

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMATICAS DE LA COMPUTACION



UNA FORMULACION MIMETICA MIXTA PARA ECUACIONES ELIPTICAS

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la Licenciada Chanel Carolina Chacón Suescún para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Ciencias de la Computación.

Tutor: Dr. Juan Manuel Guevara Jordán

Caracas-Venezuela
31/01/2017



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



Comisión de Estudios
de Postgrado

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado** presentado por: **CHANEL CAROLINA CHACÓN SUESCÚN** Cédula de identidad N° 10865618, bajo el título "**UNA FORMULACIÓN MIMÉTICA MIXTA PARA ECUACIONES ELÍPTICAS**", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM, MENCIÓN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 31 de Enero de 2017 a las 09:00 AM., para que la autora lo defendiera en forma pública, lo que ésta hizo en la Sala Bemporad de la Escuela de Computación, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo**, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por la autora, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado representa un aporte original al estudio de los métodos miméticos de diferencias finitas.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 31 días del mes de Enero del año 2017, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como Coordinador del jurado el Dr. Juan Manuel Guevara Jordán.

Dr. Oswaldo Jiménez / C.I.:6044417
Universidad Simón Bolívar

Dr. Luis M. Hernández / C.I.:6766769
Universidad Central de Venezuela

Dr. J.M Guevara Jordán / C.I. 6006521
Universidad Central de Venezuela
Tutor



POSTGRADO EN CIENCIAS
DE LA COMPUTACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Resumen

En esta tesis se propone y evalúa un nuevo esquema mimético unidimensional y bidimensional para ecuaciones elípticas usando los operadores desarrollados por Castillo-Yasuda. Las discretizaciones antes citadas se caracterizan por ser de segundo orden de aproximación en todos los nodos de la malla lo cual representa una novedad en el contexto de las formulaciones miméticas mixtas. Los sistemas de ecuaciones lineales obtenidos a consecuencia de implementar la formulación mimética mixta presentan estructura simétrica y de bloque, por tal motivo se proponen tres métodos de solución: método acoplado, método segregado de presión y método segregado de velocidad, los cuales utilizan internamente GMRES sin preconditionador ni restart como resolvidor lineal. Se mostrarán experimentos numéricos unidimensionales y bidimensionales que evidencian la superioridad del método segregado para la velocidad, el cual converge en el menor número de iteraciones, siendo esto un resultado original en el área de los métodos miméticos.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios Todo Poderoso por haberme acompañado y guiado en esta etapa de mi vida, por ser fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizaje y experiencias.

A la memoria de mi papá, Dimas Chacón.

A mis hijas, Karola por su comprensión en todo momento y Sofía por su amor.

A mi madre, por ser quien soy.

A mis amigas Alejandra, Karla y Florymar por su apoyo incondicional.

A mi tutor, Juan Guevara, a quien me gustaría agradecer sinceramente por su esfuerzo y dedicación. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia y su paciencia han sido fundamentales en mí. A su manera ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con él por todo lo recibido durante el período de tiempo que ha durado esta tesis de maestría.

Chanel

Indice general

Resumen	i
Agradecimientos	ii
Lista de Figuras	vi
Lista de Tablas	viii
1 Antecedentes	1
1.1 Introducci3n	1
1.2 Motivaci3n	1
1.3 Trabajos Previos	4
1.4 Estructura del Trabajo	7
2 Operadores Mim3ticos	8
2.1 Introducci3n	8
2.2 Operadores 1D	8
2.2.1 Malla Mim3tica o Staggered	9
2.2.2 Discretizaciones para los Operadores Gradiente y Divergencia	10
2.2.3 Versi3n Discreta del Teorema de Green-Gauss-Stokes	14
2.3 Operadores 2D	19
2.3.1 Malla Mim3tica o Staggered	19
2.3.2 Discretizaciones para los Operadores Gradiente y Divergencia	22
2.3.3 Versi3n Discreta del Teorema de Green-Gauss-Stokes	25
3 Formulaci3n Mim3tica Mixta	27
3.1 Introducci3n	27
3.2 Concepto del Esquema Mim3tico	28
3.3 Formulaci3n 1D	29
3.4 Formulaci3n 2D	33
4 M3todos de Soluci3n	38

4.1	Introducción	38
4.2	Método Acoplado	39
4.3	Métodos Segregados	40
4.3.1	Método Segregado P	40
4.3.2	Método Segregado U	42
4.4	Método Iterativo GMRES	44
5	Resultados Numéricos	47
5.1	Introducción	47
5.2	Problemas 1D	48
5.2.1	Test 1	48
5.2.2	Test 2	53
5.3	Problemas 2D	59
5.3.1	Test 1	60
5.3.2	Test 2	66
5.3.3	Test 3	74
5.4	Conclusiones	81

Nomenclatura	84
Bibliografia	86

Indice de figuras

2.1 Malla mimética o staggered en 1D	9
2.2 Malla mimética o staggered en 2D	19
2.3 Malla mimética bidimensional usada por u, B y D	20
2.4 Malla mimética bidimensional usada por G	21
2.5 Estructura matricial del gradiente mimético en 2D	23
2.6 Estructura matricial de la divergencia mimética en 2D	25
3.1 Matriz asociada a la formulación mimética mixta en 1D	32
3.2 Representación gráfica de la estructura matricial para la formulación mimética mixta en 1D	33
3.3 Condiciones de borde tipo Robin en 2D	34
3.4 Representación gráfica de la estructura matricial para la formulación mimética mixta en 2D	37
4.1 Estructura de la matriz de coeficientes del Método Segregado P	41
4.2 Estructura de la matriz de coeficientes del Método Segregado U	43
4.3 Estructura la nueva matriz de coeficientes del Método Segregado U	43
5.1 Comportamiento de los errores numéricos en norma del máximo Test 1 1D	51
5.2 Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 1 1D	53

5.3	Comportamiento de los errores numéricos en norma del máximo Test 2 1D	56
5.4	Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 2 1D	59
5.5	Solución analítica del Test 1 2D	61
5.6	Comportamiento de los errores numéricos en norma del máximo Test 1 2D	63
5.7	Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 1 2D	65
5.8	Comportamiento de errores numéricos en norma del máximo Test 2 2D . .	70
5.9	Comportamiento de los errores numéricos mallas par-par Test 2 2D	72
5.10	Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 2 2D	73
5.11	Geometría real del problema heterogéneo del Test 3 2D	75
5.12	Comportamiento numérico para la presión y la velocidad empleando la formulación inicial Test 3 2D	79
5.13	Comportamiento numérico para la presión y la velocidad empleando la formulación alternativa Test 3 2D	80

Indice de cuadros

4.1	Algoritmo GMRES	46
5.1	Errores y tasas de convergencia para la presi3n Test 1 1D	49
5.2	Errores y tasas de convergencia para la velocidad Test 1 1D	50
5.3	N3mero de iteraciones GMRES Test 1 1D	52
5.4	Tasas de convergencia para la presi3n Test 2 1D	57
5.5	Tasas de convergencia para la velocidad Test 2 1D	57
5.6	N3mero de iteraciones GMRES Test 2 1D	58
5.7	Errores y tasas de convergencia para la presi3n Test 1 2D	62
5.8	Errores y tasas de convergencia para la velocidad Test 1 2D	62
5.9	N3mero de iteraciones GMRES Test 1 2D	64
5.10	Dimensiones y condiciones de las matrices del Test 1 2D	66
5.11	Errores num3ricos para la presi3n Test 2 2D	69
5.12	Errores num3ricos para la velocidad Test 2 2D	69
5.13	Tasas de convergencia para la presi3n Test 2 2D	71
5.14	Tasas de convergencia para la velocidad Test 2 2D	71
5.15	N3mero de iteraciones GMRES Test 2 2D	72
5.16	Dimensi3n y condici3n de la matriz para el Test 2 2D	74
5.17	Posiciones y tasas de flujo para los pozos del Test 3 2D	75

5.18 Resultados numéricos para la formulación inicial del Test 3 2D	78
5.19 Resultados numéricos para la formulación alternativa del Test 3 2D	79

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 Introducción

El contenido de este capítulo está dividido en tres secciones. La primera de ellas muestra la posición de los esquemas miméticos en general dentro del contexto de los métodos numéricos empleados en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. En la segunda sección, se hace una revisión bibliográfica de las investigaciones realizadas en el área de los métodos miméticos hasta la presente fecha, y para cerrar se presenta la estructura de este trabajo de grado.

1.2 Motivación

En la actualidad se emplean tres tipos de métodos numéricos que dominan el mundo de la discretización y solución de ecuaciones diferenciales parciales. Ellos son, el método de diferencias finitas, el método de elementos finitos y el método espectral. Cronológicamente el método de diferencias finitas fue el primero en ser

desarrollado e implementado computacionalmente. Luego el método de los elementos finitos, en la década de los años sesenta, a consecuencia de los avances tecnológicos en cuanto a hardware. Por último en aparecer fue el método espectral, el cual requiere de una eficiente implementación, a nivel de software, de ciertos algoritmos numéricos periféricos no relacionados directamente con el objetivo fundamental del método.

El método espectral [1, 2] fue un resultado directo de la eficiente implementación numérica de la transformada rápida de Fourier [3]. Entre sus mayores ventajas están la facilidad de producir esquemas numéricos de orden superior, su simple extensión a varias dimensiones, la alta precisión de sus aproximaciones y su eficiencia computacional en términos de tiempo de ejecución. Entre sus debilidades se encuentra el bajo orden de aproximación de las soluciones asociadas a ecuaciones con coeficientes discontinuos, su incapacidad para resolver ecuaciones definidas sobre dominios irregulares y su poca adaptabilidad para resolver condiciones de borde de tipo Robin. El área de mayor aplicación de estos métodos es la simulación numérica y predicción de las condiciones meteorológicas.

Por otra parte tenemos el método de elementos finitos [4, 5] desarrollado específicamente para resolver de forma precisa ecuaciones diferenciales definidas sobre regiones o volúmenes irregulares. Existen muchísimas formulaciones de este método, entre las más representativas están la de Galerkin, variacional de Ritz, mínimos cuadrados y mixta de Raviart-Thomas. Todas ellas realizan sus discretizaciones a nivel de dominios o regiones usando mallas y bases de funciones cuyas combinaciones lineales aproximan la solución buscada. Dentro del mismo método existe una variante denominada elementos finitos de contorno [6], la cual tiene la ventaja de discretizar las ecuaciones a lo largo del borde de la región de interés sin hacer uso de mallas interiores. El método de los elementos finitos tiene la mejor fundamentación

matemática debido a que sus aspectos teóricos se adaptan perfectamente a las herramientas del análisis funcional [7]. Las principales ventajas de este método son su riguroso manejo de las condiciones de borde, completa adaptación a regiones irregulares y se pueden hacer formulaciones con cualquier orden de aproximación. Su mayor desventaja es que generalmente no es conservativo, su implementación computacional es la más compleja de todas y es el más lento de los tres métodos mencionados. Los métodos de elementos finitos han sido aplicados en casi todas las ramas de la técnica e ingeniería debido a su sólida fundamentación matemática. Sus mejores logros se encuentran en la simulación y diseño de estructuras donde no tiene rivales.

Luego tenemos que el método de diferencias finitas [8, 9, 10] es el más simple de todos. Su concepción básica consiste en aproximar las derivadas que aparecen en las ecuaciones diferenciales por aproximaciones truncadas de sus desarrollos de Taylor, llamadas diferencias finitas, en cada uno de los nodos de la malla de discretización. Esta técnica permite transformar la ecuación diferencial original en un sistema algebraico de ecuaciones, cuya resolución produce la solución aproximada buscada. El proceso de discretizar las condiciones de borde no es único ni sistemático, pero el más aceptado consiste en extender las mallas mediante el uso de puntos fantasmas o imaginarios, lo cual hace al método poco riguroso en este aspecto. Entre las principales ventajas del método de diferencias finitas están su fácil implementación computacional, simplicidad en su formulación, rápidos tiempos de ejecución, es conservativo casi siempre y puede ser aplicado a cualquier tipo de ecuación diferencial parcial. Sus desventajas son la poca rigurosidad en la discretización de las condiciones de borde, difícil de adaptar a regiones irregulares, complejidad para analizarlo matemáticamente. Sus mejores logros se encuentran en la simulación de sistemas

de flujo de fluidos basados en los distintos casos que genera la ecuación de Navier Stokes.

Todos los métodos mencionados tienen sus ventajas y debilidades por lo que no es posible calificar a ninguno como el mejor. Sin embargo, las ventajas computacionales de los métodos espectrales y diferencias finitas producidas por la esparcidad y estructura de las ecuaciones algebraicas asociadas a ellos, han permitido que mantengan su propia vigencia y metodología frente al método de elementos finitos. Ello permite la aparición permanente de nuevas formulaciones y adaptaciones que tratan de extender el campo de aplicabilidad de cada método. En ciertas ocasiones las nuevas versiones o variaciones de cada uno de estos métodos reciben nombres particulares y en especial cuando ellas representan mejoras o adelantos considerables respecto a la técnica original. Este es el caso de los métodos miméticos, los cuales son una variación exitosa del tradicional método de diferencias finitas que hemos mencionado.

1.3 Trabajos Previos

Los métodos miméticos tienen sus orígenes en el extenso trabajo sobre esquemas de diferencias finitas tradicionales realizado por el académico A.A. Samarsky [11, 12] en el cual encontraron que los esquemas de diferencias finitas tradicionales producían discretizaciones de las ecuaciones diferenciales que no preservaban las propiedades y relaciones fundamentales, establecidas en el cálculo diferencial e integral, entre los operadores diferenciales continuos que las constituían. Lo cual incluía, implícitamente, el problema del tratamiento poco sistemático de las condiciones de borde. Siendo esta una de las razones fundamentales de

la baja calidad de las aproximaciones producidas mediante diferencias finitas tradicionales sobre todo al tratar de simular numéricamente fenómenos físicos bajo condiciones extremas. Adicionalmente, esa incongruencia entre discretizaciones y fórmulas continuas no permitían desarrollar un análisis riguroso y estandarizado de los esquemas de diferencias finitas. Para remediar, en parte, esta situación se propuso realizar discretizaciones de los operadores clásicos constituyentes de las ecuaciones diferenciales parciales (divergencia, gradiente y rotacional) de tal forma que ellas verificaran versiones discretizadas del teorema de Green-Gauss-Stokes, lo cual implicaba que cualquier esquema numérico derivado a partir de ellos fuera conservativo, siendo esta última propiedad clave para producir aproximaciones de alta calidad. Los esquemas de diferencias finitas obtenidos mediante esas aproximaciones recibieron el nombre de método de diferencias finitas basados en operadores [13, 14] y ciertamente marca el inicio de los métodos miméticos. Desde ese momento se desarrollaron diversas investigaciones tanto desde el punto de vista computacional como matemático.

Al inicio de los años noventa muchos de los exalumnos de Samarsky que habían participado en el desarrollo de los métodos miméticos publicaron los fundamentos del método de diferencias finitas basados en operadores, resumidos bajo el nombre de método de operadores de soporte [15]. Casi en simultáneo con dicha publicación surgieron una sucesión de artículos en revistas técnicas [16, 17, 18, 19] donde los métodos de operadores de soporte son evaluados numéricamente en problemas de alta dificultad. En ellos se evidencian las ventajas sobre el método de diferencias finitas tradicional y demuestran su carácter conservativo al satisfacer versiones discretizadas del teorema de Green-Gauss-Stokes.

El nombre de métodos de operadores de soporte fue cambiado al de métodos

miméticos pues de esa forma se expresaba mejor la propiedad que tienen de satisfacer versiones discretas del teorema de Green-Gauss-Stokes. Siendo esta la propiedad fundamental que caracteriza a los métodos miméticos y generaliza la noción de esquema conservativo. Luego en el año 2002, [20], se planteó por primera vez la formulación mimética mixta que permitía resolver problemas de flujo en medios porosos. Tres años después, en [21], nos encontramos con un estudio donde se evidencia que dicha formulación mixta mejoraba en algunos casos las aproximaciones para la velocidad.

Las formulaciones miméticas mixtas propuestas en [20, 21] emplearon discretizaciones cuyos ordenes de aproximación no eran uniformes en todos los nodos de la malla para los operadores gradiente y divergencia, específicamente eran de primer orden en los bordes y de segundo orden en los nodos interiores.

Poco después en [22, 23] se propone un método general para obtener operadores miméticos de orden superior cuyas aproximaciones son uniformes sobre toda la malla. Estas publicaciones motivaron un nuevo tipo de método mimético, publicado en [24], en el cual los operadores miméticos son de segundo orden en todos los nodos de la malla y además estos operadores fueron empleados para generar una nueva formulación reducida o segregada para el caso de la ecuación de Poisson. Los operadores propuestos en [24, 27] serán utilizados en la construcción de la nueva formulación mimética mixta que estamos proponiendo.

Hasta la fecha no se han reportado formulaciones miméticas mixtas que utilicen los operadores miméticos de Castillo-Yasuda planteados en [24, 27] bajo el contexto de las ecuaciones elípticas.

1.4 Estructura del Trabajo

El contenido de esta tesis se ha distribuido de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se establecerán los conceptos y propiedades de los Operadores Miméticos de segundo orden para el caso 1D y 2D. Luego, en el Capítulo 3 se plantea la nueva formulación mimética mixta de segundo orden aplicada a una ecuación diferencial parcial de tipo elíptica para el caso 1D y 2D bajo condiciones de frontera de tipo Robin en general. En el Capítulo 4 se presentan tres técnicas que nos permite resolver los sistemas lineales obtenidos a consecuencia de la implementación de la formulación mixta en estudio. Para finalizar en el capítulo 5 mostramos los resultados numéricos obtenidos en 1D y 2D que evalúan el alcance de la nueva formulación mimética mixta en estudio.

Capítulo 2

Operadores Miméticos

2.1 Introducción

A continuación se establecerán las definiciones y propiedades que usaremos a lo largo de este trabajo para los operadores miméticos de segundo orden tanto en 1D como en 2D. El contenido del capítulo se ha desarrollado en dos secciones. En la primera sección se construyen los operadores miméticos unidimensionales. En la segunda sección se definen los operadores miméticos bidimensionales sobre mallas uniformes, lógicamente rectangulares, ortogonales usando la noción de producto tensorial y los operadores unidimensionales de la sección anterior.

2.2 Operadores 1D

En esta sección comenzamos por la definición y descripción de la malla mimética unidimensional sobre la cual se construirán las discretizaciones de segundo orden para los operadores gradiente y divergencia que luego serán utilizados para obtener

la formulaci3n mim3tica mixta para una ecuaci3n el3ptica.

2.2.1 Malla Mim3tica o Staggered

La discretizaci3n mediante el uso de esquemas mim3ticos requiere de una malla cuyas caracter3sticas en los bordes difiere de forma sustancial de aquellas mallas usualmente empleadas por otros m3todos num3ricos. Por tal motivo la llamaremos malla mim3tica o staggered, aunque tal denominaci3n no es de uso com3n pues ciertos autores prefieren llamarla malla punto distribuida. En la figura 2.1 se observa la malla mim3tica para un intervalo cerrado unidimensional $[x_0, x_N]$, en este trabajo asumiremos espec3ficamente el intervalo unitario $[0, 1]$. En dicha malla, los puntos $x_i = ih$ con $i = 0, \dots, N$ definen la posici3n de los lados de los bloques, los cuales est3n representados por los peque1os segmentos verticales consecutivos. El tama1o de los bloques es $h = 1/N$, s3lo en aquellos casos en que la malla es uniforme. Por otra parte, los puntos negros internos que se observan en la figura corresponden a los centros de cada bloque, los cuales se definen de manera usual mediante la siguiente

$$\text{relaci3n : } x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

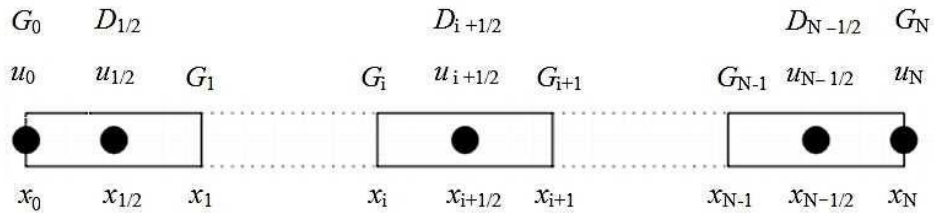


Figura 2.1: Malla mim3tica o staggered en 1D

Una caracter3stica fundamental de este tipo de mallas es la adjudicaci3n de nodos en los bordes exteriores de los bloques extremos, lo cual se puede apreciar en la

figura 2.1 donde se observa una superposici3n de los puntos negros con las l3neas verticales, lo cual no ocurre en ning3n otro lugar de la malla. En la parte superior de la misma figura 2.1 est3n definidas tres sucesiones de variables $u_0, u_{i+\frac{1}{2}}, u_N$, $\{G_i\}$ y $D_{i+\frac{1}{2}}$ que representan las posiciones donde se eval3an la soluci3n u de la ecuaci3n el3ptica, el operador gradiente G y la divergencia D respectivamente. La expresi3n de los sub3ndices ha sido escogida por conveniencia para satisfacer relaciones entre el gradiente, la divergencia y la ecuaci3n el3ptica. Es importante decir que la disposici3n de estas tres sucesiones sobre la malla mim3tica es est3andar excepto en los bordes, donde el operador gradiente G y la soluci3n u son evaluados simult3neamente.

2.2.2 Discretizaciones para los Operadores Gradiente y Divergencia

Una vez definida la malla mim3tica en 1D, figura 2.1, pasamos a desarrollar las discretizaciones para los operados mim3ticos. Comenzamos por el gradiente. Consideremos un punto gen3rico x_i en el interior de la malla. La discretizaci3n para el gradiente viene dado por la f3rmula de diferencias finitas centrada para la primera derivada por

$$(Gu)_i = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (2.1)$$

la cual representa una aproximaci3n bien conocida y cuyo orden de aproximaci3n es cuadr3tico.

Por otro lado, la discretizaci3n en los nodos frontera x_0 y x_N desempe3an un papel fundamental en nuestro trabajo, debido a que est3n en el borde de la malla mim3tica. Como no haremos uso de nodos imaginarios o fantasmas, entonces se utilizar3an aproximaciones laterales para la derivada en estos puntos. Pero para garantizar que

nuestra aproximación siga siendo de segundo orden se utilizará una variable lateral adicional. Se pudiera proceder de diversas maneras, sin embargo, en este trabajo por tratarse de un esquema de segundo orden utilizaremos la tradicional expansión de Taylor para así obtener aproximaciones de segundo orden del gradiente en el borde. Primeramente consideremos dichas expansiones para el caso del nodo x_0 de la función u y seguidamente se resolverá el sistema lineal generado, obteniéndose la siguiente expresión:

$$u'(0) = -\frac{8}{3h}u(0) + \frac{2}{h}u\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{3h}{1}u\left(\frac{3h}{2}\right) + O(h^2) \quad (2.2)$$

donde al truncar el término cuadrático resulta la expresión de la aproximación lateral de segundo orden para la derivada en el punto x_0 . En consecuencia, usando la expresión dada en la ecuación (2.2) definimos la aproximación del operador gradiente en el punto x_0 de la siguiente manera

$$(Gu)_0 = -\frac{8}{3h}u_0 + \frac{2}{h}u_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3h}u_{\frac{3}{2}}. \quad (2.3)$$

Empleando el mismo procedimiento encontramos la aproximación lateral del operador gradiente en el borde derecho del intervalo correspondiente al nodo x_N :

$$u'(1) = \frac{8}{3h}u(1) - \frac{2}{h}u\left(\frac{2-h}{2}\right) + \frac{1}{3h}u\left(\frac{2+3h}{2}\right) + O(h^2) \quad (2.4)$$

la cual al ser truncada en su término de orden cuadrático produce la discretización de segundo orden para el gradiente en el nodo $x_N = 1$,

$$(Gu)_N = \frac{8}{3h}u_N - \frac{2}{h}u_{N-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3h}u_{N+\frac{3}{2}}. \quad (2.5)$$

Como era de esperarse esta última ecuación es casi idéntica a la del nodo del borde izquierdo (2.3) pero se invierten los signos y el orden de las variables independientes.

Las ecuaciones (2.3) y (2.5) representan las aproximaciones del operador gradiente. Por razones de conveniencia esta discretización será expresada de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G} \tilde{u} = \begin{pmatrix} (Gu)_0 \\ (Gu)_1 \\ \vdots \\ (Gu)_{N-1} \\ (Gu)_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{8}{3h} & \frac{3}{h} & -\frac{1}{3h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3h} & -\frac{3}{h} & \frac{8}{3h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{\frac{1}{2}} \\ u_{\frac{3}{2}} \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Si denotamos por G la matriz de los coeficientes de la discretización del gradiente entonces la expresión matricial anterior toma la siguiente forma:

$$\tilde{G} \tilde{u} = G \tilde{u}. \quad (2.7)$$

Hemos dejado en segundo lugar la discretización correspondiente al operador divergencia pues esta no reviste ningún aporte nuevo. Debido a que la divergencia solamente está asociada a los nodos internos de la malla mimética, los cuales se encuentran en el centro de cada bloque donde aplicamos el tradicional esquema de diferencias centradas de segundo orden,

$$D_{i+\frac{1}{2}} v = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \quad (2.8)$$

produce la discretización deseada para cualquier función escalar v definida en los nodos $\{x_i\}$. En la gran mayoría de los casos, v será el gradiente de una función escalar. Es conveniente, al igual que en el caso del gradiente, agrupar la discretización

de la divergencia de una forma matricial mediante la siguiente expresi3n:

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 0 \\ D_1 v \\ \vdots \\ D_{\frac{N}{2}} v \\ \vdots \\ D_{N-\frac{3}{2}} v \\ D_{N-\frac{1}{2}} v \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{\frac{N}{2}-2} \\ v_{\frac{N}{2}-1} \\ v_N \end{pmatrix}. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

En esta f3rmula se ha agregado por conveniencia dos filas de ceros, una al comienzo y la otra al final, para obtener una matriz cuadrada al componer operadores. Entonces, la ecuaci3n (2.9) se escribe de forma compacta como,

$$\tilde{D} \tilde{v} = D \tilde{v}. \quad (2.10)$$

donde la matriz de coeficientes D corresponde a la discretizaci3n del operador divergencia. La formulaci3n matricial de ambos operadores ser3a de suma utilidad cuando se establezca la discretizaci3n de la ecuaci3n el3ptica. Por el momento, es importante observar que si se denota por HC a los nodos de la malla con sub3ndice fraccionario incluyendo los bordes y por HL los nodos con sub3ndice entero, entonces se puede establecer que los operadores discretos G y D cumplen con las siguientes relaciones: $G : HC \rightarrow HL$ y $D : HL \rightarrow HC$ entre sus dominios y rangos. Estas relaciones mim3ticas son las mismas que satisfacen las versiones continuas de gradiente y la divergencia. Ello se debe a la apropiada elecci3n de los nodos usados para evaluar cada uno de los operadores.

2.2.3 Versi3n Discreta del Teorema de Green-Gauss-Stokes

El teorema de Green-Gauss-Stokes juega un papel fundamental en el desarrollo del concepto de m3todo mim3tico. En el caso unidimensional este teorema se reduce a la tradicional f3rmula de integraci3n por partes,

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f dx + \int_0^1 v \frac{df}{dx} dx = v(1)f(1) - v(0)f(0). \quad (2.11)$$

donde las expresiones $\frac{dv}{dx}$ y $\frac{df}{dx}$ representan al operador divergencia y gradiente respectivamente. Cuando las funciones f o v son constantes entonces la ecuaci3n (2.11) se reduce al Teorema Fundamental del C3lculo y por ende a la f3rmula de integraci3n por partes.

Para obtener la versi3n semidiscretizada de la f3rmula de integraci3n por partes sobre la malla mim3tica descrita en la figura 2.1 se deben buscar las restricciones apropiadas de las funciones v y f en los nodos de la malla, las cuales vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$\tilde{v} \equiv (v(x_0), v(x_1), \dots, v(x_{N-1}), v(x_N))^T, \quad (2.12)$$

$$\tilde{f} \equiv (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{N-1}), f(x_N))^T. \quad (2.13)$$

Luego, cada integral de la ecuaci3n (2.11) se puede reescribir, seg3n [28], en particular para la primera se tiene:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f dx = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_i} \right) f_{i+1/2} \quad (2.14)$$

mientras que para la segunda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v \frac{df}{dx} dx &\approx \frac{h}{8} v(x_0) \text{Grad}(f(x_0)) + h \frac{9}{8} v(x_1) \text{Grad}(f(x_1)) \\ &+ \sum_{i=2}^{N-2} h v(x_i) \text{Grad}(f(x_i)) + h \frac{7}{8} v(x_{N-1}) \text{Grad}(f(x_{N-1})) \\ &+ h \frac{3}{8} v(x_N) \text{Grad}(f(x_N)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $\text{Div}(\cdot)$ y $\text{Grad}(\cdot)$ denotan a los operadores continuos divergencia y gradiente respectivamente para el caso unidimensional. Antes de continuar, recuerde que el producto interno $h, \cdot$ se define por:

$$h x, y = x^T A y. \quad (2.16)$$

para x e y vectores de un espacio vectorial finito dimensional. En consecuencia, la ecuación (2.14) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f dx = \text{Div}(\vec{v}), f \quad (2.17)$$

donde el subíndice h representa el producto de la matriz identidad I por el escalar h , siendo h el tamaño de los bloques en la malla y $\text{Div}(\vec{v})$ corresponde al vector cuyas entradas contiene la evaluación del operador divergencia continuo de v en los nodos centrales $x_{i+1/2}$ de la malla.

Similarmente, la ecuación (2.15) también se puede reescribir en términos del producto interno definido en la ecuación (2.16) obteniéndose la siguiente expresión:

$$\int_0^1 v \frac{df}{dx} dx = \vec{v}, \text{Grad}(f) \quad (2.18)$$

siendo $\text{Grad}(f)$ el vector cuyas entradas contienen la evaluación del operador gradiente continuo de f en los nodos x_i y el producto escalar-matriz hP es análogo al

definido en la ecuación (2.17). Adicionalmente los coeficientes de la matriz de peso P están determinados por la fórmula de Newton Cotes y se distribuyen de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

A consecuencia de haber empleado distintas fórmulas para aproximar las integrales, y a su vez éstas han sido evaluadas en puntos diferentes entonces se tiene que la suma de los productos internos en (2.17) y (2.18) no producen exactamente la diferencia $v(1)f(1) - v(0)f(0)$ que aparece en la versión continua de la fórmula de integración por partes planteada en la ecuación (2.11). Por lo tanto, se empleará la función BO la cual depende de la divergencia continua de v , del gradiente continuo de f , de f , del vector $\tilde{v}$ y del nivel de discretización de h . En consecuencia, la versión semidiscreta del teorema de Green-Gauss-Stokes viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{D} \left(\frac{1}{h} \right) \mathbf{E} + \mathbf{D} \left(\frac{1}{h} \right) \mathbf{E} = BO(\text{Div}(v), \text{Grad}(f), f, v, h) \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) está completamente vinculada a la malla mimética planteada en la figura 2.1 y representa una de las muchas versiones que se pueden generar cambiando las fórmulas de cuadraturas, aún cuando todas ellas tendrán una

formulación análoga solamente donde cambian las matrices de los pesos en los productos internos. Adicionalmente por construcción, se tiene que cualquier otra versión de dicho teorema es consistente con su enunciado continuo pues se están usando los operadores continuos Div, Grad y las fórmulas de cuadraturas convergentes en su formulación.

En consecuencia, para obtener la versión discreta del teorema se $\xrightarrow{\text{-----}}$ sustituyen las versiones continuas de la divergencia, $\text{Div}(\vec{f})$, y del gradiente, $\text{Grad}(\vec{f})$, por sus respectivas discretizaciones, obteniéndose así:

$$\begin{aligned} \tilde{\text{BO}}(\vec{f}, \sim \vec{v}) &= v(1)f(1) - v(0)f(0) + \\ &+ \frac{f(x_{\frac{2}{3}}) - f(x_{\frac{1}{3}})}{v(x_1) - v(x_0)} + \frac{f(x_{N-\frac{1}{2}}) - f(x_{N-\frac{3}{2}})}{v(x_{N-1}) - v(x_N)} / 8. \end{aligned} \quad (2.21)$$

La importancia de la expresión (2.21) reside en el hecho de que es algebraicamente invariante bajo refinamientos de malla. Y por tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\text{BO}}(\vec{f}, \sim \vec{v}) = v(1)f(1) - v(0)f(0). \quad (2.22)$$

Se observa ahora que la diferencia $v(1)f(1) - v(0)f(0)$ aparece explícitamente como término independiente en (2.21) y que ella puede ser escrita de la manera siguiente: $v(x_N)f(x_N) - v(x_0)f(x_0)$, lo cual prueba que los productos $v(1)f(1)$ y $v(0)f(0)$ no se repiten. Finalizamos el análisis de la expresión (2.21) para BO indicando que ella puede ser escrita en forma matricial como se indica a continuación:

$$\tilde{\text{BO}}(\vec{f}, \sim \vec{v}) = \begin{matrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \sim \vec{v}, & \mathbf{f} \end{matrix}_I. \quad (2.23)$$

En la expresión anterior se utilizó la notación de producto interno dada en (2.16) cuyos pesos corresponden a la matriz identidad I , la matriz B es de orden $(N+2) \times (N+1)$ y multiplica al vector v , siendo este orden consistente con la

notación de la integral de volumen que aparece en la versión continua del teorema de Green-Gauss-Stokes, lo cual nos permite obtener de manera explícita la estructura de la matriz B , la cual llamaremos operador de borde o frontera.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

(N+2)×(N+1)

Por otro lado, la sustitución de las discretizaciones v y Gf en la versión semidiscreta del teorema de Green-Gauss-Stokes producen la siguiente relación entre sus respectivos productos internos:

$$\int_{D^-} v, f^E_{hI} + \int_{D^-} \tilde{v}, Gf^E_{hP} = \int_{D^-} \tilde{v}, f^E_I + \int_{D^-} \tilde{v}, Gf^E_{P^-}. \quad (2.25)$$

Por construcción de las fórmulas, v y Gf , la consistencia de los productos internos en la ecuación (2.25) respecto de las integrales que aparecen en la fórmula de integración por partes (2.10) están garantizadas.

Como consecuencia, al igualar las ecuaciones (2.23) y (2.25), obtenemos la versión discreta del teorema de Green-Gauss-Stokes:

$$\int_{D^-} \tilde{v}, f^E_{hI} + \int_{D^-} \tilde{v}, Gf^E_{hP} = \int_{D^-} \tilde{v}, f^E_I + \int_{D^-} \tilde{v}, Gf^E_{P^-} \quad (2.26)$$

2.3 Operadores 2D

En esta sección se definen los operadores miméticos bidimensionales. Las mallas a usar se caracterizan por ser uniformes, lógicamente rectangulares y ortogonales, lo cual nos permitiría obtener extensiones sencillas de las discretizaciones unidimensionales expuestas en la sección anterior, debido a que los operadores bidimensionales se comportan como sus pares unidimensionales a lo largo de las direcciones coordenadas.

2.3.1 Malla Mimética o Staggered

Las mallas miméticas en varias variables pueden ser obtenidas de manera simple mediante el producto cartesiano o tensorial de las mallas unidimensionales en las direcciones coordenadas eliminando de dicho producto aquellos puntos resultantes correspondientes a los vértices o esquinas.

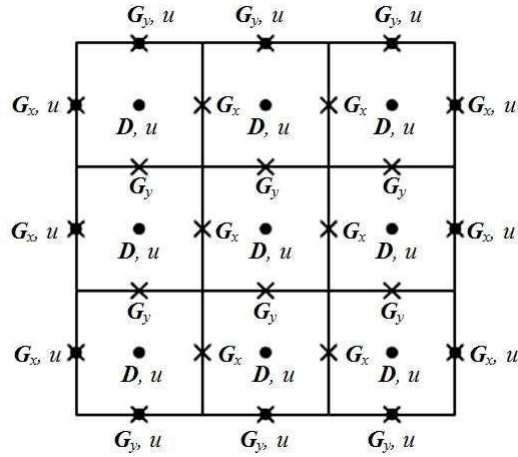


Figura 2.2: Malla mimética o staggered en 2D

Un ejemplo de una malla mimética bidimensional de orden 3×3 se muestra en

la figura 2.2. En la cual hemos omitido los subíndices de las variables u , G_x , G_y ,

D. Además se puede observar que en las esquinas de la malla no hay nodos pues estos han sido eliminados del producto cartesiano, siendo esta una característica que distingue a las mallas miméticas en varias variables de las mallas utilizadas por otros esquemas numéricos.

Por otra parte se tiene que el gradiente G se calcula en las direcciones x e y , las cuales denotaremos por G_x y G_y respectivamente. Recordemos que el gradiente se evalúa en los nodos medios de los lados de bloques y están representados por los símbolos $\times$'s de la figura 2.2. Debido a que los lados de los bloques de la malla son ortogonales entonces, solamente serán evaluadas las componentes del gradiente que sean ortogonales a cada lado, confirmando aun más el carácter de producto cartesiano o tensorial de modelos unidimensionales para las extensiones a varias variables.

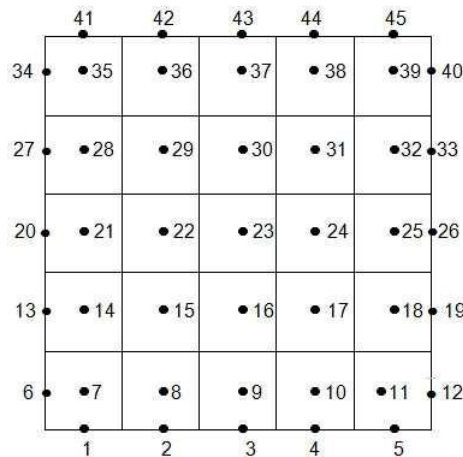


Figura 2.3: Malla mimética bidimensional usada por u , B y D

En los bordes de las mallas se evalúan simultáneamente tanto la solución u de la ecuación elíptica como el operador gradiente G_x , G_y , lo cual es también una propiedad básica del método mimético y de la malla asociada a él. Mientras que

el operador divergencia D es evaluado solamente en los nodos interiores o centros de los bloques junto con la solución u , siendo esta una suposición estándar en diferencias finitas. Son características propias de las mallas miméticas lógicamente rectangulares la evaluación simultánea de la solución u junto con el gradiente G en los bordes y la eliminación de los puntos que forman vértices o esquinas, en los casos multidimensionales resultantes de productos cartesianos. A continuación en las figuras 2.3 y 2.4 se muestran mallas cada una de tamaño 5×5 , que es la mínima requerida para dar una buena generalización de los operadores miméticos D , G y B . En la malla correspondiente a la figura 2.3 podemos ver definidos los nodos usados para los operadores D , B y la solución u , mientras que en la siguiente figura está la numeración empleada para obtener el operador G . En ambos casos este tipo de mallas son consideradas no estándar, pues no se definen en las esquinas ni los operadores, ni la solución.

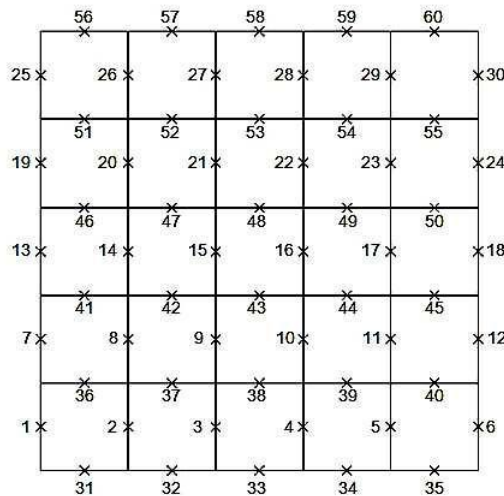


Figura 2.4: Malla mimética bidimensional usada por G

2.3.2 Discretizaciones para los Operadores Gradiente y Divergencia

Los operadores miméticos sobre una malla mimética 2D uniforme que serán empleados en esta tesis resultan de la aplicación del producto Kronecker, el cual se define de la siguiente manera: dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{p \times q}$ el producto Kronecker $(A \otimes B)_{mp \times nq}$ satisface

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

A continuación se define el operador gradiente mimético bidimensional G de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

donde

$$\begin{aligned} G_x &= I_N^T \otimes G \\ G_y &= G \otimes I_N^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

siendo G el gradiente unidimensional definido en la ecuación (2.7), mientras que el operador I_N viene dado por:

$$I_N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & \\ & I & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

donde I corresponde a la matriz identidad de tamaño $N \times N$, y N representa el número de bloques en la malla.

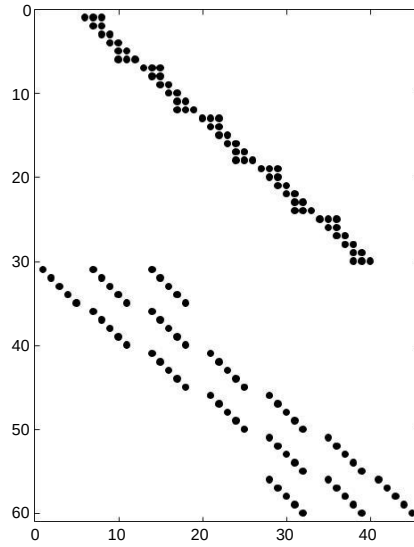


Figura 2.5: Estructura matricial del gradiente mimético en 2D

Por lo tanto, la fórmula matricial para el gradiente bidimensional G basa su discretización en la extensión de la ecuación (2.1), pues en todos los puntos de la malla actúa solamente una componente de dicho operador el cual es perpendicular al borde. Esto se puede apreciar en la figura 2.2.

Si además suponemos que los nodos de la malla se enumeran en un orden lexicográfico o natural [25, 26] según se muestra en la figura 2.4, la estructura de la matriz para la discretización del gradiente G tendrá entradas iguales a las expuestas en la figura 2.5. En ésta, se observa que las filas no nulas están definidas tanto en los nodos interiores como en el borde. Específicamente, las filas se pueden caracterizar en dos tipos, las que tienen tres entradas no nulas y las que solamente tienen dos. Las primeras corresponden a aquellos nodos ubicados en el borde de la región en las cuales se han utilizado aproximaciones laterales de segundo orden, ecuaciones (2.3) y (2.5). Mientras que las segundas, es decir aquellas filas con dos entradas no

nulas, corresponden a las discretizaciones en los nodos internos donde se emplearon aproximaciones centradas, tal y como se vio en la ecuación (2.1).

A continuación, se muestra la formulación matricial del operador bidimensional D , su discretización requiere de la extensión de la ecuación (2.8) a varias variables. Sin embargo, dicha extensión es simple y se logra de manera sistemática obteniéndose la siguiente expresión.:

$$D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(V, W) = \frac{V_{i+1,j+\frac{1}{2}} - V_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{W_{i+\frac{1}{2},j+1} - W_{i+\frac{1}{2},j}}{h} \quad (2.31)$$

En la expresión anterior se aproxima el operador divergencia del campo vectorial (v, w) mediante la ecuación (2.8) aplicada a v y w en la dirección x y y respectivamente. Obsérvese que la aproximación dada por (2.31) es estándar ya que solamente está definida en los nodos interiores de la malla mimética. A continuación, se define el operador mimético divergencia bidimensional D en forma matricial:

$$D = \begin{matrix} \mathbf{h} & \mathbf{i} \\ D_x & D_y \end{matrix} \quad (2.32)$$

con

$$\begin{aligned} D_x &= I_N^T \otimes D \\ D_y &= D \otimes I_N^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde D representa al operador divergencia unidimensional definido en la ecuación (2.9).

Luego en la figura 2.6 podemos observar la estructura del operador mimético D . En dicha figura se observa que la matriz está conformada por filas nulas y no nulas. Las filas nulas corresponden a los nodos que yacen en los bordes. Aquellas filas no nulas poseen exactamente cuatro entradas, diferentes de cero, correspondientes a los coeficientes de las variables representadas en (2.31) asociadas a un nodo interno. Las

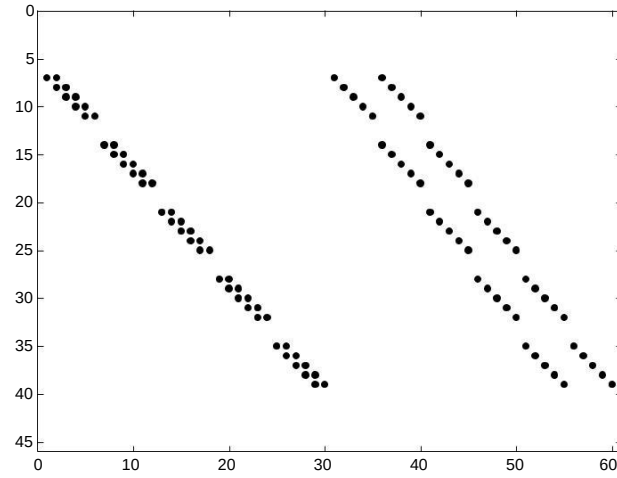


Figura 2.6: Estructura matricial de la divergencia mimética en 2D

filas nulas están plenamente justificadas puesto que el operador divergencia discreto o continuo no está definido en el borde. La estructura de esta matriz depende de la numeración de los nodos de la malla mimética, la cual puede observarse en la figura 2.3.

2.3.3 Versión Discreta del Teorema de Green-Gauss-Stokes

Una vez definidos los operadores miméticos bidimensionales se plantea una versión discreta del teorema de Green-Gauss-Stokes para el caso 2D, la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{D} \sim \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{f}_Q + \mathbf{D} \sim \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{G}_P \mathbf{f}_P = \mathbf{B} \sim \mathbf{v}_I \cdot \mathbf{f}_I \quad (2.34)$$

las matrices de peso Q y P vienen dadas por las expresiones: $Q = hI$, donde I representa la matriz identidad, mientras que para P se se tiene:

$$P = \begin{matrix} I_N^T \otimes P \\ P \otimes I_N^T \end{matrix}, \quad (2.35)$$

siendo P la matriz de peso unidimensional definida en (2.19).

A consecuencia del Teorema de Green-Gauss-Stokes podemos establecer una relación entre los operadores miméticos gradiente y divergencia que nos permita definir el operador de borde mimético bidimensional B de la siguiente manera:

$$B = QD + G^T P. \quad (2.36)$$

Capítulo 3

Formulación Mimética Mixta

3.1 Introducción

Los métodos miméticos se caracterizan principalmente por su énfasis en la discretización de los operadores diferenciales básicos del cálculo vectorial, en lugar, de la discretización directa de la ecuación diferencial parcial. Tales discretizaciones producen esquemas numéricos que permitirán resolver ecuaciones diferenciales. En este capítulo se plantea una nueva formulación mimética mixta de segundo orden para ecuaciones elípticas, nuestra propuesta abarca el caso unidimensional y bidimensional. Para ello hemos distribuido el contenido de este capítulo en tres secciones, en la primera se establecen las condiciones necesarias que van a permitir definir un esquema numérico como un método mimético, seguidamente en la sección dos se plantea la formulación mixta unidimensional adaptada a la ecuación elíptica bajo condiciones de frontera de tipo Robin caracterizada por ser un nuevo esquema mimético mixto de segundo orden. Y finalizamos este capítulo con la extensión de la formulación mimética al caso bidimensional, bajo ciertas consideraciones que serán

detalladas en dicha sección.

3.2 Concepto del Esquema Mimético

En este trabajo se asumirá que las discretizaciones utilizadas para los operadores miméticos definidos sobre una malla punto distribuida forman un esquema mimético [28] si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a) La sustitución de los operadores diferenciales parciales por sus respectivas discretizaciones miméticas en alguna versión semidiscreta del teorema de Green-Gauss-Stokes sobre una malla mimética deben generar una fórmula discreta del mismo teorema, la cual debe ser consistente con la fórmula continua del mismo teorema.
- b) La versión discreta del teorema de Green-Gauss-Stokes obtenida en la parte(a) debe reducirse a una versión discreta y exacta del teorema fundamental del cálculo cuando v o f son constantes.
- c) La composición de los operadores discretos, bien sea unidimensionales o bidimensionales, debe resultar en una discretización consistente con el Laplaciano en todos los centros de bloques de la malla mimética.

Es importante hacer las siguientes aclaratorias en cuanto a la definición anterior. Comenzamos afirmando que todas condiciones mencionadas son necesarias para caracterizar a los métodos miméticos excepto la (a), en la cual generalmente se exige que la función BO sea exactamente igual $v(1)f(1) - v(0)f(0)$. Sin embargo, esta condición ha sido relajada en nuestra definición debido a que ella no puede ser satisfecha para discretizaciones del operador gradiente de orden superior en los

bordes [22, 23]. Adicionalmente la condici3n (c) establece que los operadores discretos producen discretizaciones consistentes de las ecuaciones diferenciales parciales en las cuales ellos aparezcan.

3.3 Formulaci3n 1D

El esquema num3rico a plantear emplear3 las discretizaciones mim3ticas de los operadores gradiente y divergencia, las cuales son representadas matricialmente seg3n se vio en el cap3tulo anterior. En consecuencia, la formulaci3n mixta unidimensional ser3a definida en forma matricial.

La ecuaci3n el3ptica unidimensional con la cual vamos a trabajar en esta tesis est3a definida sobre la regi3n $\Omega = [0, 1]$ y viene dada por la siguiente expresi3n:

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{dp}{dx} \right) + a(x)p(x) = f(x) \quad (3.1)$$

donde $p(x)$ representa una funci3n desconocida, la inc3gnita, $f(x)$ el t3rmino fuente, $k(x)$ y $a(x)$ son funciones positivas conocidas. Para que la ecuaci3n (3.1) sea un problema bien planteado matem3ticamente es necesario que la soluci3n exista, sea unica y estable, por lo tanto se asumir3n condiciones de borde de tipo Robin, a menos que se especifique lo contrario, definidas sobre la regi3n $\partial\Omega = \{0, 1\}$ y cuya expresi3n general es la siguiente:

$$c(x)p(x) + \frac{d}{dx} (kp) = h(x) \quad (3.2)$$

donde las funciones $c(x)$ y $h(x)$ son dadas.

En las formulaciones mixtas es necesario introducir una nueva variable u , adem3s de la p , lo que a3nade m3s complejidad a la soluci3n del problema de contorno. Sin embargo, existen problemas aplicados [29] en los cuales el c3lculo de la u es m3s

importante y esto justifica su introducción. En consecuencia, pasamos a reescribir la ecuación (3.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u \\ k(x) - p'(x) &= 0 \\ u'(x) - a(x)p(x) &= -f(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $u'(x) = \frac{du}{dx}(x)$ y las incógnitas a calcular son la presión p y la velocidad u . En el contexto unidimensional que estamos trabajando la condición de borde definida en (3.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \alpha p'(0) + \beta p(0) &= h_1 \\ \sigma p'(1) + \eta p(1) &= h_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

para α, β, σ y η son todas no nulas, h_1 y h_2 son constantes conocidas.

Las discretizaciones de los operadores G , D y B en forma matricial ya fueron definidas en las ecuaciones (2.7), (2.10) y (2.24) respectivamente. Si denotamos por P y U las correspondientes aproximaciones míméticas a las soluciones buscadas p y u , entonces, la discretización para el sistema (3.3) toma la forma

$$\begin{aligned} K^{-1} \cdot U - G \cdot P &= 0 \\ D \cdot U - A \cdot P &= -F \end{aligned} \quad (3.5)$$

En la expresión anterior, la K aproxima al coeficiente k de la ecuación (3.1), la cual es una matriz diagonal y de dimensión igual al número de nodos de la malla mímética donde se evalúa el rango de la discretización del gradiente mímético G . A los coeficientes en la diagonal de K corresponden al valor que toma el coeficiente $k(x)$ al ser evaluado en los nodos interiores x_i de la malla. Por otra parte, la matriz

A es también diagonal y sus entradas no nulas corresponden al valor que toma la 30

función $a(x)$ al ser evaluada en los nodos interiores de la malla, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ a(x_i) \\ \\ \\ a(x_N) \\ \\ \end{matrix} \quad (3.6)$$

En cuanto a las condiciones de borde se tiene que su formulación matricial adopta la siguiente forma:

$$C \cdot P + B \cdot U = H \quad (3.7)$$

donde la C es una matriz diagonal cuyos coeficientes no nulos se definen solamente para aquellos nodos que se encuentran en el borde de la malla, por lo tanto sus valores se asumen nulos en los nodos interiores y su definición se da en (3.8), para

β y η dadas en la ecuación (3.4), y la H en (3.7) representa la proyección mimética sobre la malla de las constantes h_1 y h_2 definidas en la condición de borde dada.

$$C = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{matrix} \quad (3.8)$$

Empleando el principio de superposición con las ecuaciones (3.5) y (3.7) se obtiene el siguiente sistema lineal, el cual representa la formulación mimética para la ecuación

el'íptica (3.1) sujeto a la condici'ón de borde (3.4):

$$K^{-1} - G \quad U = F_1 \quad (3.9)$$

$$D + B \quad C - A \quad P \quad F_2$$

El orden del sistema anterior es de dimensi'ón $(2N + 3) \times (2N + 3)$ y en consecuencia las matrices K^{-1} , $C - A$ y $D + B$ son de orden $(N + 1) \times (N + 1)$, $(N + 2) \times (N + 2)$ y $(N + 2) \times (N + 1)$ respectivamente. Adicionalmente, tenemos que los t'érminos derechos de la ecuaci'ón anterior F_1 y F_2 se escogen convenientemente como t'érminos fuentes, en su forma m'as simple. Una selecci'ón natural viene dada por $F_1 = 0$ y $F_2 = -F + H$. En la figura 3.1 se muestran las entradas de la matriz de coeficientes asociada a la nueva formulaci'ón, para el caso espec'ífico de una malla con 5 bloques.

Figura 3.1: Matriz asociada a la formulaci'ón mim'etica mixta en 1D

Simult'aneamente en la figura 3.2 se puede apreciar la disposici'ón de los elementos de la matriz anterior, en ella se observa claramente una diagonal principal respecto a

la cual es estructuralmente simétrica, recordemos que sus entradas por construcción no son simétricas. Así mismo, la matriz $D + B$ es visualmente la transpuesta de G .

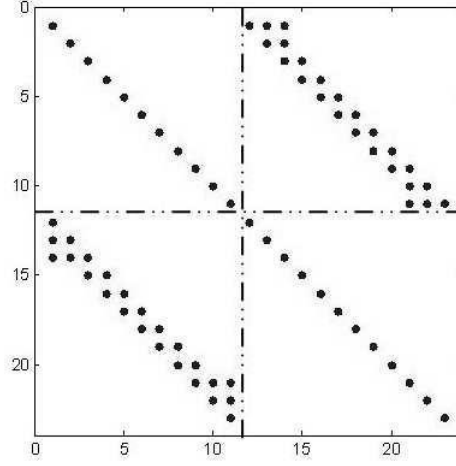


Figura 3.2: Representación gráfica de la estructura matricial para la formulación mimética mixta en 1D

3.4 Formulaci3n 2D

Se plantea dar un esquema numérico en forma discreta y explícita para la ecuación elíptica bidimensional en términos de los operadores diferenciales expuestos en el capítulo anterior y definidos sobre mallas cuadradas de tamaño $N \times N$, donde N representa el número de bloques. En este orden de ideas la región Ω que será utilizada para plantear la formulación 2D está dada por el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ y la ecuación elíptica a resolver viene dada por la siguiente expresión:

$$-\nabla \cdot (k \nabla p)(x, y) + a(x, y)p(x, y) = f(x, y) \quad (3.10)$$

donde ∇ representa al gradiente continuo y $\nabla \cdot$ la divergencia continua. Por otra parte los coeficientes k y a son positivos mientras f es el término fuente.

$$\begin{array}{ccc}
& \left(cp + k \frac{\partial p}{\partial y} \right) (x, 1) = h(x, 1) & \\
\left(cp - k \frac{\partial p}{\partial x} \right) (0, y) = h(0, y) & \square & \left(cp + k \frac{\partial p}{\partial x} \right) (1, y) = h(1, y) \\
& \left(cp - k \frac{\partial p}{\partial y} \right) (x, 0) = h(x, 0) &
\end{array}$$

Figura 3.3: Condiciones de borde tipo Robin en 2D

Para que (3.10) represente un problema bien planteado se considerarán condiciones de borde Robin, evaluadas en los lados del cuadrado unitario dado en la figura 3.3.

$$c(x, y)p(x, y) + \frac{\partial(kp)}{\partial \tilde{n}}(x, y) = h(x, y) \quad (3.11)$$

siendo $c(x, y)$ y $h(x, y)$ funciones conocidas.

Si en la ecuación (3.10) se introduce una nueva variable u , tal y como se hizo en la sección anterior, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l}
u \\
-\nabla \cdot u(x, y) - a(x, y)p(x, y) = -f(x, y)
\end{array} \quad (3.12)$$

siendo p y u las incógnitas a calcular, mientras la condición de borde permanece invariante. A continuación, si P es la aproximación mimética a la solución buscada p de la ecuación (3.10) sujeta a la condición de Robin (3.11), entonces la discretización de su gradiente viene dado por la expresión

$$\nabla \tilde{p} = GP \quad (3.13)$$

donde G es la matriz dada por (2.28). Por otra parte el coeficiente k que aparece en la ecuación (3.10) sería representado por una matriz cuadrada y diagonal K de dimensión igual al número de nodos de la malla donde se obtuvo la discretización del gradiente G , ver la figura 2.3, y cuya estructura viene dada por:

$$K_x = 0$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_y \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

donde K_x y K_y son matrices diagonales y cuyas entradas corresponden a los coeficientes que acompañan al gradiente de p en la ecuación (3.10). Luego, al considerar las ecuaciones (3.13), (3.14) y suponer que U es la aproximación mimética a la velocidad continua u , se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u &\sim - \\ - & p = K^{-1}U \quad GP = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, el coeficiente a que aparece en la ecuación (3.10) será aproximado por A , la cual representa una matriz diagonal cuyas entradas no nulas corresponden al valor que toma la función $a(x, y)$ en los nodos internos de la malla, es decir aquellos nodos cuyas coordenadas $(x, y) \in \Omega$ si $0 < x, y < 1$, es decir

$$A = \begin{cases} a(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.15)$$

Se puede reescribir la segunda ecuación de (3.12), aunado al hecho de que D es la matriz definida en (2.32) y por tanto

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= - \\ u &= - \\ ap &= DU \quad AP = - \quad F = - \quad f \end{aligned}$$

El coeficiente c que aparece en la condición de borde (3.11), será aproximado por C , una matriz diagonal cuyas entradas no nulas corresponde al valor que toma

$c(x, y)$ en aquellos nodos que están en el borde de la región, es decir aquellos nodos cuyas coordenadas $(x, y) \in \partial\Omega$. Luego, la matriz C se define como:

$$C = \begin{cases} c(x, y) & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.16)$$

Luego la condición de borde se puede discretizar de la siguiente manera:

$$c_p + \frac{\sigma(Kp)}{\partial n} = CP + BU = H = h$$

donde B es la matriz definida en (2.36)

En resumen, la formulación matricial para nuestro esquema mimético mixto bidimensional viene dado por la siguiente expresión:

$$K^{-1} - G \quad U = F_1 \quad (3.17)$$

$$D + B \quad C - A \quad P \quad F_2$$

La matriz asociada a la formulación anterior son en general de gran tamaño, específicamente poseen $(2N^2 + 2N) + (N^2 + 4N)$ filas, e igual cantidad de columnas. No obstante la dimensión de los bloques que conforman la matriz de coeficientes definida en (3.17) son $(2N^2 + 2N) \times (2N^2 + 2N)$ y $(N^2 + 4N) \times (N^2 + 4N)$ para las matrices K^{-1} y $C - A$, mientras que las matriz $D + B$ y G sus dimensiones son $(2N^2 + 2N) \times (N^2 + 4N)$ para la primera y $(N^2 + 4N) \times (2N^2 + 2N)$ para la segunda.

En relación a lo anterior, en la figura 3.4 se observa la estructura de la matriz asociada a la formulación mimética bidimensional, en la cual se aprecia que dicha matriz es estructuralmente simétrica respecto de la diagonal principal aun cuando sabemos que sus entradas no lo son. Adicionalmente los bloques ubicados en las posiciones superior derecha e inferior izquierda son estructuralmente el transpuesto uno del otro.

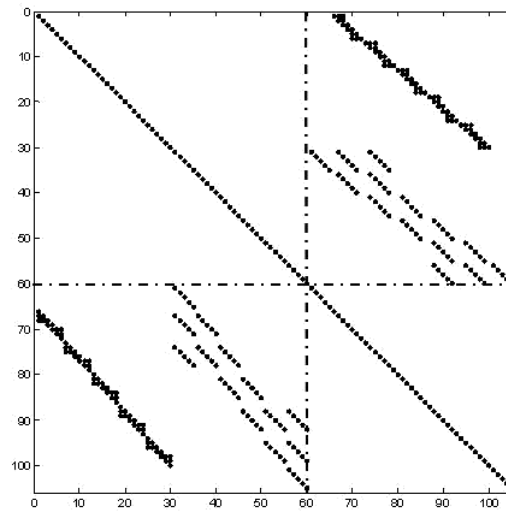


Figura 3.4: Representación gráfica de la estructura matricial para la formulación mimética mixta en 2D

Capítulo 4

Métodos de Solución

4.1 Introducción

En este capítulo se describen tres técnicas que nos permitirán resolver los sistemas lineales definidos en las ecuaciones (3.9) y (3.17) que corresponden a la implementación de la formulación mimética mixta en 1D y 2D respectivamente. La primera técnica a emplear consiste en el uso de un método que denominaremos acoplado, el cual resuelve el sistema completo, es decir calcula las aproximaciones numéricas a la velocidad u y la presión p de manera simultánea. Por otra parte, se proponen dos métodos iterativos de tipo segregado basados en el complemento de Schur, los cuales desacoplan el sistema (3.9) o (3.17), según sea el caso, de forma tal que permiten resolverlo secuencialmente para U y P . Estos esquemas de solución se construyen en base a la formulación mimética bidimensional ya definida, esto con la finalidad de garantizar su implementación al caso unidimensional.

Para la resolución numérica de los sistemas (3.9) y (3.17) es recomendable utilizar métodos iterativos, en particular los métodos en subespacios de Krylov son los más

utilizados en estos casos. Por otra parte tenemos que las matrices de coeficientes asociadas a dichos sistemas lineales son dispersas, de gran tamaño y no simétricas, en consecuencia se decidió utilizar el método GMRES sin RESTART.

En resumen, el contenido de este capítulo se ha distribuido en tres secciones: en la primera se describe el método acoplado, luego en la siguiente sección se abordan los métodos segregados y para finalizar, en la sección tres, describiremos el método GMRES.

4.2 Método Acoplado

Se va a considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} K^{-1} & -G \\ \frac{D+B}{A} & C - \frac{A}{X} \frac{P}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde la matriz de coeficientes A es de orden $(n + m) \times (n + m)$ siendo $n = N^2 + 4N$, $m = 2N(N + 1)$ y $m \geq n$, recordemos que $N \times N$ representa el número de bloques en la malla correspondiente. Más aún, A tiene una estructura en bloques de 2×2 , los bloques superior izquierdo e inferior derecho son cuadrados y orden $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente, mientras que los bloques superior derecho e inferior izquierdo son rectangulares y sus órdenes son $(n \times m)$ para el primero y $(m \times n)$ para el segundo.

El método acoplado consiste un método que resuelve el sistema (4.1) completo, es decir genera aproximaciones numéricas U para la velocidad y P para la presión en forma simultánea utilizando GMRES como resolvidor lineal. En este trabajo el método acoplado nos permitiría establecer una guía que nos va a permitir evaluar la naturaleza de las aproximaciones numéricas obtenidas por los métodos segregados

en cuanto al error residual y al número de iteraciones.

4.3 Métodos Segregados

Los sistemas que poseen estructura en bloque, como es el caso del sistema (4.1), clásicamente se han resuelto empleando técnicas que descomponen el problema en sistemas más pequeños. Estas técnicas se basan en desacoplar el sistema de ecuaciones empleando por ejemplo el complemento de Schur [34] el cual definimos a continuación.

Dado un sistema de ecuaciones dividido en bloques:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

y suponiendo que A_{11} es no singular, se le puede resolver mediante la eliminación de bloques de la siguiente manera:

$$x_1 = A_{11}^{-1}(b_1 - A_{12}x_2)$$

$$x_2 = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1)$$

donde

$$S = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

La matriz S recibe el nombre de complemento de Schur y se puede interpretar como la resolución de la incógnita x_2 , que luego se usará para calcular x_1 en función de x_2 . Si por otra parte suponemos que A_{22} es no singular, entonces también podremos calcular el complemento de Schur, pero en este caso la variable independiente será x_1 .

4.3.1 Método Segregado P

Es un método que nos va a permitir resolver el sistema (4.1) aplicando el complemento de Schur y obtener una aproximación numérica para la presión.

Específicamente la ecuación que se obtiene es la siguiente:

$$[(C - A) + (D + B)KG]P = F_2 - [(D + B)KF_1]. \quad (4.2)$$

el cual representa un sistema lineal reducido y su dimensión es $m \times m$. Una vez resuelto el sistema (4.2) empleando GMRES se puede obtener la aproximación para

U , sustituyendo directamente el valor de P en la siguiente expresión:

$$U = KF_1 + KGP \quad (4.3)$$

A esta técnica de resolución del sistema (4.1) usando las ecuaciones (4.2) y (4.3) se le denomina método segregado para la presión o simplemente segregado P .

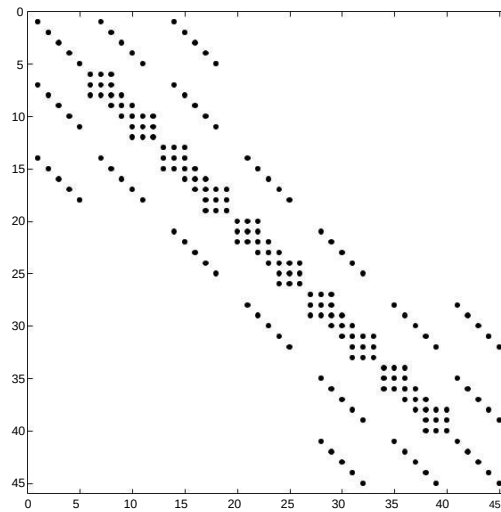


Figura 4.1: Estructura de la matriz de coeficientes del Método Segregado P

Seguidamente la estructura de la matriz de coeficientes asociada al sistema (4.2) sobre una malla de tamaño 5×5 se presenta en la figura 4.1, en la cual se observa que la estructura de la matriz es simétrica respecto de la diagonal principal, inclusive se

visualizan cinco diagonales por encima y la misma cantidad de diagonales por debajo de la principal, para un total de once.

4.3.2 Método Segregado U

El segundo método segregado a plantear, en este trabajo, se denomina segregado U o segregado para la velocidad, en esta oportunidad el sistema lineal reducido va a depender de la incógnita U y su dimensión es $n \times n$. La técnica a emplear es nuevamente aplicar el complemento de Schur al sistema planteado en (4.1) y obtener así el siguiente sistema reducido que sólo depende de la velocidad,

$$[K^{-1} + G(C - A)^{-1}(D + B)]U = F_1 + [G(C - A)^{-1}F_2]. \quad (4.4)$$

Una vez obtenida la aproximación numérica U empleando GMRES se sustituye directamente en expresión 4.5 y así estimar el valor para la presión.

$$P = (C - A)^{-1}(F_2 - (B + D)U). \quad (4.5)$$

La estructura de la matriz de coeficientes asociada al sistema definido en (4.4) se muestra en la figura 4.2. En la figura se observan nuevamente cuatro bloques, además se tiene que según la disposición de las entradas los bloques inferior izquierdo y superior derecho se muestran como si fueran transpuestos. Por otra parte, los bloques superior izquierdo e inferior derecho son estructuralmente simétricos. En consecuencia, volvemos a aplicar el complemento de Schur ahora al sistema (4.5), específicamente al bloque inferior derecho, lo cual genera un nuevo sistema lineal reducido de dimensión tres veces menor en comparación con el sistema lineal.

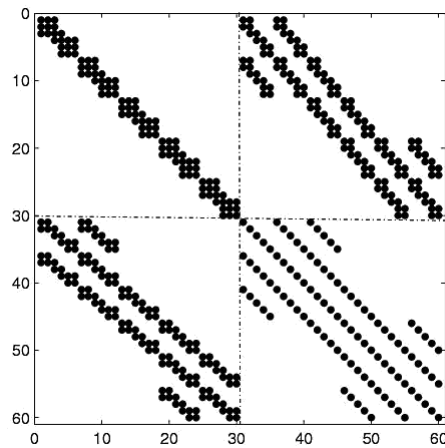


Figura 4.2: Estructura de la matriz de coeficientes del Método Segregado U

La estructura de la nueva matriz reducida se muestra en la figura 4.3. En dicha figura podemos visualizar que nuevamente es simétrica respecto de la diagonal principal, es decir se contabilizan 7 diagonales por encima e igual número por debajo de la diagonal principal.

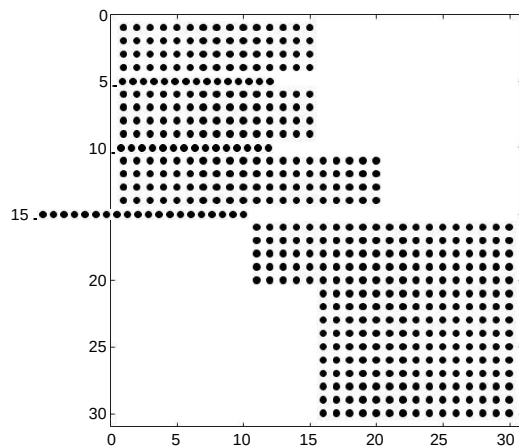


Figura 4.3: Estructura la nueva matriz de coeficientes del Método Segregado U

Si se compara la figura anterior con la figura 4.2 se puede constatar como

efectivamente la dimensión de la nueva matriz se ha reducido a la mitad, tal y como se había mencionado. Estas matrices fueron elaboradas sobre una malla de tamaño 5×5

4.4 Método Iterativo GMRES

Un método de proyección en general resuelve el sistema $Ax = b$, obteniendo una solución aproximada x_m en un subespacio afín $x_0 + K_m$ de dimensión m , imponiendo la condición de Petrov-Galerkin $b - Ax_m \perp L_m$, donde L_m es otro subespacio de dimensión m . Además se considera x_0 como un vector inicial arbitrario. En base a lo anterior se define un método de Krylov como aquel método donde el subespacio de Krylov K_m se define por:

$$K_m = K_m(A, r_0) = \text{span } \{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^m r_0\} \quad (4.6)$$

siendo $r_0 = b - Ax_0$. El método GMRES (generalized minimum residual), fue propuesto por Yousef Saad y Martin H. Schultz en 1986 [32], es un método de proyección que toma a $L_m = AK_m$ a partir de $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2$, esta técnica minimiza la norma del residual sobre todos los vectores en $x_0 + K_m$. Para deducir el método comenzamos por considerar el siguiente sistema

$$x_m = x_0 + z_m, z_m \in K_m \quad (4.7)$$

$$r_m = b - Ax_m \perp w \quad \forall w \in L_m.$$

el cual es equivalente a

$$\begin{aligned} x_m &= x_0 + V_m y_m \\ (AV_m)^T r_m &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde V_m es una base ortonormal de vectores del espacio de Krylov e y_m un vector de coeficientes que permite expresar la aproximación a la solución como combinación lineal de los vectores de la base. Ahora bien, si consideramos $v_1 = r_0 / \|r_0\|_2 = r_0 / \beta$ en el método de Arnoldi, esto nos va a permitir construir las matrices V_m y H_m que satisfacen la siguiente expresión:

$$AV_m = V_{m+1}H_m, \quad (4.9)$$

donde H_m es la matriz de Hessenberg de orden $(m+1) \times m$. Luego, sustituyendo la expresión anterior en la segunda ecuación de (4.8),

$$\begin{aligned} 0 &= (AV_m)^T r_m = (V_{m+1}H_m)^T (b - Ax_m) \\ &= (V_{m+1}H_m)^T (b - Ax_0 - AV_m y_m) \\ &= (V_{m+1}H_m)^T (r_0 - AV_m y_m) \\ &= H_m^T V_{m+1}^T (\beta v_1 - V_{m+1} y_m) \\ &= \beta H_m^T V_{m+1}^T v_1 - H_m^T V_{m+1}^T V_{m+1} y_m. \end{aligned}$$

pero como $V_{m+1}^T v_1 = e_1^{(m+1)}$ y $V_{m+1}^T V_{m+1} = I_{(m+1) \times (m+1)}$ entonces se tiene que

$$H_m^T \beta e_1^{(m+1)} - H_m^T y_m = 0.$$

Esta última expresión junto con la primera ecuación de (4.8) representa un sistema de ecuaciones normales para el siguiente problema:

$$y_m = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^m} \|\beta e_1^{(m+1)} - H_m^T y\|_2.$$

La aproximación que se obtienen es el único vector de $x_0 + K_m$ que minimiza

$$J(y) = \|\beta e_1^{(m+1)} - H_m^T y\|_2^2.$$

aunado al hecho de que se puede obtener de una forma bastante sencilla como:

$$x_m = x_0 + V_m y_m,$$

donde y_m minimiza la función $J(y)$. Obsérvese que obtener el minimizador y_m es de bajo costo computacional ya que requiere la solución de un problema de mínimos cuadrados de orden $(m + 1) \times m$ donde m es generalmente pequeño.

Paso 0	Seleccionar el tamaño de la tolerancia $\varrho > 0$
Paso 1	Calcule $r_0 = b - Ax_0$; $\beta = \ r_0\ _2$ y $v_1 := r_0/\beta$
Paso 2	for $j = 1 : m$
Paso 3	Calcular $w_j := Av_j$
Paso 4	for $i = 1 : j$
Paso 5	$h_{ij} := \langle w_j, v_i \rangle$
Paso 6	$w_j := w_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i$
Paso 7	end
Paso 8	$h_{j+1,j} = \ w_j\ _2$. Si $h_{j+1,j} = 0$ entonces, $j := m$ ir a la línea 11
Paso 9	$v_{j+1,j} = w_j / h_{j+1,j}$
Paso 10	end
Paso 11	Defina la matriz $(m + 1) \times m$ de Hessenberg por $H = \{h_{i,j}\}_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m}$
Paso 13	Calcule y_m que minimiza $\ \beta e_1 - H_m y\ _2$ y $x_m = x_0 + V_m y_m$

Tabla 4.1: Algoritmo GMRES

De lo anterior surge el algoritmo que se observa en la tabla 4.1. La forma más habitual minimizar el residuo obtenido $\beta e_1 - H_m y$, consiste en aplicar transformaciones matriciales al vector anterior que no modifiquen la norma del resultado y que transformen la matriz de Hessenberg en una matriz triangular superior. Para ello se aplican rotaciones matriciales en un plano.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan problemas sintéticos en los cuales se ha implementado la nueva formulación mimética mixta sobre problemas elípticos bajo condiciones de borde de tipo Robin, en general. Se evaluarán la calidad de las aproximaciones obtenidas por los distintos métodos de solución empleados (acoplado, segregado P y segregado U) en torno a la magnitud del error obtenido en la norma del máximo y al número de iteraciones GMRES empleadas por cada método de solución para alcanzar la convergencia. La estructura de este capítulo comprende dos secciones en la primera se consideran los resultados numéricos para el caso 1D mientras que la segunda corresponde a la implementación bidimensional.

5.2 Problemas 1D

En esta sección presentamos dos Test unidimensionales, con un nivel de dificultad creciente, definidos sobre la región $\Omega = [0, 1]$. Las soluciones analíticas son conocidas en cada caso, lo cual nos permitiría evaluar la calidad de las aproximaciones obtenidas al emplear cada uno de los resolutores lineales en estudio. Adicionalmente las mallas que se utilizaron son uniformes de tamaño creciente de bloques, específicamente van desde $n = 5$ hasta $n = 90$ y el tamaño de cada bloque viene dado por $h = 1/n$. Internamente cada resolutor lineal emplea el método GMRES sin RESTART ni preconditionador, adicionalmente se tomó como nivel de tolerancia el valor de 10^{-11} para el cálculo del error residual.

5.2.1 Test 1

El primer Test a resolver es un problema con coeficientes suaves y está dado por la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{dp}{dx} \right) + a(x)p(x) = x^3(5xe^x + 20e^x - x^2) \quad (5.1)$$

donde los coeficientes vienen definidos por: $k(x) = e^x$ y $a(x) = 1$. Se consideran las siguientes condiciones de borde de tipo Robin no homogéneas

$$\begin{aligned} p(0) - \frac{dp(0)}{dx} &= 0 \\ p(1) + \frac{dp(1)}{dx} &= 1 + 5e. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) determinan un problema matemáticamente bien planteado, cuya única solución para la presión viene dada por la siguiente expresión

$$p(x) = x^5.$$

En la tabla 5.1 se muestran los errores numéricos obtenidos en el cálculo de la solución aproximada para la presión, en la norma del máximo, aplicando los tres métodos de solución en estudio. En la primera columna se muestra el número de celdas o bloques usados para obtener las soluciones aproximadas que generaron los errores mostrados en las otras tres columnas. Los resultados indican que los errores no reportan cambios entre método, es decir reportan magnitudes similares para tamaños de mallas fijos, sin embargo esta comportamiento cambia a medida que se refina la malla, pues los errores disminuyen monotónicamente alcanzando una precisión de tres ordenes de magnitud, correspondiente específicamente a la malla de noventa bloques.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5	0.19131834995177	0.19131834995179	0.19131834995178
10	0.04789633959506	0.04789633959503	0.04789633959506
20	0.01199417105442	0.01199417105428	0.01199417105425
40	0.00299924863864	0.00299924863827	0.00299924863836
60	0.00133298626821	0.00133298626797	0.00133298626886
90	0.00059246145724	0.00059246145694	0.00059246145608
Tasa	1.99884607839536	1.99884607857175	1.99884607907278

Tabla 5.1: Errores y tasas de convergencia para la presión Test 1 1D

Por otra parte, desde un punto de vista cuantitativo estos resultados permiten estimar el orden de convergencia de cada método de solución tal y como se muestra en la tabla 5.1. En este caso el valor alcanzada fue de 1.9988846 el cual representa aproximadamente un orden de convergencia cuadrático para la presión.

En la tabla 5.2 se muestran las aproximaciones numéricas obtenidas para la velocidad, en ella observamos que los errores muestran una baja sensibilidad en

función del método de solución empleado, similar a lo observado en el caso de los resultados para la presión, así como también se evidencia el comportamiento monótono decreciente de los errores a medida que la malla era refinada. En cuanto al nivel de precisión tenemos que fue de dos ordenes de magnitud, el cual corresponde a la malla de noventa bloques. En la misma tabla se muestran las tasas de convergencias para cada método, en general el valor fue aproximadamente de 1.6636, es decir un orden de convergencia superlineal para la velocidad.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5	0.18521042411007	0.18521042411008	0.18521042411009
10	0.08131884243795	0.08131884243789	0.08131884243796
20	0.02579088220786	0.02579088220790	0.02579088220797
40	0.00720627645713	0.00720627645709	0.00720627645716
60	0.00332043965288	0.00332043965325	0.00332043965315
90	0.00151127731620	0.00151127731454	0.00151127731737
Tasa	1.66363977061499	1.66363977099572	1.66363977034580

Tabla 5.2: Errores y tasas de convergencia para la velocidad Test 1 1D

Basados en las dos tablas anteriores se presenta la figura 5.1 en la cual se muestran dos gráficas correspondientes a las estimaciones de los errores para la presión (izquierda) y la velocidad (derecha). En cada una de ellas los ejes de coordenadas están colocados en escala logarítmica, el eje X determina el número de bloques empleado para obtener tales aproximaciones numéricas, mientras que el eje Y representa el error obtenido en la norma del máximo entre la aproximación mimética y la solución analítica correspondiente. En ambas gráficas se presentan, según la leyenda, tres curvas una por cada resolovedor en estudio, las cuales están superpuestas, debido a la falta de sensibilidad de los errores reportada en las tablas

5.1 y 5.2. En cada gráfica se observa que los errores presentan un comportamiento lineal bien definido y por tanto permiti o conocer los ordenes de convergencia para cada método de solución (acoplado, segregado P y segregado U) recordemos que para el caso de la presión dichos ordenes son prácticamente los mismos, es decir cuadrático para los tres métodos, mientras que para la velocidad fue superlineal, también para los tres métodos.

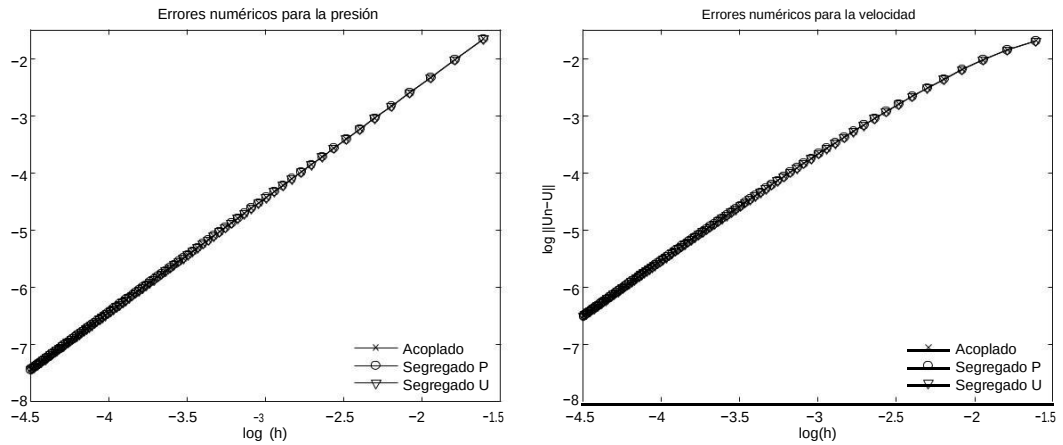


Figura 5.1: Comportamiento de los errores numéricos en norma del máximo Test 1 1D

Consideraremos ahora la siguiente tabla 5.3, la cual muestra el número de iteraciones GMRES que emple o por cada método de solución en alcanzar la convergencia. En dicha tabla se observa que los métodos segregados reportaron siempre menos iteraciones, por lo tanto convergieron más rápido, mientras que el método acoplado emple o el doble de iteraciones que los métodos segregados. Adicionalmente entre los segregados no se observa mayor diferencia.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5	13	7	6
10	23	12	11
20	43	22	21
40	83	42	41
60	123	62	61
90	183	92	91

Tabla 5.3: Número de iteraciones GMRES Test 1 1D

Lo expuesto en la tabla anterior se complementa con la figura 5.2. Los ejes de coordenadas en la figura representan para X el tamaño de la malla utilizado, y para el eje Y el número de iteraciones reportado. Según se puede observar en la leyenda existen tres curvas, una por cada método de solución, pero tal y como se mencionó en el párrafo anterior los métodos segregados no reportan mayor diferencia entre ellos razón por la cual sus respectivas curvas se encuentran superpuestas. En la parte superior de la figura se encuentra la curva que corresponde al método acoplado el cual como sabemos fue el que reportó el mayor número de iteraciones, específicamente el doble de iteraciones que los métodos segregados para alcanzar la convergencia.

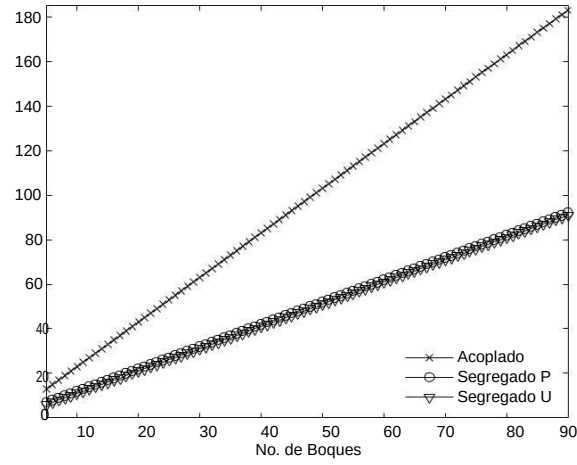


Figura 5.2: Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 1 1D

5.2.2 Test 2

A continuaci3n se muestra un problema de coeficientes suaves pero en esta oportunidad k y a son discontinuos. En consecuencia, la ecuaci3n a resolver es:

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{dp}{dx} \right) + a(x)p(x) = x \quad (5.3)$$

donde $k(x)$ y $a(x)$ se definen como:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & \text{si } 0.5 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$a(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 0.25 \\ 10 & \text{si } 0.25 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Las condiciones de borde a considerar son nuevamente de tipo Robin no homogéneas:

$$\begin{aligned} p(0) - \frac{dp(0)}{dx} &= 1 \\ p(1) + 2 \frac{dp(1)}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.3) - (5.6) conforman un problema de tipo Sturm Liouville. La solución analítica para este problema viene dada por las expresiones (5.7) y (5.8) para la presión y la velocidad respectivamente, las cuales nos permitirán evaluar la calidad de las aproximaciones obtenidas al aplicar los esquemas en estudio.

$$p(x) = \begin{cases} -0.02468e^{\sqrt{3}x} - 0.25063e^{-\sqrt{3}x} + \frac{x}{5} & \text{si } x < 0.25 \\ 0.000067e^{\sqrt{10}x} + 0.31332e^{-\sqrt{10}x} + \frac{x}{10} & \text{si } 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -\frac{0.00683e^{\sqrt{5}x}}{5} - \frac{0.13425e^{-\sqrt{5}x}}{5} + \frac{x}{5} & \text{si } x > 0.5 \end{cases} \quad (5.7)$$

$$u(x) = \begin{cases} -0.02468 \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} + 0.25063 \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{5} & \text{si } x < 0.25 \\ 0.000067 \sqrt{10}e^{\sqrt{10}x} - 0.31332 \sqrt{10}e^{-\sqrt{10}x} + \frac{1}{10} & \text{si } 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -\frac{0.01366 \sqrt{5}e^{\sqrt{5}x}}{5} - \frac{0.2685 \sqrt{5}e^{-\sqrt{5}x}}{5} + \frac{1}{5} & \text{si } x > 0.5 \end{cases} \quad (5.8)$$

En la figura 5.3 se visualizan, en primer lugar la magnitud de los errores obtenidos empleando la norma del máximo tanto para la presión (a la izquierda) como para la velocidad (a la derecha) sobre mallas uniformes cuyos tamaños de bloques se fue incrementando, y en segundo lugar se observan tres líneas rectas que nos

permitirán estimar las tasas de convergencia para tres grupos de datos, los cuales serán explicados más adelante.

Comenzamos por el análisis comparativo en cuanto a los errores. En cada gráfica tenemos, al igual que se mencionó en el Test 1, que ambos ejes de coordenadas están colocados en escala logarítmica, donde el eje Y representa el error en norma del máximo entre la aproximación mimética y la solución analítica, mientras que el eje X determina el tamaño de la malla utilizado para obtener tales aproximaciones. Según se observa en la leyenda de cada gráfica existen tres curvas, una para cada método de solución, pero las mismas se encuentran superpuestas razón por la cual solo se puede visualizar una curva oscilando. Esta superposición de las curvas se debe nuevamente a la falta de sensibilidad de los errores en torno al método de solución empleado.

Ahora bien, en cuanto el comportamiento oscilante de las curvas tenemos que es un hecho conocido que todos los métodos numéricos diseñados para resolver problemas suaves presentan dichas oscilaciones en el caso de coeficientes discontinuos. Sin embargo, en nuestra figura se observa que la amplitud de tales oscilaciones se incrementa conforme se refina la malla, la causa de este comportamiento se debe a la discontinuidad del coeficiente k exclusivamente, pues hay experimentos numéricos anteriores [30], los cuales señalan que la discontinuidad del coeficiente a tiene poco o ninguno efecto sobre la aparición de las oscilaciones. A consecuencia de este comportamiento se incluyó en nuestra formulación el uso del promedio armónico [25], el cual se define a continuación, y nos permitirá evaluar las transmisibilidades cerca de las discontinuidades

$$k_{x,i} = \frac{1}{2} \approx \frac{2k_{x(i-\frac{1}{2})} + k_{x(i+\frac{1}{2})}}{2}$$

Continuando con la figura 5.3, tenemos que en cada una de las gráficas se observa

una recta s´olida, la cual nos permite dividir a los puntos asociados a los errores en dos grupos, los ubicados sobre la recta que corresponden a los 'picos superiores' o m´aximos de cada curva y los que se encuentran en el extremo opuesto, es decir los 'picos inferiores' o m´inimos. Cada uno de estos grupos de puntos muestran un comportamiento lineal bien definido y por tanto sus tasas de convergencia son conocidas.

En consecuencia, si observamos la figura 5.3 espec´ıficamente el gr´afico izquierdo que corresponde a la presi´on junto con la tabla 5.4, tenemos que la tasa de convergencia media, determinada por la pendiente de la recta s´olida (tt), es de 0.977, es decir, que el orden de convergencia es lineal para este caso. Mientras que la pendiente de la recta punteada (tm´ax), ubicada en la parte superior de la misma gr´afica, corresponde a la tasa de convergencia asociada a los puntos m´aximos que en este caso es de 0.783 y por ultimo´ la pendiente de la recta a trozos (tm´ın) corresponde la tasa de convergencia para los puntos m´inimos cuyo valor es de 1.626, que es superior al orden lineal esperado para problemas con coeficientes discontinuos.

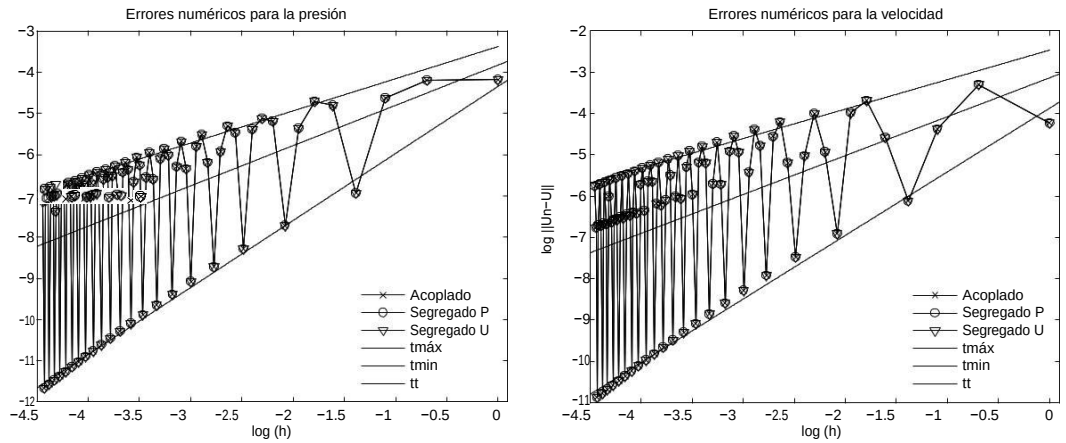


Figura 5.3: Comportamiento de los errores num´ericos en norma del m´aximo Test 2 1D

Para el caso de la velocidad debemos considerar la gráfica a la derecha de la figura 5.3 junto con la tabla 5.5. En este caso se observa que la tasa de convergencia media es 0.940, es decir lineal para todos los métodos de solución en estudio. Mientras que para los puntos mínimos la tasa de convergencia fue de 1.538 y por lo tanto el orden de convergencia también mejora.

Puntos	Acoplado	Segregado P	Segregado U
Medios (tt)	0.97755	0.97732	0.97733
Máximos (tm ^{ax})	0.78354	0.78313	0.78364
Mínimos (tm ⁱⁿ)	1.62686	1.62634	1.63612

Tabla 5.4: Tasas de convergencia para la presión Test 2 1D

Puntos	Acoplado	Segregado P	Segregado U
Medios (tt)	0.94032	0.94046	0.94044
Máximos (tm ^{ax})	0.71267	0.71255	0.71298
Mínimos (tm ⁱⁿ)	1.53813	1.53887	1.53894

Tabla 5.5: Tasas de convergencia para la velocidad Test 2 1D

A consecuencia de las notables mejoras reportadas en las tasas de convergencia asociadas a los puntos mínimos en el caso de la presión y el de la velocidad se revisaron las mallas asociadas a dichos puntos, y se encontró que tales mallas correspondían a mallas específicas denominadas par-par [33], las cuales se definen como aquellas cuyo número de bloques es múltiplo de cuatro, y se caracterizan por poseer simultáneamente separaciones en los bloques para ambas discontinuidades, es decir en los puntos $x = 0.25$ y $x = 0.5$. Esta observación nos revela porque la tasa de convergencia para puntos mínimos es la más alta. Por otro lado tenemos que los

puntos máximos están asociados a mallas tanto pares como impares, razón por la cual su tasa de convergencia es baja.

Pasamos ahora a considerar las iteraciones GMRES que empleó cada método de solución. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.6. Como podemos observar en la primera columna se encuentran los distintos tamaños de bloques considerados y las restantes tres columnas indican el número de iteraciones que empleó cada método. En dicha tabla se muestra como ambos métodos segregados siempre convergen en menos iteraciones que el método acoplado, comportamiento que se mantuvo bajo refinamiento de malla. Específicamente estamos hablando de que los métodos segregados requieren la mitad de iteraciones que el acoplado para alcanzar la convergencia.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5	21	11	10
10	31	16	15
20	51	26	25
40	91	46	45
60	131	66	65
90	191	96	95

Tabla 5.6: Número de iteraciones GMRES Test 2 1D

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento de las iteraciones reportadas en la tabla 5.6. En este caso, el tamaño de la malla utilizado está representado por el eje X, mientras que el eje Y corresponde a las iteraciones GMRES reportadas. Aún cuando solo se visualizan dos curvas la leyenda indica que existen tres, una por cada resolutor, esto se debe a que los enfoques segregados reportaron números de

iteraciones semejantes por lo tanto sus respectivas curvas se encuentran solapadas. Adicionalmente estos métodos de solución convergen en la mitad de iteraciones respecto del método acoplado y por ende la curva que representa a este método es la más alejada del eje X.

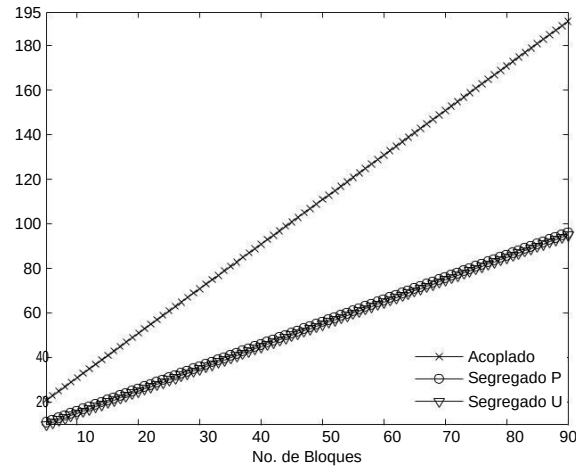


Figura 5.4: Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 2 1D

5.3 Problemas 2D

En esta segunda sección se presentan tres Test con un orden de dificultad creciente lo que nos permite mostrar los alcances de la nueva formulación mixta bidimensional definida en la ecuación (3.17). Cada uno de los problemas que aquí se presentan son definidos sobre el cuadrado unitario, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. En esta sección no contamos con todas las soluciones analíticas. Adicionalmente las mallas que se utilizaron son uniformes con tamaños crecientes de bloques, específicamente van desde $n = 5 \times 5$ hasta $n = 90 \times 90$ y el tamaño de cada bloque viene dado por $h = 1/n$ tanto en la dirección x como en la dirección y. Internamente cada método de solución utiliza

GMRES sin RESTART ni preconditionador, se tom´ como nivel de tolerancia el valor de 10^{-11} para el c´alculo del error residual.

5.3.1 Test 1

Se propone resolver la ecuaci´on de difusi´on con un tensor variable diagonal k_I que definimos a continuaci´on:

$$-\nabla \cdot (k \nabla p)(x, y) + a(x, y)p(x, y) = f(x, y) \quad (5.9)$$

con $a(x, y) = 1$, $k(x, y) = e^{x+y}$ y la funci´on fuente dada por:

$f(x, y) = -e^{x+y} m(m-1)x^{m-2} + y^{m-2} + x^{m-1} + y^{m-1} + x^m + y^m$. (5.10)

Bajo la siguiente condici´on de Robin en el borde, cuyos t´erminos no homog´eneos corresponden a la evaluaci´on de la soluci´on anal´itica (5.9) en dichas condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} p + k \frac{\partial p}{\partial y} (x, 1) &= 1 + x^5 + 5e^{1+x} \\ p - k \frac{\partial p}{\partial y} (x, 0) &= x^m \\ p + k \frac{\partial p}{\partial x} (1, y) &= 1 + y^2 + 5e^{1+y} \\ p - k \frac{\partial p}{\partial x} (0, y) &= y^m \end{aligned} \quad (5.11)$$

La soluci´on anal´itica para la presi´on asociada a este problema de contorno definido por las ecuaciones (5.9) y (5.11) es $p(x, y) = x^m + y^m$, la cual nos permitir´a evaluar la calidad de las aproximaciones obtenidas por cada m´etodo de soluci´on en estudio as´ı como tambi´en en los respectivos ordenes´ de convergencia. En este Test s´olo realizar´an simulaciones num´ericas para el caso $m = 5$, figura 5.5, por considerarlo de dificultad media. Seg´un se puede apreciar en dicha figura la superficie p presenta un comportamiento asint´otico con respecto a los ejes coordenados Z e Y

lo cual numéricamente se traduce en el uso de mallas muy refinadas para lograr una buena aproximación.

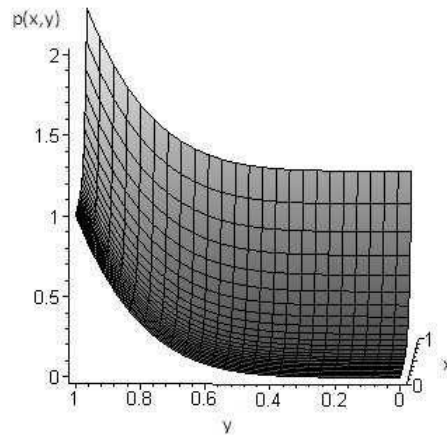


Figura 5.5: Solución analítica del Test 1 2D

En la tabla 5.7 se presentan los errores numéricos obtenidos para la presión en la norma del módulo máximo para seis tamaños de mallas aplicando los diferentes resolvers propuestos. En la primera columna aparece el número de celdas o bloques usados para obtener las aproximaciones numéricas que generan los errores mostrados en las otras tres columnas. Los resultados obtenidos tienen la misma tendencia del caso unidimensional (Test 1 1D), en los cuales se observa que mientras más refinada es la malla menor es el error numérico alcanzado, esto ocurre para cualquier método de solución utilizado. Por otra parte, las aproximaciones alcanzan una exactitud de dos dígitos de precisión en la malla de 90×90 bloques.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5× 5	0.3996042350127	0.3996042350126	0.3996042348220
10× 10	0.1001331358266	0.1001331358265	0.1001331358562
20× 20	0.0250476333160	0.0250476333110	0.0250476330400
40× 40	0.0062631982185	0.0062631982143	0.0062631977770
60× 60	0.0027837902306	0.0027837902286	0.0027837902123
90× 90	0.0012373600284	0.0012373600198	0.0012373594319
Tasa	1.9988759329443	1.9988759353487	1.9988760995705

Tabla 5.7: Errores y tasas de convergencia para la presión Test 1 2D

En la misma tabla se aprecian que las tasas de convergencia para cada uno de los resolvedores en estudio fue de 1.99887 para todos los métodos de solución en estudio, es decir muy próxima a la cuadrática tal y como se reportó en el caso unidimensional..

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5×5	0.506715655081623	0.506715655082001	0.506715661985640
10×10	0.181535517201944	0.181535517196778	0.181535518144287
20×20	0.061365429039782	0.061365428900473	0.061365448364160
40×40	0.017622373243221	0.017622374307258	0.017622474414580
60×60	0.008190186677766	0.008190185631051	0.008190186703260
90×90	0.003748932485571	0.003748930732158	0.003749293951920
Tasa	1.697525194056363	1.697525355881660	1.697491841875775

Tabla 5.8: Errores y tasas de convergencia para la velocidad Test 1 2D

Seguidamente se presentan los errores numéricos obtenidos para la velocidad, tabla 5.8 para la cual se usaron nuevamente seis tamaños de mallas. Los resultados muestran una falta de sensibilidad de los errores en función de los resolvedores en

estudio, mientras que si se refina la malla los errores presentan un comportamiento monótono decreciente, para los tres esquemas de solución, específicamente para la malla de 90×90 bloques se alcanzaron aproximaciones con dos dígitos de exactitud.

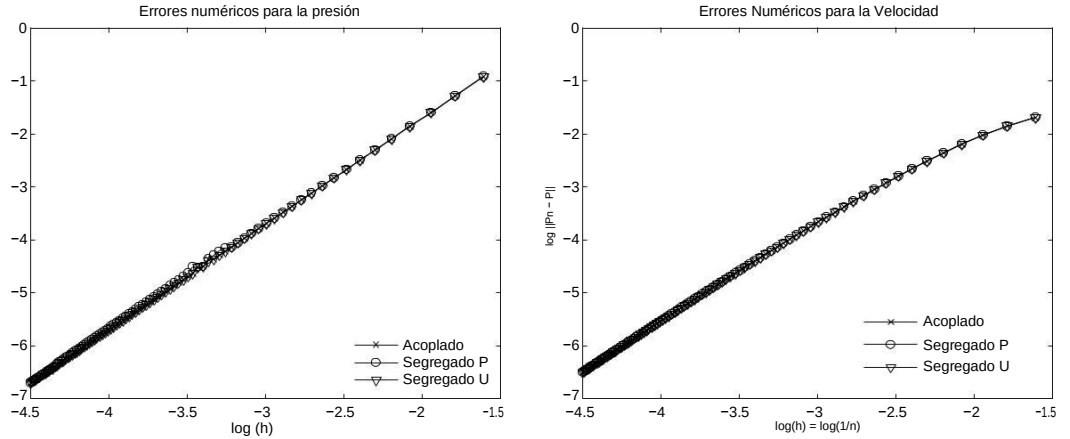


Figura 5.6: Comportamiento de los errores numéricos en norma del máximo Test 1 2D

Desde un punto de vista cuantitativo los resultados reportados en la tabla 5.8 permiten estimar la tasa de convergencia, cuyo valor estimado fue de 1.697525 para cada resolutor y por tanto el orden es superlineal.

La representación gráfica de los errores expuestos en las dos tablas anteriores se puede observar en la figura 5.6. En la misma se observan dos gráficas, a la izquierda está la imagen que muestra los errores para la presión mientras que a la derecha está la correspondiente gráfica para la velocidad. Según indica la leyenda existen tres curvas, una por cada método de solución, pero estas se encuentran superpuestas debido a que las magnitudes de los errores que ellas representan son prácticamente las mismas, tal y como se mostraron en las tablas 5.7 y 5.8. El comportamiento de los errores para ambos casos (presión y velocidad), es monótonamente decreciente bajo refinamiento de malla para todos los resolutores, tal y como fue expuesto anteriormente.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5×5	81	35	29
10×10	272	113	62
20×20	827	351	124
40×40	2149	982	225
60×60	3710	1517	318
90×90	6314	3125	451

Tabla 5.9: Número de iteraciones GMRES Test 1 2D

En otro orden de ideas, tenemos la tabla anterior en la cual se visualiza el número de iteraciones que empleó cada método en alcanzar la convergencia. Los datos en dicha tabla fueron organizados de manera siguiente, en la primera columna aparece el número de bloques usados en la malla para obtener las iteraciones GMRES empleadas por cada método y dispuestas en las otras tres columnas. Los resultados reportados muestran que el método acoplado siempre usó el mayor número de iteraciones en comparación con los métodos segregados, este comportamiento se mantuvo aun cuando se refinaba la malla. Por otra parte el método segregado P utilizó la mitad de iteraciones que el método acoplado. Mientras, que el segregado para la velocidad fue el método que convergió con la menor cantidad de iteraciones, específicamente utilizó 14 veces menos iteraciones que el acoplado y un 7 veces menos iteraciones que el segregado P.

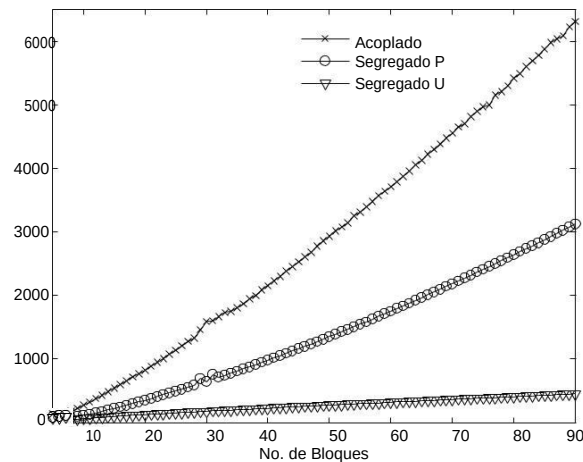


Figura 5.7: Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 1 2D

Seguidamente, en la figura 5.7 se presenta el comportamiento gráfico de las iteraciones, en la cual se ratifica lo dicho en el párrafo anterior. Para este caso los ejes coordenados representan: eje X los distintos tamaños de malla utilizado y el eje Y corresponde al número de iteraciones usadas por cada resolvidor. Se observan en este Test a diferencia del caso unidimensional una notable diferencia entre los métodos segregados, aún cuando estos esquemas convergen en menos iteraciones que el acoplado. En resumen tenemos que el método segregado para la velocidad para problemas de contorno con coeficientes suaves converge en menos iteraciones y produce las mismas aproximaciones numéricas que los otros dos métodos de solución, tanto para la presión como para la velocidad.

Incorporamos en esta sección la siguiente tabla en la cual se muestran el tamaño de la matriz (DM) asociadas a cada método de solución a medida que refinamos la malla así como también en sus respectivos condicionamientos. En dicha tabla se observa que el método segregado U trabaja con un número de incógnitas (DM) similar al del segregado P y tres veces menor si lo comparamos con el acoplado. Pero por otra

parte tenemos que las matrices mejor condicionadas corresponde al segregado U y esto justifica el porqué este método es el que converge en menos iteraciones.

No. de bloques	Acoplado		Segregado P		Segregado U	
	DM	Condición	DM	Condición	DM	Condición
5×5	105	406.2580	45	3.0876E+03	30	286.8588
10×10	360	1.1340E+03	140	2.0171E+04	110	1.7132E+03
20×20	1320	3.5998E+03	480	1.4219E+05	420	9.3031E+03
40×40	5040	1.3902E+04	1760	1.0586E+06	1640	4.9659E+04
60×60	11160	3.0912E+04	3840	3.4828E+06	3660	1.1758E+05
90×90	24840	6.9009E+04	8460	1.1550E+07	8190	3.0297E+05

Tabla 5.10: Dimensiones y condiciones de las matrices del Test 1 2D

5.3.2 Test 2

A continuación planteamos un problema de coeficientes discontinuos:

$$-\nabla \cdot (k\nabla p)(x, y) + a(x, y)p(x, y) = 0 \quad (5.12)$$

donde $k(x, y)$ y $a(x, y)$ se definen por:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & \text{si } 0.5 \leq x < 1, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$a(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x < 0.25 \\ 10 & \text{si } 0.25 \leq x < 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Sujeto a las siguientes condiciones de borde de tipo Robin ni homogéneas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y}(0, y) &= -1 \\ p + 2 \frac{\partial p}{\partial x}(1, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} p - \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) &= h(x) \\ p + \frac{\partial p}{\partial y}(x, 1) &= h(x), \end{aligned}$$

donde la función $h(x)$ se define por la siguiente expresión, la cual corresponde a la presión analítica del tes 2 unidimensional, esto con la intención de obtener soluciones similares al caso unidimensional (Test 2 1D).

$$h(x) = \begin{cases} -0.02468e^{\sqrt{3}x} - 0.25063e^{-\sqrt{3}x} + \frac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x < 0.25 \\ 0.000067e^{\sqrt{10}x} + 0.31332e^{-\sqrt{10}x} + \frac{x}{10} & \text{si } 0.25 \leq x \leq 0.5 \\ -\frac{0.00683e^{\sqrt{5}x}}{0.00067} - \frac{0.13425e^{-\sqrt{5}x}}{0.13425} + \frac{x}{5} & \text{si } 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones (5.12) - (5.15) determinan un problema bien planteado cuya única solución para la presión y la velocidad están dadas en las ecuaciones (5.16) y (5.17) respectivamente. Estas últimas nos permitirán evaluar la calidad de las aproximaciones numéricas producidas por los resolvers lineales bajo estudio.

$$p(x, y) = \begin{cases} -0.024681e^{\sqrt{3}x} - 0.250630e^{-\sqrt{3}x} + \frac{x}{3} & 0 \leq x < 0.25 \\ -\frac{0.00067}{-0.0068324e^{10x} - 0.13425e^{-10x} + 5} \sqrt{10}x + 0.313327e^{-\sqrt{10}x} + \frac{x}{10} & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$u(x, y) = \begin{cases} -0.024681\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} + 0.250630\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x + \frac{1}{3}} & x < 0.25 \\ -0.013664\sqrt{5}e^{\sqrt{5}x + 0.26851} + 0.313327\sqrt{5}e^{-\sqrt{5}x + \frac{1}{2}} & 0.25 < x \leq 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Recordemos que la discontinuidad de la función k influye en el cálculo de la solución numérica y de ahí que en la gráfica 5.8 los errores presenten un comportamiento cuya amplitud en la oscilación crezca conforme se refine la malla, razón por la cual se incluyó en nuestra formulación el uso del promedio armónico [25] definido en la ecuación (5.18), el cual nos va a permitir evaluar las transmisibilidades cerca de las discontinuidades.

$$k_{x i - \frac{1}{2}}, y j - \frac{1}{2}} = \frac{k_{x(i - \frac{1}{2}), y j - \frac{1}{2}} + k_{x(i + \frac{1}{2}), y j - \frac{1}{2}}}{2}. \quad (5.18)$$

En la tabla 5.11 se muestran los errores numéricos obtenidos en la norma del máximo para la presión, aplicando los tres métodos de solución propuestos (acoplado y segregados). Los datos fueron organizados en cuatro columnas, en la primera se observan los distintos tamaños de mallas empleados para obtener las aproximaciones numéricas que están reflejadas en las otras tres columnas. Al comparar los resultados se observa nuevamente que entre los errores existen pequeñas diferencias numéricas, lo que ya hemos reportados como una fuerte falta de sensibilidad de los errores en función del resolutor lineal empleado. Por otra parte, en una malla de 60×60 todos los resolutores lograron una aproximación de cuatro dígitos de exactitud pero al refinar más la malla, específicamente 90×90 la aproximación perdió un dígito de exactitud, por lo que podemos afirmar que conforme aumenta los bloques de la malla los errores no disminuyen sino que muestra comportamiento oscilante.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5×5	0.006374954627320	0.006374954627310	0.011584429707120
10×10	0.008426909585750	0.008426909585740	0.008426909585750
20×20	0.000155398299430	0.000153982994010	0.000155398299340
40×40	0.000039477964267	0.000039477963959	0.000039477964341
60×60	0.000017641295542	0.000017641297459	0.000017641295611
90×90	0.000907233273369	0.000907233260756	0.000907233273107

Tabla 5.11: Errores numéricos para la presión Test 2 2D

Pasamos ahora a la tabla 5.12 la cual corresponde a los errores numéricos obtenidos para la velocidad, los cuales muestran en primer lugar unas pequeñas variaciones numéricas entre los métodos de solución planteados conforme se refina la malla, específicamente para una malla de 90×90 todos los esquemas redujeron su error a tres dígitos de exactitud, mientras que para la malla 40×40 fue cuatro dígitos de exactitud, lo que muestra un comportamiento oscilatorio de los errores conforme aumenta el número de bloques en la malla.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5×5	0.019664872936190	0.019664872936180	0.012368676940380
10×10	0.024450152200850	0.024450152201120	0.024450152200880
20×20	0.000358448232540	0.000358448225746	0.000358448229178
40×40	0.000090052412226	0.000090052405072	0.000090052408198
60×60	0.000042875706655	0.000042875711789	0.000042875725912
90×90	0.003103889755270	0.003103889725270	0.003103889755160

Tabla 5.12: Errores numéricos para la velocidad Test 2 2D

En la figura 5.8 se muestra el comportamiento gráfico de los errores reportados en 69

las dos tablas anteriores. En ambas gráficas la escala es logarítmica para ambos ejes de coordenadas, el eje X determina el tamaño de la malla utilizado para calcular los errores que están en el eje Y. En dicha figura se muestran dos gráficas, a la izquierda la presión y a la derecha la velocidad, en los dos casos se observa que las curvas son oscilantes, tal y como vimos en el caso unidimensional, y las razones de dicho comportamiento ya fueron expuestas.

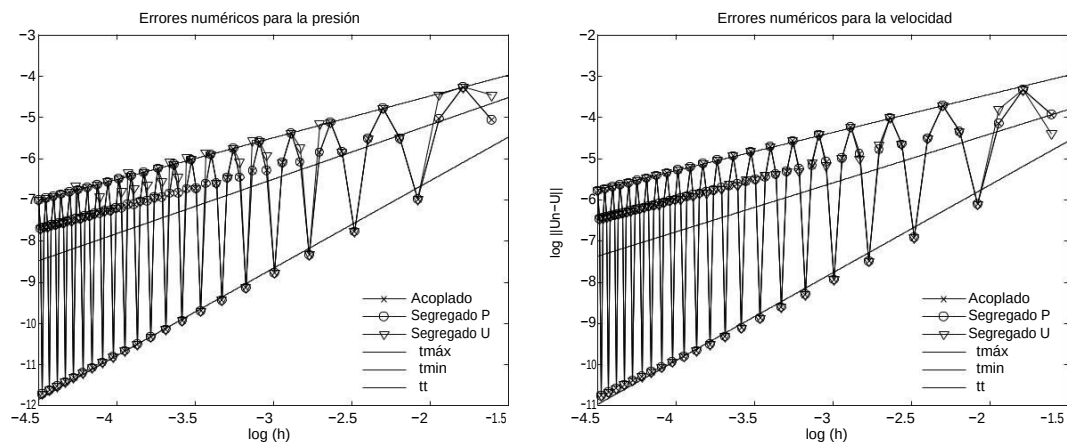


Figura 5.8: Comportamiento de errores numéricos en norma del máximo Test 2 2D

Basados en la figura 5.8, y retomando las definiciones de que dimos en el Test 2 unidimensional (sección anterior) tenemos que en ambas gráficas la presencia de una recta sólida (tt), cuya pendiente como sabemos determina la tasa de convergencia media el cual es de orden lineal para el caso de la presión, según se muestra la tabla 5.13. Adicionalmente observamos que la tasa para los puntos máximos (tmáx) también es lineal, pero para los puntos mínimos (tmin) el orden de convergencia es cuadrático.

	Acoplado	Segregado P	Segregado U
Media (tt)	1.3209	1.3320	1.4212
Máximos (tmáx)	1.0131	1.0110	1.0359
Mínimos (tmin)	2.1220	2.2244	2.3765

Tabla 5.13: Tasas de convergencia para la presión Test 2 2D

En cuanto a las tasas de convergencia para la velocidad, tabla 5.14, las mismas mejoran, tal y como sucedió con la presión, es decir el orden de convergencia media es lineal, tanto para los puntos medios como para los puntos máximos, mientras que el orden de convergencia mejora para los puntos mínimos muestran un orden cuadrático. Por lo tanto, las tasas de convergencia son sensibles al tipo de malla que se emplee en problemas con coeficientes discontinuos.

Puntos	Acoplado	Segregado P	Segregado U
Medios (m)	1.1869	1.1963	1.2351
Máximos (máx)	0.9434	0.9447	0.9557
Mínimos (min)	2.270	2.283	2.8760

Tabla 5.14: Tasas de convergencia para la velocidad Test 2 2D

En conclusión podemos afirmar que las tasas de convergencia en este Test también mejoraron en el caso bidimensional siempre y cuando se empleen mallas escalonadas cuyas separaciones de los bloques coincidan con las discontinuidades de los coeficientes k y a del problema de contorno.

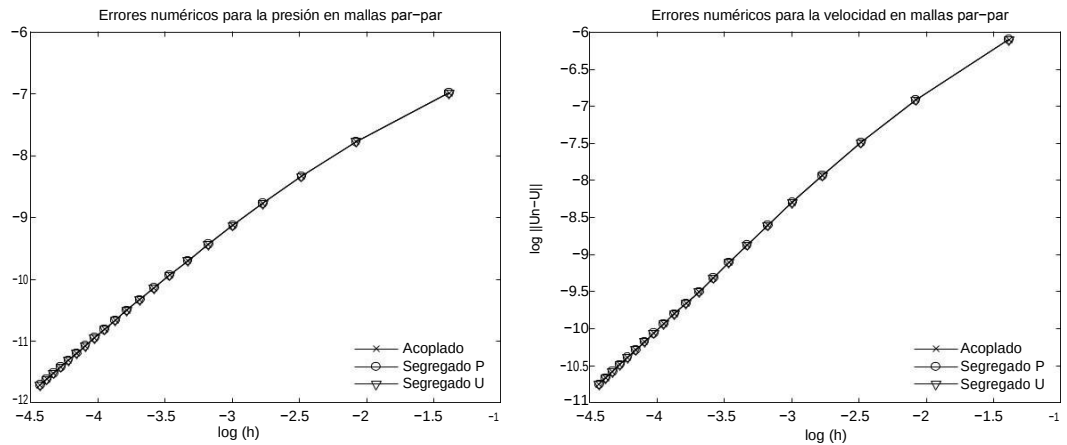


Figura 5.9: Comportamiento de los errores numéricos mallas par-par Test 2 2D

En este orden de ideas la Figura 5.9, muestra como los errores para la presión y la velocidad restringidos a mallas tipo par-par mejoran notablemente, pues desaparecen las oscilaciones, y ahora presentan un comportamiento monótono decreciente (del error) conforme aumenta el número de bloques.

No. de Bloques	Acoplado	Segregado P	Segregado U
5×5	67	33	16
10×10	203	104	48
20×20	649	305	93
40×40	1537	828	175
60×60	2571	1480	247
90×90	4174	2599	355

Tabla 5.15: Número de iteraciones GMRES Test 2 2D

En la tabla 5.15 se muestran las iteraciones que empleó cada uno de los métodos de solución en estudio (acoplado, segregado P y segregado U) para alcanzar la convergencia. En la misma se observa, primeramente que el método acoplado reporta el mayor número

de iteraciones. Específicamente este resolutor empleó el doble de iteraciones respecto del segregado P y Once veces más iteraciones que el segregado para la velocidad. Segundo, los métodos segregados muestran una marcada diferencia entre ellos opuesto a lo ocurrido en el caso unidimensional, para este caso el segregado U utilizó 7 veces menos iteraciones que el segregado para la presión.

El comportamiento gráfico de las iteraciones se muestra en la figura 5.10. Aquí nuevamente el eje X representa al número de bloques en la malla, y el eje Y muestra el número de iteraciones. En dicha figura se corrobora que el segregado U es la gráfica que se encuentra más cercana al eje x pues es el método que converge en menos iteraciones, seguida por la curva que corresponde al segregado para la presión y finaliza con la curva del esquema acoplado que como ya vimos es el método que converge más lento, comportamiento que se mantuvo conforme se incrementaban el número de bloques en la malla.

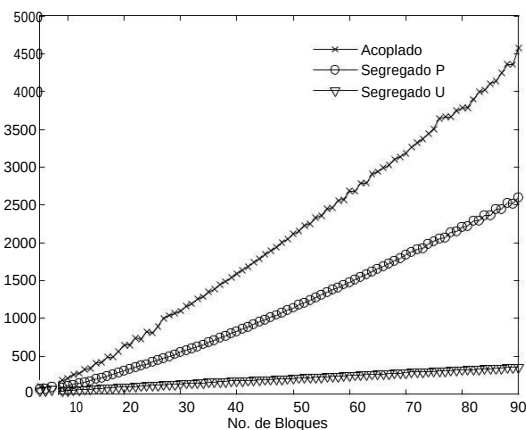


Figura 5.10: Comportamiento de las iteraciones GMRES Test 2 2D

Cerramos este test mostrando la siguiente tabla en la cual se incorporan dos parámetros de interés como son la dimensión o tamaño de la matriz (DM) asociada a cada uno de los métodos en estudio, así como también el condicionamiento de las mismas. En la mencionada tabla se visualiza que el número de incógnitas que se emplean en el segregado para la velocidad es similar al del segregado para presión y a su vez tres veces menor que el

acoplado. Si embargo el condicionamiento de las matrices asociadas al segregado U fue mejor en comparación con los otros dos métodos. Siendo esta la razón del porqué este método converge en menos iteraciones.

No. de bloques	Acoplado		Segregado P		Segregado U	
	DM	Condición	DM	Condición	DM	Condición
5×5	105	188.6778	45	486.2670	30	59.7829
10×10	360	614.3495	140	2.7279E+03	110	228.7027
20×20	1320	2.1867E+03	480	1.8898E+04	420	1.1901E+03
40×40	5040	8.2193E+03	1760	1.3570E+05	1640	5.7272E+03
60×60	11160	1.8106E+04	3840	4.4086E+05	3660	1.4339E+04
90×90	24840	4.0164E+04	8460	1.4416E+06	8190	3.3283E+04

Tabla 5.16: Dimensión y condición de la matriz para el Test 2 2D

5.3.3 Test 3

Para finalizar con nuestro estudio numérico bidimensional pasamos ahora a resolver la ecuación de difusividad anisotrópica sobre medios porosos, propuesta en [31]

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) = f(x, y) - \phi p(x, y) = f(x, y). \quad (5.19)$$

Diremos que la ecuación (5.19) es perturbada (EP) si $\phi \neq 0$, en caso contrario, es decir $\phi = 0$ se dice que (5.19) es una ecuación no perturbada (ENP). Adicionalmente en esta ecuación la función fuente es f , mientras que las funciones k_x y k_y representan la permeabilidad en la dirección x e y respectivamente. Las condiciones de borde a considerar son de no flujo a lo largo de la frontera Ω , es decir son de tipo Neumann homogénea.

La geometría de la región Ω se muestra en la figura 5.11, en la cual podemos apreciar que se han colocado cinco pozos, 3 son inyectores, que corresponden a los círculos blancos, mientras que los círculos negros corresponden a los pozos productores. Adicionalmente se puede observar la presencia de cuatro regiones cuyas ubicaciones especificamos a

continuación: la región D esta definida por $\frac{1860}{1860}, \frac{1321}{1860} \times \frac{1019}{1860}, \frac{624}{1860}, \frac{1079}{1860}$, donde $\times$ representa el producto cartesiano. La región C ubicada en $\frac{361}{1860}, \frac{719}{1860} \times \frac{361}{1860}, \frac{719}{1860}$, la región B dada por $\frac{29}{60}, 1 \times 0,60$ y para finalizar la región A la cual resulta de quitarle a Ω las tres regiones anteriores.

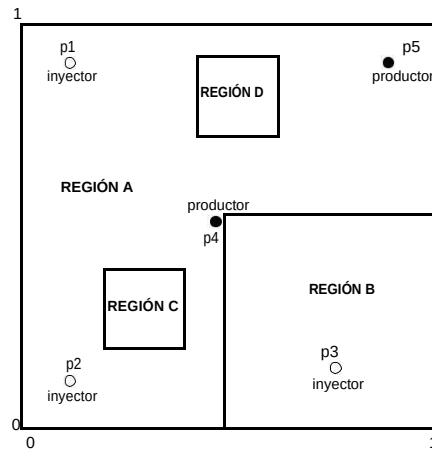


Figura 5.11: Geometría real del problema heterogéneo del Test 3 2D

Por otra parte en la tabla 5.17 se muestran las posiciones y tasas de flujo correspondiente a cada uno de los pozos antes mencionados.

Tipo de pozo	Posición	Tasas de flujo
Inyectores	$p_1 = \frac{7}{62}, \frac{7}{62}$	$q_1 = 1.00$
	$p_3 = \frac{47}{62}, \frac{9}{62}$	$q_3 = 0.60$
	$p_2 = \frac{7}{62}, \frac{55}{62}$	$q_2 = 0.50$
	$p_4 = \frac{55}{62}, \frac{55}{62}$	$q_4 = 1.83$
Productores	$p_5 = \frac{55}{62}, \frac{55}{62}$	$q_5 = -0.27$

Tabla 5.17: Posiciones y tasas de flujo para los pozos del Test 3 2D

Para nuestro estudio se tomarán las siguientes consideraciones, en la región A, k_x y k_y

son uniformes y ambas igual a la unidad, es decir, esta región es isotrópica. En la región B, k_x toma el valor de uno y k_y es igual a cien. Para la región C, se invierte la permeabilidad, es decir k_x toma el valor de cien mientras que k_y es la unidad. Observamos que las regiones B y C son anisotrópicas. Para concluir, en la región D se toman las permeabilidades nulas, lo que representa una barrera absoluta para el flujo.

En base a lo anterior podemos definir el lado derecho de la ecuación (5.19) de la siguiente manera

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^5 q_i \delta((x, y) - p_i) \quad (5.20)$$

donde q_i representa la tasa de flujo para el pozo p_i definidas en la tabla 5.11 y la delta de Dirac es aproximada de la siguiente manera $\delta = 1/h^2$ donde $h = 1/31$ define la longitud del lado correspondiente al bloque de la malla conteniendo al pozo. El tamaño de la malla que se utilizó para las pruebas numéricas correspondientes a este test es de 31×31 bloques cuyas longitudes en la dirección x e y son iguales y vienen dadas por h .

A consecuencia de la no permeabilidad de la región D, es decir $k_x = k_y = 0$, se introduce un nuevo esquema mimético que denominaremos formulación mixta alternativa, la cual se define a continuación:

$$I - KG \quad U = \begin{matrix} F \\ 1 \end{matrix} \quad (5.21)$$

$$D + B \quad C - A \quad P \quad F_2$$

notese que todos los operadores miméticos empleados en esta formulación están definidos en 2D (consultar sección 2.3).

Como consecuencia del párrafo anterior debemos replantearnos las ecuaciones que definen a los métodos segregados siguiendo la misma metodología de las secciones 4.3.1 y 4.3.2. Por lo tanto nuevas ecuaciones vienen dadas por expresiones (5.22) correspondiente al segregado P y la ecuación (5.23) para el segregado U, las cuales serán implementadas

conjuntamente con la formulaci3n (5.21).

$$[(D + B)KG + (C - A)]P = F_2 - (D + B)F_1 \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} U &= KGP + F_1 \\ [I + KG(C - A)^{-1}(D + B)]U &= F_1 - KG(C - A)^{-1}F_2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$P = (C - A)^{-1}[F_2 - (D + B)U]$$

Es importante hacer algunas observaciones en este punto. Primeramente la ecuaci3n (5.19) modela dos tipos de problemas uno no perturbado (ENP), $q = 0$, y otro perturbado (EP), $q = 10^{-8}$. Para cada uno de los problema anteriores tenemos dos esquemas míméticos definidos, el primero en la ecuaci3n (3.17) y el segundo en la ecuaci3n (5.21) denominados formulaci3n inicial y formulaci3n alternativa, respectivamente. Adem3s disponemos de tres resolvedores lineales para cada formulaci3n mímética, que corresponden al m3todo acoplado y a los dos m3todos segregados. En consecuencia pasamos a fijar la estrategia de soluci3n para este Test. Por cada formulaci3n planteada se resuelven las dos variantes de la ecuaci3n (5.19), la perturbada y la no perturbada. Si fijamos por un momento la formulaci3n inicial aplicada a la ecuaci3n perturbada podemos entonces usar los tres resolvedores para calcular una soluci3n aproximada a este problema as3 como tambi3n en el n3mero de iteraciones empleadas por cada resolvidor. Resuelto el caso perturbado y considerando todav3a la misma formulaci3n pasamos ahora a la ecuaci3n no perturbada, la cual se soluciona empleando los mismos tres resolvedores. Finalmente repetimos la misma metodolog3a pero ahora para la formulaci3n alternativa.

Por otra parte cabe destacar que para este Test no tenemos una soluci3n anal3tica por lo que el estudio comparativo entre los distintos enfoques se basa en el n3mero de iteraciones que necesit3 cada resolvidor lineal en alcanzar la convergencia,. Se utiliz3 una tolerancia

10^{-8} para el GMRES.

Resolvidor	Tamaño de la matriz	Formulación Inicial	
		EP	ENP
Acoplado	3069	2386	2386
Segregado P	1085	1047	1047
Segregado U	992	No Aplica	No Aplica

Tabla 5.18: Resultados numéricos para la formulación inicial del Test 3 2D

Los resultados numéricos al emplear la formulación mimética inicial para la resolución de la ecuación diferencial (5.19), se muestran en la tabla 5.18, en la cual se observa que los resolvidores lineales se comportaron de manera idéntica para la ecuación perturbada (EP) como para la perturbada (ENP), es decir no se reflejaron diferencias numéricas, mas aún al comparar entre los resolvidores se observa que el enfoque acoplado necesitó un mayor número de iteraciones, específicamente 2386. Seguidamente tenemos que el segregado P redujo notablemente el número de iteraciones a 1047, aproximadamente un 50 % menos de iteraciones. Adicionalmente tenemos que el método U no reportó iteraciones, debido a que la matriz $C - A$ de la ecuación (3.17) es singular y por lo tanto no se pueden resolver las ecuaciones (5.22) y (5.23).

A continuación pasamos a analizar el caso en el cual se aplicó la formulación alternativa para la resolución de las dos variantes del problema (5.19), los resultados obtenidos están en la tabla 5.19. En esta ocasión nuevamente el método mimético alternativo tampoco hace distinciones de tipo de ecuación a resolver, es decir el número de iteraciones permanece igual para la EP como para la ENP, sin embargo si cambiamos el enfoque a las iteraciones pero ahora en función del resolvidor si notamos importantes diferencias. En primer lugar, el método acoplado es el que más iteraciones emplea, exactamente 1592, mientras que el segregado P solo empleó 796, es decir este esquema necesita un 50 % menos de iteraciones en comparación con el acoplado. Por otra parte el segregado U no reportó iteraciones, por las mismas razones que para la formulación inicial.

Resolvidor	Tamaño de la matriz	Formulación Alternativa	
		EP	ENP
Acoplado	3069	1592	1592
Segregado P	1085	796	796
Segregado U	992	No Aplica	No Aplica

Tabla 5.19: Resultados numéricos para la formulación alternativa del Test 3 2D

En este punto pasamos ahora a enfocarnos en las dos formulaciones planteadas en las ecuaciones (3.17) y (5.20). Basándonos en tablas 5.18 y 5.19, notamos que la formulación alternativa redujo el número de iteraciones tanto para el método acoplado como para el segregado P, específicamente estamos hablando de un 33 % menos de iteraciones para el acoplado y de un 24 % menos para el método segregado P.

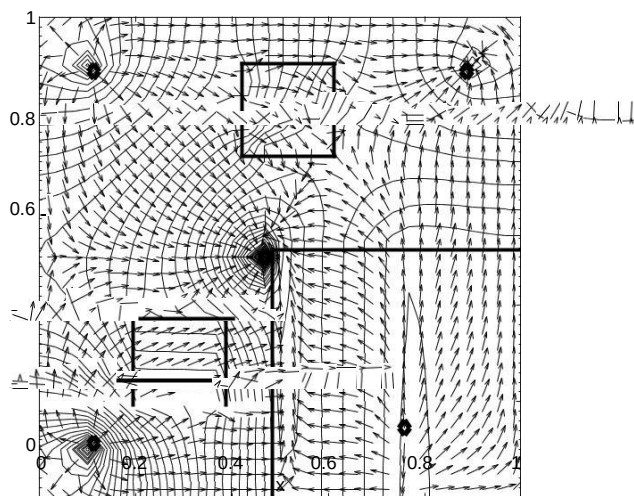


Figura 5.12: Comportamiento numérico para la presión y la velocidad empleando la formulación inicial Test 3 2D

Como no existe la solución analítica para los problemas en estudio, presentamos las

figuras 5.12 y 5.13. La figura 5.12 se observa que las curvas de nivel de la presión y los vectores de velocidad normalizados calculados con la formulación inicial, para el caso de la ecuación no perturbada usando el método acoplado. En dicha figura la región D, representada por el cuadrado superior interno, tiene vectores de velocidad no nulos lo cual es físicamente inconsistente por ser una región impermeable. En consecuencia, la formulación inicial produce una aproximación numérica de baja calidad.

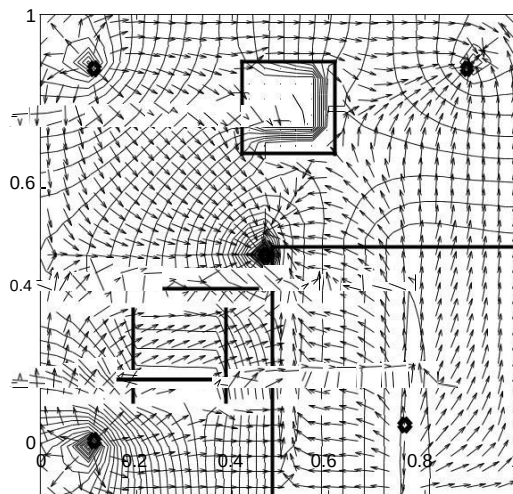


Figura 5.13: Comportamiento numérico para la presión y la velocidad empleando la formulación alternativa Test 3 2D

En la figura anterior se muestra también en las curvas de nivel de la presión y los vectores de velocidad normalizados calculados con la formulación alternativa para el caso de la ecuación no perturbada usando el método acoplado. Ella representa una aproximación físicamente consistente con todas las propiedades asociadas al problema del Test bajo estudio. Específicamente las curvas de nivel y los vectores se comportan de acuerdo con las condiciones asociadas a los pozos. En los pozos inyectores las curvas son concéntricas alrededor de los mismos y los vectores de velocidad apuntan hacia el interior del yacimiento.

En caso de los pozos productores se tiene la misma descripción de dada a los inyectores con la diferencia de que los vectores de velocidad apunta en sentido contrario es decir hacia el interior de los pozos. También vale la pena indicar que el número de curvas de nivel alrededor de los pozos indica indirectamente la magnitud de las tasas asociadas a los mismos, en particular se puede apreciar que pozo con mayor tasa de flujo es el ubicado en el centro del yacimiento. En la región C, representada por el cuadrado inferior izquierdo, los vectores son prácticamente paralelos a la dirección x , lo cual es una consecuencia de la anisotropía de la región donde k_x es cien veces mayor que k_y . De manera similar las velocidades en la región B, definida por el cuadrado inferior derecho, la mayor parte de sus velocidades son paralelas al eje y debido a la anisotropía de la región donde k_y es cien veces k_x . Por otro lado, la mayor parte de la región impermeable D, ubicada en el cuadrado superior, carece de vectores de velocidad internos y curvas de presión siendo esto una característica propia de las regiones de no flujo. Finalmente, observamos que los vectores de velocidad son paralelos a los bordes del yacimiento respetando la condición de no flujo en la región Ω . Descripciones similares a las expuestas en este párrafo son válidas para el caso de las ecuaciones perturbadas (EP).

5.4 Conclusiones

En este trabajo de maestría se ha presentado un estudio teórico y numérico detallado relacionado con una nueva formulación mimética mixta para la solución de problemas elípticos con condiciones de Robin en una y dos dimensiones. El orden de convergencia para la formulación mixta es cuadrático sobre todos los nodos de la mallas lo cual representa una novedad en el contexto de las formulaciones mixtas.

Adicionalmente la matriz de coeficientes asociada a los sistemas lineales generados al implementar la formulación mixta presenta una estructura de bloques 2×2 , la cual permite desacoplar el vector incógnita mediante los métodos segregados y en consecuencia

obtener sistemas lineales reducidos más sencillos de resolver. Adicionalmente la disposición de las entradas de matrices asociadas a los sistemas lineales reducidos son estructuralmente simétricas respecto de la diagonal.

Los resultados numéricos unidimensionales estudiados y analizados dan evidencia de que:

- Los métodos acoplados y segregados que permiten resolver los sistemas de ecuaciones provenientes de la implementación de la formulación mixta sobre problemas de contorno elípticos producen resultados con el mismo orden de aproximación en problemas suaves, siempre y cuando todos los resolvedores empleen el mismo tamaño de malla.
- Los métodos en estudio son sensibles al refinamiento de mallas para problemas suaves, lo cual se refleja en la tasa de convergencia, específicamente se obtuvo orden cuadrático para la presión y superlineal para la velocidad.
- El número de iteraciones GMRES muestra que el enfoque segregado (para la presión o la velocidad) es el método numérico que converge con más rápido, es decir el que reportó menos iteraciones y que además mantuvo la calidad de sus aproximaciones en comparación con los otros dos enfoques.
- El Test 2 se observó la influencia de las mallas de tipo par o par-par sobre las tasas de convergencia, las cuales pasaron de lineales a superlineales, esto debido a que las nuevas mallas propuestas consideraban separaciones de los bloques que coincidían con las discontinuidades de los coeficientes del problema de contorno en estudio.

A continuación mostramos los aspectos más resaltantes para el caso bidimensional.

- El método segregado para la velocidad o método U, resuelve en el caso bidimensional un sistema de ecuaciones cuya dimensión es la cuarta parte del sistema original definido en la (4.1).

- A consecuencia del item anterior, el método segregado U es el método numérico que primero converge, entendiéndose en este caso como el que menor número de iteraciones reporta y además mantiene la calidad aproximaciones en comparación con los otros dos métodos. Esta característica es válida siempre y cuando la matriz $C - A = 60$, tal y como se reportó en el Test 3.
- El primer test bidimensional mostró que los enfoques acoplados y segregados de la formulación mixta producen resultados idénticos en problemas suaves, es decir muestran una fuerte falta de sensibilidad de los errores en función del resolutor empleado.
- Se evidencia que la implementación de la formulación mixta bidimensional muestra decrecimiento en los errores bajo refinamiento de mallas y tasas de convergencia óptimas si se emplean mallas cuyas separaciones de los bloques coincidan con las discontinuidades de los coeficientes del problema de contorno, en cuyo caso el comportamiento oscilatorio no debe ser interpretado como una falta de convergencia del método mimético sino como la necesidad de utilizar mallas especialmente adaptadas a las discontinuidades de los coeficientes de las ecuaciones cuyas soluciones se están aproximando mediante métodos miméticos. Esta situación se evidenció en el Test 2 bidimensional, y además refuerza el caso unidimensional anteriormente mencionado.
- La implementación de la formulación mixta para el caso de medios anisotrópicos produce aproximaciones de baja calidad, lo que conlleva a una reformulación de la misma, la cual se planteó en la ecuación (5.20). Dicha reformulación produjo una aproximación físicamente consistente con todas las propiedades asociadas al Test 3 en cuanto a la región de no flujo, a las condiciones asociadas a los pozos tanto inyectores como productores y con el menor número de iteraciones.

Nomenclatura

A	matriz de coeficientes asociada a la formulaci3n mim3tica mixta
A	matriz de coeficientes asociada a un sistema de ecuaciones
b	lado derecho de un sistema de ecuaciones
x_N	vector N dimensional
$\sim n$	vector normal a $\partial\Omega$
n	variable que depende de N
h	tama3no del bloque
N	n3mero de bloques en la malla mim3tica
G	gradiente mim3tico en 1D
G	gradiente mim3tico en 2D
D	divergencia mim3tica en 1D
D	divergencia mim3tica en 2D
B	operador de borde mim3tico en 1D
B	operador de borde mim3tico en 2D
H_m	matriz de Hessenber de tama3no m
k_x, k_x	permeabilidad en la direcci3n x e y respectivamente en un medio anisotr3pico
p	presi3n del fluido
u	Velocidad del fluido

Ω	región acotada
$\partial\Omega$	frontera de la región Ω
G_x	componente x del gradiente mimético en 2D
G_y	componente y del gradiente mimético en 2D
D_x	componente x de la divergencia mimética en 2D
D_y	componente y de la divergencia mimética en 2D
p_i	i-ésimo pozo
∇	gradiente continuo
$\nabla \cdot$	divergencia continua
Q	Matriz de peso
P	Matriz de peso en 1D
P	Matriz de peso en 2D
K	proyección mimética de la k
K_x	componente x de la k
K_y	componente y de la k
P	proyección mimética de la presión p
U	proyección mimética de la velocidad u
C	proyección mimética de la c
A	proyección mimética de la a
K_m	subespacio de Krylov de dimensión m
r_0	residuo inicial
x_0	vector inicial
L_m	subespacio de Krylov de dimensión m
δ	función delta de Dirac
V_m	base ortonormal del subespacio de Krylov
H_m	matriz de Hessenberg de orden $(m + 1) \times m$

Bibliograf'1a

- [1] Trefethen L.; Spectral Methods in MATLAB, SIAM, 2000.
- [2] Orzag S.A. y Gottlieb D.; Numerical Analysis of Spectral Methods, SIAM, 1977.
- [3] Press W.H., Flannery B., Teukolsky S.A. y Vetterling W.; Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1986.
- [4] Johnson C.; Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, 1987.
- [5] Strang G. y Fix G.; An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, 1973.
- [6] Brebbia C.A.; The Boundary Element Method for Engineers, Wiley, 1978.
- [7] Reddy B.D.; Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements, Springer Verlag, 1998.
- [8] Smith G.D.; Numerical Solutions of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University Press, 1986.
- [9] Morton K.W. y Mayers D.F.; Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford University Press, 1994.
- [10] Strikwerda J.C.; Finite Differences Schemes and Partial Differential Equations, Wadsworth-Brooks Cole, 1989.

- [11] Samarsky A.A. y Nikolaev E.S.; Método de las Ecuaciones Reticulares, Editorial Mir, 1982.
- [12] Samarsky A.A. y Andreiev E.S.; Método en Diferencias para Ecuaciones Elípticas, Editorial Mir, 1979.
- [13] Samarsky A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P. y Shashkov M.; Operational Finite Difference Scheme, Differential Equations, 17, 1981.
- [14] Samarsky A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P. y Shashkov M.; Employment of the Reference Operator Method in the Construction of Finite Difference Analog of Tensor Operators, Differential Equations, 18, 1982.
- [15] Shashkov M.; Conservative Finite-Difference Schemes on General Grids, CRC Press, 1995.
- [16] Shashkov M. y Steinberg S.; Support Operator Finite Difference Algorithm for General Elliptic Problems, Journal of Computational Physics, 118, 1995.
- [17] Shashkov M. y Steinberg S.; Solving Diffusion Equations with Rough Coefficients in Rough Grids, Journal of Computational Physics, 129, 1996.
- [18] Shashkov M. y Steinberg S.; The Numerical Solution of Diffusion Problems in Strongly Heterogeneous non-isotropic Materials, Journal of Computational Physics, 132, 1996.
- [19] Morel J., Roberts R. y Shashkov M.; A local support-operator diffusion discretizations scheme for quadrilateral r-z meshes, Journal of Computational Physics, 144, 1998.
- [20] Hyman J.M. y Steinberg S.; Mimetic Finite Difference methods for Diffusion Equations, Computational Geoscience, 47, 2002.

- [21] Brent M., Lipnikov K., Shashkov M.; Wheeler M., Yotov I.; Superconvergence of the Velocity in Mimetic Finite Difference Methods on Quadrilaterals, SIAM J. on Numerical Analysis, (2005).
- [22] Castillo J.E., Hyman J.M., Shashkov M. y Steinberg S.; Fourth and Sixth Order Conservative Finite Difference Approximation of the Divergence and Gradient, Applied Numerical Mathematics, 37, 2001.
- [23] Castillo J.E. y Grone R.D.; A Matrix Analysis Approach to Higher Order Approximation for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 23, 2003.
- [24] Castillo J.E. y Yasuda M.; Linear System Arising for Second Order Mimetic Divergence and Gradient Discretizations, Journal of Mathematical Modelling and Algorithm, 4, 2005.
- [25] Freites Villegas M. ; Un Estudio Comparativo de los M´etodos Mim´eticos para la Ecuaci´on Estacionaria de Difusi´on, Tesis de Grado, Escuela de Matem´aticas, Universidad Central de Venezuela, 2004.
- [26] Guevara Jordan J.M., Freites Villegas M., Rojas O.R., Castillo J.E., and Rojas S.; A Mimetic Finite Difference Scheme for Solving the Steady State Diffusion Equation with Singular Sources, Proceedings VII International Congress of Numerical Methods in Engineering and Applied Science, Caracas, Venezuela, 2004.
- [27] Guevara Jordan J.M., Freites M., Rojas S., and Castillo J.; Convergence of a Mimetic Finite Difference Method for Estatic Diffusion Equation, Advances in Difference Equations, 2007.
- [28] Guevara Jordan J.M.; Sobre los Esquemas Mim´eticos de Diferencias Finitas para la Ecuaci´on Est´atica de Difusi´on, UCV, 2005.

- [29] Acheson D.J.; Elementary fluid dynamics, First Edition, Oxford University Press, (1990).
- [30] Prada M´arquez J.A.: M´etodo de Rayleigh-Ritz para Problemas de Contornos sobre Mallas Escalonadas, tesis de Licenciatura en Matem´aticas, Universidad Central de Venezuela, 2015.
- [31] Stone H.L.; Iterative Solutions of implicit approximations of multidimensional partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal, v. 5, 1968, p. 530.
- [32] Saad Y.; Iterative Method for Sparse Linear System, SIAM, Segunda Edici´on, 2003.
- [33] Prada M´arquez J.A.: Estudio Comparativo 1D: M´etodos mim´eticos vs Rayleigh-Ritz, CIMENICS, 2016.
- [34] S.A. Vavasis.; Stable numerical algorithms for equilibrium systems, SIAM, J. Matrix Anal. Appl., Vol. 15, pp. 1108-1131, (1994).