UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

El Principio de Selección de Helly para Varias Clases de Funciones de Variación Acotada.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Andreina del Rocío Corado Venero** para optar al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
Febrero, 2018

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**El Principio de Selección de Helly para Varias Clases de Funciones de Variación Acotada**", presentado por la **Br. Andreina Del Rocío Corado Venero**, titular de la Cédula de Identidad **18.021.182**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática.**

Dr. Nelson Merentes

Tutor

Dr. Sergio Rivas

Jurado

Dra. Maira Valera

Jurado

A mí adorada madre Marlene, mi papá Víctor,
mi querido hermano Víctor Andrés y tía María
con todo mi Amor.

Agradecimiento

Primeramente a la energía creadora y sostenedora de todo este universo “I AM” es decir DIOS; por darme la fuerza, inteligencia, constancia y salud para seguir siempre adelante.

A mi mamá Marlene Venero por tu Amor, dedicación, esfuerzo y representar un motor de impulso en mi vida; a mi papá Víctor, a mi hermano Víctor Andrés y tía María por estar allí siempre al pendiente amándome, apoyándome y aportando siempre una actitud positiva.

Agradezco a mi tutor Dr. Nelson Merentes, por todo su apoyo, amistad, colaboración y asesoría para la elaboración de este trabajo.

Al profesor José Luis Sánchez y Odalis Mejia quienes estuvieron dispuestos a prestarme colaboración, referencias bibliográficas, observaciones y recomendaciones realizadas a este trabajo; así como dedicar parte de su tiempo a la revisión del mismo.

A los profesores que contribuyeron a mi formación académica Drs. Angel Padilla, Cristina Balderrama, José Benito Hernández, Elio Méndez y Maira Valera.

A mis amigos Frank R. Prieto Medina, María Sanoja, Francy Armao, Amarilis Parica, Ronaldys Rosario, Lysis Gonzáles, Mariangel Santamaría, por estar siempre de una u otra forma en mi mundo y nutrirlo con su valiosa amistad y apoyo día a día gracias.

A todo el personal del Banco Central de Venezuela por la disposición y la valiosa colaboración para lograr culminar este Trabajo Especial de Grado.

Índice general

RESUMEN

En este trabajo se estudia el Principio de Selección de Helly para Varias Clases de Funciones de Variación Acotada se describe el espacio de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ cuyo concepto fue introducido en el año 1881 por Camile Jordan. Se muestran propiedades más relevantes que satisfacen las funciones de variación acotada así como la estructura de espacio vectorial, espacio normado y espacio de Banach que posee este conjunto de funciones. En el Principio de Selección de Helly para Funciones de $p-$Variación Acotada es demostrado para $p = 1,\ p > 1$ mostramos y demostramos unas propiedades estructurales que satisfacen las funciones de $p-$variación acotada.

Seguidamente desarrollamos la teoría general de funciones de $\Phi-$variación acotada en el sentido L.C Young definidas sobre un subconjunto de la recta real y toma valores en un espacio métrico normado enunciamos y demostramos los teoremas estructurales que caracterizan esta clase de funciones. Luego el teorema clásico del Principio de Selección de Helly de la teoría de funciones de variación acotada es generalizado para las funciones de $\Phi-$variación acotada. Finalizamos presentando tres aplicaciones del Principio de Selección de Helly en estudio de tópicos relacionados con la ingeniería.

Palabras Claves: Principio de selección de Helly, funciones de variación acotada,

principio de selección de Helly para funciones de $p-$variación acotada, principio de selección de Helly para $\Phi-$variación acotada, espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de trabajo de grado de Licenciatura en Matemática está enmarcado en una de las líneas de investigación perteneciente al Grupo de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, como es el de estudiar el *Principio de Selección de Helly* para funciones de p-variación acotada.

Según Boris Golubov, el concepto de funciones de variación acotada fue introducido por primera vez en 1881 por el matemático francés Camille Jordan (1838-1922) en el artículo [14, Jordan], donde se estudia la convergencia de series de Fourier. En este artículo, C. Jordan caracterizó las funciones de variación acotada como diferencia de dos funciones no decrecientes. Esta clase de funciones juega un papel muy importante en la Teoría de Series de Fourier en varias variables, Teoría de Medida, Cálculo de Variaciones y Física Matemática. Para mencionar algunos trabajos en estos campos, Renato Caccioppoli (1904-1959) y Ennio de Giorgi (1928-1996) en [10], matemáticos italianos, usaron las funciones de variación acotada para definir una medida sobre las frontera no suaves de ciertos conjuntos. Olga Arsenievna Oleinik (1925-2001), matemática rusa, introduce su versión de soluciones generalizadas para ecuaciones en derivadas parciales no lineales como funciones de variación acotada en el artículo [22, Oleinik] y fue capaz de construir una solución generalizada de variación acotada de una ecuación en derivadas parciales de primer orden en el artículo [23, Oleinik]. Edward P Conway (1937-1985) y Joel A. Smoller (1935-), matemáticos estadounidenses, aplicaron las funciones de variación acotada al estudio de ecuaciones de primer orden de tipo hiperbólico en el artículo [9, Conway-Smoller] demostrando que la solución del problema de Cauchy para tales ecuaciones es una función de variación acotada siempre que el valor inicial pertenezca a esta misma clase de funciones.

En el año 1910 el matemático húngaro Frigyes Riesz [25, Riesz] generalizó la noción de variación acotada considerada por Jordan introduciendo el concepto de función de p-variación acotada ($1 < p < \infty$) demostrando que, para $1 < p < \infty$, esta clase coincide con la clase de funciones absolutamente continuas con derivada perteneciente al espacio L_p. Por otra parte, Norbert Wiener [26, Wiener] en 1924 presenta la noción de p-variación acotada en el sentido de Wiener.

En 1912, Eduard Helly (1884-1943), matemático Austríaco, usó la caracterización de las funciones de variación acotada dada por C. Jordan en 1881 para demostrar un teorema de compacidad para funciones de variación acotada el cual sería conocido como el *Principio de Selección de Helly*. El principio de selección de Helly establece que una sucesión de funciones de variación acotada con variación acotada uniforme tiene una subsucesión convergente punto a punto a una función de variación acotada. Esto es, dada una sucesión de funciones de p-variación acotada uniforme $\mathcal{F}$ de $E \subset \mathbb{R}$ a un espacio métrico X, entonces existe una subsucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ que converge punto a punto sobre E a una función de p-variación acotada $f : E \to X$ con

$$V_p(f, E) \leq \sup_{g \in \mathcal{F}} V_p(g, E).$$

El interés en el principio de selección de Helly es natural ya que es una manera efectiva de demostrar teoremas de existencia en análisis. Por dar algún ejemplo, en el artículo [16, Maeve McCarthy] utiliza el principio de selección de Helly para establecer la existencia de un diseño óptimo para una estructura tubular.

Este trabajo consta de cuatro capítulos:

- En el Capítulo 1 se describe el espacio de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ cuyo concepto fue introducido en el año 1881 por Camile Jordan en su artículo [14]. Se muestran algunas propiedades más relevantes que satisfacen las funciones de variación acotada así como también la estructura de espacio vectorial, espacio normado y espacio de Banach que posee este conjunto de funciones. Además, se dan dos caracterizaciones de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, una de ella es la dada por Jordan en el año 1881 la cual establece que las funciones de variación acotada son aquellas funciones que se pueden escribir como diferencia de funciones monótonas; mientras que la otra caracterización dada por Federer en 1969 establece que las funciones de variación acotada son aquellas funciones que se pueden representar como una composición de una función monótona con una función Lipschitz. Finalmente, presentamos el Principio de Selección de Helly para funciones de variación acotada.

- En el Capítulo 2 se estudia el Principio de Selección de Helly para funciones de p-variación acotada. Empezamos recolectando resultados del artículo [3] donde este principio es demostrado para el caso $p = 1$. Seguidamente, para $p > 1$, mostramos y demostramos algunas propiedades y resultados estructurales que satisfacen las funciones de p-variación acotada. Finalmente, enunciamos y probamos el principio de selección para el caso $p > 1$. Los resultados de este último caso pueden ser encontrados con más detalles en [8].

- En el Capítulo 3 se desarrolla la teoría general de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de L. C. Young definidas sobre un subconjunto de la recta real y toma valores en un espacio métrico o normado. Primeramente, enunciamos y demostramos los teoremas estructurales y las propiedades que caracterizan esta clase de funciones. Luego, el teorema clásico del Principio de Selección de Helly de la teoría de funciones de variación acotada es generalizado para las funciones de Φ-variación acotada.

- En el capítulo 4 se presenta algunas aplicaciones del Principio de Selección de Helly en estudio de tópicos relacionado con la ingeniería.

Capítulo 1

El Principio de Selección de Helly para Funciones de Variación Acotada

En este primer capítulo se describe el espacio de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ cuyo concepto fue introducido en el año 1881 por Camile Jordan en su artículo [14].

En este capítulo, se muestran algunas propiedades más relevantes que satisfacen las funciones de variación acotada así como también la estructura de espacio vectorial, espacio normado y espacio de Banach que posee este conjunto de funciones.

Además, se dan dos caracterizaciones de las funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, una de ella es la dada por Jordan en el año 1881 la cual establece que las funciones de variación acotada son aquellas funciones que se pueden escribir como diferencia de funciones monótonas; mientras que la otra caracterización dada por Federer en 1969 establece que las funciones de variación acotada son aquellas funciones que se pueden representar como una composición de una función monótona con una función Lipschitz. Finalmente, presentamos el Principio de Selección de Helly para funciones de variación acotada.

Algunos resultados presentes aquí pueden ser encontrados con más detalles en [1] y [21].

1.1 Funciones de Variación Acotada

Definición 1.1. *Denotamos por*

$$\mathcal{J}([a,b]) := \{T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b] \ : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ t_0 = a,\ t_n = b,\ t_{i-1} < t_i,\ i = 1, ..., n\},$$

al conjunto de todas las particiones ordenadas y finitas del intervalo $[a,b]$.

Dada una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a,b])$, fijamos

$$V[u,T] := \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|.$$

Definición 1.2 (Variación acotada). *Sea* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función. Definimos* la variación total de u sobre $[a,b]$ *como*

$$V(u,[a,b]) := \sup_{T \in \mathcal{J}([a,b])} V[u,T].$$

Si $V(u,[a,b]) < \infty$*, decimos que la función* u *es de variación acotada o finita en el intervalo* $[a,b]$*. Denotaremos a la clase de funciones de variación acotada en el intervalo* $[a,b]$ *por* $BV[a,b]$.

Observación 1. *Por definición, si* $u \in BV[a,b]$ *entonces* $V(u,[a,b]) \geq 0$.

A continuación se presentará algunos ejemplos que ilustran la definición de $BV[a,b]$.

Ejemplo 1.1. *Consideremos* $c \in \mathbb{R}$ *y la función constante* u*, definida por*

$$u(t) = c, \quad \textit{para todo } t \in [a,b].$$

Así, dada la partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a,b])$*, obtenemos que*

$$\begin{aligned} V[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |c - c| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego $V[u,T] = 0$ *para todo* $T \in \mathcal{J}([a,b])$ *y por tanto* $V(u,[a,b]) = 0$.

Observación 2. *Las únicas funciones con variación total cero sobre $[a, b]$ son las funciones constante definida en $[a, b]$. En efecto, supongamos que $V(u, [a, b]) = 0$. Entonces para cualesquiera $t, s \in [a, b]$ se tiene que*

$$|u(t) - u(s)| \leq V(u, [a, b]) = 0.$$

Luego $u(t) = u(s)$, para todo $t, s \in [a, b]$. Por tanto u es constante en $[a, b]$.

Ejemplo 1.2. *Consideremos $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, la función identidad, es decir,*

$$u(t) = t, \quad t \in [a, b].$$

Entonces, dada la partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a, b])$, tenemos que

$$\begin{aligned} V[u, T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Luego $V[u, T] = b - a$ para todo $T \in \mathcal{J}([a, b])$ y por tanto $V(u, [a, b]) = b - a$.

1.2 Propiedades de las Funciones de Variación Acotada

En esta sección enunciaremos y probaremos las propiedades más relevantes que satisfacen las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$. Estas propiedades permitirán darle una estructura de espacio normado a $BV[a, b]$ así como también mostrar la no compatibilidad respecto a la inclusión entre el espacio de las funciones continuas, el cual denotaremos por $C[a, b]$, y el espacio $BV[a, b]$.

El siguiente resultado muestra que toda función de variación acotada es una función acotada.

Proposición 1.1. *Si $u \in BV[a,b]$ entonces u es una función acotada.*

Demostración: Sea $t \in [a,b]$. Consideremos la partición $T = \{t_0 = a, t_1 = t, t_2 = b\}$ de $[a,b]$. Entonces

$$|u(t)| - |u(a)| \leq |u(t) - u(a)| \leq |u(t) - u(a)| + |u(b) - u(t)| = V[u,T] \leq V(u,[a,b]).$$

Luego

$$|u(t)| \leq V(u,[a,b]) + |u(a)|, \;\; t \in [a,b].$$

Note que el lado derecho de la desigualdad anterior es finito ya que $u \in BV[a,b]$. Por tanto la función u es acotada.

□

El recíproco de la proposición anterior es falso. En efecto, consideramos la función

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & \text{si } t \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [a,b]. \end{cases}$$

Si tomamos la partición $T = \{t_0, ..., t_{2n}\}$ del intervalo $[a,b]$ de tal manera que

$$\begin{cases} t_i \in \mathbb{Q} & \text{si } i \equiv 0 \; (mod\; 2) \\ t_i \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} & \text{si } i \equiv 1 \; (mod\; 2), \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} V[u,T] &= \sum_{i=1}^{2n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= |u(t_1) - u(t_0)| + |u(t_2) - u(t_1)| + \cdots + |u(t_{2n-1}) - u(t_{2n-2})| + |u(t_{2n}) - u(t_{2n-1})| \\ &= \underbrace{|0-1| + |1-0| + \cdots + |0-1| + |1-0|}_{2n-veces} \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$V(u, [a, b]) \geq 2n.$$

Por tanto, tomando $n \to \infty$, $V(u, [a, b]) = \infty$.

Observación 3. *Note que, si $u \in BV[a, b]$ entonces, por la Proposición 1.1,*

$$|u(t)| \leq V(u, [a, b]) + |u(a)|, \quad t \in [a, b].$$

Seguidamente, si tomamos supremo obtenemos

$$\sup_{t \in [a,b]} |u(t)| \leq V(u, [a, b]) + |u(a)|.$$

Es decir

$$\|u\|_\infty \leq V(u, [a, b]) + |u(a)|.$$

Proposición 1.2. *Si $u \in BV[a, b]$ entonces*

$$|u(b) - u(a)| \leq V(u, [a, b]).$$

Demostración: Consideremos la partición $\{t_0 = a, t_1 = b\}$ del intervalo $[a, b]$. Entonces,

$$|u(b) - u(a)| = |u(t_1) - u(t_0)| = V[u, T] \leq V(u, [a, b]).$$

□

A continuación, mostramos que la desigualdad de la Proposición 1.2 se vuelve una igualdad si la función u es monótona sobre $[a, b]$.

Proposición 1.3. *Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona en el intervalo $[a, b]$ entonces $u \in BV[a, b]$. Más aún,*

$$V(u, [a, b]) = |u(b) - u(a)|.$$

Demostración: Sea $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}([a,b])$ una partición del intervalo $[a,b]$.

Supongamos primero que u es no decreciente en el intervalo $[a,b]$. Entonces

$$V[u,T] = \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} u(t_i) - u(t_{i-1}) = u(b) - u(a).$$

Luego, tomando supremo sobre todas las particiones del intervalo $[a,b]$ tenemos que

$$\sup_{T \in \mathcal{J}([a,b])} V(u,T) = u(b) - u(a),$$

es decir,

$$V(u,[a,b]) = u(b) - u(a).$$

Ahora supongamos que u es una función no creciente en el intervalo $[a,b]$. De manera análoga se tiene que

$$V[u,T] = \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} u(t_{i-1}) - u(t_i) = u(a) - u(b).$$

Seguidamente, tomando supremo sobre todas particiones del intervalo $[a,b]$ resulta que

$$\sup_{T \in \mathcal{J}([a,b])} V(u,T) = u(a) - u(b).$$

Esto es,

$$V(u,[a,b]) = u(a) - u(b).$$

En conclusión, si u es una función monótona sobre el intervalo $[a,b]$, entonces $V(u,[a,b]) = |u(b) - u(a)| < \infty$ y por consiguiente $u \in BV[a,b]$.

$\square$

Los siguientes dos resultados muestran que es suficiente verificar que una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en subintervalos cuya unión sea $[a,b]$ para determinar que dicha función es de variación acotada en el intervalo $[a,b]$.

Proposición 1.4. *Si $u \in BV[a,b]$ entonces $u \in BV[c,d]$ para todo intervalo $[c,d] \subset [a,b]$.*

Demostración: Supongamos que $u \in BV[a,b]$ y sean $c,d \in \mathbb{R}$ tales que $[c,d] \subset [a,b]$. Consideremos una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}([c,d])$ del intervalo $[c,d]$. Entonces

$$\begin{aligned}
V[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\
&\leq |u(c) - u(a)| + \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| + |u(b) - u(d)| \\
&= V\left[u, \widetilde{T}\right] \\
&\leq V(u, [a,b]).
\end{aligned}$$

Aquí, $\widetilde{T} = \left\{\widetilde{t_i}\right\}_{i=0}^{n+2} \in \mathcal{J}([a,b])$ es una partición del intervalo $[a,b]$ con $\widetilde{t_0} = a$, $\widetilde{t}_{n+2} = b$ y $\widetilde{t_i} = t_{i-1}$ para $i = 1, ..., n+1$. Ahora bien, hemos obtenido que para todo $T \in \mathcal{J}([c,d])$

$$V[u,T] \leq V(u,[a,b]).$$

Por consiguiente,

$$V(u,[c,d]) \leq V(u,[a,b]).$$

Como $u \in BV[a,b]$, el lado derecho de la desigualdad anterior es finita por lo que $V(u,[c,d])$ es finita. Así $u \in BV[c,d]$.

□

Proposición 1.5. *Si existe $s \in [a,b]$ tal que $u \in BV[a,s]$ y $u \in BV[s,b]$ entonces $u \in BV[a,b]$. Más aún,*

$$V(u,[a,b]) = V(u,[a,s]) + V(u,[s,b]).$$

Demostración: Sea $s \in (a,b)$ tal que $u \in BV[a,s]$ y $u \in BV[s,b]$. Consideremos la partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}([a,b])$ del intervalo $[a,b]$. Entonces existe un j, $1 \leq j \leq n$, tal que $t_{j-1} < s \leq t_j$.

Luego

$$
\begin{aligned}
V[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} |u(t_i)-u(t_{i-1})| + |u(t_j)-u(t_{j-1})| + \sum_{i=j+1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} |u(t_i)-u(t_{i-1})| + |u(t_j)-u(s)+u(s)-u(t_{j-1})| + \sum_{i=j+1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{j-1} |u(t_i)-u(t_{i-1})| + |u(s)-u(t_{j-1})| + |u(t_j)-u(s)| + \sum_{i=j+1}^{n} |u(t_i)-u(t_{i-1})| \\
&= V[u,T_1]+V[u,T_2] \\
&\leq V(u,[a,s])+V(u,[s,b]).
\end{aligned}
$$

Aquí $T_1 = \left\{t_i^1\right\}_{i=0}^{j} \in \mathcal{J}([a,s])$ y $T_2 = \left\{t_i^2\right\}_{i=0}^{n-j+1} \in \mathcal{J}([s,b])$ son particiones de los intervalos $[a,s]$ y $[s,b]$ respectivamente con

$$
\begin{cases}
t_0^1 = a, \quad t_j^1 = s, \qquad t_i^1 = t_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j-1, \\
t_0^2 = s, \quad t_{n-j+1}^2 = b, \quad t_i^2 = t_{j+i-1}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-j.
\end{cases}
$$

Ahora bien, hemos obtenido que para todo $T \in \mathcal{J}([a,b])$ se cumple que

$$V[u,T] \leq V(u,[a,s])+V(u,[s,b]),$$

por tanto, tomando supremo en la desigualdad anterior se tiene que

$$V(u,[a,b]) \leq V(u,[a,s])+V(u,[s,b]).$$

Como $u \in BV[a,s]$ y $u \in BV[s,b]$ se tiene que $V(u,[a,b])$ es finito y por consiguiente $u \in BV[a,b]$.

Para terminar la demostración, hace falta verificar que

$$V(u,[a,b]) \geq V(u,[a,s])+V(u,[s,b]).$$

En efecto, como $V(u,[a,s]) < \infty$ y $V(u,[s,b]) < \infty$ tenemos que, por la caracterización del supremo, dado $\epsilon > 0$ existen particiones $T_1 = \left\{t_i^1\right\}_{i=0}^{j} \in \mathcal{J}([a,s])$ y $T_2 = \left\{t_i^2\right\}_{i=0}^{n-j+1} \in \mathcal{J}([s,b])$ de los intervalos $[a,s]$ y $[s,b]$ respectivamente tales que

$$\begin{cases} V(u,[a,s]) - \frac{\epsilon}{2} < V[u,T_1] \\ V(u,[s,b]) - \frac{\epsilon}{2} < V[u,T_2]. \end{cases}$$

Sumando las desigualdades miembro a miembro obtenemos

$$V(u,[a,s]) + V(u,[s,b]) - \epsilon < V[u,T_1] + V[u,T_2] = V[u,T] \leq V(u,[a,b]),$$

donde $T = \{t_i\}_{i=0}^{2n}$ es una partición de $[a,b]$ con $t_i = t_i^1$ y $t_{n+i+1} = t_{i+1}^2$ para $0 \leq i \leq n$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$V(u,[a,s]) + V(u,[s,b]) - \epsilon \leq V(u,[a,b]),$$

y así resulta que

$$V(u,[a,s]) + V(u,[s,b]) \leq V(u,[a,b]).$$

De esta manera hemos obtenido que

$$V(u,[a,b]) = V(u,[a,s]) + V(u,[s,b]).$$

□

Observación 4. *El resultado de la Proposición 1.5 puede generalizarse de la siguiente forma: Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Entonces $u \in BV[a,b]$ si y sólo si, existen $s_i \in (a,b)$, con $s_i < s_{i+1}$, para $i = 1,\ldots,n-1$, tales que $u \in BV[a,s_1]$, $u \in BV[s_1,s_2],\ldots,u \in BV[s_n,b]$. Además, en este caso, se tiene que*

$$V(u,[a,b]) = \sum_{i=1}^{n+1} V(u,[s_{i-1},s_i]),$$

considerando $s_0 = a$ y $s_{n+1} = b$.

A continuación, mostraremos que el espacio de las funciones continuas definidas en $[a, b]$, $C[a, b]$ y el espacio de funciones de variación acotada sobre $[a, b]$, $BV[a, b]$, no son comparables respecto a la inclusión. Primero, veremos que

$$C[a, b] \nsubseteq BV[a, b].$$

Ejemplo 1.3. *Consideremos la función* $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(t) = \begin{cases} t\,cos\left(\dfrac{\pi}{2t}\right) & si\ 0 < t \leq 1 \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

La Figura 1.1 muestra el gráfico de la función $u(t)$*.*

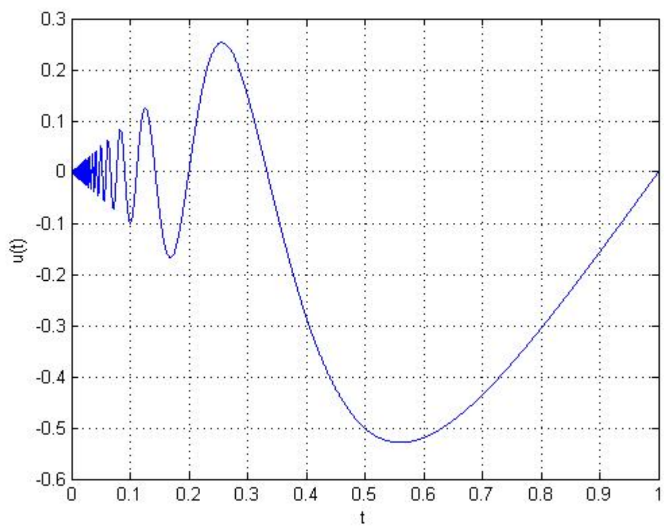

Figura 1.1: Gráfico de la función $u(t)$ definida en el Ejemplo 1.3.

Ahora bien, si tomamos la siguiente partición del intervalo $[0, 1]$,

$$T = \left\{t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{2n} < t_2 = \frac{1}{2n-1} < \cdots < t_{2n-2} = \frac{1}{3} < t_{2n-1} = \frac{1}{2} < t_{2n} = 1\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
V[u,T] &= \sum_{i=1}^{2n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\
&= \left|u\left(\frac{1}{2n}\right) - u(0)\right| + \left|u\left(\frac{1}{2n-1}\right) - u\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \cdots + \left|u\left(\frac{1}{2}\right) - u\left(\frac{1}{3}\right)\right| + \left|u\,(1) - u\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$V(u,[0,1]) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Note que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es una serie divergente, por lo que la sucesión $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge. Así, tomando $n \to \infty$, obtenemos que $V(u,[0,1]) = \infty$ y por tanto u no es de variación acotada.

Ahora, veremos que

$$BV[a,b] \nsubseteq C[a,b].$$

Ejemplo 1.4. *Consideremos la función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t \leq 1 \\ 0 & si\ t = 0, \end{cases}$$

la cual, claramente, no es continua en $[0,1]$. Como u es una función monótona, por la Proposición 1.3, tenemos que u es de variación acotada. Más aún,

$$V(u,[0,1]) = |u(1) - u(0)| = 1.$$

1.3 El Espacio de Banach $BV[a,b]$

El objetivo principal de esta sección es probar que el espacio de las funciones de variación acotada $BV[a,b]$ es un espacio de Banach. Para este fin, primero probaremos que $BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones suma y producto por un escalar usuales de funciones. Luego definiremos una norma sobre $BV[a,b]$, dándole a este espacio una estructura de espacio normado y finalmente demostraremos que $BV[a,b]$ es un espacio de Banach.

Los resultados aquí presentes puede ser encontrados con más detalle en [2].

Teorema 1.6. *El espacio $BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración: Para demostrar este teorema, basta con verificar que las operaciones son cerradas. Es decir, debemos probar que la suma de dos funciones de variación acotada vuelve a ser una función de variación acotada y que una función de variación acotada multiplicada por un escalar es una función de variación acotada.

Paso 1: Cerradura para la suma. Sean $u, v \in BV[a,b]$ y consideremos la partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a,b])$ del intervalo $[a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
V[u+v,T] &= \sum_{i=1}^{n} |(u+v)(t_i) - (u+v)(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) + v(t_i) - (u(t_{i-1}) + v(t_{i-1}))\,| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) + v(t_i) - u(t_{i-1}) - v(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| + |v(t_i) - v(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |v(t_i) - v(t_{i-1})| \\
&= V[u,T] + V[v,T] \\
&\leq V(u,[a,b]) + V(v,[a,b]).
\end{aligned}$$

El cálculo anterior vale para cualquier partición $T \in \mathcal{J}([a,b])$ y por lo tanto

$$V(u+v,[a,b]) \leq V(u,[a,b]) + V(v,[a,b]).$$

Como el lado derecho de la desigualdad anterior es finito, ya que $u, v \in BV[a,b]$, obtenemos que $V(u+v,[a,b]) < \infty$. Así $u+v \in BV[a,b]$.

Paso 2: Cerradura para el producto por un escalar. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in BV[a,b]$. Dada cualquier partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a,b])$ del intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned} V[\alpha\, u, T] &= \sum_{i=1}^{n} |(\alpha\, u)(t_i) - (\alpha\, u)(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha\,(u(t_i)) - \alpha\,(u(t_{i-1}))\,| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha\,(u(t_i) - u(t_{i-1}))\,| \\ &= |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= |\alpha|\; V[u,T]. \end{aligned}$$

Seguidamente, si tomamos supremo sobre todas las particiones de [a,b] obtenemos

$$V(\alpha\, u,[a,b]) = |\alpha|\; V(u,[a,b]).$$

Como $u \in BV[a,b]$, el lado derecho de la igualdad anterior es finito y por tanto $V(\alpha\, u,[a,b]) < \infty$. Así $\alpha\, u \in BV[a,b]$.

De esta manera, $BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

$\square$

A continuación, mostraremos que $BV[a,b]$ es un espacio normado con la norma

$$\|u\|_{BV[a,b]} := |u(a)| + V(u,[a,b]), \quad u \in BV[a,b].$$

Proposición 1.7. *El funcional* $\|\cdot\|_{BV[a,b]} : BV[a,b] \to \mathbb{R}$ *es, en efecto, una norma sobre el espacio vectorial* $BV[a,b]$*. Es decir,* $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ *satisface las siguientes propiedades:*

(i) $||u||_{BV[a,b]} \geq 0$ *para todo* $u \in BV[a,b]$.

(ii) $||u||_{BV[a,b]} = 0$ *si y sólo si* $u \equiv 0$ *sobre* $[a,b]$.

(iii) $||\alpha\, u||_{BV[a,b]} = |\alpha|\, ||u||_{BV[a,b]}$ *para todo* $u \in BV[a,b]$ *y para todo escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $||u+v||_{BV[a,b]} \leq ||u||_{BV[a,b]} + ||v||_{BV[a,b]}$ *para todo* $u, v \in BV[a,b]$.

Demostración: Sean $u, v \in BV[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) Por la definición de $|| \cdot ||_{BV[a,b]}$ se tiene que $||u||_{BV[a,b]} \geq 0$ para toda función $u \in BV[a,b]$.

(ii) Si $u \equiv 0$ en el intervalo $[a,b]$, entonces $||u||_{BV[a,b]} = 0$ sobre $[a,b]$ claramente. Ahora supongamos que $||u||_{BV[a,b]} = 0$. Entonces

$$|u(a)| + V(u,[a,b]) = 0.$$

Como es una suma de cantidades no negativas, resulta que $|u(a)| = 0$ y $V(u,[a,b]) = 0$. Del hecho que $V(u,[a,b]) = 0$ se deduce que la función u debe ser constante sobre $[a,b]$. Como $|u(a)| = 0$ se tiene que $u(a) = 0$ y usando que u es constante obtenemos que $u \equiv 0$ sobre el intervalo $[a,b]$.

(iii) De la definición de $|| \cdot ||_{BV[a,b]}$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||\alpha\, u||_{BV[a,b]} &= |(\alpha\, u)(a)| + V(\alpha\, u,[a,b]) \\ &= |\alpha|\, |u(a)| + |\alpha|\, V(u,[a,b]) \\ &= |\alpha|\, \left(|u(a)| + V(u,[a,b])\right) \\ &= |\alpha|\, ||u||_{BV[a,b]}. \end{aligned}$$

(iv) De la definición de $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{BV[a,b]} &= |(u+v)(a)| + V(u+v,[a,b]) \\
&= |u(a)+v(a)| + V(u+v,[a,b]) \\
&\leq |u(a)| + |v(a)| + V(u,[a,b]) + V(v,[a,b]) \\
&= \|u\|_{BV[a,b]} + \|v\|_{BV[a,b]}.
\end{aligned}
$$

De esta manera, $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ define una norma sobre $BV[a,b]$.

□

Corolario 1.8. $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV[a,b]})$ *es un espacio normado.*

Ahora, mostraremos que $BV[a,b]$ es un espacio de Banach respecto a la norma $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$. Pero antes, probaremos dos lemas que utilizaremos para este fin.

Lema 1.9. *El espacio de las funciones acotadas,*

$$B[a,b] := \{u : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ |u(t)| < M \text{ para todo } t \in [a,b] \text{ y para algún } M > 0\},$$

es un espacio completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\infty}$.

Demostración: Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B[a,b]$ una sucesión de cauchy. Entonces, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se verifica

$$\|u_n - u_m\|_{\infty} < \epsilon.$$

Seguidamente, para todo $t \in [a,b]$ se tiene que

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq \|u_n - u_m\|_{\infty} < \epsilon$$

si $n, m \geq N$. Luego, para todo $t \in [a,b]$, la sucesión de números reales $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es un espacio completo, $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente para todo $t \in [a,b]$.

Ahora, definamos la función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$u(t) := \lim_{n\to\infty} u_n(t).$$

Veamos que $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Bien, $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente para todo $t \in [a, b]$ por lo que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|u_n(t) - u(t)| < \epsilon.$$

Luego, tomando el supremo obtenemos

$$\sup_{t\in[a,b]} |u_n(t) - u(t)| < \epsilon,$$

de donde

$$\|u_n - u\|_\infty < \epsilon \quad \text{si } n \geq N.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0.$$

Por último, veamos que $u \in B[a, b]$.

Bien, como $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B[a, b]$ existen $M_n > 0$, $n \geq 1$, tales que $|u_n(t)| < M_n$ para todo $t \in [a, b]$. Por otro lado, de la definición de u se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|u_n(t) - u(t)| < \epsilon \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Luego, si $n \geq N$, resulta que

$$|u(t)| < \epsilon + |u_n(t)| < \epsilon + M_n \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Por tanto, $|u(t)| < M_n$ para todo $t \in [a, b]$ y $n \geq N$. Sea $M = \max\left\{M_1, ..., M_{N-1}, \sup_{n\geq N} M_n\right\}$. Entonces $|u(t)| < M$ para todo $t \in [a, b]$ y por ende $u \in B[a, b]$. Con esto queda demostrado que el espacio $B[a, b]$ es un espacio completo respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Lema 1.10. *Si* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones definidas sobre* $[a,b]$ *que converge puntualmente a una función* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} V[u_n, T] = V[u, T]$ *para toda partición* $T \in \mathcal{J}([a,b])$ *del intervalo* $[a,b]$.

Demostración: Sean $T = \{t_i\}_{i=0}^{m} \in \mathcal{J}([a,b])$ una partición del intervalo $[a,b]$ y $\epsilon > 0$. Como la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función u se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se verifica $|u_n(t) - u(t)| < \frac{\epsilon}{2m}$ para todo $t \in [a,b]$. Luego, si $n \geq N$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
|V[u_n, T] - V[u, T]| &= \left| \sum_{i=1}^{m} |u_n(t_i) - u_n(t_{i-1})| - \sum_{i=1}^{m} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{m} |u_n(t_i) - u_n(t_{i-1})| - |u(t_i) - u(t_{i-1})| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} ||u_n(t_i) - u_n(t_{i-1})| - |u(t_i) - u(t_{i-1})|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |u_n(t_i) - u_n(t_{i-1}) - (u(t_i) - u(t_{i-1}))\,| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |u_n(t_i) - u(t_i) + u(t_{i-1}) - u_n(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |u_n(t_i) - u(t_i)| + |u_n(t_{i-1}) - u(t_{i-1})| \\
&< \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\epsilon}{2m} + \frac{\epsilon}{2m} \right) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} V[u_n, T] = V[u, T].$$

$\square$

Finalmente, enunciamos y demostramos el principal resultado de esta sección.

Teorema 1.11. *$BV[a,b]$ es un espacio de Banach respecto a la norma $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$.*

Demostración: Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset BV[a,b]$ una sucesión de Cauchy. Por la Proposición 1.1, $BV[a,b] \subset B[a,b]$ y por tanto $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $B[a,b]$. Luego, por el Lema 1.9, $B[a,b]$ es un espacio completo, por lo que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente (y puntualmente) a una función $u \in B[a,b]$.

Veamos que $\|u_n - u\|_{BV[a,b]} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $T \in \mathcal{J}([a,b])$ una partición de $[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $BV[a,b]$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{BV[a,b]} < \epsilon, \quad \text{siempre que } n, m \geq N.$$

Seguidamente, por el Lema 1.10, para cada $n \geq N$ tenemos

$$\begin{aligned}
|u_n(a) - u(a)| + V[u_n - u, T] &= \lim_{m\to\infty} |u_n(a) - u_m(a)| + \lim_{m\to\infty} V[u_n - u_m, T] \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(|u_n(a) - u_m(a)| + V[u_n - u_m, T]\right) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \left(|u_n(a) - u_m(a)| + V(u_n - u_m, [a,b])\right) \\
&\leq \sup_{m\geq N} \left(|u_n(a) - u_m(a)| + V(u_n - u_m, [a,b])\right) \\
&= \sup_{m\geq N} \|u_n - u_m\|_{BV[a,b]} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Ya que el cálculo anterior vale para toda partición $T \in \mathcal{J}([a,b])$, se tiene que la variación total de $u_n - u$ sobre $[a,b]$, $V(u_n - u, [a,b])$, es finita y

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{BV[a,b]} = 0.$$

Para finalizar la demostración del teorema, verifiquemos que $u \in BV[a,b]$. En efecto, notemos que $u_n - u \in BV[a,b]$ y $u_n \in BV[a,b]$ para todo $n \geq 1$. Luego $u_n - (u_n - u) \in BV[a,b]$, por ser $BV[a,b]$ un espacio vectorial. De este último hecho se sigue que $u \in BV[a,b]$.

$\square$

1.4 Caracterización de Jordan

En esta sección enunciaremos y demostraremos el resultado más importante dado por Camile Jordan cuando introduce el concepto de funciones de variación acotada en [14]. La caracterización de Jordan para funciones de variación acotada establece que una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólo si, u se puede escribir como diferencias de dos funciones monótonas.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de representación de Jordan, probaremos el siguiente lema.

Lema 1.12. *Sea $u \in BV[a, b]$ y $\varphi_u : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$\varphi_u(t) = V(u, [a, t]).$$

Entonces φ_u es no negativa, acotada y no decreciente en $[a, b]$. Más aún, la función $\varphi_u \pm u$ es una función no decreciente en $[a, b]$.

Demostración: Claramente φ_u es no negativa. Afirmamos que φ_u es acotada ya que, por la Proposición 1.4, para todo $t \in [a, b]$ se tiene que

$$\varphi_u(t) = V(u, [a, t]) \leq V(u, [a, b]).$$

Ahora, veamos que φ_u es no decreciente. Sean $s, t \in [a, b]$ tales que $s \leq t$. Entonces, por la Proposición 1.4 y Proposición 1.5 se tiene que

$$\varphi_u(t) - \varphi_u(s) = V(u, [a, t]) - V(u, [a, s]) = V(u, [a, s]) + V(u, [s, t]) - V(u, [a, s]) = V(u, [s, t]) \geq 0.$$

En consecuencia, φ_u es una función no decreciente.

Para terminar, veamos que $\varphi_u \pm u$ es no decreciente. Nuevamente, sean $s, t \in [a, b]$ tales que $s \leq t$. Entonces por la Proposición 1.2, Proposición 1.4 y la Proposición 1.5 resulta que:

$$\begin{aligned}
(\varphi_u \pm u)(t) - (\varphi_u \pm u)(s) &= \varphi_u(t) \pm u(t) - (\varphi_u(s) \pm u(s)) \\
&= \varphi_u(t) - \varphi_u(s) \pm u(t) \mp u(s) \\
&= V(u,[a,t]) - V(u,[a,s]) - (\mp u(t) \pm u(s)) \\
&= V(u,[a,s]) + V(u,[s,t]) - V(u,[a,s]) - (\mp u(t) \pm u(s)) \\
&= V(u,[s,t]) - (\mp u(t) \pm u(s)) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

De esta manera hemos probado que $\varphi_u \pm u$ es una función no decreciente.

□

Teorema 1.13 (Teorema de Representación de Jordan)**.** *Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre el intervalo $[a,b]$ si y sólo si, existen funciones u_1, u_2 monótonas definidas en $[a,b]$ tales que $u = u_1 - u_2$.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que u_1, u_2 son funciones monótonas definidas en $[a,b]$ tales que $u = u_1 - u_2$. Entonces, por la Proposición 1.3, $u_1, u_2 \in BV[a,b]$ y por lo tanto $u \in BV[a,b]$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $u \in BV[a,b]$. Definamos las funciones $p_u, n_u : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$p_u(t) := \frac{1}{2}(\varphi_u(t) + u(t) - u(a)), \qquad n_u(t) := \frac{1}{2}(\varphi_u(t) - u(t) - u(a)).$$

Por el Lema 1.12, p_u y n_u son funciones no decrecientes sobre el intervalo $[a,b]$. Más aún, como $p_u(a) = 0$ y $n_u(a) = 0$ se tiene que p_u y n_u son funciones no negativas. Ahora bien, definamos $u_1 = p_u$ y $u_2 = n_u - u(a)$.

Entonces $u = u_1 - u_2$ y de esta manera hemos escrito u como diferencias de dos funciones no decrecientes.

□

El Teorema de Representación de Jordan es de gran importancia ya que nos permite transferir propiedades de las funciones monótonas a las funciones de variación acotada, como se muestra en el próximo resultado cuya demostración puede ser encontrada en [1].

Teorema 1.14. *Sea $u \in BV[a,b]$, entonces:*

(i) *u tiene límites laterales.*

(ii) *El conjunto de discontinuidades de u es numerable.*

(iii) *u posee derivada casi siempre en (a,b).*

(iv) *u es Riemann integrable.*

(v) *u tiene serie de Fourier convergente.*

1.5 Otra Caracterización de las Funciones de Variación Acotada

En esta sección, mostramos otra caracterización de las funciones de variación acotada que involucran a las funciones Lipschitz, la cual establece que las funciones de variación acotada son aquella funciones que se pueden representar como una composición de una función monótona con una función Lipschitz. Esta caracterización de funciones de variación acotada es debida a H. Federer en 1969 [11].

Definición 1.3. *Se dice que una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Lipschitz (o satisface la condición de Lipschitz) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si, existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|u(t) - u(s)| \leq L\,|t - s|, \quad s, t \in [a,b].$$

La constante L se denomina constante de Lipschitz. A la clase de funciones Lipschitz en $[a,b]$ la denotaremos por $Lip[a,b]$.

Ejemplo 1.5. *La función $u(t) = sin(t)$ es Lipschitz con constante de Lipschitz $L = 1$. En efecto, sean $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $s < t$. Ahora, como u es continua en $[s, t]$ y derivable en (s, t), por el Teorema de Valor Medio de Lagrange, existe un $\tau \in (s, t)$ tal que*

$$u(t) - u(s) = u'(\tau)\ (t - s)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |u(t) - u(s)| &= |u'(\tau)\ (t - s)\,| \\ &= |u'(\tau)|\,|t - s| \\ &= |cos(\tau)|\,|t - s| \\ &\leq |t - s|. \end{aligned}$$

Por tanto, $u(t) = sin(t)$ satisface la condición de Lipschitz con $L = 1$.

El siguiente resultado establece que $Lip[a, b] \subset BV[a, b]$.

Proposición 1.15. *Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz en el intervalo $[a, b]$ entonces u es una función de variación acotada en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración: Como u es Lipschitz, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|u(t) - u(s)| \leq L\,|t - s|, \quad s, t \in [a, b].$$

Sea $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a, b])$ una partición del intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\begin{aligned} V[u, T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} L\,|t_i - t_{i-1}| \\ &= L \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= L\,(b - a). \end{aligned}$$

El cálculo anterior vale para todo $T \in \mathcal{J}([a,b])$ por lo que

$$V(u,[a,b]) \leq L\,(b-a),$$

y por tanto $u \in BV[a,b]$.

$\square$

El siguiente lema nos ayudará a demostrar el resultado principal de esta sección.

Lema 1.16 (Cambio de una Variable)**.** *Si $u \in BV[a,b]$ y $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una función monótona,*

$$V(u,\varphi\,([c,d])) = V(u \circ \varphi,[c,d]).$$

Demostración: Probaremos que el lado derecho no es más grande que el lado izquierdo y viceversa. Si $S = \{s_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([c,d])$ una partición del intervalo $[c,d]$ y $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ con $t_i = \varphi(s_i)$, $0 \leq i \leq n$, entonces, por la monotonía de φ, $T \in \mathcal{J}(\varphi\,([c,d]))$ y

$$\begin{aligned}
V[u \circ \varphi, S] &= \sum_{i=1}^{n} |\,(u \circ \varphi)\,(s_i) - (u \circ \varphi)\,(s_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u\,(\varphi(s_i)) - u\,(\varphi(s_{i-1}))\,| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\
&= V[u,T] \\
&\leq V(u,[\varphi(a),\varphi(b)]).
\end{aligned}$$

Como el estimado anterior vale para cualquier partición $S \in \mathcal{J}([c,d])$ se tiene que

$$V(u \circ \varphi,[c,d]) \leq V(u,\varphi\,([c,d])).$$

Por otro lado, si $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}(\varphi\,([c,d]))$ es una partición de $\varphi\,([c,d])$, entonces para cada $i = 1,...n$, existe $s_i \in [c,d]$ tal que $t_i = \varphi(s_i)$. Nuevamente, por la monotonía de φ se tiene que $S = \{s_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([c,d])$ y

$$
\begin{aligned}
V[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |u\left(\varphi(s_i)\right) - u\left(\varphi(s_{i-1})\right)| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\left(u \circ \varphi\right)(s_i) - \left(u \circ \varphi\right)(s_{i-1})| \\
&= V[u \circ \varphi, S] \\
&\leq V(u \circ \varphi, [c,d]).
\end{aligned}
$$

Como el cálculo anterior vale para toda partición $S \in \mathcal{J}([c,d])$ obtenemos finalmente que

$$V(u, \varphi\left([c,d]\right)) \leq V(u \circ \varphi, [c,d]).$$

De esta manera, hemos obtenido que

$$V(u, \varphi\left([c,d]\right)) = V(u \circ \varphi, [c,d]).$$

□

A continuación, enunciamos y demostramos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.17. *Una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si se puede representar como $u = g \circ \varphi$ donde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, acotada y no decreciente, mientras que $g \in Lip[\varphi(a), \varphi(b)]$ con constante de Lipschitz $L \leq 1$.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que $u = g \circ \varphi$ donde las funciones φ y g satisfacen las propiedades mencionadas en el enunciado del teorema. Como g es Lipschitz en $[\varphi(a), \varphi(b)]$, existe $L > 0$ (la cual es menos o igual que 1 por hipótesis) tal que

$$|g(t) - g(s)| \leq L\,|t - s|, \quad s,t \in [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Sea $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{J}([a,b])$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
V[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\left(g\circ\varphi\right)(t_i) - \left(g\circ\varphi\right)(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |g(\varphi(t_i)) - g(\varphi(t_{i-1}))| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} L\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \\
&= \varphi(b) - \varphi(a).
\end{aligned}
$$

El cálculo anterior vale para todo $T \in \mathcal{J}([a,b])$ por lo que

$$V(u,[a,b]) \le \varphi(b) - \varphi(a) < \infty,$$

y por tanto $u \in BV[a,b]$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $u \in BV[a,b]$. Definimos la función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $\varphi := \varphi_u$, la función no negativa, acotada y no decreciente definida en el Lema 1.12. Por otro lado, definimos la función $\widetilde{g} : \varphi\left([a,b]\right) \to \mathbb{R}$ como sigue: si $s \in \varphi\left([a,b]\right)$, $\widetilde{g}(s) = u(t)$ para cualquier $t \in \varphi^{-1}\left(\{s\}\right)$. Afirmamos que $\widetilde{g}$ está bien definida ya que si $t_1, t_2 \in \varphi^{-1}\left(\{s\}\right)$ tal que $t_1 \le t_2$, entonces $\varphi(t_1) = s = \varphi(t_2)$ y por tanto

$$|u(t_2) - u(t_1)| \le V(u,[t_1,t_2]) \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = s - s = 0;$$

de donde $u(t_1) = u(t_2)$. Ahora, la representación de la función u es como sigue: si $t \in [a,b]$, entonces $s = \varphi(t) \in \varphi\left([a,b]\right)$ y $t \in \varphi^{-1}\left(\{s\}\right)$, así que

$$u(t) = \widetilde{g}(s) = \widetilde{g}\left(\varphi(t)\right) = \left(\widetilde{g}\circ\varphi\right)(t).$$

Para terminar, veamos que $\widetilde{g}$ es Lipschitz en $\varphi([a,b])$. Primero, notemos que para cualquier $s \in \varphi([a,b])$ y $t \in \varphi^{-1}(\{s\})$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
V(\widetilde{g}, \varphi([a,b]) \cap [\varphi(a), s]) &= V(\widetilde{g}, \varphi([a,b]) \cap [\varphi(a), \varphi(t)]) \\
&= V(\widetilde{g}, \varphi([a,t])) \\
&= V(\widetilde{g} \circ \varphi, [a,t]) \quad \text{(por el Lema 1.16)} \\
&= V(u, [a,t]) \\
&= \varphi(t) \\
&= s.
\end{aligned}
$$

Aquí hemos usado el hecho

$$\varphi([a,t]) = \varphi([a,b]) \cap [\varphi(a), \varphi(t)],$$

ya que φ es no decreciente. Ahora, para $s_1, s_2 \in \varphi([a,b])$ con $s_1 \leq s_2$ resulta que

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{g}(s_2) - \widetilde{g}(s_1)| &\leq V(\widetilde{g}, \varphi([a,b]) \cap [s_1, s_2]) \\
&\leq V(\widetilde{g}, \varphi([a,b]) \cap [\varphi(a), s_2]) - V(\widetilde{g}, \varphi([a,b]) \cap [\varphi(a), s_1]) \\
&= s_2 - s_1.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$|\widetilde{g}(s_2) - \widetilde{g}(s_1)| \leq |s_2 - s_1|, \quad s_1, s_2 \in \varphi([a,b]).$$

Ahora, como $\widetilde{g}$ es Lipschitz en $\varphi([a,b])$ entonces $\widetilde{g}$ es uniformemente continua en $\varphi([a,b])$ por lo que se puede extender a una aplicación Lipschitz, la cual denotaremos por g, sobre todo $[\varphi(a), \varphi(b)]$ con constante Lipschitz $L \leq 1$.

$\square$

1.6 Principio de Selección de Helly

A continuación enunciaremos y demostraremos el Principio de Selección de Helly para las funciones de variación acotada estudiado a lo largo de este capítulo. Para la prueba de este resultado utilizaremos los Lemas 1 y 2 de la Sección 4 del Capítulo 8 del libro [21], los cuales enunciaremos aquí.

Lema 1.18. *Sea $H = \{u_n : [a,b] \to \mathbb{R} : n \geq 1\}$ una familia de funciones. Si todas las funciones u_n están acotadas por la misma constante*

$$|u_n(t)| \leq K \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

entonces para cada subconjunto numerable E de $[a,b]$, es posible encontrar una sucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ la cual converge en cada punto de E.

Lema 1.19. *Sea $H = \{u_n : [a,b] \to \mathbb{R} : n \geq 1\}$ una familia de funciones crecientes. Si todas las funciones u_n están acotadas por la misma constante*

$$|u_n(t)| \leq K \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ y } t \in [a,b],$$

entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ la cual converge a una función creciente $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en cada punto de $[a,b]$.

Teorema 1.20 (Principio de Selección de Helly para funciones de variación acotada)**.** *Sea $H = \{u_n : [a,b] \to \mathbb{R} : n \geq 1\}$ una familia infinita de funciones definida en $[a,b]$. Si todas las funciones satisfacen*

$$|u_n(t)| \leq K, \qquad V(u_n, [a,b]) \leq K, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

entonces existe una sucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ que converge puntualmente en $[a,b]$ a alguna función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $V(\varphi, [a,b]) < \infty$.

Demostración: Para cada función u_n definimos

$$\pi_n(t) := V(u_n, [a,x]), \quad v_n(t) := \pi_n(t) - u_n(t).$$

Note que las funciones π_n y v_n son crecientes. Más aún,

$$|\pi_n(t)| \leq K, \qquad |v_n(t)| \leq 2K.$$

Ahora, aplicando el Lema 1.19 a la familia de funciones $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta que existe una sucesión $\{\pi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{n_k}(t) = \alpha(t),$$

donde $\alpha(t)$ es una función creciente. Para cada función π_{n_k} le corresponde una función v_{n_k} extendiendo a la función u_{n_k} de la familia H. Nuevamente, aplicando el Lema 1.19 a la familia de funciones $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, existe una subsucesión que denotaremos de la misma manera $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(t) = \beta(t),$$

donde β es de la misma clase de $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces la sucesión de funciones $u_{n_k} = \pi_{n_k} - v_{n_k}$, que pertenece a H, converge a la función $\varphi = \alpha - \beta$. Esto prueba el teorema.

$\square$

Capítulo 2

El Principio de Selección de Helly para Funciones de p-Variación Acotada

En este capítulo se estudia el Principio de Selección de Helly para funciones de p-variación acotada. Empezamos recolectando resultados del artículo [3] donde este principio es demostrado para el caso $p = 1$. Seguidamente, para $p > 1$, mostramos y demostramos algunas propiedades y resultados estructurales que satisfacen las funciones de p-variación acotada. Finalmente, enunciamos y probamos el principio de selección para el caso $p > 1$. Los resultados de este último caso pueden ser encontrados con más detalles en [8].

A lo largo de este capítulo se seguirá la siguiente notación:

- $E \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto de la recta real no vacío.
- Para $t \in E$, definimos los conjuntos

$$E_t^- := \{s \in E \ : \ s \leq t\}, \qquad E_t^+ := \{s \in E \ : \ t \leq s\}.$$

- Para $a, b \in E$ tales que $a \leq b$, definimos el siguiente conjunto

$$E_a^b := E_a^+ \cap E_b^-.$$

- X es un espacio métrico con métrica $d = d(\cdot, \cdot)$ o simplemente un espacio normado.
- p es un número fijo, $1 \leq p < \infty$.
- Λ denotará a un conjunto de índices.

Definición 2.1. *Denotamos por*

$$\mathcal{J}(E) := \{T = \{t_i\}_{i=0}^n \subset E \,:\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ t_{i-1} < t_i,\ i = 1, ..., n\},$$

al conjunto de todas las particiones ordenadas y finitas del conjunto E.

2.1 Principio de Selección de Helly para Funciones de p-Variación Acotada con $p = 1$.

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Principio de Selección de Helly para Funciones de p-Variación Acotada cuando $p = 1$. Para este fin, comenzaremos con una revisión de algunas definiciones y resultados. Todo lo descrito en esta sección puede ser encontrado con mayor detalle en [3].

Definición 2.2. *Dada una función $u : E \to X$, la variación de Jordan total de u se define como la siguiente cantidad:*

$$V(u, E) := \sup_{T \in \mathcal{J}(E)} \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ de E. Si $V(u, E) < \infty$, se dice que la función es de variación de Jordan acotada.

Definición 2.3. *Una familia de funciones $\{f_\alpha : E \to X \,:\, \alpha \in \Lambda\}$ se dice que es de variación acotada uniformemente si existe una constante $C \geq 0$ tal que $|f_\alpha(t)| \leq C$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Definición 2.4. *Una familia de funciones $\{f_\alpha : E \to X \,:\, \alpha \in \Lambda\}$ se dice que es precompacto puntualmente si $\{f_\alpha(t) \,:\, \alpha \in \Lambda\}$ es un conjunto precompacto en X para todo $t \in E$.*

Definición 2.5. *Una función $u : E \to X$ es Lipschitz si la siguiente cantidad, llamada constante mínimal de Lipschitz de u, es finita:*

$$Lip(u) = \sup \left\{ \frac{d(u(t), u(s))}{|t - s|} \ : \ t, s \in E, \ \ t \neq s \right\}.$$

A continuación enunciamos y demostramos el primer resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1. *Una familia de funciones infinita precompacta puntualmente $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de variación acotada uniformemente contiene una subsucesión la cual converge puntualmente sobre $[a, b]$ a una función $u : [a, b] \to X$ de variación acotada.*

Para probar el Teorema 2.1 necesitaremos el siguiente resultado cuya demostración puede ser encontrada en [3].

Lema 2.2. *Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de funciones infinita precompacta puntualmente definadas sobre E en X. Entonces para cualquier subconjunto numerable $F \subset E$, existe una subsucesión en $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge puntualmente sobre F.*

Además del lema anterior utilizaremos el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la prueba del Teorema 1.17:

Teorema 2.3. *Una función $u : E \to X$ es de variación (de Jordan) acotada si y sólo si, $u = v \circ \varphi$ sobre E, donde $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es una función acotada y no decreciente y $v : \varphi(E) \to X$ es una función Lipschitz con $Lip(v) \leq 1$.*

Ahora, la prueba del Teorema 2.1:

Demostración: (Teorema 2.1) Dividimos la demostración en 6 pasos:

- Paso 1: Ya que la familia de funciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de variación acotada uniformemente, existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$V(u_n, [a, b]) \leq C, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Acorde al Teorema 2.3, cualquier u_n se puede escribir de la siguiente forma $u_n = v_{u_n} \circ \varphi_{u_n}$ sobre $[a, b]$, donde $\varphi_{u_n}(t) = V(u_n, [a, t])$ para $t \in [a, b]$, y $v_{u_n} : E_{u_n} := \varphi([a, b]) \to X$ es una función Lipschitz con $Lip(u_n) \leq 1$. Note que cualquier φ_{u_n} es no decreciente, no negativa y $\varphi_{u_n}(a) = 0$. Más aún, la familia $\{\varphi_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, ya que

$$\varphi_{u_n}(t) \leq \varphi_{u_n}(b) = V(u_n, [a, b]) \leq C, \quad \text{para todo } t \in [a, b] \text{ y } n \geq 1.$$

Así, por el Lema 2 de [21, Capítulo VIII, Sección 4], $\{\varphi_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión $\{(\varphi_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ correspondiente a la descomposición $u_{n_k} = (v_{u_n})_k \circ (\varphi_{u_n})_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la cual converge puntualmente en $[a, b]$ a una función no negativa, no decreciente y acotada $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ cuando $k \to \infty$, esto es

$$\lim_{k \to \infty} (\varphi_{u_n})_k = \varphi.$$

En los pasos del 2 al 4 supondremos lo siguiente:

Hipótesis A: las funciones $(\varphi_{u_n})_k$ y φ son continuas sobre $[a, b]$ para todo $k \geq 1$.

- Paso 2: Bajo la Hipótesis A, el dominio de $(v_{u_n})_k$ es un intervalo cerrado:

$$E_{u_{n_k}} = (\varphi_{u_n})_k\,([a, b]) = [0, (\varphi_{u_n})_k\,(b)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sea

$$L = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\varphi_{u_n})_k\,(b),$$

así que $0 \leq L < \infty$ y

$$l = \lim_{k \to \infty} (\varphi_{u_n})_k\,(b) \leq L.$$

Extendemos cada función $(v_{u_n})_k$ al intervalo $[(\varphi_{u_n})_k\,(b), L]$ definiendo $(v_{u_n})_k\,(\tau) = v_{u_n}\left((\varphi_{u_n})_k\,(b)\right)$ si $\tau \in [(\varphi_{u_n})_k\,(b), L]$. Claramente, la nueva función $(v_{u_n})_k$ es Lipschitz sobre el intervalo $[0, L]$ con $Lip\left((v_{u_n})_k\right) \leq 1$.

Vamos a probar que el conjunto $\{(v_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ es precompacto puntualmente sobre $[0, L]$. Dado $\tau \in [0, L]$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $t_k \in [a, b]$ tal que $(\varphi_{u_n})_k\,(t_k) = \tau$.

Usando la compacidad de $[a, b]$ y eligiendo una subsucesión de $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, podemos suponer que $t_k \to t \in [a, b]$ cuando $k \to \infty$. Por hipótesis, la sucesión $\left\{u_{n_k}\left((v_{u_n})_k \circ (\varphi_{u_n})_k\right)(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ es precompacta en X y así contiene una subsucesión, que denotaremos como la sucesión entera, tal que $d\left(u_{n_k}(t), x\right) \to 0$ cuando $k \to \infty$ para algún $x \in X$.

Veamos que $d\left((v_{u_n})_k(\tau), x\right) \to 0$ cuando $k \to \infty$. En efecto, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
d\left((v_{u_n})_k(\tau), x\right) &= d\left((v_{u_n})_k\left((\varphi_{u_n})_k(t_k)\right), x\right) \\
&\leq d\left((v_{u_n})_k\left((\varphi_{u_n})_k(t_k)\right), (v_{u_n})_k\left((\varphi_{u_n})_k(t)\right)\right) + d\left(u_{n_k}(t), x\right) \\
&\leq |(\varphi_{u_n})_k(t_k) - (\varphi_{u_n})_k(t)| + d\left(u_{n_k}(t), x\right).
\end{aligned}
$$

Por el Paso 1, $(\varphi_{u_n})_k(t_k) \to (\varphi_{u_n})_k(t)$ cuando $k \to \infty$ por lo que será suficiente probar que $(\varphi_{u_n})_k(t_k) \to \varphi(t)$ cuando $k \to \infty$. Supongamos $a < t < b$. Dado $\epsilon > 0$, por continuidad de φ, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, $\delta \leq \min\{b - t, t - a\}$, tal que $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \epsilon/2$ para todo $s \in [a, b]$ con $|s - t| \leq \delta$. Como $t_k \to t$ y $(\varphi_n)_k \to \varphi$ puntualmente sobre $[a, b]$ cuando $k \to \infty$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ resulta que

$$
t - \delta \leq t_k \leq t + \delta, \quad \left|(\varphi_n)_k(t - \delta) - \varphi(t - \delta)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \left|(\varphi_n)_k(t + \delta) - \varphi(t + \delta)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.
$$

Ya que $(\varphi_n)_k$ es no decreciente, se sigue que

$$
\begin{aligned}
(\varphi_n)_k(t_k) &\leq (\varphi_n)_k(t + \delta) \leq (\varphi_n)_k(t + \delta) + \frac{\epsilon}{2} \leq \varphi(t) + \epsilon, \\
(\varphi_n)_k(t_k) &\geq (\varphi_n)_k(t - \delta) \geq (\varphi_n)_k(t - \delta) - \frac{\epsilon}{2} \geq \varphi(t) - \epsilon,
\end{aligned}
$$

ó $|(\varphi_n)_k(t_k) - \varphi(t)| \leq \epsilon$ para todo $n \geq N$. Ahora, en el caso $t = a$ y $t = b$ son tratadas similarmente.

- Paso 3: Bajo la Hipótesis A, vamos a demostrar realmente que la subsucesión de $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre el intervalo $[0, L]$ cuando $k \to \infty$. Sea $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $[0, L]$. Como$\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es precompacto puntualmente sobre $[0, L]$ por el Paso 2 y en virtud del Lema 2.2 (tomando una subsucesión adecuada) podemos suponer que $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge en cada punto del conjunto $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$. Vamos demostrar realmente que la sucesión $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre $[0, L]$. Dado $\epsilon > 0$, elegimos un número apropiado $j_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: si $\tau \in [0, L]$, existe $j \in \{1, ..., j_0(\epsilon)\}$ tal que $|\tau - \tau_j| \leq \epsilon$. Ya que, cuando $k \to \infty$, la sucesión $\{(v_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge en X cuando $k \to \infty$ y por tanto es de Cauchy, para todo $j \in \{1, ..., j_0(\epsilon)\}$, existe $N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, k \geq N_0(\epsilon)$ se tiene que

$$d\left((v_{u_n})_k(\tau_j), (v_{u_n})_m(\tau_j)\right) \leq \epsilon, \quad j \in \{1, ..., j_0(\epsilon)\}.$$

Ahora, dado $\tau \in [0, L]$, existe $j \in \{1, ..., j_0(\epsilon)\}$ con $|\tau - \tau_j| \leq \epsilon$, así que de la desigualdad $Lip\left((v_{u_n})_k\right) \leq 1$ ($k \in \mathbb{N}$) resulta que

$$\begin{aligned} d\left((v_{u_n})_k(\tau), (v_{u_n})_m(\tau)\right) &\leq d\left((v_{u_n})_k(\tau), (v_{u_n})_k(\tau_k)\right) + d\left((v_{u_n})_k(\tau_k), (v_{u_n})_m(\tau_k)\right) + \\ &\quad + d\left((v_{u_n})_m(\tau_k), (v_{u_n})_m(\tau)\right) \\ &\leq 3\,\epsilon, \end{aligned}$$

para todo $m, k \geq N_0(\epsilon)$. Seguidamente, obtenemos que la sucesión $\{(v_{u_n})_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ es Cauchy en X y por el Paso 2 es precompacto en X inferimos que $\{(v_{u_n})_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ converge en X cuando $k \to \infty$ para todo $\tau \in [0, L]$. Pasando al límite cuando $m \to \infty$ en el estimado anterior obtenemos la convergencia uniforme de $\{(v_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ sobre $[0, L]$. Si $v : [0, L] \to X$ es el límite uniforme de $\{(v_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces v es Lipschitz con $Lip(v) \leq 1$ claramente.

- Paso 4: Ahora establecemos el Teorema 2.1 dado que la hipótesis A vale. Como la función $v : [0, L] \to X$ del final del Paso 3 es Lipschitz con $Lip(v) \leq 1$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, no decreciente y $\varphi([a, b]) = [0, l] \subset [0, L]$, la composición $u := v \circ \varphi : [a, b] \to X$ es de variación acotada por el Teorema 2.3. Para todo $t \in [a, b]$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
d\left(u_{n_k}(t), u(t)\right) &= d\left(\left((v_{u_n})_m \circ (\varphi_{u_n})_k\right)(t), (v \circ \varphi)(t)\right) \\
&\leq d\left(\left((v_{u_n})_m \circ (\varphi_{u_n})_k\right)(t), \left((v_{u_n})_m \circ \varphi\right)(t)\right) + d\left(\left((v_{u_n})_m \circ \varphi\right)(t), (v \circ \varphi)(t)\right) \\
&\leq \left|(\varphi_{u_n})_k(t) - \varphi(t)\right| + \sup_{\tau \in [0, L]} d\left((v_{u_k})_m(\tau), v(\tau)\right) \\
&\to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.
\end{aligned}
$$

Esto prueba la convergencia puntual de u_{n_k} a u en el intervalo $[a, b]$.

- Paso 5: Supongamos ahora que las funciones $(\varphi_n)_k$ y φ son continuas sobre un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$. Demostraremos que una subsucesión de $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre (α, β). Sea $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $\alpha_{k+1} < \alpha_k < \beta_k < \beta_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, con $\alpha_k \to \alpha$ y $\beta_k \to \beta$ cuando $k \to \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $\widetilde{u_{n_k}}$ la restricción de u_{n_k} a $[\alpha_1, \beta_1]$ y de esta manera tenemos que la descomposición $\widetilde{u_{n_k}} = \widetilde{v_{u_k}} \circ \widetilde{(\varphi_{u_n})_k}$ donde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(\varphi_{u_n})_k}(t) &= V(\widetilde{u_{n_k}}, [\alpha_1, t]) \\
&= V(u_{n_k}, [\alpha_1, t]) \\
&= V(u_{n_k}, [a, t]) - V(u_{n_k}, [a, \alpha_1]) \\
&= (\varphi_{u_n})_k(t) - (\varphi_{u_n})_k(\alpha_1), \quad t \in [\alpha_1, \beta_1],
\end{aligned}
$$

y $\widetilde{v_{u_k}} : \widetilde{(\varphi_{u_n})_k}([\alpha_1, \beta_1]) \to X$ es una función Lipschitz con $Lip\left(\widetilde{v_{u_k}}\right) \leq 1$. Más aún, como $k \to \infty$, tenemos

$$
\widetilde{(\varphi_{u_n})_k}(t) \to \widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(\alpha_1),
$$

para todo $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Como $(\varphi_{u_n})_k$ y φ son continuas sobre (α, β) se tiene que $\widetilde{(\varphi_{u_n})}_k$ y $\widetilde{\varphi}$ son continuas en $[\alpha_1, \beta_1]$, $k \in \mathbb{N}$. Aplicando los resultados de los pasos del 1 al 4 a $\{\widetilde{u_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ sobre $[\alpha_1, \beta_1]$, podemos elegir una subsucesión $\{u_{n_k}^1\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\widetilde{u_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$, la cual de hecho es una subsucesión de $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, que converge puntualmente en el intervalo $[\alpha_1, \beta_1]$. De una manera similar, elegimos una subsucesión $\{u_{n_k}^2\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_{n_k}^1\}_{k=1}^{\infty}$ la cual es convergente en el intervalo $[\alpha_2, \beta_2]$ e inductivamente, dado $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, elegimos una subsucesión $\{u_{n_k}^j\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_{n_k}^{j-1}\}_{k=1}^{\infty}$ la cual es convergente en el intervalo $[\alpha_j, \beta_j]$. Entonces, la sucesión diagonal $\{u_{n_k}^k\}_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre el intervalo

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k],$$

cuando $k \to \infty$.

- Paso 6: (Caso general). Denotemos por D el conjunto de discontinuidades de las funciones φ_{u_n} y φ y los puntos a y b. Ya que $(\varphi_{u_n})_k$ y φ son no decrecientes en $[a, b]$, D es a lo sumo numerable. Por hipótesis, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es precompacta puntualmente sobre $[a, b]$, así que por el lema 2.2 resulta que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión, la cual denotaremos de la misma manera, que converge puntualmente sobre D. La diferencia $[a, b] \backslash D$ es a lo sumo una unión de intervalos abiertos (a_k, b_k), $k \in \mathbb{N}$ en los cuales φ_{u_n} y φ son continuas.

  Aplicando el Paso 5, elegimos una subsucesión $\{u_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge puntualmente en (a_1, b_1); entonces elegimos una subsucesión $\{u_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{u_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ y así sucesivamente. Como resultado de esto, obtenemos la subsucesión diagonal $\{u_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge puntualmente sobre

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \ \text{ y } \ D,$$

  es decir, sobre todo el intervalo $[a, b]$. La función límite $u : [a, b] \to X$ de $\{u_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una función de variación acotada en virtud a la propiedad de semicontinuidad inferior del funcional $V(\cdot,[a,b])$:

$$V(u,[a,b]) \leq \liminf_{n\to\infty} V(u_n^n,[a,b]) \leq C.$$

$\square$

2.2 Principio de Selección de Helly para Funciones de p-Variación Acotada con $p > 1$.

2.2.1 Funciones de p-Variación Acotada

En esta sección enunciaremos y probaremos las propiedades más relevantes que satisfacen las funciones de p-variación acotada.

Dada una función $u : E \to \mathbb{R}$ y una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}(E)$, fijamos

$$V_p[u,T] := \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)^p,$$

donde

$$d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)^p = \left(d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)\right)^p.$$

Definición 2.6 (**p-Variación acotada).** *Sea $u : E \to \mathbb{R}$ una función. Definimos* la p-variación total de u sobre E *como*

$$V_p(u,E) := \sup_{T\in\mathcal{J}(E)} V_p[u,T].$$

Si $V_p(u,E) < \infty$, decimos que la función u es de p-variación acotada o finita sobre el conjunto E. Denotaremos a la clase de funciones de p-variación acotada en E por $BV_p\left(E\right)$.

Observación 5. *Por definición, si $u \in BV_p\left(E\right)$ entonces $V_p(u,E) \geq 0$.*

Ahora enunciaremos algunas propiedades generales de las funciones de p-variación acotada. Estas propiedades para $p = 1$ han sido demostradas, por ejemplo, en [6], [21] y [1]. Para el caso $p > 1$, ver [8].

Proposición 2.4. *Sea $u : E \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

(i) Minimalidad: Si $t, s \in E$, entonces

$$d(u(t), u(s))^p \leq diam\,(u\,(E))^p \leq V_p(u, E).$$

Aquí, $diam\,(u\,(E))$ denota el diámetro de la imagen de $u\,(E)$.

(ii) Monotonía: Si $a, t, s, b \in E$ tales que $a \leq s \leq t \leq b$, entonces

$$V_p\left(u, E_t^-\right) \leq V_p\left(u, E_s^-\right), \quad V_p\left(u, E_s^+\right) \leq V_p\left(u, E_t^+\right), \quad V_p\left(u, E_t^s\right) \leq V_p\left(u, E_a^b\right).$$

(iii) Semi-aditividad: Si $t \in E$ entonces

$$2^{1-p}\, V_p\,(u, E) \leq V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right) \leq V_p\,(u, E)\,.$$

(iv) Cambio de una variable: Si $F \subset \mathbb{R}$ y $\varphi : F \to E$ es una función monótona entonces

$$V_p\,(u, \varphi\,(F)) = V_p\,(u \circ \varphi, F)\,.$$

(v) Regularidad: $V_p\,(u, E) = \sup\left\{V_p\left(u, E_a^b\right) \,:\, a, b \in E,\ a \leq b\right\}.$

(vi) Semicontinuidad inferior: Si la sucesión de funciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de E en el espacio métrico X converge puntualmente a una función u cuando $n \to \infty$, entonces

$$V_p\,(u, E) \leq \liminf_{n\to\infty} V_p\,(u_n, E)\,.$$

Demostración: (i) De la definición del diámetro de un conjunto, es inmediato que $d(u(t), u(s))^p \leq diam\,(u\,(E))^p$, y de la definición de p-variación acotada se tiene que $diam\,(u\,(E))^p \leq V_p(u, E)$.

(ii) La propiedad de monotonía es obvia ya que si $A \subset B$ entonces $V_p(u, A) \leq V_p(u, B)$.

(iii) Primero, demostremos que

$$2^{1-p}\, V_p\left(u, E\right) \leq V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right).$$

Sean $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}(E)$ y $t \in E$.

Caso 1: Si $t \leq t_0$ ó $t_n \leq t$. Afirmamos que $V_p[u, T] \leq V_p[u, T \cup \{t\}]$. En efecto,

$$\begin{aligned}
V_p[u, T] &= \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)^p \\
&\leq \begin{cases} d\left(u(t_0), u(t)\right)^p + \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)^p \\ \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i), u(t_{i-1})\right)^p + d\left(u(t), u(t_n)\right)^p \end{cases} \\
&= V_p[u, T \cup \{t\}].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
V_p[u, T] &\leq V_p[u, T \cup \{t\}] \\
&\leq \begin{cases} V_p\left(u, E_t^-\right) & \text{si } t_m \leq t \\ V_p\left(u, E_t^+\right) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} \\
&\leq V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right) \\
&\leq 2^{p-1}\left(V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, tomando el supremo sobre todas las particiones $T \in \mathcal{J}(E)$ obtenemos

$$V_p\left(u, E\right) \leq 2^{p-1}\left(V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right)\right).$$

Caso 2: Si $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ para algún $k = 1, ..., n$. En este caso afirmamos que $V_p[u, T] \leq 2^{p-1} \leq V_p[u, T \cup \{t\}]$. En efecto,

$$\begin{aligned}
V_p[u,T] &= \sum_{i=1}^{n} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p + d\left(u(t_k),u(t_{k-1})\right)^p + \sum_{i=k+1}^{n} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p + \left(d\left(u(t_k),u(t)\right) + d\left(u(t),u(t_{k-1})\right)\right)^p + \sum_{i=k+1}^{n} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p + 2^{p-1}\ \left(d\left(u(t_k),u(t)\right)^p + d\left(u(t),u(t_{k-1})\right)^p\right) + \sum_{i=k+1}^{n} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p \\
&\leq 2^{p-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p + d\left(u(t_k),u(t)\right)^p + d\left(u(t),u(t_{k-1})\right)^p + \sum_{i=k+1}^{n} d\left(u(t_i),u(t_{i-1})\right)^p\right] \\
&= 2^{p-1}\ V_p[u,T\cup\{t\}].
\end{aligned}$$

Luego, si denotamos por S al conjunto $T\cup\{t\}$ entonces

$$\begin{aligned}
V_p[u,T] &\leq 2^{p-1}\ V_p[u,S] \\
&= 2^{p-1}\ \left(V_p[u,S_t^-] + V_p[u,S_t^+]\right) \\
&\leq 2^{p-1}\ \left(V_p\left(u,E_t^-\right) + V_p\left(u,E_t^+\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, tomando el supremo sobre todas las particiones $T\in\mathcal{J}(E)$ obtenemos

$$V_p\left(u,E\right) \leq 2^{p-1}\ \left(V_p\left(u,E_t^-\right) + V_p\left(u,E_t^+\right)\right).$$

Ahora probemos que

$$V_p\left(u,E_t^-\right) + V_p\left(u,E_t^+\right) \leq V_p\left(u,E\right).$$

Si $V_p\left(u,E_t^-\right)=\infty$ o $V_p\left(u,E_t^+\right)=\infty$ entonces $V_p\left(u,E\right)=\infty$ y por la propiedad de monotonía se tendría que $V_p\left(u,E\right)$ es mayor o igual que $V_p\left(u,E_t^-\right)$ y $V_p\left(u,E_t^+\right)$. Supongamos que $V_p\left(u,E_t^-\right)<\infty$ o $V_p\left(u,E_t^+\right)<\infty$. Luego, por la caracterización del supremo, para cada $\epsilon>0$ existen particiones $T_1\in\mathcal{J}(E_t^-)$ y $T_2\in\mathcal{J}(E_t^+)$ tales que

$$V_p\left(u, E_t^-\right) \leq V_p[u, T_1] + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad V_p\left(u, E_t^+\right) \leq V_p[u, T_2] + \frac{\epsilon}{2}.$$

Seguidamente,

$$\begin{aligned}
V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right) &\leq V_p[u, T_1] + V_p[u, T_2] + \epsilon \\
&\leq V_p[u, T_1 \cup \{t\}] + V_p[u, T_2 \cup \{t\}] + \epsilon \\
&= V_p[u, T_1 \cup \{t\} \cup T_2] + \epsilon \\
&\leq V_p\left(u, E\right) + \epsilon.
\end{aligned}$$

El estimado anterior vale para todo $\epsilon > 0$. Por tanto,

$$V_p\left(u, E_t^-\right) + V_p\left(u, E_t^+\right) \leq V_p\left(u, E\right).$$

(iv) Si $T_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}(F)$ y $T := \{t_i\}_{i=0}^n$ con $t_i := \varphi(\tau_i)$. Luego, por la monotonía de la función φ, se tiene que $T \in \mathcal{J}\left(\varphi\left(F\right)\right)$ y además

$$\begin{aligned}
V_p[u \circ \varphi, T_1] &= \sum_{i=1}^{n} d\left(u \circ \varphi\left(\tau_i\right), u \circ \varphi\left(\tau_{i-1}\right)\right)^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(u\left(\varphi\left(\tau_i\right)\right), u\left(\varphi\left(\tau_{i-1}\right)\right)\right)^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(u\left(t_i\right), u\left(t_{i-1}\right)\right)^p \\
&= V_p[u, T] \\
&\leq V_p\left(u, \varphi\left(F\right)\right).
\end{aligned}$$

El estimado anterior vale para toda partición $T_1 \in \mathcal{J}(F)$. Por tanto

$$V_p\left(u \circ \varphi, F\right) \leq V_p\left(u, \varphi\left(F\right)\right).$$

Por otra parte, si la partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}\left(\varphi(F)\right)$ es tal que $t_{i-1} < t_i$ para $i = 1, ..., n$. Como $t_i \in \varphi(F)$, existen $\tau_i \in F$ tal que $t_i = \varphi\left(\tau_i\right)$. Luego, por la monotonía de la función φ se tiene que $T_1 = \{\tau_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}(F)$ y

$$V_p[u,T] = V_p[u\circ\varphi, T_1] \leq V_p\,(u\circ\varphi, F)\,.$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones $T \in \mathcal{J}\,(\varphi(F))$ se tiene que

$$V_p\,(u, \varphi\,(F)) \leq V_p\,(u\circ\varphi, F)\,.$$

(v) Por monotonía se tiene que $V_p\left(u, E_a^b\right) \leq V_p\,(u,E)$ para todo $a, b \in E$. Por tanto

$$V_p\,(u,E) \geq \sup\left\{V_p\left(u, E_a^b\right)\;:\; a,b \in E,\;\; a \leq b\right\}.$$

Por otra parte, para cualquier número α con $\alpha < V_p\,(u,E)$, existe una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{J}(E)$ tal que $V_p[u,T] \geq \alpha$. Realmente, T es una partición del conjunto $E_{t_0}^{t_n}$ por lo que

$$V_p\left(u, E_{t_0}^{t_n}\right) \geq V_p[u,T] \geq \alpha.$$

Como el estimado anterior se satisface para cada una de las particiones de E se tiene que

$$\sup\left\{V_p\left(u, E_a^b\right)\;:\; a,b \in E,\;\; a \leq b\right\} \geq V_p\,(u,E)\,.$$

(vi) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < V_p\,(u,E)$. De la definición de $V_p\,(u,E)$, para cualquier $\alpha < \beta < V_p\,(u,E)$ existe una partición $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ de E tal que $V_p\,[u,T] \geq \beta$. Consideremos la función

$$h_p : X^{n+1} := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n+1-veces} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$h_p(x_0, x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} d\,(x_i, x_{i-1})^p\,.$$

Claramente, h_p es continua en cada punto de X^{n+1}. En particular, h_p es continua en $(x_0, x_1, ..., x_n) = (u(t_0), u(t_1), ..., u(t_n))$ por lo que para $\epsilon = \beta - \alpha$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $(y_0, y_1, ..., y_n) \in X^{n+1}$ con $d(x_i, y_i) < \delta$, $i = 0, 1, ..., n$ se tiene que

$$|h_p(x_0, x_1, ..., x_n) - h_p(y_0, y_1, ..., y_n)| \leq \epsilon = \beta - \alpha.$$

Por otro lado, de la convergencia puntual de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a u, existe un $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(u_n(t_i) - u(t_i)\right) \leq \delta, \quad \forall n \geq N, \quad \forall i = 0, 1, ..., n.$$

Si fijamos $(y_0, y_1, ..., y_n) = (u_n(t_0), u_n(t_1), ..., u_n(t_n))$ y notando que

$$h_p(x_0, x_1, ..., x_n) = V_p[u, T], \qquad h_p(y_0, y_1, ..., y_n) = V_p[u_n, T],$$

se tiene que

$$\beta \leq V_p[u, T] \leq V_p[u_n, T] + \epsilon \leq V_p[u_n] + \beta - \alpha \quad \forall n \geq N.$$

Por lo tanto, $\inf\limits_{n \geq N} V_p\left(u_n, E\right) \geq \alpha$ y así $\liminf\limits_{n\to\infty} V_p\left(u_n, E\right) \geq \alpha$. Luego, haciendo tender α a $V_p\left(u, E\right)$ se obtiene el resultado buscado.

□

2.2.2 Teoremas Estructurales

En esta sección enunciamos y demostramos algunos resultados importantes que utilizaremos para demostrar el Principio de Selección de Helly para las funciones de p-variación acotada.

Definición 2.7. *Una función $u : E \to X$ se dice que es una función Hölder de exponente γ, $0 < \gamma \leq 1$, si existe un número $C \geq 0$ tal que*

$$d\left(u(t), u(s)\right) \leq C\left|t - s\right|^{\gamma}$$

para todo $t, s \in E$. A la menor constante C que satisface la desigualdad anterior se le denomina la constante de Hölder de *u y la denotaremos por $H(u)$.*

A continuación, enunciamos y demostramos el primer resultado importante el cual caracteriza las funciones de p-variación acotada.

Teorema 2.5. *La función $u : E \to X$ es de p-variación acotada si y sólo si existe una función acotada no decreciente $\varphi : E \to \mathbb{R}$ y una función Hölder $v : \varphi(E) \to X$ de exponente $\gamma = \frac{1}{p}$ y $H(v) \leq 1$ tal que $u = v \circ \varphi$ sobre E.*

Más aún, si X es un espacio de Banach, la función $v : \varphi(E) \to X$ puede ser extendida a una función Hölder $\overline{v} : \mathbb{R} \to X$ de mismo exponente $\gamma = \frac{1}{p}$ y constante $H(\overline{v}) \leq 3^{1-\gamma} H(v)$.

Demostración: ($\Leftarrow$) Supongamos que φ es una función no decreciente. Ya que φ es no decreciente se tiene que

$$\varphi(E \cap [a,b]) = \varphi(E) \cap [a,b],$$

para $a, b \in E$ con $a \leq b$. Luego, por la propiedad *(iv)* de la Proposición 2.4 obtenemos,

$$V_p\left(u, E_a^b\right) = V_p\left(v \circ \varphi, E_a^b\right) = V_p\left(v, \varphi\left(E_a^b\right)\right) = V_p\left(u, \varphi(E)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\right).$$

Ahora, si $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ es una partición de $\varphi(E \cap [a,b])$, entonces

$$\begin{aligned} V_p[v,T] &= \sum_{i=1}^n d\left(v(t_i), v(t_{i-1})\right)^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(H(v)\ |t_i - t_{i-1}|^\gamma\right)^p \\ &= (H(v))^p \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= (H(v))^p (t_n - t_0) \\ &\leq (H(v))^p (\varphi(b) - \varphi(a)). \end{aligned}$$

Seguidamente, por el estimado anterior, para todo $a, b \in E$ con $a \leq b$ se tiene que

$$V_p\left(u, E_a^b\right) \leq (H(v))^p (\varphi(b) - \varphi(a)).$$

Por lo tanto,

$$\sup\left\{V_p\left(u, E_a^b\right) : a, b \in E,\ a \leq b\right\} \leq (H(v))^p (\varphi(b) - \varphi(a)).$$

De la desigualdad anterior, por la propiedad *(v)* de la Proposición 2.4, resulta que

$$V_p\left(u,E\right) \quad \leq \quad (H(v))^p\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right).$$

Finalmente, debido a que la función φ es monótona y acotada se tiene

$$\begin{aligned} V_p\left(u,E\right) &\leq (H(v))^p\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right) \\ &\leq (H(v))^p\left(\sup_{t\in E}\varphi(t)-\inf_{t\in E}\varphi(t)\right) \\ &\leq (H(v))^p\ diam\left(\varphi\left(E\right)\right)<\infty. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que u es de p-variación acotada. La prueba es totalmente análoga si φ es no creciente en E.

$(\Rightarrow)$ Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t)=V_p\left(u,E_t^-\right), \quad t\in E.$$

Afirmamos que φ está bien definida. En efecto, si $t,s\in E$ tal que $s=t$ entonces

$$\begin{cases} t\geq s \quad \text{implica} \quad V_p\left(u,E_s^-\right)\leq V_p\left(u,E_t^-\right), \\ s\geq t \quad \text{implica} \quad V_p\left(u,E_t^-\right)\leq V_p\left(u,E_s^-\right). \end{cases}$$

Por tanto $V_p\left(u,E_s^-\right) = V_p\left(u,E_t^-\right)$, es decir, $\varphi(s)=\varphi(t)$. Note que, por la definición de p-variación total, φ es no negativa. Además, φ es no decreciente ya que si $t,s\in E$ con $t\leq s$ tenemos

$$\varphi(t)=V_p\left(u,E_t^-\right)\leq V_p\left(u,E_s^-\right)=\varphi(s).$$

Más aún, φ es acotada sobre E. En efecto, para $t\in E$ resulta que

$$\varphi(t)=V_p\left(u,E_t^-\right)\leq V_p\left(u,E_t^-\right)+V_p\left(u,E_t^+\right)\leq V_p\left(u,E\right)<\infty.$$

De esta manera, hemos definido una función no negativa, no decreciente y acotada $\varphi : E\to\mathbb{R}$.

Ahora bien, definamos la función $v:\varphi\left(E\right)\to X$ como sigue: si $\tau\in\varphi\left(E\right), v(\tau)=u(t)$ para cualquier $t\in\varphi^{-1}\left(\{\tau\}\right)$. Afirmamos que v está bien definida ya que si $t,s\in\varphi^{-1}\left(\{\tau\}\right)$

con $t \leq s$, entonces $\varphi(t) = \tau = \varphi(s)$ y por las propiedades *(i)* y *(iii)* de la Proposición 2.4 resulta que para $t \in E,\ s \in E_t^+$,

$$0 \leq d\left(u(s), u(t)\right)^p \leq V_p\left(u, E_t^s\right) \leq \varphi(s) - \varphi(t) = 0,$$

de donde $d\left(u(s), u(t)\right) = 0$ y por tanto $u(s) = u(t)$.

Ahora, la representación de u es como sigue: si $t \in E$ entonces $\tau := \varphi(t) \in \varphi(E)$ y $t \in \varphi^{-1}(\{\tau\})$. Así $u(t) = (v \circ \varphi)(t)$.

Para terminar la demostración de necesidad, debemos probar que v es una función Hölder con exponente $\gamma = \frac{1}{p}$. Primero, notemos que para cualquier $\tau \in \varphi(E)$ y $t \in \varphi^{-1}(\{\tau\})$ resulta que

$$(\varphi(E))_\tau^- = \varphi(E_t^-).$$

Luego, por la propiedad *(iv)* de la Proposición 2.4, tenemos que

$$V_p\left(v, (\varphi(E))_\tau^-\right) = V_p\left(v, \varphi(E_t^-)\right) = V_p\left(v \circ \varphi, E_t^-\right) = V_p\left(u, E_t^-\right) = \varphi(t) = \tau.$$

Seguidamente, para $\alpha, \beta \in \varphi(E)$ con $\alpha \leq \beta$ entonces

$$d\left(v(\alpha), v(\beta)\right)^p \leq V_p\left(v, (\varphi(E))_\alpha^\beta\right) \leq V_p\left(v, (\varphi(E))_\beta^-\right) - V_p\left(v, (\varphi(E))_\alpha^-\right) = \beta - \alpha.$$

De lo anterior se deduce que v es una función Hölder de exponente $\gamma = \frac{1}{p}$.

Por otro lado, notemos que $v(\varphi(E)) = u(E)$ en X y

$$V_p\left(v, \varphi(E)\right) = V_p\left(v \circ \varphi, E\right) = V_p\left(u, E\right).$$

Finalmente, veremos que podemos extender v a una función Hölder $\overline{v} : \mathbb{R} \to X$ si X es un espacio de Banach. Como v es uniformemente continua sobre $\varphi(E)$, la función v admite una extensión a la clausura de $\varphi(E)$, la cual denotaremos por v_1 tal que $v_1 : \overline{\varphi(E)} \to X$ es una función Hölder de exponente γ y $H(v_1) \leq H(v)$. Antes de definir la función $\overline{v}$, note que $\mathbb{R} \backslash \overline{\varphi(E)}$ es un conjunto abierto de la recta real, por lo que $\mathbb{R} \backslash \overline{\varphi(E)}$ es a lo sumo una unión de intervalos abiertos disjuntos (a_k, b_k). Definimos $\overline{v} : \mathbb{R} \to X$

por

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} v_1(t) & \text{si } t \in \overline{\varphi(E)} \\ v_1(t) + c_k\,(t-a_k)^\gamma & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } b_k - a_k < \infty \\ v_1(b_k) & \text{si } t \in (-\infty, b_k) \text{ en caso } a_k = -\infty \\ v_1(a_k) & \text{si } t \in (a_k, \infty) \text{ en caso } b_k = \infty, \end{cases}$$

siendo

$$c_k = \frac{v_1(b_k) - v_1(a_k)}{(b_k - a_k)^\gamma}.$$

Note que, si $\|\cdot\|$ denota la norma en X entonces

$$\|c_k\| = \left\| \frac{v_1(b_k) - v_1(a_k)}{(b_k - a_k)^\gamma} \right\| = \frac{\|v_1(b_k) - v_1(a_k)\|}{|b_k - a_k|^\gamma} \leq H(v_1) \leq H(v).$$

Por tanto, si $b_k - a_k < \infty$ resulta que

$$\begin{aligned} \|\overline{v}(t) - \overline{v}(s)\| &= \|v_1(t) + c_k\,(t-a_k)^\gamma - (v_1(s) + c_k\,(s-a_k)^\gamma)\,\| \\ &= \|c_k\|\,|(t-a_k)^\gamma - (s-a_k)^\gamma| \\ &\leq H(v)\,|t-s|^\gamma, \end{aligned}$$

para todo $t, s \in [a_k, b_k]$. Además, si $a_k = -\infty$ ó $b_k = \infty$ entonces $\overline{v}$ es constante sobre $(-\infty, b_k]$ ó $[a_k, \infty)$ respectivamente, por lo que el estimado anterior vale en estos casos. Ahora para finalizar la demostración del teorema, verifiquemos que $\overline{v}$ es una función Hölder sobre $\mathbb{R}$.

Caso 1: Supongamos que $t, s \in \overline{\varphi(E)}$ entonces $\overline{v} \equiv v_1$ y por tanto $\overline{v}$ es una función Hölder en $\overline{\varphi(E)}$.

Caso 2: Supongamos que $t \in \overline{\varphi(E)}$ y $s \notin \overline{\varphi(E)}$, digamos $s \in (a_k, b_k)$ y $b_k \leq t$. Usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} \|\overline{v}(t) - \overline{v}(s)\| &= \|v_1(t) - \overline{v}(s)\| \\ &= \|v_1(t) - v_1(b_k) + v_1(b_k) - \overline{v}(s)\| \\ &\leq \|v_1(t) - v_1(b_k)\| + \|v_1(b_k) - \overline{v}(s)\| \\ &\leq H(v_1)\,|t-b_k|^\gamma + H(v)\,|b_k - s|^\gamma \\ &\leq H(v)\,(t-b_k)^\gamma + H(v)\,(b_k - s)^\gamma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= H(v)\ ((t-b_k)^\gamma + (b_k - s)^\gamma) \\
&\leq 2^{1-\gamma}\, H(v)\, |t-s|^\gamma.
\end{aligned}
$$

De esta manera $\|\overline{v}(t) - \overline{v}(s)\| \leq 2^{1-\gamma}\, H(v)\, |t-s|^\gamma$.

Caso 3: Supongamos que $s, t \notin \overline{\varphi(E)}$, digamos $t \in (a_m, b_m)$ y $s \in (a_k, b_k)$ con $b_k < a_m$. Una vez más usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\overline{v}(t) - \overline{v}(s)\| &= \|\overline{v}(t) - v_1(a_m) + v_1(a_m) - v_1(b_k) + v_1(b_k) - \overline{v}(s)\| \\
&\leq \|\overline{v}(t) - v_1(a_m)\| + \|v_1(a_m) - v_1(b_k)\| + \|v_1(b_k) - \overline{v}(s)\| \\
&\leq H(v)\ ((t-a_m)^\gamma + (a_m - b_k)^\gamma + (b_k - s)^\gamma) \\
&\leq 3^{1-\gamma}\, H(v)\, |t-s|^\gamma.
\end{aligned}
$$

Con este último caso, hemos probado que la función $\overline{v}$ es una función de Hölder sobre toda la recta real con $H(\overline{v}) \leq 3^{1-\gamma}\, H(v)$.

□

En la prueba del Principio de Selección de Helly para funciones de p-variación será suficiente probar que la convergencia de los factores involucrados en la descomposición descrita en el Teorema 1.20 de funciones de p-variación acotada. Note que una familia de funciones Hölder con constantes de Hölder acotadas uniformemente es equicontinuo. Para la convergencia de los factores no decrecientes necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.6. *Una sucesión acotada uniformemente de funciones de variable real no decrecientes tiene una subsucesión que converge punto a punto.*

La demostración del teorema anterior está contenida en los siguientes dos lemas:

Lema 2.7. *Sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones definidas en E. Si todas las funciones de la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ están acotadas por un único valor*

$$|u_n(t)| \leq K, \quad \textit{para todo } n \geq 1 \textit{ y } t \in E, \tag{2.1}$$

entonces, para cualquier subconjunto denso numerable F de E, es posible encontrar una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge en cada punto de F.

Demostración: Sea $F = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideremos el conjunto de valores de las funciones de la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $t = t_1$, $\{u_n(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$. Este conjunto es acotado ya que se satisface (2.1). Luego por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos encontrar una subsucesión convergente de $\{u_n(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$, digamos

$$\{u_n^{(1)}(t_1)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n^{(1)}(t_1) = A_1.$$

Ahora consideremos la sucesión de valores de las funciones las cuales pertenecen a la sucesión $\{u_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ en $t = t_2$, $\{u_n^{(1)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}$. Este conjunto también es acotado debido a que se satisface (2.1) y por tanto podemos volver aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass a este conjunto, dando la existencia de una subsucesión convergente de $\{u_n^{(1)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}$, digamos

$$\{u_n^{(2)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n^{(2)}(t_2) = A_2.$$

Es importante notar que el orden relativo de dos funciones $u_n^{(2)}$ y $u_m^{(2)}$ de la sucesión $\{u_n^{(2)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}$ es el mismo orden relativo que en la sucesión $\{u_n^{(1)}(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$.

Continuando este proceso indefinidamente, construimos un conjunto numerable de sucesiones convergentes

$$\begin{array}{ccccc}
u_1^{(1)}(t_1), & u_2^{(1)}(t_1), & u_3^{(1)}(t_1), & \ldots, & \lim_{n\to\infty} u_n^{(1)}(t_1) = A_1 \\
u_1^{(2)}(t_2), & u_2^{(2)}(t_2), & u_3^{(2)}(t_2), & \ldots, & \lim_{n\to\infty} u_n^{(2)}(t_2) = A_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_1^{(j)}(t_j), & u_2^{(j)}(t_j), & u_3^{(j)}(t_j), & \ldots, & \lim_{n\to\infty} u_n^{(j)}(t_j) = A_j,
\end{array}$$

donde cada sucesión de números es una subsucesión de la anterior y en la cual el orden de los elementos no están alterados. Ahora definimos la sucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos de la diagonal de la matriz infinita construida anteriormente, en decir,

$$u_{n_k} = u_k^{(k)}, \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Afirmamos que esta sucesión converge en cada punto de F. En efecto, para cada j fijo, la sucesión $\{u_{n_k}(t_j)\}_{k=1}^{\infty}$ con $k \geq j$, es una subsucesión convergente de $\{u_n^{(j)}(t_j)\}_{n=1}^{\infty}$ y converge a A_j.

□

Lema 2.8. *Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no decrecientes definidas sobre E. Si todas las funciones de la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ están acotadas por un único valor*

$$|u_n(t)| \leq K, \quad \textit{para todo } n \geq 1 \textit{ y } t \in E, \tag{2.2}$$

entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a una función no decreciente $u : E \to X$ en cada punto de E.

Demostración: Aplicamos el Lema 2.7 a la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, tomando al conjunto F como el conjunto de puntos racionales que pertenecen a E incluyendo el valor mínimo de E, $\text{mín}(E)$, si este es irracional, esto es $F = (E \cap \mathbb{Q}) \cup \{\text{mín}(E)\}$. Por tanto, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(t_j)$$

existe y es finito en cada punto $t_j \in F$.

Seguidamente, definimos la función $u : E \to X$ como sigue:

$$u(t) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(t) & \text{si } t \in F, \\ \sup\limits_{t_j<t,\, t_j\in F} \left\{ \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(t_j) \right\} & \text{si } t \in E \backslash F. \end{cases}$$

Es claro que u es no decreciente en E ya que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones no decrecientes en E. Como u es no decreciente se tiene que el conjunto de discontinuidades D es a lo sumo numerable (ver [21], capítulo VIII).

Ahora probaremos que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(t_0) = u(t_0) \tag{2.3}$$

para cada punto t_0 donde u sea continua. Sea $\epsilon > 0$ y sean $t_i, t_j \in F$ tal que

$$t_i < t_0 < t_j, \quad u(t_j) - u(t_i) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fijando t_i y t_j, escogemos un número natural k_0 tal que si $k > k_0$,

$$\left|u_{n_k}(t_i) - u(t_i)\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left|u_{n_k}(t_j) - u(t_j)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De las desigualdades anteriores obtenemos que

$$u(t_0) - \epsilon < u_{n_k}(t_i) \leq u_{n_k}(t_j) < u(t_0) + \epsilon,$$

para $k > k_0$. Ya que

$$u_{n_k}(t_i) \leq u_{n_k}(t_0) \leq u_{n_k}(t_j),$$

tenemos que

$$u(t_0) - \epsilon < u_{n_k}(t_0) < u(t_0) + \epsilon,$$

para $k > k_0$. Esto prueba (2.3). Por tanto, la igualdad

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(t) = u(t) \tag{2.4}$$

puede fallar solo en el conjunto finito o numerable D, donde u es discontinua.

Para terminar la demostración de este lema, aplicamos el Lema 1.18 a la sucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, tomando F como el conjunto de aquellos puntos de D donde (2.4) no se satisface. De esto resulta que existe una subsucesión de $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, que denotaremos de la misma manera, la cual converge en todo punto de E ya que una subsucesión de una sucesión convergente es también convergente. Entonces, definiendo

$$u(t) := \lim_{k\to\infty} u_{n_k}(t),$$

obtenemos una función que claramente es una función no decreciente.

$\square$

A continuación, enunciaremos y demostraremos un resultado más que necesitaremos para la prueba del Principio de Selección de Helly.

Teorema 2.9. *Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de variable real tal que $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ punto a punto sobre $E \subset \mathbb{R}$. Sea $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones Hölder de exponente $0 < \gamma \leq 1$ de $\mathbb{R}$ en un espacio métrico X tal que $H(v_n) < C < \infty$ para todo $n \geq 1$. Entonces $\{v_n \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntalmente sobre E si y sólo si, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre $\varphi(E)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $\{v_n \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntalmente sobre E. Sea $t \in E$ y sea

$$y = \lim_{n\to\infty} v_n\left(\varphi_n(t)\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\left(v_n\left(\varphi(t)\right), y\right) &\leq d\left(v_n\left(\varphi(t)\right), v_n\left(\varphi_n(t)\right)\right) + d\left(v_n\left(\varphi_n(t)\right), y\right) \\ &\leq C\left|\varphi_n(t) - \varphi(t)\right|^{\gamma} + d\left(v_n\left(\varphi_n(t)\right), y\right). \end{aligned}$$

Ya que los términos de la última suma anterior tiende a cero cuando $n \to \infty$, la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre $\varphi(E)$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre $\varphi(E)$. Sea $t \in E$ y sea

$$y = \lim_{n\to\infty} v_n\left(\varphi(t)\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\left(v_n\left(\varphi_n(t)\right), y\right) &\leq d\left(v_n\left(\varphi_n(t)\right), v_n\left(\varphi(t)\right)\right) + d\left(v_n\left(\varphi(t)\right), y\right) \\ &\leq C\left|\varphi_n(t) - \varphi(t)\right|^{\gamma} + d\left(v_n\left(\varphi(t)\right), y\right). \end{aligned}$$

Nuevamente, como los términos de la última suma del estimado anterior tiende a cero cuando $n \to \infty$ resulta que la sucesión $\{v_n \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntalmente sobre E.

□

2.2.3 Principio de Selección de Helly para $p > 1$

En 1912, Eduard Helly (1884 - 1943), matemático Austríaco, usó la caracterización de las funciones de variación acotada dada por C. Jordan en 1881 para demostrar un teorema de compacidad para funciones de variación acotada el cual sería conocido como el *Principio de Selección de Helly*. En 2005, John Porter en su artículo [24] demuestra el Principio de Selección de Helly para las funciones de p-variación acotada dando así una respuesta a un planteamiento presentado por Chistyakov y Galkin en [7].

En esta sección enunciamos y demostramos, finalmente, el Principio de de Selección de Helly para las funciones de p-variación acotada usando los resultados presentados en la sección anterior.

Teorema 2.10 (Principio de Selección de Helly para las funciones de p-variación acotada). *Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de p-variación acotada uniformemente de $E \subset \mathbb{R}$ en un espacio métrico X, es decir,*

$$\sup_{n\geq 1} V_p\left(u_n, E\right) < \infty,$$

tal que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es precompacto puntualmente, esto es, la clausura de* $\{u_n(t) \ : \ n \geq 1\}$ *es compacto para cada* $t \in E$*. Entonces existe una subsucesión* $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *que converge puntualmente en* E *a una función* $u : E \to X$ *de* p*-variación acotada con*

$$V_p\,(u, E) \leq \sup_{n\geq 1} V_p\,(u_n, E)\,.$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es un espacio de Banach ya que todo espacio métrico puede ser incluido isométricamente en un espacio de Banach. Ahora, acorde con el Teorema 2.5, podemos representar a cada función u_n como una composición $u_n = v_{u_n} \circ \varphi_{u_n}$ donde φ_{u_n} es la función de p-variación de u_n y $v_{u_n} : \varphi_{u_n}(E) \to X$ es una función Hölder de exponente $\gamma = \frac{1}{p}$ y $H\,(v_{u_n}) \leq 1$. Note que $\{\varphi_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de variable real no decreciente y acotada uniformemente ya que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de p-variación acotada uniformemente. Luego, por el Teorema 2.6, $\{\varphi_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{(\varphi_{u_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a una función no decreciente $\varphi : E \to \mathbb{R}$. Además, por el Teorema 2.6, podemos extender cada función v_n a una función Hölder $\overline{v_n} : \mathbb{R} \to X$ tal que $H\,(\overline{v_n}) \leq 3^{1-\gamma}\,H\,(v_n)$. Ya que $\{v_{u_n} \circ \varphi_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es precompacto puntualmente en E, por el Teorema 2.9, $\{\overline{v_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es precompacto puntualmente en $\varphi(E)$. Seguidamente, por el Teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{(\overline{v_n})_k\}_{k=1}^{\infty}$ la cual converge en $\varphi(E)$ y nuevamente aplicando el Teorema 2.9, las funciones $u_{n_k} = (\varphi_{u_n})_k \circ (\overline{v_n})_k$ converge puntualmente en E.

Finalmente,

$$V_p\,(u, E) \leq \sup_{n\geq 1} V_p\,(u_n, E)$$

se satisface gracias a la propiedad (vi) de la Proposición 2.4.

$\square$

Capítulo 3

Principio de Selección de Helly para Funciones de Φ-Variación Acotada

En esta sección se desarrolla la teoría general de funciones de Φ-variación acotada en el sentido de L. C. Young definidas sobre un subconjunto de la recta real y toma valores en un espacio métrico o normado. Primeramente, enunciamos y demostramos los teoremas estructurales y las propiedades que caracterizan esta clase de funciones. Luego, el teorema clásico del Principio de Selección de Helly de la teoría de funciones de variación acotada es generalizado para las funciones de Φ-variación acotada.

3.1 Espacio de las Funciones de Φ-Variación Acotada.

A lo largo de este capítulo utilizaremos la misma notación presentada en el Capítulo 2 de este trabajo. Además, denotaremos por $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tales que Φ es continua, estrictamente creciente, $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(\infty) = \infty$. Esto es

$$\mathcal{F} := \{\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty) : \Phi \text{ continua}, \Phi(s) < \Phi(t) \text{ para todo } s < t, \Phi(0) = 0 \text{ y } \Phi(\infty) = \infty\}.$$

Proposición 3.1. *El conjunto $\mathcal{F}$ es cerrado bajo la suma, producto, multiplicación por un escalar positivo y composición de funciones. Más aún, si $\Phi \in \mathcal{F}$ entonces $\Phi^{-1} \in \mathcal{F}$.*

Demostración: Sean $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ y $c \in (0, \infty)$. Entonces $\Phi + \Psi$, $\Phi \cdot \Psi$, $c \cdot \Phi$, $\Phi \circ \Psi$ y Φ^{-1} son funciones continuas. Además, para $s, t \in [0, \infty)$ con $s < t$, se tiene que:

- $(\Phi + \Psi)(s) = \Phi(s) + \Psi(s) < \Phi(t) + \Psi(t) = (\Phi + \Psi)(t)$.
- $(\Phi \cdot \Psi)(s) = \Phi(s) \cdot \Psi(s) < \Phi(t) \cdot \Psi(t) = (\Phi \cdot \Psi)(t)$.
- $(c \cdot \Phi)(s) = c \cdot \Phi(s) < c \cdot \Phi(t) = (c \cdot \Phi)(t)$.
- $(\Phi \circ \Psi)(s) = \Phi(\Psi(s)) < \Phi(\Psi(t)) = (\Phi \circ \Psi)(t)$.

Por tanto $\Phi + \Psi$, $\Phi \cdot \Psi$, $c \cdot \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son funciones estrictamente creciente. Afirmamos también que Φ^{-1} es una función estrictamente creciente. En efecto, sean $s, t \in \Phi([0, \infty))$ con $s < t$. Entonces existen $t_0, s_0 \in [0, \infty)$ únicos (ya que Φ es inyectiva) tal que $\Phi(t_0) = t$ y $\Phi(s_0) = s$. Luego, como Φ es estrictamente creciente debe ocurrir que $s_0 < t_0$. Así

$$\Phi^{-1}(s) = s_0 < t_0 = \Phi^{-1}(t).$$

De esta manera, Φ^{-1} es una función estrictamente creciente como hemos afirmado.

Finalmente, para $\Theta \in \{\Phi + \Psi, \Phi \cdot \Psi, c \cdot \Phi, \Phi \circ \Psi, \Phi^{-1}\}$ claramente se tiene que $\Theta(0) = 0$ y $\Theta(\infty) = \infty$.

$\square$

Definición 3.1 (Φ-Variación Total). *Sea $\Phi \in \mathcal{F}$, $f : E \subset \mathbb{R} \to X$ y $T = \{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{T}(E)$, definimos*

$$V_\Phi[f, E] \;:=\; \sum_{i=1}^{n} (\Phi \circ d)\left(f(t_i), f(t_{i-1})\right). \tag{3.1}$$

La Φ-variación total de f sobre E, denotada por $V_\Phi(f, E)$, se define como

$$V_\Phi(f, E) \;:=\; \sup\left\{V_\Phi[f, E] : T \in \mathcal{T}(E)\right\}. \tag{3.2}$$

Definición 3.2 (Φ-Variación Acotada)**.** *Dada una función $\Phi \in \mathcal{F}$, se dice que una función $f : E \to X$ es de Φ-variación acotada si $V_\Phi(f, E)$ es finito. El espacio de las funciones de Φ-variación acotada de E en X lo denotaremos por $\mathcal{V}_\Phi(E; X)$.*

Observación 6. *Para funciones reales la definición de $V_\Phi(f, E)$ fue introducida por Young en [27] y [28]. Si $\Phi(t) = t^p$, $t \geq 0$, $p > 1$, entonces*

$$V_p(f, E) \quad = \quad V_\Phi(f, E). \tag{3.3}$$

3.2 Propiedades de las Funciones de Φ-Variación Acotada.

Ahora se enuncia y demuestran las propiedades generales para la Φ-variación las cuales son una reformulación de las propiedades generales para las funciones de p-variación acotada.

Proposición 3.2. *Sea $f : E \to X$ una función arbitraria y $\Phi \in \mathcal{F}$. Entonces:*

*(P1) (**Minimalidad**) Si $t, s \in E$, entonces:*

$$\Phi(d(f(t), f(s))) \leq \Phi(diam(f(E))) \leq V_\Phi(f, E).$$

*(P2) (**Monotonía**) Si $a, b, t, s \in E$ con $a \leq t \leq s \leq b$, entonces*

$$V_\Phi\left(f, E_t^-\right) \leq V_\Phi(f, E_s^-), \quad V_\Phi(f, E_s^+) \leq V_\Phi\left(f, E_t^+\right), \quad V_\Phi\left(f, E_t^s\right) \leq V_\Phi\left(f, E_a^b\right).$$

*(P3) (**Semi-aditividad**) Si $t \in E$, entonces:*

$$V_\Phi(f, E_t^-) + V_\Phi(f, E_t^+) \quad \leq \quad V_\Phi(f, E).$$

(P4) *(***Cambio de Variable***) Si $E_1 \subset \mathbb{R}$ y $\varphi : E_1 \to E$ es una función monótona (no necesariamente estricta), entonces*

$$V_\Phi\left(f, \varphi\left(E_1\right)\right) = V_\Phi\left(f \circ \varphi, E\right).$$

(P5) *(***Regularidad***)* $V_\Phi(f, E) = \sup\left\{V_\Phi\left(f, E_a^b\right) : a, b \in E,\ a \leq b\right\}$.

Demostración: La demostración de esta proposición se realiza usando la misma línea de razonamiento como en [7] o como en la demostración de la Proposición 2.4 del Capítulo 2 de este manuscrito.

□

Proposición 3.3. *Si, cuando $n \to \infty$, la sucesión de funciones $\left\{\Phi^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\Phi \in \mathcal{F}$ y la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^E$ converge puntualmente sobre E (en la métrica d) a $f \in X^E$, entonces*

$$V_\Phi(f, E) \leq \liminf_{n\to\infty} V_{\Phi_n}(f_n, E).$$

Demostración: Para cualquier $T \in \{t_i\}_{i=0}^m$ partición de E y $n \in \mathbb{N}$ tenemos $V_{\Phi_n}[f_n, T] \leq V_{\Phi_n}(f_n, E)$. Si $\rho_{i,n} = d\left(f_n(t_i), f_n(t_{i-1})\right)$ y $\rho_i = d\left(f(t_i), f(t_{i-1})\right)$, entonces

$$V_{\Phi_n}[f_n, T] - V_\Phi[f, T] = \sum_{i=1}^{m}\left(\Phi_n\left(\rho_{i,n}\right) - \Phi\left(\rho_i\right)\right).$$

Ya que d es continuo y $f_n \to f$ puntualmente sobre el conjunto finito T, tenemos $\rho_{i,n} \to \rho_i$ cuando $n \to \infty$ para todo $i = 1, ..., m$, y ya que $\Phi_n \to \Phi$ puntualmente sobre $[0, \infty)$, $\Phi_n\left(\rho_{i,n}\right) \to \Phi\left(\rho_i\right)$ cuando $n \to \infty$. Luego

$$V_{\Phi_n}[f_n, T] \to V_\Phi[f, T]$$

cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$V_\Phi(f,E) \quad \leq \quad \liminf_{n\to\infty} V_{\Phi_n}(f_n,E)\,.$$

□

Proposición 3.4. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ *dos funciones tales que existen dos constantes* $C > 0$ *y* $\delta > 0$ *para las cuales* $\Psi(t) \leq C\,\Phi(t)$ *para todo* $t \in [0,\delta]$*. Entonces* $\mathcal{V}_\Phi(f,E) \subset \mathcal{V}_\Psi(f,E)$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{V}_\Phi(f,E)$. Si $T = \{t_i\}_{i=0}^n$ es una partición de E, entonces

$$V_\Phi[f,T] = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\rho_i) \leq V_\Phi(f,E) \qquad \text{donde } \rho_i = d\left(f(t_i), f(t_{i-1})\right).$$

Hay menos de $V_\Phi(f,E)/\Phi(\delta)$ términos en la suma anterior que son más grande que $\Phi(\delta)$ y por tanto el número de ρ_i's que son más grande que δ es menor que $V_\Phi(f,E)/\Phi(\delta)$. Si $\rho_i \leq \delta$ entonces $\Psi(\rho_i) \leq C\,\Phi(\rho_i)$ por hipótesis mientras que si $\rho_i > \delta$ tenemos que $\Psi(\rho_i) \leq \Psi(diam(f(E)))$. Seguidamente,

$$\begin{aligned} V_\Psi[f,T] &= \sum_{i=1}^{n} \Psi(\rho_i) \\ &\leq C \sum_{i=1}^{n} \Phi(\rho_i) + \Psi(diam(f(E)))\,\frac{V_\Phi(f,E)}{\Phi(\delta)} \\ &\leq C\,V_\Phi(f,E) + \Psi(diam(f(E)))\,\frac{V_\Phi(f,E)}{\Phi(\delta)} < \infty. \end{aligned}$$

El estimado anterior vale para cualquier $T \in \mathcal{T}(E)$ y por lo tanto $f \in \mathcal{V}_\Psi(f,E)$.

□

Antes de enunciar la siguiente propiedad que satisfacen las funciones de Φ-variación acotada, introduciremos un par de definiciones.

Definición 3.3 (Función super-aditiva)**.** *Se dice que una función* $\Phi \in \mathcal{F}$ *es super-aditiva si para todo* $t, s \in [0,\infty)$ *se tiene que*

$$\Phi(t) + \Phi(s) \quad \leq \quad \Phi(t+s).$$

Definición 3.4 (Función sub-aditiva)**.** *Se dice que una función $\Phi \in \mathcal{F}$ es sub-aditiva si para todo $t, s \in [0, \infty)$ se tiene que*

$$\Phi(t+s) \quad \leq \quad \Phi(t) + \Phi(s).$$

Observación 7. *Note que si $\Phi \in \mathcal{F}$ es super-aditiva si y sólo si $\Phi^{-1} \in \mathcal{F}$ es sub-aditiva. En efecto,*

($\Rightarrow$) *Sean $t, s \in \Phi\left([0, \infty)\right)$. Entonces existen $t_0, s_0 \in [0, \infty)$ únicos tal que $\Phi\left(t_0\right) = t$ y $\Phi\left(s_0\right) = s$. Luego,*

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(t+s) &= \Phi^{-1}\left(\Phi\left(t_0\right) + \Phi\left(s_0\right)\right) \\
&\leq \Phi^{-1}\left(\Phi\left(t_0 + s_0\right)\right) \\
&= t_0 + s_0 \\
&= \Phi^{-1}(t) + \Phi^{-1}(s).
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\Phi \in \mathcal{F}$ es super-aditiva entonces $\Phi^{-1} \in \mathcal{F}$ es sub-aditiva.

($\Leftarrow$) *Sean $t, s \in [0, \infty)$. Entonces existen $t_0, s_0 \in \Phi\left([0, \infty)\right)$ únicos tal que $\Phi(t) = t_0$ y $\Phi(s) = s_0$. Luego,*

$$\begin{aligned}
\Phi(t+s) &= \Phi\left(\Phi^{-1}\left(t_0\right) + \Phi^{-1}\left(s_0\right)\right) \\
&\geq \Phi\left(\Phi^{-1}\left(t_0 + s_0\right)\right) \\
&= t_0 + s_0 \\
&= \Phi(t) + \Phi(s).
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\Phi^{-1} \in \mathcal{F}$ es sub - aditiva entonces $\Phi \in \mathcal{F}$ es super - aditiva.

□

Proposición 3.5. *Si $\Phi \in \mathcal{F}$ es super - aditiva y $f : E \to X$ es una función monótona y acotada, entonces*

$$V_\Phi(f,E) = \Phi\left(diam\left(f\left(E\right)\right)\right) = \Phi\left(\sup_{t\in E} f(t) - \inf_{t\in E} f(t)\right). \tag{3.4}$$

Demostración:

Para demostrar la igualdad (3.4) basta con probar que $\Phi\left(diam\left(f\left(E\right)\right)\right) \leq V_\Phi(f,E)$ ya que gracias a la propiedad (P1) de la Proposición 3.2 se satisface la desigualdad contraria $\Phi\left(diam\left(f\left(E\right)\right)\right) \geq V_\Phi(f,E)$.

Bien, sean $T = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{T}(E)$ y $t \in E$ tal que $t_{k-1} < t < t_k$ para algún $1 \leq k \leq n$. Entonces, por la monotonía de f se tiene que

$$\left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| = \left|f(t_k) - f(t)\right| + \left|f(t) - f(t_{k-1})\right|.$$

Luego, como Φ es super-aditiva obtenemos

$$\begin{aligned}
V_\Phi[f, T \cup \{t\}] &= \sum_{i=1}^{k-1} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) + \Phi\left(\left|f(t) - f(t_{k-1})\right|\right) + \Phi\left(\left|f(t_k) - f(t)\right|\right) \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) + \Phi\left(\left|f(t_k) - f(t)\right| + \left|f(t) - f(t_{k-1})\right|\right) \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) + \Phi\left(\left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right|\right) + \sum_{i=k+1}^{n} \Phi\left(\left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|\right) \\
&= V_\Phi[f,T].
\end{aligned}$$

Seguidamente, para todo $T \in \mathcal{T}(E)$ tenemos

$$V_\Phi[f,T] \leq V_\Phi[f,\{t_0,t_n\}] = \Phi\left(\left|f(t_n) - f(t_0)\right|\right) \leq \Phi\left(diam\left(f\left(E\right)\right)\right).$$

Luego, del estimado anterior obtenemos que $V_\Phi(f,T) \leq \Phi\left(diam\left(f\left(E\right)\right)\right)$.

$\square$

Proposición 3.6. *Sean* $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$, $c > 0$ *y* $f : E \to X$ *una función. Entonces:*

(a) $V_{\Phi+\Psi}(f, E) = V_\Phi(f, E) + V_\Psi(f, E)$.

(b) $V_{\Phi\cdot\Psi}(f, E) \leq V_\Phi(f, E) \cdot V_\Psi(f, E)$.

(c) $V_{c\cdot\Phi}(f, E) = c \cdot V_\Phi(f, E)$.

(d) Si Φ *es super-aditiva entonces*

$$V_{\Phi\circ\Psi}(f, E) \leq \Phi(V_\Psi(f, E)).$$

(e) Si Φ *es sub-aditiva entonces*

$$V_{\Phi\circ\Psi}(f, E) \geq \Phi(V_\Psi(f, E)).$$

(f) Si Φ *es super-aditiva entonces*

$$V_\Phi(f, E) \leq \Phi(V_1(f, E)).$$

En particular, $\mathcal{V}_1(E; X) \subset \mathcal{V}_\Phi(E; X)$.

(g) Si Φ *es sub-aditiva entonces*

$$V_\Phi(f, E) \geq V_1(f, E).$$

En particular, $\mathcal{V}_\Phi(E; X) \subset \mathcal{V}_1(E; X)$.

Demostración: Sea $T \in \mathcal{T}(E)$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{\Phi+\Psi}[f, E] &= \sum_{i=1}^{n} ((\Phi+\Psi)\circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\Phi\circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{n} (\Psi\circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) \\ &= V_\Phi[f, E] + V_\Psi[f, E]. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todas las particiones de E en ambos lados de la igualdad anterior se obtiene (a). Ahora, para obtener (b) notemos que

$$\begin{aligned}
V_{\Phi\cdot\Psi}[f,E] &= \sum_{i=1}^{n}((\Phi\cdot\Psi)\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\Phi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\cdot(\Psi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(\Phi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\cdot\sum_{i=1}^{n}(\Psi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= V_{\Phi}[f,E]\cdot V_{\Psi}[f,E].
\end{aligned}$$

Seguidamente, para probar (c) note que

$$\begin{aligned}
V_{c\cdot\Phi}[f,E] &= \sum_{i=1}^{n}((c\cdot\Phi)\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}c\cdot(\Phi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= c\cdot\sum_{i=1}^{n}(\Phi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= c\cdot V_{\Phi}[f,E].
\end{aligned}$$

Por otra parte, para probar (d) usamos el siguiente hecho

$$\begin{aligned}
V_{\Phi\circ\Psi}[f,E] &= \sum_{i=1}^{n}((\Phi\circ\Psi)\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Phi(\Psi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\\
&\leq \Phi\left(\sum_{i=1}^{n}(\Psi\circ d)(f(t_i),f(t_{i-1}))\right)\\
&= \Phi(V_{\Psi}[f,E]).
\end{aligned}$$

Las demostraciones de la parte (e) y (g) son análogas a las demostraciones de la parte (d) y (f) respectivamente. La demostración la parte (f) es como sigue: ya que Φ es super-aditiva se tiene que Φ^{-1} es sub-aditiva. Luego usando la parte (e) de esta proposición obtenemos

$$V_1(f,E) = V_{\Phi^{-1}\circ\Phi}(f,E) \geq \Phi^{-1}\left(V_\Phi(f,E)\right)$$

□

3.3 Un Teorema de Descomposición para Funciones de Φ-Variación Acotada

Primero que todo introducimos *el módulo de continuidad* de una función acotada.

Definición 3.5 (Módulo de Continuidad). *El módulo de continuidad de una función acotada $f : E \to X$ es la función $\omega_{f,E} : (0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por*

$$\omega_{f,E}(\rho) \;\; := \;\; \sup_{s\in E} \sup \left\{ d\left(f(t), f(s)\right) : t \in E \text{ y } |t-s| \leq \rho \right\}, \quad \rho > 0. \tag{3.5}$$

En un hecho clásico que el módulo de continuidad $\omega_{f,E}$ satisface las siguientes propiedades: Para cualquier función acotada $f : E \to X$, tenemos

(a) $\omega_{f,E}$ es no decreciente sobre $(0,\infty)$.

(b) $\omega_{f,E}(0)$ es finito y

$$\omega_{f,E}(0) = \inf_{\rho>0} \omega_{f,E}(\rho) \geq 0$$

(c) f es uniformemente continua sobre E si y sólo si $\omega_{f,E}(0) = 0$.

(d) Si E es un intervalo ya sea abierto o cerrado entonces $\omega_{f,E}$ es sub-aditiva.

(e) Si E es un intervalo ya sea abierto o cerrado y f es una función uniformemente continua sobre E, entonces $\omega_{f,E}$ es continua sobre $(0,\infty)$.

(f) Para una función $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

 (i) $d\left(f(t), f(s)\right) \leq \omega\left(|t-s|\right)$ para todo $t, s \in E$.

(ii) $\omega_{f,E} \leq \omega$ sobre $[0, \infty)$.

Ahora, enunciamos y demostramos el teorema de descomposición para funciones de Φ-variación acotada.

Teorema 3.7. *Una función $f : E \to X$ es de Φ-variación acotada si y sólo si existe una función no decreciente y acotada $\varphi : E \to \mathbb{R}$ y una función $g : E_1 := \phi(E) \to X$ tal que $\omega_{g,E_1} \leq \Phi^{-1}$ sobre $[0, \infty)$ y $f = g \circ \varphi$ sobre E. Más aún, si X es un espacio de Banach, la función $g : E_1 \to X$ puede ser extendida a una función $g^* : \mathbb{R} \to X$ tal que $\omega_{g^*,E_1} \leq \Omega_{\Phi,f}$ sobre $[0, \infty)$, donde $\Omega_{\Phi,f} \in \mathcal{F}$ está definida por*

$$\Omega_{\Phi,f} \ := \ 3\,\Phi^{-1} + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]},$$

con $L := V_\Phi(f, E)$.

Demostración:

La demostración la haremos en tres partes.

Parte 1: Primero probaremos la condición de suficiencia del teorema. Bien, para cualquier partición $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ de E tenemos:

$$V_\Phi[f, T] \ = \ \sum_{i=1}^{n} (\Phi \circ d)\left(g\left(\varphi\left(t_i\right)\right), g\left(\varphi\left(t_{i-1}\right)\right)\right).$$

Ahora, el estimado $\omega_{g,E_1} \leq \Phi^{-1}$ junto con la monotonía y acotación de la función φ implica que

$$\begin{aligned} V_\Phi\left[f, T\right] \ &\leq \ \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\left|\varphi\left(t_i\right) - \varphi\left(t_{i-1}\right)\right|\right)\right) \\ &= \ \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi\left(t_i\right) - \varphi\left(t_{i-1}\right)\right| \\ &= \ \left|\varphi\left(t_n\right) - \varphi\left(t_0\right)\right| \\ &\leq \ \sup_{t\in E} \varphi(t) - \inf_{t\in E} \varphi(t) \\ &= \ diam\left(\varphi\left(E\right)\right) \ < \ \infty. \end{aligned}$$

Luego, tomando el supremo sobre todas las particiones T de E se obtiene que $V_\Phi(f, E) < \infty$. Por tanto, la función f es de Φ-variación acotada.

Parte 2: En esta parte probaremos la condición necesaria del teorema. Esto es, obtendremos la descomposición canónica de una función de Φ-variación acotada. Bien, definamos la función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = V_\Phi(f, E_t^-), \quad t \in E.$$

Afirmamos que φ es no negativa, acotada (ya que $\varphi(t) \leq V_\Phi(f, E)$para todo $t \in E$) y no decreciente gracias a la propiedad (P2) enunciada en la Proposición 3.2. Ahora, definimos la función $g : E_1 \to X$ como sigue

$$g(\tau) := f(t) \text{ para cualquier } T \in E \text{ tal que } \varphi(t) = \tau.$$

para $\tau \in E_1$. Afirmamos que g está bien definida sobre E_1. En efecto, para $t, s \in E$ con $t \leq s$. Gracias a las propiedades (P1) y (P3) de la Proposición 3.2 tenemos que

$$\Phi(d(f(s), f(t))) \leq V_\Phi(f, E_t^s) \leq \varphi(s) - \varphi(t). \tag{3.6}$$

Si $\varphi(s) = \varphi(t)$ entonces (3.6) implica que $f(s) = f(t)$ y de esta manera se obtiene que g está bien definida.

Finalmente, de la definición de la función g se tiene que $f = g \circ \varphi$ sobre E y en conjunto con la propiedad (P4) de la Proposición 3.2 se tiene que $g(E_1) = f(E)$ en X y $V_\Phi(g, E_1) = V_\Phi(f, E)$.

Para terminar esta segunda parte, veamos que $\omega_{g,E_1} \leq \Phi^{-1}$. Bien, para $\alpha, \beta \in E_1$ tenemos que $\alpha = \varphi(t)$ y $\beta = \varphi(s)$ para algunos $t, s \in E$ y por tanto, por (3.6) y la definición de g se sigue que

$$\Phi(d(g(\alpha), g(\beta))) = \Phi(d(f(t), f(s))) \leq \left|\varphi(t) - \varphi(s)\right| = |\alpha - \beta|.$$

Luego,

$$d\left(g(\alpha), g(\beta)\right) \leq \Phi^{-1}\left(|\alpha - \beta|\right).$$

De este último estimado se obtiene $\omega_{g,E_1} \leq \Phi^{-1}$.

Parte 3: Aquí probaremos la segunda parte del enunciado del teorema. Primero supongamos que X es un espacio de Banach (real o complejo) con la norma $\|\cdot\|$. Luego, como g es uniformemente continua sobre E_1, g admite una extensión $\overline{g} : \overline{E_1} \to X$ que satisface

$$\|g(t) - g(s)\| \leq \Phi^{-1}\left(|t - s|\right), \qquad \forall t, s \in \overline{E_1}. \tag{3.7}$$

Definimos g^* restringida a $\overline{E_1}$ igual a $\overline{g}$. El complemento $\mathbb{R}\backslash\overline{E_1}$ es un conjunto abierto y por lo tanto es unión (numerable a lo sumo) disjunta de intervalos abiertos no vacíos (a_k, b_k) para $k \in J$ con $J \subset \mathbb{N}$ un conjunto a lo sumo numerable. Sobre los intervalos (a_k, b_k) con $b_k - a_k < \infty$ definimos g^* como sigue

$$g^*(t) = \overline{g}\left(a_k\right) + c_k\, \Phi^{-1}\left(t - a_k\right), \quad c_k := \frac{\overline{g}\left(b_k\right) - \overline{g}\left(a_k\right)}{\Phi^{-1}\left(b_k - a_k\right)}, \quad t \in \left(a_k, b_k\right), \tag{3.8}$$

donde $\|c_k\| \leq 1$. Si $a_k = -\infty$ entonces definimos $g^*(t) = \overline{g}\left(b_k\right)$ para todo $t \in (-\infty, b_k)$ y si $b_k = \infty$ entonces definimos $g^*(t) = \overline{g}\left(a_k\right)$ para todo $t \in (a_k, \infty)$. En resumen, la función $g^* : \mathbb{R} \to X$ se define como:

$$g^*(t) = \begin{cases} \overline{g}(t) & \text{si } t \in \overline{E_1}, \\ \overline{g}\left(a_k\right) + c_k\, \Phi^{-1}\left(t - a_k\right) & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } b_k - a_k < \infty, \\ \overline{g}\left(b_k\right) & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } a_k = -\infty, \\ \overline{g}\left(a_k\right) & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ con } b_k = \infty. \end{cases} \tag{3.9}$$

Es claro que g^* extiende a g en toda la recta real. Ahora, demostremos que g^* satisface lo siguiente:

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| \leq \Omega_{\Phi,f}(|t-s|), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

donde $\Omega_{\Phi,f} \in \mathcal{F}$ está definida por

$$\Omega_{\Phi,f} \;\; := \;\; 3\,\Phi^{-1} + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]},$$

con $L := V_\Phi(f, E)$. Bien, para $t, s \in \mathbb{R}$ con $s \leq t$ tenemos cuatro casos:

Caso 1: Si $t, s \in \overline{E_1}$ es claro que g^* satisface (3.10) ya que $g^* \equiv \overline{g}$ sobre $\overline{E_1}$ y $\overline{g}$ satisface (3.7) en $\overline{E_1}$.

Caso 2: Supongamos que $t \notin \overline{E_1}$ y $s \in \overline{E_1}$. En este caso tenemos $s \leq a_k < t < b_k$ para algún $k \in J$. Si $b_k = \infty$, entonces $g^*(t) = \overline{g}(a_k)$ y así

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| = \|\overline{g}(a_k) - \overline{g}(s)\| \leq \Phi^{-1}(a_k - s) \leq \Phi^{-1}(t-s).$$

Si $b_k < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|g^*(t) - g^*(s)\| &= \|g^*(t) - g^*(a_k) + g^*(a_k) - g^*(s)\| \\
&\leq \|g^*(t) - g^*(a_k)\| + \|g^*(a_k) - g^*(s)\| \\
&= \|g^*(t) - \overline{g}(a_k)\| + \|\overline{g}(a_k) - \overline{g}(s)\| \\
&= \|\overline{g}(a_k) + c_k\,\Phi^{-1}(t - a_k) - \overline{g}(a_k)\| + \|\overline{g}(a_k) - \overline{g}(s)\| \\
&= \|c_k\,\Phi^{-1}(t - a_k)\| + \|\overline{g}(a_k) - \overline{g}(s)\| \\
&= \|c_k\|\,\Phi^{-1}(t - a_k) + \|\overline{g}(a_k) - \overline{g}(s)\| \\
&\leq \|c_k\|\,\Phi^{-1}(t - a_k) + \Phi^{-1}(a_k - s) \\
&\leq 2\,\Phi^{-1}(t-s)\,.
\end{aligned}$$

Caso 3: Supongamos que $s \notin \overline{E_1}$ y $t \in \overline{E_1}$. Aquí tenemos $a_k < s < b_k \leq t$ para algún $k \in J$. Si $a_k = -\infty$ entonces $g^*(s) = \overline{g}(b_k)$ y así

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| = \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| \leq \Phi^{-1}\,(t - b_k) \leq \Phi^{-1}(t - s).$$

Ahora, si $a_k > -\infty$ entonces $[a_k, b_k] \subset [0, L]$ y por tanto

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| = \|\overline{g}\,(a_k) - \overline{g}(s)\| \leq \Phi^{-1}\,(a_k - s) \leq \Phi^{-1}(t - s).$$

Si $b_k < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|g^*(t) - g^*(s)\| &= \|g^*(t) - g^*\,(b_k) + g^*\,(b_k) - g^*(s)\| \\
&\leq \|g^*(t) - g^*\,(b_k)\,\| + \|g^*\,(b_k) - g^*(s)\| \\
&= \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| + \|\overline{g}\,(a_k) + c_k\,\Phi^{-1}\,(b_k - a_k) - \overline{g}\,(a_k) - c_k\,\Phi^{-1}\,(s - a_k)\,\| \\
&= \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| + \|c_k\,\Phi^{-1}\,(b_k - a_k) - c_k\,\Phi^{-1}\,(s - a_k)\,\| \\
&= \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| + \|c_k\,\left(\Phi^{-1}\,(b_k - a_k) - \Phi^{-1}\,(s - a_k)\right)\| \\
&= \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| + \|c_k\|\,\left(\Phi^{-1}\,(b_k - a_k) - \Phi^{-1}\,(s - a_k)\right) \\
&= \|\overline{g}(t) - \overline{g}\,(b_k)\,\| + \left|\Phi^{-1}\,(b_k - a_k) - \Phi^{-1}\,(s - a_k)\right| \\
&\leq \Phi^{-1}\,(t - b_k) + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}\,(b_k - a_k - (s - a_k)) \\
&\leq \Phi^{-1}\,(t - s) + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}\,(b_k - s)\,.
\end{aligned}$$

Caso 4: Supongamos que $s, t \notin \overline{E_1}$. En este último caso tenemos $s \in (a_k, b_k)$ y $t \in (a_m, b_m)$ para algunos $t, s \in J$. Asumamos primero que $m = k$, así que $a_k < s \leq t < b_k$. Si $a_k = -\infty$ o $b_k = \infty$ entonces

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| \;=\; 0.$$

Si $a_k > -\infty$ y $b_k < \infty$ entonces $[a_k, b_k] \subset [0, L]$ y

$$\begin{aligned}
\|g^*(t) - g^*(s)\| &= \|\overline{g}\,(a_k) + c_k\,\Phi^{-1}\,(t - a_k) - \overline{g}\,(a_k) - c_k\,\Phi^{-1}\,(s - a_k)\,\| \\
&= \|c_k\,\Phi^{-1}\,(t - a_k) - c_k\,\Phi^{-1}\,(s - a_k)\,\| \\
&= \|c_k\,\left(\Phi^{-1}\,(t - a_k) - c_k\,\Phi^{-1}\,(s - a_k)\right)\| \\
&= \|c_k\|\,\left|\Phi^{-1}\,(t - a_k) - \Phi^{-1}\,(s - a_k)\right| \\
&\leq \left|\Phi^{-1}\,(t - a_k) - \Phi^{-1}\,(s - a_k)\right| \\
&\leq \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}\,(t - a_k - (s - a_k)) \\
&= \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}(t - s).
\end{aligned}$$

Ahora asumamos que $m \neq k$, así que $a_k < s < b_k < t$. Si $a_k = -\infty$ entonces $g^*(s) = g^*(b_k)$ y similar al caso dos tenemos:

$$\|g^*(t) - g^*(s)\| = \|g^*(t) - g^*\,(b_k)\,\| \leq \Phi^{-1}\,(t - b_k) \leq 2\,\Phi^{-1}\,(t - s)\,.$$

Luego, si $a_k > -\infty$ entonces $[a_k, b_k] \subset [0, L]$ y como en los casos 2 y 3 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|g^*(t) - g^*(s)\| &\leq \|g^*(t) - g^*\,(b_k)\,\| + \|g^*\,(b_k) - g^*(t)\| \\
&\leq \Phi^{-1}\,(t - b_k) + \left(\Phi^{-1}\,(b_k - s) + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}\,(b_k - s)\right) \\
&\leq 3\,\Phi^{-1}\,(t - s) + \omega_{\Phi^{-1},[0,L]}\,(t - s) \\
&= \Omega_{\Phi,f}(t - s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en todos los casos tenemos el estimado deseado (3.10).

Finalmente, como consecuencia del hecho que $\Phi^{-1} \in \mathcal{F}$ y las propiedades (a), (b), (c) y (e) del módulo de continuidad de la función f descrita al inicio de esta subsección se tiene que $\Omega_{\Phi,f} \in \mathcal{F}$.

□

3.4 Propiedades de Continuidad de las Funciones de Φ-Variación Acotada

En esta subsección enunciamos y demostramos algunas propiedades de continuidad de las funciones de Φ-variación acotada que necesitaremos para probar el Principio de Selección de Helly para esta clase de funciones.

A lo largo de esta subsección asumiremos que (X, d) es un espacio métrico, $\Phi \in \mathcal{F}$ es una función dada, $f : E \subset \mathbb{R} \to X$ es una función fija de Φ-variación acotada y la función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ está definida por $\varphi(t) = V_\Phi\left(f, E_t^-\right)$ para $t \in E$. Además, introducimos la siguiente notación:

- Límite lateral a derecha

$$f\left(t^+\right) = \lim_{s \to t^+} f(s), \quad s \in E.$$

- Límite lateral a izquierda

$$f\left(t^-\right) = \lim_{s \to t^-} f(s), \quad s \in E.$$

Lema 3.8. *Si $a, b, s \in E$ entonces*

$$(\Phi \circ d)\left(f(b), f(a)\right) \leq (\Phi \circ d)\left(f(s), f(b)\right) + \omega\left(d\left(f(b), f(s)\right)\right),$$

donde $\omega(\rho) = \omega_{\Phi,[0,L]}(\rho)$, $\rho > 0$, $\omega\left(0^+\right) = 0$ y $L = diam\left(f\left(E\right)\right)$.

Demostración: Ya que $d(f(t), f(s)) \leq L$ para todo $t, s \in E$, por la definición de ω y la continuidad de d tenemos que

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ d)\left(f(b), f(a)\right) &= \left|(\Phi \circ d)\left(f(b), f(a)\right)\right| \\
&= \left|(\Phi \circ d)\left(f(b), f(a)\right) + (\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right) - (\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right)\right| \\
&\leq \left|(\Phi \circ d)\left(f(b), f(a)\right) - (\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right)\right| + \left|(\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right)\right| \\
&\leq \omega\left(\left|d(f(b), f(a)) - d(f(s), f(a))\right|\right) + (\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right) \\
&\leq \omega\left(d(f(b), f(s))\right) + (\Phi \circ d)\left(f(s), f(a)\right).
\end{aligned}$$

Lo anterior ocurre para $a, b, s \in E$ □

Lema 3.9. *Si $t \in E$ es un punto límite de cada uno de los conjuntos E_t^- y E_t^+, entonces*

$$\varphi(t^+) - \varphi(t^-) \quad \leq \quad \omega(A) + \omega(B), \tag{3.11}$$

donde la función ω es la misma que en el Lema 3.8 y

$$A = A(f,t) = \lim_{s \to 0^-} d(f(t), f(s)), \;\; s \in E, \tag{3.12}$$

$$B = B(f,t) = \lim_{s \to 0^+} d(f(s), f(t)), \;\; s \in E. \tag{3.13}$$

Demostración: Fijemos un $\epsilon > 0$. En virtud a (3.12) y (3.13), escogemos $a_0, b_0 \in E$ con $a_0 < t < b_0$ tal que

$$\left| d(f(t), f(s)) - A \right| \leq \epsilon \quad \forall s \in E, \; a_0 \leq s < t, \tag{3.14}$$

$$\left| d(f(s), f(t)) - B \right| \leq \epsilon \quad \forall s \in E, \; t < s \leq b_0. \tag{3.15}$$

Sea $T = \{t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n\}$ una partición del conjunto $E_{b_0}^-$ con la propiedad

$$\varphi(b_0) - \epsilon \quad \leq \quad V_\Phi[f, T]. \tag{3.16}$$

Esta última propiedad vale por la definición de $\varphi(b_0)$ y la caracterización del supremo.

Consideremos el caso en que $t_0 < t < t_n$. Aquí hay dos posibilidades

(I) Supongamos que $t \notin T$. Entonces existe un $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $t_{k-1} < t < t_k$. Luego,

$$\begin{aligned}
V_\Phi [f, T] &= \sum_{i=1}^{n} (\Phi \circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (\Phi \circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) + (\Phi \circ d)(f(t_k), f(t_{k-1})) \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{n} (\Phi \circ d)(f(t_i), f(t_{i-1})) \\
&\leq \varphi(t_{k-1}) + (\Phi \circ d)(f(t_k), f(t_{k-1})) + V_\Phi\left(f, E_{t_k}^{b_0}\right) \\
&\leq \varphi(t_{k-1}) + (\Phi \circ d)(f(t_k), f(t_{k-1})) + \varphi(b_0) - \varphi(t^+) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado el hecho de que

$$V_\Phi\left(f, E_{t_k}^{b_0}\right) \leq \varphi(b_0) - \varphi\left(t_k^+\right) \leq \varphi(b_0) - \varphi(t^+),$$

gracias a la propiedad (P3) enunciada en la Proposición 3.2. Ahora, tenemos dos subcasos:

(I.1) Supongamos que $a_0 \leq t_{k-1}$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de ω, (3.14), (3.15) y la desigualdad triangular para d obtenemos

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ d)(f(t_k), f(t_{k-1})) &\leq \omega(d(f(t_k), f(t_{k-1}))) \\
&\leq \omega(d(f(t), f(t_{k-1})) + d(f(t_k), f(t))) \\
&\leq \omega(A + \epsilon + B + \epsilon).
\end{aligned}$$

Luego, en virtud de (3.17) se sigue que

$$V_\Phi [f, T] \leq \varphi(t^-) + \omega(A + B + 2\epsilon) + \varphi(b_0) - \varphi(t^+). \qquad (3.18)$$

(I.2) Supongamos que $t_{k-1} < a_0$. Entonces, aplicando el Lema 3.8 con $a = t_{k-1}$, $s = a_0$ y $b = t_k$, usando la desigualdad triangular para d, (3.14) y (3.15) tenemos que

$$\begin{aligned}(\Phi\circ d)\left(f\left(t_k\right),f\left(t_{k-1}\right)\right) &\leq (\Phi\circ d)\left(f\left(a_0\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)+\omega\left(d\left(f\left(t_k\right),f\left(a_0\right)\right)\right)\\ &\leq \omega\left(d\left(f\left(t\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)+d\left(f\left(t_k\right),f\left(t\right)\right)\right)\\ &\quad+(\Phi\circ d)\left(f\left(a_0\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)\\ &\leq (\Phi\circ d)\left(f\left(a_0\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)+\omega\left(A+B+2\,\epsilon\right).\end{aligned}$$

Ahora, en virtud de (3.17) y la propiedad (P3) se tiene que

$$\begin{aligned}V_\Phi\left[f,T\right] &\leq \varphi\left(t_{k-1}\right)+\omega\left(A+B+2\,\epsilon\right)+\varphi\left(b_0\right)-\varphi\left(t^+\right)\\ &\quad(\Phi\circ d)\left(f\left(a_0\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)\\ &\leq \varphi\left(a_0\right)+\omega\left(A+B+2\,\epsilon\right)+\varphi\left(b_0\right)-\varphi\left(t^+\right)\\ &\leq \varphi\left(t^-\right)+\omega\left(A+B+2\,\epsilon\right)+\varphi\left(b_0\right)-\varphi\left(t^+\right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

(II) Consideremos la segunda posibilidad, $t\in T$. Entonces existe un $k\in\{1,...,n-1\}$ tal que $t=t_k$. Luego,

$$\begin{aligned}V_\Phi\left[f,T\right] &= \sum_{i=1}^{k-1}(\Phi\circ d)\left(f\left(t_i\right),f\left(t_{i-1}\right)\right)+(\Phi\circ d)\left(f\left(t\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)\\ &\quad+(\Phi\circ d)\left(f\left(t_{k+1}\right),f\left(t\right)\right)+\sum_{i=k+2}^{n}(\Phi\circ d)\left(f\left(t_i\right),f\left(t_{i-1}\right)\right)\\ &\leq \varphi\left(t_{k-1}\right)+(\Phi\circ d)\left(f\left(t\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)+\omega\left(B+\epsilon\right)+\varphi\left(b_0\right)-\varphi\left(t^+\right),\end{aligned}\tag{3.20}$$

donde hemos usado la definición de ω y (3.15) en esta última desigualdad. Como antes, tenemos dos posibles subcasos:

(II.1) Supongamos que $a_0\leq t_{k-1}$. Entonces, tomando en consideración la definición de ω y (3.14) obtenemos

$$(\Phi\circ d)\left(f\left(t\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)\leq\omega\left(d\left(f\left(t\right),f\left(t_{k-1}\right)\right)\right)\leq\omega\left(A+\epsilon\right),$$

y así, por (3.20), se tiene que

$$V_\Phi\left[f,T\right] \leq \varphi\left(t^-\right)+\omega\left(A+\epsilon\right)+\omega\left(B+\epsilon\right)+\varphi\left(b_0\right)-\varphi\left(t^+\right).\tag{3.21}$$

(II.2) Ahora asumamos que $t_{k-1} < a_0$. Entonces, aplicando el Lema 3.8 con $a = t_{k-1}$, $s = a_0$ y $b = t_k = t$ y usando (3.14), se tiene que

$$\begin{aligned}(\Phi \circ d)(f(t), f(t_{k-1})) &\leq (\Phi \circ d)(f(a_0), f(t_{k-1})) + \omega(d(f(t), f(a_0))) \\ &\leq (\Phi \circ d)(f(a_0), f(t_{k-1})) + \omega(A + \epsilon).\end{aligned}$$

Luego, en virtud a (3.20) se sigue que

$$\begin{aligned}V_\Phi[f, T] &\leq \varphi(t_{k-1}) + \omega(A+\epsilon) + \omega(B+\epsilon) + \varphi(b_0) - \varphi(t^+) \\ &\quad + (\Phi \circ d)(f(a_0), f(t_{k-1})) \\ &\leq \varphi(t^-) + \omega(A+\epsilon) + \omega(B+\epsilon) + \varphi(b_0) - \varphi(t^+). \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Resumiendo, de (3.18), (3.19), (3.21), (3.22) y la propiedad (d) que satisface el módulo de continuidad concluimos que en ambos casos (I) y (II) tenemos la siguiente desigualdad

$$V_\Phi[f, T] \leq \varphi(b_0) + \varphi(t^-) - \varphi(t^+) + \omega(A+\epsilon) + \omega(B+\epsilon). \qquad (3.23)$$

Para el caso en que $t < t_0$ ó $t_n < t$ se puede obtener la desigualdad anterior (3.23) de manera similar al caso $t_0 < t < t_n$.

Por tanto, de (3.23) y (3.16) obtenemos

$$\varphi(t^+) - \varphi(t^-) \leq \omega(A+\epsilon) + \omega(B+\epsilon) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Finalmente, haciendo tender ϵ a 0^+ y tomando en cuenta la propiedad (e) que satisface el módulo de continuidad se obtiene el resultado del Lema 3.9.

□

Teorema 3.10. *f es continua en el punto $t \in E$ si y sólo si la función φ es continua en t.*

Demostración:

La condición de suficiencia se sigue del hecho de que

$$d\left(f(s), f(t)\right) \;\; \leq \;\; \Phi^{-1}\left(\left|\varphi(s) - \varphi(t)\right|\right), \quad s \in E.$$

Ahora, la condición de necesidad se obtiene del Lema 3.9 y las propiedades del módulo de continuidad.

□

3.5 Teorema de Compacidad para las Funciones de Φ-Variación Acotada

En esta subsección enunciamos y demostramos un resultado de compacidad relativo a las funciones de Φ-variación acotada, el cual, en la teoría de funciones de p-variación acotada con $p \geq 1$ es conocido como el Principio de Selección de Helly.

Teorema 3.11 (Principio de Selección de Helly para funciones de Φ-variación acotada)**.** *Sean $\Phi \in \mathcal{F}$, K un subconjunto compacto del espacio métrico X y sea $\mathcal{G}$ una familia infinita de funciones continuas de intervalo $[a,b]$ en K de Φ-variación acotada uniformemente, es decir,*

$$\sup_{f \in \mathcal{G}} V_{\Phi}\left(f, [a,b]\right) \;\; < \;\; \infty.$$

Entonces, existe una sucesión de funciones de $\mathcal{G}$ que converge puntualmente sobre $[a,b]$ a una función de $[a,b]$ en K de Φ-variación acotada.

Más aún, si X es un espacio de Banach, entonces el teorema vale sin suponer la continuidad de la familia de funciones, $\mathcal{G}$.

Demostración:

La demostración la haremos en tres pasos.

Paso 1: De acuerdo al Teorema 3.7 podemos escribir cualquier función $f \in \mathcal{G}$ de la forma $f = g_f \circ \varphi_f$ sobre $[a,b]$, donde $\varphi_f(t) = V_{\Phi}\left(f, [a,t]\right)$ para $t \in [a,b]$ y

$g_f : E_{1,f} := \varphi_f([a,b]) \to K$ es una función tal que $\omega_{g_f, E_{1,f}} \leq \Phi^{-1}$ sobre $[0,\infty)$. La familia de funciones no negativas y no decrecientes $\{\varphi_f \ : \ f \in \mathcal{G}\}$ es infinita y uniformemente acotada sobre $[a,b]$ ya que

$$diam\left(\varphi_f([a,b])\right) = \varphi_f(b) = V_\Phi(f,[a,b]);$$

y por tanto, contiene una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ correspondiente a la descomposición $f_n = g_n \circ \varphi_n$ (es decir, $g_n = g_{f_n}$ y $\varphi_n = \varphi_{f_n}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, la cual converge puntualmente sobre $[a,b]$ a una función no negativa y no decreciente $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $l = \varphi(b)$ y $l_n = \varphi_n(b)$ entonces $0 \leq l < \infty$ y $l_n \to l$ cuando $n \to \infty$.

Paso 2: Supongamos que la familia $\mathcal{G}$ consiste de funciones continuas. Ya que f_n es continua se tiene que, por el Teorema 3.10, φ_n es continua. Por tanto, la función g_n está definida sobre el intervalo $E_{1,f} = \varphi_f([a,b]) = [0,l_n]$. Si $l_n \geq l$ entonces consideramos g_n solo en el intervalo $[0,l]$. En caso de que $l_n < l$ entonces extendemos g_n sobre (l_n,l) definiendo $g_n(\tau) = g_n(l_n)$ para todo $\tau \in (l_n,l]$. Seguidamente $\omega_{g_n,[0,l]} \leq \Phi^{-1}$ sobre $[0,\infty)$, por lo que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K^{[0,l]}$ es equicontinuo. Por tanto, de acuerdo al Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es precompacto en el espacio $C([0,l];K)$. De esta manera, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que convergente uniformemente a $g : [0,l] \to K$ tal que $\omega_{g,[0,l]} \leq \Phi^{-1}$ sobre $[0,\infty)$. Luego, por la Parte 1 de la demostración del Teorema 3.7, la función composición $f := g \circ \varphi : [a,b] \to K$ es de Φ-variación acotada. Ahora, si $t \in [a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned}
d\left(f_{n_k}(t), f(t)\right) &= d\left(\left(g_{n_k} \circ \varphi_{n_k}\right)(t), (g \circ \varphi)(t)\right) \\
&\leq d\left(g_{n_k}\left(\varphi_{n_k}(t)\right), g_{n_k}\left(\varphi(t)\right)\right) + d\left(g_{n_k}\left(\varphi(t)\right), g\left(\varphi(t)\right)\right) \\
&\leq \Phi^{-1}\left(\left|\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)\right|\right) + d\left(g_{n_k}\left(\varphi(t)\right), g\left(\varphi(t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Los términos en la última suma tienden a cero cuando $k \to \infty$ por lo que la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente sobre $[a,b]$ a $f \in \mathcal{V}_\Phi([a,b];K)$.

Paso 3: Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{G}$ una familia de funciones de $[a, b]$ en K de Φ-variación acotada uniformemente. Usando el argumento del Paso 1, en este caso tenemos $E_{1,n} = \varphi_n([a, b]) \subset [0, l_n]$. Si $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} l_n$ entonces $0 \leq L < \infty$ y $l = \lim_{n\to\infty} l_n \leq L$, Denotamos por $\overline{g_n}$ la restricción de g_n^* dado por la tercera parte de la demostración del Teorema 3.7. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\omega_{\overline{g_n},[0,L]} \leq \Omega_{\Phi,f}$ sobre $[0, L]$ y por tanto, por el Teorema de Arzelá - Ascoli, la sucesión $\{\overline{g_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset K^{[0,L]}$ tiene una subsucesión $\{\overline{g_{n_k}}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente. Sea $\overline{g}$ el límite uniforme de $\{\overline{g_{n_k}}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, si definimos $f = \overline{g} \circ \varphi : [a, b] \to K$, para todo $t \in [a, b]$ se tiene que (como el final del paso 2)

$$\begin{aligned} d\left(f_{n_k}(t), f(t)\right) &= d\left(\left(\overline{g_{n_k}} \circ \varphi_{n_k}\right)(t), \left(\overline{g} \circ \varphi\right)(t)\right) \\ &\leq \Phi^{-1}\left(\left|\varphi_{n_k}(t) - \varphi(t)\right|\right) + d\left(\overline{g_{n_k}}\left(\varphi(t)\right), \overline{g}\left(\varphi(t)\right)\right). \end{aligned}$$

Por tanto, f_{n_k} converge puntualmente sobre $[a, b]$ a f cuando $k \to \infty$.

Finalmente, aplicando la Proposición 3.3 obtenemos que $f \in \mathcal{V}_\Phi([a, b]; K)$.

□

Capítulo 4

Algunas aplicaciones del Principio de Selección de Helly

En este capítulo se presenta tres aplicaciones del Principio de Selección de Helly en estudio de tópicos relacionado con la ingeniería.

4.1 Control térmico del modelo de Souza-Auricchio

En esta sección presentamos como se aplica el Principio de Selección de Helly para el control térmico del modelo de Souza-Auricchio para aleaciones con memoria de forma. Este trabajo está realizado por los investigadores Michela Eleuteri (Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Italy), Luca Lussardi (Technische Universität Dortmund, Dortmund, Germany) y Ulisse Stefanelli (Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, Pavia, Italy and Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Germany); donde se estudia la existencia de una solución débil del problema quasiestático

$$\begin{cases} ¢\,(\epsilon(u) - z) &= \sigma \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \sigma + f &= 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u &= u^{Dir} \quad \text{sobre } \Gamma_{Dir} \times (0, T) \\ \sigma\, n &= g \quad \text{sobre } \Gamma_{tr} \times (0, T) \\ \partial D\,(z'(t)) + \partial_z W\,(u(t), z(t), \theta(t)) &= 0 \quad \text{en } L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{dev}\right), \forall t \in (0, T) \\ z(0) &= z^0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Aquí, σ denota el stress, n es el vector normal exterior a $\partial\Omega$, ∂ es la (posiblemente parcial) subdiferencial en $L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{dev}\right)$ en el sentido del análisis convexo [4], $\mathbb{R}^{d\times d}_{dev}$ es el subespacio de los 2-tensores simétricos en $\mathbb{R}^d$ los cuales son tensores simétricos de derivación, $\Gamma_{Dir} \cap \Gamma_{tr} = \partial\Omega$, $\Gamma_{Dir} \cap \Gamma_{tr} = \emptyset$ con $\mathcal{H}^{d-1}\,(\Gamma_{Dir}) > 0$, $u^{Dir} \in W^{1,1}\left(0, T; H^1\,(\Omega, \mathbb{R})\right)$ es la condición de Dirichlet no homogénea prescrita en Γ_{Dir}, $¢$ es el 4-tensor de elasticidad simétrica y definida positiva y finalmente,

$$W : Y\left(u^{Dir}(t)\right) \to [0, \infty)$$

es el funcional de energía almacenada en el cuerpo Ω en el tiempo $t \in [0, T]$ definido por

$$W\,(u, z; \theta(t)) \;:=\; C\,(\epsilon(u) - z) + \int_\Omega \left(\frac{ch}{2}|z|^2 + I(z)\right) dx + \nu \int_\Omega |\nabla z| dx + \int_\Omega \beta\,(\theta(t))\; |z| dx,$$

siendo $C : H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}\right) \to [0, \infty)$ el funcional de energía elástica definido como

$$C(a) \;:=\; \frac{1}{2} \int_\Omega Tr\,(a \cdot ¢a)\, dx,$$

y

$$Y(\overline{u}) \;:=\; \left\{(u, z) \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right) \times L^2\left(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d}_{der}\right) \,:\, u = \overline{u} \text{ sobre } \Gamma_{Dir}\right\}.$$

Eleuteri, Lussardi y Stefanelli encuentran soluciones energéticas á la Mielke (ver por ejemplo [19] o [18]), llamadas trayectorias $(u(t), z(t)) \in Y\left(u^{Dir}(t)\right)$ tal que

$(u(0), z(0)) = (u^0, z^0)$, las funciones

$$\begin{aligned} t &\mapsto \langle l'(t), u(t)\rangle := \int_\Omega f\cdot u dx + \int_{\Gamma_{tr}} g\cdot u\, d\mathcal{H}^{d-1}, \\ t &\mapsto \beta'(\theta(t))\,\theta'(t)\,|z(t)| \end{aligned}$$

sean integrables y para todo $t \in (0, T]$ se tienen dos condiciones

(a) Estabilidad:

$$(u(t), z(t)) \in S(t, \theta(t)), \tag{4.2}$$

donde

$$S(t,\theta) \;:=\; \left\{(u,z) \in Y\left(u^{Dir}(t)\right) \,:\, \epsilon(u,z) < \infty \text{ y } \forall(\overline{u},\overline{z}) \in Y\left(u^{Dir}(t)\right)\right\}.$$

(b) Balance de energía: Si definimos

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \epsilon(u(t), z(t)) + \mathcal{F}(\theta(t), z(t)) - \langle l(t), u(t)\rangle + Diss_D\,(z, [s,t]) \\ P_2 &= +\int_0^t \int_\Omega \beta'(\theta(t))\,\theta'(t)\,|z(t)|\,dx\,ds \\ P_3 &= -\int_0^t \langle l'(s), u(s)\rangle ds, \end{aligned}$$

tenemos que

$$P_1(t) \;=\; P_1(0) + P_2 + P_3. \tag{4.3}$$

Aquí

$$Diss_D\,(z,[s,t]) \;:=\; \sup\left\{\sum_{i=1}^{N} D(z\,(t_i)\,, z\,(t_{i-1})) \,:\, s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\right\}.$$

A continuación, presentamos el resultado principal de esta sección y finalmente mostramos como interviene el Principio de Selección de Helly en la prueba del mismo.

Teorema 4.1. *Supongamos que* $u^{Dir} \in W^{1,1}\left(0,T; H^0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)\right)$, $f \in W^{1,1}\left(0,T; L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)\right)$ *y* $g \in W^{1,1}\left(0,T; L^2\left(\Gamma_{Tr}, \mathbb{R}^d\right)\right)$. *Dado* $\theta \in W^{1,1}(0,T)$ *y un valor inicial* $(u^0, z^0) \in S(0, \theta(0))$, *existe una solución energética* (u,z) *del problema* (4.1) *en el sentido* (4.2)-(4.3). *Más aún, todas las soluciones energéticas pertenecen a* $W^{1,1}\left(0,T; H^0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)\right) \times L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}_{der}\right)$.

En la prueba de este teorema se hace via discretización en la variable temporal. El Principio de Selección de Helly (una versión generalizada presentada en [17]) se utiliza para la convergencia de una evolución de tiempo continuo obteniendo así la existencia de una función $\varphi : [0,T] \to (0,\infty)$ no decreciente y de una subsucesión de $\{z_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, la cual la denotaremos de la misma manera, tal que

- $z_n(t) \to z(t)$ débil estrella en $BV\left(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}_{der}\right)$, $\forall t \in [0,T]$.
- $Diss_D\,(z_n, [0,t]) \to \varphi(t)$, para todo $t \in [0,T]$.
- $Diss_D\,(z, [s,t]) \leq \varphi(t) - \varphi(s)$, para todo $(s,t) \subset [0,T]$.

Los tres hechos anteriores es de vital importancia para asegurar la existencia de una solución energética del problema (4.1).

4.2 Derivación de modelos rígidos-plásticos

En [12] presentan una derivación rigurosa de rigidez - plasticidad como el límite de la elasto - plasticidad cuando la elasticidad tiende a infinito. Se considera un material elasto-plástico homogéneo el cual ocupa un volumen $\omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 2$ ó 3, satisfaciendo la ley de Hooke en $\mathbb{C}$. Además, se asume que el cuerpo esta sujeto a un proceso de carga dependiente del tiempo durante un intervalo de tiempo $[0,T]$ junto con $f(t)$ como cuerpo de carga, $g(t)$ como superficie de carga sobre Γ_D de $\partial\Omega$ y $w(t)$ como el desplazamiento de carga sobre la parte complementaria de Γ_D de $\partial\Omega$.

Seguidamente, se define la tensión infinitesimal $Eu(t)$ en t como

$$\begin{cases} Eu(t) &= e(t) + p(t) \text{ en } \Omega, \\ u(t) &= w(t) \text{ sobre } \Gamma_D, \end{cases}$$

donde $e(t)$ y $p(t)$ denotan la tensión elástica y la tensión plástica respectivamente.

En este contexto, el Principio de Selección de Helly asegura la existencia de una subsucesión de $\{p^\epsilon\}_\epsilon$ independiente del tiempo tal que $p^\epsilon \to p(t)$ (convergencia débil estrella) en el espacio de medidas Radon acotadas sobre $\Omega \cup \Gamma_D$ con valores sobre las matrices simétricas de traza libre obteniendo así un resultado muy importante para la derivación de modelos rígidos - plástica.

4.3 Existencia de soluciones de "measure differential equations´´

Para finalizar con las aplicaciones del Principio de Selección de Helly, presentamos el trabajo de Candra y Ram sobre la existencia y unicidad de "measure differential equations´´ en el cual muestran la existencia de una solución débil (bajo ciertas condiciones) de un problema (que plantearemos más adelante) aplicando el Principio de Selección de Helly.

En [5] consideran la siguiente ecuación diferencial

$$Dx = f(t,x) + G(t,x)\, Du, \tag{4.4}$$

donde f y G están definidas sobre el conjunto $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$; u es una función continua a derecha de variación acotada en $(0,\infty)$ con valores en $\mathbb{R}^m$.

Uno de los resultados importante presentados en [5] es sobre la existencia local de una solución de (4.4):

Teorema 4.2. *Supongamos que f y G satisfacen las siguientes condiciones sobre*

$$E \;\; := \;\; \{(t,x) \;:\; t \in [t_0, t_1],\ |x - x_0| < b\} \quad (b > 0)$$

- *$f(t,x)$ es medible en t para cada x,*
- *$f(t,x)$ es continua en x para cada t,*
- *Existe una función medible Lebesgue r tal que*

$$|f(t,x)| \leq r(t), \qquad (t,x) \in E,$$

- *$G(t, x(t))$ es continua en x para cada t,*
- *$G(t, x(t))$ es una función du-integrable para cada $x(\cdot) \in BV([t_0, t_1])$ con valores en*

$$S_b(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_0| < b\},$$

- *Existe una función dv_u-integrable, la cual denotaremos por w, tal que*

$$|G(t, x)| \leq w(t) \qquad (t, x) \in E,$$

donde v_u denota la variación total de u. Entonces existe una solución $x(\cdot)$ de (4.4) definida sobre algún intervalo de la forma $[t_0, t_0 + a]$ satisfaciendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

En la demostración de este teorema se aplica el Principio de Selección de Helly para asegurar la existencia de una subsucesión $\left\{\tilde{x}^{k_j}\right\}$ de la sucesión de funciones de variación acotada uniforme sobre $[t_0, t_0 + a]$, $\left\{\tilde{x}^{k}\right\}$ y de una función x^* tal que

$$\lim_{j \to \infty} \tilde{x}^{k_j}(t) = x^*(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + a].$$

Luego, junto con algunos argumentos de teoría de la medida, se llega a la conclusión de que x^* es la solución de (4.4) sobre $[t_0, t_0 + a]$ que pasa por (t_0, x_0).

Conclusiones y Recomendaciones

Cuando se estudian espacios métricos es importante determinar los subconjuntos compactos, es decir, aquellos conjuntos cuyas sucesiones poseen subsucesiones convergentes. A esta interrogante intentan responder varias versiones del Principio de Selección de Helly, que ha sido demostrada para distintos espacios de funciones con algún tipo de variación acotada.

La primera versión de este teorema, que aparece en muchos libros clásicos de análisis, fue demostrada para el espacio $BV[a,b]$ (Ver por ejemplo [21]). En 1959, J. Musielak y W. Orlicz [20] demuestran una versión para el espacio $BV_\varphi[a,b]$ y en 1972 Waterman observa la validez del mismo resultado para el espacio $\lambda BV[a,b]$

La intención de este trabajo es recopilar varias versiones del Principio de Selección de Helly para diferentes clases de funciones de variación acotada como un primer paso con el fin de la familiarización de los conceptos claves y resultados relevantes que posee este tópico para, posteriormente, seguir en el estudio de este principio para otras clases de funciones con algún otro tipo de variación acotada.

Es imperativo obtener resultados de compacidad en espacios métrico ya que, como se ha podido apreciar en el capítulo 4, el Principio de Selección de Helly es una de las herramientas importantes de la matemática para obtener resultados de existencia en el análisis matemático, teoría de probablidad, etc.

Para otros espacios de funciones con algún tipo de variación, como $RV_\varphi[a,b]$;

$BV_{\varphi}[a,b]$; $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ no conocemos versión de este teorema. Sin embargo, estimamos que en estos espacios podrán establecer teorema tipo "Arzelà-Ascoli´´ (ver [13] o [15]).

Establecer un teorema de compacidad para los espacios anteriormente mencionados es el próximo paso en la investigación, lo cual se desarrollará en un trabajo de maestría más adelante.

Bibliografía

[1] L. Avila, (1994) *Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz,* Trabajo de pasantía, Universidad Nacional Abierta, Pto. Fijo, Venezuela.

[2] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*,Academic Press, New York and London (1972).

[3] S. A. Belov and V. V. Chistyakov, A selection principle for mappings of bounded variation,Journal of Mathematical Analysis and Applications **249** (2000), 351-366.

[4] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math Studies, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam/New York, (1973).

[5] Purna Candra Das and Rishi Ram Sharma, *Existence and stability of measure differential equations*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), N° 1, 145 - 158.

[6] V. V. Chistyakov, On mapping of bounded variation, Journal Dynamical and control Systems **3**(2) (1997), 261-289.

[7] V. V. Chistyakov and O. E. Galkin, *Mapping of bounded ϕ-variation with arbitrary function ϕ*, (1998), 217-247.

[8] V. V. Chistyakov and O. E. Galkin, *On maps of bounded p-variation with $p > 1$*, Positivity 2 (1998), 19-45.

[9] E. D. Conway and J. A. Smoller *Global solutions of the Cauchy problem for quasi - linear first - order equations in several space variables*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 19 (1996), N_1, 95-105.

[10] E. De Giorgi, *Sviluppi dell'analisi funzionale nel novecento, Il pensiero matematico del XX secolo e l'opera di Renato Caccioppoli*, Istituto italiano per gli studi filosofici, Seminari di Scienze, 5, Napoli, (1989), 41 - 59

[11] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Heidelberg. Springer - Verlag (1969).

[12] Jean-François Babadjian, Gilles A. Francfort, *A note on the derivation of rigid-plastic models*, Nonlinear Differential Equations and Applications N° DEA, 2016, N° DEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (3), pp.23 - 37.

[13] Hewit, E. and Stromberg, K., *Real and abstract analysis*, Springer - Verlag, 1978.

[14] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 92 (1881), 228-230.

[15] Kelley, J. L., *Topología general*, Eudeba, Buenos Aires, 1975.

[16] C. Maeve McCarthy, *The optimal design of tubular structures*, Journal of Computational and Applied Mathematics 114 (2000), 55 - 66.

[17] A. Mainik and A. Mielke, *Existence results for energetic models for rate-independent systems*, Calc. Var. Partial Differential Equations, (2005).

[18] A. Mielke, *Evolution of rate-independent systems*, In C. Dafermos and E. Feireisl, editors, Handbook of Differential Equations, evolutionary equations, volume 2, Elsevier, (2005).

[19] A. Mielke and F. Theil, *On rate-independent hysteresis models*, Nonlinear Diff. Equations Applications, **11**, (2004), 151 - 189.

[20] Musielak, J and Orlicz, W., *On generalized variations (I)*, Studia Math. 18 (1959), 11 - 41.

[21] I. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. I, New York (1994).

[22] O. A. Oleinik, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 12 (1957), 3 - 73.

[23] O. A. Oleinik, *Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of "vanishing viscosity"*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 14 (1959), 159 - 164.

[24] J. E. Porter, *Helly's selection principle for function of bounded p-variation*, Journal of Mathematics 35 (2005), 675 - 679.

[25] F. Riesz, *Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), 449 - 497.

[26] N. Wiener, *The quadratic variation of a function sand its Fourier coefficient*, J. Mass. Inst. Technology, 3 (1924), 73 - 94.

[27] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de Pussanse Piéme borneé au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier,* C.R.Acad. Sci. París, Ser A - B, 240 (1937), 470 - 472.

[28] L. C. Young, *General inequalities for Stieltjes integral and the convergence of Fourier series*, Math. Ann., Paris 115 (1938), N° 4, 581 - 612.