



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO DE MATEMÁTICA

Equivalencia Asintótica Relativa de Ecuaciones en Diferencia

Autor: MSc. Edgar A. Medina R.

Tutor: Dr. Hugo Leiva.

CoTutor: Dr. Nelson J. Merentes D.

Tesis Doctoral
Presentada ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
para optar al título de
Doctor en Ciencias Mención Matemática

Caracas - Venezuela
Diciembre - 2016



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias y el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar la **TESIS DOCTORAL** presentada por el estudiante **MSc. EDGARD ALI MEDINA RENAUD**, C.I.V-8.399.594, bajo el título: **"EQUIVALENCIA ASINTOTICO RELATIVA DE ECUACIONES EN DIFERENCIA"**, a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **Lunes 12 de Diciembre de 2016** a las **9:00 am**, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la **Sala Leandro Aristeguieta de la Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- El jurado decidió **APROBARLO**, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, porque se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado reúne los requisitos de presentación, originalidad, revisión bibliográfica e impacto necesarios para constituir una tesis Doctoral.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **12 días** del mes de **Diciembre** del año **2016**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Actuaron como tutores el **DR. HUGO LEIVA (ULA)** y **DR. NELSON MERENTES (UCV)** y como Coordinador del Jurado **DR. HUGO LEIVA (ULA)**.

Dr. AMBROSIO TINEO-ULA

C.I.V- 5.472.871

Jurado designado por Consejo Facultad

DR. JOSE ZUBIRI-UCV

C.I.V- 3.396.245

Jurado designado por Consejo de Facultad

DRA. MARIELA CASTILLO-UCV

C.I.V- 6.510.885

Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

DR. TEODORO LARA-ULA

C.I.V- 4.777.143

Jurado designado por Consejo de Estudios de Postgrado

DR. HUGO LEIVA-ULA

C.I.V- 4.879.430

Tutor



Agradecimiento

A Dios y a la Virgen del Valle.

A los Profesores Nelson Merente y Hugo Leiva, asesores en la Tesis Doctoral.

A los Profesores José Luis Sánchez y Elio Mendez por sus ayudas.

A la memoria de mi madre fallecida hace 13 años.

A la Ilustre Universidad Central de Venezuela en cuyo senos me forme profesionalmente desde el inicio de mis estudios universitarios.

Finalmente a la Sra. Maritza Balza por los apoyos brindados a través del Banco Central de Venezuela.

Y al amigo Vizcaya por su valiosa transcripción y diagramación de la Tesis Doctoral.

Índice general

Planteamiento del Problema	v
Resumen del Trabajo	vi
Introducción	1
1. Estabilidad y Dicotomía Exponencial en Dimensión Finita	4
1.1. Introducción	4
1.2. Estabilidad.	4
1.3. Dicotomía Exponencial y Ordinaria en Dimensión Finita	6
1.4. Dicotomía y Análisis Funcional	7
2. Dicotomía Exponencial en Dimensión Infinita Para Operadores de Evolución	11

2.1. Introducción	11
2.2. Dicotomía Exponencial para Operadores de Evolución Discretos	12
2.3. Dicotomía Exponencial para Operadores de Evolución Continuos en Dimensión finita	16
2.4. Robustez de la Dicotomía Exponencial	18
2.5. Caracterización de la Dicotomía Exponencial	21
3. Dicotomía Discreta en Dimensión Infinita	23
3.1. Introducción	23
3.2. Dicotomía Discreta	24
4. Comportamiento Asintótico Relativo de Ecuaciones de Evolución Caso Continuo	29
4.1. Introducción	29
4.2. Dicotomía Exponencial Generalizada.	29
4.3. La Desigualdad de Rodrigues	30
4.4. Comportamiento Asintótico Relativo y Exponentes de Lyapunov	31
4.5. Problema Directo	32
4.6. Problema inverso	33
5. Comportamiento Asintótico Relativo de Ecuaciones en Diferencia	36

5.1. Introducción	36
5.2. Definiciones	37
5.3. Problema Directo	39
5.4. Problema Inverso	46
5.5. Aplicaciones	72
6. Conclusiones	81
7. Problemas Abiertos	82
7.1. Problemas Abiertos	82

Planteamiento del Problema

El problema consiste en estudiar el comportamiento asintótico relativo entre las soluciones de dos ecuaciones de evolución en diferencia, una lineal y la otra semilineal. Específicamente, se plantea el estudio del comportamiento asintótico relativo entre las soluciones de las siguientes ecuaciones de evolución en diferencia:

$$y(n+1) = A(n)y(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (1)$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

donde $y(n), x(n) \in Z$, Z es un espacio de Banach, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ y el término no lineal $f : \mathbb{N} \times Z \longrightarrow Z$ satisface las siguientes condiciones:

- a) $f(n, 0) = 0$
- b) $\|f(n, y(n)) - f(n, x(n))\| \leq h(n)\|y(n) - x(n)\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- c) $h : \mathbb{N} \longrightarrow (0, \infty)$ es una sucesión que cumple con,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) < \infty.$$

Resumen del Trabajo

El problema consiste en estudiar el comportamiento asintótico relativo entre las soluciones de dos ecuaciones de evolución en diferencia, lo cual constituye una versión discreta del trabajo publicado por H. Leiva y H. Rodrigues en [11], donde los autores estudian el comportamiento asintótico relativo para ecuaciones de evolución en tiempo continuo. Fundamentalmente, en este trabajo se resuelven dos problemas, los cuales se denominan el problema directo y el problema inverso. Estos resultados fueron publicado en el Journal of Difference Equations and Applications [12].

Específicamente:

El **problema directo**: Dada una solución $y(n)$ de la ecuación (1), con $y(n) \neq 0$, existe una solución $x(n)$ de la ecuación (2) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} = 0$$

El **problema inverso**: Dada una solución $x(n)$ de la ecuación (2), con $x(n) \neq 0$, existe una solución $y(n)$ de la ecuación (1), tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = 0$$

Los problemas anteriores se abordarán mediante las técnicas de Dicotomía Exponencial en Diferencia y el Teorema de Punto Fijo Contractivo. También se usa una Desigualdad Tipo Gronwall, la cual se ajusto usando la idea del trabajo de H. Leiva y H. Rodrigues en [11].

Introducción

En las últimas décadas la teoría de los sistemas de evolución discreto ha ganado mucha importancia por sus aplicaciones en varias áreas del conocimiento científico como en la ingeniería, las matemáticas, la física, entre otras. Existe una amplia literatura entre las que podemos mencionar: W. A. Coopel [4], A. Carvalho [2], D. Henry [7], S. Chow y H. Leiva [5], K.L. Palmer [14, 15], H. Leiva y H. Rodrigues [11], entre otros.

En un estudio realizado por H. Leiva y H. Rodrigues [11] se presentan algunos resultados importantes sobre el comportamiento asintótico relativo de ecuaciones en evolución en el caso de variable continua, y los autores formularon la versión discreta de estos problemas para ecuaciones de evoluciones en diferencia finita como un problema abierto, lo cual es el objetivo de esta tesis.

Específicamente, en este trabajo se estudia el comportamiento asintótico entre las soluciones de las siguientes ecuaciones de evolución en diferencia.

$$y(n+1) = A(n)y(n), \tag{3}$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{4}$$

donde $y(n), x(n) \in Z$, con Z espacio de Banach. Asimismo, $h : \mathbb{N} \rightarrow Z$ es una función acotada, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ y la función $f : \mathbb{N} \times Z \rightarrow Z$ es pequeña en algún sentido y verifica que $f(n, 0) = 0$, y

$$\|f(n, y(n)) - f(n, x(n))\| \leq h(n)\|y(n) - x(n)\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En conclusión, en este trabajo se prueba la conjetura de H Leiva y H. Rodrigues [11], la cual consiste en resolver los siguientes problemas:

Problema Directo: Dada una solución $y(n)$ de la ecuación (3), con $y(n) \neq 0$, entonces existe $x(n)$ una solución de la ecuación (4), tal que se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} = 0$$

Problema Inverso: Dada una solución $x(n)$ de la ecuación (4), con $x(n) \neq 0$, entonces existe $y(n)$ una solución de la ecuación (3), tal que se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = 0$$

Estos problemas se abordaran introduciendo un concepto de Dicotomía Exponencial Discreta Generalizada, una desigualdad de Desigualdad de Gronwall Discreta Generalizad, el concepto de exponente de Lyapunov para ecuaciones en diferencia y el Teorema del punto fijo de Banch.

Esta tesis está estructurada en cinco capítulos, en el **Capítulo 1**, se exponen definiciones y resultados importantes que conecta el concepto de la Dicotomía Exponencial con la noción de Estabilidad Asintótica Uniforme, y la Dicotomía Ordinaria con la noción de Estabilidad Uniforme; todo esto usando técnica de Análisis Funcional.

En el **Capítulo 2**, se estudia el concepto de Dicotomia Exponencial en dimensión infinita, tanto para el caso continuo como para el caso discreto. También se formulan definiciones y propiedades básicas como la Robustez de la Dicotomía Exponencial y caracterizaciones en término de la existencias de soluciones acotadas para la ecuación no homogéneo asociada.

En el **capítulo 3**, se consideran los sistemas de evolución y se define la Dicotomía Discreta en Dimensión Infinita asociado a estos Sistemas de Evolución donde interviene un operador de evolución y se da la Fórmula de Variación de Parámetro para sistemas discretos y resultados importantes que se usan a lo largo del trabajo.

En el **capítulo 4**, hacemos un recuento de todo lo estudiado en H. Leiva y H. Rodrigues [11] sobre el comportamiento asintótico relativo de las ecuaciones de evolución caso continuo abordando las nociones de Dicotomía Exponencial Generalizada, la Desigualdad de Rodrigues tipo Gronwall, Exponentes de Lyapunov, definiciones básicas, recuento relevante del problema directo y del problema inverso.

En el **capítulo 5**, se prueban los resultados principales de este trabajo, los cuales están relacionados con el comportamiento asintótico relativo de las soluciones de ecuaciones en diferencia finitas. Específicamente, estudiaremos el comportamiento asintótico relativo de las soluciones de las ecuaciones de evolución en diferencia (5.1) y (5.2).

Capítulo 1

Estabilidad y Dicotomía Exponencial en Dimensión Finita

1.1. Introducción

En este capítulo se realiza un breve resumen de las principales definiciones básicas y necesarias para la comprensión de los capítulos posteriores: Estabilidad, Dicotomía Exponencial en Dimensión Finita, Dicotomía Ordinaria y la relación que existe entre la Dicotomía y el Análisis (ver [1], [3], [4], [8] y [10]).

1.2. Estabilidad.

En matemáticas, La **Teoría de Estabilidad** estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos; es decir, examina cómo difieren las soluciones de las ecuaciones bajo perturbaciones del sistema.

La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos puede acotarse mediante la diferencia de valores iniciales se dice que la evolución temporal del sistema presenta estabilidad.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto, $f : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente suave y $\tilde{x}(t)$ una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.1)$$

que está definida para $0 \leq t < +\infty$.

Definición 1.2.1 (ver [4]) Decimos que la solución $\tilde{x}(t)$ es **Uniformemente Estable** si:

Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que cualquier solución $x(t)$ de (1.1) que satisfaga la desigualdad

$$|x(s) - \tilde{x}(s)| < \delta, \quad \text{para algún } s \geq 0,$$

entonces se verifica que

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq s.$$

Definición 1.2.2 (ver [4]) Decimos que $\tilde{x}(t)$ es **Uniformemente Asintóticamente Estable** si adicionalmente se tiene que:

Existe un $\delta_0 > 0$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe un $T = T(\varepsilon) > 0$, tal que si $|x(s) - \tilde{x}(s)| < \delta_0$, para algún $s \geq 0$, entonces $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq s + T$.

1.3. Dicotomía Exponencial y Ordinaria en Dimensión Finita

Sea $\phi(t)$ la matriz fundamental de la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1.2)$$

donde $A(t)$ es una matriz de dimensión $n \times n$, y continua sobre un el intervalo $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$.

Teorema 1.3.1 (ver [4]) 1. La solución trivial $X \equiv 0$ de (1.2) es uniformemente estable si, y sólo si,
Existe una constante $k > 0$ tal que

$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| \leq k, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t < +\infty$$

2. Es uniforme asintóticamente estable si, y sólo si, existen constantes $k > 0$, $\alpha > 0$ tal que:

$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| \leq ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t < +\infty.$$

Definición 1.3.2 (ver [4]) Se dice que la ecuación (1.2) posee una **Dicotomía Exponencial**, si existe una proyección P , esto es una matriz P tal que $P^2 = P$, y constantes k, l, α, β positivas tal que:

$$\begin{aligned} |\phi(t)P\phi^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(t-s)}, & \text{para } t \geq s, \quad t, s \in [a, b] \\ |\phi(t)(I - P)\phi^{-1}(s)| &\leq Le^{-\beta(t-s)}, & \text{para } s \geq t, \quad t, s \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $\phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema.

Definición 1.3.3 (ver [4]) Se dice que (1.2) posee una **Dicotomía Ordinaria**, si las desigualdades en (1.3) se cumplen para α y β distintos de cero y negativas.

Observación 1.3.4 (ver [4]) *La ecuación (1.2) tiene una dicotomía exponencial con $P = I$ si, y sólo si, es uniforme asintóticamente estable.*

Observación 1.3.5 (ver [4]) *La ecuación (1.2) tiene una dicotomía ordinaria con $P = I$ si, y sólo si, es uniformemente estable.*

1.4. Dicotomía y Análisis Funcional

Asumimos que $A(t)$ es una matriz definida y continua para $t \geq 0$ y denotemos por $\phi(t)$ la matriz fundamental principal de la ecuación diferencial lineal dada en la ecuación (1.2) tal que

$$\phi(0) = I.$$

Definición 1.4.1 (ver [4]) *Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice localmente integrable sobre $\mathbb{R}_+$ si es medible y $\int_{[a, b]} |f(t)| dt < +\infty$, para cada intervalo compacto $J = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$.*

Consideremos el sistema no homogéneo

$$\dot{y} = A(t)y + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

donde que $f(t)$ es localmente integrable, $y(t)$ es absolutamente continua y satisface (1.4), para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.4.2 (ver [4]) *Supongamos que (1.2) tiene una **dicotomía exponencial** en $\mathbb{R}_+$, es decir, existe una proyección P , constantes k y α positivas tal que:*

$$\begin{aligned} |\phi(t)P\phi^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq t, \\ |\phi(t)(I - P)\phi^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq s. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Entonces, para cada función continua y acotada $f(t)$, la ecuación no homogénea tiene una solución acotada, dada por la siguiente ecuación integral

$$y(t) = \int_0^t \phi(t)P\phi^{-1}(s)f(s)ds + \int_t^\infty \phi(t)(I-P)\phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (1.6)$$

tal que

$$\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq 2\alpha^{-1}k \sup_{t \geq 0} |f(t)|.$$

Observación 1.4.3 (ver [4]) La fórmula (1.6) define una solución acotada de (1.4) no solo para funciones continuas y acotadas, sino también para funciones localmente integrables.

Lema 1.4.4 (ver [4]) Sea $\gamma(t)$ una función no negativa localmente integrable tal que

$$\int_t^{t+1} \gamma(s)ds \leq c, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\alpha > 0$, entonces para todo ≥ 0 , se tiene

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\gamma(s)ds \leq (1 - e^{-\alpha})^{-1}c,$$

$$\int_t^\infty e^{-\alpha(s-t)}\gamma(s)ds \leq (1 - e^{-\alpha})^{-1}c.$$

Proposición 1.4.5 (ver [4]) Supongamos que (1.2) tiene una dicotomía ordinaria sobre $\mathbb{R}_+$ y satisface (1.3), con $P = 0$. Entonces para cada función $f(t)$ localmente integrable con $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$, la ecuación no homogénea (1.4), tiene una solución acotada definida por la fórmula (1.6).

En lo que sigue se establece el resultado inverso.

Definamos los siguientes espacios:

El espacio de Banach $C = C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ de todas las funciones $f(t)$ continuas y acotadas con la norma:

$$\|f\|_C = \sup_{t \geq 0} |f(t)|.$$

El espacio de Banach M de todas las funciones $f(t)$ localmente integrables con $\int_t^{t+1} f(s)ds$ acotada, con la norma

$$\|f\|_M = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |f(s)|ds.$$

Estas normas son equivalentes cuando nos retringimos al espacio C .

Finalmente, denotemos por L el espacio de Banach de todas las funciones $f(t)$ que son integrables Lebesgue sobre $\mathbb{R}_+$, con la norma:

$$\|f\|_L = \int_0^{+\infty} |f(t)|dt.$$

Proposición 1.4.6 (ver [4]) Supongamos que la ecuación (1.4) tiene una solución acotada para cada función $f \in B$, donde B denota algún de estos espacio de Banach (L , M , C). Entonces, existe una constante $\gamma_B = \gamma_B(P) > 0$ tal que para cada $f \in B$, la única solución acotada $y(t)$ de (1.4) con $y(0) \in \text{Ker}(P)$ satisface:

$$\|y\|_C \leq \gamma_B \|f\|_B.$$

Observación 1.4.7 (ver [4]) Definamos la función de Green asociada a la dicotomía exponencial de la ecuación (1.2) por:

$$G(t, s) = \begin{cases} \phi(t)P\phi^{-1}(s), & \text{para } 0 \leq s < t, \\ -\phi(t)(I - P)\phi^{-1}(s), & \text{para } 0 \leq t < s. \end{cases}$$

Como la ecuación (1.2) posee una dicotomía exponencial, se sigue que $\phi(t)P\phi^{-1}(s)$ decae cuando $t \rightarrow +\infty$ y $\phi(t)(I - P)\phi^{-1}(s)$ no decae cuando $t \rightarrow +\infty$.

Note que $y(t) = \int_0^{t_1} G(t, u)f(u)du$ es una solución de (1.4) y además es acotada. En efecto, como $y(t) = \phi(t)P \int_0^{t_1} \phi^{-1}(u)f(u)du$, para $t \geq t_1$ y

$$y(0) = -(I - P) \int_0^{t_2} \phi^{-1}(u)f(u)du \in \text{Ker}(P),$$

entonces por la Proposición 1.4.6

$$\|y\|_C \leq \gamma_B \|f\|_B.$$

Además, puede probarse que $|G(t, s)| \leq \gamma_L$, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Si definimos la función

$$f(t) = \begin{cases} \varepsilon, & s \leq t \leq s + h \\ 0, & t \notin [s, s + h] \end{cases}$$

con $s \geq 0$, $h > 0$, $f \in L$ y $\|f\|_L = h|\varepsilon|$, se tiene que:

$$|G(t, s)\varepsilon| \leq \gamma_L |\varepsilon|.$$

Como ε es arbitrario, obtenemos que

$$|G(t, s)| \leq \gamma_L.$$

Capítulo 2

Dicotomía Exponencial en Dimensión Infinita Para Operadores de Evolución

2.1. Introducción

En este capítulo se da la definición de Dicotomía Exponencial para Variable Discreta y Variable Continua en dimensión infinita, se establece una conexión entre los operadores de evolución de variables continuas y variables discreta. En los espacio de dimensión infinita el operador de evolución es restringido al rango de las proyecciones. Estas restricción resulta natural ya que afianza la existencia del operador evolución inverso y así se asegura que este operador sea un isomorfismo, lo cual no ocurre en dimensión finita, ya que la inversa es garantizada por la finitud del espacio. Se muestra la forma de la función de Green para variables Continuo y Discreta, esto con el sentido de dar una fórmula de variación de parametro que involucre a la función de Green en cada caso. Se establece la Robustes de la Dicotomía Exponencial para variable continuo y variable discreta, se da una caracterización de la Dicotomía Exponencial para variable continua y variable Discreta. Finalmente se habla de la existencia de soluciones acotadas y se dan unos resultado de la Robustez.

2.2. Dicotomía Exponencial para Operadores de Evolución Discretos

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Denotemos por $L(X)$ el conjunto de las transformaciones lineales continuas de X en sí mismo y por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y por $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ el conjunto de los números enteros. Además, sean los conjuntos:

$$\mathbb{Z}_n^- = \{j \in \mathbb{Z} : j \leq n\}$$

$$\mathbb{Z}_n^+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geq n\}$$

y

$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_0^-.$$

Denotemos por $P_{\mathbb{Z}} = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq m\}$

Definición 2.2.1 (ver [2, 7]) Una familia $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}, T(n, m) \in L(X)\}$ se llama operador de evolución discreto lineal con valores en X , si satisface:

- (i) $T(m, m) = I$, para todo $m \in \mathbb{Z}$
- (ii) $T(n, p)T(p, m) = T(n, m)$, para todo $(n, p), (p, m) \in P_{\mathbb{Z}}$

Un operador de evolución lineal discreto determina una sucesión $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ en $L(X)$, donde $t(n) = T(n+1, n)$.

Recíprocamente, dada una sucesión de operadores $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ en $L(X)$, entonces podemos definir un operador de evolución lineal discreto $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}\}$ de la siguiente manera:

$$T(m, m) = I, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}$$

$$T(n, m) = t(n-1) \times \cdots \times t(m), \quad \text{para todo } n > m \in \mathbb{Z}$$

Claramente que, si $t(n) = C \in L(X)$, entonces el operador de evolución asociado $T(n, m)$ viene dado por:

$$T(n, m) = C^{m-m}.$$

Definición 2.2.2 (ver [2, 7]) Para un operador de evolución dado $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}, T(n, m) \subset L(Z)\}$, un punto $\xi \in X$, definimos para cada $m \in \mathbb{Z}$, una función $x(n) = T(n, m)(\xi)$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $T(n, m)(\xi) \in X$, entonces $\hat{x}$ es una solución del problema de valores iniciales discretos

$$x(n+1) = t(n)x(n), \quad n \geq m$$

$$x(m) = \xi$$

donde $t(n) = T(n+1, n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Recordemos que una solución global de $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}\}$ es una sucesión $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x(n) = T(n, m)x(m)$, siempre que $(n, m) \in P_{\mathbb{Z}}$.

Definición 2.2.3 Se dice que un operador de evolución discreto $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}\} \subset L(X)$ asociado a $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$, tiene una dicotomía exponencial discreta con constante $M \geq 1$ y exponente $w > 0$, si existen proyecciones $\{Q(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$ tal que:

$$(i) \text{ Para todo } n \in \mathbb{Z}, t(n)Q(n) = Q(n+1)t(n)$$

$$(ii) \text{ Para todo } m > n \in \mathbb{Z}$$

$$T(n, m) : R(Q(n)) \longrightarrow R(Q(m)), \text{ es un isomorfismo, con inversa}$$

$$T(m, n) = T^{-1}(n, m) : R(Q(m)) \longrightarrow R(Q(n))$$

(iii) Las siguientes estimaciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \|T(n, m)(I - Q(n))\|_{L(X)} &\leq Me^{-w(n-m)}, & n \geq m \\ \|T(n, m)Q(n)\|_{L(X)} &\leq Me^{w(n-m)}, & n < m. \end{aligned}$$

En este caso diremos que $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, tiene una dicotomía exponencial discreta en lugar de que el operador evolución $\{T(n, m) : (n, m) \in P_{\mathbb{Z}}\}$ asociado a $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ tiene una dicotomía exponencial discreta.

Note que, si $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ tiene una dicotomía exponencial discreta con constante $M \geq 1$, exponente $w > 0$ y proyecciones $\{Q(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces

$$Q(n)T(n, m) = T(n, m)Q(m),$$

para todo $m \geq n \in \mathbb{Z}$.

Definimos la función de Green

$$G(n, m) = \begin{cases} T(n, m)(I - Q(m)), & n \geq m, \\ -T(n, m)Q(m), & n < m. \end{cases}$$

Se puede probar que:

$$(i) \quad \|Q(n)\|_{L(X)} \leq M + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

$$(ii) \quad \|G(n, m)\|_{L(X)} \leq Me^{-w|n-m|}, \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}$$

Lema 2.2.4 (ver [2, 7, 5]) Supongamos que $\{t(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión en $L(X)$. Sea $x(n+1) = t(n)x(n) + f(n)$, para $n \geq m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$x(n) = T(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^{n-1} T(n, k+1)f(k), \quad n > m,$$

es llamada fórmula de variación de parámetros.

Teorema 2.2.5 (ver [2, 7]) Sea $\{T(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión, con una dicotomía exponencial discreta y $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, una sucesión acotada en X , entonces existe una única solución global acotada $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $x(n+1) = T(n)x(n) + y(n)$, dada por

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n, k+1)y(k), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Por el Teorema 2.2.5, podemos notar que las proyecciones asociadas a la dicotomía exponencial discretas son unívocamente determinadas.

Corolario 2.2.6 (ver [2, 7]) Sea $\{T(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$ y supongamos que tiene una dicotomía exponencial discreta, entonces las proyecciones asociadas $\{Q(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ son unívocamente determinados.

De igual modo, el recíproco del Teorema 2.2.5 también es cierta.

Teorema 2.2.7 (ver [2, 7]) Sea $\{T(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $\{T(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tiene una dicotomía exponencial discreta,
- ii) Para cada sucesión acotada $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en X , existe una solución acotada $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $x(n+1) = T(n)x(n) + f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Por el Teorema 2.2.7, una dicotomía exponencial discreta es estable bajo perturbaciones.

El siguiente Lema se usa para probar el Teorema 2.2.7.

Lema 2.2.8 (ver [2, 7]) Sean $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 < r < r_1 \leq 1$, $b < \frac{r_1 - r}{1 + rr_1}$ y $\{g(l) : l \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión no negativa en $\mathbb{Z}$, $\sup\{g(l)r_1^{-|l|} : l \in \mathbb{Z}\} < +\infty$ y $g(l) \leq ar_1^{|l|} + b \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|l-j-1|}g_j$, para todo $l \in \mathbb{Z}$, entonces

$$g(l) \leq ar_1^{|l|} \left(1 - b \frac{1 + rr_1^{-1}}{r_1 - r} \right)^{-1}, \quad \text{para todo } l \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.2.9 (ver [2, 7]) Supongamos que la familia $\{T(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$, tiene una dicotomía exponencial discreta con constante $M \geq 1$ y exponente $w > 0$. Dado $M_1 > M$ y $0 < w_1 < w$, existe $\varepsilon > 0$ (que dependen de M, M_1, w y w_1) tal que cualquier familia $\{S(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ con $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T(n) - S(n)\|_{\mathcal{L}(X)} < \varepsilon$, tiene dicotomía exponencial discreta, con constante M_1 y exponente w_1 .

Teorema 2.2.10 (ver [2, 7]) Supongamos que $\{T^i(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tiene una dicotomía exponencial discreta con proyecciones $\{Q^i(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, con constante M y exponente w , para $i = 1, 2$.

Si

$$\|T^{(1)}(n) - T^{(2)}(n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$\|Q^{(1)}(n) - Q^{(2)}(n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{2M^2}{1 - e^{-w}} \varepsilon.$$

2.3. Dicotomía Exponencial para Operadores de Evolución Continuos en Dimensión finita

En esta sección estudiaremos los resultados de preservación de la dicotomía para procesos lineales $\{T(t, s) : (t, s) \in P_{\mathbb{R}}\}$ con $P_{\mathbb{R}} = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\}$.

Definición y Propiedades Básicas

Definición 2.3.1 (ver [2, 7]) Se dice que un operador de evolución lineal $\{T(t, s) : (t, s) \in P_{\mathbb{Z}}\} \subset L(X)$ tiene una dicotomía exponencial, con constante $M \geq 1$ y exponente $w > 0$, si existe

una familia de proyecciones $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ que satisface las siguientes condiciones:

- i) $Q(t)T(t, s) = T(t, s)Q(s)$, para todo $(t, s) \in P_{\mathbb{Z}}$,
- ii) La restricción de $T(t, s)$ a $R(Q(s))$ es un isomorfismo de $R(Q(s))$ sobre $R(Q(t))$ con inversa $T(s, t) = T^{-1}(t, s) : R(Q(t)) \longrightarrow R(Q(s))$,
- iii) Las siguientes afirmaciones son ciertas

$$\|T(t, s)(I - Q(s))\|_{L(X)} \leq Me^{-w(t-s)}, \quad t \geq s$$

$$\|T(t, s)Q(s)\|_{L(X)} \leq Me^{w(t-s)}, \quad t \leq s.$$

Observación 2.3.2 1. Ya que $R(Q(t))$ y $R(Q(s))$ son subespacios de X isomorfos, tienen la misma dimensión.

2. Diremos dicotomía exponencial continua en lugar de dicotomía exponencial de un operador de evolución.

Lema 2.3.3 (ver [2, 7]) Consideremos un operador de evolución lineal $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{Z}}\} \subset L(X)$, que posee una dicotomía exponencial, con proyecciones $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$. Entonces la función $t \rightarrow Q(t)$ con $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) \in L(X)$ es acotada y fuertemente continua por la derecha.

Ejemplo 1 Sea X un espacio de Banach y $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ tal que la función $t \rightarrow A(t)$ es continua. Entonces el problema de valor inicial

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \geq \tau,$$

$$x(\tau) = x_0,$$

tiene una única solución $t \rightarrow x(t, \tau, x_0)$, con $t \in [\tau, +\infty)$.

Definiendo $T(t, \tau)x_0 = x(t, \tau, x_0)$, para $(t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}$ y $x_0 \in X$ tenemos que $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\}$ define un operador de evolución.

Si $M(t) = T(t, 0)$, entonces $T(t, \tau) = M(t)M^{-1}(\tau)$.

Proposición 2.3.4 (ver [2, 7]) Sea $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\}$ un operador de evolución que tiene una dicotomía exponencial. Entonces existen constantes $C \geq 1$, $\beta > 0$ y una proyección $E \in L(X)$, tal que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|M(t)EM^{-1}(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-\beta(t-\tau)}, \quad (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}},$$

$$\|M(t)(I - E)M^{-1}(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\beta(t-\tau)}, \quad (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}.$$

Recíprocamente, si existe una proyección $E \in L(X)$ con las condiciones anteriores, entonces $\{T(t, \tau) : P_{\mathbb{R}}\}$ tiene una dicotomía exponencial con constante C , exponente β y proyección $Q(t) = M(t)EM^{-1}(t)$.

2.4. Robustez de la Dicotomía Exponencial

En esta sección se prueban algunos resultados sobre la robustez de la dicotomía exponencial; particularmente, se establecen criterios mediante los cuales la dicotomía exponencial continua es equivalente a la dicotomía exponencial discreta.

Teorema 2.4.1 (ver [2, 7]) Supongamos que $\{T(t, s) : (t, s) \in P_{\mathbb{R}}\}$ es un operador de evolución que tiene una dicotomía exponencial, con constante $M \geq 1$, exponente $w > 0$ y proyecciones $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Entonces para cada $l > 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\{t(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} := \{T(t_0 + (n+1)l, t_0 + nl)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

tiene una dicotomía exponencial discreta en X , con proyecciones $\{Q(n) = Q(t_0 + nl) : n \in \mathbb{Z}\}$, con constante M y con exponente wl .

Corolario 2.4.2 (ver [2, 7]) Si un operador de evolución $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\}$ tiene una dicotomía exponencial, entonces la familia de proyecciones $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ asociada es única.

Teorema 2.4.3 (ver [2, 7]) Supongamos que un operador de evolución $\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\} \subset L(X)$ satisface

$$L_l = \sup_{0 \leq t - \tau \leq l} \|T(t, \tau)\|_{L(X)} < \infty,$$

para algún $l > 0$ y para todo $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\{T(t_0 + (n+1)l, t_0 + nl)\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

tiene una dicotomía exponencial discreta, con constante $M \geq 1$ y exponente $wl > 0$ (independiente de t_0). Entonces se tiene que el operador de evolución

$$\{T(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\},$$

tiene una dicotomía exponencial con constante KM y exponente w , donde

$$K = \sup_{0 \leq t - \tau \leq l} \{e^{w(t-\tau)} \|T(t, \tau)\|_{L(X)}\}.$$

El siguiente resultado relaciona la robustez de la dicotomía exponencial discreta con la robustez de la dicotomía exponencial continua.

Teorema 2.4.4 (ver [2, 7]) Supongamos que un operador de evolución $\{T(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ tiene una dicotomía exponencial, con constante $M \geq 1$ y exponente w . Supongamos además que

$$L = \sup\{\|T(t, s)\|_{L(X)}, 0 \leq t - s \leq 1\} < +\infty$$

y sea $w_1 < w$ y $M_1 > M$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ (depende de w, w_1, M, M_1 y L) tal que cualquier operador de evolución $\{S(t, s) : (t, s) \in P_{\mathbb{R}}\}$ que satisfaga

$$\sup\{\|T(t, s) - S(t, s)\|_{L(X)} : 0 \leq t - s \leq 1\} < \varepsilon$$

posee una dicotomía exponencial con constante M y exponente w_1 .

Teorema 2.4.5 (ver [2, 7]) Supongamos que un operador de evolución $\{T(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ tiene una dicotomía exponencial, con constante $M \geq 1$ y exponente $w > 0$, y que además

$$L = \sup\{\|T(t, s)\|_{L(X)}, 0 \leq t - s \leq 1\} < +\infty.$$

Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que la función $t \longrightarrow B(t)x$, con $t \in \mathbb{R}$, $B(t)x \in X$, es continua para cada $x \in X$.

Si $w > w_1 > 0$ y $M_1 > M$, entonces existe $\varepsilon > 0$ (dependiendo de w, w_1, M, M_1 y L) tal que un operador de evolución $\{S(t, s) : (t, s) \in P_{\mathbb{R}}\}$ dado por

$$S(t, s)x_0 = T(t, s)x_0 + \int_s^t T(t, \theta)B(\theta)S(\theta, s)d\theta,$$

tiene una dicotomía exponencial, con constante M_1 y exponente w_1 , siempre que

$$\sup \left\{ \int_{\tau}^t \|B(s)\|_{L(X)} ds : \tau + 1 \geq t \geq \tau, (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}} \right\} < \varepsilon.$$

Teorema 2.4.6 (ver [2, 7]) Supongamos que un operador de evolución $\{T_i(t, \tau) : (t, \tau) \in P_{\mathbb{R}}\}$ tiene una dicotomía exponencial, con constante $M \geq 1$, exponente $w > 0$, y proyecciones $\{Q_i(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$. Supongamos además que:

$$\sup_{0 \leq t - \tau \leq l} \|T_1(t, \tau) - T_2(t, \tau)\|_{L(X)} < \varepsilon,$$

Entonces

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q_1(t) - Q_2(t)\|_{L(X)} \leq \frac{2M^2}{1 - e^{-w}} \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.5. Caracterización de la Dicotomía Exponencial

De la ecuación lineal no homogénea podemos definir el correspondiente operador de evolución no homogéneo

Definición 2.5.1 (ver [2, 7]) Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ continua, la familia $\{S(t, \tau) : t \geq \tau\}$ dada por:

$$S(t, \tau)u = T(t, \tau)u + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds, \quad t \geq \tau \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

se llama un operador no homogéneo asociado a f y $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\}$, a la función continua $\hat{u}(\cdot, \tau, x) : [\tau, +\infty) \rightarrow X$, definida por $\hat{u}(t, \tau, x) = S(t, \tau)x$, $t \geq \tau$, es llamada la solución asociada al operador no homogéneo.

La función continua $\hat{u} : \mathbb{R} \rightarrow X$ se llama solución global asociada al operador no homogéneo $\{S(t, \tau) : t \geq \tau\}$ si ésta satisface:

$$S(t, \tau)x(\tau) = x(t), \quad \text{para todo } t \geq \tau.$$

Es claro que $S(t, \tau) : X \rightarrow X$ es una transformación lineal continua afín para $t \geq \tau$ y:

1. $S(\tau, \tau) = I$,
2. $S(t, \sigma)S(\sigma, \tau) = S(t, \tau)$ para cada $t \geq \sigma \geq \tau$,
3. $(t, \tau) \rightarrow S(t, \tau)x$ es continua para $t \geq \tau$, $x \in X$.

Ahora daremos una caracterización de la dicotomía exponencial para operadores lineales $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset L(X)$ que satisfagan

$$\sup_{0 \leq t - \tau \leq 1} \|T(t, \tau)\|_{L(X)} < +\infty, \quad (2.2)$$

en términos de la solución (2.1).

Es claro que si el operador lineal $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset L(X)$, tiene una dicotomía exponencial, entonces (2.2) se satisface.

Si $C_b(\mathbb{R}, X)$ denota el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, que son continuas y acotadas, y considerando la siguiente condición:

(C) para cada $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$, existe una única solución global u_f de (2.1), con $u_f \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

El siguiente resultado dice que un operador lineal, con dicotomía exponencial debe satisfacer la condición (C).

Teorema 2.5.2 (ver [2, 7]) Si un operador lineal $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset L(X)$ tiene una dicotomía exponencial, entonces la condición (C) se satisface. Adicionalmente, si $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$, la única solución u de (2.1) es dada por

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s)f(s)ds$$

donde

$$G(t, s) = \begin{cases} T(t, s)(I - P(s)), & t \geq s \\ -T(t, s)P(s), & t \leq s \end{cases}$$

Teorema 2.5.3 (ver [2, 7]) Sea $\{T(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ un operador que satisface (4). Si la condición (C) tiene a lugar, el operador $\{T(t, \tau) : t \geq \tau\} \subset L(X)$ tiene una dicotomía exponencial.

Capítulo 3

Dicotomía Discreta en Dimensión Infinita

3.1. Introducción

En este capítulo se define Dicotomía Discreta para ecuaciones de evolución en diferencia en espacio de Banach general. Se da la fórmula de variación de parámetros para las soluciones de la ecuación no homogénea y se caracteriza la dicotomía exponencial a través de soluciones acotadas para esta ecuación, usando a su vez funciones de Green

Las siguientes ecuaciones

$$x(n+1) = A(n)x(n)$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

se conocen como las ecuaciones de evolución en diferencia caso lineal y semilineal.

3.2. Dicotomía Discreta

Definición 3.2.1 (ver [2, 7]) Si X es un espacio de Banach y $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión en $L(X)$.

Diremos que $\{t(n)\}$ tiene una dicotomía discreta (con constantes M, θ), si existen constantes positivas $M, \theta < 1$ y una sucesión de proyecciones $\{P(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ en $L(X)$ tal que

- i) $t(n)P(n) = P(n+1)t(n)$
- ii) $t(n)(R(P(n)))$ es un isomorfismo de $R(P(n))$ en $R(P(n+1))$
- iii) Si $T(n, m) = t(n-1) \times \cdots \times t(m-1) \times t(m)$, para $n > m$,
 $T(n, m) = I$, entonces
- iv) $\|T(n, m)(I - P(m))x\| \leq M\theta^{n-m}\|x\|$, para $n \geq m$.
- v) $\|T(n, m)P(m)x\| \leq M\theta^{m-n}\|x\|$, para $n < m$
 donde $T(n, m)P(m)x = y \in R(P(n))$, si y sólo si, $P(m)x = T(m, n)y$.

Ahora se define la función de Green como sigue:

$$G(n, m) = \begin{cases} T(n, m)(I - Q(m)), & n \geq m, \\ -T(n, m)Q(m), & n < m. \end{cases}$$

Teorema 3.2.2 (ver [2, 7]) [Fórmula de variación de parámetros para sistemas discretos]

Supongamos que $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$, es una sucesión en $L(X)$; si $x(n+1) = t(n)x(n) + y(n)$ para $m \leq n < p$, entonces

$$x(n) = T(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^{n-1} T(n, k+1)y(k), \quad m \leq n \leq p,$$

donde $T(n, m) = t(n-1) \times \cdots \times t(m-1) \times t(m)$, para $n > m$, $T(n, n) = I$. Si $\{t(n)\}$ tiene una dicotomía discreta, dada por la definición 3.2.1, entonces tenemos resultados análogos al caso continuo.

Teorema 3.2.3 (ver [2, 7]) Supongamos que A_0 es un elemento de $L(X)$, para $0 \leq \alpha < 1$, definamos las funciones

$$F : \mathbb{N} \rightarrow L(X^\alpha, X),$$

$$F : n \rightarrow A(n) - A_0,$$

donde F es una función acotada y $x(n+1) = A(n)x(n)$ tiene una dicotomía exponencial discreta, como la dada en la definición 3.2.1. Para una función $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ acotada, entonces existe una única solución $x(n)$ de $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n)$, con $n \in \mathbb{N}$ dada por

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(n, k)f(k).$$

Más generalmente, si $-\beta < \gamma < \beta$ y $\|f(n)\| = O(e^{\gamma n})$, con $n \rightarrow \infty$, entonces existe una única solución x con $\|x(n)\| = o(e^{\beta n})$ que satisface

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (\|x(n)\| e^{-\gamma n}) \leq \frac{C}{\beta - |\gamma|} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\|f(n)\| e^{-\gamma n}),$$

para una constante C independiente de x , f y γ .

Corolario 3.2.4 (ver [2, 7]) Si $A(n)$ satisface las condiciones del Teorema 3.2.2 sobre $[n_0, \infty)$, para cualquier función $f : [n_0, \infty) \rightarrow X$, entonces x es una solución acotada de la ecuación

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n) \quad \text{para } n \geq n_0,$$

si y sólo si

$$x(n) = T(n, n_0)(I - P(n_0))x(n_0) + \sum_{k=n_0}^{\infty} G(n, k)f(k), \quad n \geq n_0.$$

Corolario 3.2.5 (ver [2, 7]) Si $A(n)$ satisface las condiciones del Teorema 3.2.2 sobre $(-\infty, n_0]$ para cualquier función $f : (-\infty, n_0] \rightarrow X$ acotada, entonces $x(n)$ es una solución acotada de $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n)$, si $n < n_0$, si y sólo si,

$$x(n) = T(n, n_0)P(n_0)x(n_0) + \sum_{k=-\infty}^{n_0} G(n, k)f(k), \quad n \leq n_0.$$

Teorema 3.2.6 (ver [2, 7]) Asumamos $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión en $L(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$, tiene una dicotomía discreta,
- ii) Para cada sucesión acotada $\{f(n)\}_{-\infty}^{\infty} \subset X$, existe una solución acotada $\{x(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ de $x(n+1) = t(n)x(n) + f(n)$, $-\infty < n < +\infty$.

Corolario 3.2.7 (ver [2, 7]) Para $b > 0$, sea $B_0 = \{\{x(n)\}_{-\infty}^{\infty} \subset X : \sup\{\|x(n)\|\} < \infty\}$. Supongamos que $0 < \theta_1 < 1$ y para $\theta_1 \leq b \leq 1/\theta_1$ y cada $\{f(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ en B_0 , existe una única solución $\{x(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ en B_0 de

$$x(n+1) = t(n)x(n) + f(n), \quad -\infty < n < +\infty.$$

La función de Gree $G(n, m)$, cumple la siguiente acotación:

$$\|G(n, m)\| \leq M\theta_1^{|n-m|}$$

para alguna constante $M > 0$.

Teorema 3.2.8 Supongamos que $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty} \subset L(X)$ tiene una dicotomía discreta con constantes $M > 0$, $\theta < 1$. Si $M_1 > M$ y $\theta < \theta_1 < 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier sucesión $\{S(n)\}_{-\infty}^{\infty} \subset L(X)$, con $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|t(n) - S(n)\| \leq \varepsilon$, tiene una dicotomía exponencial discreta con constante M_1 y θ_1 .

Teorema 3.2.9 (ver [2, 7]) Supongamos que $\{P(n)\}$, $\{\widetilde{P(n)}\}$ son sucesiones de proyecciones en $L(X)$, $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión en $L(X)$, con

$$t(n)P(n) = \widetilde{P(n)}t(n), \quad R(t(n)P(n)) = R(\widetilde{P(n+1)}),$$

$$\|t(n)x\| \leq \theta\|x\|, \quad \text{cuando } P(n)x = 0,$$

$$\|t(n)x\| \geq \theta^{-1}\|x\|, \quad \text{cuando } P(n)x = x,$$

para una constante θ , con $0 < \theta < 1$, y

$$\|P(n)\| \leq M, \quad \|\widetilde{P(n)}\| \leq M, \quad \|I - \widetilde{P(n)}\| \leq M,$$

para todo n . Si $\theta < \theta_1 < 1$ y $M_1 > M$, entonces existe $\varepsilon > 0$ (dependiendo solo de θ, θ_1, M, M_1) y $\sup_k \|t(k)\| < \infty$ tal que para cada $\{S(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ en $L(X)$, con

$$\|P(n) - \widetilde{P(n)}\| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|t(n) - S(n)\| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } n,$$

$\{S(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ tiene una dicotomía discreta con constantes M_1 , y θ_1 .

Teorema 3.2.10 (ver [2, 7]) Supongamos que $\{t(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión en $L(X)$ con una dicotomía discreta y que $\{C(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de operadores compactos en $L(X)$ con $\|C(n)\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, y sea $S(n) = t(n) + C(n)$.

Una de las siguientes afirmaciones es ciertas:

- i) $\{S(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ tiene una dicotomía discreta,
- ii) $x(n+1) = S(n)x(n)$, $-\infty < n < \infty$, tiene una solución no trivial acotada.

Observación 3.2.11 (ver [2, 7])

- a) Si la dicotomía para $\{t(n)\}$, tiene constantes M, θ y si $\theta < \theta_1 < 1$, entonces en el caso (i) las constantes para la dicotomía son $M_1, \theta_1 < 1$ para algún $M_1 < +\infty$.
- b) Cualquier solución de $x(n+1) = S(n)x(n)$, con $\|x(n)\| = O(\theta_1^{-|n|})$ ó $\|x(n)\| = O(\theta_1^{|n|})$ tiene una solución no trivial acotada y el espacio de las sucesiones de soluciones acotadas es finito dimensional.

Capítulo 4

Comportamiento Asintótico Relativo de Ecuaciones de Evolución Caso Continuo

4.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla toda la teoría, técnicas, definiciones y resultados presentados en [11], por H. Leiva y H. Rodrigues, para variable continua. Cabe destacar que, lo anterior tiene una gran relevancia ya que se busca dar una respuesta al problema abierto propuesto por estos autores en [11] para variable discreta, el cual será precisado en el capítulo siguiente. En este mismo contexto se pueden revisar los siguientes artículos ([16]-[23]).

4.2. Dicotomía Exponencial Generalizada.

El operador de evolución $T(t, s)$, se dice que tiene una dicotomía exponencial generalizada con respecto a $\alpha \in \mathbb{R}$, si existen enteros $N \geq 1$, $M > 0$, $\varepsilon > 0$ y proyecciones complementarias $S(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $U(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ tal que:

1. Para $t \geq s$

$$\begin{aligned} P(t)T(t, s) &= T(t, s)P(s), & Q(t)T(t, s) &= T(t, s)Q(s), \\ S(t)T(t, s) &= T(t, s)S(s), & U(t)T(t, s) &= T(t, s)U(s). \end{aligned}$$

2. $T(t, s) : R(U(s)) \longrightarrow R(U(t))$, $t \geq s$,
isomorfismo con inversa

$$T^{-1}(t, s) = T(s, t) : R(U(t)) \longrightarrow R(U(s)), \quad t \geq s,$$

$$T(t, s) : R(Q(s)) \longrightarrow R(Q(t)), \quad t \geq s,$$

es un isomorfismo con inversa

$$T^{-1}(t, s) = T(s, t) : R(Q(t)) \longrightarrow R(Q(s)), \quad t \geq s.$$

3. Para cada l y $0 \leq l \leq N-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T(t, s)S(s)\| &\leq Me^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|T(t, s)U(s)\| &\leq Me^{(\alpha+\varepsilon)(t-s)}, \quad s \geq t, \\ \|T(t, s)(P(s) + Q(s))\| &\leq Mt^{N-1}e^{\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq \sigma, \\ \|T(t, s)P(s)\| &\leq Mt^{l-1}s^{N-l}e^{\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq \sigma, \\ \|T(t, s)Q(s)\| &\leq Mt^ls^{N-l-1}e^{\alpha(t-s)}, \quad s \geq t \geq \sigma. \end{aligned}$$

4.3. La Desigualdad de Rodrigues

La desigualdad de Rodrigues es un tipo de desigualdad de Gronwall que permite dar respuesta al problema indirecto para el caso continuo.

Lema 4.3.1 (ver [11]) Sean $l, g \in L_1([0, \infty), \mathbb{R})$ funciones continuas no negativas. Sea $\gamma(t) > 0$ continua y decreciente, para $t \geq \sigma$ y σ suficientemente grande tal que

$$\beta = \int_{\sigma}^{\infty} g(s)ds + \int_{\sigma}^{\infty} l(s)ds < 1.$$

Supongamos que $u(t)$ es una función continua no negativa tal que $\gamma(t)u(t)$ es acotada y

$$u(t) \leq k + \int_{\sigma}^t u(s)l(s)ds + \frac{1}{\gamma(t)} \int_t^{\infty} \gamma(s)u(s)g(s)ds \quad \text{para } t \geq \sigma,$$

donde k es una constante. Entonces

$$u(t) \leq \frac{k}{1-\beta} e^{\left(\frac{1}{1-\beta} \int_t^{\infty} g(s)ds\right)},$$

para $t \geq \sigma$. En particular, $u(t)$ es acotada para $t \geq \sigma$.

4.4. Comportamiento Asintótico Relativo y Exponentes de Lyapunov

Consideremos el siguiente sistema de ecuación diferencial de evolución sobre un espacio de Banach Z .

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad t \geq 0, \quad y \in Z, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \quad x \in Z. \quad (4.2)$$

Estudiaremos el comportamiento asintótico relativo de las dos ecuaciones, para esto se asumen algunas hipótesis y se dan varias definiciones que jugaran un papel importante a lo largo de este trabajo.

Aquí, $A(t) : D \subset Z \longrightarrow Z$ es una familia de operadores no acotados en Z que genera un operador de evolución $T(t, s)$, el cual es fuertemente continuo. La función $f : Z \times Z \longrightarrow Z$, con $f(t, 0) \equiv 0$, y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que:

$$\|f(t, y(t)) - f(t, x(t))\| \leq h(t)\|y(t) - x(t)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad x, y \in Z. \quad (4.3)$$

Definición 4.4.1 (ver [11]) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y l un entero no negativo, una función $y(t)$ se dice que es de orden $t^l e^{\alpha t}$ y se denota por $y(t) \cong t^l e^{\alpha t}$, si $y(t)$ satisface

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^l e^{\alpha t}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^l e^{\alpha t}} < +\infty$$

Definición 4.4.2 (ver [11]) Una solución $y(t)$ se dice que tiene un número de Lyapunov $\alpha > 0$ si $y(t)$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y(t)\|}{t} = \alpha.$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ y $\overline{M} > 0$ tal que

$$e^{t(\alpha-\varepsilon)} \overline{M} \leq \|y(t)\| \leq e^{t(\alpha+\varepsilon)} \overline{M}, \quad t \geq N.$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) podemos representarlas por las siguientes ecuaciones integrales

$$y(t) = T(t, s)y(s), \quad t \geq s,$$

$$x(t) = T(t, s)x(s) + \int_s^t T(t, k)f(k, x(k))dk, \quad t \geq s.$$

4.5. Problema Directo

Para resolver el problema directo aplicaremos El Teorema de punto fijo contractivo de Banach y el concepto de Dicotomía Exponencial Generalizada para el caso continuo.

Teorema 4.5.1 (ver [11]) Sea $y(t)$ una solución de (4.1) con $y(t) \cong t^l e^{\alpha t}$. Supongamos que (4.1) tiene una dicotomía generalizada con respecto a $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$\int_0^\infty S^{N-1} h(s) ds < +\infty.$$

Entonces, existe una solución $x(t)$ de (4.2) tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|y(t) - x(t)\|}{\|y(t)\|} = 0.$$

4.6. Problema inverso

El problema inverso estudia el comportamiento asintótico relativo entre las soluciones de (4.2) y (4.1), y la técnica empleada es un tipo de desigualdad de Gronwall adaptada a los sistemas de evolución apoyada con dos Lemas previos que enunciaremos en esta sección.

Teorema 4.6.1 (ver [11]) Supongamos que $\theta > 1$ y $x(t)$ una solución de (4.2), con número de Lyapunov finito. Entonces existe una solución $y(t)$ de (4.1) tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x(t)\|} = 0.$$

1. Notese que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t) - x(t)\|}{\|y(t)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|y(t) - x(t)\|}{t^l e^{\alpha t}}}{\frac{\|y(t)\|}{t^l e^{\alpha t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha t} \|y(t) - x(t)\|}{t^l}.$$

La idea de la prueba consiste en hacer la siguiente transformación

$$z(t) = e^{-\alpha t} (y(t) - x(t))$$

que conecta a las dos soluciones de los sistemas (4.1) y (4.2) con las soluciones del siguiente sistema en la variable z .

$$\dot{z}(t) = A_\alpha(t)z(t) + F_\alpha(t, z(t)), \quad t > 0,$$

donde $A_\alpha(t) = (A(t) - \alpha I)$,

$$F(t, z(t)) = e^{-\alpha t} f(t, y(t) + e^{\alpha t} z(t)),$$

y el operador de evolución $T_\alpha(t, s)$ generado por la familia de operadores $A_\alpha(t)$, es dado por

$$T_\alpha(t, s) = e^{-\alpha(t-s)} T(t, s), \quad t \geq s.$$

Por otra parte, la ecuación integral en términos de z puede escribirse como:

$$z(t) = T_\alpha(t, s)z(s) + \int_s^t T_\alpha(t, k)F_\alpha(k, z(k))dk,$$

y finalmente, se prueba y se reescribe como:

$$\begin{aligned} z(t) &= T_\alpha(t, s)P(s)z(s) + \left[\int_s^t T_\alpha(t, k)P(k)F_\alpha(k, z(k))dk \right] \\ &\quad - \left[\int_t^\infty T_\alpha(t, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k))dk \right] \end{aligned}$$

Se demuestra que el operador $\Gamma : Z_l \rightarrow Z_l$, definido por

$$\begin{aligned} (\Gamma z)(t) &= T_\alpha(t, s)p(s)z(s) \int_s^t T_\alpha(t, k)P(k)F_\alpha(k, z(k))dk \\ &\quad - \int_t^\infty T_\alpha(t, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k))dk \end{aligned}$$

es contractivo en el espacio de Banach Z_l , donde

$$Z_l = \{z \in C([s, \infty), Z) \mid \text{con la norma } \|Z(t)\|_l = \sup_{t>s} t^l \|z(t)\| < +\infty\}.$$

Lema 4.6.2 (ver [11]) Sea $T(t, s)$ el operador de evolución asociado a $A(t)$. Supongamos que existen proyecciones $P(s)$, $Q(s)$ tal que:

$$\|T(t, s)P(s)\| \leq k e^{\alpha(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|T(t, s)Q(s)\| \leq k e^{\beta(t-s)}, \quad t \leq s.$$

y

$$\int_0^\infty h(s)ds < +\infty,$$

donde la función h satisface la desigualdad (4.3).

Además,

$$a) \quad \|T(t, s)Q(s)x\| \geq \frac{1}{k} e^{\beta(t-s)} \|Q(s)x\|, \quad t \geq s, \quad \forall x \in Z$$

b) No existen soluciones $x(t)$ de (4.2), que tengan número de Lyapunov μ tal que $\alpha < \mu < \beta$.

Lema 4.6.3 (ver [11]) Sea $T(t, s)$ el operador de evolución generado por $A(t)$. Supongamos que existen proyecciones complementarias $P(s)$, $Q(s)$ tal que:

$$\|T(t, s)P(s)\| \leq k t^n e^{\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq t_0,$$

$$\|T(t, s)Q(s)\| \leq k e^{\beta(t-s)}, \quad t \leq s,$$

$$\int_0^\infty S^n h(s)ds < +\infty, \quad \text{donde} \quad \alpha < \beta, \quad k > 0, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Si $x(t)$ es una solución de (4.2), con número de Lyapunov α , entonces $\frac{1}{e^{\alpha t} t^n} \|x(t)\|$ es acotada para $t \geq t_0$.

Capítulo 5

Comportamiento Asintótico Relativo de Ecuaciones en Diferencia

5.1. Introducción

En este capítulo se prueban los resultados principales de este trabajo, los cuales están relacionados con el comportamiento asintótico relativo de las soluciones de ecuaciones en diferencia finitas. Específicamente, estudiaremos el comportamiento asintótico relativo de las soluciones de las siguientes ecuaciones de evolución en diferencia:

$$y(n+1) = A(n)y(n), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5.1)$$

$$x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5.2)$$

donde $y(n), x(n) \in Z$, $\mathbb{N}^ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ y la función $f : \mathbb{N} \times Z \rightarrow Z$, es una perturbación no lineal que satisface las siguientes condiciones:*

a) $f(n, 0) = 0$

b) $\|f(n, y(n)) - f(n, x(n))\| \leq h(n)\|y(n) - x(n)\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $h : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ es una sucesión que cumple con

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) < \infty.$$

Con el fin de abordar esta investigación se plantean los siguientes problemas:

El problema directo: Dada una solución $y(n)$ de la ecuación (5.1), con $y(n) \neq 0$, existe una solución $x(n)$ de la ecuación (5.2) tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} = 0.$$

El problema inverso: Dada una solución $x(n)$ de la ecuación (5.2), con $x(n) \neq 0$, entonces existe una solución $y(n)$ de la ecuación (5.1), tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = 0.$$

5.2. Definiciones

Consideremos el conjunto $\triangle = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \geq m\}$ y $T = \{T(n, m)\}_{(n, m) \in \triangle}$, el operador de evolución asociado a la familia de operadores $A(n)$. Es decir,

$$T(n, m) = \begin{cases} A(n-1) \dots A(m), & n > m \\ I, & n = m \end{cases}$$

donde I es el operador identidad en el espacio de los operadores lineales y acotados $L(Z)$.

Entonces las soluciones $y(\cdot)$ y $x(\cdot)$ de (5.1) y (5.2) son dadas por:

$$y(n) = T(n, m)y(m), \quad n \geq m \in \mathbb{N} \quad (5.3)$$

$$x(n) = T(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^n T(n, k)f(k, x(k)), \quad n \geq m \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Las siguientes definiciones para un número $\theta > 0$ las usaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 5.2.1 Dado $\alpha > 1$, $\theta > 0$ y l un entero no negativo, una función $y(n)$ se dice que es de orden $n^l\theta^{\alpha n}$ y se denota por $y(n) \cong n^l\theta^{\alpha n}$ si $y(n)$ satisface:

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n)\|}{n^l\theta^{\alpha n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n)\|}{n^l\theta^{\alpha n}} < +\infty.$$

Definición 5.2.2 Una solución $y(n)$ de (5.1) se dice que tiene un número de Lyapunov $\alpha > 0$ si $y(n)$ satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{\theta} \frac{\|y(n)\|}{n} = \alpha.$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ y $\overline{M} > 0$ tal que

$$\theta^{n(\alpha-\varepsilon)}\overline{M} \leq \|y(n)\| \leq \theta^{n(\alpha+\varepsilon)}\overline{M}, \quad n \geq N.$$

Definición 5.2.3 El operador de solución $T(n, m)$ se dice que tiene una dicotomía discreta generalizada con respecto a $\theta > 0$, si existen enteros $N \geq 1$, $M > 0$, $\varepsilon > 0$ y proyecciones complementarias $S(n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $U(n) : Z \rightarrow Z$ tales que:

$$P(n)T(n, m) = T(n, m)P(m), \quad Q(n)T(n, m) = T(n, m)Q(m). \quad (5.5)$$

$$S(n)T(n, m) = T(n, m)S(m), \quad U(n)T(n, m) = T(n, m)U(m). \quad (5.6)$$

$$T(n, m) : R(U(m)) \longrightarrow R(U(n)), \quad (5.7)$$

$$T(m, n) := T^{-1}(n, m) : R(U(n)) \longrightarrow R(U(m)), \quad m \geq n$$

$$T(n, m) : R(Q(m)) \longrightarrow R(Q(n)), \quad (5.8)$$

$$T(m, n) := T^{-1}(n, m) : R(Q(n)) \longrightarrow R(Q(m)), \quad m \geq n.$$

Para cada l , con $0 \leq l \leq N-1$, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\|T(n, m)S(m)\| \leq M\theta^{(\alpha-\epsilon)(n-m)}, \quad n \geq m \geq \sigma, \quad (5.9)$$

$$\|T(n, m)U(m)\| \leq M\theta^{(\alpha+\epsilon)(n-m)}, \quad m \geq n \geq \sigma, \quad (5.10)$$

$$\|T(n, m)P(m)\| \leq Mn^{l-1}m^{N-l}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \geq \sigma, \quad (5.11)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| \leq Mn^l m^{N-l-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad m \geq n \geq \sigma, \quad (5.12)$$

$$\|T(n, m)(P(m) + Q(m))\| \leq Mn^{N-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \geq \sigma. \quad (5.13)$$

5.3. Problema Directo

En esta sección daremos respuesta al problema directo a través del siguiente Teorema:

Teorema 5.3.1 Sea $y(n)$ una solución de (5.3), con $y(n) \cong n^l \theta^{\alpha n}$, y $\theta > 1$. Supóngase que la ecuación (5.3) tiene una dicotomía discreta generalizada con respecto a $\alpha > 0$ y

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^N h(k) < \infty. \quad (5.14)$$

Entonces, existe una solución $x(n)$ de (5.4) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} = 0.$$

Prueba Primero, observemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|y(n) - x(n)\|}{n^l \theta^{\alpha n}}}{\frac{\|y(n)\|}{n^l \theta^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{n^l \theta^{\alpha n}} = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^{-\alpha n} \|y(n) - x(n)\|}{n^l} = 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior, consideremos la siguiente transformación

$$z(n) = \theta^{-\alpha n} (x(n) - y(n)),$$

donde $x(n)$ es una solución arbitraria de (5.2). Así, obtenemos la siguiente ecuación en la variable $z(n)$

$$z(n+1) = A_{\alpha}(n)z(n) + F_{\alpha}(n, z(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (5.15)$$

donde

$$A_{\alpha}(n) = \theta^{-\alpha} A(n) \quad y \quad F_{\alpha}(n, z) = \theta^{-\alpha(n+1)} f(n, \theta^{\alpha n} z + y(n)).$$

Por otro lado, el operador de evolución $T_\alpha(n, m)$ generado por $A_\alpha(n)$ puede ser calculado como sigue:

$$\begin{aligned} T_\alpha(n, m) &= \begin{cases} A_\alpha(n-1) \dots A_\alpha(m), & n > m, \\ I, & n = m, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \theta^{-\alpha(n-m)} T(n, m), & n > m, \\ I, & n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Usando esta forma del operador $T_\alpha(n, m)$ obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{cases} \|T_\alpha(n, m)P(m)\| \leq Mn^{l-1}m^{N-l}, & n \geq m \geq \sigma, \\ \|T_\alpha(n, m)Q(m)\| \leq Mn^l m^{N-l-1}, & m \geq n \geq \sigma. \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\|F_\alpha(n, z)\| \leq \theta^{-(n+1)}h(h)\|y(n)\| + \theta^{-\alpha}h(h)\|z\|, \quad n \in \mathbb{N}, z \in Z, \quad (5.17)$$

y

$$\|F_\alpha(n, z_1) - F_\alpha(n, z_2)\| \leq \theta^{-\alpha}h(h)\|z_1 - z_2\|, \quad n \in \mathbb{N}, z_1, z_2 \in Z. \quad (5.18)$$

Así, el problema directo es reducido a probar la existencia de soluciones de (5.2) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|z(n)\|}{n^l} = 0. \quad (5.19)$$

Si aplicamos la fórmula de variación de parámetros a la ecuación (5.15) y usando (5.19), entonces

$$\begin{aligned}
z(n) &= T_\alpha(n, m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&= T_\alpha(n, m)[P(m) + Q(m)]z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)[P(k) + Q(k)]F_\alpha(k, z(k)) \\
&= T_\alpha(n, m)Q(m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&+ T_\alpha(n, m)P(m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)P(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&= T_\alpha(n, m)[Q(m)z(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, k)P(k)F(k, z(k))] \\
&+ T_\alpha(n, m)P(m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)P(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&- \sum_{k=n}^{\infty} T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)).
\end{aligned}$$

Si imponemos la condición:

$$Q(m)Z(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, k)P(k)F_\alpha(k, z(k)) = 0$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
z(n) &= T_\alpha(n, m)P(m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)P(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&- \sum_{k=n}^{\infty} T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

La serie

$$\sum_{k=m}^{\infty} T_{\alpha}(m, k)P(k)F_{\alpha}(k, z(k))$$

converge absolutamente ya que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m}^{\infty} T_{\alpha}(m, k)P(k)F_{\alpha}(k, z(k)) \right\| &\leq \sum_{k=m}^{\infty} Mm^l k^{N-l-1} \theta^{-\alpha(k+1)} h(k) \|y(k)\| \\ &\quad + \sum_{k=m}^{\infty} Mm^l k^{N-l-1} \theta^{-\alpha} h(k) \|z(k)\| \\ &\leq \frac{Mm^l}{\theta^{\alpha}} \sum_{k=m}^{\infty} k^N h(k) \frac{\|y(k)\|}{\theta^{\alpha k} k^l} \\ &\quad + \frac{Mm^l}{\theta^{\alpha}} \sum_{k=m}^{\infty} k^N h(k) \frac{\|z(k)\|}{k^l}. \end{aligned}$$

Aplicando (5.15), (5.19) y $y(n) \cong n^l \theta^{\alpha n}$.

Recíprocamente, si $z(n)$ es una solución de la ecuación (5.20) y la sucesión

$$\left\{ \frac{\|z(k)\|}{k^l} \right\},$$

es acotada, entonces $z(n)$ satisface la ecuación (5.15). En este sentido:

$$\begin{aligned}
z(n) &= T_\alpha(n, m)P(m)z(m) + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)P(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&\quad - \sum_{k=n}^{\infty} T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&= T_\alpha(n, m)P(m)z(m) - \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&\quad + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&= T_\alpha(n, m)w + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)F_\alpha(k, z(k)),
\end{aligned}$$

donde

$$w = p(m)z(m) - \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)).$$

Para finalizar la prueba, mostraremos que la ecuación (5.20) tiene una solución $z(n)$ en el espacio de Banach

$$Z_l = \{z = \{z(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Z : \|z\|_l = \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-l} \|z(n)\| < \infty\},$$

con norma

$$\|z\|_l = \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-l} \|z(n)\|, \quad z \in Z_l.$$

Con este fin, para todo $w \in Z$ consideremos el siguiente operador $\Gamma : Z_l \rightarrow Z_l$ definido por

$$\begin{aligned}
(\Gamma z)(n) &= T_\alpha(n, m)P(m)w + \sum_{k=m}^n T_\alpha(n, k)p(k)F_\alpha(k, z(k)) \\
&\quad - \sum_{k=n}^{\infty} T_\alpha(n, k)Q(k)F_\alpha(k, z(k)).
\end{aligned}$$

El operador Γ como función actúa de Z_l en Z_l ya que $\forall z \in Z_l$ se tiene que

$$(\Gamma z)(n) \in Z_l,$$

En efecto, como las sucesiones

$$\left\{ \frac{\|y(k)\|}{k^l \theta^{\alpha k}} \right\}, \quad \left\{ \frac{\|z(k)\|}{k^l} \right\}$$

son acotadas y la por condición (5.14) concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-l} \|(\Gamma z)(n)\| = 0$.

Así, $\Gamma z \in Z_l, \quad \forall z \in Z_l$

Ahora, probaremos que el operador Γ es una contracción. En este sentido tenemos

$$\begin{aligned}
n^{-l} \|(\Gamma z_1)(n) - (\Gamma z_2)(n)\| &\leq \frac{M}{n\theta^\alpha} \sum_{k=m}^n k^{N-1} h(k) \frac{\|z_1(k) - z_2(k)\|}{k^l} \\
&+ \frac{M}{\theta^\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} k^{N-1} h(k) \frac{\|z_1(k) - z_2(k)\|}{k^l},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|\Gamma z_1 - \Gamma z_2\|_l \leq \left\{ \frac{M}{\theta^\alpha} \sum_{k=m}^{\infty} k^N h(k) \right\} \|z_1 - z_2\|_l.$$

Así, tomando m suficientemente grande tal que

$$\sum_{k=m}^{\infty} K^N h(k) < \frac{\theta^\alpha}{M},$$

como Γ es una contracción de Z_l en Z_l . Por el Teorema de Banach, Γ tiene un único punto fijo que depende de $w \in \mathbb{Z}$. Así, la solución $x(n)$ de (5.2), que resuelve el problema directo, viene dada por $x(n) = \theta^{\alpha n} z(n) + y(n)$, donde $z(n)$ es una solución de la ecuación (5.15) y $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-l} \|z(n)\| = 0$. ■

Observación 5.3.2 De la prueba del Teorema 5.3.1, concluimos que para cada $\xi \in p(m)z$ con $\xi = P(m)\tilde{z}(m)$, le corresponde una solución $z(n)$ de (5.15) que satisface

$$\begin{aligned} z(m) &= \xi - \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, k) Q(k) F_\alpha(k, z(k)) \\ &= p(m)\tilde{z}(m) - \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, K) Q(K) F_\alpha(k, z(k)) \end{aligned}$$

Así, si definimos la función $\phi : p(m)Z \rightarrow Z$ con $\phi(\xi) = \xi - \sum_{k=m}^{\infty} T_\alpha(m, K) Q(K) F_\alpha(k, z(k))$, y el conjunto

$$\Sigma = \{\phi(\xi) : \xi \in p(m)Z \text{ y } z(n) \text{ solución de (5.15)}\}$$

concluimos que para cada dato inicial en Σ obtenemos una solución $x(n)$ de (5.2) tal que $\|x(n) - y(n)\| = o(\|y(n)\|)$.

5.4. Problema Inverso

En esta sección daremos una respuesta al problema inverso. En este sentido asumiremos $\theta > 1$. Esto con el fin de seguir con las mismas ideas de [11], es decir, dada una solución $x(n)$

de (5.2), con número de Lyapunov finito, probaremos que existe una solución $y(n)$ de (5.1) tal que

$$\|x(n) - y(n)\| = o(\|x(n)\|),$$

para esto usaremos dos versiones de la desigualdad de Gronwall, una desigualdad simple y generalizada, que la llamaremos desigualdad de Rodrigues vista en la sección 4.3.

Proposición 5.4.1 *La siguiente desigualdad es cierta*

$$1 + \ln(\theta)x < \theta^x, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall \theta > 1.$$

Prueba Consideremos la siguiente función $f(x) = \theta^x$, esta función tiene las siguientes propiedades:

1. Es creciente, $f'(x) = \theta^x \ln(\theta) > 0$, $\forall x \neq 0$.
2. Es concava hacia arriba $f''(x) = \theta^x \ln^2(\theta) > 0$, $\forall x \neq 0$.
3. Además, es positiva $f(x) = \theta^x > 0$, $\forall x \neq 0$.

Cualquier recta tangente está por debajo de la curva $f(x) = \theta^x$, en particular la recta tangente $y = \ln(\theta)x + 1$, que pasa por $(0, 1)$. Luego, se tiene que $1 + \ln(\theta)x < \theta^x$, $\forall x \neq 0$, $\forall \theta > 1$.

Lema 5.4.2 (ver [11]) Desigualdad simple discreta de Gronwall

Sean $L(n)$ y $\beta(n)$ sucesiones no negativas tal que $\sum_{n=N_0}^{\infty} L(n) < +\infty$ con $\beta(n)$ decreciente.

Si $u(n)$ es una sucesión acotada de términos positivos tal que se verifica:

$$u(n) < \beta(n) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)L(k)u(k),$$

para $n \geq 0$, entonces

$$u(n) \leq \beta(N_0)\theta^{\sum_{k=N_0}^{\infty} L(k)}.$$

Prueba

Definamos

$$R(n) = \beta(n) + \sum_{k=N_0}^{n-1} \ln(\theta).L(k)u(k),$$

con $R(N_0) = \beta(N_0)$ y $n \geq N_0 + 1$.

Tomemos n suficientemente grande tal que

$$u(n) \leq R(n) < \beta(n) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)L(k)u(k)$$

Observemos que

$$R(n+1) = [\beta(n+1) - \beta(n)] + R(n) + \ln(\theta)L(n)u(n).$$

Como $\beta(n)$ es decreciente y $u(n) \leq R(n)$ se tiene

$$R(n+1) \leq R(n) + \ln(\theta)L(n)R(n) = R(n)[1 + \ln(\theta)L(n)].$$

Ahora,

$$R(n) \leq \prod_{k=N_0}^{n-1} [1 + \ln(\theta)L(k)]R(N_0).$$

Por la Proposición 5.4.1 se tiene

$$u(n) \leq R(n) \leq \prod_{k=N_0}^{n-1} \theta^{L(k)} \beta(N_0),$$

de esta última desigualdad concluimos que

$$u(n) \leq \beta(N_0) \theta^{\sum_{k=N_0}^{n-1} L(k)} \leq \beta(N_0) \theta^{\sum_{k=N_0}^{\infty} L(k)}, \quad \forall n \geq 0.$$

A continuación probaremos una desigualdad del tipo Gronwall generalizada.

Lema 5.4.3 Sean $L, g \in l_1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, sucesiones no negativas y $\gamma(n) > 0$, una sucesión decreciente con $\frac{1}{\gamma(n)}$ acotada.

Supongamos que para m suficientemente grande, se tiene que:

$$\eta = \sum_{k=m}^{\infty} g(k) + \sum_{k=m}^{\infty} L(k) < 1.$$

Si $u(n)$ es una sucesión acotada, no negativa tal que $\gamma(n)u(n)$ es acotada y se satisface la siguiente desigualdad:

$$u(n) \leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} u(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta) \gamma(k) u(k) g(k),$$

para algún $N_0 \geq m$ y $\bar{k} > 0$. Entonces

$$u(n) \leq \frac{\bar{k}M}{(1-\eta)} \theta^{(1/(1-\eta)) \sum_{k=N_0}^{\infty} g(k)}, \quad n \geq 0$$

Prueba

1. Por hipótesis $u(n)$ es acotada. Para m grande y $n > m$ se define la sucesión

$$v(n) = \sup_{j \in [m, n]} u(j).$$

2. Note que $v(n)$ es creciente, es decir $v(n) \leq v(n+1)$ y además cumple con $u(n) \leq v(n)$, $\forall n$.

3. Observe que existe un $n_0 \in [m, n]$ tal que $v(n) = \sup_{j \in [m, n]} u(j) = u(n_0)$.

4. $\gamma(n)u(n)$ es acotada y

$$u(n) \leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} u(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)u(k)g(k),$$

en particular, está desigualdad vale para el supremo de las $u(j)$, es decir hemos construido una sucesión

$$v(n) = \sup_{j \in [m, n]} u(j)$$

que verifica lo siguiente

a) $\gamma(n)v(n)$ es acotada

$$b) \quad u(n) \leq v(n) \leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} v(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k), \quad n_0 < N_0$$

c) De b) se obtiene que

$$u(n) \leq u(n_0) \leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} v(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k).$$

De esta última ecuación se deduce

$$d) \quad u(n) \leq v(n) \leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} v(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k)$$

5. Observe que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k) = \sum_{k=n_0}^{N_0} \gamma(k)v(k)g(k) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k)$$

como $\gamma(n)$ es decreciente se tiene que

$$n > n_0 \Rightarrow \gamma(n_0) > \gamma(n) \Rightarrow \frac{1}{\gamma(n_0)} < \frac{1}{\gamma(n)}$$

6. Usando 5., tenemos que para $n > N_0 > n_0 > m$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k) &\leq \gamma(n_0)v(n) \sum_{k=n_0}^{N_0} g(k) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k) \\ &\leq \gamma(n_0)v(n) \sum_{k=m}^{\infty} g(k) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k) \end{aligned}$$

7. De 6., obtenemos

$$\frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k) \leq v(n) \sum_{k=m}^{\infty} g(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \gamma(k)v(k)g(k)$$

y reemplazando en d).

$$\begin{aligned} u(n) &\leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{N_0} v(k)L(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=n_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)u(k)g(k) \\ v(n) &\leq \bar{k} + \sum_{k=m}^{n_0} v(k)L(k) + v(n) \sum_{k=m}^{\infty} g(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k) \\ v(n) &\leq \bar{k} + v(n) \sum_{k=m}^{\infty} L(k) + v(n) \sum_{k=m}^{\infty} g(k) + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k) \\ v(n) &\leq \bar{k} + v(n)\eta + \frac{1}{\gamma(n_0)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta)\gamma(k)v(k)g(k) \end{aligned}$$

$$v(n)(1 - \eta) \leq \bar{k} + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta) \gamma(k) v(k) g(k)$$

$$\gamma(n)v(n)(1 - \eta) \leq \bar{k}\gamma(n) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta) \gamma(k) v(k) g(k)$$

$$\gamma(n)v(n) \leq \frac{\bar{k}\gamma(n)}{(1 - \eta)} + \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta) \gamma(k) v(k) \frac{g(k)}{(1 - \eta)}$$

tomando

$$\begin{cases} s(n) &= \gamma(n)v(n) \\ \beta(n) &= \bar{k} \frac{\gamma(n)}{(1 - \eta)} \\ \tilde{L}(n) &= \frac{g(k)}{(1 - \eta)} \Rightarrow \sum_{k=N_0}^{\infty} \tilde{L}(n) < +\infty \end{cases}$$

Obtenemos

$$s(n) \leq \beta(n) + \sum_{k=N_0}^{\infty} \ln(\theta) s(k) \tilde{L}(k).$$

8. Aplicando la desigualdad de Gronwall simple se tiene

$$\gamma(n)v(n) \leq \bar{k} \frac{\gamma(n_0)}{(1 - \eta)} \theta^{\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{g(k)}{(1 - \eta)}}$$

$$v(n) \leq \bar{k} \frac{\gamma(n_0)}{\gamma(n)} \frac{1}{(1 - \eta)} \theta^{\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{g(k)}{(1 - \eta)}}$$

$$u(n) \leq v(n) \leq \bar{k}M \frac{1}{(1 - \eta)} \theta^{\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{g(k)}{(1 - \eta)}}$$

■

Lema 5.4.4 Sea $T(n, m)$ el operador de evolución generado por $A(n)$. Supongamos que existen proyecciones complementarias $P(m)$, $Q(m)$, como en la primera parte de la definición 5.2.3, tal que

$$\|T(m, n)P(m)\| \leq K\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \quad (5.21)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| \leq K\theta^{\beta(n-m)}, \quad n \leq m \quad (5.22)$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k) < \infty. \quad (5.23)$$

Entonces

$$a) \quad \|T(m, n)Q(m)x\| \geq \frac{1}{K}\theta^{\beta(n-m)}\|Q(m)x\|, \quad n \geq m, \quad \forall x \in Z.$$

b) No existen soluciones $x(n)$ de (4) que tengan número de Lyapunov μ tal que $\alpha < \mu < \beta$.

Prueba Para demostrar (a). Primero notemos que

$$\begin{aligned} T(m, n)Q(n)T(n, m)Q(m)x(n) &= T(m, n)T(n, m)Q(m)Q(m)x(n) \\ &= Q^2(m)x(n) = Q(m)x(n). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|Q(m)x(n)\| &= \|T(m, n)Q(n)T(n, m)Q(m)x(n)\| \\ &\leq K\theta^{\beta(m-n)}\|T(n, m)Q(m)x(n)\|, \quad \forall n \geq m. \end{aligned}$$

Así,

$$\|T(m, n)Q(m)x\| \geq \frac{1}{K} \theta^{\beta(n-m)} \|Q(m)x(n)\|, \quad \forall n \geq m.$$

Ahora, probaremos la parte (b). Con el propósito de llegar a una contradicción, supondremos que existe una solución $x(n)$ de (5.2) con número de Lyapunov μ tal que $\alpha < \mu < \beta$. Entonces podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\alpha < \mu - \delta < \mu < \mu + \delta < \beta$.

Como, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x(n)\| \leq L\theta^{(\mu+\delta)n}, \quad \forall n \geq m. \quad (5.24)$$

por otro lado, conociendo la fórmula para $x(n)$

$$\begin{aligned} x(n) &= T(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^n T(n, k)f(k, x(k)) \\ &= T(n, m) \left[x(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T(m, k)Q(k)f(k, x(k)) \right] \\ &\quad - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) + \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \end{aligned}$$

Tomando $w = x(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T(m, k)Q(k)f(k, x(k))$ obtenemos

$$\begin{aligned}
x(n) &= T(n, m)w - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) \\
&+ \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \\
&= T(n, m)P(m)w + T(n, m)Q(m)w \\
&- \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) + \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)).
\end{aligned}$$

De (5.21), (5.23) y (5.24). Se sigue que la siguiente serie $\sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k))$ es convergente. En este sentido, tenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\theta^{-(\mu+\delta)n} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) \right\| &\leq \theta^{-(\mu+\delta)n} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} K\theta^{\beta(n-k)}L\theta^{(\mu+\delta)n}h(k) \right\| \\
&= KL\theta^{\beta-(\mu+\delta)n}\theta^{-(\beta-(\mu+\delta)n)} \sum_{k=n}^{\infty} h(k). \\
&= KL \sum_{k=n}^{\infty} h(k).
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^{-(\mu+\delta)n} \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) = 0.$$

entonces $Q(m)w = 0$.

En caso contrario, si $Q(m)w \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta^{-(\mu+\delta)n} \|T(n, m)Q(m)w\| &\geq \frac{1}{K} \theta^{-(\mu+\delta)n} \cdot \theta^{\beta(n-m)} \|Q(m)w\| \\
&= \frac{1}{K} \theta^{-\beta m} \theta^{(\beta-(\mu+\delta))n} \|Q(m)w\| \rightarrow \infty \quad \text{con } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$Q(n)x(n) = T(n, m)Q(m)w - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\theta^{-(\mu+\delta)n} \|Q(n)x(n)\| &\geq \theta^{-(\mu+\delta)n} \|T(n, m)Q(m)w\| \\
&+ \theta^{-(\mu+\delta)n} \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) \rightarrow \infty \quad \text{con } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción con (5.24).

Luego, obtenemos la siguiente representación para $x(n)$:

$$\begin{aligned}
x(n) &= T(n, m)P(m)w + \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \\
&- \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)).
\end{aligned}$$

Como

$$\|T(n, k)P(k)\| \leq K\theta^{\alpha(n-k)} \leq K\theta^{(\mu-\delta)(n-k)}, \quad n \geq k,$$

y

$$\|T(n, k)Q(k)\| \leq K\theta^{\beta(n-k)} \leq K\theta^{(\mu+\delta)(n-k)}, \quad n \geq k,$$

$$\begin{aligned} \|x(n)\| &\leq K\theta^{\alpha(n-m)}\|P(m)w\| + \sum_{k=m}^n K\theta^{\alpha(n-k)}h(k)\|x(k)\| \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} K\theta^{\beta(n-k)}h(k)\|x(k)\| \\ &\leq K\theta^{(\mu-\delta)(n-m)}\|P(m)w\| + \sum_{k=m}^n K\theta^{(\mu-\delta)(n-k)}h(k)\|x(k)\| \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} K\theta^{(\mu+\delta)(n-k)}h(k)\|x(k)\|, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \theta^{-(\mu-\delta)n}\|x(n)\| &\leq K\theta^{-(\mu-\delta)m}\|P(m)w\| + \sum_{k=m}^n K\theta^{-(\mu-\delta)k}h(k)\|x(k)\| \\ &\quad + \theta^{2\delta n} \sum_{k=n}^{\infty} K\theta^{-(\mu-\delta)k}\theta^{-2\delta k}h(k)\|x(k)\|. \end{aligned}$$

Si tomamos

$$u(n) = \theta^{-(\mu-\delta)n}\|x(n)\|,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
u(n) &\leq K\theta^{-(\mu-\delta)m}\|P(m)w\| + \sum_{k=m}^n Ku(k)h(k)\|x(k)\| \\
&+ \theta^{2\delta n} \sum_{k=n}^{\infty} K\theta^{-2\delta k}u(k)h(k)\|x(k)\| \\
&\leq K\theta^{-(\mu-\delta)m}\|P(m)w\| + \sum_{k=m}^{N_0} Ku(k)h(k)\|x(k)\| \\
&+ \theta^{2\delta n} \sum_{k=N_0}^{\infty} K\theta^{-2\delta k}u(k)h(k)\|x(k)\|
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 5.4.3, con

$$\gamma(n) = \theta^{-2\delta n}, \quad \rho(n) = g(n) = Kh(n),$$

obtenemos

$$u(n) \leq \frac{K\theta^{-(\mu-\delta)m}\|P(m)w\|}{1-\eta} \theta^{\frac{1}{1-\eta} \sum_{k=N_0}^{\infty} Kh(k)},$$

donde

$$\eta = 2K \sum_{k=m}^{\infty} h(k) < 1.$$

Así, $u(n) = \theta^{-(\mu-\delta)n}\|x(n)\|$ es acotada, lo cual es una contradicción de la hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{\theta} \|x(n)\|}{n} = \mu.$$

■

Lema 5.4.5 Sea $T(n, m)$ el operador generado por $A(n)$. Supongamos que existen proyecciones complementarias $P(m)$, $Q(m)$, como en la primera parte de la Definición 5.2.3, tal que:

$$\|T(m, n)P(m)\| \leq K n^t \theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \geq n_0, \quad (5.25)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| \leq K \theta^{\beta(n-m)}, \quad n \leq m \quad (5.26)$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^t h(k) < \infty, \quad (5.27)$$

donde $\alpha < \beta$, $K > 0$ y $t \in \mathbb{N}$.

Si $x(n)$ es una solución de (5.2), con número de Lyapunov α , entonces $\frac{1}{\theta^{\alpha n} n^t} \|x(n)\|$ es acotada para todo $n \geq n_0$.

Prueba Supongamos que $x(n)$ es una solución de (5.2) con número de Lyapunov α . Entonces, para $\epsilon > 0$, con $\alpha < \alpha + \epsilon < \beta$ y $0 < \delta < \epsilon$, existe $L > 0$ tal que:

$$\|x(n)\| \leq L \theta^{(\alpha+\delta)n}, \quad n \geq n_0, \quad (5.28)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| \leq K \theta^{(\alpha+\epsilon)(n-m)} \leq K \theta^{(\alpha+\delta)(n-m)}, \quad n \leq m. \quad (5.29)$$

Por otra parte, tenemos la fórmula para $x(n)$:

$$\begin{aligned}
x(n) &= T(n, m)w - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) \\
&+ \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \\
&= T(n, m)P(m)w + T(n, m)Q(m)w \\
&- \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) + \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)),
\end{aligned}$$

donde

$$w = x(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T(m, k)Q(k)f(k, x(k)).$$

Procediendo en la misma manera que el Lema 5.4.5, obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)) \right\| \leq K\theta^{(\alpha+\epsilon)n} \sum_{k=n}^{\infty} h(k) \frac{\|x(n)\|}{\theta^{(\alpha+\epsilon)k}}.$$

Entonces, de (5.28) y (5.29) se sigue que la serie anterior es convergente.

Análogamente, obtenemos la siguiente estimación:

$$\left\| \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \right\| \leq Kn^t \theta^{\alpha n} \sum_{k=m}^n \theta^{-\alpha k} h(k) \|x(n)\|.$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^t \theta^{(\alpha+\epsilon)n}} \|T(n, m)w\| &\leq \frac{\|x(n)\|}{n^t \theta^{(\alpha+\epsilon)n}} + \frac{K}{\theta^{\epsilon n}} \sum_{k=m}^n h(k) \frac{\|x(k)\|}{\theta^{\alpha k}} \\ &+ \frac{K}{n^t} \sum_{k=n}^{\infty} h(k) \frac{\|x(n)\|}{\theta^{(\alpha+\epsilon)k}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^t \theta^{(\alpha+\epsilon)n}} \|T(n, m)w\| &\leq \frac{\|x(n)\|}{n^t \theta^{(\alpha+\epsilon)n}} + \frac{K}{\theta^{(\epsilon-\delta)n}} \sum_{k=m}^n h(k) \frac{\|x(k)\|}{\theta^{(\alpha+\delta)k}} \\ &+ \frac{K}{n^t} \sum_{k=n}^{\infty} h(k) \frac{\|x(n)\|}{\theta^{(\alpha+\epsilon)k}} \rightarrow 0, \quad \text{con } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De manera análoga, que el Lema 5.4.5, probaremos que $Q(m)w = 0$. Y por lo tanto, $P(m)w = w$. Ahora, como

$$\begin{aligned} x(n) &= T(n, m)P(m)w + \sum_{k=m}^n T(n, k)P(k)f(k, x(k)) \\ &- \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)Q(k)f(k, x(k)), \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|x(n)\| &\leq K n^t \theta^{\alpha(n-m)} \|w\| + \sum_{k=m}^n K n^t \theta^{\alpha(n-k)} h(k) \|x(k)\| \\
&+ \sum_{k=n}^{\infty} K \theta^{\beta(n-k)} h(k) \|x(k)\| \\
&\leq K n^t \theta^{\alpha(n-m)} \|w\| + \sum_{k=m}^n K n^t \theta^{\alpha(n-k)} h(k) \|x(k)\| \\
&+ \sum_{k=n}^{\infty} K \theta^{(\alpha+\epsilon)(n-k)} h(k) \|x(k)\|.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^t \theta^{\alpha n}} \|x(n)\| &\leq K \theta^{-\alpha m} \|w\| + K \sum_{k=m}^n k^t h(k) \frac{\|x(k)\|}{k^t \theta^{\alpha k}} \\
&+ \frac{K}{\theta^{-\epsilon n}} \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{-\epsilon k} k^t h(k) \frac{\|x(k)\|}{k^t \theta^{\alpha k}} \\
&\leq K \theta^{-\alpha m} \|w\| + K \sum_{k=m}^{N_0} k^t h(k) \frac{\|x(k)\|}{k^t \theta^{\alpha k}} \\
&+ \frac{K}{\theta^{-\epsilon n}} \sum_{k=N_0}^{\infty} \theta^{-\epsilon k} k^t h(k) \frac{\|x(k)\|}{k^t \theta^{\alpha k}}.
\end{aligned}$$

Ahora, tomando

$$u(n) = \frac{1}{n^t \theta^{\alpha n}} \|x(n)\|, \quad \gamma(n) = \theta^{-\epsilon n} \quad y \quad l(n) = g(n) = K n^t \theta^{\alpha n},$$

y aplicando el Lema 5.4.3, obtenemos que:

$$\frac{1}{n^t \theta^{\alpha n}} \|x(n)\| \leq \frac{K \theta^{-\alpha m} \|w\|}{1 - \eta} \theta^{\frac{1}{1-\eta} \sum_{k=N_0}^{\infty} k^t h(k)}$$

donde

$$\eta = 2K \sum_{k=m}^{\infty} k^l h(k) < 1.$$

Por otro lado, $n^{-t} \theta^{-\alpha n} \|x(n)\|$ es acotada. ■

Teorema 5.4.6 Supongamos $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\theta > 1$ y que las siguientes condiciones son ciertas:

- a) Para cada l , $0 \leq l \leq N - 1$ el sistema (5.1) tiene una dicotomía discreta generalizada como la establecida en la definición 5.2.3.
- b) $x(n)$ es una solución de (5.2) con número de Lyapunov α .
- c) $\sum_{k=0}^{\infty} k^N h(k) < \infty$.

Entonces, existe una solución $y(n)$ de (5.1) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|x(n)\|} = 0$$

Además, existe $\bar{l}$, $0 \leq \bar{l} \leq N - 1$ tal que $\|x(n)\| \cong n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = 0$$

Prueba De la Definición 5.2.3 tenemos que $P(n), S(n), Q(n), U(n)$ son las proyecciones complementarias y $\frac{1}{2}(P(m) + S(m)) + \frac{1}{2}(Q(n) + U(n)) = I$. Así, si $\bar{P}(m) = \frac{1}{2}(P(m) + Q(m))$ y $\bar{Q}(m) = \frac{1}{2}(Q(m) + U(m))$, entonces

$$\|T(n, m)\bar{P}(m)\| \leq \frac{1}{2}Mn^{l-1}m^{N-l}\theta^{\alpha(n-m)} + \frac{1}{2}M\theta^{(\alpha-\varepsilon)(n-m)}$$

como $\theta \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \|T(n, m)\bar{P}(m)\| &\leq \frac{1}{2}M\theta^{\alpha(n-m)}[n^{l-1}m^{N-1} + 1] \\ \Rightarrow \|T(n, m)\bar{P}(m)\| &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}n^{l-1}m^{N-l} \\ \|T(n, m)\bar{P}(m)\| &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}n^l n^{-1}m^{N-l} \\ &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}n^l n^{-1}m^{N-l} \leq M\theta^{\alpha(n-m)}n^{N-1}m^{N-l} \\ \|T(n, m)\bar{P}(m)\| &\leq kn^{N-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \quad \boxed{k = Mm^{N-1}}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq Mn^l m^{N-l-1}\theta^{\alpha(n-m)} + M\theta^{(\alpha+\varepsilon)(n-m)}, \quad n \leq m \\ \|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}[n^l m^{N-l-1} + \theta^{\varepsilon(n-m)}], \end{aligned}$$

con $\theta \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq \frac{1}{2}M\theta^{\alpha(n-m)}[n^l m^{N-l-l} + 1] \\
\|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}n^l m^{N-l-l} \\
\|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq M\theta^{\alpha(n-m)}m^l m^{-l} m^{N-l} \\
\|T(n, m)\bar{Q}(m)\| &\leq k\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \leq m \quad \boxed{k = Mm^{N-1}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, estamos en las hipótesis del Lema 5.4.5 y en consecuencia $\frac{\|x(n)\|}{n^{N-1}\theta^{\alpha n}}$ es acotada.

Definamos $\bar{l} = \min\{m \in \{0, 1, \dots, N-1\} : \frac{\|x(n)\|}{n^m \theta^{\alpha n}} \text{ es acotada}\}$. Análogamente, como en el Lema 5.4.4 si tomamos

$$y(n) = T(n, m)\{x(m) + \sum_{k=m}^{\infty} T(m, k)[Q(k) + U(k)]f(k, x(k))\},$$

para $n \geq m$, obtenemos que $y(n)$ es una solución de (5.1) y

$$\begin{aligned}
x(n) &= y(n) + \sum_{k=m}^n T(n, k)[P(k) + S(k)]f(k, x(k)) \\
&\quad - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)[Q(k) + U(k)]f(k, x(k)).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|x(n) - y(n)\| &\leq M \sum_{k=m}^n \left\{ n^{\bar{l}-1} k^N \theta^{\alpha n} k^{-\bar{l}} \theta^{-\alpha k} + \theta^{(\alpha-\epsilon)(n-k)} \right\} h(k) \|x(k)\| \\
&\quad + M \sum_{k=n}^{\infty} \left\{ n^{\bar{l}} k^{N-1} \theta^{\alpha n} k^{-\bar{l}} \theta^{-\alpha k} + \theta^{(\alpha+\epsilon)(n-k)} \right\} h(k) \|x(k)\|,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|x(n) - y(n)\| &\leq 2M \sum_{k=m}^n n^{\bar{l}-1} k^N \theta^{\alpha n} h(k) k^{-\bar{l}} \theta^{-\alpha k} \|x(k)\| \\ &+ 2M \sum_{k=n}^{\infty} n^{\bar{l}} k^{N-1} \theta^{\alpha n} h(k) k^{-\bar{l}} \theta^{-\alpha k} \|x(k)\|. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\|x(n) - y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} \leq 2M \|x\|_{\alpha \bar{l}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=m}^n k^N h(k) + \sum_{k=n}^{\infty} k^{N-1} h(k) \right\},$$

donde $\|x\|_{\alpha \bar{l}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} k^{-\bar{l}} \theta^{-\alpha k} \|x(k)\|$.

De la hipótesis (d) probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} = 0$, entonces $\frac{\|y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}}$ es acotada. De la Definición de $\bar{l}$ se presentan dos casos:

Caso 1

Supongamos que $\bar{l} = 0$. En este caso $\theta^{-\alpha n} \|x(n)\|$ es acotada. De (5.30) se sigue que

$$\begin{aligned} x(n) &= T(n, m) \bar{P}(m) w + \sum_{k=m}^n T(n, k) \bar{P}(k) f(k, x(k)) \\ &- \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k) \bar{Q}(k) f(k, x(k)). \end{aligned} \tag{5.31}$$

$\bar{P}(m)$ es una proyección y $\bar{Q}(m)$ es la proyección complementaria dadas por

$$\bar{P}(m) = \frac{1}{2}(P(m) + S(m)), \quad \bar{Q}(m) = \frac{1}{2}(Q(m) + U(m)).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x(n) &= T(n, m)S(m)w + \sum_{k=m}^n T(n, k)S(k)f(k, x(k)) \\ &\quad - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)U(k)f(k, x(k)). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Note que, si $\bar{Q}(m)w \neq 0$, entonces se produce una contradicción, luego se tiene que $\bar{Q}(m)w = 0$.

Por otra parte, $U(m)w = 0$ por el mismo razonamiento.

Tenemos que

$$\frac{1}{2}[S(m) + U(m)]w = \frac{1}{2}w \Rightarrow \frac{1}{2}S(m)w = \frac{1}{2}w \Rightarrow S(m)w = w.$$

y

$$(\bar{P}(m) + \bar{Q}(m))w = w \Rightarrow \bar{P}(m)w = w.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}(P(m) + S(m))w = w.$$

$$\begin{aligned} [\bar{P}(m) + \bar{Q}(m)]w &= \frac{1}{2}P(m)w + \frac{1}{2}Q(m)w + \frac{1}{2}S(m)w + \frac{1}{2}U(m)w \\ &= \frac{1}{2}w + 0 + \frac{1}{2}w + 0 = w \end{aligned}$$

$$x(n) = T(n, m)S(m)w + \sum_{k=m}^n T(n, k)S(k)f(k, x(k)) - \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)U(k)f(k, x(k)).$$

$$\begin{aligned} \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \|x(n)\| &\leq \theta^{-(\alpha-\varepsilon)} \|T(n, m)S(m)w\| \\ &\quad + \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=m}^n T(n, k)S(k)f(k, x(k)) \right\| \\ &\quad + \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)U(k)f(k, x(k)) \right\| \\ &\quad \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=m}^n T(n, k)S(k)f(k, x(k)) \right\| \\ &\leq \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \sum_{k=m}^n Mh(k)\theta^{(\alpha-\varepsilon)(n-k)} \|x(k)\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=m}^n T(n, k)S(k)f(k, x(k)) \right\| &\leq \sum_{k=m}^n Mh(k)\theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} \|x(n)\| \\ \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)U(k)f(k, x(k)) \right\| &\leq \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \theta^{(\alpha+\varepsilon)n} \sum_{k=n}^{\infty} M\theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} h(k) \|x(n)\| \\ \theta^{-(\alpha+\varepsilon)n} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} T(n, k)U(k)f(k, x(k)) \right\| &\leq \theta^{2\varepsilon n} \sum_{k=n}^{\infty} M\theta^{-2\varepsilon n} \theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} h(k) \|x(k)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \|T(n, m)S(m)w\| &\leq M\theta^{(\alpha-\varepsilon)m} \|w\| \\
\theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \|x(n)\| &\leq M\theta^{(\alpha-\varepsilon)m} \|w\| + \sum_{k=m}^n Mh(k)\theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} \|x(k)\| \\
&+ \theta^{2\varepsilon n} \sum_{k=n}^{\infty} M\theta^{-2\varepsilon n} \theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} h(k) \|x(k)\| \\
&\leq M\theta^{(\alpha-\varepsilon)m} \|w\| + \sum_{k=m}^{N_0} Mh(k)\theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} \|x(k)\| \\
&+ \theta^{2\varepsilon n} \sum_{k=N_0}^{\infty} M\theta^{-2\varepsilon n} \theta^{-(\alpha-\varepsilon)k} h(k) \|x(k)\|
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 5.4.3 con $\gamma(n) = \theta^{-2\varepsilon n}$

$$\begin{aligned}
L(k) &= g(k) = Mh(k) \\
\bar{U}(n) &= \theta^{-(\alpha-\varepsilon)n} \|x(n)\| \\
\gamma(n+1) &= \theta^{-2\varepsilon(n+1)} < \theta^{-2\varepsilon n} = \gamma(n)
\end{aligned}$$

$\gamma(n)$ es decreciente.

$\gamma(n)\bar{U}(n)$ es acotada y $k = M\theta^{(\alpha-\varepsilon)m} \|w\|$.

Note que $\frac{\|x(n)\|}{\theta^{(\alpha-\varepsilon)n}}$ es acotada y por lo tanto, esto contradice el factor de que $x(n)$ tiene número de Lyapunov α .

Como $\frac{\|y(n)\|}{\theta^{\alpha n}}$ es acotada, entonces

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\|y(n)\|}{\theta^{\alpha n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\|y(n)\|}{\theta^{\alpha n}} < +\infty$$

y así

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\|x(n)\|}{\theta^{\alpha n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\|x(n)\|}{\theta^{\alpha n}} < \infty$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|x(n) - y(n)\|}{\theta^{\alpha n}}}{\frac{\|x(n)\|}{\theta^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\theta^{\alpha n}} = 0 \end{aligned}$$

Caso 2

$\bar{l} \geq 1$, de (5.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \|x(n)\| &\leq \|y(n)\| + \sum_{k=m}^n \|T(n, m)\bar{P}(k)f(k, x(k))\| \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \|T(n, k)\bar{Q}(k)f(k, x(k))\| \\ \frac{1}{n^{\bar{l}}\theta^{\alpha n}}\|x(n)\| &\leq \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\| \\ &\quad + \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}} \sum_{k=m}^n \|T(n, k)\bar{P}(k)f(k, x(k))\| \\ &\quad + \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}} \sum_{k=n}^{\infty} \|T(n, k)\bar{Q}(k)f(k, x(k))\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|x(n)\| &\leq \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\| + \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}} \sum_{k=m}^n Mn^{\bar{l}-1}K^{N-\bar{l}}\theta^{\alpha(n-k)}h(k)\|x(k)\| \\
&+ \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}} \sum_{k=n}^{\infty} Mn^{\bar{l}}K^{N-1-\bar{l}}h(k)\|x(k)\| \\
\frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|x(k)\| &\leq \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\| \sum_{k=m}^n Mh(k)K^{N-1} \left(\theta^{-\alpha k}\|x(k)\| \frac{1}{K^{\bar{l}-1}} \right) \\
&+ \frac{1}{n^{-1}} \sum_{k=n}^{\infty} K^{-1}Mh(k)K^{N-1} \left(\theta^{-\alpha k}\|x(k)\| \frac{1}{K^{\bar{l}-1}} \right) \\
&\leq \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\| \sum_{k=m}^{N_0} Mh(k)K^{N-1} \left(\theta^{-\alpha k}\|x(k)\| \frac{1}{K^{\bar{l}-1}} \right) \\
&+ \frac{1}{n^{-1}} \sum_{k=N_0}^{\infty} K^{-1}Mh(k)K^{N-1} \left(\theta^{-\alpha k}\|x(k)\| \frac{1}{K^{\bar{l}-1}} \right).
\end{aligned}$$

$$\text{Tomando } u(n) = \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|x(n)\|$$

$$\gamma(n) = n^{-1}$$

$$L(K) = g(k) = Mh(k)K^{N-1}.$$

Es claro que $\frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\|$ es no acotada.

Supongamos que $\frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|y(n)\| \leq L$ por el Lema 5.4.3 se sigue que $u(n) = \frac{1}{n^{\bar{l}-1}\theta^{\alpha n}}\|x(n)\|$ es acotada, lo cual contradice la definición de $\bar{l}$.

Luego, $u(n) = \frac{1}{n^{\bar{l}}\theta^{\alpha n}}$ es acotada lo cual, dice que

$$\begin{aligned}
0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\|x(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\|x(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} < +\infty \\
\Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\|y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\|y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} < +\infty
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|x(n) - y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}}}{\frac{\|x(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{n^{\bar{l}} \theta^{\alpha n}} = 0$$

5.5. Aplicaciones

En esta sección consideraremos dos ejemplos como ilustración de los resultados principales del trabajo que dividimos en dos importantes resultados, los cuales refieren al problema directo e indirecto de dimensión 2.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= Ay(n) \\
x(n+1) &= Ax(n) + f(n, x(n)), \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(n, x(n)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^p} \\ \frac{1}{n^p} \end{pmatrix}, \quad p > 1
\end{aligned}$$

A continuación mostraremos mediante el ejemplo la implicación directa del Teorema 5.3.1.

Consideremos $\theta = e$, entonces

$$e^{An} = I + nA = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1+n \end{pmatrix}$$

$$P(n) = e^{In} I e^{-In} = I$$

$$Q(n) = I - P(n) = 0$$

$$\|T(n, m)P(m)\| = 1 \leq Mn^{l-1}m^{N-1}e^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m \geq 1 \quad (5.33)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| = 0 \leq Mn^l m^{N-l-1}e^{\alpha(n-m)}, \quad m \geq n \geq 1 \quad (5.34)$$

Ecuación (5.33) $\Rightarrow 0 \leq l-1, 0 \leq N-1, 0 \leq \alpha, 0 \leq l \leq N-1$

Ec. (5.34) $\Rightarrow$ siempre se cumple.

Tomando $l = 1, N = 2, \alpha = 0$ $y(m) \cong n$

$$\begin{aligned} y(n) &= y(0) \\ x(n) &= x(0) + \sum_{k=0}^n f(k, x(k)) \end{aligned}$$

$$\|y(n) - x(n)\| \leq \|y(0) - x(0)\| + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^p}, \quad p > 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|y(n) - x(n)\|}{n}}{\frac{\|y(n)\|}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{n} = 0 \end{aligned}$$

Mostraremos mediante el ejemplo la implicación indirecta del Teorema 5.4.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C$$

$$e^{Bn} = I + Bn = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(n) = e^{Bn} B e^{-Bn} = \begin{pmatrix} 1-n^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(n) = I - P(n) = \begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{cn} = I + Cn = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+n \end{pmatrix}$$

$$S(n) = e^{cn} C e^{-cn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-n^2 \end{pmatrix}$$

$$U(n) = I - S(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^2 \end{pmatrix}$$

$$T(n, m) = A^{n-m} = I$$

$$\overline{P}(m) = \frac{1}{2}(P(m) + S(m))$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q}(m) &= \frac{1}{2}(Q(m) + U(m)) \\
T(n, m)\overline{P}(m) &= \frac{1}{2}(P(m) + S(m)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -m^2 & 0 \\ 0 & 1 - m^2 \end{pmatrix} \\
\overline{Q}(m) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m^2 + 1 & 0 \\ 0 & m^2 + 1 \end{pmatrix} \\
\|T(n, m)\overline{P}(m)\| &= \frac{1}{2}|1 - m^2| < \frac{1}{2}m^2 < m^2 \\
\|T(n, m)\overline{Q}(m)\| &= \frac{1}{2}(m^2 + 1) < \frac{2m^2}{2} = m^2
\end{aligned}$$

$$\|T(n, m)\overline{P}(m)\| < m^2 \leq kn^{l-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \theta = e, n \geq m \geq 1 \quad (5.35)$$

$$\|T(n, m)\overline{Q}(m)\| < m^2 \leq k\theta^{\alpha(n-m)}. \quad (5.36)$$

Ecuación (5.35) $\Rightarrow m^2 \leq k$ $0 < N - 1$, $0 \leq l \leq N - 1$, $\alpha \geq 0$

Ecuación (5.36) $\Rightarrow m^2 \leq k$, $\alpha \leq 0$

Tomamos $N = 2$ $l = 1$, $\alpha = 0$, $k = m^2$ $x(n) \cong n$

$$\begin{aligned} \|x(n) - y(n)\| &\leq \|x(0) - y(0)\| + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^p}, \quad p > 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|x(n) - y(n)\|}{n}}{\frac{\|x(n)\|}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{n} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Consideremos el siguiente sistema en diferencias:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= A(n)y(n), \quad n \in \mathbb{N}^* \\ x(n+1) &= A(n)x(n) + f(n, x(n)) \end{aligned}$$

A continuación mostraremos mediante el ejemplo la implicación directa del Teorema 5.3.1.

$$\text{donde } A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \quad f(n, x(n)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^p} \\ \frac{1}{n^p} \end{pmatrix}, \quad p > 1$$

usando las fórmulas de variación de parámetros

$$\begin{aligned} y(n) &= T(n, m)y(m), \quad n \geq m, \quad n, m \in \mathbb{N}^* \\ x(n) &= T(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^n T(n, k)f(k, x(k)), \quad n \geq m \end{aligned}$$

$$\triangle = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \geq m\}$$

$$T = \{T(n, m)\}_{(n, m) \in \triangle}$$

Definido por

$$T(n, m) = \begin{cases} A(n-1) \dots A(m), & n > m \\ I, & n = m, \end{cases}$$

de la misma manera, como está definida $A(n)$ y el operador de evolución $T(n, m)$ tenemos lo siguiente:

$$T(n, m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Definamos las proyecciones $P(n)$ y $Q(n)$ de la siguiente manera

$$P(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$Q(n) = I - P(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{\frac{-n(n-1)}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(n, m)P(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(n, m)Q(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{-\frac{m(m-1)}{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando $\|A(n)\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} |a_{ij}(n)|$

$$\|T(n, m)P(m)\| = \left| \frac{n(n-1)}{2} \right| < n^2 \leq Mn^{l-1}m^{N-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m > 1,$$

de esto, tenemos:

$$2 \leq l-1, \quad 0 \leq N-1, \quad 0 \leq \alpha, \quad 0 \leq l \leq N-1 \quad (5.41)$$

$$\|T(n, m)Q(m)\| = \left| \frac{m(m-1)}{2} \right| < m^2 \leq Mn^l m^{N-l-1} \theta^{\alpha(n-m)}, \quad m \geq n > 1,$$

de esta desigualdad se obtiene:

$$0 \leq l, \quad 0 \leq N-l-1, \quad 0 \leq \alpha, \quad 0 \leq l \leq N-1 \quad (5.42).$$

Tenemos que imponer condiciones sobre los valores l, N, α para que se cumplan (5.41) y (5.42) basta tomar $N = 6, \quad l = 3, \quad \alpha = 0$

$$y(n) = T(n, 0)y(0)$$

$$x(n) = T(n, 0)x(0) + \sum_{k=0}^n T(n, k)f(k, x(k)), \quad n \geq m$$

$$\|y(n) - x(n)\| \leq \|T(n, 0)\| \|y(0) - x(0)\| + \sum_{k=0}^n \|t(n, k)\| \|f(k, x(k))\|$$

$$\|y(n) - x(n)\| \leq n^2 \|y(0) - x(0)\| + n^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^p}$$

de la fórmula $y(n) \approx n^l \theta^{\alpha n} = n^3$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{\|y(n)\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\|y(n) - x(n)\|}{n^3}}{\frac{\|y(n)\|}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y(n) - x(n)\|}{n^3} = 0$$

■

Mostraremos mediante el ejemplo la implicación indirecta del Teorema 5.4.6.

Sabemos que:

$$\overline{P}(m) = \frac{1}{2}(P(m) + S(m))$$

$$\overline{Q}(m) = \frac{1}{2}(Q(m) + U(m))$$

podemos tomar $S(m) = 0$, $U(m) = 0$

$$T(n, m)\overline{P}(m) = \frac{1}{2}T(n, m)P(m)$$

$$T(n, m)\overline{Q}(m) = \frac{1}{2}T(n, m)Q(m)$$

$$\|T(n, m)\overline{P}(m)\| < n^2 \leq kn^{l-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad n \geq m > 1 \quad (5.43)$$

$$2 \leq l-1, \quad 0 \leq \alpha, \quad k = Mm^{N-1}, \quad 0 \leq l \leq N-1$$

$$\|T(n, m)\overline{Q}(m)\| < m^2 \leq kn^{l-1}\theta^{\alpha(n-m)}, \quad m \geq n > 1 \quad (5.44)$$

$$0 \leq l-1, \quad 0 \leq \alpha, \quad k = Mm^{N-1}, \quad 0 \leq l \leq N-1.$$

De (5.43) y (5.44) con $l = 3$, $\alpha = 0$, $N = 6$

$$x(n) \approx n^l \theta^{\alpha n} = n^3$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(n) - y(n)\|}{\|x(n)\|} = 0$$

■

Capítulo 6

Conclusiones

Creemos que el objetivo principal de este trabajo se alcanzó, presentar una versión discreta de los resultados de H. Leiva y H. Rodrigues, en [11], lo que constituyó un problema abierto desde la publicación de éste en el año 2001. Específicamente, se estudió el comportamiento asintótico relativo entre dos ecuaciones en diferencia finita, una lineal y otra semi-lineal, logrando resolver el problema directo y el problema inverso. Estos resultados están contenidos en los Teoremas 5.3.1 y 5.4.6, que se soportan en las definiciones de orden de una solución, exponentes de Lyapunov, dicotomía discreta generalizada y la desigualdad de Gronwall discreta generalizada. En este sentido cabe destacar que, la definición de dicotomía discreta generalizada tiene importancia en si misma ya que puede ser objeto de estudio independiente.

Problemas Abiertos

7.1. Problemas Abiertos

Este trabajo deja abierta una rendija a través de la cual podemos llegar al umbral de varios problemas de investigación.

Problema 1. *De formular una definición correcta de atractividad relativa para el caso de variable continua, se puede definir el atractor global relativo y estudiar su existencia.*

Problema 2. *Estudiar el comportamiento asintótico relativo para ecuaciones en escalas del tiempo (times scale). Problema éste formulado durante la celebración del Summer Meeting on Differential Equation 2015, San Carlos, Brasil.*

Problema 3. *Hacer un estudio de las dicotomía exponencial generalizada en ambos casos, continuo y el discreto. Como la Robutez y establecer la conexión entre ambas. Por ejemplo, probar que si un operador de evolución tiene dicotomía generalizad, entonces su discretización sobre el flujo tiene también dicotomía discreta generalizada, y viceversa.*

Bibliografía

- [1] F. Brauer and J.S. Wong. *On the asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations*. *J. Differential Equations* 6, pp. 527-543 (1969).
- [2] A. Carvalho, *Sistema dinâmicos não-lineares*, ICMC-USP, São Carlos, 2012.
- [3] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill Company, Inc. (1955)
- [4] W. A. Coppel. *Stability and Asymptotic Behavior in Differential Equations*, Heath Mathematical Monographs, Boston, (1965).
- [5] S. Chow and H. Leiva. *Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflows in Banach spaces*. *J. Differential Equations*, 120, pp. 429-477 (1995).
- [6] J.A. Goldstein. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford Univ. Press. New York, (1985).
- [7] D. Henry. *Geometric Theory of semilinear parabolic equations*. Springer, New York (1981).
- [8] A. F. Izé and A. Ventura. *Asymptotic behavior of a perturbed neutral functional-differential Equation related to the solution of the unperturbed linear system*. *Pacific J. Math.* N° 1, pp. 57-91 (1984).
- [9] V. Lakshmikantham and D. Trigiante. *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*. *Mathematics in Science and Engineering*. Vol. 181.

- [10] H. Leiva. *Stability of Periodic Solution for a Systems of Parabolic Equation. J. Applicable Analysis*, Vol. 60, pp. 277-300 (1996).
- [11] H. Leiva and H. Rodrigues. *Relative Asymptotic Equivalence of Evolution Equations. Non-linear Analysis* 47, pp. 4579-4590 (2001).
- [12] H. Leiva, E. Medina and N. Merentes. *Relative Asymptotic Equivalence between diffence Equations. Journal of Difference Equations and Applications*. vol. 21, N° 5, pp 418-436 (2015)
- [13] N. Onuchic. *Asymptotic relationships at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations. J. Differential Equations* 3, pp. 47-58 (1967).
- [14] K.L. Palmer. *Exponential Dichotomies and Transversal Homoclinic Points. Journal of Differential Equations* 55, pp. 225-256 (1984).
- [15] K.L. Palmer. *Exponential Dichotomies and Fredholm Operators. Proc. American Math. Society* 104, pp. 149-156 (1988).
- [16] A. Pazy. *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York* (1983).
- [17] H. M. Rodrigues. *Relative asymptotic equivalence with weight between two systems of ordinary differential equations. Dynamical Systems and International Symposium, Academic Press, Vol. 2, New York*, pp. 249-254 (1976).
- [18] H. M. Rodrigues. *On growth and decay of solutions of perturbed retarded linear equations. Tohoku Math. Journ.* 32, pp. 593-605 (1980).
- [19] H.M. Rodrigues and Ruas-Filho. *Homoclinics and Subharmonics of Nonlinear Two Dimensional Systems. Uniform Boundedness of Generalized Inverses. Dynamic Systems and Applications*, Vol. 33, pp. 379-394 (1994).
- [20] H.M. Rodrigues and J.G. Ruas-Filho. *Evolution Equations: Dichotomies and The Fredholm Alternative for Bounded Solutions. J. of Differential Equations*. Vol. 119-2, pp. 263-283 (1995).
- [21] H.M. Rodrigues and M. Silvera. *On the Relationships between Exponential Dichotomies and the Fredholm Alternative. Journal of Differential Equations* 73, pp. 78-81 (1988).
- [22] H.M. Rodrigues and M. Silvera. *Properties of Bounded Solutions linear and Nonlinear Evolution Equations. Journal of Differential Equations* 70, pp. 403-440 (1987).

-
- [23] *J. Wu. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Applied Math. Sciences N° 119, Springer-Verlag (1996).*