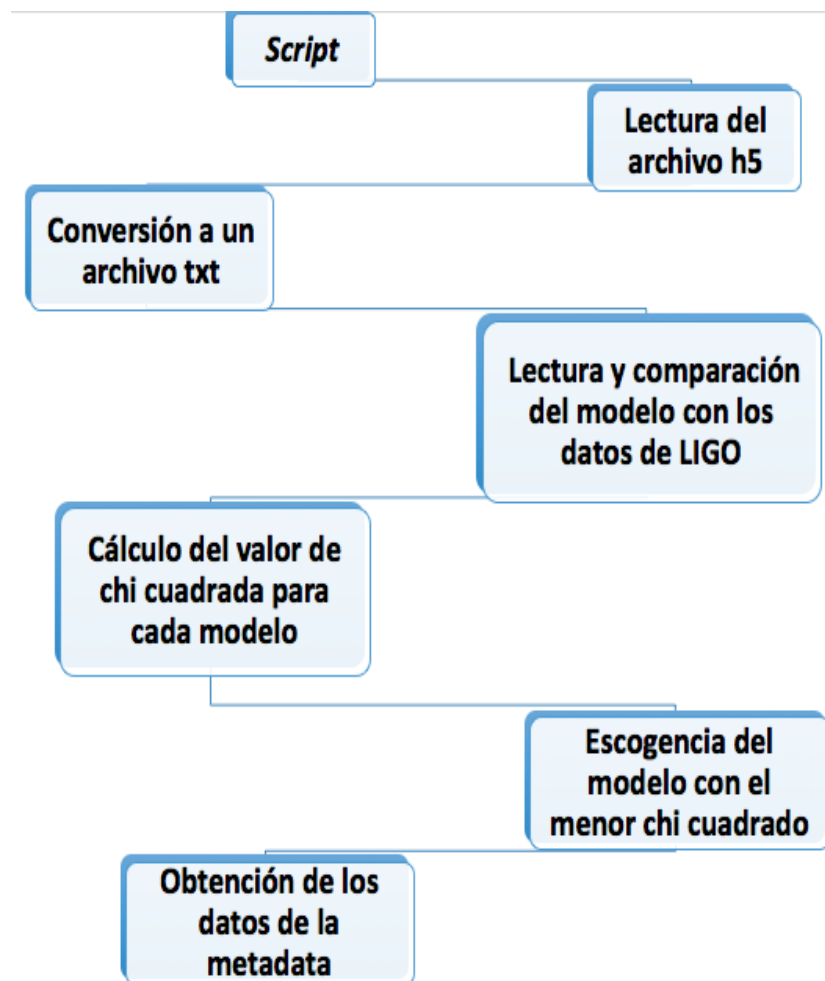


Figura 3.7: Proceso realizado para obtener los parámetros de los datos observados a partir de las simulaciones.

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones

Una vez detectada una señal de ondas gravitacionales se deben ajustar los datos con simulaciones para asignarle los parámetros de alguna de estas a esos datos. Para seleccionar la simulación que mejor ajusta se realiza la prueba de χ^2 . Se ha realizado este proceso para las 10 simulaciones elegidas del SXS Catalog.

4.1. Resultados

Las 10 formas de ondas utilizadas corresponden a las simulaciones: SXS/BH-BH/0010, SXS/BH-BH/0155, SXS/BH-BH/0147, SXS/BH-BH/0201, SXS/BH-BH/0206, SXS/BH-BH/0211, SXS/BH-BH/0295, SXS/BH-BH/0305, SXS/BH-BH/0322, SXS/BH-BH/0324. Debido a que todas estas pertenecen al mismo catálogo y además todas son simulaciones de sistemas binarios de agujeros negros, a partir de ahora las referencias a ellas serán sólo por sus números. En la figura 4.12 se pueden ver los strain calculados a partir de los Ψ_4 de cada simulación y desde el cuadro 4.1 hasta el 4.10 se pueden ver los parámetros iniciales de las 10 simulaciones.

4.1.1. Resultado 1: Gráficas de las trayectorias, distancia relativa y velocidad del sistema de cada simulación.

A partir de los datos extraídos de los archivos del catálogo se graficaron las trayectorias de cada uno de los cuerpos, es decir, la evolución del sistema mientras generaba la forma de onda característica de la simulación. Estas trayectorias se encuentran graficadas en 3D y también en sus proyecciones en los planos xy y xz para una mejor visualización del evento, es decir, gráficas 4.1, 4.2 y 4.3. En estas gráficas se puede apreciar la diversidad

Datos de la simulación 0010	
Masa 1 inicial m_1	0.5999
Masa 2 inicial m_2	0.4000
Masa del agujero negro final m_f	0.9617
Masa chirp M_c	0.4247
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.6667
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.4910
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	1.2087×10^{-8}
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.5632
Excentricidad e	4.385×10^{-4}
Separación inicial	16.0000
Frecuencia Orbital inicial	0.0145
Energía ADM	0.9937
Momento angular ADM inicial	0.9471
Momento lineal ADM inicial	3.3224

Cuadro 4.1: Parámetros de la simulación 0010.

Datos de la simulación 0147	
Masa 1 m_1	0.4999
Masa 2 m_2	0.5000
Masa del agujero negro final m_f	0.9507
Masa chirp M_c	0.4353
Masa total M_t	1.0000
Tasa de masa q	1.0000
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.4991
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.5000
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.6812
Excentricidad e	2.900×10^{-2}
Separación inicial	10.4000
Frecuencia Orbital inicial	0.0267
Energía ADM	0.9908
Momento angular ADM inicial	0.9844
Momento lineal ADM inicial	0.00017

Cuadro 4.2: Parámetros de la simulación 0147.

Datos de la simulación 0155	
Masa 1 m_1	0.5000
Masa 2 m_2	0.5000
Masa del agujero negro final m_f	0.9112
Masa chirp M_c	0.4353
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.9991
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.7991
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.7991
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.9075
Excentricidad e	5.051×10^{-4}
Separación inicial	15.3660
Frecuencia Orbital inicial	0.0145
Energía ADM	0.9927
Momento angular ADM inicial	1.4806
Momento lineal ADM inicial	1.8179×10^{-8}

Cuadro 4.3: Parámetros de la simulación 0155.

Datos de la simulación 0201	
Masa 1 m_1	0.6985
Masa 2 m_2	0.3015
Masa del agujero negro final m_f	0.9648
Masa chirp M_c	0.3927
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.4317
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	1.1126×10^{-7}
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	1.0695×10^{-7}
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.5963
Excentricidad e	1.406×10^{-4}
Separación inicial	15.0000
Frecuencia Orbital inicial	0.0159
Energía ADM	0.9938
Momento angular ADM inicial	0.9304
Momento lineal ADM inicial	1.9171×10^{-7}

Cuadro 4.4: Parámetros de la simulación 0201.

Datos de la simulación 0206	
Masa 1 m_1	0.8750
Masa 2 m_2	0.1250
Masa del agujero negro final m_f	0.9902
Masa chirp M_c	0.2651
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.1429
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.4000
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	2.4613e-12
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.0619
Excentricidad e	6.130×10^{-5}
Separación inicial	20.2167
Frecuencia Orbital inicial	0.0104
Energía ADM	0.9977
Momento angular ADM inicial	0.2432
Momento lineal ADM inicial	4.0735×10^{-8}

Cuadro 4.5: Parámetros de la simulación 0206.

Datos de la simulación 0211	
Masa 1 m_1	0.4999
Masa 2 m_2	0.5000
Masa del agujero negro final m_f	0.9511
Masa chirp M_c	0.4353
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	1.0000
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.8999
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.9000
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.6835
Excentricidad e	2.801×10^{-4}
Separación inicial	16.5000
Frecuencia Orbital inicial	0.0130
Energía ADM	.9934
Momento angular ADM inicial	1.1438
Momento lineal ADM inicial	3.1609×10^{-8}

Cuadro 4.6: Parámetros de la simulación 0211.

Datos de la simulación 0295	
Masa 1 m_1	0.8182
Masa 2 m_2	0.1818
Masa del agujero negro final m_f	0.9803
Masa chirp M_c	0.3188
Masa total M_t	1.0000
Tasa de masa q	0.2222
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	1.1932e-9
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	1.2560e-10
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.4426
Excentricidad e	2.670×10^{-5}
Separación inicial	15.0999
Frecuencia Orbital inicial	0.0157
Energía ADM	0.9957
Momento angular ADM inicial	0.6604
Momento lineal ADM inicial	1.3755×10^{-8}

Cuadro 4.7: Parámetros de la simulación 0295.

Datos de la simulación 0305	
Masa 1 m_1	0.5498
Masa 2 m_2	0.4502
Masa del agujero negro final m_f	0.9518
Masa chirp M_c	0.4327
Masa total M_t	1.0000
Tasa de masa q	0.8189
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.3300
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.4400
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.6919
Excentricidad e	8.382×10^{-4}
Separación inicial	14.2601
Frecuencia Orbital inicial	0.0169
Energía ADM	0.9924
Momento angular ADM inicial	1.0829
Momento lineal ADM inicial	1.2254×10^{-10}

Cuadro 4.8: Parámetros de la simulación 0305.

Datos de la simulación 0322	
Masa 1 m_1	0.5495
Masa 2 m_2	0.4505
Masa del agujero negro final m_f	0.9520
Masa chirp M_c	0.4327
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.8197
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.3300
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.4399
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.6926
Excentricidad e	0.1071
Separación inicial	14.7947
Frecuencia Orbital inicial	0.0158
Energía ADM	0.9924
Momento angular ADM inicial	1.0820
Momento lineal ADM inicial	2.3786×10^{-8}

Cuadro 4.9: Parámetros de la simulación 0322.

Datos de la simulación 0324	
Masa 1 m_1	0.5495
Masa 2 m_2	0.4505
Masa del agujero negro final m_f	0.9517
Masa chirp M_c	0.4327
Masa total M_t	0.9999
Tasa de masa q	0.8197
Magnitud adimensional del espín 1 inicial $\chi_1 = S_1/m_1^2$	0.3299
Magnitud adimensional del espín 2 inicial $\chi_2 = S_2/m_2^2$	0.4400
Magnitud adimensional del espín final $\chi_f = S_f/m_f^2$	0.6903
Excentricidad e	—
Separación inicial	17.6998
Frecuencia Orbital inicial	0.0112
Energía ADM	0.9927
Momento angular ADM inicial	1.0700
Momento lineal ADM inicial	7.1059×10^{-8}

Cuadro 4.10: Parámetros de la simulación 0324.

de las simulaciones elegidas.

También se obtuvo la variación de la distancia entre los dos cuerpos en función del tiempo y a partir de esta se calculó el cambio de la velocidad del sistema y se graficó en función del tiempo. Estas gráficas, especialmente la de velocidad, contienen información de como los parámetros iniciales del sistema afectan la evolución de este ya que muestran características similares para aquellos sistemas con valores en los parámetros parecidos así como la diferencia que marcan los valores diferentes.

Pensando en el problema de dos cuerpos podemos ver que la gran diferencia de masas entre los dos agujeros negros de las simulaciones 0201, 0206 y 0295 causan trayectorias muy diferentes para cada uno de estos en comparación a las trayectorias más parecidas que siguen los cuerpos de masas similares.

Se observa también en las gráficas 4.1 que en estas tres simulaciones el agujero negro más masivo se queda en una serie de órbitas más estrechas mientras que el menos masivo tiene órbitas más abiertas; ambos cuerpos girando en torno al centro de masa del sistema que, al estar mas cerca del más masivo, da la impresión de que las órbitas del menos masivo están alrededor de las del más masivo.

Lo expuesto anteriormente para las simulaciones 0201, 0206 y 0295 contrasta con lo que se ve en las trayectorias de las demás simulaciones donde los valores de las masas son parecidos (en el caso de la simulación 0155 son iguales y en el de 0211 son casi iguales salvo decimales) y por lo tanto el centro de masa del sistema no está tan marcadamente cercano al más masivo.

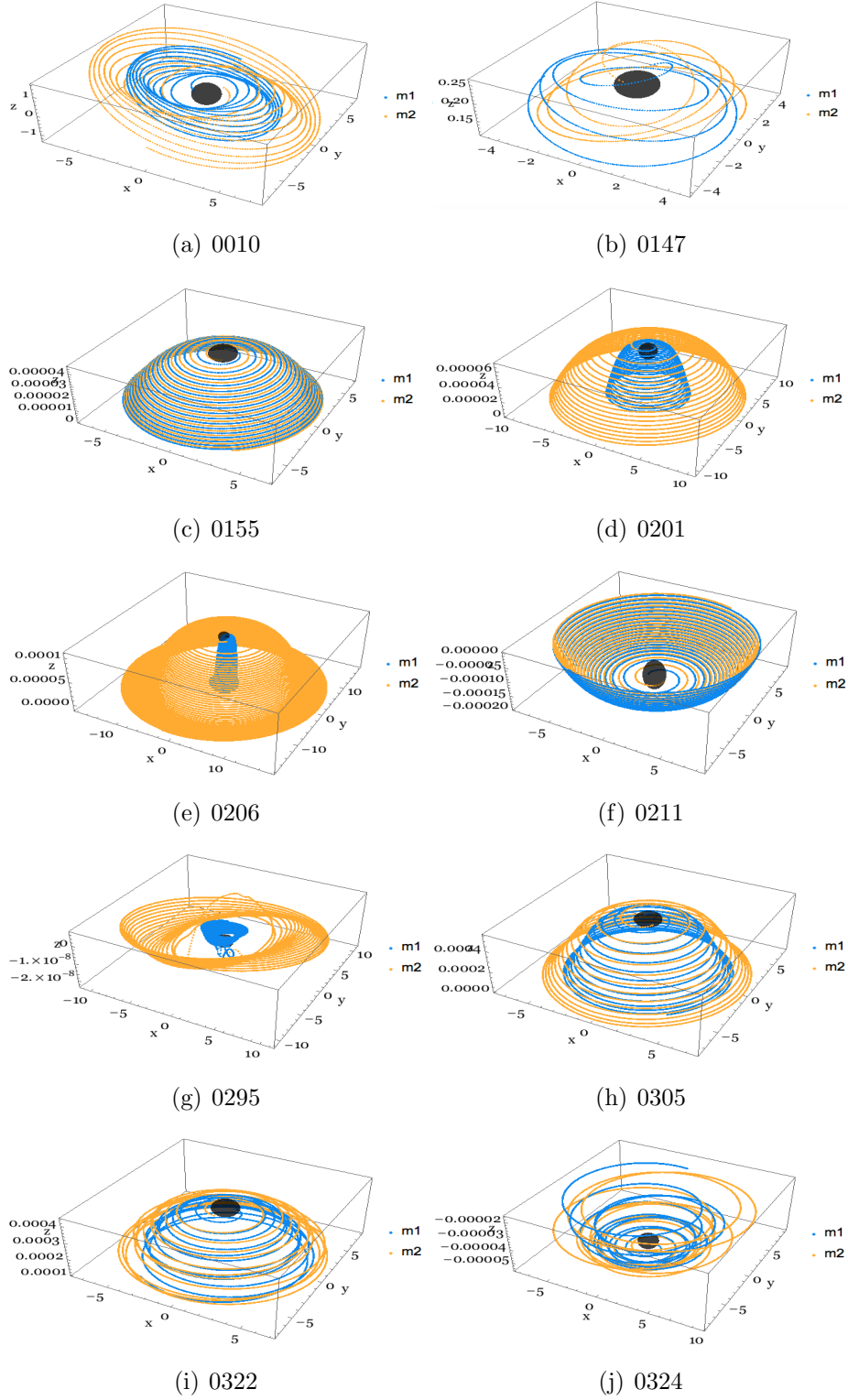


Figura 4.1: Trayectorias de las 10 simulaciones elegidas. En todos los casos la línea azul es la correspondiente al agujero negro de mayor masa (m_1) mientras que la naranja es la del que posee menor masa (m_2).

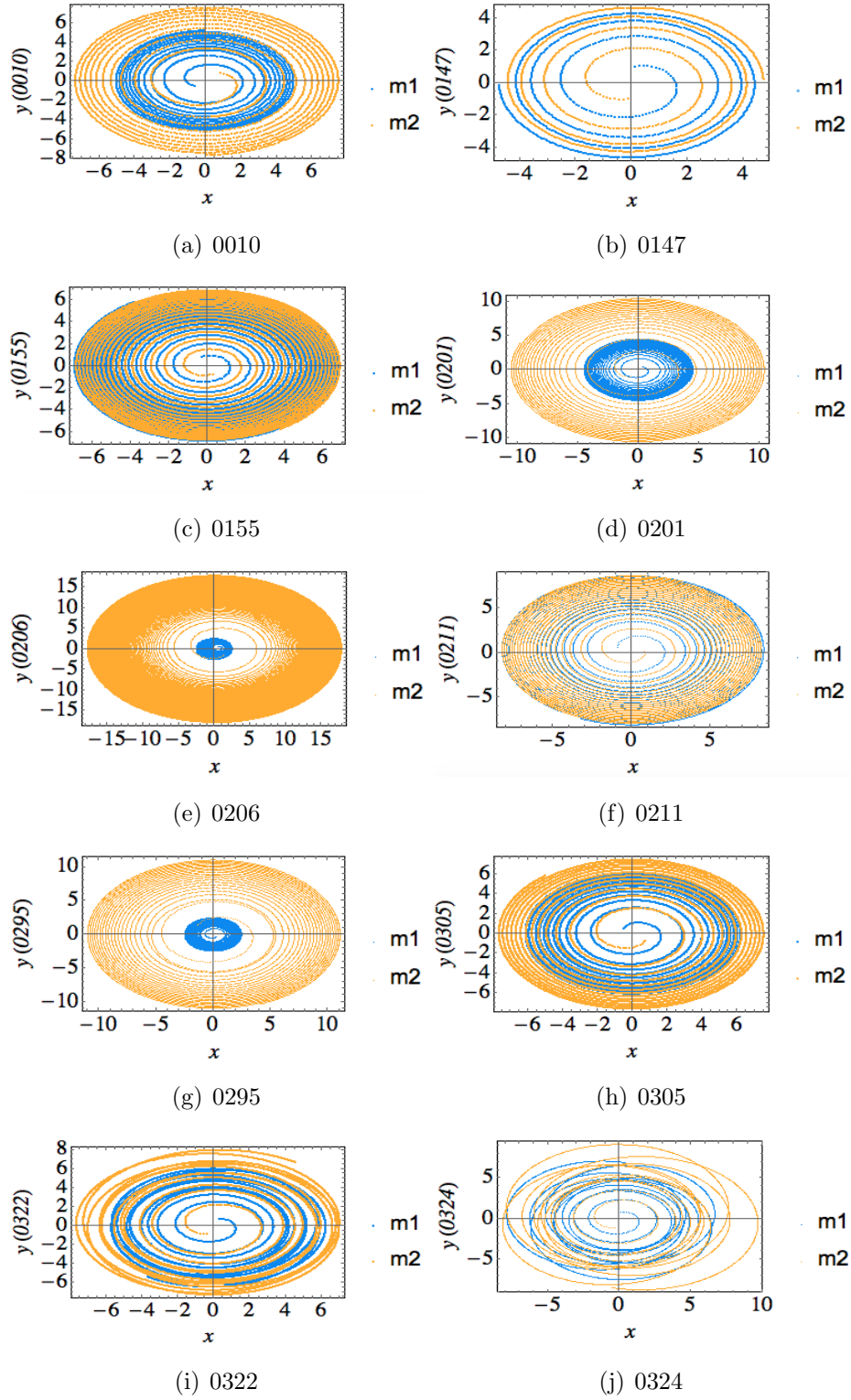


Figura 4.2: Proyección en el plano xy de las trayectorias.

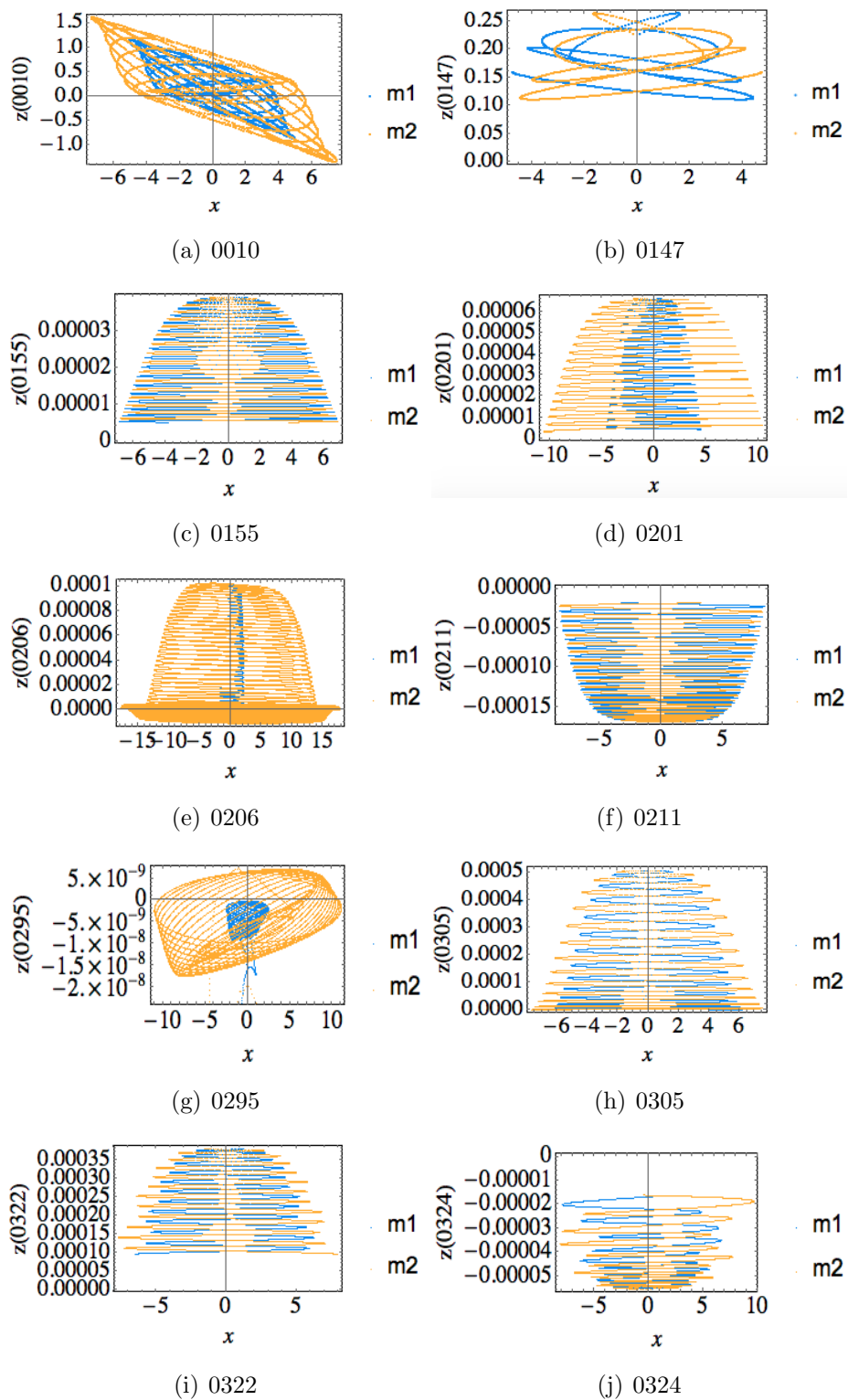


Figura 4.3: Proyección en el plano xz de las trayectorias.

Como se observa en las gráficas de variación de la distancia entre los dos agujeros negros en el tiempo, gráficas 4.4, como esta va disminuyendo hasta el momento del merger (final de la gráfica cuando los dos cuerpos se fusionan) mientras la velocidad va aumentando por conservación del momento angular del sistema y este último, a su vez, va perdiendo energía en forma de ondas gravitacionales haciéndolo llegar al merger, como se puede ver en las gráficas de las trayectorias.

Se observan fluctuaciones apreciables al principio de cada gráfica de velocidad 4.5; esto es debido al ruido numérico causado al calcular la variación de la velocidad a partir de los datos de la posición de cada cuerpo.

Se ven fluctuaciones más marcadas en unas gráficas así como más suaves en otras, este efecto tiene dos causas: primero todas las órbitas son no-circulares (en las tablas todas la excentricidades están entre 0 y 1 salvo en la simulación 0324 donde no se puede definir una excentricidad) siendo la órbita más circular la de 0295 y, segundo, es de esperar que para los sistemas con masa similares las fluctuaciones de velocidad sean más marcadas pues el centro de masa está en uno de los focos de la trayectoria siendo mayor la velocidad del cuerpo al pasar cerca de dicho foco, este fenómeno es mucho más apreciable en sistemas de dos cuerpos con masas parecidas; no significa que las de masas muy diferentes no sufran dichas fluctuaciones (ver el caso de 0206) pero igualmente a pesar de estas fluctuaciones, la velocidad tiende rápidamente a aumentar.

Sin embargo en las simulaciones 0147, 0322 y 0324 las fluctuaciones son sumamente marcadas por lo cual se ve que efectivamente la velocidad tiene la tendencia de ir aumentando pero con mínimos y máximos.

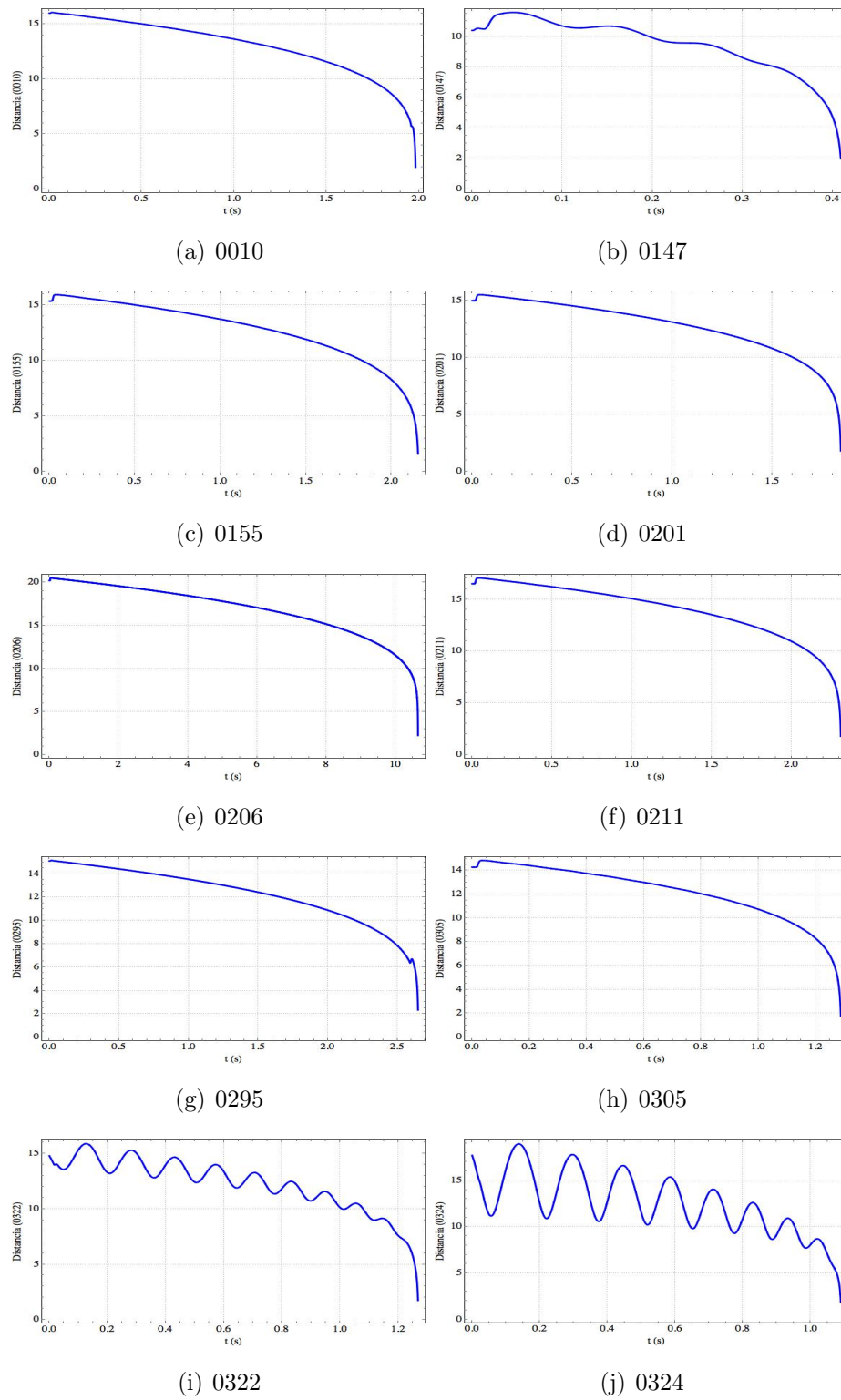


Figura 4.4: Variación de la distancia en el tiempo entre los dos cuerpos de las 10 simulaciones elegidas.

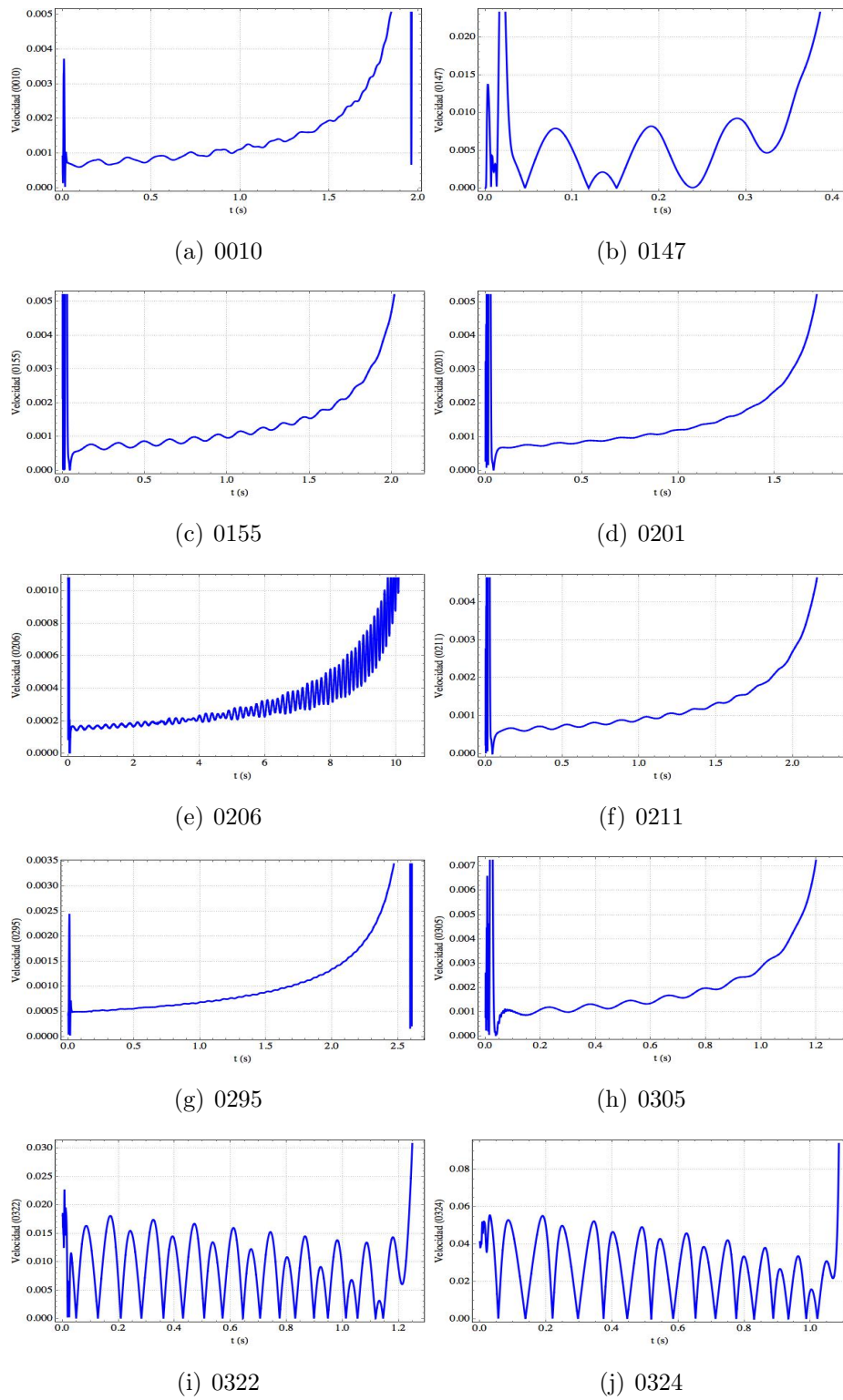
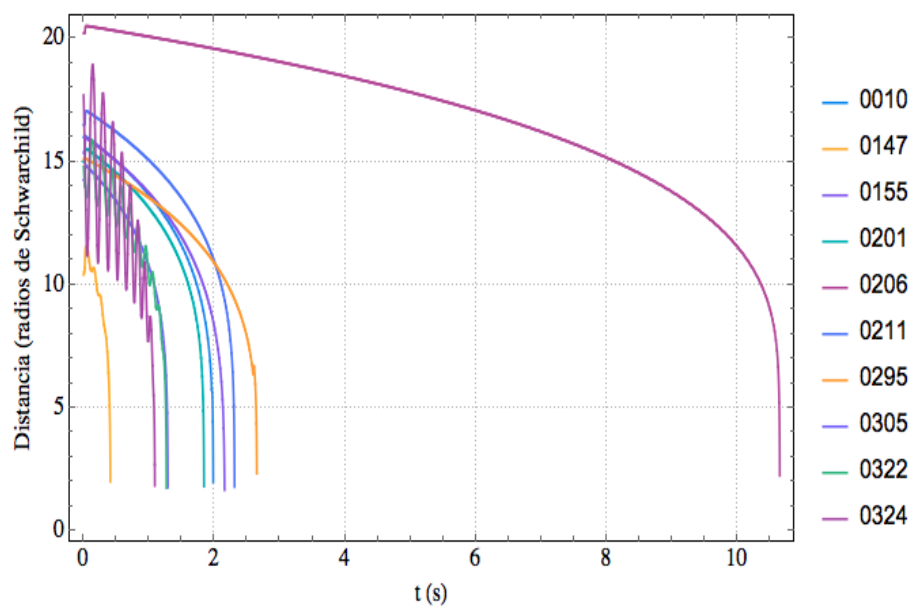
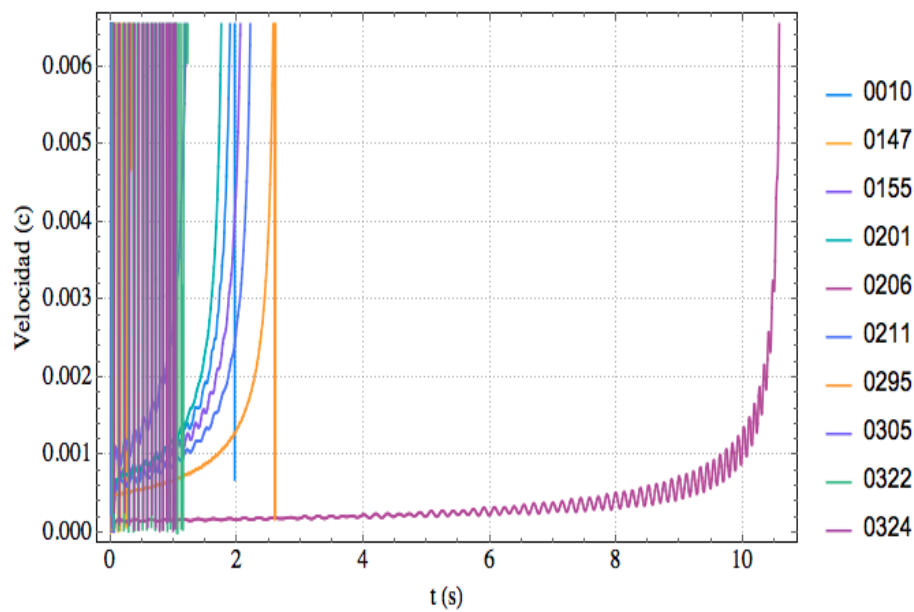


Figura 4.5: Variación de la velocidad del sistema en el tiempo de las 10 simulaciones elegidas.



(a) Distancia



(b) Velocidad

Figura 4.6: Comparación de la variación de la distancia entre los dos cuerpos y de la velocidad del sistema en el tiempo para las 10 simulaciones.

4.1.2. Resultado 2: Lectura de los archivos que contienen el pseudo escalar Ψ_4 para la obtención del strain teórico de cada simulación y obtención del strain observado.

Los datos obtenidos de la lectura de los archivos del catálogo que contienen el Ψ_4 fueron almacenados y gráficos. Estos datos son justamente la parte real, imaginaria y absoluta de Ψ_4 como se pueden ver en la figura 4.7, a partir de esa información se extrajo la fase entre la parte real e imaginaria como se ve en la figura 4.8.

Una vez leído el Ψ_4 se procede a calcular el strain a partir de este. Una forma más sencilla de obtener el strain que haciendo una integral en el tiempo es utilizando una frecuencia fija, en este caso una que es aproximadamente la mitad de la frecuencia de las ondas; este es el método desarrollado por Reisswig y Pollney en la referencia [26], luego se multiplican por el radio de extracción r y se mueven en el tiempo hasta llegar a ese radio (cada simulación por un factor diferente) resultando en las formas de onda de la figura 4.9.

Como se vió en la figura 3.5 existen modos más fuertes y dominantes que otros, sin embargo la simulación los computa a todos. El strain anterior permite hallar los modos dominantes y una vez seleccionados se eliminan también los modos negativos (por la simetría ecuatorial), de esta forma se eliminan los modos dominados por el error numérico (muy altas y muy bajas frecuencias) y se disminuye el tiempo de cálculo. Una vez se han obtenido los valores de m y l a utilizar se debe definir la orientación del sistema de la fuente respecto al detector pues esto influye en la señal que se observará, para lo cual se calculan los armónicos esféricos pesados por espín utilizando la ecuación:

$$SpinWeightedSphericalHarmonic[s, l, m, \Theta, \Phi] := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+s)!(l-s)!}}$$

$$e^{im\Phi} \sin\left[\frac{\Theta}{2}\right]^{2l} \sum_{r=Max[m-s, 0]}^{Min[l-s, l+m]} Binomial[l-s, r] Binomial[l+s, r+s-m]$$

$$(-1)^{l-r-s} \cot\left[\frac{\Theta}{2}\right]^{2r+s-m},$$

donde Θ y Φ son los ángulos que marcan una orientación particular del detector relativo al sistema de la fuente.

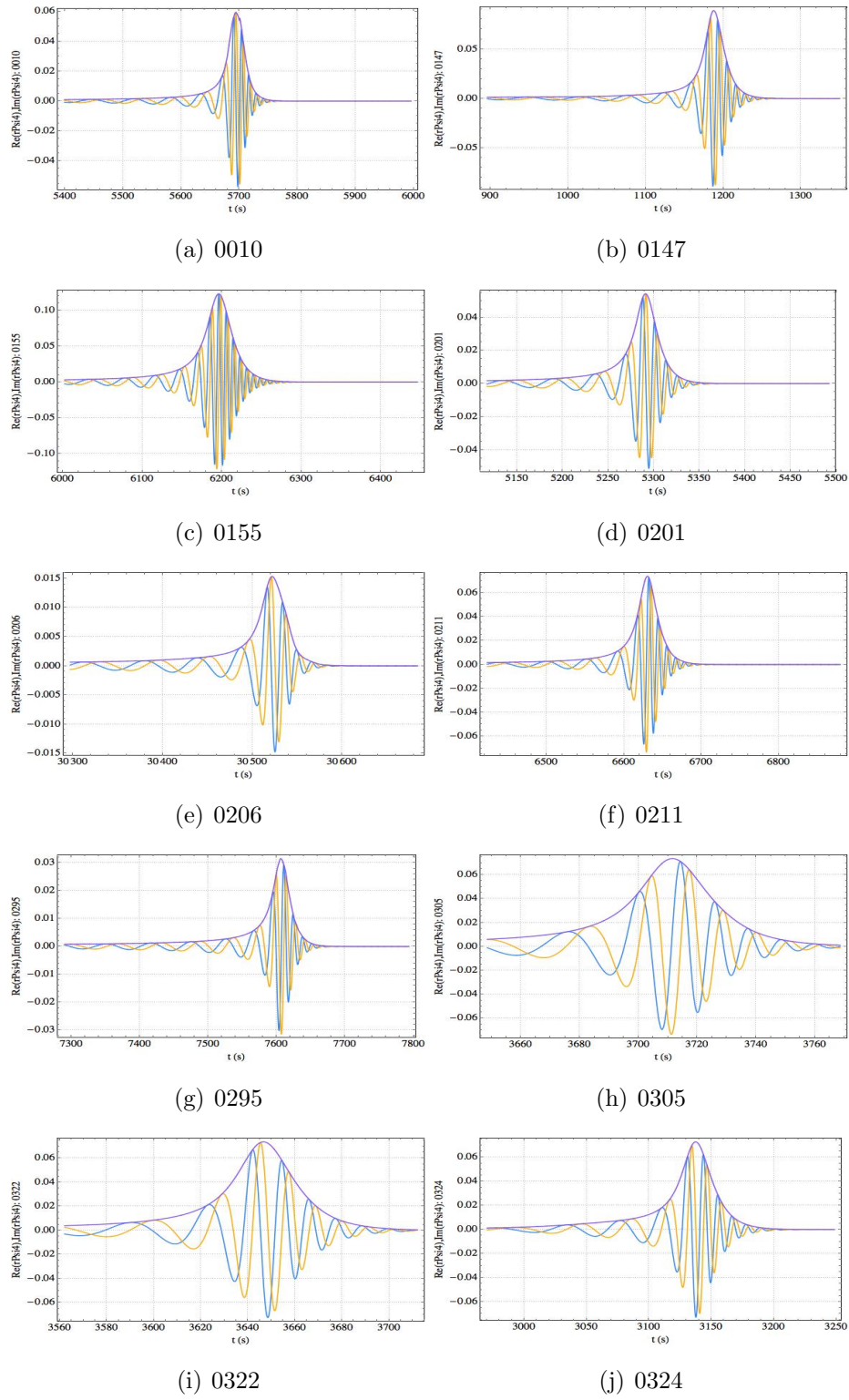
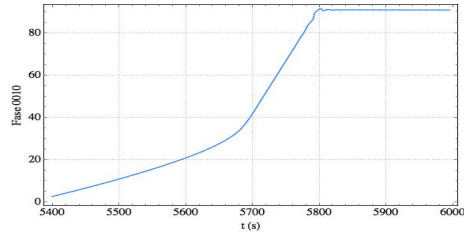
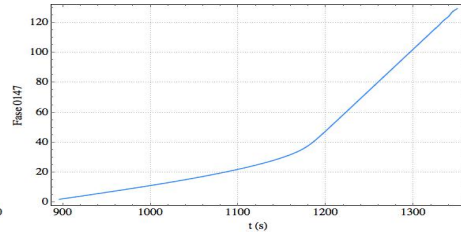


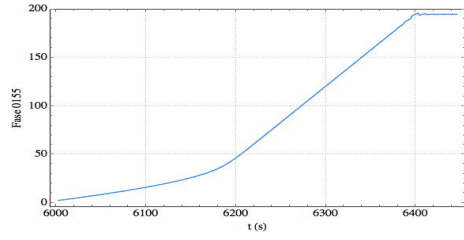
Figura 4.7: Parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 (componente del tensor de Weyl que representa la radiación emitida) para las 10 simulaciones elegidas.



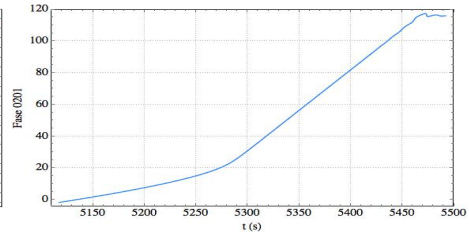
(a) 0010



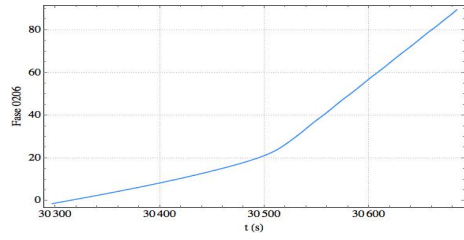
(b) 0147



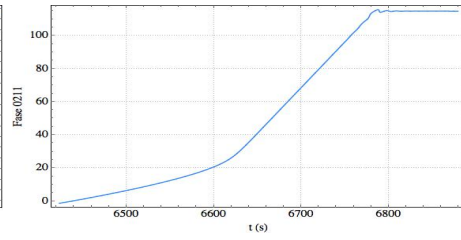
(c) 0155



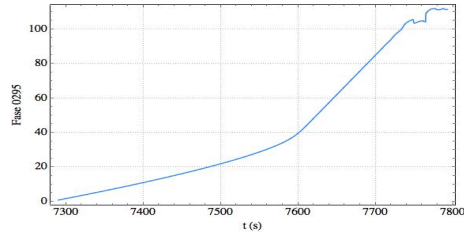
(d) 0201



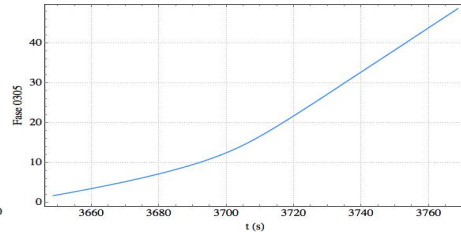
(e) 0206



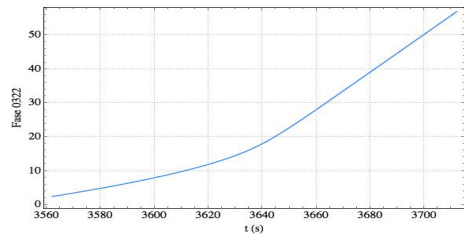
(f) 0211



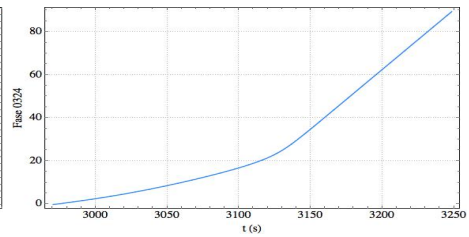
(g) 0295



(h) 0305



(i) 0322



(j) 0324

Figura 4.8: Fase entre la parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 de las 10 simulaciones elegidas.

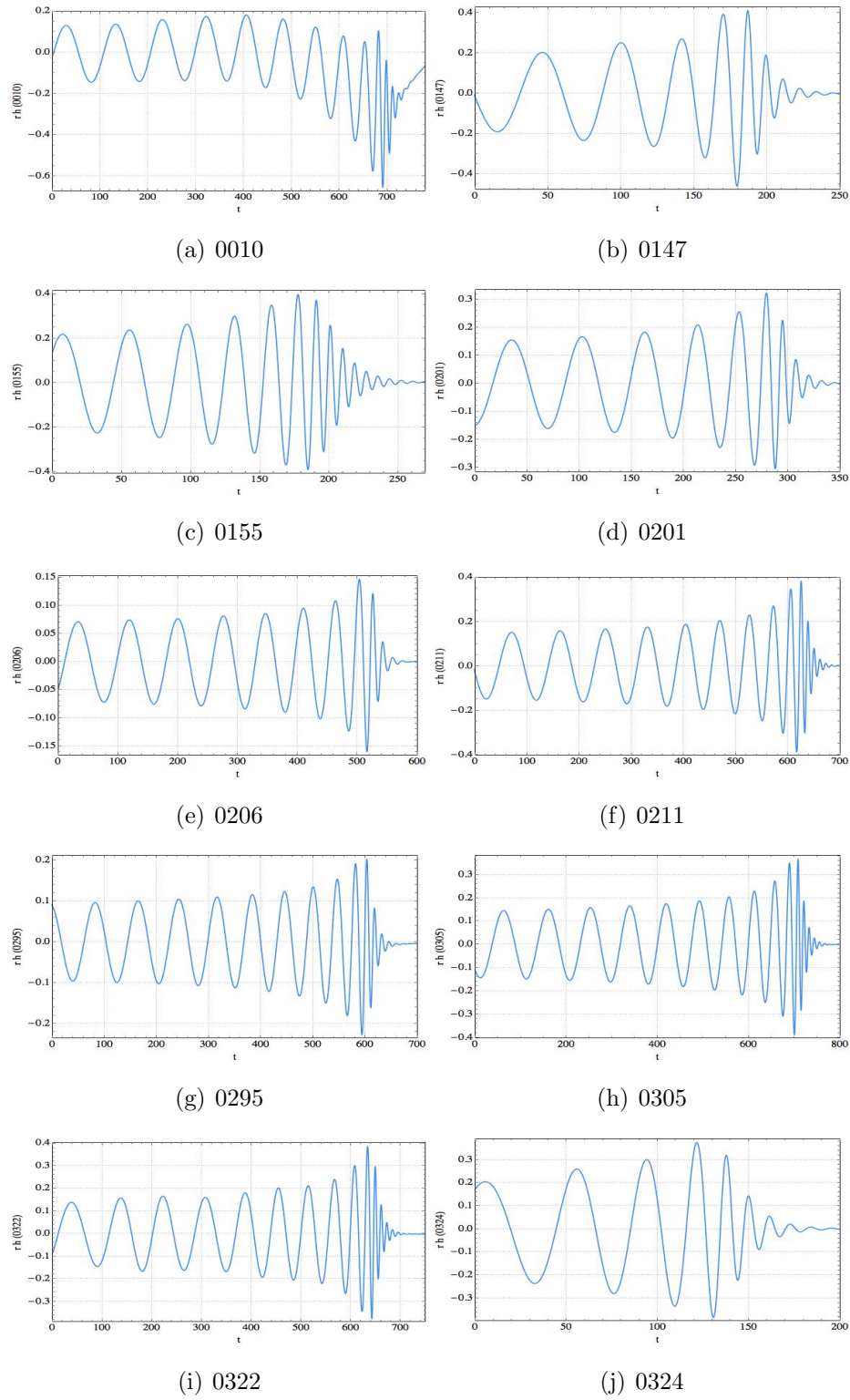


Figura 4.9: Formas de ondas multiplicadas por r de las 10 simulaciones elegidas.

Se ha obtenido, entonces, un nuevo Ψ_4 (ya que se calculó a partir de l y m) que son los armónicos esféricos pesados por espín para los modos más fuertes proyectados en la orientación del detector. La parte real e imaginaria de este nuevo Ψ_4 se pueden ver en la figura 4.10. Se observa que la parte real e imaginaria de este nuevo Ψ_4 , a pesar de haber quitado modos de baja y alta frecuencia que sufrían de error numérico, no perdió ni la información ni la morfología mostrada anteriormente con todos los modos. Posteriormente se lleva a cabo el mismo proceso anterior de fijar una frecuencia de integración para calcular el strain proyectado de cada simulación, las gráficas del strain proyectado se encuentran en la figura 4.11.

Si se desea utilizar estas formas de ondas para analizar los datos observados se deben convertir a unidades físicas apropiadas para esto se supuso un redshift $z = 0.09$ y unas masas de $m_1 = 36M_\odot$, $m_2 = 29M_\odot$ y masa total de $M_t = 65M_\odot$ que mejor ajustan en el sistema de referencia de la fuente (aún se está en este sistema pues anteriormente sólo se ubicó la fuente en una determinada orientación respecto del detector y ese fue el strain proyectado), esto nos da el strain que debería llegar a La Tierra luego de ser afectado por el redshift. Además se ajustó la distancia de la fuente de las simulaciones con el fin de que el strain teórico y el observado queden en un mismo rango y puedan ser ajustados, ya que el efecto de variar la distancia a la fuente es la de disminuir o aumentar la amplitud de la señal pero sin cambiar su morfología. Al variar esa distancia se probaron distintos valores como 600 Mpc, 500 Mpc, 400 Mpc, entre otros; hasta llegar a la óptima de 410 Mpc en la cual la señal de los datos simulados queda perfectamente escalada con los observados; esta distancia también es necesaria para la transformación a unidades físicas. Estos parámetros son ajustes propios del código necesarios para realizar la conversión de Ψ_4 a strain, los demás parámetros son asignados de la metadata de la simulación que mejor ajuste.

El strain físico se obtiene a partir de la parte real e imaginaria de strain que llegaría a La Tierra utilizando la ecuación 3.3 vista anteriormente, $h_{phys} = h_+ - ih_\times$. El último paso es calcular el strain teórico que observarían los detectores a partir del que llega a La Tierra, para lo cual se utilizaron las ecuaciones 3.6 y 3.7; los ángulos necesarios en la ecuación 3.7 dan la orientación específica del detector y son fijos siendo: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\phi = 0$ y $\psi = 0$. De esta forma se obtienen los strain teóricos de la figura 4.12 que pueden ser utilizados para ajustar los datos observados.

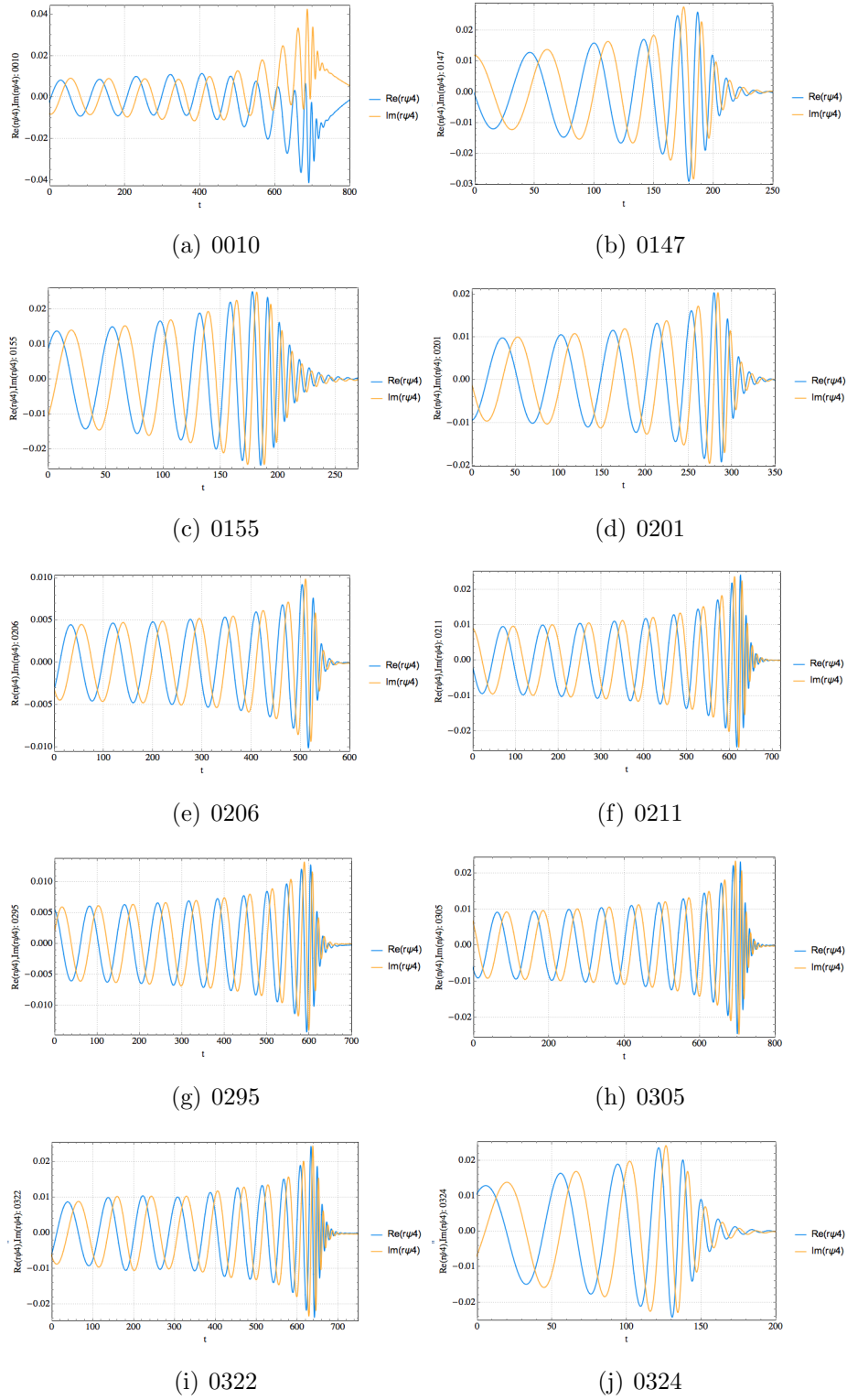


Figura 4.10: Parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 proyectadas en la orientación del detector.

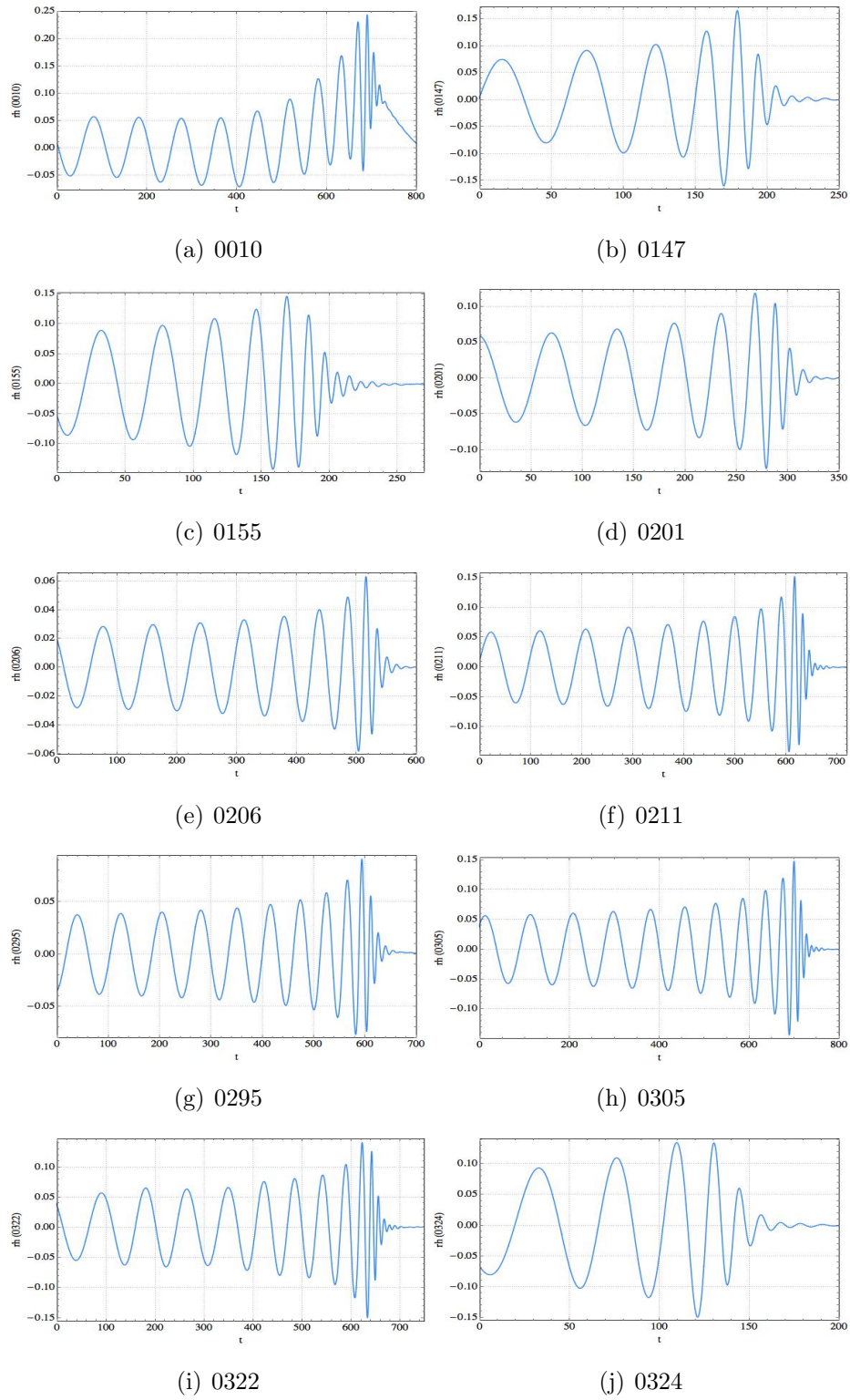


Figura 4.11: Parte real del strain proyectado en la orientación del detector.

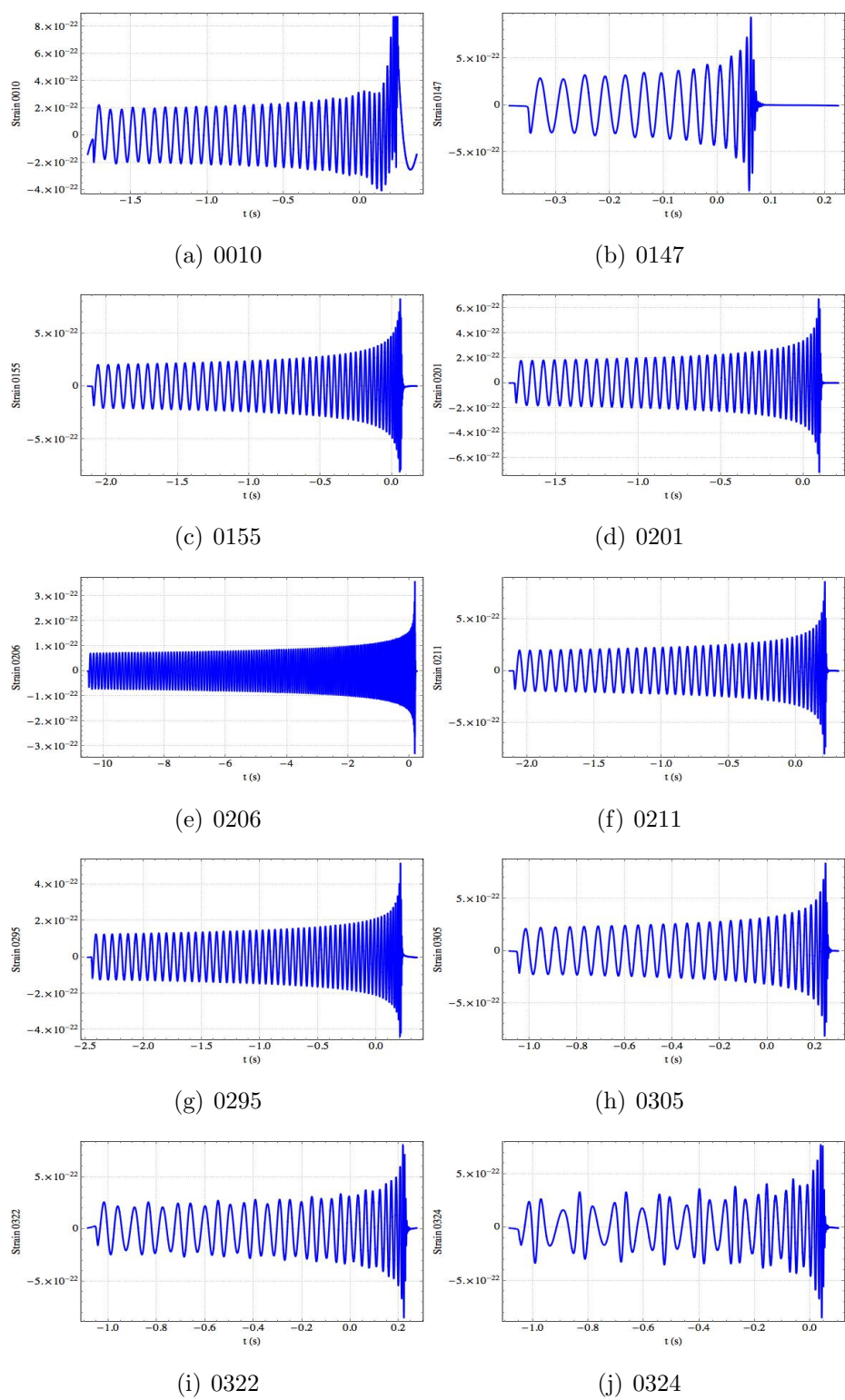
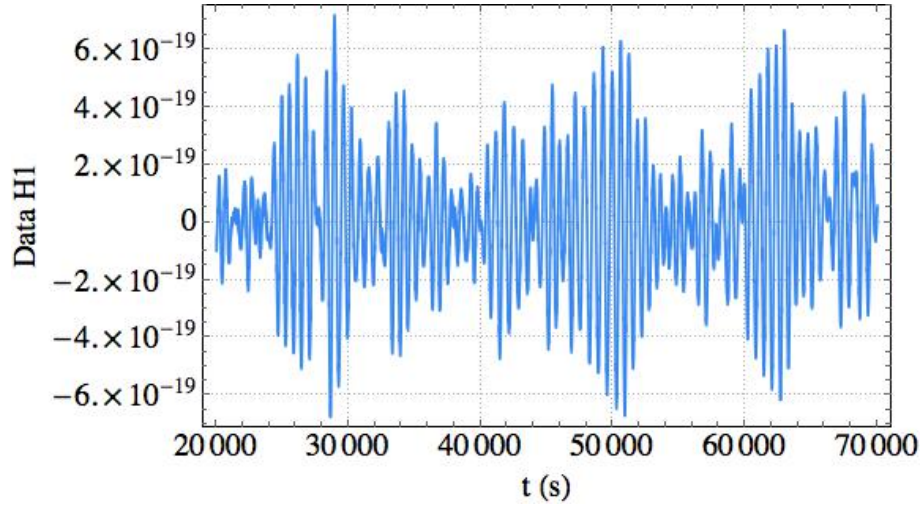
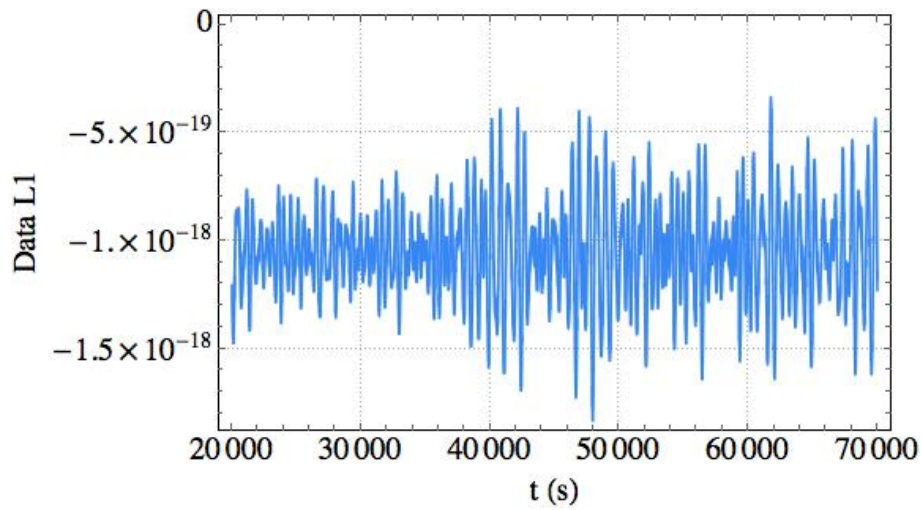


Figura 4.12: Formas de ondas de las 10 simulaciones elegidas.



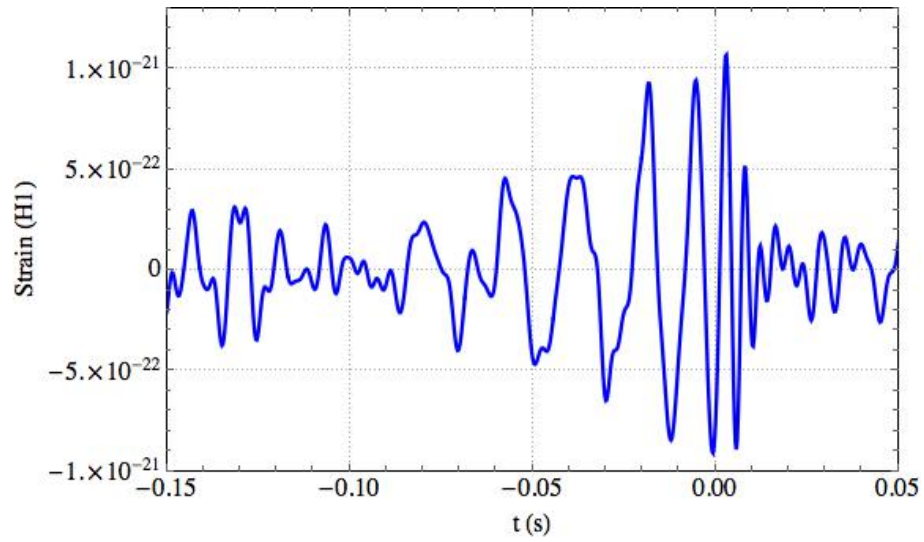
(a) H1



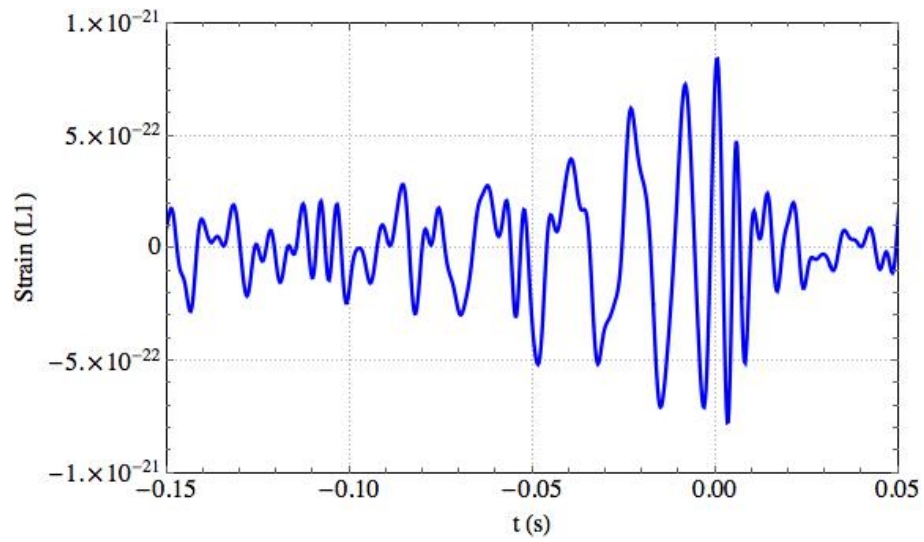
(b) L1

Figura 4.13: Conjunto de datos observados por LIGO.

El conjunto de datos observados por los detectores de LIGO, H1 y L1, se muestran en la figura 4.13. Si sólo se desean la parte de los datos donde se encuentra la señal (luego de haberla identificado, es decir, después de dividirla por la densidad espectral de amplitud para el blanqueo y pasarla por el filtro pasabandas del código de *python*) entonces quedan los datos de la gráfica 4.14 donde se encuentran las formas de onda observadas.



(a) H1



(b) L1

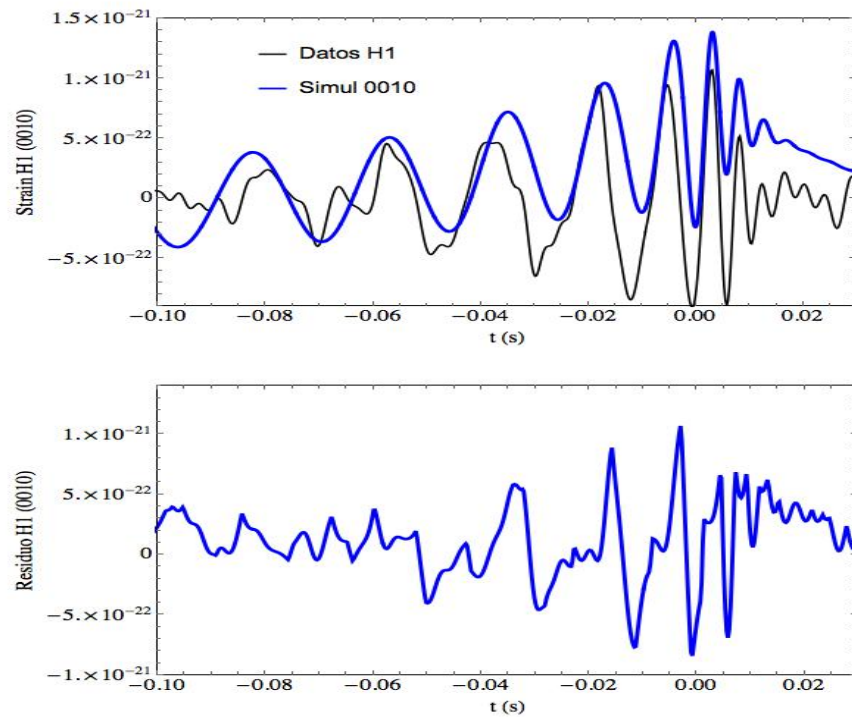
Figura 4.14: Ondas Gravitacionales observadas por LIGO.

Valor de χ^2 para las distintas simulaciones	
Modelo	χ^2
0010	H1: 2.2102
	L1: 2.9688
0147	H1: 2.3698
	L1: 1.8054
0155	H1: 1.8997
	L1: 4.3832
0201	H1: 3.5984
	L1: 1.4151
0206	H1: 3.8325
	L1: 4.0863
0211	H1: 4.0869
	L1: 6.0884
0295	H1: 1.1050
	L1: 1.9785
0305	H1: 1.0077
	L1: 0.6158
0322	H1: 1.8187
	L1: 1.6121
0324	H1: 2.0287
	L1: 8.8968

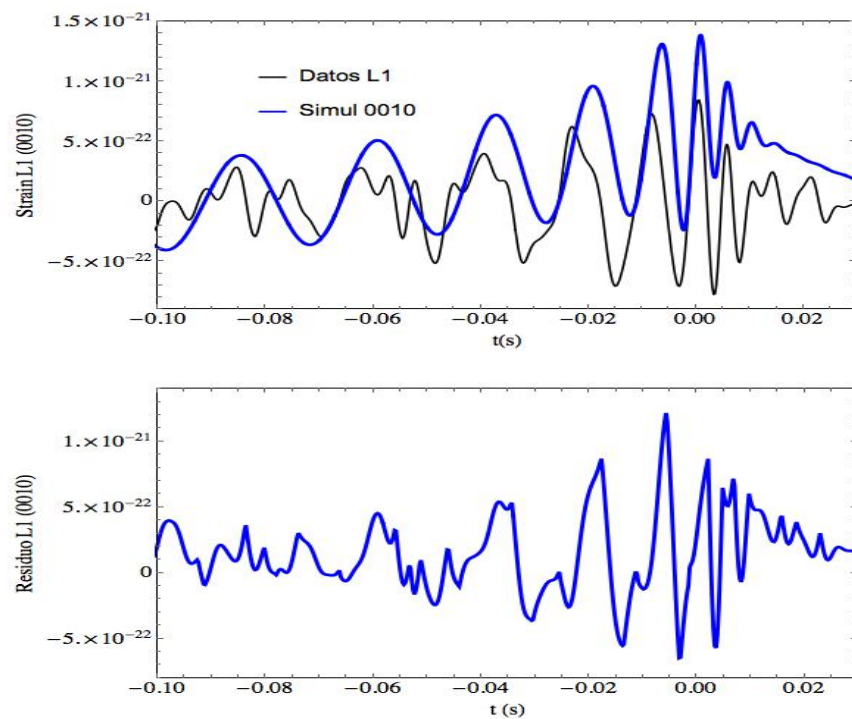
Cuadro 4.11: χ^2 para cada simulación estudiada (cada número esta multiplicado por 10^{-18}).

4.1.3. Resultado 3: Cálculo de los valores de χ^2 para escoger la simulación que mejor ajusta.

El detector H1 fue el primero en observar la señal por lo cual suele usarse como principal mientras que L1 suele ser el confirmador de lo que observó H1. Por esta razón al ajustar los datos se evalúa si las simulaciones ajustan de manera eficiente la señal observada por ambos detectores y de esta manera la simulación que obtega un buen χ^2 para ambos será tomada como el mejor ajuste. Los χ^2 para H1 y L1 de cada simulación se encuentran el cuadro 4.11.

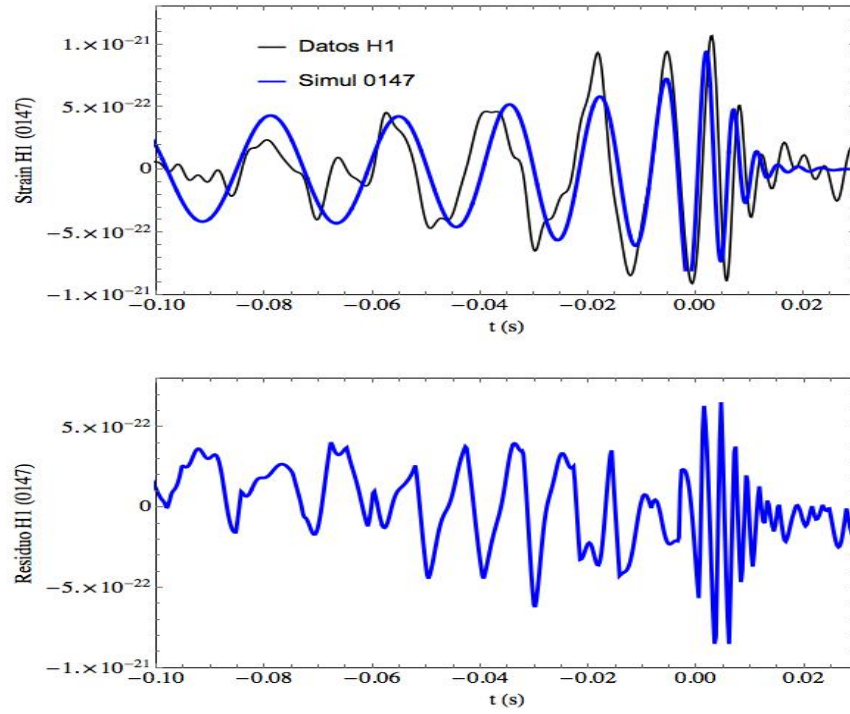


(a) H1

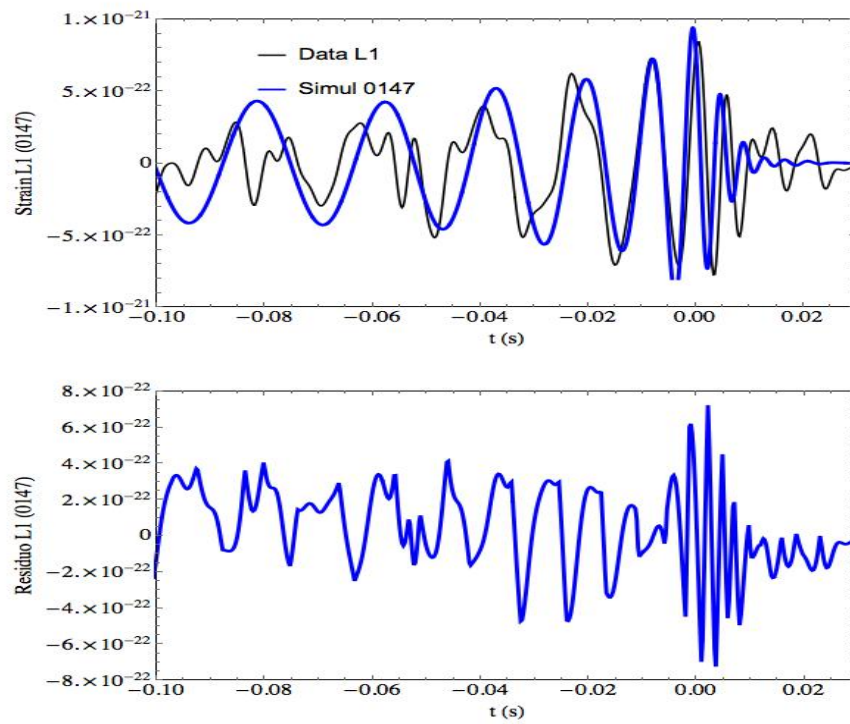


(b) L1

Figura 4.15: Ajuste y residuo para la simulación 0010.

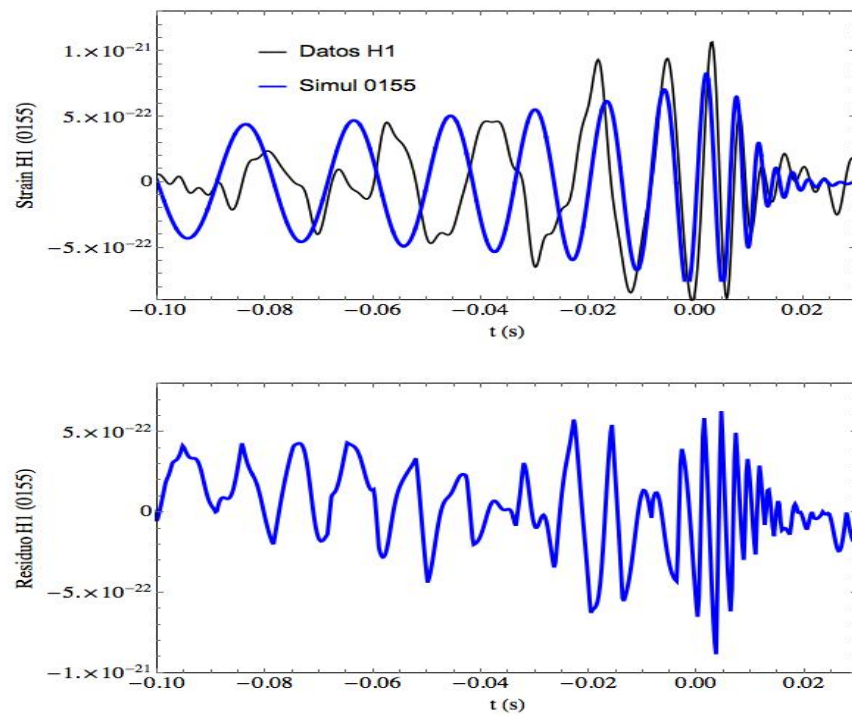


(a) H1

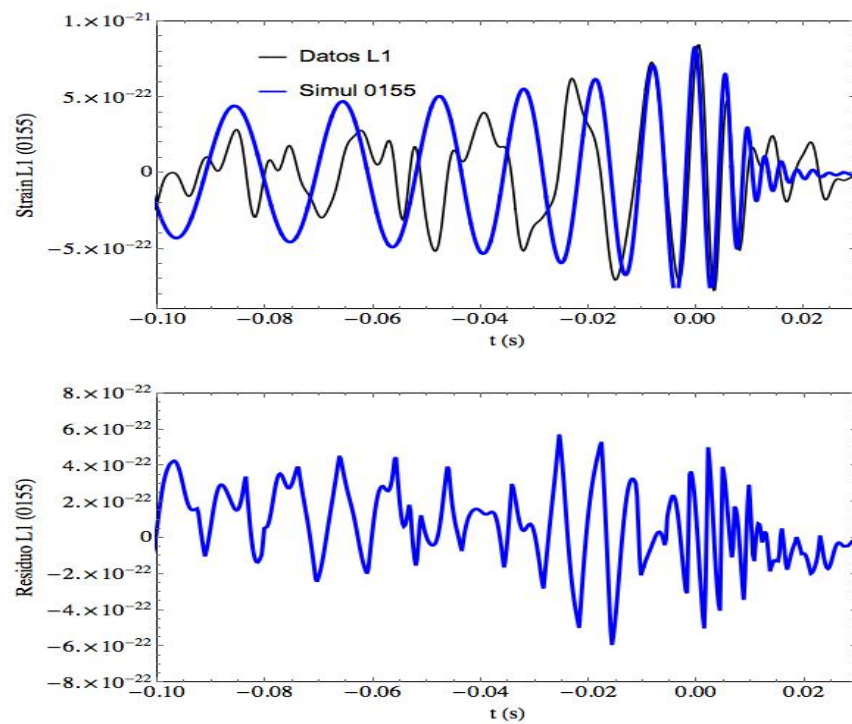


(b) L1

Figura 4.16: Ajuste y residuo para la simulación 0147.



(a) H1



(b) L1

Figura 4.17: Ajuste y residuo para la simulación 0155.

Además de calcular los valores de χ^2 también se obtiene y grafica los residuos (Datos - Modelo), que ejemplifican cuanto de la señal observada realmente es ajustada por las formas de ondas teóricas.

En la gráfica 4.15 vemos el ajuste para H1 y L1 de la simulación 0010 y su correspondiente residuo. Se observa que para ambos detectores deja un residuo de amplitud apreciable a causa de que esta simulación no ajusta bien en la parte mas importante de la señal o la que mas interesa que es justo la zona cercana al merger, incluyéndolo. A pesar de no tener los valores más altos, el desajuste se refleja en sus valores de χ^2 .

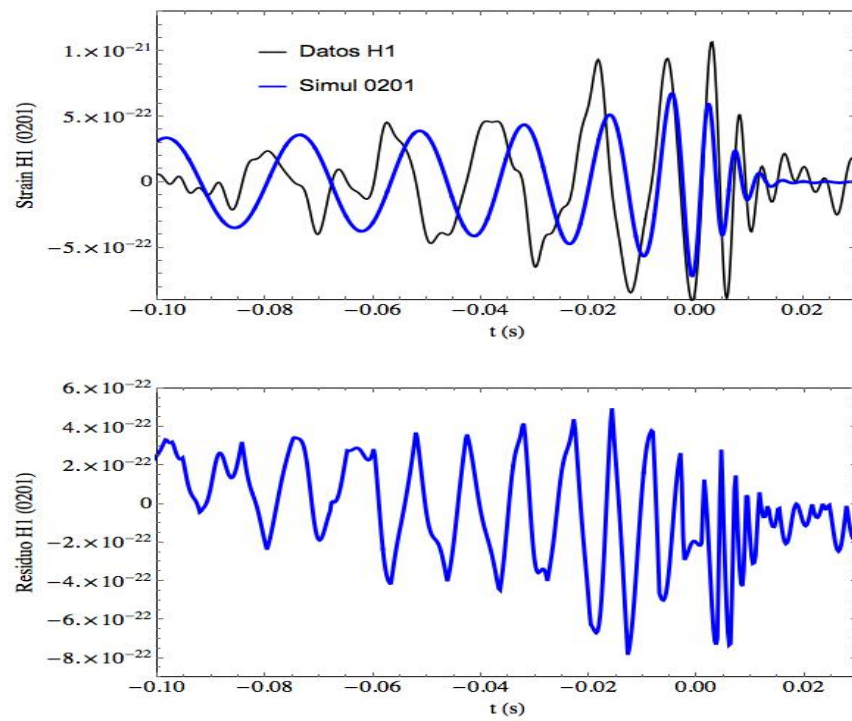
La simulación 0147 4.16 pareciera ajustar bien la parte cercana al merger, sin embargo justo en este difiere un poco lo que causa que el residuo sea grande en esa zona para ambos detectores, lo cual hace que sus valores de χ^2 sean altos especialmente para H1.

Por su parte la simulación 0155 4.17 ajusta casi perfectamente justo la zona del merger para L1 aunque se desfasa un poco en esa misma zona para H1 además en el resto de la señal, especialmente en la zona del inspiral, está completamente desfasada. Observamos que los desajustes se ven reflejados en los valores de χ^2 para estas simulaciones, aunque estos no llegan a ser los mas valores más altos de la tabla 4.11.

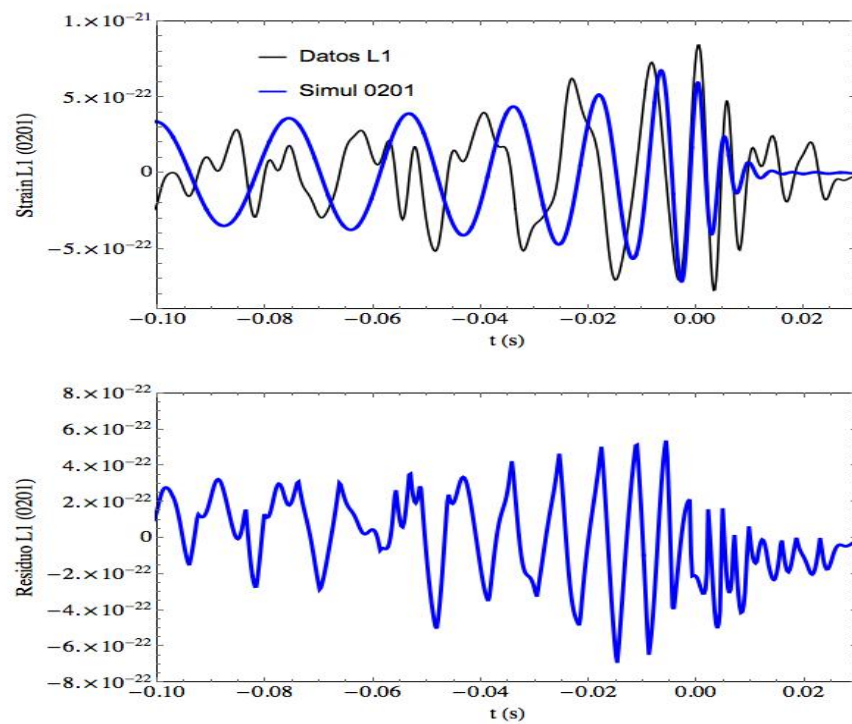
La simulación 0201 4.18 (se encuentra en la siguiente página) tiene la misma morfología de la señal en la zona del merger, pudiendose decir que en cuanto a la forma es la que más se asemeja, pero subestima la amplitud observada por cada uno de los detectores, obteniéndose al final un residuo si bien no tan pronunciado pero significativo y un valor de χ^2 muy elevado para H1.

Por otra parte la simulación 0206 4.19 subestima aún mas las amplitudes en ambos detectores además de estar desfasada incluso en las zonas cercanas al merger y por esta razón su correspondiente valor de χ^2 es de los más altos; pero a pesar de eso su morfología tiene muy buena forma justo en el merger, lo cual le otorga un residuo no tan pronunciado.

En la siguiente simulación, es decir, la 0211 4.20 vemos un muy buen ajuste para L1 y uno un poco desfasado para H1 en la cual también hay subestimación de la amplitud, esto se ve reflejado en un mayor residuo para H1 y un residuo muy bueno para L1, justamente para H1 tiene un valor de χ^2 muy alto en comparación a los demás como se ve en la tabla 4.11.



(a) H1



(b) L1

Figura 4.18: Ajuste y residuo para la simulación 0201.

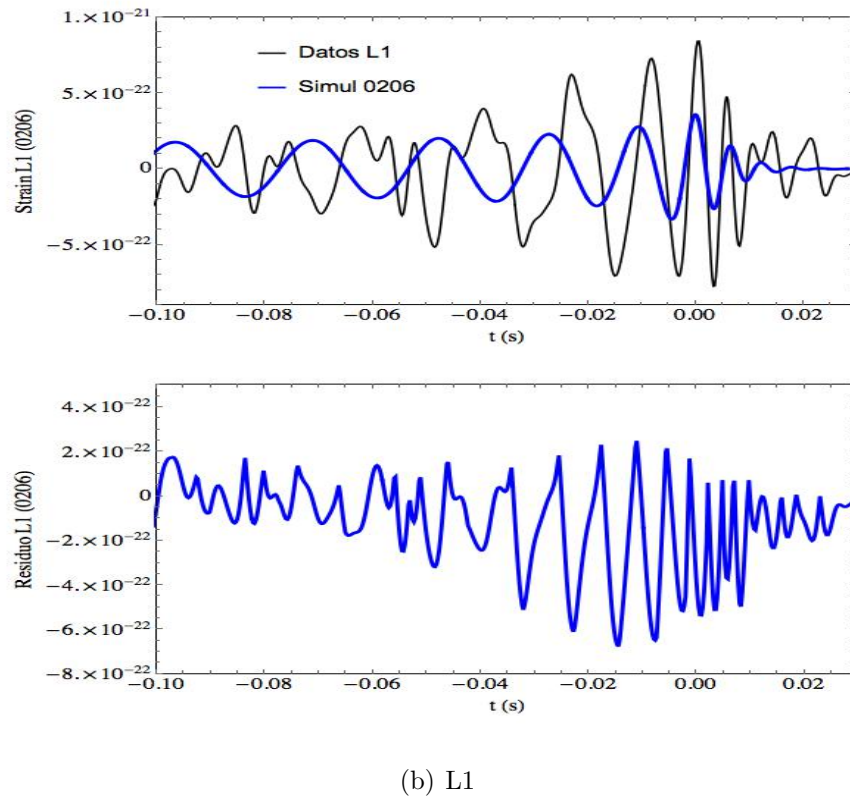
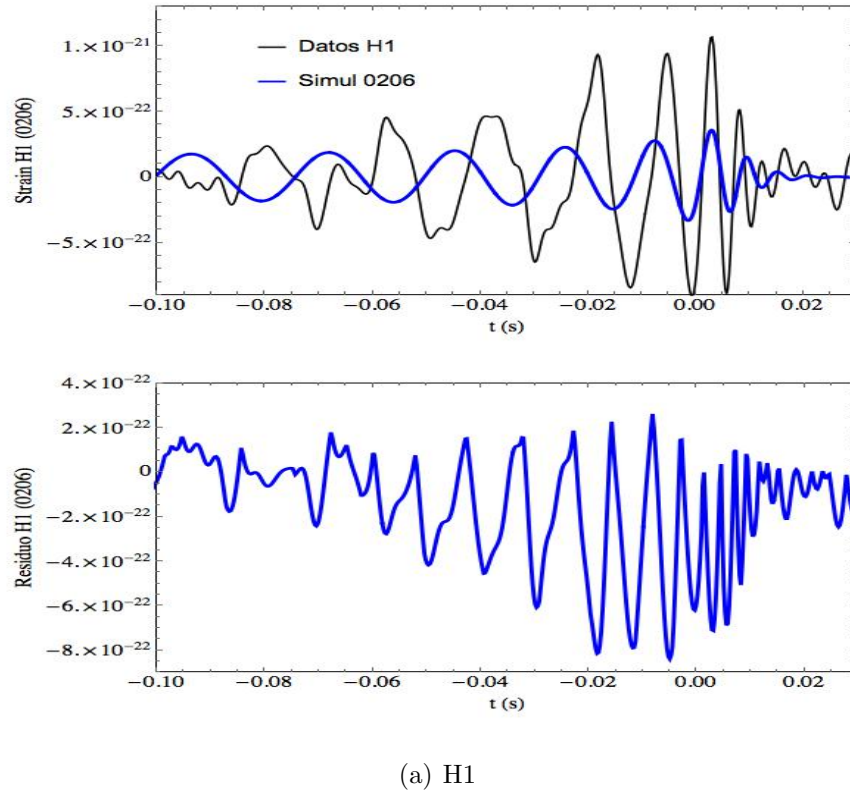
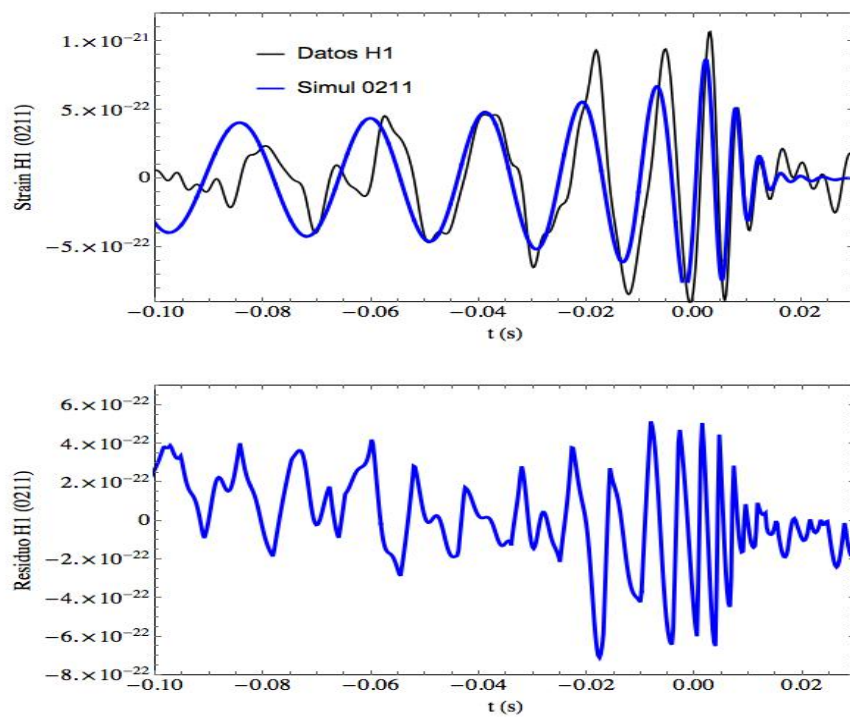
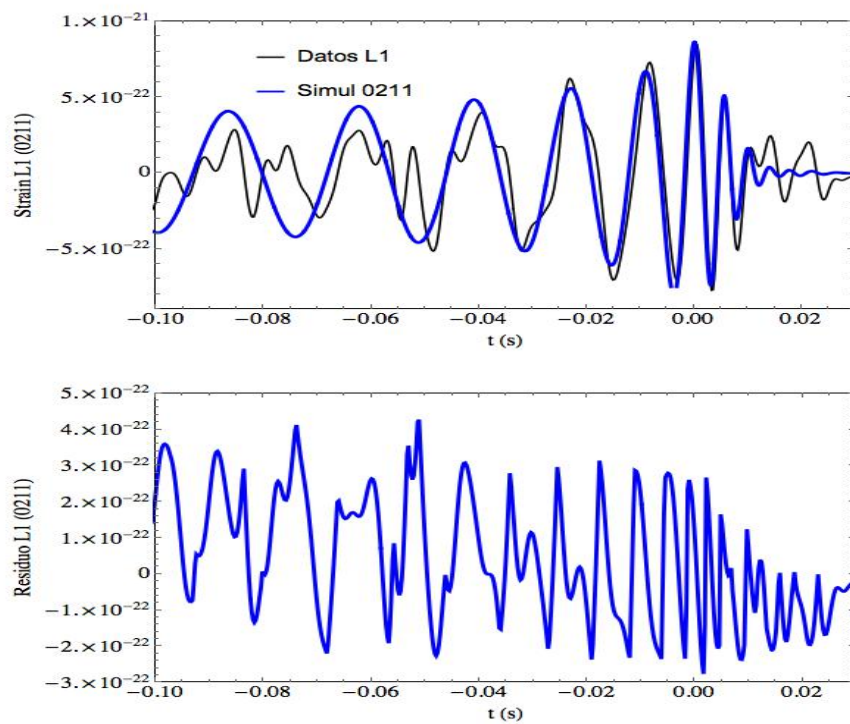


Figura 4.19: Ajuste y residuo para la simulación 0206.

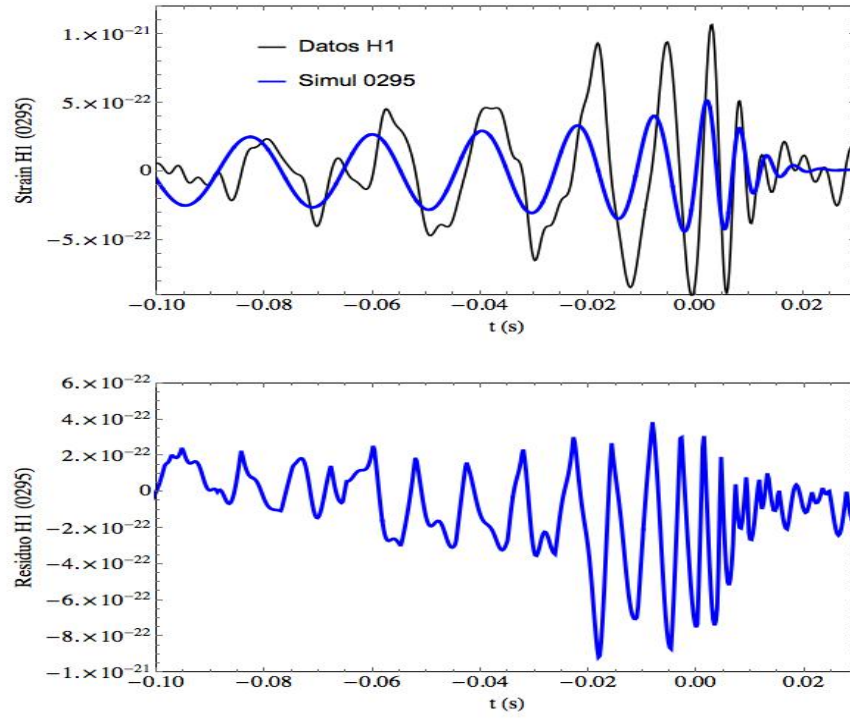


(a) H1

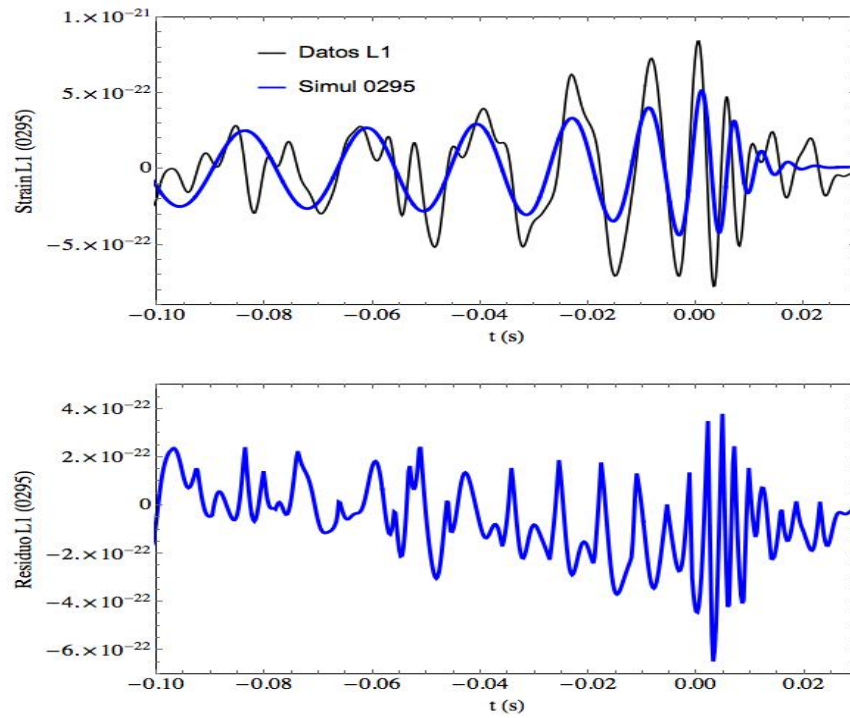


(b) L1

Figura 4.20: Ajuste y residuo para la simulación 0211.



(a) H1



(b) L1

Figura 4.21: Ajuste y residuo para la simulación 0295.

En la página anterior se encuentra el ajuste y el residuo de la simulación 0295 4.21, se observa como esta subestima la amplitud de la señal de los datos para ambos detectores observándose esto, como consecuencia, en la amplitud de los residuos; la cual es más prominente cerca del merger; sin embargo sus valores de χ^2 no son de los más altos.

Las simulaciones 0305, 0322 y 0324 comparten parámetros parecidos como se pueden ver en las tablas 4.8 4.9 4.10, sin embargo algunos de ellos son notablemente diferentes y es justo esto lo que causa las diferencias en sus formas de ondas.

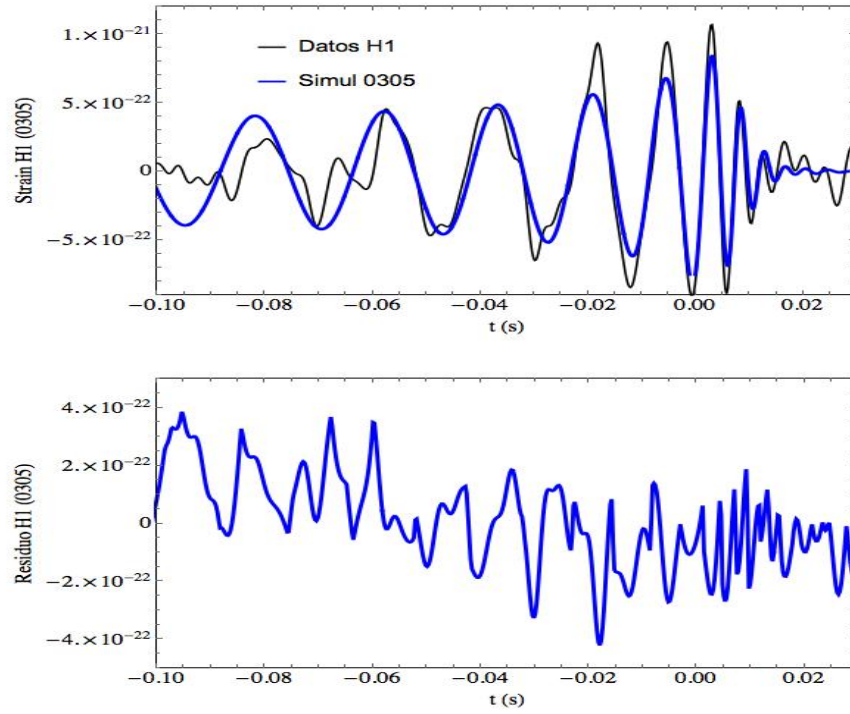
La simulación 0305 4.22 a pesar de subestimar un poco a los datos de H1 da un muy buen residuo mientras que ajusta muy bien la parte del merger para los datos de L1, además esta simulación tiene, tanto para H1 como para L1; unos χ^2 que se encuentran entre los menores valores, siendo el valor del χ^2 para L1 el menor de toda la tabla 4.11.

Por otro lado la simulación 0322 4.23 a pesar de tener una morfología muy parecida a la de los datos subestima y se desfasa alrededor del meger lo que causa un residuo apreciablemente alto en esa zona para ambos detectores; lo cual eleva sus valores de χ^2 , a pesar de ello aún son de los valores más pequeños.

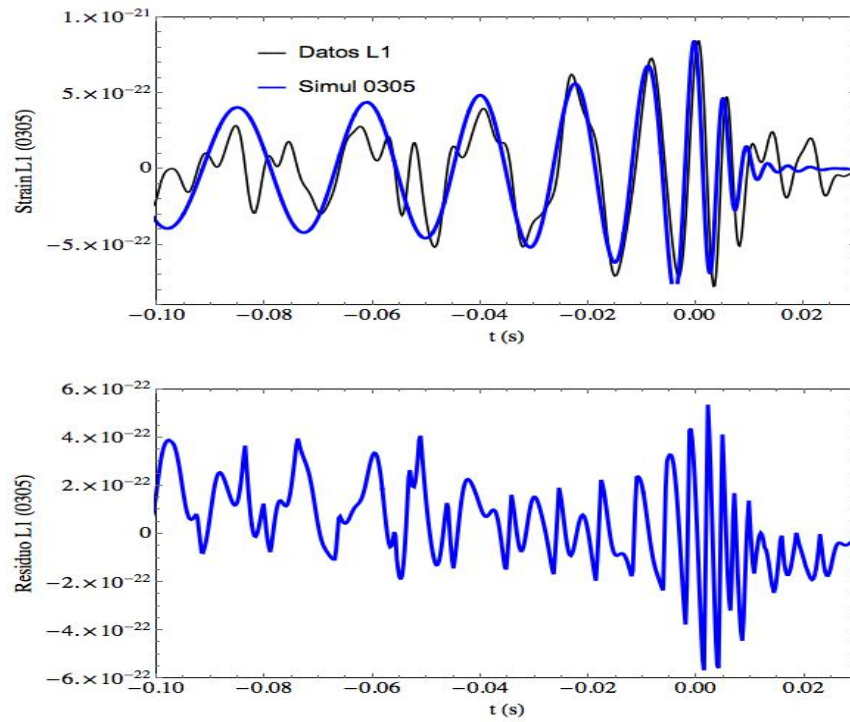
Con la simulación 0324 4.24 ocurre algo similar a la simulación 0322 sólo que su ajuste para L1 está muy desfasado exepcto en la zona del merger donde ajusta un poco menor, mientras que para H1 no ajusta bien esa misma zona. Los altos residuos se traducen en altos valores de χ^2 especialmente para L1 .

Un aspecto importante de resaltar es que, observando los cuadros: 4.11, 4.8 y 4.9; las simulaciones 0305 y 0322 tienen parámetros de simulación y valores de χ^2 muy parecidos siendo de los menores valores para ambos detectores.

A partir de los valores de χ^2 de la tabla 4.11 y de los gráficos de ajustes y residuos, se observa que la simulación 0305 es la más semejante a los datos asignando así sus parámetros a las observaciones, entre los que se encuentran: $m_1 = 36M_\odot$, $m_2 = 29M_\odot$, masa del agujero negro final $m_f = 62M_\odot$, masa chirp $M_c = 28.0956M_\odot$, masa total $M_t = 65M_\odot$ y tasa de masa $q = 0.8189$ con respecto al sistema de referencia de la fuente en la TABLA I; también las magnitudes de los espines que se suelen mostrar en su forma adimensional: $\chi_1 = S_1/m_1^2 = 0.3300$, $\chi_2 = S_2/m_2^2 = 0.4400$ y $\chi_f = S_f/m_f^2 = 0.6919$; por otro lado vemos la excéntrica $e = 8.382 \times 10^{-4}$ y la frecuencia orbital inicial de 0.0169.

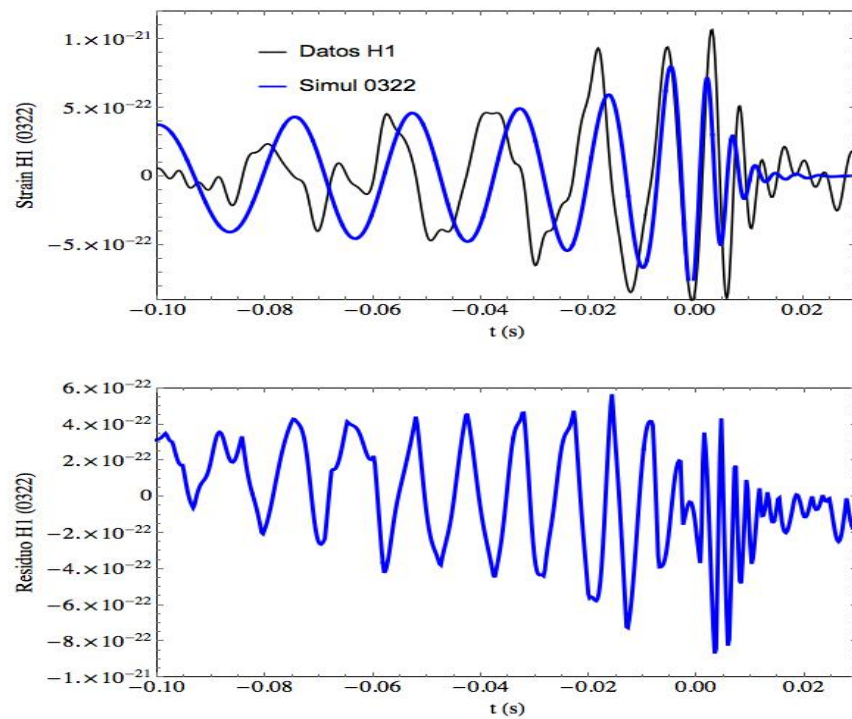


(a) H1

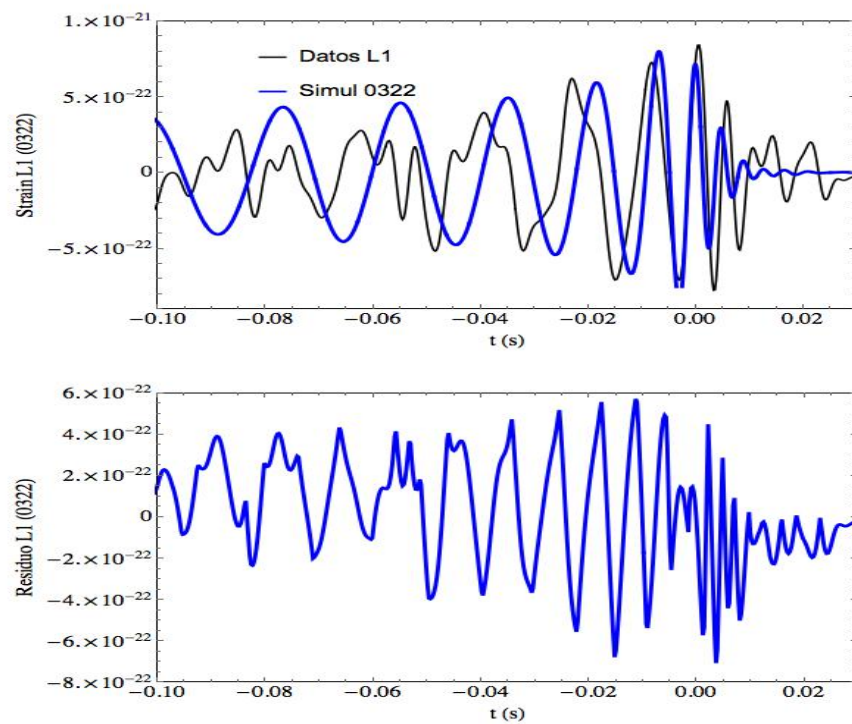


(b) L1

Figura 4.22: Ajuste y residuo para la simulación 0305.

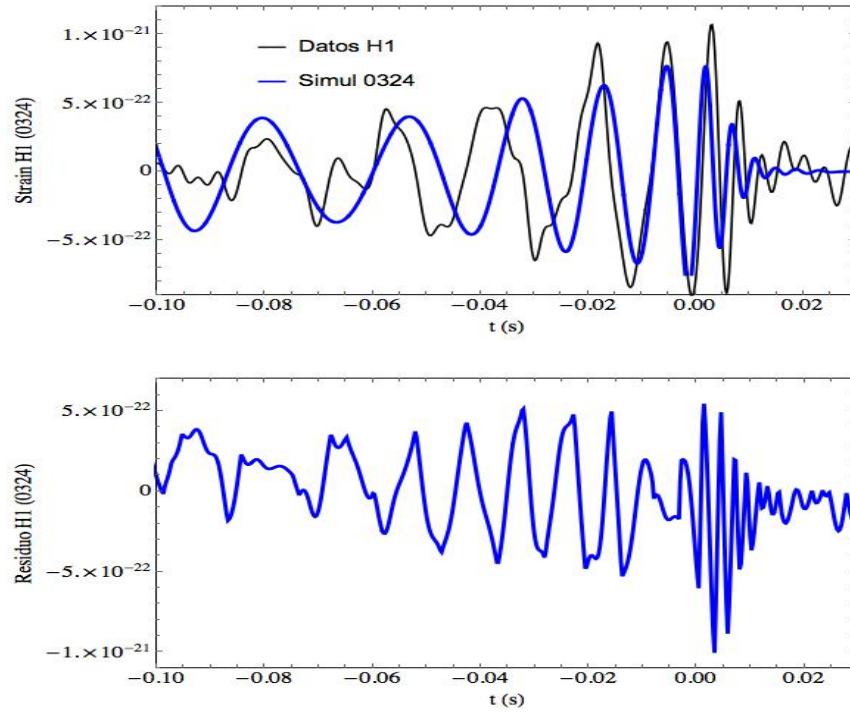


(a) H1

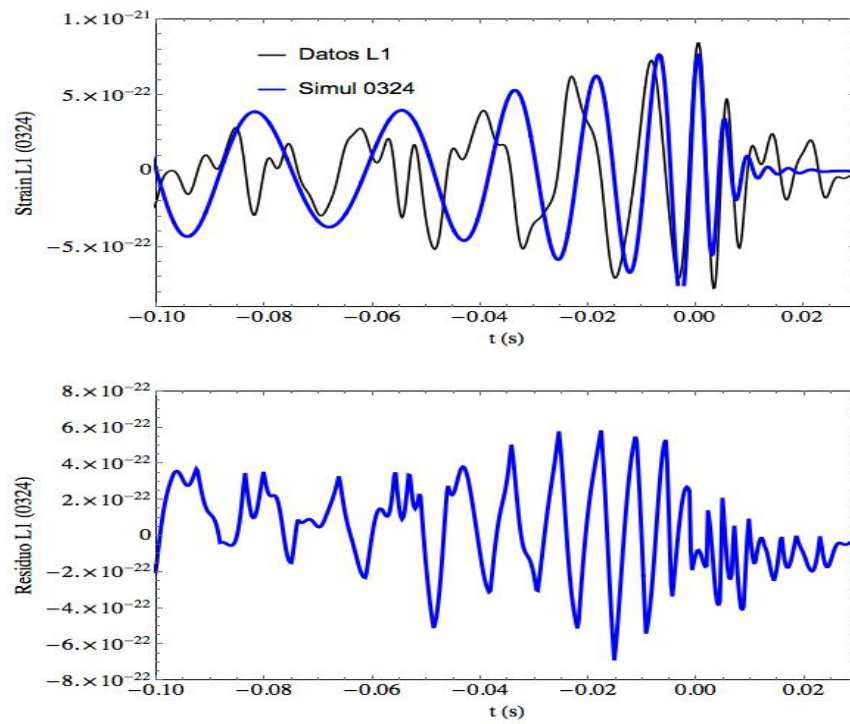


(b) L1

Figura 4.23: Ajuste y residuo para la simulación 0322.



(a) H1



(b) L1

Figura 4.24: Ajuste y residuo para la simulación 0324.

4.2. Conclusiones

Se desarrolló un código que lee los archivos de las simulaciones del SXS Catalog y luego las utiliza para ajustar y obtener los parámetros físicos de los datos observados por LIGO en el evento GW150914.

Las simulaciones almacenadas en el catálogo fueron realizadas con el código SpEC, en el cual se resuelven las ecuaciones de Relatividad General de Einstein utilizando relatividad numérica, es decir, resolviendo directamente las ecuaciones de campo a diferencia de otros métodos como aproximación post-newtoniana (PN) donde se le agregan términos de serie de Taylor al potencial de Newton para reproducir los fenómenos observados.

Para leer los archivos de las 10 simulaciones escogidas se creó un código que extrae la información necesaria acerca de la posición, strain y características físicas de los agujeros negros involucrados; graficando la fase, parte real e imaginaria del campo pseudo escalar Ψ_4 para luego convertirlo en un strain referenciado al sistema de la fuente y posteriormente lograr pasarlo al strain que llegaría a La Tierra para entonces calcular la señal que detectarían los interferómetros de LIGO para cada una de las simulaciones; todo esto con el fin de obtener la forma de onda teórica que puede ser comparada con los datos observados. Así mismo el código desarrollado calcula eficientemente, a partir de la información extraída, la distancia relativa y la velocidad del sistema binario para luego graficar tanto las trayectorias seguidas en 3D como las variaciones de la posición y la velocidad en el tiempo.

Este código también permitió ajustar la amplitud del strain teórico variando la distancia a la que se encontraría de La Tierra la fuente de las simulaciones, con el fin de que la amplitud de las simulaciones estuviera en el mismo rango de la de los datos. De esta forma se obtuvo que la distancia de 410 Mpc fue la óptima para que las graficas de strain teórico y observado pudieran estar juntas y poderse ajustar, resultando en la misma distancia publicada anteriormente por LIGO correspondiente a este sistema binario de agujeros negros [1].

Por otro lado se logró blanquear (whitening) y filtrar la señal observada con el fin de sólo tener los datos alrededor de la frecuencia donde se encuentra la Onda Gravitacional detectada, de esta manera se eliminaba la mayor parte del ruido y las frecuencias no deseadas. Este proceso fue realizado por un código basado en el código open source de LIGO encontrado en su página principal, modicándolo para que calculara e hiciera lo que

se necesitaba en este trabajo.

Para determinar cual simulación obtenía el mejor ajuste se utilizó la prueba de χ^2 (un examen ampliamente usado para obtener la bondad de un ajuste). El código desarrollado calcula muy bien el valor de χ^2 para cada simulación tanto para la señal observada por H1 como para la de L1. Debido a que H1 fue el primero en detectar la señal y L1 es el confirmador de la observación (ya que la detectó después), la simulación escogida fue aquella que dio un valor aceptable de χ^2 para ambos detectores, es decir, el menor o de los menores valores para cada uno por separado; dicha simulación es la **0305**. Este resultado coincide con lo expuesto por LIGO en su publicación acerca de la primera observación de ondas gravitacionales por la fusión de un sistema binario de agujeros negros [1], donde efectivamente se menciona que, de este catalogo, se utilizó como mejor ajuste la simulación 0305.

Una vez obtenida la simulación 0305 como mejor ajuste se han asignado los datos de la metadata (los que se encuentran en el cuadro 4.8) al evento GW150914 y, como se esperaba por lo antes mencionado, esos parámetros coinciden muy bien dentro del margen de error, por los dados por LIGO en la publicación acerca de las parámetros de la fusión binaria de agujeros negros GW150914 específicamente en la TABLA I [2]; por ejemplo se observan coincidencias con las masas: $m_1 = 36M_\odot$, $m_2 = 29M_\odot$, masa del agujero negro final $m_f = 62M_\odot$, masa chirp $M_c = 28.0956M_\odot$, masa total $M_t = 65M_\odot$ y tasa de masa $q = 0.8189$ con respecto al sistema de referencia de la fuente en la TABLA I; también las magnitudes de los espines que se suelen mostrar en su forma adimensional: $\chi_1 = S_1/m_1^2 = 0.3300$, $\chi_2 = S_2/m_2^2 = 0.4400$ y $\chi_f = S_f/m_f^2 = 0.6919$; por otro lado vemos la excéntrica $e = 8.382 \times 10^{-4}$ y la frecuencia orbital inicial igual a 0.0169. De esta manera se comprueba que el código desarrollado es capaz de determinar cual deben ser los parámetros de la fuente de una determinada señal a partir de los modelos teóricos disponibles en el catálogo.

Apéndice A

Obtención detallada de la ecuación de Ondas Gravitacionales a partir de las ecuaciones de Relatividad General

Hemos visto que: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$. Supondremos:

- $h_{\mu\nu}$ junto con su primera derivada $h_{\mu\nu,\rho}$, y derivadas mayores son pequeñas, y todos los productos de estas pueden ser ignorados.
- Los índices son subidos y bajados utilizando $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$, en vez de $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$.
- No se tiene la condición cuasi-estática ($\partial_0 h_{\mu\nu} \ll \partial_i h_{\mu\nu}$).

También tenemos que:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}(h_{\sigma\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\sigma} - h_{\nu\sigma,\beta}) = \frac{1}{2}(h_{\sigma,\nu}^{\mu} + h_{\nu,\sigma}^{\mu} - h_{\nu\sigma}^{\mu}).$$

Usando que: $\eta^{\mu\beta}h_{\nu\sigma,\beta} = h_{\nu\sigma,\beta}^{\mu}$, el tensor de Ricci sería:

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

Luego, simplificando:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha}.$$

Sustituyendo:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{,\mu\nu} - h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu,\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha}), \quad (\text{A.2})$$

donde $h = h^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

El escalar de curvatura sería:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \implies \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{,\mu\nu} - h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\mu\nu,\alpha});$$

$$R = h^\alpha_{,\alpha} - h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}. \quad (\text{A.3})$$

Luego, la forma covariante de las ecuaciones de Einstein es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}.$$

Sustituyendo (A.2) y (A.3) queda:

$$\implies h_{,\mu\nu} - h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \eta_{\mu\nu} h^\alpha_{,\alpha} + \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} = 2k T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Para simplificar hacemos:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{h}^\mu_\mu = h^\mu_\mu - \frac{1}{2} h \eta^\mu_\mu, \text{ usando } \eta^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu = \delta^\mu_\mu = 4 \text{ luego } \implies \bar{h} = -h.$$

Entonces nos queda:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{h} \eta_{\mu\nu}.$$

Luego de sustituir en (A.5) y hacer las derivadas nos queda:

$$\bar{h}^\alpha_{\mu\nu,\alpha} + (\eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \bar{h}^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - \bar{h}^\alpha_{\mu,\nu\alpha}) = 2k T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Definamos una transformación de calibre como:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha), \quad (\text{A.7})$$

donde ξ^μ es tan pequeño como $h_{\mu\nu}$.

El elemento de matriz sería:

$$X^{\mu'}_\nu = \delta^\mu_\nu + \xi^\mu_{,\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Luego calculamos:

$$g^{\mu'\nu'} = \eta^{\mu'\nu'} - h^{\mu'\nu'} = X^{\mu'}_\alpha X^{\nu'}_\beta g^{\alpha\beta}.$$

Sustituyendo $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$ y simplificando llegamos a:

$$h^{\mu'\nu'} = h^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Se calcula ahora: $h' = \eta_{\mu\nu} h^{\mu'\nu'}$, quedando:

$$h' = h - 2\xi_{,\mu}^{\mu}, \quad (\text{A.10})$$

ahora utilizando la ecuación (A.5), se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu'\nu'} &\equiv h^{\mu'\nu'} - \frac{1}{2}h' \eta^{\mu\nu}, \\ \implies \bar{h}^{\mu'\nu'} &= \bar{h}^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu} \xi_{,\alpha}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Ahora calculemos la inversa de $X_{\mu}^{\rho'}$: $X_{\mu}^{\rho'} X_{\nu'}^{\mu} = \delta_{\nu'}^{\rho}$,

$$X_{\nu'}^{\mu} = \delta_{\nu'}^{\mu} - \xi_{,\nu'}^{\mu}.$$

Ahora se puede escribir: $\bar{h}_{,\beta}^{\mu'\alpha'} X_{\alpha'}^{\beta} = \bar{h}_{,\alpha}^{\mu'\alpha'}$.

Utilizando la ecuación (A.11) queda:

$$\bar{h}_{,\alpha'}^{\mu'\alpha'} = \bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} - \xi_{\alpha}^{\mu,\alpha}. \quad (\text{A.12})$$

Se puede escoger ξ^{μ} convenientemente para que sea solución de (12):

$$\xi_{,\alpha}^{\mu\alpha} = \bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha}. \quad (\text{A.13})$$

En este sistema cada término dentro del paréntesis en (6) es cero por separado, quedando:

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} = 2kT_{\mu\nu}, \quad (\text{A.14})$$

(A.14) es válida mientras que $\bar{h}^{\mu\nu}$ cumpla con la condición de calibre,

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0. \quad (\text{A.15})$$

• Parecido al *calibre de Lorentz*: $A_{,\mu}^{\mu} = 0$, $A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} - \psi_{,\mu}$ si y sólo si $\psi_{,\mu}^{\mu} = 0$, donde $\bar{h}^{\mu\nu}$ corresponde a A^{μ}

• Vemos que se preservará la condición de calibre si:

$$\xi_{,\alpha}^{\mu\alpha} = 0.$$

Se introduce el d'Alembertiano $\square^2$ definido por:

$$\square^2 \equiv -\eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta}, \quad (\text{A.16})$$

el cual se conoce como:

$$\nabla^2 - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Por lo cual se puede escribir la ecuación (14) como:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -2kT^{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

¡Es una ecuación de onda!

Siempre que se cumpla la condición de calibre: $\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$.

La libertad de calibre

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu,$$

conserva la condición de calibre mientras que ξ^μ satisfaga:

$$\square^2 \xi^\mu = 0. \quad (\text{A.18})$$

Se tiene, entonces, una *ecuación de ondas* con fuente:

$$-2kT^{\mu\nu} \equiv \frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

y en el espacio vacío:

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Bibliografía

- [1] B. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phy. Rev. Lett.*, *116:061102*, 2016.
 - [2] P.B Abbott et al. Properties of the binary black holes merger gw150914. *Phy. Rev. Lett.*, *116:241102*, 2016.
 - [3] J. Foster and J.D. Nightingale. A short course in general relativity. *Longman 1 era edición*, New York. 1979.
 - [4] https://en.wikipedia.org/wiki/binary_black_hole, 2017.
 - [5] R.A. Hulse. Nobel lecture: The discovery of the binary pulsar. *Rev. Mod. Phy.*, *66*, 1994.
 - [6] J.H. Taylor. Nobel lecture: Binary pulsars and relativistic gravity. *Rev. Mod. Phy.*, *66*, 1994.
 - [7] W. Clifford. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, *9*, 2006.
 - [8] Harald P. Pfeiffer Patricia Schmidt, Ian W. Harry. Numerical relativity injection infrastructure. *LIGO-T1500606-v2*, 2016.
 - [9] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.* *108*, *1063*, 1957.
 - [10] F. J. Zerilli. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.* *24*, *737*, 1970.
 - [11] Bishop N T and Rezzolla L. Extraction of gravitational waves in numerical relativity. *Living Reviews of Relativity*, 2016.
-

- [12] Francesco Maione. *Gravitational-wave signal from binary neutron star merger simulations with different equation of state and mass ratio*. PhD thesis, UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA, Dottorato di ricerca in Fisica, 2017.
 - [13] <https://www.black-holes.org/spec.html>, 2017.
 - [14] Bernd Bruegmann Miguel Alcubierre. Simple excision of a black hole in 3+1 numerical relativity. *Phys.Rev.D63:104006*, 2001.
 - [15] Wai-Mo Suen Edward Seidel. Towards a singularity-proof scheme in numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.* 69, 1845, 1992.
 - [16] Joan Massó Edward Seidel Wai-Mo Suen Peter Anninos, Greg Daues. Horizon boundary condition for black hole spacetimes. *Phys. Rev. D* 51, 5562, 1995.
 - [17] Béla Szilágyi. Key elements of robustness in binary black hole evolutions using spectral methods. *International Journal of Modern Physics D, Vol. 23, No. 6*, 2014.
 - [18] <https://www.black-holes.org/wavefomrs/catalog.php>, 2017.
 - [19] <https://einstein toolkit.org/gallery/bbh/index.html>, 2018.
 - [20] https://losc.ligo.org/s/events/gw150914/losc_event_tutorial_gw150914.html, 2018.
 - [21] <https://www.python.org/>, 2018.
 - [22] John R. Taylor. An introduction to error analysis. *University Science Books, second edition*, Sausalito, California. 1997.
 - [23] Bruce Allen. A chi-squared time-frequency discriminator for gravitational wave detection. *Phys.Rev.D71:062001*, 2005.
 - [24] https://en.wikipedia.org/wiki/geometrized_unit_system, 2018.
 - [25] Alan L. Myers. Natural system of units in general relativity. *Notes of University of Pennsylvania*, 2014.
 - [26] Pollney Reisswig. Notes on the integration of numerical relativity waveforms. *Class. Quant. Grav.* 28, 195015, 2011.
-