UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Núcleos Hermitianos de Toeplitz en espacios de Kreĭn

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Arturo Orazio Carreño Oliveri** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Ángel Padilla.

Caracas, Venezuela
Diciembre 2016

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Núcleos Hermitianos de Toeplitz**”, presentado por el **Br. Arturo Orazio Carreño Oliveri**, titular de la Cédula de Identidad **20.906.540**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ángel Padilla
Tutor

Ramón Bruzual
Jurado

Carlos González
Jurado

Dedicatoria

Al iniciar mis estudios universitarios en Septiembre de 2011 muy pocas personas creían en mi, daban de antemano que no podría lograr mis metas académicas, pero gracias a Dios y al destino tuve unos padres que confiaron ciegamente en mi, los cuales me apoyaban sin importar el momento, circunstancia o tropiezo que pudiera sobrevenir, a ellos dedico este trabajo.

Agradecimiento

Primero que nada le doy gracias a Dios por haberme dado la capacidad de entendimiento necesaria para poder optar a este título. A mis padres pues sin su apoyo en todos los sentidos nunca hubiera iniciado el camino de esta licenciatura; a mis nonos, su apoyo moral fue fundamental para impulsarme; a Don Martin Hidalgo, aunque hoy se encuentra en la paz del Señor su espíritu de guerrero fue una gran motivación y aun hoy se encuentra conmigo; A los profesores,los cuales invirtieron su tiempo en mi formación, en especial a Ángel padilla, Daniela Torrealba y Andrés Perez ; A mis compañeros de clases Juan, Jorge y Jobian los cuales hicieron este camino más transitable.

Resumen: En este trabajo especial de grado se estudiaran las propiedades de los Núcleos sobre espacios de operadores, utilizando los operadores Shift y los Núcleos de Teoplitz , finalizaremos con una condición de existencia para la dilatación de Naimark en en Espacios de Krein.

Palabras clave: Espacios de Krein, núcleos, Toeplitz, dilatación, Naimark, operadores, Shift, Hilbert, producto interno, descomposición.

Índice general

Introducción.

Este trabajo especial de grado está basado en el artículo ‘Representations of Hermitian Kernels by Means of Kreĭm Spaces’ por T. Constantinescu y A. Gheondea [1], publicado en 1997.

En los capítulos 1 y 2 se dará un repaso sobre Espacios de Hilbert y Espacios de Kreĭn respectivamente. Estos espacios son fundamentales para el desarrollo de este trabajo ya que toda su teoría está íntimamente relacionada con los objetivos principales de este Trabajo Especial de Grado. Se darán algunas características y resultados que relacionan a los espacios de Hilbert con los espacios de Kreĭn.

En el capítulo 3 se introducirán las definiciones de H-núcleos en espacios Kreĭn y algunas de sus características. A partir de estos núcleos se puede inducir un producto interno indefinido que será de mucha utilidad en todo el desarrollo de este Capítulo. Los H-núcleos son una familia de núcleos en espacios de Kreĭn que extienden toda la teoría de núcleos en espacios de Hilbert a valores operadores, por lo cual muchos resultados de teoría de operadores en espacios de Hilbert se pueden extender de manera natural a espacios de Kreĭn.

Finalmente, se trabajará con los núcleos de Toeplitz en espacios de Kreĭn y se darán algunos resultados que involucran a estos núcleos con los operadores shif. Se definirá lo que es una Dilatación de Naimark y se demostrará el resultado principal de este Trabajo que relaciona la dilatación de Naimark con los H-núcleos de Toeplitz.

Capítulo 1

Preliminares: Espacios de Hilbert.

1. Espacios con Producto Interno.

En este trabajo siempre que estemos hablando del cuerpo $\mathbb{K}$ nos estaremos refiriendo a el conjunto de los números reales o complejos ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* en X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que :

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in X$.

(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in X$.

(c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$.

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$.

(e) $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Además decimos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio con producto interno.*

Ejemplo 1.2. $\mathbb{C}^n$ el espacio de los vectores 1xn. $\mathbb{C}^n$ es un espacio con producto interno con el producto escalar euclídeo:

$$\langle u, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k}.$$

Donde $u, w \in \mathbb{C}^n$, $u = (u_1, ..., u_n)$,$w = (w_1, ..., w_n)$, y $\overline{w_k}$ es el conjugdo de w_k .

Ejemplo 1.3. Uno de los espacios con producto interno más conocido es el espacio $l_2(\mathbb{Z})$.

$$l_2(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C} \wedge \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty\}.$$

El producto interno en este espacio está dado por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}.$$

Una de las desigualdades de mayor utilidad en este trabajo será enunciada en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4. *(Desigualdad de Cauchy Schwartz)(ver [6])*

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio con producto interno, entonces para todo* $x, y \in X$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración:

Sean $x, y \in X$. Entonces:

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

por lo tanto:

$$\langle x, x\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle - 2\lambda \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

esto ocurre solo si el discriminante de la parábola es no positivo, es decir:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

De esta ultima desigualdad se concluye el resultado. ■

DEFINICIÓN 1.5. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en X es una función $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.

(b) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Llamaremos al par $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado o simplemente diremos que X es normado.

La siguiente proposición nos permite definir a partir de un producto interno una norma.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio con producto interno. Si definimos:*

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

entonces $\| \cdot \|$ *es una norma en* X.

DEFINICIÓN 1.7. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y sea Λ una familia de índices. Un subconjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X se llama *ortogonal* si:

$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in \Lambda \quad \text{y} \quad \alpha \neq \beta.$$

DEFINICIÓN 1.8. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con peroducto interno y sea Λ una familia de índices. Un subconjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X se llama *ortonormal* si $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ donde:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 1.9. *(Ver [8] Pitagoras) Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $x \in X$ tal que:*

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k,$$

donde c_k son escalares y $u_k \in X$ con $1 \leq k \leq n$, entonces si $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ es ortogonal tenemos:

$$\|x\|^2 = x = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|u_k\|^2$$

2. Espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.10. Sea X un espacio normado, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si:

$$\text{Para cada} \quad \epsilon > 0 \quad \text{existe} \quad N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que si} \quad n, m > N \quad \text{entonces} \quad ||x_n - x_m|| < \epsilon.$$

DEFINICIÓN 1.11. Sea X un espacio normado, decimos que X es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en X.

DEFINICIÓN 1.12. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial que es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno.

EJEMPLO 1.13. El espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto interno dado en el Ejemplo 1.2 es un espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.14. Dado un espacio de Hilbert H y una variedad lineal M de H, el *ortogonal* de M es el conjunto:

$$M^\perp = \{z \in H : \langle z, x\rangle = 0, \forall x \in M\}.$$

PROPOSICIÓN 1.15. *(Ver [6]) Sea H un espacio de Hilbert y M una variedad lineal de H entonces $M^\perp$ es un subespacio (cerrado) de H.*

Una característica interesante de los espacios de Hilbert, es que, conociendo el ortogonal de un subespacio cerrado, podemos reescribir al espacio como una suma directa. Esto se mostrara en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.16. *Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio (cerrado) de H entonces:*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

donde $M^{\perp}$ es un subespacio (cerrado) de H, que es perpendicular a M.

PROPOSICIÓN 1.17. *En un espacio de Hilbert el único vector que es ortogonal a todos los vectores es el vector cero.*

Demostración: Sea H un espacio de Hilbert y sea $x \in H$ tal que $\langle x, z \rangle = 0$ para todo $z \in H$. En particular tomando $z = x$ tenemos que $\langle x, x \rangle = 0$, por propiedades de producto interno $x = 0$.

3. Operadores lineales en espacios de Hilbert.

En esta sección definiremos los distintos tipos de operadores con los que estaremos trabajando en espacios de Hilbert, ademas demostremos el teorema de representación de Riez, el cual relaciona los funcionales lineales con el producto interno del espacio.

Observación: X, Y seran siempre dos espacios normados (Sobre el mismo cuerpo de escalares).

DEFINICIÓN 1.18. Sea $T : X \to Y$ decimos que T es lineal si:

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in X \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

El conjunto de todos los operadores lineales de X en Y será denotado por $\mathscr{L}(X, Y)$.

En el caso de que $X = Y$, en vez de usar $\mathscr{L}(X, X)$ se usará $\mathscr{L}(X)$.

DEFINICIÓN 1.19. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Decimos que T es un operador acotado si existe $C > 0$ tal que:

$$||T(x)||_Y \leq C||x||_X \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Ahora enunciaremos un resultado clásico de análisis, el cual nos proporciona una condición equivalente de continuidad sobre los operadores lineales.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *T es continuo.*

(ii) *T es un operador acotado.*

Demostración:

$(ii) \mapsto (i)$ Como T es acotado existe $C > 0$ tal que $||T(x)||_Y \leq C||x||_X$ para todo $x \in X$. Para ver que T es continua en cualquier x_0 debemos ver que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||x - x_0||_X < \delta$ entonces $||T(x) - T(x_0)||_Y = ||T(x - x_0)||_Y < \epsilon$. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ el resutado es directo.

$(i) \mapsto (ii)$ Realizemos esta prueba por contradicción, es decir, supongamos que T no es acotado, por lo cual para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un elemento $x_n \in X$ tal que: $\|T(x_n)\|_Y > n\|x_n\|_X$.

Cosideremos ahora el vector $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, por lo cual $\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$, así $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Como T es continua $\|T(y_n)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado se tiene que

$$||T(y_n)||_Y = \frac{||T(x_n)||_Y}{n||x_n||_X} > \frac{n\|x_n\|_X}{n||x_n||_X} = 1,$$

lo cual contradice el hecho anterior, así, T debe ser acotada. ■

3.1. Operadores adjuntos.

DEFINICIÓN 1.21. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno, y sea $T : X \to X$ un operador lineal, el *adjunto* de T es el operador lineal $T^* : X \to X$, que satisface:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad \text{para todo} \quad x, y \in X.$$

Ejemplo: Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ con el producto interno definido de la siguiente forma $\langle (x, y), (z, w) \rangle = xz + yw$, y sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x + y, 2y)$, entonces:

$$\langle T(x, y), (z, w) \rangle = \langle (3x + y, 2y), (z, w) \rangle = 3xz + yz + 2yw.$$

$$= x(3z) + y(z + 2w) = \langle (x, y), (3z, z + 2w) \rangle.$$

Así, $T^*(x,y) = (3x, x+2y)$.

Observación 1.22. En los espacios de Hilbert, la existencia del adjunto de un operador siempre está garantizada y además las normas del operador y de su adjunto coinciden (Ver [6])

Definición 1.23. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sea T un operador lineal, si $T^* = T$ entonces decimos que T es *autoadjunto*.

Ejemplo: Consideremos el mismo espacio y producto interno del ejemplo anterior, sea $T(x,y) = (x+y, x-y)$ entonces:

$$\begin{aligned}\langle T(x,y),(z,w)\rangle &= \langle (x+y,x-y),(z,w)\rangle = xz+yz+xw-yw\\ &= x(z+w)+y(z-w) = \langle (x,y),(z+w,z-w)\rangle\\ &= \langle (x,y),T(z,w)\rangle.\end{aligned}$$

En conclusión $T^* = T$.

3.2. Teorema de Representación de Riesz.

Proposición 1.24. *Sea H un espacio de Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $y \in H$ y $f : H \to \mathbb{K}$ dada por:*

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \text{ para todo } x \in H.$$

Entonces f es un funcional lineal continuo en H.

Demostración: Veamos que f es lineal, sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w, z \in H$ entonces:

$$f(\lambda w + z) = \langle \lambda w + z, y\rangle = \langle \lambda w, y\rangle + \langle z, y\rangle = \lambda\langle w, y\rangle + \langle z, y\rangle = \lambda f(w) + f(z).$$

Veamos ahora que f es continuo:

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \| y \|\| x \| .$$

Así, por la Proposición 1.19 f es continuo.■

El siguiente teorema muestra que el reciproco de la proposición anterior es cierto. Ádemas sera usada en el capitulo 3.

TEOREMA 1.25 (Teorema de representación de Riesz). *(ver[7])*

Sea H un espacio de Hilbert y f un funcional lineal continuo en H entonces existe un único $y \in H$ tal que:

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ , para todo } x \in H.$$

Demostración:

Si $f = 0$ basta tomar $y = 0$.

si $f \neq 0$, consideremos:

$$M = ker(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Como $f \neq 0$ se tiene que M es un subespacio propio de H, por lo tanto $M^{\perp}$ no es trivial.

Sea $z \in M^{\perp}$ tal que $\| z \| = 1$, asi tenemos que $f(z) \neq 0$.

Sea $x \in H$ entonces:

$$f(x - \frac{f(x)}{f(z)} z) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0.$$

Luego:

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M.$$

Y así:

$$0 = \langle x - \frac{f(x)}{f(z)} z, z \rangle = \langle x, z \rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z \rangle = \langle x, z \rangle - \frac{f(x)}{f(z)}.$$

De donde:

$$f(x) = f(z) \langle x, z \rangle = \langle x, \overline{f(z)} z \rangle.$$

Asi la representación se obtiene tomando:

$$y = \overline{f(z)} z.$$

Veamos la unicidad. Supongamos que existen $y_1, y_2 \in H$ tales que:

$$f(x) = \langle x, y_1 \rangle \text{ y } f(x) = \langle x, y_2 \rangle.$$

para todo $x \in H$. Entonces:

$$0 = f(x) - f(x) = \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_2 \rangle = \langle x, y_1 - y_2 \rangle.$$

Para todo $x \in H$. Por concecuencia de la Proposición 1.16 $y_1 = y_2$.■

Terminaremos este capítulo definiendo otros tipos de operadores que son muy conocidos.

Definición 1.26. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathscr{L}(H)$:

(i) T es normal si $TT^* = T^*T$.

(ii) T es unitario si $TT^* = T^*T = I$.

(iii) T es isométrico si $\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ para todo $x \in X$.

Capítulo 2

Espacios de Kreĭn.

Como vimos en el primer capítulo los espacios con producto internos tinen cualidades interesantes, por ejemplo, la posibilidad de definir una norma a partir de el, o el importante teorema de representación de Riezs. Ahora estudiaremos las propiedades que se conservan al permitirle al producto interno no ser definido positivo.

1. Producto interno indefinido.

Definición 2.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno indefinido* en X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que :

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in X$.

(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in X$.

(c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$.

Además diremos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio con producto interno indefinido.*

A partir de ahora cada vez que nos estemos refiriendo a un producto interno indefinido diremos simplemente, producto interno o espacio con producto interno.

Ejemplo: Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$, podemos definir un producto interno mediante la fórmula $\langle (x, y), (z, w) \rangle = xz - yw$.

Definición 2.2. Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ y $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ espacios con productos internos. X e Y son llamados *isométricamente isomorfos* si existe $T : X \to Y$ biyectivo tal que:

(a) $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$ con $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

(b) $\langle T(x), T(y) \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X$ para todo $x, y \in X$.

T es llamado *isomorfismo isométrico* entre X e Y.

Observación: El conjunto $\{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ es conocido como la diagonal del producto interno y como veremos en la siguiente proposición, basta conocer la diagonal de un producto interno para conocer su comportamiento en todo el espacio.

PROPOSICIÓN 2.3. *(Identidad de polarización)(ver [5]) Si* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio con producto interno, entonces:*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle + i\langle x+iy,x+iy\rangle - i\langle x-iy,x-iy\rangle).$$

Demostración:

Veamos como son los elementos de la parte derecha de la igualdad:

$$\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle.$$

$$-\langle x-y,x-y\rangle = -\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle.$$

$$i\langle x+iy,x+iy\rangle = i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - i\langle y,y\rangle.$$

$$-i\langle x-iy,x-iy\rangle = -i\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + i\langle y,y\rangle.$$

Al sumar estos terminos tenemos como resultado $4\langle x,y\rangle$ lo cual implica la igualdad . ■

Es natural por la definición de producto interno hablar de vectores positivos, negativos y neutros.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $(X, \langle.,.\rangle)$ es un espacio con producto interno, sea $x \in X$ decimos que:

(a) x es *negativo* si $\langle x,x\rangle < 0$.

(b) x es *positivo* si $\langle x,x\rangle > 0$.

(c) x es *neutro* si $\langle x,x\rangle = 0$.

Ademas definimos los siguientes conjuntos:

(a) $\mathcal{B}^0 = \{x \in X : \langle x,x\rangle = 0\}$.

(b) $\mathcal{B}^{00} = \{x \in X : \langle x,x\rangle = 0 \wedge x \neq 0\}$.

(c) $\mathcal{B}^+ = \{x \in X : \langle x,x\rangle \geq 0\}$.

(d) $\mathcal{B}^{++} = \{x \in X : \langle x,x\rangle > 0\}$.

(e) $\mathcal{B}^- = \{x \in X : \langle x,x\rangle \leq 0\}$.

(f) $\mathcal{B}^{--} = \{x \in X : \langle x,x\rangle < 0\}$.

Ádemas se dice que X es *indefinido* si posee tanto vectores positivos como negativos.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interno indefinido, entonces* X *posee vectores neutros no nulos.*

Demostración:

Sean $x, y \in X$ tales que $\langle x, x\rangle > 0$ y $\langle y, y\rangle < 0$.

Tomemos $z = x + \lambda y$, donde λ es la solución real de la ecuación:

$$\langle x, x\rangle + 2t\mathrm{Re}\langle x, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = 0.$$

La ecuación anterior tiene solución real ya que el discriminante de la misma es:

$$\Delta = 4(\mathrm{Re}\langle x, x\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle > 0,$$

pues x es positivo e y es negativo.

Entonces $\langle z, z\rangle = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\mathrm{Re}\langle x, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle = 0$.

Si suponemos que $z = 0$ implicaría que $\langle x, x\rangle = |\lambda|^2\langle y, y\rangle$, lo cual es una contradicción, pues $\langle x, x\rangle$ es positivo y $\langle y, y\rangle$ es negativo.

De donde $z \neq 0$, en conclusion X posee un vector neutro no nulo. ■

Definición 2.6. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno, decimos que es *semidefinido* si no es indefinido.

Según la definición anterior, la Prosición 2.5 se puede enunciar de la siguiente manera:

Proposición 2.7. *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Si X no posee vectores neutors no nulos entonces X es semidefinido.*

El siguiente resultado generaliza la deigualdad de Cauchy-Schwartz para este tipo de producto interno.

Proposición 2.8. *(Desigualdad de Cauchy Schwartz.)*

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno semidefinido, entonces para todo $x, y \in X$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle y, y\rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración:

Como el espacio es semidefinido, la prueba de esta proposición es análoga a la de la Proposición 1.4. ■

Definición 2.9. Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno, decimos que es *definido* si $\langle x, x\rangle = 0$ implica que $x = 0$.

2. Vectores isotrópicos.

EJEMPLO 2.10. Sea X un espacio vectorial de dimension 2 con base $\{e_1, e_2\}$. Definimos un producto interno sobre X con la relación $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, $\langle e_1, e_1\rangle = 1$ y $\langle e_2, e_2\rangle = -1$.

Tomemos al subespacio de dimensión 1 dado por L =Spam$(e_1 + e_2)$ (El Spam es la variedad lineal generada por los elementos involucrados). Es facil comprobar que $L = L^{\perp}$. Esto nos muestra dos cosas:

a) La intersección de un subespacio con su ortogonal puede ser distinto del vector cero.

b) A diferencias de los espacios de Hilbert, en espacios con producto interno indefinido no necesariamente se cumple la Proposición 1.14, esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.11. Sea L un subespacio de un $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. El subespacio $L \cap L^{\perp}$ sera denotado por L^0, y lo llamaremos *parte isotrópica* de L, y sus elementos como *vectores isotrópicos*. Si $L^0 \neq 0$, diremos que L es *degenerado* o que es un espacio con producto interno *degenerado*.

El siguiente resultado es una concecuencia de la definición anterior.

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea L un subespacio de un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, sean $n \in \mathbb{N}$ y L_i con $1 \leq i \leq n$ subespacios. Si $L = L_1 \oplus ... \oplus L_n$ entonces $L^0 = L_1^0 \oplus ... \oplus L_n^0$.*

Demostración:

Sea $m \in L^0$, entonces $m \in L \cap L^{\perp}$, como $m \in L$ tenemos que:

$$m = m_1 + m_2 + ... + m_n, \quad m_i \in L_i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Primero veamos que $m_i \in L_i^{\perp}$, con $1 \leq i \leq n$. Sea $l \in L_i$ un vector arbitrario, debemos ver que $\langle m_i, l\rangle = 0$. Es calro que $l \in L$ y como $m \in L^{\perp}$:

$$0 = \langle m, l\rangle = \langle (m_1 + m_2 + ... + m_n), l\rangle.$$

$$= \langle m_1, l\rangle + \langle m_2, l\rangle + ... + \langle m_n, l\rangle.$$

Como L es la suma directa de los subespacion L_i con $1 \leq i \leq n$ ocurre que $\langle m_k, l\rangle = 0$ con $1 \leq k \leq n$ y $k \neq i$, asi:

$$0 = \langle m_1, l\rangle + ... + \langle m_i, l\rangle + ... + \langle m_n, l\rangle.$$

$$= 0 + 0 + ... + \langle m_i, l\rangle + 0 + ... + 0 = \langle m_i, l\rangle.$$

En conclusión $m_i \in L_i \cap L_i^0$. Por ultimo veremos que $L_j^0 \perp L_k^0$ para $j \neq k$. Sean $x \in L_j^0$ y $y \in L_k^0$.

Como $x \in L_j$ e $y \in L_k$ y $L_j \perp L_k$ se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$, por lo tanto $L_j^0 \perp L_k^0$.■

Proposición 2.13. *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno semidefinido, entonces X^0 coincide con el conjunto de los vectores neutros de X.*

Demostración:

Claramente $X^0 \subset \{x \in X : \langle x, x\rangle = 0\}$. Veamos que $\{x \in X : \langle x, x\rangle = 0\} \subset X^0$. Sea x un vector neutro, usando la Proposición 2.8 para cualquier $y \in X$ tenemos:

$$|\langle x, y\rangle| \leq |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}} |\langle y, y\rangle|^{\frac{1}{2}} = 0|\langle y, y\rangle|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

lo cual implica que $\langle x, y\rangle = 0$. Asi queda demostrada la proposición. ■

Observación: El siguiente resultado es de vital importancia a la hora de obtener un espacio con producto interno definido de uno con producto interno semidefinido, lo usaremos en el resultado principal de este trabajo, pero antes definamos lo que es un espacio cociente.

Definición 2.14. Sea X un espacio vectorial y M un subespacio de X. Definimos al espacio cociente de X con respecto a M como:

$$X/M = \{x + M : x \in X\}.$$

Los elementos del espacio cociente serán representados de la siguiente forma $\overline{x} = x + M$.

Ejemplo: Consideremos $\mathbb{R}^3$ y su subespacio $M = \{(m, m, m) \in \mathbb{R}^3 : m \in \mathbb{R}\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3/M &= \{(x, y, x) + M\}. \\ &= \{(x, y, x) + (m, m, m) : m \in \mathbb{R}\}. \\ &= \{(x + m, y + m, x + m) : m \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

El espacio cociente en este ejemplo representa una translación de los puntos del plano por medio de la diagonal.

Proposición 2.15. *(Ver [5]) Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno, entonces el espacio cociente X/X^0 es un espacio con producto interno donde el producto interno esta dado por la extencion continua del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir $\langle\overline{x}, \overline{y}\rangle_{X/X^0} = \langle x, y\rangle$.*

Demostración:

Por la manera como definimos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X/X^0}$ las propiedades de producto interno se cumplen, por lo cual basta demostrar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X/X^0}$ esta bien definido, veamoslo:

Sean $\overline{x}$,$\overline{y} \in X/X^0$ donde $x, y \in X$ son representantes de $\overline{x}$ y $\overline{y}$ respectivamente. Ahora, sean $x_1, x_2 \in \overline{x}$ y $y_1, y_2 \in \overline{y}$. Entonces $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in X^0$, se sigue que:

$$\langle\overline{x_1},\overline{y_1}\rangle_{X/X^0} - \langle\overline{x_2},\overline{y_2}\rangle_{X/X^0} = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 - x_2, y_1\rangle + \langle x_2, y_1 - y_2\rangle = 0.$$

Concluimos así, que el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X/X^0}$ esta bien definido. ■

3. Descomposición fundamental.

DEFINICIÓN 2.16. Un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se dice *descomponible* si este puede ser representado como la suma directa ortogonal de un subespacio neutro S, uno definido positivo X^+ y uno definido negativo X^-:

$$X = S \oplus X^+ \oplus X^-. \tag{2.1}$$

Cualquier descomposición de este tipo es llamada *descomposición fundamental* de X.

PROPOSICIÓN 2.17. *Sea X un espacio con producto interno semidefinido. Si S, X^+, X^- satisfacen la ecuación (2.1) entonces S^0 coincide con la parte isotrópica de X.*

Demostración:

Se sabe que $X = S \oplus X^+ \oplus X^-$, por la Proposición 2.12:

$$X^0 = S^0 \oplus (X^+)^0 \oplus (X^-)^0.$$

Como X^+ y X^- son subespacios definidos, por consecuencia de la Proposición 2.13 sus partes isotrópicas son cero, de donde $X^0 = S^0$.■

COROLARIO 2.18. *Cualquier descomposición de un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ no degenerado es de la forma:*

$$X = X^+ \oplus X^-; X^+ \subset \mathcal{B}^{++}; X^- \subset \mathcal{B}^{--}.$$

3.1. Operadores adjuntos en espacios con producto interno indefinido. .

Análogamente, a la sección de operadores adjuntos en espacios de Hilbert podemos definir operadores adjuntos en espacios con producto interno indefinido. Para mostrar esta diferencia denotaremos al adjunto de un operador T en un espacio con producto interno indefinido por $T^{\#}$.

Un aplicación de los operadores autoadjuntos es que, a partir de ellos se puede generar un nuevo tipo de producto interno, este hecho será expresado en el siguiente resultado.

Proposición 2.19. *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sea T un operador autoadjunto entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle_T : X \times X \to \mathbb{K}$ definido por $\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), y\rangle$ es un producto interno.*

Demostración:

Veamos la linealidad, sean $x, y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + y, z\rangle_T = \langle T(\lambda x + y), z\rangle &= \langle \lambda T(x) + T(y), z\rangle. \\ &= \lambda\langle T(x), z\rangle + \langle T(y), z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle_T + \langle y, z\rangle_T.\end{aligned}$$

Veamos ahora la propiedad del conjugado:

$$\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle_T}.$$

Hemos comprobado asi que $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ es un producto interno.■

4. Espacios de Kreĭn.

Definición 2.20. Si un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ admite una descomposición fundamental de la forma:

$$X = X^+ \oplus X^-; X^+ \subset \mathcal{B}^{++}; X^- \subset \mathcal{B}^{--}. \tag{2.2}$$

Donde $(X^+, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(X^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son espacios de Hilbert, entonces nosotros diremos que X es un espacio de Kreĭn.

Definición 2.21.

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Kreĭn con descomposición fundamental como en (2.2). Sea $x \in X$ con $x = x^+ + x^-$, donde $x^+ \in X^+$ y $x^- \in X^-$.

Definimos la simetría fundamental a la descomposición anterior como el operador $J : X \to X$ dado por:

$$J(x) = J(x^+ + x^-) = x^+ - x^-$$

PROPOSICIÓN 2.22. *La simetria fundamental es un operador autoadjunto definido positivo.*

Demostración:

Veamos primero que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es definido positivo.

Sean $x, y \in X$ con $x \neq 0$. Como X es de Kreĭn posee una descomposición como en (2.2), de manera que $x = x^+ + x^-$ e $y = y^+ + y^-$,donde $x^+, y^+ \in X^+$ y $x^-, y^- \in X^-$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_J = \langle Jx, x \rangle = \langle x_+ + x_-, x_+ + x_- \rangle_J. \\ = \langle x_+ - x_-, x_+ + x_- \rangle = \langle x_+, x_+ \rangle - \langle x_-, x_- \rangle. \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ al menos un miembro de la suma anterior de terminos no negativos es distinto de cero, asi, $\langle x, x \rangle_J > 0$.

Ahora:

$$\langle J(x), y \rangle = \langle x^+ - x^-, y^+ + y^- \rangle = \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^-, y^- \rangle = \langle x^+ + x^-, y^+ - y^- \rangle = \langle x, J(y) \rangle. \blacksquare$$

Gracias a esta última proposición tenemos el siguiente resultado:

Colorario: Sea X un espacio de Kreĭn como en (2.2). La norma inducida por la simetría funadamental J es

$$\| \cdot \|_J = \sqrt{\langle J \cdot, \cdot \rangle},$$

y será conocida como la J-norma.

Un resultado que se sigue de manera directa por la definición de espacios de Kreĭn y por la proposición anterior es el siguiente colorario, el cual conecta a los espacios de Kreĭn con los espacios de Hilbert.

COROLARIO 2.23. *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Kreĭn y sea J una simetria fundamental entonces $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_J)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración:

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy con respecto a la J-norma .

Por la ecuación (2.2), existen sucesiones $(x_n^+)_{n\geq 1} \subset X^+$ y$(x_n^-)_{n\geq 1} \subset X^-$ tales que

$$x_n = x_n^+ + x_n^- \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además, por la Propososición (1.9) se tiene que para todo $n \geq 1$,

$$\|x_n^+\| \leq \|x_n\| \quad \text{y} \quad \|x_n^-\| \leq \|x_n\|$$

por lo cual $(x_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy.

Como la descomposición fundamental esta conformada por subespacios completos, por ser de Hilbert, las sucesiones de Cauchy anteriores convergen en el espacio, concluimos asi que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en X, y en concecuencia $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_J)$ es un espacio de Hilbert.■

Teorema 2.24. *(Ver [8]) Sea X un espacio con producto interno no degenrado y descomponibe. Sean*

$$X = X_1^+ \oplus X_1^-; \quad X_1^+ \subset \mathcal{B}^{++}; \quad X_1^- \subset \mathcal{B}^{--},$$

y

$$X = X_2^+ \oplus X_2^-; \quad X_2^+ \subset \mathcal{B}^{++}; \quad X_2^- \subset \mathcal{B}^{--},$$

dos descomposiciones fundamentales. Si $(X_1^+, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(X_1^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son espacios de Hilbert entonces $(X_2^+, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(X_2^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son espacios de Hilbert, y las normas inducidas por las simetrías fundamentales son equivalentes.

A partir de ahora cuando digamos que un operador es continuo, nos referimos a que es continuo con respecto a la topología inducida por el anterior producto interno. Ádemas la norma inducida por este producto interno sera llamada la norma unitaria asociada a la simetría fundamental J.

Terminamos esta sección definiendo tres tipos de operadores que seran utilizados en el proximo capítulo.

Definición 2.25. Sean $(X_1, \langle .,. \rangle_1)$ y $(X_2, \langle .,. \rangle_2)$ espacios de Kreĭn y sea T un operador lineal y continuo de X_1 en X_2 decimos que:

(a) T es contracctivo si $\langle T(x), T(x)\rangle_1 \leq \langle x, x\rangle_2$ para todo $x \in X$.

(b) T es isométrico si $\langle T(x), T(y)\rangle_1 = \langle x, y\rangle_2$ para todo $x, y \in X$ o que $T^{\#}T = I$ (I es el operador indentidad).

(c) T es unitario si es isométrico y sobreyectivo, o que $T^{\#}T = TT^{\#} = I$.

Proposición 2.26. *Sea X un espacio con producto interno semidefinido y $T \in \mathscr{L}(X)$ un operador contractivo. Entonces $|\langle Tx, x\rangle| \leq |\langle x, x\rangle|$.*

Demostracion:

Sea $x \in X$, como el espacio es semidefinido, en virtud de la Proposición 2.8 se tiene:

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq |\langle Tx, Tx\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}} \leq |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}} = |\langle x, x\rangle| \blacksquare.$$

Capítulo 3

$\mathscr{H}$-Núcleos de Toeplitz y dilatación de Naimark.

1. El espacio de Kreĭn $\mathcal{K}_A$.

A partir de ahora cualquier producto interno asociado a un espacio de Kreĭn será denotado de la siguiente forma $[\cdot,\cdot]$.

En lo que sigue A representara un operador autoadjunto y de contracción. Antes de iniciar la construcción de $\mathcal{K}_A$ enunciaremos un lema el cual no demostraremos debido a que se usan nociones de teoría espectral de operadores.

Lema 3.1. *(Ver [2]) Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ una contracción autoadjunta, entonces existen dos contracciones autoadjuntas A_+ y A_- en $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ tales que: A_+ y A_- son no negativas y $A = A_+ - A_-$.*

Esta descomposición del operador A es conocida como descomposición de Jordan.

Ahora haremos la construcción de un espacio de Kreĭn que tedra una gran importancia en el último resultado de este trabajo, para ver su construcción en detalle recomendamos ver [2].

Sean K un espacio de Krein y $A \in \mathscr{L}(K)$ un operador autoadjunto. Sea $[\cdot,\cdot]_A$ el producto interno asociado a A es decir:

$$[x,y]_A = [A(x),y], x, y \in K.$$

donde $[\cdot,\cdot]$ denota el producto interno del espacio de Krein K.

Proposición: El Ker(A) es un subespacio de la parte isotrópica del espacio con producto interno $(K,[\cdot,\cdot]_A)$.

Demostración:

Sea $x \in Ker(A)$, entones para todo $y \in K$ se tiene que:

$$[x,y]_A = [A(x),y] = [0,y] = 0,$$

por lo tanto $x \in K^0$.■

Sea J la simetría fundamental del espacio de Kreĭn K, y sea $\hat{K} = J(\mathrm{Ker}A)^{\perp}$. Consideremos la descomposición de Jordan del operador autoadjunto JA con respecto al espacio de Hilbert $(K, [\cdot,\cdot]_J)$:

$$JA = (JA)_+ \oplus (JA)_-.$$

y denotemos por $\hat{K}_+ = \overline{(JA)_+K}$ y $\hat{K}_- = \overline{(JA)_-K}$, asi tenemos la descomposición:

$$\hat{K} = \hat{K}_+ \oplus \hat{K}_-. \tag{3.1}$$

Notemos que los espacios $(\hat{K}_+, [\cdot,\cdot]_A)$ y $(\hat{K}_-, -[\cdot,\cdot]_A)$ son semidefinidos positivos.

Se denotará por K_A^+ y K_A^- la completación a espacios de Hilbert, de los espacios cocientes de $\hat{K}_+$ y $\hat{K}_-$ con la parte isotrópica de los mismos (Estamos haciendo uso de la Proposición 2.15) definimos:

$$\mathcal{K}_A = K_A^+ \oplus K_A^-. \tag{3.2}$$

Definición 3.2. Sean K un espacio de Kreĭn y $A \in \mathscr{L}(K)$ una contracción autoadjunta. Definimos el operador $|A| = A_+ - A_-$. Donde A_+ y A_- son los operadores proporcionados por la descomposición de Jordan.

Ahora es natural preguntarse como es la norma de este espacio $\mathcal{K}_A$, esta pregunta será respondida en el siguiente resultado. Por notación se usará:

$$[Ax, x] = [A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x].$$

Proposición 3.3. *Sea $\|\cdot\|$ la norma unitaria asociada a la simetría fundamental J. Entonces la norma unitaria asociada al espacio de Krein $\mathcal{K}_A$ correspondiente a la descomposición fundamental (3.2) es la extensión continua de la norma:*

$$x \to |||JA|^{\frac{1}{2}}x|| \quad x \in \hat{K}.$$

Demostración:

Sea x un vector de $\hat{K}$, recordando la ecuación (3.1) tenemos que $x = x_+ + x_-$ donde $x_+ \in \hat{K}_+ \subseteq K_A^+$ y $x_- \in \hat{K}_- \subseteq K_A^-$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& [x_+, x_+]_A - [x_-, x_-]_A = [Ax_+, x_+] - [Ax_-, x_-] = [(JA)_+ x_+, x_+]_J + [(JA)_- x_-, x_-]_J. \\
= \quad & [((JA)_+ + (JA)_-)(x_+ + x_-), (x_+ + x_-)]_J = [|JA|(x_+ + x_-), x_+ + x_-]_J. \\
= \quad & [|JA|^{\frac{1}{2}} x, |JA|^{\frac{1}{2}} x]_J = |||JA|^{\frac{1}{2}} x||^2.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que la norma unitaria correspondiente a la descomposición (3.2) cuando restringe sobre $\hat{K}$ coincide con la norma $|||JA|^{\frac{1}{2}}x||^2$. El resto de la prueba se concluye de la densidad de $\hat{K}$ sobre $\mathcal{K}_A$.■

Teorema 3.4. *(Ver [2]) Sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ espacios de Kreĭn y sea $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1)$, $A = A^{\#}$, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2)$, $B = B^{\#}$, $T_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, y $T_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ tal que:*

$$[T_1(x), y]_B = [x, T_2(y)]_A, x \in \mathscr{H}_1, y \in \mathscr{H}_2.$$

O equivalentemente $T_2^{\#} A = BT_1$. Entonces existen únicos operadores $\tilde{T}_1 \in \mathscr{L}(\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B)$ y $\tilde{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{K}_B, \mathcal{K}_A)$ tal que:

$$[\tilde{T}_1(x), y]_B = [x, \tilde{T}_2(y)]_A, x \in \mathcal{K}_A, y \in \mathcal{K}_B.$$

Observación: los operadores $\tilde{T}_1$ y $\tilde{T}_2$ son extensiones de los operadores T_1 y T_2 y conservan sus características básicas.

2. ℍ-Núcleos.

Definición 3.5. Sean Λ un conjunto de índices y $\mathbb{H} = \{\mathscr{H}_j\}_{j \in \lambda}$ una familia de espacios de Kreĭn con producto interno indefinido, denotado por $[\cdot, \cdot]_{\mathscr{H}_j}$. Una función H definida sobre $\Lambda \mathrm{x} \Lambda$ tal que $H(i,j) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_j, \mathscr{H}_i)$ para todo $i, j \in \Lambda$ es llamada un ℍ-*Núcleo.*

El ℍ-Núcleo H es llamado *hermitiano* si:

$$H(i,j) = H(j,i)^{\#} \quad \text{para todo} \quad i, j \in \Lambda.$$

Definición 3.6. Sean

$$\mathscr{F}(\mathbb{H}) = \{f = (f(i))_{i \in \Lambda} : f(i) \in \mathscr{H}_i \quad \text{para todo} \quad i \in \Lambda\}$$

y

$$\mathscr{F}_0(\mathbb{H}) = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{H}) : \text{soporte}(f) \quad \text{es finito}\},$$

donde

$$\text{soporte}(f) = \{i \in \Lambda : f(i) \neq 0\}.$$

Observación: Si H es un $\mathbb{H}$-Núcleo hermitiano, entonces podemos definir sobre $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ un producto interno indefinido $[\cdot,\cdot]_H$, como muestra el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea H un $\mathbb{H}$-Núcleo hermitiano, entonces la función definida sobre $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ dada por:*

$$[f,g]_H = \sum_{i,j\in\Lambda} [H(i,j)f(j), g(i)]_{\mathscr{H}_i}, \quad \text{con} \quad f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}). \tag{3.3}$$

Es un producto interno.

Demostración:

Sean $f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, por lo tanto la suma de la ecuación (3.3) es finita, así, la linealidad de la primera entrada se sigue de la linealidad de los productos internos que conforman la suma. Ahora:

$$\begin{aligned}
[f,g]_H &= \sum_{i,j\in\Lambda} [H(i,j)f(j), g(i)]_{\mathscr{H}_i} = \sum_{i,j\in\Lambda} \overline{[g(i), H(i,j)f(j)]_{\mathscr{H}_i}}.\\
&= \overline{\sum_{i,j\in\Lambda} [H(i,j)^{\#}g(i), f(j)]_{\mathscr{H}_i}} = \overline{\sum_{i,j\in\Lambda} [H(j,i)g(i), f(j)]_{\mathscr{H}_i}} = \overline{[g,f]_H}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $[f,g]_H$ es un producto interno. ■

DEFINICIÓN 3.8. Decimos que un $\mathbb{H}$-Núcleo hermitiano es *semi-definido positivo* (equivalentemente a decir que el producto interno es semi-definido positivo) si:

$$\sum_{i,j\in\Lambda} [K(i,j)h(j), h(i)]_{\mathscr{H}_i} \geq 0, \quad \text{para todo} \quad h \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}).$$

Denotaremos al conjunto de todos los $\mathbb{H}$-Núcleo por $\mathfrak{F}(\mathbb{H})$, los $\mathbb{H}$-Núcleo hermitianos por $\mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ y a la sub-clase de los $\mathbb{H}$-Núcleo hermitianos semidefinidos positivos por $\mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$.

Observación: Podemos definir sobre $\mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ un orden parcial de la siguente forma:
Sean $H,G \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ decimos que $H \leq G$ si $[f,f]_H \leq [f,f]_G$ para todo $f \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea* $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$*, si* $[f,g]_{\mathrm{H}} = 0$ *para todo* $f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ *entonces* $\mathrm{H} \equiv 0$.

Demostración:

Por definición $[f,g]_{\mathrm{H}} = \sum_{i,j\in\Lambda}[\mathrm{H}(i,j)f(j),g(i)]_{\mathscr{H}_i}$.

Sean $i_0, j_0 \in \Lambda$, recordemos que $\mathrm{H}(i_0,j_0) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_{j_0},\mathscr{H}_{i_0})$. Denotemos a $\mathrm{H}(i_0,j_0)$ como el operador T.

Ahora sea $w \in \mathscr{H}_{j_0}$ y $z \in \mathscr{H}_{i_0}$. Consideremos los siguientes elementos de $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$:

$$g(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i_0. \\ z & \text{si } i = i_0. \end{cases}$$

$$f(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j_0. \\ w & \text{si } i = j_0. \end{cases}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} 0 &= [f,g]_{\mathrm{H}.} \\ &= \sum_{i,j\in\mathcal{J}}[\mathrm{H}(i,j)f(j),g(i)]_{\mathscr{H}_i}. \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}}[\mathrm{H}(i_0,j)f(j),g(i_0)]_{\mathscr{H}_{i_0}}. \\ &= [\mathrm{H}(i_0,j_0)f(j_0),g(i_0)]_{\mathscr{H}_{i_0}}. \\ &= [T(w),z]_{\mathscr{H}_{i_0}}. \end{aligned}$$

Esto ocurre si y solo si $T \equiv 0$ pues w, z son elementos cualesquiera, y como i_0, j_0 son arbitrarios, concluimos que $\mathrm{H} \equiv 0$. ■

Ahora enunciaremos algunos resultados en los cuales se estara trabajando con el orden parcial definido anteriormente sobre los $\mathbb{H}$-Núcleo hermitianos.

Teorema 3.10. *Sea $H \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) Existe $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que $-L \leq H \leq L$.
(ii) Existe $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que:

$$|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{para todo } f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}).$$

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que $-L \leq H \leq L$ lo cual por definición es $|[f,f]_H| \leq [f,f]_L$ para todo $f \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$.

Sean $f, g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ y usando que H es hermitiano:

$$[f+g, f+g]_H - [f-g, f-g]_H = [f,g]_H + [g,f]_H + [f,g]_H + [g,f]_H.$$
$$= 2[f,g]_H + 2[g,f]_H = 4\mathrm{Re}[f,g]_H.$$

Así por la desigualdad triangular y (1):

$$4|Re[f,g]_H| \leq 2[f+g, f+g]_L + 2[f-g, f-g]_L.$$
$$|Re[f,g]_H| \leq \frac{1}{2}[f+g, f+g]_L + \frac{1}{2}[f-g, f-g]_L.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ escogiendo que $|\lambda| = 1$ y $\mathrm{Re}[f, \lambda g]_H = [f, \lambda g]_H$. Entonces:

$$|[f, \lambda g]_H| \leq \frac{1}{2}[f,f]_L + \frac{1}{2}[g,g]_L. \tag{3.4}$$

Se distinguen dos posibles casos. Primero, asumamos que $[f,f]_L = 0$ ó $[g,g]_L = 0$. Supongamos sin perdida de generalidad que $[f,f]_L = 0$. Consideremos la ecuación (3.4) reemplazando g por tg con $t > 0$.Tenemos :

$$|[f,g]_H| \leq \frac{t}{2}[g,g]_L.$$

Por la ultima ecuación, si $t \longrightarrow 0$ tenemos que $[f,g]_H = 0$ y concluimos la desigualdad.

Segundo caso, supongamos que tanto $[f,f]_L$ como $[g,g]_L$ son no triviales. Si reemplazamos en (3.4) f por $[f,f]^{\frac{1}{2}} f$ y g por $[g,g]^{\frac{1}{2}} g$ obtenemos que $|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Esta implicación es directa si tomamos $f = g$. ■

Proposición 3.11. *Sea $H \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ y $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que*

$$|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}} \text{ con } f, g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}).$$

Entonces la parte isotrópica con respecto al producto interno $[\cdot,\cdot]_L$ esta contenida en la parte isotropica con respecto al producto interno $[\cdot,\cdot]_H$.

Demostración:

Como L es semidefinido por la Proposición 2.13 su parte isotrópica coincide con sus vectores neutros, así, sea f un elemento de la parte isotrópica de L y usando la desigualdad para g arbitrario tenemos:

$$|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}} = 0[g,g]_L^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Si y solo si $[f,g]_H = 0$, en conclusión f partenece a la parte isotrópica de H.■

2.1. Espacios de Hilbert a partir de $\mathbb{H}$-Núcleo hermitianos semidefinidos positivos. En esta sección veremos como a partir de un $\mathbb{H}$-Núcleo semidefindo positivo podemos obtener un espacio de Hilbert, para lo cual usaremos un espacio cociente que se origina a partir del soporte.

Sea $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$, construyamos el siguiente espacio de Hilbert.

Como L es semidefinido pueden existir vectores neutros no nulos, es decir, $[f,f]_L = 0$ para algun $f \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ distinto de cero, para evitar este problema, consideremos el siguiente conjunto.

$$\mathcal{N}_L = \{f \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}) : [f,f]_L = 0\}.$$

usando la Proposición 2.15 definimos ahora el espacio cociente $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\diagup\mathcal{N}_L$. Si usamos la extensión del producto interno $[\cdot,\cdot]_L$ obtendremos que $(\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\diagup\mathcal{N}_L, [\cdot,\cdot]_L)$ es un espacio con producto interno definido positivo.

Para terminar nuestra contrucción consideraremos el espacio de Hilbert $\overline{(\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\diagup\mathcal{N}_L)}$ con la extensión del producto interno $[\cdot,\cdot]_L$. Este espacio de Hilbert será denotado por $\mathcal{K}_L$.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sea $H \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ y $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que :*

$$|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}} \text{ con } f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}).$$

Entonces $[\cdot,\cdot]_H$ es un producto interno sobre $\mathcal{K}_L$.

Demostración:

Basta demostrar que $[\cdot,\cdot]_H$ esta bien definido sobre $\mathcal{K}_L$, pues las propiedades de producto interno son heredadas.

Sean x_1,x_2 representantes de una misma clase x y y_1,y_2 representantes de una misma clase y:

$$\begin{aligned} |[x_1,y_1]_H - [x_2,y_2]_H| &= |[x_1-x_2,y_1]_H + [x_2,y_1-y_2]_H|. \\ &\leq |[x_1-x_2,y_1]_H| + |[x_2,y_1-y_2]_H|. \end{aligned}$$

Usando la hipótesis:

$$\begin{aligned} |[x_1,y_1]_H - [x_2,y_2]_H| &\leq |[x_1-x_2,x_1-x_2]_L|^{\frac{1}{2}}|[y_1,y_1]_L|^{\frac{1}{2}} + |[y_1-y_2,y_1-y_2]_L|^{\frac{1}{2}}|[x_2,x_2]_L|^{\frac{1}{2}}. \\ &= 0|[y_1,y_1]_L|^{\frac{1}{2}} + 0|[x_2,x_2]_L|^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Asi $[x_1, y_1]_H = [x_2, y_2]_H$ por lo que el producto interno $[\cdot,\cdot]_K$ esta bien definido sobre $\mathcal{K}_L$.■

Como hemos visto, la desigualdad $|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}}$ nos proporciona propiedades importantes, ahora relacionaremos los productos internos $[\cdot,\cdot]_H$ y $[\cdot,\cdot]_L$ mediante el teorema de Representación de Riesz.

PROPOSICIÓN 3.13. *Sea $H \in \mathfrak{F}^h(\mathbb{H})$ y $L \in \mathfrak{F}^+(\mathbb{H})$ tal que :*

$$|[f,g]_H| \leq [f,f]_L^{\frac{1}{2}}[g,g]_L^{\frac{1}{2}} \text{ con } f,g \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}).$$

Entonces existe un operador $A : \mathcal{K}_L \longrightarrow \mathcal{K}_L$ tal que $A = A^*$, A es de contraccioń y cumple que $[A(f),g]_L = [f,g]_H$.

Demostración:

Sea $T_g : \mathcal{K}_L \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $T_g(f) = [f,g]_H$, Por el Teorema de representacioń de Riesz existe $h_g \in \mathcal{K}_L$ tal que $T_g(f) = [f,h_g]_L$ asi definimos el operador B como $B(g) = h_g$ y nuestro operador A como $A = B^*$.

Veamos que $A = A^*$:

$$[A(f),g]_L = [B^*(f),g]_L = [f,B(g)]_L = [f,g]_H.$$

$$[f,A(g)]_L = \overline{[A(g),f]_L} = \overline{[g,f]_H} = [f,g]_H.$$

Asi $A = A^*$.

Veamos ahora que A es de contracción:

$$[A(f),A(f)]_L = [f,A(f)]_K \leq ([f,f]_L)^{\frac{1}{2}}([A(f),A(f)]_L)^{\frac{1}{2}}.$$

$$[A(f),A(f)]_L^{\frac{1}{2}} \leq ([f,f]_L)^{\frac{1}{2}}.$$

$$[A(f),A(f)]_L \leq ([f,f]_L).$$

Por lo que A es una contracción. Hemos construido el operador A requerido. ■

2.2. Espacio de Kreĭn $\mathcal{K}_K$. Para terminar este sección daremos un esboso de un espacio de Kreĭn originado a partir de un operador autoadjunto y contractivo A, usaramos la sección 1 de este capítulo para dicha construcción.

El espacio de Kreĭn de partida sera el espacio de Hilbert $\mathcal{K}_L$ por lo cual su simetría fundamental es ell operador identidad. Se observa que el operador autoadjunto

$$JA = IA = A,$$

por lo cual el producto interno asociado al ejemplo es $[\cdot,\cdot]_A = [A\cdot,\cdot]$. Este espacio de Krein sera denotado por $\mathcal{K}_K$.

Ademas la norma unitaria asociada a este espacio será $\||\ A\ |^{\frac{1}{2}}\ \cdot\ \|$, recordemos que $A = A_+ - A_-$ donde A_+ y A_- son los operadores correspondientes a la descomposición de Jordan . A manera de abservación notamos que como A es un operador contractivo tambien lo son los operadores A_+ y A_-. (Ver [2])

3. $\mathscr{H}$-Núcleos de Toeplitz y dilatación de Naimark.

En esta sección consideraremos la familia $\mathscr{H} = \{\mathscr{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde cada $\mathscr{H}_n$ es igual y posee el mismo producto interno que el del espacio de Krein $\mathscr{H}$.

Definición 3.14. Un $\mathscr{H}$-Núcleo $H \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$ es llamado un $\mathscr{H}$-Núcleo de *Toeplitz* si existe un operador $T : \mathbb{Z} \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que $H(i,j) = T(i-j)$ para todo $i,j \in \mathbb{Z}$.

Denotaremos por $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ la sub-clase de todos los $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz, en esta sección estamos interesados principalmente en los $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz hermitianos $\mathfrak{L}^h(\mathscr{H})$ y la sub-clase de los $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz hermitianos semidefinidos positivos $\mathfrak{L}^+(\mathscr{H})$.

Consideraremos el espacio vectorial complejo $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})$ de todas las funciones $h : \mathbb{Z} \to \mathscr{H}$ con soporte finito ($h(n) \neq 0$ para una cantidad finita de enteros n).

Además de finimos los operadores $S_+, S_- \in \mathscr{L}(\mathscr{F}_0(\mathscr{H}))$ definidos por:

$$(S_+h)(n) = h(n-1).$$

$$(S_-h)(n) = h(n+1).$$

Estos operadores son conocidos como los operadores *shift*.

Ahora nos dedicaremos a caracterizar los $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz mediantes los operadores shift.

Proposición 3.15. *Sea* $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}(\mathscr{H})$. *Entonces* H *es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz si y solo si* $\mathrm{H}(n+1,k) = \mathrm{H}(n,k-1)$ *para todo* $n,k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Supongamos que H es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz, por lo tanto existe un operador :

$$T : \mathbb{Z} \to \mathscr{L}(\mathscr{H}),$$

tal que :

$$T(i-j) = \mathrm{H}(i,j).$$

Así:

$$\mathrm{H}(n+1,k) = T(n+1-k) = T(n-(k-1)) = \mathrm{H}(n,k-1).$$

Reciprocamente supongamos ahora que $\mathrm{H}(n+1,k) = \mathrm{H}(n,k-1)$ para todo $n,k \in \mathbb{Z}$. Sea $T : \mathbb{Z} \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$, dado por $T(i) = \mathrm{H}(i,0)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Veamos que $T(i-j) = \mathrm{H}(i,j)$ para todo $i,j \in \mathbb{Z}$.

Caso 1: $j > 0$:

$$T(i-j) = \mathrm{H}(i-j,0) = \mathrm{H}(i-j+1,1) = \mathrm{H}(i-j+2,2) = ... = \mathrm{H}(i,j).$$

Caso 2: $j < 0$:

$$T(i-j) = \mathrm{H}(i-j,0) = \mathrm{H}(i-j-1,-1) = \mathrm{H}(i-j-2,-2) = ... = \mathrm{H}(i,j).$$

Caso 3: $j = 0$ Se cumple de manera trivial. ■

TEOREMA 3.16. *Sea* $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}^{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$*. Entonces* H *es un* $\mathscr{H}$*-Núcleo de Toepletz si y solo si* $[\mathrm{S}_+h, g]_{\mathrm{H}} = [h, \mathrm{S}_-g]_{\mathrm{H}}$ *con* $h, g \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$*.*

Demostración:

Veamos primero las siguientes ecuaciones:

$$[\mathrm{S}_+h, g]_{\mathrm{H}} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(i,j)\mathrm{S}_+h(j), g(i)]_{\mathscr{H}} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(i,j)h(j-1), g(i)]_{\mathscr{H}}.$$

$$[h, \mathrm{S}_-g]_{\mathrm{H}} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(i,j)h(j), \mathrm{S}_-g(i)]_{\mathscr{H}} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(i,j)h(j), g(i+1)]_{\mathscr{H}}.$$

Reescribiendo las ecuaciones anteriores mediante un cambio de variable tenemos:

$$[\mathrm{S}_+h, g]_{\mathrm{H}} = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(n,k+1)h(k), g(n)]_{\mathscr{H}}. \tag{3.5}$$

$$[h, \mathrm{S}_-g]_{\mathrm{H}} = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} [\mathrm{H}(n-1,k)h(k), g(n)]_{\mathscr{H}}. \tag{3.6}$$

Si suponemos que H es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toepletz, por la Proposición 3.15

$$\mathrm{H}(n,k+1)=\mathrm{H}(n-1,k),$$

por lo tanto las ecuaciones (3.5) y (3.6) son igualales, cumpliendo el resultado.

Si suponemos que $[\mathrm{S}_{+}h,g]_{\mathrm{H}}=[h,\mathrm{S}_{-}g]_{\mathrm{H}}$ con $h,g\in\mathscr{F}_0(\mathscr{H})$, en virtud de las ecuaciones (3.5) y (3.6) tenemos:

$$\sum_{n,k\in\mathbb{Z}}[(\mathrm{H}(n,k+1)-\mathrm{H}(n-1,k))h(k),g(n)]_{\mathscr{H}}=0.$$

Por la Proposición 3.7 se tiene que

$$\mathrm{H}(n,k+1)-\mathrm{H}(n-1,k)=0.$$

Así

$$\mathrm{H}(n,k+1)=\mathrm{H}(n-1,k)$$

y usando nuevamente la Proposición 3.15 sigue que H es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz.■

Teorema 3.17. *Sea* $\mathrm{H}\in\mathfrak{F}^{\mathrm{h}}(\mathscr{H})$. *Entonces* H *es un* $\mathscr{H}$*-Núcleo de Toeplitz si y solo si los opereadores shift son isométricos con respecto al producto interno* $[\cdot,\cdot]_H$.

Demostración:

Veamos solo que S_+ es isométrico, para S_- el razonamiento será análogo.

Estudiemos la ecuación:

$$[\mathrm{S}_{+}h,S{+}h]_{\mathrm{H}}=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[\mathrm{H}(i,j)\mathrm{S}_{+}h(j),S_{+}h(i)]_{\mathscr{H}}=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[\mathrm{H}(i,j)h(j-1),h(i-1)]_{\mathscr{H}}.$$

Reescribiendo la ecuación anterior mediante un cambio de variable se tiene:

$$[\mathrm{S}_{+}h,S{+}h]_{\mathrm{H}}=\sum_{n,k\in\mathbb{Z}}[\mathrm{H}(n+1,k+1)h(k),g(n)]_{\mathscr{H}}. \tag{3.7}$$

Si suponemos que H es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz, por la Proposición 3.15

$$\mathrm{H}(n+1,k+1)=\mathrm{H}(n,k),$$

por lo tanto la ecuación (3.7) es igual a $[h,h]_H$, cumpliendo el resultado.

Reciprocamente si suponemos que $[\mathrm{S}_+h, S_+h]_{\mathrm{H}} = [h,h]_{\mathrm{H}}$ con $h \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$, de forma parecida al teorema anterior obtenemos:

$$\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} [(\mathrm{H}(n+1,k+1) - \mathrm{H}(n,k))h(k), h(n)]_{\mathscr{H}} = 0. \tag{3.8}$$

Por la proposición 3.9,

$$\mathrm{H}(n+1,k+1) - \mathrm{H}(n,k) = 0$$

así

$$\mathrm{H}(n+1,k+1) = \mathrm{H}(n,k),$$

y usando nuevamente la Proposición 3.15 H es un $\mathscr{H}$-Núcleo de Toepletz.■

Antes de definir lo que es una dilatación de Naimark, definiremos lo que es una Dilatación unitaria, que se podría ver como un caso mas particular de la que pronto definiremos.

Definición 3.18. Sea $\mathscr{K}$ us espacio de Krein y $T \in \mathscr{L}(\mathscr{K})$. Una dilatación unitaria de T es un par $(U;\mathscr{H})$, donde $\mathscr{H}$ es un espacio de Krein que es extensión de $\mathscr{K}$, $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ es un operador unitario, tal que:

$$P^{\mathscr{H}}_{\mathscr{K}} U^n|_{\mathscr{K}} = T^n \quad n \geq 1.$$

$$P^{\mathscr{H}}_{\mathscr{K}} U^{\#n}|_{\mathscr{K}} = T^{\#n} \quad n \geq 0.$$

Ádemas decimos que la dilatación es minimal si:

$$\mathscr{H} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n\mathscr{K}.$$

El simbolo $\bigvee$ representa el espacio generado por los subconjuntos $U^n\mathscr{K}$ con $n \in \mathbb{Z}$

Ahora definiremos lo que es una dilatación de Naimark.

Definición 3.19. Una dilatación de Naimark del $\mathscr{H}$-Núcleo de Toeplitz H es por definición una tripleta $(U,Q;\mathscr{K})$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $\mathscr{K}$ es espacio de Kreĭn, $U \in \mathscr{L}(\mathscr{K})$ es un operador unitario y $Q \in \mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{K})$.

b) $\mathscr{K} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n Q\mathscr{H}$.

c) $H(i,j) = Q^{\#}U^{i-j}Q$ con $i,j \in \mathbb{Z}$.

Observación: Sea H un $\mathscr{H}$-Núcleo hermitiano de Toeplitz, si $H(0,0) = I$ entonces la dilatación de Naimark de $\mathscr{H}$ puede verse como una dupla $(U;\mathscr{K})$ que satisface:

a)' $\mathscr{K}$ us espacio de Krein y una extensión de $\mathscr{H}$, $U \in \mathscr{L}(\mathscr{K})$ es un operador unitario.

b)' $\mathscr{K} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n\mathscr{H}$.

c)' $H(i,j) = P^{\mathscr{K}}_{\mathscr{H}} U^{i-j}|_{\mathscr{H}}$ con $i,j \in \mathbb{Z}$.

Las condiciones a)' y b)' son simples copias de las originales. Como $Q^{\#}Q = I$ tenemos que Q es un operador isométrico acotado que esta definido de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{K}$, como estamos suponiendo que $\mathscr{K}$ es una extensioń de $\mathscr{H}$ basta tomar $Q\mathscr{H} = \mathscr{H}$.

Ejemplo 3.20. Sea $\mathscr{K}$ us espacio de Krein y $T \in \mathscr{L}(\mathscr{K})$. Supongamos que T posee una dilatación unitaria minimal $(U;\mathscr{H})$.

Consideremos ahora el $\mathscr{H}$-Núcleo hermitiano de Toeplitz H definido por:

$$H(i,j) = \begin{cases} T^{i-j} & \text{si } i > j. \\ I & \text{si } j = i. \\ T^{\#j-i} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Entonces $(U;\mathscr{H})$ es una dilatación de Naimark sobre H.

Ahora nosotros estamos interesados en describir los $\mathscr{H}$-núcleo hermitianos de Toeplitz cuando admiten una dilatación de Naimark. Primero necesitamos introducir una nueva clase de $\mathscr{H}$-Núcleos semidefinidos positivos:

Definición 3.21. Sea el $\mathscr{H}$-Núcleo $L \in \mathfrak{F}^+(\mathscr{H})$. Decimos que es del tipo Shift acotado + si el operador Shift S_+ es acotado con respecto a la seminorma $h \to [h,h]_L^{\frac{1}{2}}$ con $h \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$. Es decir:

$$[S_+h, S_+h]_L \leqslant C[h,h]_L \quad h \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H}). \tag{3.9}$$

Para alguna constante $C \geq 0$, este conjunto de $\mathscr{H}$-núcleos es denotado por $\mathfrak{F}^+_+(\mathscr{H})$.

Definición 3.22. Sea el $\mathscr{H}$-Núcleo $L \in \mathfrak{F}^+(\mathscr{H})$. Decimos que es del tipo Shift acotado - si el operador Shift S_- es acotado con respecto a la semi-norma $h \to [h,h]_L^{\frac{1}{2}}$ con $h \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$. Es decir:

$$[S_-h, S_-h]_L \leqslant C[h,h]_L, h \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H}). \tag{3.10}$$

Para alguna constante $C \geq 0$, este conjunto de $\mathscr{H}$-Núcleos es denotado por $\mathfrak{F}^+_-(\mathscr{H})$.

DEFINICIÓN 3.23. Sea el conjunto de $\mathscr{H}$-Núcleos $\mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H}) = \mathfrak{F}_+^+(\mathscr{H}) \cap \mathfrak{F}_-^+(\mathscr{H})$.
Si $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$ decimos que es un operador del tipo Shift acotado.

Observación: Por la Teorema 3.15 se deduce que $\mathfrak{L}^+(\mathscr{H}) \subset \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$. Esto hace que los $\mathscr{H}$-núcleos del tipo Shift acotado sea suficientemente rica como clase. El hecho de que estas clases no coincidan sera mostrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sean $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert, $Q : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ un operador acotado y $T : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ un operador invertible. consideremos el $\mathfrak{H}_1$-Núcleo L definido por:
$L(i,j) = Q^*T^{*j}T^jQ$. Provaremos que $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathfrak{H}_1)$.

Fijemos f en el soporte de $\mathfrak{H}_1$ y denotemos $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^nQf(n) \in \mathfrak{H}_2$, notemos que $[f,f]_L = ||x||^2$. Entonces:

$$[S_+f, S_+f]_L = \langle (T^*T)x, x\rangle \leq ||T||^2||x||^2 = ||T||^2[f,f]_L.$$

Esto implica que el operador es shift S_+ acotado. Ademas:

$$[S_-f, S_-f]_L = \langle (T^*T)^{-1}x, x\rangle \leq ||T^{-1}||^2||x||^2 = ||T^{-1}||^2[f,f]_L.$$

Asi es S_- acotado tambien.

PROPOSICIÓN 3.24. *Sea $L \in \mathfrak{F}^+(\mathscr{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$.
(ii) Existe $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}[f,f]_L \leq [S_+f, S_+f]_L \leq C[f,f]_L$, $f \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$.
(iii) Existe $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}[f,f]_L \leq [S_-f, S_-f]_L \leq C[f,f]_L$, $f \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$.

Demostración:

$(i)\Rightarrow(ii)$ Sea $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$ por lo tento existe $C \geq 0$ que cumple simultáneamente las ecuaciones (3.9) y (3.10). Podemos suponer que $C > 0$ (en caso contrario la desigualdad se cumple de forma directa). Por lo cual se cumple de forma directa que $[S_+f, S_+f]_L \leq C[f,f]_L$, veamos la desigualda restante:

$$\frac{1}{C}[f,f]_L = \frac{1}{C}[S-S_+f, S-S_+f]_L \leq \frac{1}{C}(C[S_+f, S_+f]_L) = [S_+f, S_+f]_L.$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Veamos la desigualdad de la izquierda:

$$\frac{1}{C}[f,f]_L = \frac{1}{C}[S+S_-f, S+S_-f]_L \leq \frac{1}{C}(C[S_-f, S_-f]_L) = [S_-f, S_-f]_L.$$

Veamos la desigualdad de la derecha:

$$C[f,f]_L = C[S{+}S_-f, S{+}S_-f]_L \geq [S_-f, S_-f]_L.$$

$(iii)\Rightarrow(i)$ Por un lado es directo que $L \in \mathfrak{F}_-^+(\mathscr{H})$, veamos que $L \in \mathfrak{F}_+^+(\mathscr{H})$:

$$C[f,f]_L = C[S{-}S_+f, S{-}S_+f]_L \geq [S_+f, S_+f]_L. \blacksquare$$

Para finalizar este trabajo daremos una caracterización de los $\mathscr{H}$-Núcleos hermitianos de Toeplitz cuando admiten una dilatación de Naimark.

TEOREMA 3.25. *Sea $H \in \mathfrak{L}^h(\mathscr{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) Existe $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$ tal que $-L \leq H \leq L$.
(ii) H tiene un dilatación Naimark $(U, Q, \mathscr{K})$.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como $L \in \mathfrak{F}_0^+(\mathscr{H})$ por la sección 2.1 de este capitulo L induce un espacio de Hilbert $\mathcal{K}_L$. Por el Teorema 3.10 y la Proposición 3.11 existe un operador $A : \mathscr{K}_L \longrightarrow \mathscr{K}_L$ autoadjunto, de contracción y que cumple que $[Af, g]_L = [f, g]_H$. Por la sección 2.2 de este capítulo obtenemos el espacio de Kreĭn $\mathcal{K}_H$, para no confundir la notacion en ves de $\mathcal{K}_H$ usaremos K_H.

Usemos ahora el Teorema 3.4, identificando a los espacio de Kreĭn:

$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{K}_L$, los operadores autoadjuntos seran iguales al operador autoadjunto A y $T_1 = S_+$, $T_2 = S_-$. Para usar el teorema debemos ver que $[S_+f, g]_A = [f, S_-g]_A$ para todo f, g en $\mathscr{K}_L$. Como $H \in \mathfrak{L}^h(\mathbb{H})$, por el Teorema (3.16) tenemos:

$$[S_+f, g]_H = [f, S_-g]_H.$$

$$[AS_+f, g]_L = [Af, S_-g]_L.$$

$$[S_+f, g]_A = [f, S_-g]_A.$$

Por lo tanto por el Teorema 3.4 S_+ induce un operador U en el espacio de kreĭn K_H (es decir U posee el mismo comportamiento de S_+). Por el Teorema 3.17 U es isométrico, y como S_+ es inyectivo en el soporte concluimos que U posee rango denso, por lo cual U es un operador unitario en el espacio de Krein K_H. A modo de observación S_- induce el operador $U^{\#} = U^{-1}$ sobre K_H.

Ahora construiremos el operador Q de la siguiente forma: Para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ y qualquier vector $h \in \mathscr{H}$ cosideramos $w \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$ como:

$$w(j) = \begin{cases} h & \text{si } j = 0. \\ 0 & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

Esta identificación de elementos de $\mathscr{H}$ como elementos del soporte es una inmersión natural (tambien es usada la terminologia de embedding). Con esta inmersion definimos el operador $Q : \mathscr{H} \to K_H$ de la siguiente manera:

$$Q(w) = h + \mathscr{N}_H \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H}) \setminus \mathscr{N}_H \subseteq K_H.$$

Provaremos ahora que Q es un operador acotado fijando $i \in \mathbb{Z}$ y las normas en $\| \,.\, \|_{\mathscr{H}}$ y $\| \,.\, \|_{K_H}$.

$$\begin{aligned}
\| Q(h) \|^2_{K_H} &= \| h + \mathscr{N}_H \|^2_{K_H} = \| A_+^{\frac{1}{2}}(h + \mathscr{N}_L) \|^2_{\mathcal{K}_L} + \| A_-^{\frac{1}{2}}(h + \mathscr{N}_L) \|^2_{\mathcal{K}_L} . \\
&= [A_+(h + \mathscr{N}_L), h + \mathscr{N}_L]_{\mathcal{K}_L} + [A_-(h + \mathscr{N}_L), h + \mathscr{N}_L]_{\mathcal{K}_L}. \\
&\leq [h + \mathscr{N}_L, h + \mathscr{N}_L]_{\mathcal{K}_L} + [h + \mathscr{N}_L, h + \mathscr{N}_L]_{\mathcal{K}_L}. \\
&= 2[h + \mathscr{N}_L, h + \mathscr{N}_L]_{\mathcal{K}_L} = 2[w, w]_L = 2[L(0,0)h, h]_{\mathscr{H}}. \\
&\leq 2 \| L(0,0)h \|_{\mathscr{H}} \| h \|_{\mathscr{H}} . \\
&\leq 2 \| L(0,0) \| \| h \|^2_{\mathscr{H}} .
\end{aligned}$$

Asi hemos demostrado que el operador Q es acotado. Probemos ahora que (U, Q, K_H) es una dilatación de Naimark de H.

La propiedad (a) se cumple por la forma en que construimos los operadores U y Q.

Veamos la propiedad (b), primero notemos que el espacio generado por $\{U^n(Q(\mathscr{H}))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_H$. Asi para probar la propiedad (b) es necesario y suficiente ver que la variedad lineal $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_H$ es densa en K_H con respecto a la topología debil generada por el $\mathscr{H}$-nucleo H.

En efecto, cualquier vector en $\mathcal{K}_L$ puede ser aproximado por vectores en $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_L$ con respecto a la topologia debil generada por L y cualquier vetor en K_H puede ser aproximado por vectores en $\mathcal{K}_L/\mathscr{N}_H$. Ademas como $\mathscr{N}_L \subseteq \mathscr{N}_H$ tenemos:

$$\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_H = (\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_L)/\mathscr{N}_H.$$

Ademas por la desigualdad de la hipótesis y la identidad de poralarización tenemos que la topologia debil generada por L es mas fuerte que la topologia debil generada por H, asi concluimos que la variedad lineal $\mathscr{F}_0(\mathscr{H})/\mathscr{N}_H$ es densa en K_H con respecto a la topologia debil generada por el $\mathscr{H}$-nucleo H.

Para ver la propiedad (c) de la dilatación volvemos a considerar la identificación de cualquier vector h con el elemento del soporte definido por:

$$w(i) = \begin{cases} h & \text{si } i = 0. \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Asi, para cualquier $i, j \in \mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
[Q^{\#}U^{i-j}Qh, h]_{\mathscr{H}} &= [U^iQh, U^jQh]_H = [U^i(h + \mathcal{N}_H), U^j(h + \mathcal{N}_H)]_H. \\
&= [S_+^i w, S_+^j w]_H = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} [H(n,k)S_+^i w(k), S_+^j w(n)]_{\mathscr{H}}. \\
&\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} [H(n,k)S_+ w(k-i), S_+ w(n-j)]_{\mathscr{H}} = [H(i,j)h, h]_{\mathscr{H}}.
\end{aligned}$$

Por lo cual queda verificado la prpiedad (c).

(2)⇒(1) Ahora supongamos que H posee una dilatación $(U, Q; \mathcal{H})$. Sea $L(i,j) = JQ^*U^{*j}U^iQ$ Donde J_1 es la simetría fundamental de $\mathcal{H}$. Probaremos que L es positivo y shif acotado. Sea $f \in \mathscr{F}_0(\mathscr{H})$ ahora, estudiemos el siguiente producto interno:

$$\begin{aligned}
[f,f]_L &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [J_1Q^*U^{*j}U^iQf(i), f(j)] = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [Q^*U^{*j}U^iQf(i), f(j)]_J. \\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [U^iQf(i), U^jQf(j)]_J = ||U^jQf(j)||_J \geq 0.
\end{aligned}$$

Veamos que L es shif S_+ acotado:

$$
\begin{aligned}
[S_+f, S_+f]_L &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [JQ^*U^{*j}U^iQS_+f(i), S_+f(j)].\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [U^iQS_+f(i), U^jQS_+f(j)]_J.\\
&= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} [U^iQf(i-1), U^jQf(j-1)]_J.\\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [U^{m+1}Qf(m), U^{n+1}Qf(n)]_J.\\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [UU^mQf(m), UU^nQf(n)]_J.\\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [U^mQf(m), U^nQf(n)]_J.\\
&= ||U^jQf(j)||_J.\\
&= [f,f]_L.
\end{aligned}
$$

Falta ver ahora que es shif S_- acotado, de forma análoga concluimos lo siguiente:

$$[S_-f, S_-f]_L = [f,f]_L.$$

Hemos visto asi que nuestro H-Núcleo es shif acotado.

Veamos ahora que $-L \leq H \leq L$. veremos nada más que $H \leq L$ la otra desigualdad es análoga.

Primero veamos el hecho de que $J \leq I$ con respecto al producto interno $[\cdot,\cdot]_J$, Sea $x \in \mathscr{H}$:

$$
\begin{aligned}
[Jf, f]_J &= [f_+ - f_-, f_+ + f_-]_J.\\
&= [f_+, f_+]_J - [f_-, f_-]_J.\\
&\leq [f_+, f_+]_J + [f_-, f_-]_J.\\
&= [f_+ + f_-, f_+ + f_-]_J.\\
&= [f,f]_J.
\end{aligned}
$$

Análogamente se concluye que $-I \leq J$. Veamos ahora que $H \leq L$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[H(i,j)f(j),f(i)]_{\mathscr{H}} &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[Q^*U^{(i-j)}Qf(j),f(i)]_{\mathscr{H}} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[JQ^*U^{(i-j)}Qf(j),f(i)]_J.\\ &\leq \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[Q^*U^{(i-j)}Qf(j),f(i)]_J = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[JQ^*U^{*j}U^iQf(j),f(i)]_{\mathscr{H}}.\\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}[L(i,j)f(j),f(i)]_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

En conclusión L satisface las propiedades. Así queda demostrada la equivalencia.■

Bibliografía

[1] T. Constantinescu, A. Gheondea, Representations of Hermitian Kernels, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33** (1997), 917-951.

[2] T. Constantinescu, A. Gheondea,Elementary Rotations of Linear Operator In Krein Spaces, *Copyright by IMAR* **29** (1993), 167-203.

[3] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. de Snoo, Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, Operator Theory: Adv. Appl. Vol. 96, 1997.

[4] N. Aronszan, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.

[5] J. Bognar, Indefinite Inner Product Spaces, *Springer Verlag* (1974).

[6] Cotlar M, Cignoli R , An introduction to functional analysis, *North Holland* (1974).

[7] Bachman G, Narici L , Functional analysis, *Academic Press* (1964).

[8] Bruzual R , Espacios con métrica indefinida, *UCV* (2011).

[9] Bruzual R, Domínguez M , Espacios de Hilbert, *UCV* (2001).