

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



SOBRE EL ESPECTRO DE RAYOS CÓSMICOS EN LA ATMÓSFERA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Jorge Luis Dasilva Golán
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Dr. Jose Antonio López

abril-2017
Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



SOBRE EL ESPECTRO DE RAYOS CÓSMICOS EN LA ATMÓSFERA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Jorge Luis Dasilva Golán
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Dr. Jose Antonio López

abril-2017
Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Jorge Luis Dasilva Golan**, Cédula de Identidad **V-23681180**, bajo el título **“Sobre el Espectro de Rayos Cósmicos en la Atmósfera”**, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 16 de mayo de 2017, a Las 7:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 16 días del mes de mayo de 2017, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof. José Antonio López Rodríguez.

Firma del jurado evaluador

Profa. Rosa Elena Mujica
Paredes
V-13128246
UCV

Prof Ernesto Fuenmayor Di
Prisco
V-10336198
UCV

Prof. José Antonio López
Rodríguez
V-10504342
UCV



A mis padres, por ser el apoyo más grande que he tenido a lo largo de mis estudios, desde aquellos que empecé hace 20 años, hasta los que finalizan con la entrega de este Trabajo Especial de Grado...
y los que vendrán.

Agradecimientos

Queremos agradecer a las personas y organizaciones que colaboraron en la realización del presente trabajo.

Escuela de Física de la Universidad Central de Venezuela, por facilitarnos acceso a su Laboratorio Docente de Computación, donde pudimos realizar nuestra iniciación en el desarrollo computacional del trabajo y en el estudio de Cascadas Aéreas Extensas (siguiendo el curso dictado por Mauricio Suarez, integrante del Grupo Halley de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander).

Laboratorio de Campos y Partículas, Centro de Física Teórica y Computacional de la Escuela de Física, UCV.

Grupo Halley de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander, por facilitarnos el acceso al cluster donde realizamos todas las simulaciones y procesos asociados al trabajo, y por su apoyo a lo largo del desarrollo del mismo.

Proyecto de investigación: Detección terrestre de Rayos Cósmicos con aplicación a la astrofísica de partículas y el estudio de fenómenos heliosféricos (CDCH-UCV PG-038808-2013-1).

Dr. Luis Núñez por la asignación de cuentas en el Cluster del Grupo Halley, y por ser un contacto importante y de confianza en la realización del trabajo.

Dr. David Sierra por facilitarnos, en un documento escrito, toda la información sobre el uso del Cluster Halley, y los protocolos asociados al uso de las *CRK-Tools*.

Dr. Hernán Asorey, por permitirnos el uso de las *CRK-Tools* y por ser un contacto de confianza en la realización del presente trabajo, y de muchos otros asociados con el Proyecto LAGO-Caracas.

Lic. Mauricio Suarez, por el curso introductorio audiovisual sobre Espectro de Rayos Cósmicos y Cascadas Aéreas Extensas, que significó uno de los principales pilares en el inicio del trabajo.

Administrador Germán Tovar, por ser un importante apoyo en el mantenimiento y manejo de la sala de máquinas de la Escuela de Física de la Universidad Central de Venezuela,

RESUMEN

Se estudia el formalismo asociado a la propagación de Rayos Cósmicos en el medio intergaláctico, en las cercanías del sistema solar y la propia atmósfera terrestre, así como las ecuaciones de transporte asociadas a cada proceso. En este último ámbito, se estudia el modelo teórico asociado a las Lluvias Atmosféricas Extendidas y el espectro de secundarios producidos. En base a esto, se realizaron una serie de simulaciones computarizadas con el programa CORSIKA para generar data sintética sobre Lluvias Atmosféricas Extendidas en cuatro localidades de interés astrofísico en Venezuela (Pico Espejo, Páramo de Piedras Blancas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela y Universidad Simón Bolívar). Finalmente, se analizan los resultados de estas simulaciones (partiendo de parámetros y criterios definidos en el trabajo) para hacer conclusiones comparativas en base al modelo teórico previamente estudiado.

PALABRAS CLAVE

Rayos Cósmicos, Primarios, Espectro, Lluvias Atmosféricas Extendidas, Atmósfera, Secundarios, CORSIKA, Astrofísica de partículas, Física de partículas.

Índice general

Lista de figuras	15
Lista de tablas	17
Introducción	19
1. Rayos Cósmicos	21
1.1. Introducción	21
1.2. Recuento Histórico	22
1.3. La naturaleza de los Rayos Cósmicos	24
1.4. Mecanismo de Aceleración (Bottom up)	25
1.4.1. Mecanismos de Aceleración Difusivos	25
1.4.2. Mecanismos de Aceleración Directos	38
1.5. Modelos de decaimiento (Top down)	43
1.6. Propagación de Rayos Cósmicos	44
2. Lluvias Atmosféricas Extendidas	47
2.1. Introducción	47
2.2. Ecuación de transporte de los Rayos Cósmicos	48
2.3. ¿Algo que decir sobre la atmósfera?	52
2.4. Corte de Rigidez Magnética	54
2.5. Lluvias Atmosféricas Extendidas	57
2.5.1. Solución Elemental	59
2.5.2. Aproximación A	60
2.5.3. Toy Model: Aproximación de Heitler	61
2.6. Cascadas Electromagnéticas	62
2.6.1. Producción de pares y Bremsstrahlung	62
2.6.2. Ecuación de transporte para Cascadas Electromagnéticas	66
2.6.3. Solución en Ley de Potencias	67
2.6.4. Un tratamiento más general	70

2.6.5. Fluctuaciones y Distribución Lateral	77
2.7. Cascadas Hadrónicas	79
2.7.1. Recapitulando el Modelo de Heitler	79
2.7.2. Tratamiento analítico de las Cascadas Hadrónicas	81
3. Métodos de Simulación	83
3.1. Introducción	83
3.2. Repaso general de Probabilidades	84
3.2.1. Definiciones Generales	84
3.2.2. Cuatro distribuciones y Dos teoremas	85
3.3. Método de Monte Carlo	88
3.4. <i>Cosmic Ray Simulations for Kascade</i>	89
3.4.1. Modelos de interacción	90
3.4.2. Uso general	90
4. Fluencia en Localidades de Interés Astrofísico	95
4.1. Introducción	95
4.2. Límites de Energía	95
4.3. Fluencia en localidades de interés astrofísico	97
4.3.1. Parámetros de entrada	97
4.3.2. Producción y procesamiento de data sintética	99
4.4. Espectro de muones	100
4.4.1. Dependencia cenital	100
4.4.2. Dependencia azimutal	103
4.5. Espectro general de partículas	105
Conclusiones	109
A. Técnicas Computacionales. CRK-Tools	111
A.1. Introducción	111
A.2. Una forma distinta de hacer simulaciones	112
A.2.1. Generando una simulación	112
A.2.2. Creando un proyecto	114
A.2.3. Configuración	115
A.2.4. Final del proyecto	116
B. Desarrollos Computacionales	117
B.1. Script para ejecutar los archivos generados por <i>do_halley.clus</i>	117
B.2. Script para descomprimir los archivos <i>.lst.bz2</i>	118

B.3. Script para extraer partículas	120
B.4. Filtro de partículas según su ángulo cenital	121
B.5. Filtro de partículas según su ángulo azimutal	123
B.6. Script para realizar histogramas Número de partículas/Energía	124
B.7. Graficación cenital en cartesianas	126
B.8. Graficación cenital en cilíndricas	128
B.9. Script para contar el Número de secundarios en función de la profundidad atmosférica	128

C. Visualizaciones Complementarias	133
---	------------

Índice de figuras

1.1. Víctor Hess	22
1.2. Enrico Fermi	23
1.3. Espectro de Rayos Cósmicos	25
1.4. Interacciones en el ISM	27
1.5. Velocidades relativas	28
1.6. Frentes de Choque en el ISM (visto sobre el ISM)	31
1.7. Frentes de Choque en el ISM (visto sobre el Frente de Choque)	31
1.8. Ley de continuidad en un fluido incompresible	33
1.9. Diagrama esquemático del mecanismo de primer orden.	36
1.10. Difusión en el ISM	36
1.11. Diagrama esquemático de un pulsar	38
1.12. Diagramas de Hillas	43
2.1. Lluvia Atmosférica Extendida	47
2.2. Partícula cargada en un campo magnético	50
2.3. Definición de las variables atmosféricas. Extraída de [1]	53
2.4. Visualización geométrica del cono de corte de rigidez magnética	56
2.5. Trayectorias de Rayos Cósmicos para distintos valores de rigidez magnética	57
2.6. Modelo de Heitler	62
2.7. Diagramas de Feynman	63
2.8. Cascada Electromagnética	76
3.1. Teorema del Límite Central	87
4.1. Espectro de muones en función del ángulo cenital. Visión general	101
4.2. Espectro de muones en función del ángulo cenital. Toma frontal	101
4.3. Espectro de muones en función del ángulo cenital. Coordenadas cilíndricas	102
4.4. Espectro de muones en función del ángulo cenital. Vista superior	103
4.5. Espectro de muones en función del ángulo azimutal en dos perspectivas	104
4.6. Espectro de muones en función del ángulo azimutal. Toma lateral	105

4.7. Espectro general de partículas	106
A.1. Emblema del Instituto KIT	111
A.2. Entrada al servidor del Cluster del Grupo Halley	112
A.3. <i>CRK-Tools</i>	113
A.4. Creando un proyecto	114
A.5. Configurando el proyecto-Parámetros primarios	115
A.6. Configurando el proyecto-Parámetros secundarios	116
C.1. Espectro de muones-Representación cartesiana	133
C.2. Espectro de muones-Representación cilíndrica	133
C.3. Espectro de muones-Representación frontal cartesiana	134
C.4. Espectro de muones-Representación cartesiana (Primera perspectiva) . . .	134
C.5. Espectro de muones-Representación cartesiana (Segunda perspectiva) . . .	135
C.6. Espectro de muones-Representación cartesiana lateral (Primera perspectiva)	135
C.7. Espectro de muones-Representación cartesiana lateral (Segunda perspectiva)	136
C.8. Espectro general de partículas	136

Índice de tablas

2.1. Valores numéricos de las funciones $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$, $\lambda'_1(s)$ y $\lambda''_1(s)$	69
2.2. Valores numéricos de las funciones $H_1(s)$, H_2 , $L(s)$ y $M(s)$	73
2.3. Cantidades importantes en la aproximación de Rossi&Greisen	74
3.1. Archivo de entrada a CORSIKA.	92
4.1. Parámetros para cálculo de fluencia en el Páramo de Piedras Blancas. . . .	97
4.2. Parámetros para cálculo de fluencia en el Pico Espejo.	98
4.3. Parámetros para cálculo de fluencia en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.	98
4.4. Parámetros para cálculo de fluencia en la Universidad Simón Bolívar. . . .	99
4.5. Estructura básica de los archivos .sec.bz2.	100
4.6. Ajuste para el espectro de secundarios-Páramo de Piedras Blancas. . . .	107
4.7. Ajuste para el espectro de secundarios-Pico Espejo.	107
4.8. Ajuste para el espectro de secundarios-Universidad Central de Venezuela. .	107
4.9. Ajuste para el espectro de secundarios-Universidad Simón Bolívar.	107

Introducción

El objetivo general del presente proyecto es generar data sintética asociada a procesos de producción de secundarios en Cascadas Aéreas Extensas, en cuatro localidades de interés astrofísico de Venezuela (Páramo de Piedras Blancas, Pico Espejo, Universidad Central de Venezuela y Universidad Simón Bolívar). Estos procesos se generan por la interacción de un Rayo Cósmico con algún átomo constituyente de la atmósfera.

Los Rayos Cósmicos han sido fenómeno de estudio durante muchos años, debido a su alta energía y, por consiguiente, a su capacidad para crear nuevas partículas. Estas partículas son aceleradas mediante intensos campos eléctricos y magnéticos (por distintos mecanismos de aceleración) y llegan al Sistema Solar, donde sus trayectorias son fuertemente afectadas por los mecanismos heliosféricos y por el aumento del campo magnético medio. Al entrar en contacto con la atmósfera terrestre, nuevos procesos empiezan a ocurrir entre los Rayos Cósmicos (denominados Primarios) y las partículas constituyentes de la atmósfera (Secundarios). Estos procesos de interacción dan como resultado la producción en cascada de un conjunto de partículas (fenómeno denominado Cascadas Aéreas Extensas) que se desarrolla a lo largo de la atmosfera, desde el punto de la primera interacción.

Un arreglo de detectores, situados en algún lugar dentro de la atmósfera, permite extrapolar el desarrollo de las Cascadas Aéreas Extensas a lo largo de la misma. Con esta información, y teniendo en cuenta los modelos teóricos asociados a la producción de secundarios, podemos obtener información sobre las partículas Primarias que originaron la cascada.

El estudio analítico de Cascadas Atmosféricas es complicado, debido a que la densidad atmosférica es ampliamente inhomogénea. Como dijimos anteriormente, la simulación de estos procesos con herramientas computarizadas, así como el estudio de los aspectos teóricos asociados a ellos, fueron el principal objetivo de estudio del presente Trabajo Especial de Grado.

En el Primer Capítulo del trabajo, se estudian los fundamentos teóricos y experimentales de los Rayos Cósmicos. En este ámbito, se presenta una pequeña recopilación histórica sobre el descubrimiento de los Rayos Cósmicos, las mediciones experimentales del Espec-

tro, y sobre los posibles procesos que pudieran acelerar partículas a las altas energías observadas en el Espectro. También se plantea la interacción de los Rayos Cósmicos con el Fondo de microondas, y como su propagación por el medio interestelar ocasiona una fuerte supresión en el flujo de Rayos Cósmicos a altas energías.

En el Segundo Capítulo del trabajo se estudian los fenómenos asociados a la propagación de los Rayos Cósmicos en el Sistema Solar, donde su trayectoria es fuertemente afectada por el aumento del campo magnético medio y por la presencia del viento heliosférico. Como dijimos anteriormente, una vez en las vecindades de la tierra, el Primario entra en contacto con las partículas constituyentes de la atmósfera, y (debido a su alta energía) genera una cascada de partículas Secundarias. El formalismo asociado a la producción de secundarios en una Cascada Aérea Extensa se estudia como parte final del Segundo Capítulo.

En el tercer Capítulo se plantea una breve revisión sobre cálculo de probabilidades y nociones estadísticas. Dentro de este contexto, se estudia el Método de Monte Carlo, el cual constituye una de las herramientas más usadas en el tratamiento y simulación de procesos que, debido a su naturaleza estocástica, son difíciles de tratar analíticamente. Como sección final de este capítulo, se presenta el estudio y descripción de una herramienta computarizada (desarrollada en el Instituto KIT, en Alemania) llamada CORSIKA, la cual fue especialmente diseñada para el estudio de Cascadas Aéreas Extensas.

En el último Capítulo se presenta la recopilación de criterios empleados en las simulaciones, los procedimientos específicos realizados para obtener la data sintética (usando herramientas suministradas por el Grupo Halley de la Universidad Industrial de Santander), y el análisis de resultados pertinente, elaborado en función de los modelos teóricos estudiados en los tres Capítulos anteriores.

Dentro de los resultados presentados, se estudió el análisis de muones y sus dependencias angulares (corroborando que el espectro de muones en la atmosfera es isotrópico respecto a la variable cenital, y anisotrópico respecto a la variable azimutal). También se estudió el espectro general de secundarios en la atmósfera, y se evidenció que el mismo puede ajustarse según leyes de potencias bien definidas.

Capítulo 1

Rayos Cósmicos

1.1. Introducción

Hoy en día, la física teórica, y en especial la física de partículas, cuenta con uno de los modelos más acabados para la representación de las interacciones fundamentales de la naturaleza, así como para el estudio de cada una de las partículas fundamentales que en ella existen: el Modelo Estándar de física de partículas. Sin embargo, debemos recalcar que estos descubrimientos han sido posibles gracias a los avances en tecnología e instrumentación de las últimas décadas, que permitieron construir grandes colisionadores y aceleradores donde se pudiera observar la producción de partículas que, debido a su alta energía, no se observan a simple vista.

Antes de estos descubrimientos, las únicas partículas en el universo con energías lo suficientemente altas como para crear nuevas partículas eran los Rayos Cósmicos.

Durante varias décadas se hicieron experimentos y montajes para tratar de comprender el origen de esta fuente de alta energía, hasta llegar a una definición clara sobre que es un Rayo Cósmico.

Se **define** [1] como *Rayo Cósmico* a toda partícula cargada de alta energía, generada fuera del sistema solar, que viaja a velocidades cercanas a la velocidad de la luz y que choca contra la tierra en cualquier dirección. Los Rayos Cósmicos, en general, son núcleos atómicos (desde los más livianos hasta el hierro), electrones, positrones y otras partículas subatómicas de alta energía. Nos referimos a estas partículas como *primarios* y, a partir de ahora, denotaremos la energía de los primarios como E_p .

1.2. Recuento Histórico

Esta sección presenta un recuento muy general sobre la historia de los Rayos Cósmicos; para mayor detalle, consultar [2] y [3]. Al final del siglo XIX, varios científicos, realizando estudios sobre conductividad en gases notaron que no importaba cuan meticulosamente aislaran los electroskopios cargados de posibles fuentes de radiación, estos se descargaban a pequeñas tasas.

En 1901, dos grupos distintos de científicos (alemanes e ingleses) se dedicaron a estudiar este fenómeno. Ambos concluyeron que debía existir algún tipo de radiación ionizante que descargaba los electroskopios. Aún más, propusieron que esta radiación ionizante podía provenir de fuentes que se encontraban fuera de la atmósfera (semejantes a los Rayos Catódicos, pero con un poder de penetración mucho mayor).

No fue sino hasta 1907 que se pudo corroborar esta hipótesis, cuando Theodore Wulf inventó un electroskopo capaz de medir la tasa de descarga en función de la altura [4]. Usando este electroskopo, Wulf subió a la cima de la torre Eiffel y notó que la velocidad de descarga parecía aumentar en forma proporcional a la altura, quedando corroborado que la radiación ionizante provenía de regiones más allá de la atmósfera.



Figura 1.1: Víctor Hess

Fuente: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/hess-facts.html.

Consultado: 25/9/2016

Este extraño resultado asombró a muchos científicos, entre ellos un colega de Wulf, el joven Víctor Hess (Figura 1.1). Hess obtuvo en 1912 una licencia para pilotar globos aeroestáticos, y en agosto de ese mismo año, realizó una serie de viajes con electroskopios

cargados a fin de medir en forma precisa la dependencia de la tasa de descarga en función de la altitud. En sus resultados, notó que para alturas pequeñas la tasa de ionización disminuye, pero por arriba de los 1500 m empieza a aumentar. Hess concluyó [5] que estos resultados podían ser explicados asumiendo que la fuente se encontraba más allá de la atmósfera y que la radiación en cuestión era de un alto poder de penetración.

Después de los trabajos de Hess, los Rayos Cósmicos se convirtieron en uno de los fenómenos más estudiados del siglo XX. En 1927, Clay observó una pequeña disminución en la intensidad de los Rayos Cósmicos en la franja del ecuador (respecto a cualquier latitud), con lo que concluyó que estas partículas debían estar eléctricamente cargadas, lo cual provocaría una desviación por efecto del campo magnético terrestre.

Luego de que un grupo de investigadores en Minesota descubrieran la presencia en la Radiación Cósmica de casi todos los elementos de la tabla periódica entre el H y el Fe, empezó la construcción de los modelos teóricos para tratar de explicar su origen y transporte estelar a través de la galaxia.



Figura 1.2: Enrico Fermi

Fuente: <http://www.nobelprize.org/nobelprizes/physics/laureates/1938/fermi-bio.html>.

Consultado: 27/9/2016

Fue Fermi (Figura 1.2), en 1949, quien logró un modelo lo suficientemente acabado y aceptado como para explicar la propagación de esta radiación, tratando los Rayos Cósmicos como un gas relativista de partículas cargadas moviéndose en un campo magnético interestelar. Este trabajo marcó el nacimiento de una nueva rama de estudio en física teórica, la **astrofísica de partículas**.

1.3. La naturaleza de los Rayos C3smicos

Como comentamos anteriormente, los Rayos C3smicos consisten en electrones, protones y n3ucleos at3omicos que han sido acelerados a altas energ3as. Su composici3n elemental nos proporciona informaci3n qu3mica acerca de la fuente que los emiti3, as3 como de su propagaci3n en el medio interestelar. La variaci3n de la masa y de la carga del primario en funci3n de su energ3a se relaciona con los cambios en los procesos de aceleraci3n y transporte a lo largo de la galaxia. Los Rayos C3smicos llegan a la tierra en todas direcciones, pero esto no necesariamente implica que sus fuentes los expulsen en cualquier direcci3n; a3n m3s, en su recorrido a lo largo del universo son constantemente dispersados por campos magn3ticos, lo que produce que su trayectoria original sea completamente desconocida.

Probablemente, estas par3culas fueron aceleradas por la explosi3n de supernovas (u otros medios) y han viajado muchas veces a trav3s de la galaxia, reorientadas por fuertes campos magn3ticos.

Definimos [6] como *Espectro de Rayos C3smicos* al flujo de part3culas primarias en funci3n de su energ3a. Para bajas energ3as (aproximadamente $E_p \leq 10^{10}\text{eV}$), el espectro de Rayos C3smicos est3 completamente dominado por el viento solar y los campos magn3ticos de la heli3sfera y magnet3sfera. A energ3as m3s altas (donde los efectos solares dejan de hacerse dominantes), el espectro puede ser ajustado como una ley de potencias de la forma

$$\left(\frac{dN}{dE_p}\right) \propto E_p^\alpha, \quad (1.3.1)$$

donde α es el 3ndice espectral, y es aproximadamente igual a -3 (lo cual nos dice que el flujo decae 3 3rdenes de magnitud por cada d3cada de energ3a de primario).

En la Figura 1.3 se observa el espectro de Rayos C3smicos discutido. En 3l, se evidencian tres regiones en las que se produce un cambio en el valor del 3ndice espectral. Para enfatizar los cambios en la imagen, se multiplic3 el flujo observado por E_p^2 (compensando la dependencia del 3ndice espectral medio). A estas regiones, en orden creciente de energ3a, se les conoce com3nmente como **rodilla**, **tobillo** y **supresi3n** (corte). Estas tres regiones se indican en la figura mediante el uso de flechas grises.

La rodilla se aprecia a energ3as del orden de $2 \cdot 10^{15}\text{eV}$ o $4 \cdot 10^{15}\text{eV}$, donde el 3ndice espectral cae de $\alpha = -2.7$ a $\alpha = -3$ para luego volver a $\alpha = -2.7$ en la regi3n del tobillo, a $E_p \simeq 4\text{EeV}$. Cada una de las regiones observadas tiene diversas explicaciones, relacionadas con los mecanismos de aceleraci3n, con la composici3n qu3mica de los Rayos C3smicos, o bien con la interacci3n durante la propagaci3n en el medio interestelar. La mayor3a de los modelos asocian a la rodilla con un cambio de composici3n hacia elementos pesados, producido por el agotamiento de los mecanismos de aceleraci3n gal3cticos para

elementos livianos [7]. La siguiente estructura, el tobillo, se asocia con la transición del espectro galáctico al espectro extragaláctico. Finalmente, la presencia de la supresión a $E_p \simeq 40\text{EeV}$ es asociada con la interacción de los Rayos Cósmicos con el fondo de radiación de microondas.

Ya teniendo una buena revisión sobre los aspectos más generales de los Rayos Cósmicos, nos disponemos a estudiar cuales son los posibles mecanismos capaces de acelerar partículas a tan altas velocidades, así como cuáles podrían ser las interacciones entre ellos y el material del que está constituido el medio interestelar (que seguidamente definiremos).

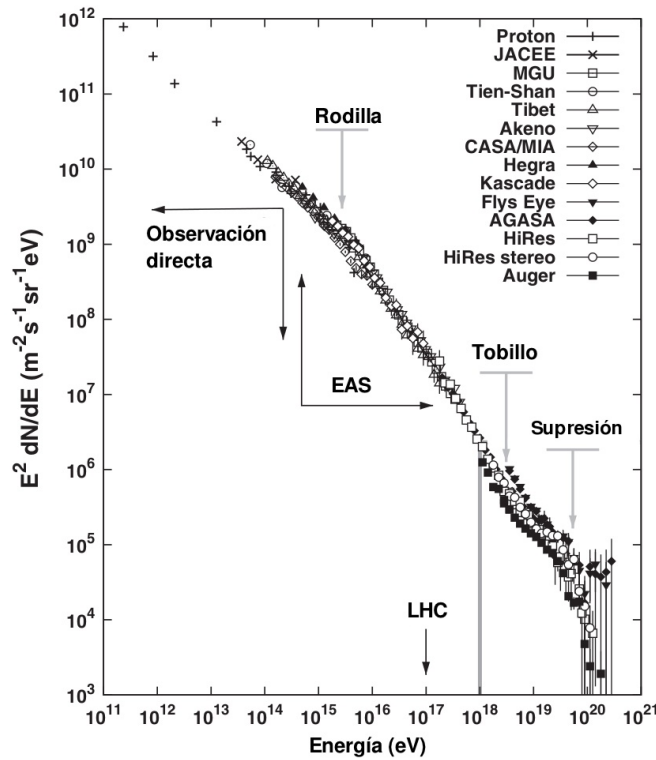


Figura 1.3: Espectro de Rayos Cósmicos

Extraída de [8]

1.4. Mecanismo de Aceleración (Bottom up)

1.4.1. Mecanismos de Aceleración Difusivos

Fue Enrico Fermi quien se percató por primera vez de que los Rayos Cósmicos no podían ser acelerados bajo ningún proceso termal (alguno de esta índole no sería capaz de mantener una única ley de potencias como la observada en la Figura 1.3). Describiremos a continuación este mecanismo de aceleración (conocido como **mecanismo de acelera-**

ci3n de Fermi) y una adaptaci3n sobre el mismo. Para informaci3n complementaria, consultar [8], [9] y [10]

Teor3a original de Fermi (*Mecanismo de Aceleraci3n de Segundo Orden*)

Definimos [9] *Medio interestelar* (ISM por sus cifras en ingl3s) al conjunto de materia que existe entre sistemas de estrellas y galaxias, que a su vez, se encuentra constituido por gases, polvo y Rayos C3smicos.

Estos gases, que principalmente se encuentran en estados i3nico, molecular y at3mico, se organizan en nubes de diferentes tama1os con fuertes campos magn3ticos y velocidades que rondan los $15Km/s$. Un Rayo C3smico que interactúa con estos gases gana energ3a cuando es dispersado por los campos magn3ticos de su interior.

Visto desde el sistema de referencia de la nube, proponemos:

- No hay cambio de energ3a en el primario. La dispersi3n se hace sin colisiones, ocurriendo un choque elástico entre el Rayo C3smico y la nube como un todo (claramente mucho m3s masiva).
- La direcci3n de salida del Rayo C3smico, en principio, es aleatoria.

Considere un Rayo C3smico ultra relativista con energ3a E_1 y momentum $p_1 \simeq E_1/c$ moviéndose en una direcci3n tal que su trayectoria hace un ángulo θ_1 con la propagaci3n de la nube. Despu3s de la dispersi3n, emerge con una energ3a E_2 , un momentum $p_2 \simeq E_2/c$ y formando un ángulo θ_2 con la propagaci3n de la nube (Figura 1.4). El cambio de energ3a es obtenido aplicando la transformaci3n de Lorentz correspondiente entre el sistema de referencia del laboratorio (sin primar), que suponemos aislado de cualquier interacci3n con el ISM, y el sistema de referencia de la nube (primado). As3, la energ3a del Rayo C3smico visto desde la nube es

$$E'_1 = \gamma(E_1 - E_1 v/c \cos \theta_1).$$

Con esto:

$$E'_1 = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1), \quad (1.4.1)$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Del mismo modo, transformando la energ3a de salida (despu3s de haber sufrido una o varias interacciones) al sistema de referencia del laboratorio, obtenemos

$$E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \theta'_2). \quad (1.4.2)$$

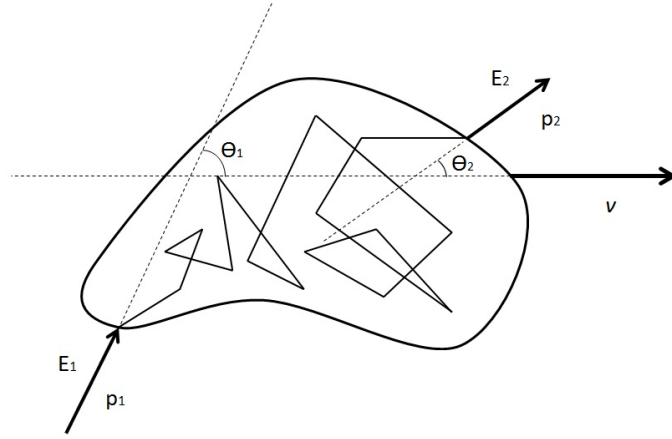


Figura 1.4: Interacciones en el ISM

Interacción entre un Rayo Cósmico y una nube de gas propagándose a velocidad v

Tomemos la consideración de que la dispersión se hace en ausencia de colisiones; es decir, la dispersión es netamente producida por el campo magnético interno. Como dicho campo magnético se asume rígidamente ligado a la nube (que consideramos muy masiva) no hay cambio en las líneas de campo vistas desde el sistema primado, y la energía del Rayo Cósmico en este sistema de referencia no cambia.

Despejando E'_2 de (1.4.2) y sustituyéndola junto con (1.4.1) en esta condición, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= E'_2 \\
 \gamma E_1(1 - \beta \cos \theta_1) &= \frac{E_2}{\gamma(1 + \beta \cos \theta'_2)} \\
 \frac{E_2}{E_1} &= \gamma^2(1 - \beta \cos \theta_1)(1 + \beta \cos \theta'_2) \\
 \frac{E_2}{E_1} - 1 &= \gamma^2(1 + \beta \cos \theta'_2 - \beta \cos \theta_1 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta'_2) - 1 \\
 \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{\Delta E_{21}}{E_1} &= \frac{(1 + \beta \cos \theta'_2 - \beta \cos \theta_1 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta'_2)}{1 - \beta^2} - 1. \quad (1.4.3)
 \end{aligned}$$

Necesitamos obtener los valores medios de $\cos \theta_1$ y $\cos \theta'_2$ para calcular el valor medio de la ganancia relativa en energía $\left\langle \frac{\Delta E_{21}}{E_1} \right\rangle$. Dentro de la nube, el Rayo Cósmico se dispersa con irregularidades magnéticas muchas veces, por lo que la dirección de salida es aleatoria; así:

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0. \quad (1.4.4)$$

El valor medio de $\cos \theta_1$ depende estrictamente de la tasa de colisiones entre el Rayo Cósmico y la nube, en función de los ángulos de choque. Esta tasa de colisiones es proporcional a la velocidad relativa entre la nube y la partícula (vista desde el sistema de

la nube), por lo que la probabilidad de tener una colisi3n en un 3ngulo θ_1 por unidad de 3ngulo solido Ω_1 debe ser proporcional a $V - v \cos \theta_1$, donde V es la velocidad del Rayo C3smico (Figura 1.5).

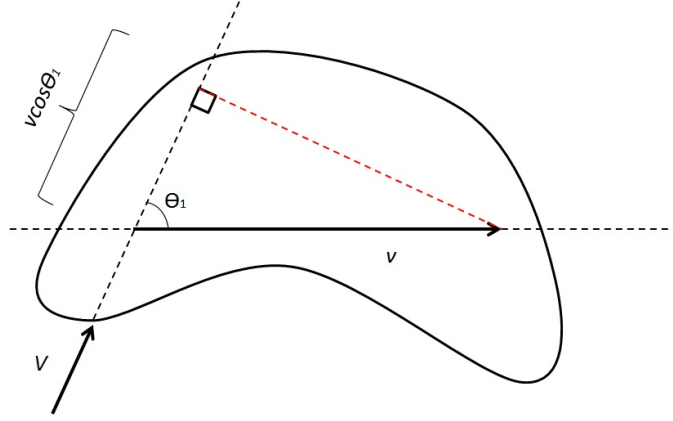


Figura 1.5: Velocidades relativas
Velocidad relativa del Rayo C3smico vista desde la nube

Para un Rayo C3smico movi3ndose a velocidades *ultra-relativistas* ($V = c$)

$$\frac{dP}{d\Omega_1} \propto (1 - \beta \cos \theta_1), \quad (1.4.5)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta_1 \rangle &= \frac{\int dP \cos \theta_1}{\int dP} = \frac{\int d\Omega_1 \frac{dP}{d\Omega_1} \cos \theta_1}{\int d\Omega_1 \frac{dP}{d\Omega_1}} \\ &= -\frac{\beta}{3}, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

con lo cual el valor medio de ganancia relativa de energ3a resultante se obtiene de (1.4.3):

$$\left\langle \frac{\Delta E_{21}}{E_1} \right\rangle \equiv \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{1 + \beta^2/3}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\frac{4}{3}\beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Como $v \ll c$ ($\beta = v/c \ll 1$), obtendremos

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \simeq \frac{4}{3}\beta^2. \quad (1.4.7)$$

Vemos que $\langle \Delta E/E \rangle \propto \beta^2$ es positivo, por lo que, en efecto, hay una ganancia relativa en la energ3a del Rayo C3smico al pasar a trav3s de la nube de gas; sin embargo, esta ganancia es de segundo orden en β (raz3n por la cual el mecanismo original de Fermi es

conocido como *de segundo orden*) y si $\beta \ll 1$, la ganancia por colisión es muy pequeña. Como agregado, se **define** [9] la *tasa de aceleración por unidad de energía* como

$$r_{ac}(E) \equiv \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle r_{col} \simeq \frac{4}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 r_{col}. \quad (1.4.8)$$

donde r_{col} es la tasa de colisión del Rayo Cósmico con la nube.

Teoría modificada (*Mecanismo de Aceleración de Primer Orden*)

- Complicaciones del Mecanismo de Segundo Orden.

Comencemos esta discusión comentando cuál es el verdadero problema con el mecanismo de aceleración de segundo orden. Previamente dijimos que la ganancia relativa en energía es proporcional a β^2 , y como $\beta \ll 1$, la tasa de aceleración es muy pequeña. Es fácil ver que la energía de un Rayo Cósmico que entra en la nube con energía E_0 después de sufrir n colisiones es

$$E = E_0 \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)^n, \quad (1.4.9)$$

de donde

$$n = \frac{\ln E/E_0}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)}, \quad (1.4.10)$$

lo cual ocurrirá con probabilidad p_e^n , donde p_e es la probabilidad de que un choque ocurra. El número de partículas con energía E_p mayor que E deberá ser proporcional a la probabilidad de haber sufrido n choques; es decir

$$N(E_p > E) \propto p_e^n, \quad (1.4.11)$$

de donde

$$\begin{aligned} \ln N(E_p > E) &= A + n \ln p_e = A + \frac{\ln E/E_0}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)} \ln p_e \\ &= \left[A - \frac{\ln E_0 \ln p_e}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)} \right] + \ln E \frac{\ln p_e}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)} \\ \ln N(E_p > E) &= B + (\alpha + 1) \ln E, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

donde $\alpha \equiv \frac{\ln p_e}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)} - 1$ se define como índice espectral y $B \equiv A - \frac{\ln E_0 \ln p_e}{\ln \left(1 + \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \right)}$ es una constante. Finalmente, obtenemos que el espectro de Rayos Cósmicos es

$$N(E_p > E) \propto E^{\alpha+1} \quad (\text{forma integral}) \quad (1.4.13)$$

$$\frac{dN}{dE} \propto E^\alpha \quad (\text{forma diferencial}) \quad (1.4.14)$$

Podemos ver que

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\ln p_e}{\ln(1 + \langle \frac{\Delta E}{E} \rangle)} - 1 \simeq \frac{\ln p_e}{\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle} - 1 \\ \alpha &\simeq \frac{3 \ln p_e}{4\beta^2} - 1,\end{aligned}\tag{1.4.15}$$

donde se us3 $\ln(1 + x) \simeq x$ si $x \ll 1$ y $\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle \simeq \frac{4}{3}\beta^2$.

A3n cuando el espectro es acertado (ya que concuerda con las observaciones experimentales), β es peque3o, lo que hace de este mecanismo de aceleraci3n un modelo extremadamente ineficiente (en la ecuaci3n anterior, el valor de p_e deber3a ser $\simeq 1$ para explicar los 3ndices espectrales discutidos en la secci3n anterior).

■ Sobre Fluidos Ideales y Frentes de Choque.

Para resolver este problema, la teor3a original de Fermi fue modificada por Axford, Lear y Skadron, quienes demostraron que la inclusi3n de Frentes de Choque en la teor3a, produce un mecanismo de aceleraci3n de primer orden con el mismo espectro que el de segundo orden. Estos Frentes de Choque se producen naturalmente en remanentes de supernovas.

Definimos [11] *supernova* como la etapa final de ciertas estrellas en la cual la misma colapsa en una explosi3n estelar que puede manifestarse de forma muy notable. Durante una supernova, varias masas solares son expulsadas a velocidades aproximadas de $10^4 Km/s$, y por tanto, el medio interestelar (con velocidades t3picas de $15 Km/s$) se apila formando una onda de choque que se aleja radialmente de la supernova.

En esta secci3n, por simplicidad, tomaremos tres aproximaciones importantes:

1. Trabajaremos con un enfoque centrado en part3culas de prueba (despreciando los efectos de la presi3n del Rayo C3smico en el Frente de Choque).
2. Adoptaremos una geometr3a plana del espacio.
3. Consideraremos solo Frentes de Choque no relativistas.

Al final de esta secci3n se comentan cuales son algunos efectos de considerar la presi3n del Rayo C3smico sobre el Frente de Choque y los efectos relativistas del mismo.

Supongamos un Frente propag3ndose radialmente (a velocidad v_s) en el ISM cuyo campo magn3tico hace que las part3culas del plasma interestelar se muevan a velocidad v_p (ver Figura 1.6). Procedemos a estudiar caracter3sticas importantes del ISM visto como un fluido ideal.

Definimos [12] como *Derivada Material* (Material Derivative) de un campo escalar, vectorial o tensorial cualquiera a la siguiente expresión

$$\frac{Dy}{Dt} \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla y, \quad (1.4.16)$$

donde $y = y(\vec{r}, t)$ es el campo tensorial en cuestión, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ es la velocidad del fluido y ∇y es la derivada covariante del campo.

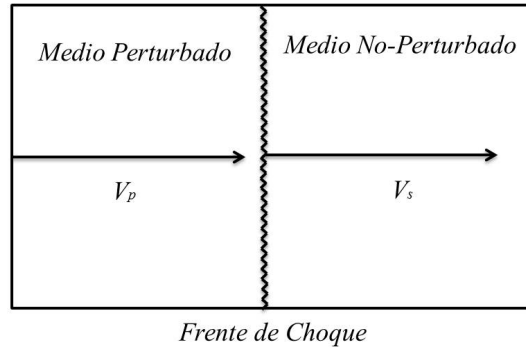


Figura 1.6: Frentes de Choque en el ISM (visto sobre el ISM)

Frente de Choque moviéndose a velocidad v_s en una porción del gas interestelar (visto desde en el sistema de referencia del ISM, que se mueve a velocidad v_p después de ser afectado por el frente)

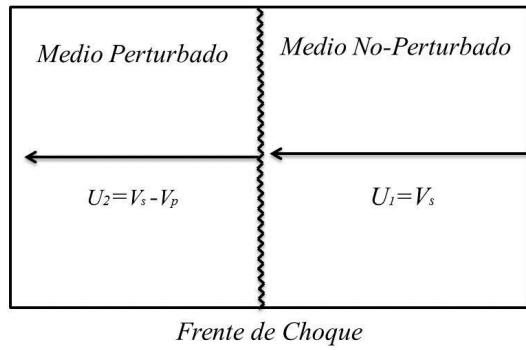


Figura 1.7: Frentes de Choque en el ISM (visto sobre el Frente de Choque)

Velocidades relativas del fluido interestelar visto desde el sistema de referencia del Frente de Choque

Aplicaremos la segunda ley de Newton a un volumen controlado de un fluido cualquiera, es decir

$$ma_i = f_i,$$

donde a_i , f_i son las componentes i -3simas de la aceleraci3n y la fuerza respectivamente, y m es la masa del volumen controlado. Como la definici3n (1.4.16) se reduce a la derivada total en el caso de la velocidad del fluido, si hacemos esta sustituci3n junto con la hip3tesis del Teorema de transporte de Reynolds en la segunda ley de Newton, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dV \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \int_{\Omega} dV \nabla_j \sigma_i^j + \int_{\Omega} dV f_i \\ 0 &= \rho \frac{Du_i}{Dt} - \nabla_j \sigma_i^j - f_i, \end{aligned}$$

donde σ_i^j es el tensor de Cauchy (Stress Tensor) y Ω es el volumen controlado de estudio del fluido.

Definimos [13] *Tensor de Cauchy* (Stress Tensor) como

$$\sigma_i^j = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.4.17)$$

donde σ es la Tensi3n Normal (Normal Stress) y τ es la Tensi3n de Corte (Shear Stress). Podemos separar la matriz en dos t3rminos, de modo que

$$\sigma_i^j = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} = -I_{3*3}p + \tau_i^j,$$

donde I_{3*3} es la matriz identidad, p es la presi3n del fluido y τ_i^j es el Tensor de Tensi3n (Deviatoric Stress Tensor).

Con estas sustituciones, obtenemos la siguiente ecuaci3n

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f}, \quad (1.4.18)$$

la cual se conoce como Ecuaci3n de Momentum (Cauchy Momentum equation [13]).

Adem3s de la ecuaci3n (1.4.18), necesitamos las ecuaciones de conservaci3n de la masa y de la energ3a, las cuales son respectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.4.19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}(E + p)) = 0, \quad (1.4.20)$$

donde $E = \frac{\rho}{2}u^2 + U$ es la densidad de energ3a y U es la energ3a interna del fluido por unidad de masa. Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de Euler.

Consideremos ahora un choque estable propag3ndose en el fluido interestelar en una dimensi3n 3nicamente y en ausencia de campos magn3ticos y gravitacionales externos. Si

sumamos a estas suposiciones la condición de que la velocidad, la densidad de masa y la energía no dependan explícitamente del tiempo, las ecuaciones (1.4.18), (1.4.19) y (1.4.20) toman una forma notoriamente sencilla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\rho u) &= 0 \\ \frac{d}{dx}(p + \rho u^2) &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(\rho \frac{v^3}{2} + (U + p)u\right) &= 0.\end{aligned}$$

Integrando estas ecuaciones sobre la discontinuidad del choque, obtenemos las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot:

$$\begin{aligned}(\rho u) \Big|_1^2 &= 0 \\ (p + \rho u^2) \Big|_1^2 &= 0 \\ \left(\rho \frac{u^3}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p u\right) \Big|_1^2 &= 0,\end{aligned}$$

donde hemos usado $U = p/(\gamma - 1)$, con γ la constante adiabática del fluido.

Como asumimos que el fluido es estable, estas condiciones de salto deben ser evaluadas en el sistema de referencia del frente de choque (en cualquier otro caso se deben incluir derivadas temporales). En nuestro sistema (Figura 1.7), el fluido se mueve con velocidad $u_1 = v_s$ hacia el frente y densidad ρ_1 , y se aleja del mismo con velocidad $u_2 = v_s - v_p$ y densidad ρ_2 . La tasa de compresión del ISM para este Frente de Choque (sin incluir ningún efecto relativista del mismo) está dada por

$$R = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

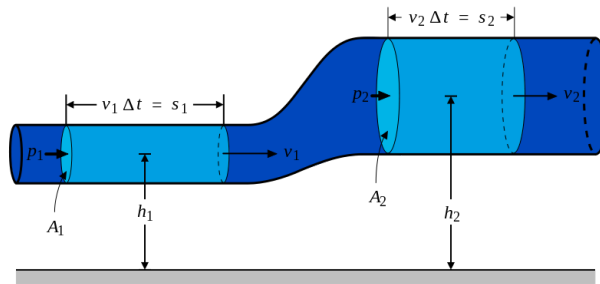


Figura 1.8: Ley de continuidad en un fluido incompresible

Fuente:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BernoullisLawDerivationDiagram.svg?>

Consultado el 17/10/2016

De la primera condici3n de salto, $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ (Figura 1.8), y $R = u_1/u_2$. Esta ecuaci3n, sustituida en la segunda condici3n de salto, da como resultado $p_2 = p_1 + \rho_1 u_1(u_1 - u_2)$. Si usamos estas dos ecuaciones para eliminar la dependencia de ρ_2 y p_2 de la 3ltima condici3n, obtenemos

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)u_2^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{\rho_1 u_1}\right)u_2 + u_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = 0,$$

donde hemos organizado la ecuaci3n en potencias de u_2 . Tomemos $t \equiv u_2/u_1$, con lo cual

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)t^2 - \frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{c_1^2}{u_1^2} + \gamma\right)t + \left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{c_1^2}{u_1^2}\right) = 0, \quad (1.4.21)$$

donde adem3s hemos sustituido la expresi3n de la presi3n en funci3n de la velocidad caracter3stica del sonido en el fluido $c_1 = (\gamma p_1/\rho_1)^{1/2} \simeq 15 \text{ Km/s}$.

Como estamos interesados en fluidos r3pidos ($u_1 \simeq 10^4 \text{ Km/s}$) podemos tomar el l3mite $\frac{c_1}{u_1} \ll 1$. As3, resolviendo la ecuaci3n (1.4.21) para t , obtenemos

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \end{aligned}$$

La primera soluci3n representa el caso trivial (sin Frente de Choque), mientras que la segunda es la soluci3n para un Frente de Choque fuerte. Con esto,

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = R. \quad (1.4.22)$$

En el sistema de referencia del ISM, vemos que $v_s = Ru_2$ y $v_p = u_1 - u_2 = (R-1)u_2$, con lo cual

$$\frac{v_s}{v_p} = \frac{R}{R-1}. \quad (1.4.23)$$

La supernova que produjo el Frente de Choque ioniza el gas interestelar y puede ser tratado como un gas monoat3mico ($\gamma = 5/3$), obteniendo $R = 4$.

■ Mecanismo de Aceleraci3n de Primer Orden.

Para calcular la ganancia en energ3a por unidad de frente atravesado, podemos visualizar las irregularidades magn3ticas del ISM a ambos lados del frente como las nubes de plasma magn3tico de la teor3a original de Fermi (Figura 1.9). Nuevamente, tomaremos que el Frente de Choque es no-relativista, de modo que podamos hacer la aproximaci3n de que part3culas ultra-relativistas son isotr3picas en ambos lados del frente. Si tomamos θ_1 como el 3ngulo con el que la part3cula ultra-relativista atraviesa el frente hacia el medio

perturbado y θ'_2 como el ángulo con el que emerge del mismo hacia el medio no perturbado (Figura 1.9), obtenemos

$$\frac{dP}{d\Omega_1} \propto (v_s + c \cos \theta_1) \simeq c \cos \theta_1 \quad (1.4.24)$$

$$\frac{dP}{d\Omega'_2} \propto (v_s - c \cos \theta'_2) \simeq -c \cos \theta'_2. \quad (1.4.25)$$

Nuevamente

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta_1 \rangle &= \frac{\int dP \cos \theta_1}{\int dP} = \frac{\int d\Omega_1 \frac{dP}{d\Omega_1} \cos \theta_1}{\int d\Omega_1 \frac{dP}{d\Omega_1}} \\ &= \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1}{\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1} \\ \langle \cos \theta_1 \rangle &= -\frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

De igual modo

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta'_2 \rangle &= \frac{\int dP \cos \theta'_2}{\int dP} = \frac{\int d\Omega'_2 \frac{dP}{d\Omega'_2} \cos \theta'_2}{\int d\Omega'_2 \frac{dP}{d\Omega'_2}} \\ &= \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta'_2 \sin \theta'_2 \cos^2 \theta'_2}{\int_0^{\pi/2} d\theta'_2 \sin \theta'_2 \cos \theta'_2} \\ \langle \cos \theta'_2 \rangle &= \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Con estos valores medios, podemos calcular el valor medio de la ganancia relativa en energía, $\Delta E/E$, con la ecuación (1.4.3):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &= \frac{1 + \beta \frac{2}{3} + \beta \frac{2}{3} - \beta^2 \frac{4}{9}}{1 - \beta^2} - 1 \\ &= \frac{\frac{4}{3}\beta + \frac{5}{9}\beta^2}{1 - \beta^2} \simeq \frac{4}{3}\beta \\ \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle &\simeq \frac{4}{3}\beta \simeq \frac{4}{3} \frac{v_p}{c} \simeq \frac{4}{3} \frac{(R-1)}{R} \frac{v_s}{c}. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Notemos que éste es un mecanismo de aceleración de primer orden en $\beta = v_p/c$, y por lo tanto, la ganancia relativa en energía puede ser mucho más grande que en el caso de la teoría original de Fermi.

Cada vez que el Rayo Cósmico cruce el frente ganará energía, sin importar en que dirección lo haga. Si el mismo está confinado entre las irregularidades del campo magnético, luego de n cruces su energía estará dada por la ecuación (1.4.9), donde el factor $\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle$ es ahora determinado por (1.4.28). Para obtener el espectro nuevamente, debemos encontrar

la probabilidad de que el Rayo C3smico cruce el Frente de Choque repetidas veces. Visto en el sistema de referencia del frente, es claro que hay un flujo de partículas energéticas neto fluyendo de un lado al otro (Figura 1.10). El flujo de Rayos C3smicos perdidos en plasma interestelar (despreciando efectos relativistas) es

$$f_{loss} = n_{CR} u_2 = n_{CR} \frac{v_s}{R}, \quad (1.4.29)$$

donde n_{RC} es la densidad de Rayos C3smicos por unidad de choque.

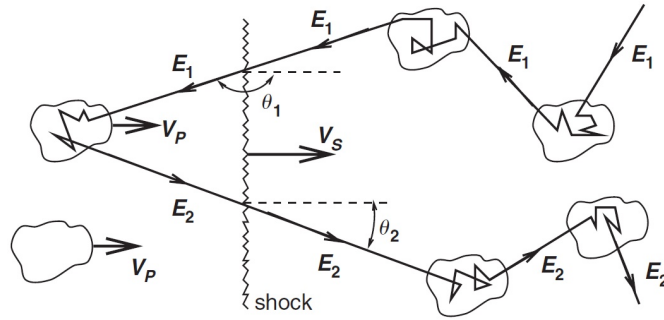


Figura 1.9: Diagrama esquemático del mecanismo de primer orden.

Interacción de un Rayo C3smico con energía E_1 con un Frente de Choque moviéndose a velocidad v_s . Extraída de [9]

Del otro lado del Frente de Choque, las partículas moviéndose a velocidad c y ángulo θ respecto a la normal del frente (visto en el sistema de referencia del laboratorio) se aproximan a velocidad $v_s + c \cos \theta$ (visto en el sistema de referencia del frente). Claramente, para cruzar de un lado al otro, $v_s + c \cos \theta > 0$ y $\cos \theta > -v_s/c$.

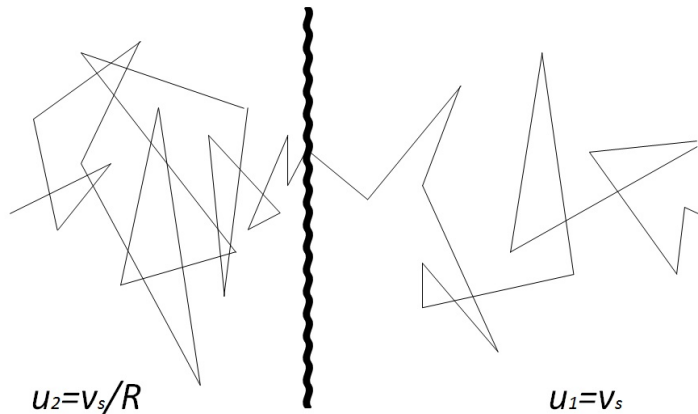


Figura 1.10: Difusión en el ISM

Difusión del Rayo C3smico vista desde el sistema de referencia del Frente de Choque

Asumiendo que el movimiento del Rayo Cósmico es isotrópico en el ISM (Figura 1.10), el flujo que atraviesa el frente es

$$\begin{aligned}
 f_{cross} &= n_{CR} \frac{1}{4\pi} \int (v_s + c \cos \theta) d\Omega = n_{CR} \frac{2\pi}{4\pi} \int_{-v_s/c}^1 d(\cos \theta) (v_s + c \cos \theta) \\
 &= \frac{n_{CR}}{2} \int_{-v_s/c}^1 dx (v_s + cx) = \frac{n_{CR}}{4v} (v_s + c)^2 \\
 f_{cross} &\simeq \frac{n_{CR}}{4} c.
 \end{aligned} \tag{1.4.30}$$

La probabilidad de cruzar una vez el Frente de Choque y perderse en medio perturbado es, entonces

$$Prob(escape) \equiv p_e = \frac{f_{loss}}{f_{cross}} \simeq \frac{4v_s}{Rc}. \tag{1.4.31}$$

$$\tag{1.4.32}$$

Así mismo, la probabilidad de regresar al frente de choque después de haberlo cruzado es

$$Prob(regreso) \equiv p_r = 1 - p_e. \tag{1.4.33}$$

En general, obtenemos que la probabilidad de cruzar al menos n veces el frente de choque es

$$Prob(cross \geq n) = (1 - p_e)^n, \tag{1.4.34}$$

Nuevamente, el espectro integral de energía debe ser

$$N(Ep > E) \propto (1 - p_e)^n, \tag{1.4.35}$$

donde E_p es la energía del primario en cuestión y n está dado por la ecuación (1.4.10). Como en el mecanismo de primer orden, obtenemos:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^\alpha, \tag{1.4.36}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha &\equiv \frac{\ln(1 - p_e)}{\ln(1 + \langle \frac{\Delta E}{E} \rangle)} - 1 \simeq \frac{-4v_s/Rc}{4/3 \frac{(R-1)}{R} v_s/c} - 1 \\
 &\simeq \frac{-3}{R-1} - 1 \simeq -\frac{3 - R + 1}{R-1} \\
 \alpha &\simeq -\frac{R+2}{R-1}.
 \end{aligned} \tag{1.4.37}$$

Para un gas interestelar monoatómico ($\gamma = 5/3$), obtenemos que $\alpha = -2$, lo cual representa una buena aproximación para los espectros observados experimentalmente.

Los modelos descritos anteriormente explican con cierta profundidad el espectro estudiado; sin embargo, son m1s que simplificados. La inclusi3n de la presi3n del Rayo C3smico en el perfil de choque, y en consecuencia en el espectro de part3culas aceleradas, es un problema complicado. Sus efectos sobre la aceleraci3n de part3culas a altas y bajas energ3as difieren entre s3. Otra aproximaci3n realizada es la consideraci3n de que el Frente de Choque es no relativista, situaci3n que no sucede en objetos astrof3sicos que podr3an ser fuentes de Rayos C3smicos de ultra alta energ3a. En este caso, las probabilidades de escape pueden llegar a ser tan altas como 0,5 , lo que implicar3a modificaciones adicionales a los modelos propuestos.

1.4.2. Mecanismos de Aceleraci3n Directos

Definimos [14] *Mecanismos de Aceleraci3n Directos* como aquellos que se basan en la aceleraci3n de part3culas mediante intensos campos el3ctricos en las inmediaciones de estrellas de neutrones j3venes y pulsares.

Pulsares de alta rotaci3n

Definimos [15] a un *pulsar* (Figura 1.11) como una estrella de neutrones que gira a altas velocidades y con intensos campos magn3ticos, que emite frentes de radiaci3n electromagn3tica. Consultar [15] para informaci3n adicional.

Supongamos un pulsar rotando a velocidad ω . **Definimos** *cilindro de luz*

$$R_C = \frac{c}{\omega} \quad (1.4.38)$$

como la superficie sobre la cual el plasma del pulsar se mueve a la velocidad de la luz.

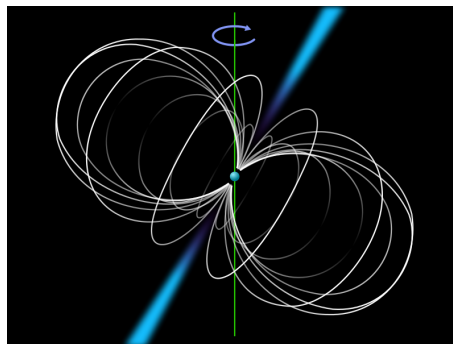


Figura 1.11: Diagrama esquem1tico de un pulsar

Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pulsar_schematic.svg.

Consultado: 20/10/2016

Debido al hecho de que la velocidad del plasma $\vec{v}$ varía rápidamente, $\vec{E}$ tiene fuertes variaciones locales. La superficie del pulsar se encuentra llena con plasma (de modo que la conductividad eléctrica $\sigma \rightarrow \infty$), y tomando en cuenta la ley de Ohm $J = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c)$, obtenemos que

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}/c, \quad (1.4.39)$$

donde $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Ahora bien, tomemos el campo magnético del pulsar (de radio R) como el de un dipolo magnético

$$\vec{B} = B_0 \frac{R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (1.4.40)$$

con el cual, si tomamos $\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \omega(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ y $d\vec{l} = d\hat{r}$, la diferencia de potencial entre el infinito y el cilindro de luz es

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \int d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c} \int d\vec{l} \cdot [(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}] \\ &= -\frac{1}{c} \int d\vec{l} \cdot \left(r\omega B_0 \frac{R^3}{r^3} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{r} - r\omega B_0 \frac{R^3}{r^3} (2 \cos^2 \theta \hat{r} - 2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}) \right) \\ &= \frac{1}{c} \int_R^\infty dr \omega B_0 \frac{R^3}{r^2} \sin^2 \theta = B_0 R^2 \frac{\omega}{c} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Las líneas de campo se extienden sobre el cilindro de luz hasta un ángulo $\theta_0 = \sqrt{\omega R/c}$, por lo que la energía máxima que puede alcanzar un Rayo Cósmico que entra en las inmediaciones de un pulsar es

$$E_{max} \equiv eZ\Delta\phi = eZB_0 R^2 \frac{\omega}{c} \sin^2 \theta_0 \simeq eZB_0 R^3 \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (1.4.41)$$

donde Z es el número atómico del núcleo de la partícula. En este modelo vemos que un pulsar joven con una rápida velocidad de rotación es un buen mecanismo de aceleración.

Magnetares

El problema principal del modelo de pulsares de alta rotación es que la diferencia de potencial $\Delta\phi$ que puede ser utilizada para la aceleración del Rayo Cósmico es mucho más pequeña que las pérdidas en energía debidas, por ejemplo, a la curvatura de la radiación emitida por el pulsar. En 1969 se comprobó que para pulsares normales no es posible alcanzar las energías de los Rayos Cósmicos de ultra alta energía [15]. Sin embargo, existen estrellas de neutrones con períodos de rotación del orden de milisegundos e intensos campos magnéticos (las cuales se conocen comúnmente como *magnetares* [16]) que pudieran acelerar partículas a energías tan altas como las vistas en el espectro de Rayos Cósmicos [17].

Supongamos un magnetar rotando con una velocidad angular Ω . Sabemos que rotores con velocidades relativistas poseen un voltaje sobre su magnet3sfera con magnitud [17]

$$\varphi_{mag} = \frac{\mu}{R^2} = \frac{\Omega^2 \mu}{c^2}, \quad (1.4.42)$$

donde μ es el momento magn3tico asociado al campo de la estrella, y R es el radio de su respectivo cilindro de luz (1.4.38). Con este modelo, una part3cula que entra en las inmediaciones del magnetar experimenta una ganancia en energ3a

$$E(\Omega) = Ze\eta\varphi_{mag} = Ze\eta\frac{\Omega^2 \mu}{c^2}, \quad (1.4.43)$$

donde η es la fracci3n de l3neas de campo atravesadas por cada part3cula en su camino desde el interior de la estrella hacia el exterior.

Para calcular la tasa electromagn3tica de energ3a perdida, debemos usar el resultado de la radiaci3n de un dipolo (com3nmente tomado como $\dot{E}_{em} = -c\dot{\varphi}_{mag}^2$) y promediarlo con un factor geom3trico $2/3 \sin^2 \theta$ que atribuimos a la curvatura de la radiaci3n emitida, donde θ es el 3ngulo entre la orientaci3n del dipolo y el eje de rotaci3n de la estrella. As3

$$\dot{E}_{em} = -c\frac{2}{3}\dot{\varphi}^2 \frac{\int d\Omega \sin^2 \theta}{\int d\Omega} = -\frac{4}{9} \frac{\Omega^4 \mu^2}{c^3}. \quad (1.4.44)$$

Si las corrientes de conducci3n en el plasma son las responsables del campo electromagn3tico, la tasa de cambio de la energ3a de una part3cula en el magnetar es

$$\dot{E}(\Omega) = ZI\varphi_{mag} = Zec\dot{N}\varphi_{mag}, \quad (1.4.45)$$

donde hemos tomado

$$I = ec\dot{N} \quad (1.4.46)$$

$$\dot{N} = \frac{\Omega^2 \mu}{ec}, \quad (1.4.47)$$

como la corriente sobre la superficie del plasma y la tasa de part3culas aceleradas respectivamente.

Para construir la forma del espectro de Rayos C3smicos acelerados por este mecanismo, debemos tomar el diferencial de part3culas aceleradas y reescribirlo de la siguiente manera

$$dN = -\frac{dN}{dt}dt = -\frac{dN}{dt} \frac{dt}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\gamma} d\gamma, \quad (1.4.48)$$

con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Claramente, necesitamos $\dot{\Omega}$. La conservaci3n de energ3a implica que la ganancia del Rayo C3smico debe ser igual a las p3rdidas que sufre el magnetar mediante la emisi3n de

radiación electromagnética, más las producidas por la propagación de ondas gravitacionales. Es decir

$$\dot{\Omega} = -\frac{\dot{E}(\Omega)}{I\Omega} = -\frac{\dot{E}_{em} + \dot{E}_{GW}}{I\Omega}, \quad (1.4.49)$$

donde I es el momento de inercia asociado al magnetar. Las pérdidas del canal electromagnético están representadas por la ecuación (1.4.44), mientras que las pérdidas debidas a la propagación de ondas gravitacionales son [18]

$$\dot{E}_{GW} = -\frac{32}{5} \frac{GI^2 \varepsilon^2 \Omega^6}{c^5}, \quad (1.4.50)$$

donde ε es la excentricidad del ecuador de la estrella (la cual en el modelo se supone constante). Usando (1.4.44) y (1.4.50) podemos reescribir $\dot{\Omega}$ de la ecuación (1.4.49) como

$$\dot{\Omega} = -\frac{4}{9} \frac{\mu^2 \Omega^3}{Ic^3} \left\{ 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_g} \right)^2 \right\}, \quad (1.4.51)$$

donde Ω_g^2 es la velocidad angular a la cual las pérdidas electromagnéticas y las asociadas a la propagación de ondas gravitacionales se igualan, y queda determinada según

$$\Omega_g^2 = \frac{5}{72} \frac{\mu^2 c^2}{GI^2 \varepsilon^2}. \quad (1.4.52)$$

Sustituyendo (1.4.43), (1.4.47), (1.4.51) en (1.4.48) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\gamma} &= \dot{N} \frac{dt}{d\Omega} mc^2 \frac{d\Omega}{dE} = \frac{\Omega^2 \mu}{Zec} \frac{1}{\frac{4}{9} \frac{\mu^2 \Omega^3}{Ic^3}} \left\{ 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_g} \right)^2 \right\}^{-1} mc^2 \frac{c^2}{e\eta\mu 2\Omega} \\ \frac{dN}{d\gamma} &= \frac{9}{8} \frac{Ic^2}{Ze\mu\gamma} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\gamma_g} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos que el espectro de Rayos Cósmicos en este modelo está dado por una ley de potencias de la forma

$$\frac{dN}{dE} = \frac{9}{8} \frac{Ic^2}{Ze\mu E} \left\{ 1 + \frac{E}{E_g} \right\}^{-1}, \quad (1.4.53)$$

donde $E_g = mc^2 \gamma_g$ es la energía a la cual las pérdidas electromagnéticas se igualan a las pérdidas por radiación gravitacional. Estas pérdidas afectan directamente a la velocidad de rotación del magnetar, haciendo que rápidamente la capacidad de aceleración decaiga. Después de un tiempo aproximado de

$$\tau_d = \frac{ZI}{BRE_d}, \quad (1.4.54)$$

desde la formación del magnetar, su capacidad de aceleración ha caído hasta una energía E_d . Para un magnetar típico, los tiempos de decaimiento son del orden de días, tiempo para el cual el magnetar ha podido acelerar partículas hasta las energías del tobillo. Este resultado es la principal debilidad de este modelo, ya que teniendo en cuenta la tasa de formación de un magnetar, ni aún con modelos más optimistas podríamos explicar el flujo observado a energías más altas.

Clasificaci3n de Hillas

Hasta este punto, hemos analizado distintos mecanismos de aceleraci3n (tanto difusivos como directos) que involucran campos magn3ticos que, ya sea por su intensidad o por los grandes volúmenes donde actúan, son capaces de incrementar la energía cin3tica de partículas cargadas. Generalizando estas proposiciones, Hillas en 1984 [19] propuso que debía existir una relaci3n entre el tamaío de los objetos astrofísicos y la intensidad del campo magn3tico generado.

El radio de Larmor de una partícula con energía E , en las inmediaciones de una estrella cualquiera que posee un campo magn3tico B , es

$$r_L = \frac{E}{ZeB}, \quad (1.4.55)$$

por lo que el diámetro de su trayectoria puede ser (como caso extremo) $L_s = 2R$, siendo R el radio de la estrella en cuesti3n. Con esto

$$E_{max} = ZeBR.$$

Estrictamente, B solo representa la componente perpendicular del campo en la direcci3n de movimiento, por lo que la capacidad de aceleraci3n debe ser corregida por un factor η que tenga en cuenta el mecanismo asociado a la fuente. De esta manera

$$E_{max} = \eta ZeBR, \quad (1.4.56)$$

siendo

$$\begin{cases} \eta = \beta^2 & , \text{ para el mecanismo de aceleraci3n de segundo orden} \\ \eta = \beta & , \text{ para el mecanismo de aceleraci3n de primer orden} \\ \eta = \gamma\beta & , \text{ para frentes de onda relativistas} \\ \eta \propto \Omega^2 & , \text{ para magnetares y pulsares} \end{cases}$$

La ecuaci3n (1.4.56) demuestra que existe una estrecha relaci3n entre el campo magn3tico de una fuente aceleradora y el volumen de espacio ocupado por la misma. Hillas fue el primero en deducir esta relaci3n y darle una buena interpretaci3n; en su diagrama (Figura 1.12), el $\log B$ es usualmente tomado en el eje y y el $\log R$ en el eje x . Aplicando logaritmo en la ecuaci3n (1.4.56), obtenemos

$$\log E_{max} = \log(\eta Ze) + \log B + \log R,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \log B &= \log E_{max} - \log(\eta Ze) - \log R \\ y(E_{max}) &= C(E_{max}) - x, \end{aligned}$$

donde $y(E_{max}) \equiv \log B$ y $x \equiv \log R$. Finalmente, vemos que para cada valor de energía máxima existe una relación explícita entre la intensidad del campo acelerador y el tamaño de la fuente.

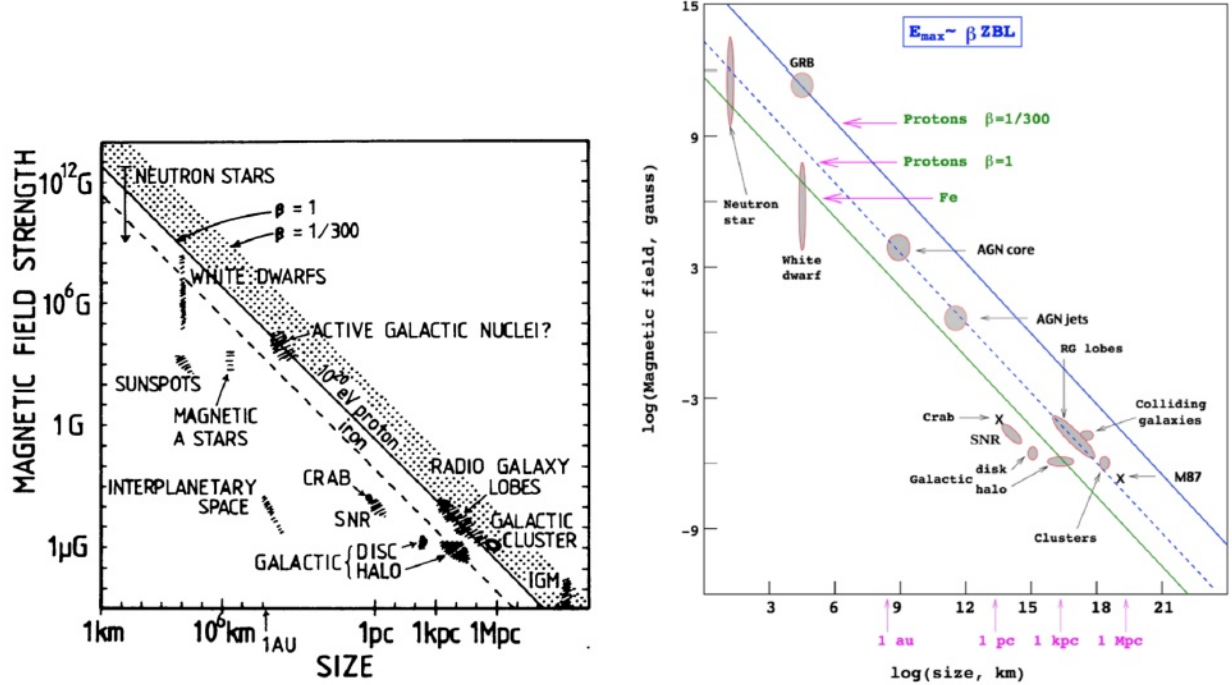


Figura 1.12: Diagramas de Hillas

Diagrama de Hillas en su versión original (izquierda) y su versión moderna (derecha), donde se ven las distintas posibilidades de fuentes aceleradoras para distintos valores de energía máxima. Extraída de [8]

1.5. Modelos de decaimiento (Top down)

Aún con las posibles correcciones, todos los mecanismos de aceleración propuestos anteriormente presentan diversos problemas para explicar el flujo de Rayos Cósmicos a altas energías. Los modelos *top down* son una variante de mecanismo de aceleración que se basan en la inestabilidad de partículas supermasivas, generadas a comienzos del universo, y que decaen hasta el tiempo presente. En las últimas instancias de este proceso, algunos fotones, leptones y unos pocos nucleones son producidos directamente con energías lo suficientemente altas como para explicar las regiones extremas del espectro de Rayos Cósmicos sin ningún mecanismo de aceleración.

Estas partículas deben verificar dos condiciones:

1. Deben decaer en distancias $d \leq 100 Mpc$ para que no se vean demasiado afectadas

por su propagaci3n (t3pico que se explicar3 en la proxima secci3n).

2. Su densidad y ritmo de decaimiento debe ser compatible con el flujo observado experimentalmente (Figura 1.3).

Sin embargo, estas condiciones (junto al hecho de que el tiempo de vida media de las part3culas debe ser comparable con la edad del universo) imponen fuertes restricciones a los fundamentos te3ricos de los modelos top down. Estos problemas, hasta la fecha, no han sido resueltos completamente.

1.6. Propagaci3n de Rayos C3smicos

La propagaci3n de los Rayos C3smicos de ultra alta energ3a (originados por fuentes extragal3cticas) es fuertemente afectada por la presencia de la radiaci3n de fondo c3smico de microondas (CMBR por sus siglas en ingl3s), la cual est3 compuesta por fotones que proceden de los comienzos del universo, y que obedecen el espectro de cuerpo negro propuesto por Plank [20]:

$$u_\gamma = \frac{6\zeta(4)}{\pi^2(\hbar c)^3} \quad (1.6.1)$$

$$\eta_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{\tau}{\hbar c} \right)^3, \quad (1.6.2)$$

con una temperatura de 2,73K y una energ3a media $E \simeq 0,6\text{meV}$.

Procedemos a estudiar estas posibles interacciones. Para consultas posteriores, revisar [21]. Supongamos un prot3n energ3tico producido en alg3n acelerador (como los objetos astrof3sicos que hemos estado estudiando), raz3n por la cual alcanza altas energ3as al viajar por el vac3o interestelar. En estas condiciones, si se dispersa con alguna otra part3cula (tal que se conserve la energ3a y el momento total del sistema en la colisi3n), su energ3a pudiera ser la suficiente como para crear nuevas part3culas. En particular, este prot3n puede dispersarse con un fot3n de la radiaci3n de fondo c3smico (γ_{CMB}) seg3n alguna de las siguientes reacciones:

$$p^+ + \gamma_{CMB} \rightarrow p^+ + \pi^0 \quad (1.6.3)$$

$$\rightarrow n^0 + \pi^+ \quad (1.6.4)$$

$$\rightarrow \Delta_{1232}^+ + \pi^0 \rightarrow p^+ + \pi^0 \pi^0 \quad (1.6.5)$$

$$\rightarrow p^+ + \rho^0 \rightarrow p^+ + \pi^0 \pi^+ \quad (1.6.6)$$

Supongamos un escenario donde ocurre la segunda de las cuatro reacciones presentadas anteriormente. La presencia del pi3n cargado asegura la conservaci3n de la carga, pero

la verdadera pregunta es qué energía debe tener el protón para que este proceso sea posible. Esta es una pregunta importante, ya que de ser así, Rayos Cósmicos con energías superiores a las de este protón se dispersarían con fotones del fondo cósmico de microondas en su viaje a la tierra y se degradarían en neutrones y piones, ocasionando que nunca sean detectados.

Procedemos a igualar la suma del *cuadri-momentum* inicial con la suma del *cuadri-momentum* final (es decir, el del pión y el del neutrón) en el sistema de referencia de su centro de masa, cosa que podemos hacer ya que el cuadri-momentum es un invariante de Lorentz y cualquier observador inercial obtendrá el mismo valor al realizar la medida.

Desde el punto de vista de *Scattering Theory*, **definimos** [22] la *variable de Mandelstam* s como

$$s = (P_p^\mu + P_\gamma^\mu)(P_{p\mu} + P_{\gamma\mu}) = (P_n^\mu + P_\pi^\mu)(P_{n\mu} + P_{\pi\mu}),$$

donde P_p^μ es el cuadri-momentum del protón y P_γ^μ el del fotón

Si queremos la condición mínima para que el proceso dado por la reacción (1.6.4) ocurra, supondremos que el pión y el neutrón son producidos en reposo respecto a su centro de masa, de modo que su momentum total es igual a cero ($\vec{P}_n + \vec{P}_\pi = \vec{0}$). Obtenemos así, la siguiente condición para que el proceso de producción de pares sea posible

$$(P_p^\mu + P_\gamma^\mu)(P_{p\mu} + P_{\gamma\mu}) = P_p^\mu P_{p\mu} + 2P_p^\mu P_{\gamma\mu} + P_\gamma^\mu P_{\gamma\mu} = -(m_n + m_\pi)^2 c^2,$$

donde $P_p^\mu P_{p\mu} = -m_p^2 c^2$ y $P_\gamma^\mu P_{\gamma\mu} = 0$. Con esto, la ecuación anterior se reduce a

$$-m_p^2 c^2 + 2P_p^\mu P_{\gamma\mu} = -(m_n + m_\pi)^2 c^2. \quad (1.6.7)$$

El siguiente paso es evaluar $P_p^\mu P_{\gamma\mu}$. Es importante recalcar que usaremos la métrica de Minkowski $(-, +, +, +)$. Para maximizar aún más el valor disponible de energía, asumiremos que la colisión es frontal (tomando direcciones contrarias para los momentum de las partículas) y diremos que el protón se mueve a velocidades *ultra-relativistas* ($E_p = \vec{P}_p c$, de modo que $\vec{P}_p = E_p/c$). Sus cuadri-momentum serán

$$P_p = \begin{pmatrix} E_p/c \\ E_p/c \end{pmatrix}$$

$$P_\gamma = \begin{pmatrix} E_p/c \\ -E_p/c \end{pmatrix}.$$

Con esto:

$$\begin{aligned} P_p^\mu P_{\gamma\mu} &= -\frac{E_p E_\gamma}{c^2} + \left(\frac{E_p}{c}\right) \left(\frac{-E_\gamma}{c}\right) \\ &= \frac{-2E_p E_\gamma}{c^2}, \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

y al sustituir en (1.6.7) y despejar E_p , obtenemos

$$E_p = \frac{(m_n c^2 + m_\pi c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{4E_\gamma}. \quad (1.6.9)$$

Sustituyendo en la ecuaci3n anterior la masa del neutr3n, la masa del prot3n, la masa del p3on y la energ3a t3pica de la radiaci3n de fondo c3smico, obtenemos que $E_p = 3 \cdot 10^{20} \text{eV}$. Como consecuencia, no podemos esperar detectar Rayos C3smicos con energ3as mayores a 10^{20}eV aproximadamente.

A este efecto de interacci3n entre Rayos C3smico de ultra alta energ3a con las part3culas del CMBR se le conoce como efecto GZK, y la energ3a l3mite de cada reacci3n de producci3n se le conoce como *umbral* (cut-off). Cabe acotar que la observaci3n de energ3as superiores al l3mite calculado anteriormente no invalida el efecto; simplemente significa que la fuente emisora es cercana. Adem3s, el efecto GZK es en realidad una supresi3n en el flujo de Rayos C3smicos a energ3as mayores a las del umbral, raz3n por la cual se observa un cambio en el 3ndice espectral en la Figura 1.3 y com3nmente se dice que es una posible explicaci3n del *corte*.

Capítulo 2

Lluvias Atmosféricas Extendidas

2.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado los fenómenos asociados a la producción de Rayos Cósmicos en el espacio. Una vez en el sistema solar, una nueva serie de fenómenos empiezan a ocurrir (ajenos a los mecanismos explicados anteriormente). En primer lugar, el campo magnético medio se incrementa en la región de transición del medio interestelar a la heliósfera solar, y esto (junto con el transporte heliosférico) modifica la trayectoria del Rayo Cósmico.

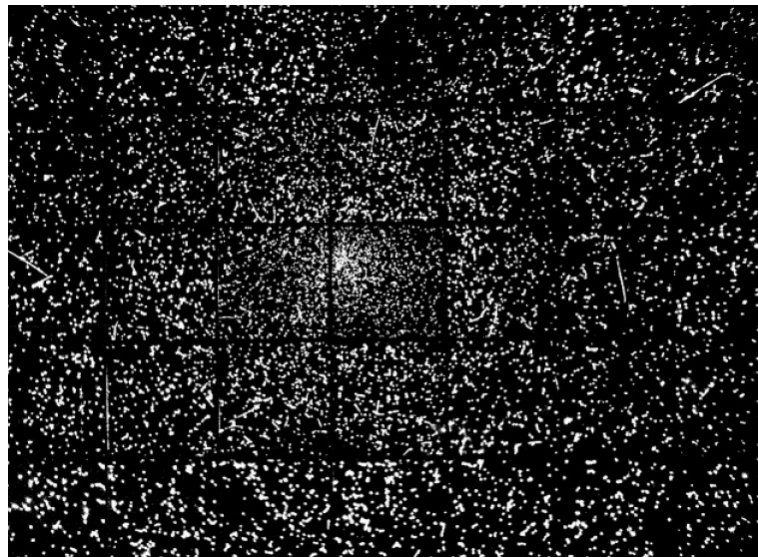


Figura 2.1: Lluvia Atmosférica Extendida

Región central de una lluvia casi vertical detectada por un arreglo de 35 cámaras de descarga de $1m^2$ cada una, situado en la Universidad de Leeds. Extraída de [1]

Seguidamente, los primarios interactúan con la atmósfera terrestre, produciendo un gran número de partículas (que denotaremos como *secundarios*). En la Figura 2.4 se aprecia la región central de una lluvia similiar a alguna de las observadas por Pierre Auger (pionero en el estudio de este tipo de fenómenos). Es importante observar que la densidad de puntos disminuye conforme aumenta la distancia a la región central de la lluvia, caracterizada por la mayor densidad de partículas. Al mismo tiempo, el tamaño de los puntos aumenta, lo cual es un indicativo de la dispersión lateral de las partículas en la lluvia.

En este capítulo se desarrollan los principales temas relacionados con la propagación de Rayos Cósmicos en las fronteras del sistema solar, así como la física asociada a las Cascadas Atmosféricas.

2.2. Ecuación de transporte de los Rayos Cósmicos

En el capítulo anterior estudiamos las formas mediante las cuales una partícula podía obtener las altas energías que se aprecian en el espectro de Rayos Cósmicos (Figura 1.3); sin embargo, cuando las partículas entran en las inmediaciones del sistema solar, el aumento del campo magnético y el movimiento difusivo del viento solar hacen que su trayectoria se vea fuertemente afectada.

Este mecanismo difusivo-convectivo permite asociar a la propagación de los Rayos Cósmicos en el sistema solar (y en general en su recorrido por el medio interestelar) con una ecuación de transporte. Esta ecuación (formulada por Parker inicialmente) es muy densa y general, por lo que es comúnmente usada en modelos de propagación y aceleración de Rayos Cósmicos en plasmas astrofísicos. A continuación, tomaremos una deducción estándar de la ecuación de Parker. Para un estudio más detallado, revisar la sección 2.3 de [23]

La ecuación de Parker tiene su origen en el principio de continuidad, que establece que la tasa de cambio del número de partículas en función del tiempo en un volumen dado debe ser igual a la tasa de partículas que fluyen a través de la superficie que encierra al volumen, más la tasa a la cual las partículas son creadas ó destruidas mediante algún proceso físico (tales como ionización, recombinación, colisiones, etc) en ese volumen. De esta manera,

$$\frac{dN}{dt} = - \oint d\vec{A} \cdot \vec{S} + Q,$$

donde $d\vec{A}$ es el diferencial de área que encierra al volumen V en cuestión y Q es la fuente de creación o destrucción (con unidades de partículas por unidad de tiempo).

Usando el Teorema de Gauss, obtenemos

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = q', \quad (2.2.1)$$

donde $\eta(\vec{r}, t)$ y q' son las densidades de partículas y creación/destrucción por unidad de volumen respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} Q &= \int dV q'(\vec{r}) \\ N &= \int dV \eta(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

La física asociada al problema está contenida en los procesos que causan el flujo $\vec{S}$. En el caso del viento solar, el mismo posee dos términos: el asociado a las dispersiones en las irregularidades del campo magnético de la heliósfera, y el debido al movimiento convectivo del mismo viento solar (el cual diremos que se realiza a una velocidad $\vec{V}$). El flujo convectivo es simple, y se puede escribir como $\vec{S}_c = n\vec{V}$ (donde n es una constante con unidades apropiadas). Sin embargo, el flujo debido a las irregularidades magnéticas es más complicado, y ha sido tema de estudio desde los comienzos del siglo XX.

En los paneles de la Figura 2.2 vemos las distintas formas en las que partículas cargadas pueden ser dispersadas al encontrarse con irregularidades magnéticas de la misma escala que el radio de Larmor de su trayectoria. En ella, vemos que la forma de la dispersión depende en gran medida de la fase de giro de la partícula en el momento en el que empieza a sentir la irregularidad. Podemos ver que el ángulo de dispersión de la partícula en el campo magnético es aleatorio. Si además, la densidad de partículas a lo largo de la línea de campo es constante, este proceso no resulta en un flujo neto. Muy por el contrario, si hay un gradiente en el número de partículas a lo largo del campo, el ángulo de dispersión resulta en un flujo dado por la Ley de Fick: $\vec{S}_d = -\kappa \nabla \eta$, donde κ es el coeficiente de difusión. En realidad, partículas cargadas no cambian rápidamente entre líneas de campo magnético con excepción de dos procesos: dispersiones perpendiculares o desplazamientos debidos a gradientes de curvatura, por lo que la expresión anterior debería poseer dos componentes, tales que $\vec{S}_d = \kappa_{||} \nabla \eta_{||} + \kappa_{\perp} \nabla \eta_{\perp}$, donde $\kappa_{||}$ y $\kappa_{\perp}$ son los coeficientes de dispersión paralelo y perpendicular.

Una simplificación interesante resulta de la formulación de la propagación difusiva de partículas en medios como los explicados anteriormente cuando se hace bajo el formalismo del tensor de difusión de Rayos Cósmicos (Cosmic Rays Diffusion Tensor), **definido** [24] en forma general como

$$K = \kappa_{ij} \equiv \kappa_{\perp} \delta_{ij} + (\kappa_{||} - \kappa_{\perp}) \hat{B}_i \cdot \hat{B}_j + \epsilon_{ijk} \kappa_A \hat{B}_k, \quad (2.2.2)$$

siendo $\hat{B}_i$ la componente i -ésima del vector unitario en la dirección de $\vec{B}$. Notar que hemos incluido el *coeficiente de difusión antisimétrico* κ_A en la definición anterior. Los términos

de difusión simétricos son debidos a fluctuaciones de pequeña escala en el campo magnético; en contraste, el coeficiente de difusión antisimétrico contiene la difusión de partículas causadas por variaciones espaciales de campos magnéticos de gran escala.

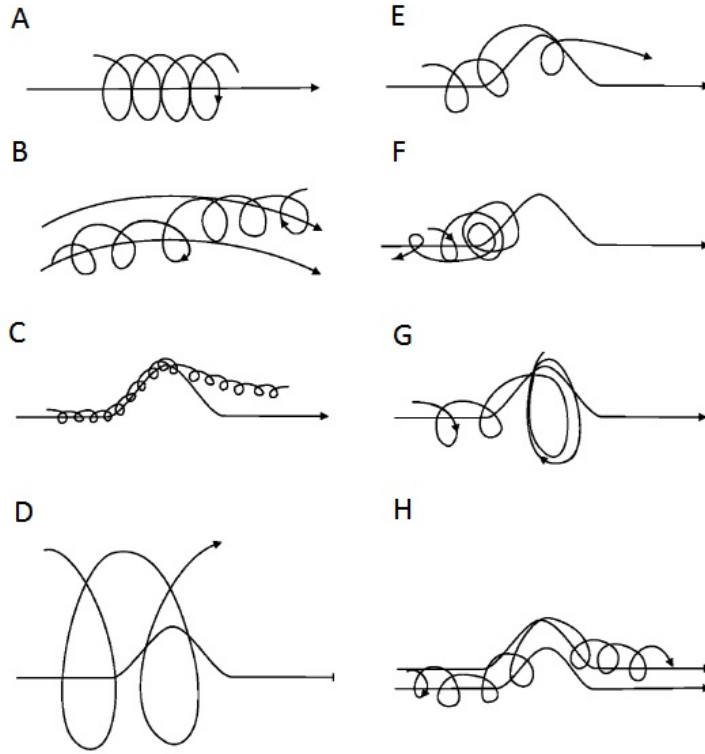


Figura 2.2: Partícula cargada en un campo magnético

(A) En un campo magnético uniforme, la partícula realiza una espiral con un radio de Larmor $r_L = \frac{|\vec{p}|}{|B|c}$. (B) Cuando el campo no es uniforme, la partícula desliza lejos de la línea de campo debido al gradiente en la curvatura. (C) Cuando la partícula se consigue con un pliegue en la línea de campo de dimensión mucho mayor al radio de Larmor, la misma seguirá sobre el pliegue, pero puede deslizarse a la línea siguiente. (D) En el caso contrario (si el radio de Larmor es mucho mayor a la dimensión del pliegue) la partícula pasará a través del mismo sin alterar mucho su trayectoria. (E,F,G) Cuando el radio de Larmor es comparable con las dimensiones del pliegue, la dispersión de la partícula depende de la fase de giro de la misma en el momento en que empezó a sentir la irregularidad. (H) Cuando la partícula se encuentra con pliegues en líneas distintas, también habrá dispersión dependiente del ángulo de fase de la misma, lo cual resultará en un cambio entre líneas de campo. Imagen extraída de [25]

El flujo combinado (mezclando ambas direcciones de difusión, así como grandes varia-

ciones de campo magnético) queda contraído de la forma $\vec{S}_d = -K \cdot \nabla \eta$. Luego, el flujo total de Rayos Cósmicos queda representado por la siguiente ecuación

$$\vec{S} = \vec{V}\eta - K \cdot \nabla \eta.$$

Cuando este flujo es sustituido en la ecuación de continuidad, obtenemos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\eta - K \cdot \nabla \eta) = q'. \quad (2.2.3)$$

Sabemos que la densidad de partículas η está ampliamente ligada a la densidad de energía del flujo en cuestión. Sin embargo, la ecuación anterior no toma en cuenta que la partícula puede ganar energía en las dispersiones y salirse del intervalo de momentum ($p + dp$), causando un flujo en el espacio de momentum (similar al término del espacio de configuraciones) que debemos incluir a mano. Ya sabemos (de discusiones en capítulos anteriores) que los mecanismos difusivos no involucran una gran ganancia en energía, por lo que el término más relevante de este modelo es el convectivo. Sabemos que

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{cr}) + f(\theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (\vec{V}\eta)_r) + f(\theta, \phi),$$

donde $f(\theta, \phi)$ es la función en la cual se incluyen los términos del operador divergencia asociados a las variables angulares.

Si decimos que la distribución es isotrópica, entonces $\vec{S}_c = \vec{V}\eta = \eta < \dot{r} > \hat{e}_r$, de donde

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \eta < \dot{r} >).$$

En analogía al espacio de configuraciones, proponemos que en el espacio de momentum, el término de flujo $\vec{S}_p$ que se debe incluir en la ecuación de continuidad es

$$\nabla \cdot \vec{S}_p = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 \eta < \dot{p} >). \quad (2.2.4)$$

Finalmente (viendo el problema en el espacio de fase) podemos tomar

$$N = \int d^3 \vec{r} \eta(\vec{r}, t) = \int d^3 \vec{r} d^3 \vec{p} F(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (2.2.5)$$

donde $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$ es la densidad de partículas por unidad de volumen $d^3 \vec{r} d^3 \vec{p}$ (o mejor conocida como *función de distribución*). Con esta sustitución, la ecuación de transporte queda expresada finalmente como

$$\frac{\partial}{\partial t} F + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i F - k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} F \right) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 F < \dot{p} >) = q, \quad (2.2.6)$$

donde $q' = \int d^3 \vec{p} q(\vec{r}, \vec{p}, t)$ y $\vec{V} = v_i \hat{e}^i$.

Ahora bien, consideremos un partícula moviéndose en una dirección particular en un sistema de referencia inercial. Supongamos que la partícula sufre una dispersión. La energía

se conserva en una parte local del plasma en movimiento, pero en el sistema de referencia inercial hay una ganancia o pérdida de energía, dependiendo de las direcciones de movimiento. Supongamos que la partícula se dispersa y que inicialmente se mueve en dirección contraria al plasma, por lo que hay una ganancia de energía en el sistema de referencia inercial. Cuando se disperse nuevamente, se moverá inicialmente con el plasma y perderá energía. Si el plasma es uniforme, la ganancia de energía será igual a la pérdida, resultando en una ganancia global nula. Sin embargo, si la segunda dispersión ocurre a una velocidad del plasma distinta de la primera, habrá un cambio neto en la energía de la partícula. Parker fue quien se dió cuenta de este peculiar fenómeno, deduciendo que la tasa de ganancia energética de la partícula moviéndose en el fluido debía ser de la forma $\langle \dot{p} \rangle / p = -(1/3) \nabla \cdot \vec{V}$. Finalmente, obtenemos que Rayos Cósmicos moviéndose en las inmediaciones del sistema solar siguen la siguiente ecuación de transporte

$$\frac{\partial}{\partial t} F + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i F - k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} F \right) - \frac{1}{3p^2} (\nabla \cdot \vec{V}) \frac{\partial}{\partial p} (p^3 F) = q. \quad (2.2.7)$$

2.3. ¿Algo que decir sobre la atmósfera?

Una vez los Rayos Cósmicos han atravesado el sistema solar y llegan a las inmediaciones de la Tierra, nuevos fenómenos empiezan a ocurrir (fenómenos que discutiremos en la proxima sección). Dentro de la atmósfera (como en todo proceso de interacción con un medio) lo importante no es la longitud a lo largo de la dirección de movimiento, si no más bien la cantidad de materia atravesada (que por construcción tiene incorporada la densidad del medio correspondiente).

En consecuencia, **definimos** [1] *profundidad atmosférica* $X(l)$ como la masa de aire por unidad de área que atravesó una partícula a lo largo de la atmósfera, desde el infinito hasta la posición l , a lo largo de la trayectoria que describe su movimiento (ver Figura 2.3). Así

$$X(l) = \int_l^\infty \rho(l') dl', \quad (2.3.1)$$

donde $\rho(l')$ es la densidad del aire en la posición l' .

En el caso atmosférico, usaremos la ecuación barométrica para escribir la densidad del medio. Para ello (desde un punto de vista hidroestático [26]), sabemos que la cantidad de masa de aire en una columna de área unitaria, que se extiende desde una altura z hasta una altura h , es

$$M(z) = \int_z^h \rho_m(u) du, \quad (2.3.2)$$

donde ρ_m es la densidad de masa del gas. De la ecuación de un gas ideal $PV = NKT$ (donde N es el número de moléculas contenidas en un volumen V), podemos obtener

$$\rho_m(z) = N \frac{m}{V} = \frac{mP(z)}{KT(z)}, \quad (2.3.3)$$

donde m es la masa promedio de una molécula de aire. En equilibrio mecánico, la sumatoria de fuerzas actuando en la columna de aire está dada por

$$P(z + dz) + \rho_m(z)g(z)dz = P(z), \quad (2.3.4)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} &= -\frac{mP(z)}{KT(z)}g(z) \\ \frac{dP(z)}{dz} &= -\frac{mP(z)}{KT(z)}g(z) \\ P(z) &= P(z_0)\exp\left(-\int_{z_0}^z dz \frac{mg(z)}{KT(z)}\right). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

De la ecuación (2.3.3), vemos que $\rho_m(z)\frac{T(z)}{P(z)} = \rho_m(0)\frac{T(0)}{P(0)} = \text{constante}$, con lo cual obtenemos una ecuación para la presión atmosférica

$$\rho_m(z) = \rho_m(z_0) \left\{ \frac{T(z_0)}{T(z)} \right\} \exp\left(-\int_{z_0}^z dz \frac{mg(z)}{KT(z)}\right). \quad (2.3.6)$$

De la Figura 2.3, vemos que la relación entre h y l es

$$h \simeq l \cos \theta, \quad (2.3.7)$$

con θ el ángulo entre la dirección de entrada del primario y la normal a la superficie terrestre en el punto del impacto.

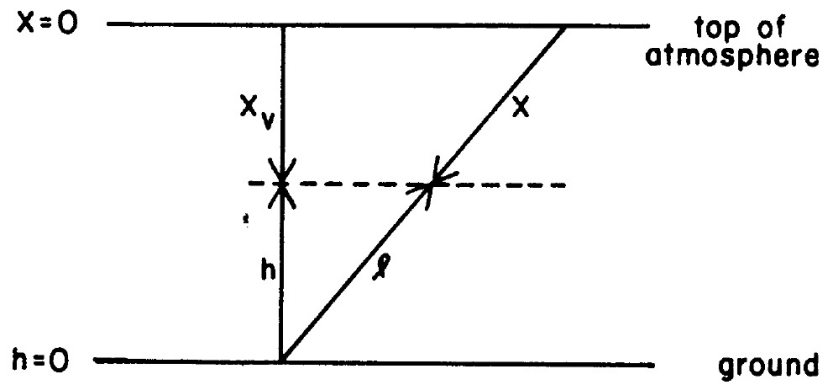


Figura 2.3: Definición de las variables atmosféricas. Extraída de [1]

Para una curvatura no nula de la superficie atmosférica, se puede demostrar que la relación entre las variables atmosféricas para $l/R_T \ll 1$, con R_T el radio de la tierra, es

$$h \simeq l \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{l^2}{R_T} \sin^2 \theta. \quad (2.3.8)$$

Debido a que la temperatura es una función poco regular respecto a la altura, en general el cálculo analítico de la profundidad atmosférica puede dificultarse. Aún así, existe una parametrización útil de la altura en función de la profundidad atmosférica elaborada por M. Shibata:

$$h(Km) = \begin{cases} 47,05 + 6,9 \ln X + 0,299 \ln^2 \frac{X}{10} & , \text{ para } X < 25g/cm^2 \\ 45,5 - 6,34 \ln X & , \text{ para } 25 < X < 230 \\ 44,34 - 11,861(X)^{0,19} & , \text{ para } X > 230g/cm^2 \end{cases}$$

En general, la corrección debida a la curvatura de la atmósfera se torna importante para ángulos azimutales grandes ($\theta \geq 70$). Un tratamiento completo de este problema fue realizado por Chapman en 1931 [27], adaptación que se conoce como la función de Chapman, que da el factor por el cual debe multiplicarse a la profundidad atmosférica como función de θ respecto a la dirección vertical. En particular, para $\theta \simeq 90$ la función de Chapman tiende a 40; es decir, la cantidad de aire que debe atravesar una partícula horizontal es unas 40 veces mayor respecto a la dirección vertical.

Por construcción, la profundidad atmosférica medida en la dirección vertical ($\theta = 90$) a una altura h sobre el nivel del mar se puede obtener a partir de la presión atmosférica $P(h)$ a esa misma altura:

$$\begin{aligned} X(l) &= \int_l^\infty \rho(l') dl' = X(h) = \int_h^\infty \rho(l') dl' \\ X(h) &= \frac{g(h)}{g(h)} \int_h^\infty \rho(l') dl' = \frac{P(h)}{g(h)}, \end{aligned}$$

de donde la profundidad atmosférica vertical a nivel del mar es

$$X(h=0) = \frac{101325 Pa}{9,81 m/s^2} = 1033g/cm^2. \quad (2.3.9)$$

2.4. Corte de Rigidez Magnética

Como sabemos, las partículas primarias pueden deflectarse en presencia del campo magnético terrestre. Debido a esto, la atmósfera puede comportarse como un blindaje difícil de atravesar para aquellas partículas cuyo radio de Larmor no le permita alcanzar nuestro detector. **Definimos** [28] *corte de rigidez magnética (Geomagnetic cut-off)* R_c a la relación explícita entre el momentum de la partícula primaria y su carga:

$$R_c = \frac{pc}{Ze}. \quad (2.4.1)$$

Como se observa en múltiples simulaciones y tratamientos experimentales, solo partículas con rigidez magnética superior a $\simeq 10GV$ no se ven afectadas por el campo magnético terrestre (su trayectoria permanece inalterada) [29]. Esto establece un límite inferior en energía para aquellas partículas primarias que pueden generar Cascadas Atmosféricas.

El modelo teórico que describe el corte de rigidez se basa en idealizaciones del campo magnético terrestre como el de un dipolo ideal, y es conocido como Ecuación de Störmer. Esta ecuación predice la aparición de un cono simétricamente axial a la dirección Este, que solo puede ser atravesado por partículas cargadas con valores de momentum específicos [30] (Figura 2.4).

La ecuación de Störmer se presenta a continuación

$$R_c = \frac{M \cos^4 \lambda}{r^2 \left[1 + (1 - \sin \epsilon \sin \theta \cos^3 \lambda)^{1/2} \right]}, \quad (2.4.2)$$

donde M es la magnitud del momento dipolar terrestre en Gcm^3 , λ es la latitud medida desde el ecuador magnético, ϵ es el ángulo cenital, θ es el ángulo azimutal y r es la distancia medida desde el centro del dipolo.

Los valores típicos del modelo dipolar del campo magnético terrestre están dados según el IGRF (International Geomagnetic Reference Field), con los cuales podemos obtener la rigidez magnética para una partícula que incide verticalmente sobre la superficie, y logra llegar a nuestros detectores, según la siguiente ecuación:

$$R_{cv} = (14,5 \cos^4 \lambda) / r^2, \quad (2.4.3)$$

donde R_{cv} es el corte de rigidez magnético vertical expresada en unidades de GV.

Para usar esta expresión debemos corregir la latitud geomagnética según los modelos más actualizados del campo terrestre, usando la *latitud invariante* Λ , obtenida de la coordenada L del modelo L-Shell de McIlwain. El coeficiente L es un parámetro que describe el conjunto de líneas de campo magnético planetarias que atraviesan el ecuador magnético a una distancia L veces el radio de la tierra desde el centro del dipolo. La latitud invariante está **definida** [31] como $\Lambda = \arccos(\sqrt{r/L})$, con lo cual podemos reescribir el corte de rigidez magnético como sigue

$$R_{cv} = \frac{14,5}{L^2}, \quad (2.4.4)$$

donde, si evaluamos en $L = 1$ para la superficie terrestre, obtenemos aproximadamente el valor reportado al comienzo de la sección.

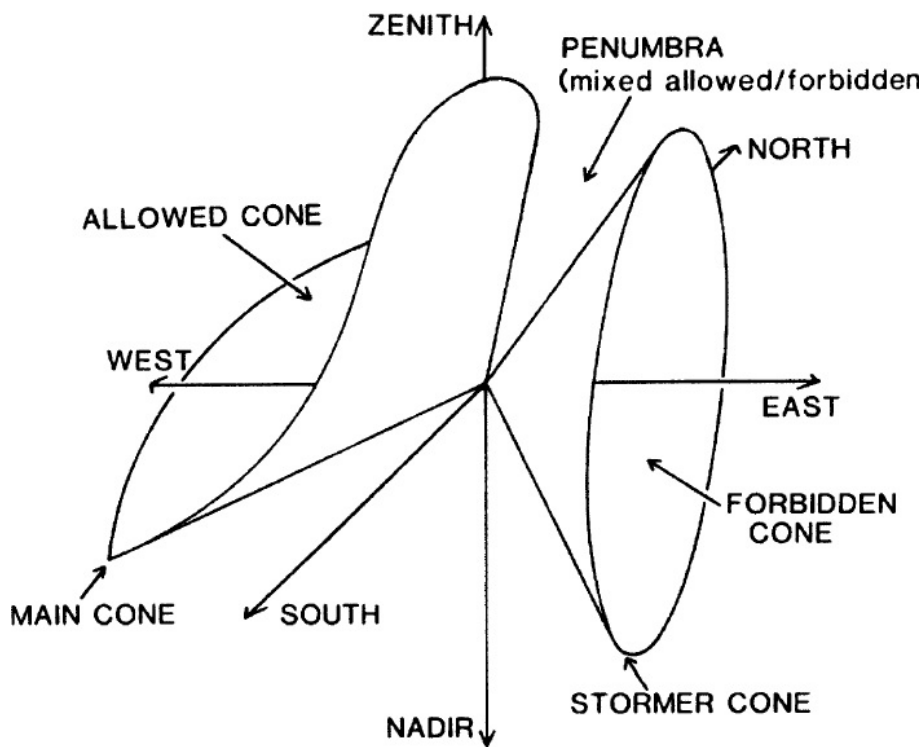


Figura 2.4: Visualización geométrica del cono de corte de rigidez magnética

El cono de Störmer es una sección circular en la dirección Este, y es una propiedad intrínseca del campo dipolar. La “penumbra” de Rayos Cósmicos es una región caótica formada por estados permitidos y prohibidos de momentum. Imagen extraída de [28]

Hemos visto que partículas con rigideces magnéticas superiores al 10GV penetran la atmósfera sin alterar en gran medida su trayectoria. Para rigideces menores que 10GV los efectos del campo terrestre empiezan a hacerse evidentes. Las distintas trayectorias para Rayos Cósmicos penetrantes en una dirección particular pueden ser calculadas para distintos valores de corte, y algunos de estos ejemplos son presentados en la Figura 2.5. Trayectorias que normalmente serían permitidas en un campo magnético puro, se vuelven prohibidas por la presencia de un objeto sólido (la Tierra). Rayos Cósmicos con rigideces altas (ver trayectoria 1) viajan en órbitas relativamente sencillas alrededor del dipolo. La deflexión magnética aumenta a medida que la rigidez disminuye (trayectorias 4 y 5) y las órbitas se vuelven más complicadas; cuando estos *loops* interceptan el objeto sólido, la trayectoria se vuelve prohibida. Sin embargo, aún para rigideces pequeñas, existen movimientos permitidos (como por ejemplo la trayectoria 15) y es precisamente esta complicada estructura de órbitas permitidas-prohibidas la llamada “penumbra” de Rayos Cósmicos.

Los distintos sistemas de corrientes presentes en la magnetósfera de la Tierra se com-

portan como fuentes magnéticas que afectan directamente el corte de rigidez para altitudes altas. Este efecto se hace evidente para rigideces inferiores a 2GV, razón por la cual se estila tomar valores superiores a esta cota para cualquier fin práctico.

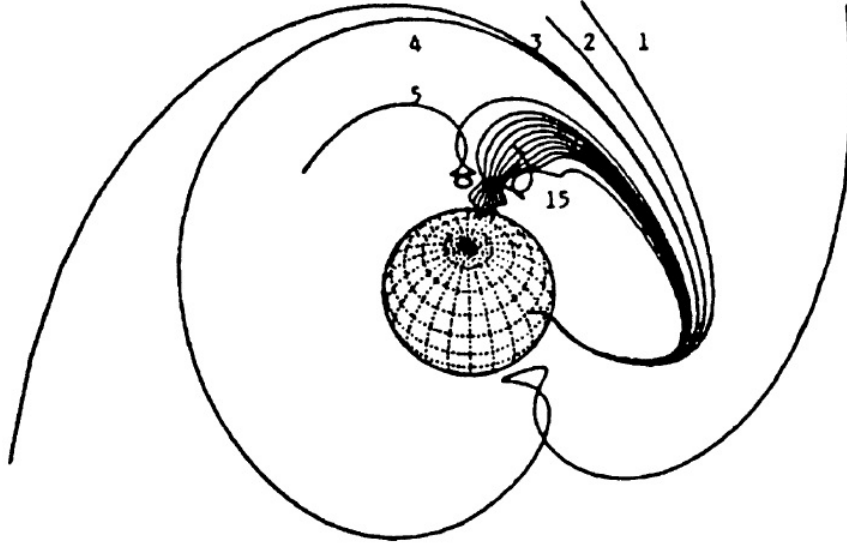


Figura 2.5: Trayectorias de Rayos Cósmicos para distintos valores de rigidez magnética. La mayor rigidez se presenta en la trayectoria 1 (más resistente a la deflexión magnética) y la menor en la trayectoria 15. Imagen extraída de [28]

2.5. Lluvias Atmosféricas Extendidas

Definimos [8] *Lluvia Atmosférica Extendida* (EAS por sus siglas en inglés) a la cascada de partículas producida por la interacción de un Rayo Cósmico primario con algún núcleo de un elemento constituyente de la atmósfera. Procedemos a deducir una forma general de la ecuación de transporte que rige este proceso [32]

Sea $h_n(E, X)$ el espectro diferencial de partículas de tipo n , y energía E , a una profundidad atmosférica X . La disminución del número medio de hadrones producidos en la lluvia atmosférica debido a colisiones con núcleos de aire, está dada por

$$\frac{d}{dX} h_n(E, X) = -\frac{1}{\lambda_n} h_n(E, X), \quad (2.5.1)$$

donde el camino libre medio λ_n (expresado en unidades de masa/área) puede ser calculado en términos de la sección eficaz media de la colisión entre la molécula de aire y el hadrón $\sigma^{(n)}$, y la masa media del aire m_{air} como

$$\lambda_n = \frac{m_{air}}{\sigma^{(n)}}.$$

El segundo proceso a ser considerado es el decaimiento de la partícula en cuestión. Para este proceso, sabemos que

$$\frac{d}{d\tau}h_n(E, X) = -\frac{1}{\tau_0}h_n(E, X),$$

donde τ_0 es el tiempo de vida media de la partícula. Esta expresión puede ser escrita en términos de la profundidad atmosférica, para partículas relativistas, de la siguiente forma

$$\frac{d}{dX}h_n(E, X) = -\frac{B_n}{EX}h_n(E, X), \quad (2.5.2)$$

donde $B_n = m_n/\alpha c\tau_0$ es la constante de decaimiento en unidades de energía, m_n es la masa de la partícula en decaimiento, y la fracción $\alpha = \rho/X$ depende sólo débilmente en X , y por lo tanto es tomada como constante.

Basados en la discusión anterior, el sistema de ecuaciones integral-diferencial para el espectro $h_n(E, X)$ de hadrones producidos en una lluvia atmosférica extendida puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}h_n(E, X) = & -h_n(E, x) \left(\frac{1}{\lambda_n(E)} + \frac{B_n}{EX} \right) + \\ & \sum_m \int_E^{E_{max}} dE' h_m(E', X) \left(\frac{W_{m,n}(E', E)}{\lambda_m(E')} + \frac{B_m D_{m,n}(E', E)}{E'X} \right), \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

donde las cantidades $W_{m,n}(E', E)$ y $D_{m,n}(E', E)$ son los espectros inclusivos de secundarios de tipo n y energía E que son producidos por interacción con núcleos de aire (W) o por decaimiento (D) de primarios de tipo m y energía E' . La energía E_{max} es el máximo de energía considerado. Si el primario que inició la lluvia es un hadrón de tipo n_0 , con energía E_0 y la cascada fue originada a una profundidad X_0 , entonces la ecuación anterior debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{d}{dE}h_n(E, X = X_0) = 1,8E^{-2,7} \quad (2.5.4)$$

$$h_n(E, X = X_0) = A\delta_{n,n_0}\delta(E - E_0/A), \quad (2.5.5)$$

donde A es el número de masa del hadrón incidente.

Debido a que los núcleos hadrónicos son relativamente estables comparado con el tiempo de tránsito a través de la atmósfera, podemos aproximar $\tau_0 \rightarrow \infty$. Si además consideramos que la energía máxima de observación tiende a ∞ , la ecuación de transporte adquiere una forma particularmente simple

$$\frac{\partial}{\partial X}h_n(E, X) = -\frac{1}{\lambda_n(E)}h_n(E, x) + \sum_m \int_E^\infty dE' h_m(E', X) \frac{W_{m,n}(E', E)}{\lambda_m(E')}. \quad (2.5.6)$$

Definimos [1]

$$F_{a,c}(E_c, E_a) \equiv E_c \frac{dh_c}{dE_c}(E_c, E_a), \quad (2.5.7)$$

como la sección eficaz de la colisión entre un hadrón de tipo a y energía E_a con un núcleo de aire, donde dh_c es el número de partículas de tipo c producidas en un rango de energía dE_c . De esta manera

$$W_{m,n}(E', E) \equiv \frac{dh_m}{dE}(E', E) = \frac{1}{E} F_{m,n}(E', E). \quad (2.5.8)$$

Si tomamos esta condición, junto con la suposición de que todas las partículas son del mismo tipo en la ecuación de transporte (2.5.3), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial X} h_n(E, X) = -\frac{1}{\lambda_n(E)} h_n(E, x) + \int_E^\infty \frac{dE'}{E} h_n(E', X) \frac{F_{n,n}(E', E)}{\lambda_n(E')}, \quad (2.5.9)$$

la cual si bien no tiene mucho significado físico (ya que sabemos que distintos tipos de partículas son producidas en una EAS) nos resulta útil para estudiar algunas propiedades (valiéndonos de sus soluciones simples).

2.5.1. Solución Elemental

El tratamiento general de la ecuación de transporte sujeta a las condiciones de frontera propuestas anteriormente está descrito en el Trabajo de Rossi&Greisen de 1941 sobre cascadas producidas por fotones y electrones [33]. En secciones posteriores describiremos el método de resolución de la misma; sin embargo, es posible hallar soluciones elementales a la ecuación tomando la separación de variables $h_n(E, X) = G(E)g(X)$. Sustituyendo en la ecuación (junto con el cambio de variable $X_L = E/E'$) obtenemos

$$\begin{aligned} G(E)g(X)' &= -\frac{G(E)g(X)}{\lambda_n(E)} + g(X) \int_0^1 \frac{dX_L}{X_L^2} \frac{F_{n,n}(X_L, E)}{\lambda_n(E/X_L)} G(E, X_L) \\ \frac{g'}{g} &= -\frac{1}{\lambda_n(E)} + \frac{1}{G(E)} \int_0^1 \frac{dX_L}{X_L^2} \frac{F_{n,n}(X_L, E)}{\lambda_n(E/X_L)} G(E, X_L) = -\frac{1}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

de modo que la solución es

$$g(X) = g(0)e^{-X/\Lambda}. \quad (2.5.11)$$

Esta solución tiene la propiedad de que el flujo se atenúa exponencialmente a lo largo de la atmósfera (con constante de atenuación Λ) mientras que preserva el espectro de energía $G(E)$ (que es independiente de la profundidad). En general, debido a la fuerte restricción impuesta sobre $G(E)$ en (2.5.10), la solución elemental no corresponde con ningún fenómeno físico significativo que corrobore las condiciones de frontera del problema. Aún así, mostraremos a continuación que es aproximadamente válida para la ley de potencias de la condición de contorno (2.5.4).

2.5.2. Aproximación A

En cascadas electromagnéticas (tópico que discutiremos en proximas secciones), la *Aproximación A* denota el siguiente conjunto de suposiciones (revisar sección 4.6.8 de [34]):

- Las pérdidas por ionización son despreciables.
- El camino libre medio (o longitud de radiación) es independiente de la energía.
- Las secciones transversales para producción de pares y Bremsstrahlung son escalables, y no dependen de la energía.

La aproximación es válida solo para energías altas, y tiene un análogo en el tratamiento de Cascadas Hadrónicas:

$$\lambda_n(E) \rightarrow \lambda_n = \text{Constante}, \quad (2.5.12)$$

y

$$F_{n,n}(X_L, E) \rightarrow F_{n,n}(X_L). \quad (2.5.13)$$

En realidad, la sección transversal (y por lo tanto λ_n) varía lentamente con la energía, por lo que la suposición de escalamiento no es del todo cierta. Aún así, la dependencia es lo suficientemente pequeña a altas energías como para que la solución de la aproximación A sirva como una buena guía para estudios más detallados. Con la aproximación A, la ecuación de cascada tiene una solución elemental que satisface la ley de potencias de la condición de contorno. De esta manera,

$$h_n(E, X) = g(0)e^{-X/\Lambda}E^{-(\gamma+1)}, \quad (2.5.14)$$

donde la constante de atenuación queda determinada por

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_n} \left\{ 1 - \int_0^1 \frac{dX_L}{X_L^2} F_{n,n}(X_L) \frac{G(E, X_L)}{G(E)} \right\} = \frac{1}{\lambda_n} \left\{ 1 - \int_0^1 \frac{dX_L}{X_L^2} F_{n,n}(X_L) \frac{(E/X_L)^{-(\gamma+1)}}{E^{-(\gamma+1)}} \right\},$$

de donde

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_n} \left\{ 1 - \int_0^1 dX_L X_L^{\gamma-1} F_{n,n}(X_L) \right\} \quad (2.5.15)$$

y $\gamma \simeq 1.7$. Finalmente, vemos que en los casos donde el escalamiento de $F_{n,n}(X_L, E)$ es válido, el flujo de hadrones en la atmósfera tiene el mismo espectro que los Rayos Cósmicos primarios.

2.5.3. Toy Model: Aproximación de Heitler

Las cascadas poseen tres componentes principales: las cascadas electromagnéticas, muónicas y hadrónicas. Las electromagnéticas (formadas por fotones, electrones y positrones) son la principal componente de la lluvia, dado que por cada interacción hadrónica, la tercera parte de la energía involucrada va directamente al canal electromagnético. Esto ocasiona que cerca del 99 % de las partículas producidas sean de esta componente. La cascada muónica consiste en muones de alta energía provenientes del decaimiento de piones y kaones de la cascada hadrónica. La última componente se desarrolla básicamente según interacciones QCD.

El proceso de estudiar cada componente detalladamente implica resolver la ecuación (2.5.3) para cada conjunto de partículas involucradas en la lluvia (trabajo que, en general, no se puede hacer analíticamente). Apesar de ello, existe un modelo muy simple (elaborado por Heitler en 1944 [35]) el cual permite ilustrar algunas propiedades generales de las cascadas atmosféricas sin resolver las ecuaciones de transporte directamente. Heitler introdujo el modelo en su libro de [36] *Teoría Cuántica de la Radiación*, bajo el contexto de las cascadas electromagnéticas, pero su discusión es perfectamente extrapolable a cascadas iniciadas por hadrones.

Considere el proceso (a) mostrado en la Figura 2.6. Cada segmento de línea puede ser pensado como una partícula o como un paquete de energía. En cada vértice la energía se divide en dos. Estas separaciones ocurren después de una colisión a una distancia λ , por lo que después de $n = X/\lambda$ interacciones, el número de segmentos (y de partículas producidas) es

$$N(X) = 2^{X/\lambda}, \quad (2.5.16)$$

donde X es la profundidad a lo largo del eje de la lluvia (que definimos como la recta cuya dirección coincide con la propagación que hubiera tenido el primario si no hubiera interactuado con la atmósfera). A esta profundidad, la energía por partícula es

$$E(X) = \frac{E_0}{N(X)} = \frac{E_0}{2^{X/\lambda}}, \quad (2.5.17)$$

donde E_0 es la energía del primario.

La producción de partículas continúa bajo la condición $E(X) \leq E_C$, donde E_C es la energía crítica para el proceso de producción que se esté considerando. Después de esto, las partículas solo pierden energía (son absorbidas o decaen). De esta relación, vemos que la cascada tiene un máximo en el número de producción de partículas secundarias, el cual ocurre cuando

$$N(X_{max}) = \frac{E_0}{E_C} = 2^{X_{max}/\lambda}, \quad (2.5.18)$$

de donde obtenemos

$$X_{max} = \lambda \frac{\ln E_0/E_c}{\ln 2}. \quad (2.5.19)$$

Las relaciones básicas (2.5.18) y (2.5.19) funcionan para cascadas electromagnéticas y también (aproximadamente) para cascadas hadrónicas, donde

$$N(X_{max}) \propto E_0 \quad (2.5.20)$$

$$X_{max} \propto \ln E_0. \quad (2.5.21)$$

En ambos casos, el modelo de Heitler reproduce dos de las características más importantes de las Cascadas Aéreas Extensas: el número de partículas en el máximo es proporcional a la energía del primario E_0 , y la profundidad a la cual el máximo ocurre varía en forma logarítmica con la energía del primario ($\ln E_0$).

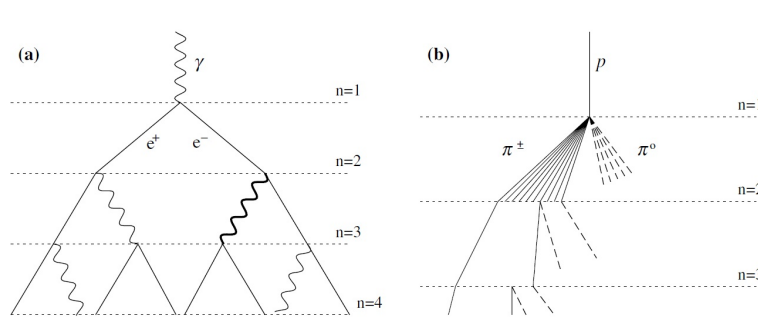


Figura 2.6: Modelo de Heitler

Representación esquemática de lluvias electromagnéticas y hadrónicas. Extraída de [35]

2.6. Cascadas Electromagnéticas

Como dijimos en la subsección anterior, resolver las ecuaciones de transporte asociadas a las Lluvias Atmosféricas no es sencillo. La teoría asociada a las cascadas electromagnéticas fue desarrollada en los años 30 después del descubrimiento del positrón (1932). El tratamiento clásico fue elaborado por Rossi&Greisen (1941) y procedemos a describirlo con cierta profundidad. Para una revisión más completa, conviene revisar la sección Cascadas Electromagnéticas de [1], la referencia [34] y la sección Lluvias Atmosféricas Extendidas en [8]

2.6.1. Producción de pares y Bremsstrahlung

Los procesos básicos de alta energía capaces de crear cascadas electromagnéticas son la producción de pares y la radiación de frenado (Bremsstrahlung). Los diagramas de

Feynman para estos procesos son mostrados en la Figura 2.7.

Como estos procesos tienen lugar en el estudio de núcleos, ambos serán apantallados por los electrones atómicos para parámetros de impacto mayores que el radio del átomo. Para electrones y fotones energéticos, el apantallamiento atómico fija el límite de parámetro de impacto para todas las frecuencias de radiación relevantes. Este es llamado **límite de apantallamiento completo** (complete screening cutoff), y aplica para electrones en aire a energías $E \gg E_{scr}$, donde [34]

$$E_{scr} = \frac{m_e c^2}{\alpha Z^{1/3}} \text{MeV}, \quad (2.6.1)$$

con $m_e c^2$ como la energía en reposo del electrón, Z el número atómico del medio y α la constante de estructura fina ($\alpha = 1/137$). Para el aire, tomando $Z \simeq 7,4$ obtenemos $E_{scr} \simeq 36,5 \text{MeV}$; es decir, el límite de apantallamiento completo funciona en electrones por arriba de 40MeV aproximadamente.

La aproximación de alta energía con apantallamiento completo es la *aproximación A* de la teoría de Cascadas Electromagnéticas. En esta aproximación, la función de transferencia que aparece en la ecuación de transporte es escalable.

Es conveniente antes de seguir la discusión hacer dos definiciones importantes:

- **Se define** *Longitud de interacción electromagnética* (X_0) como la profundidad atmosférica típica de radiación de una partícula electromagnética.
- **Se define** *Profundidad normalizada* como la profundidad atmosférica medida en unidades de interacción, es decir

$$t(X) \equiv \frac{X}{X_0}. \quad (2.6.2)$$

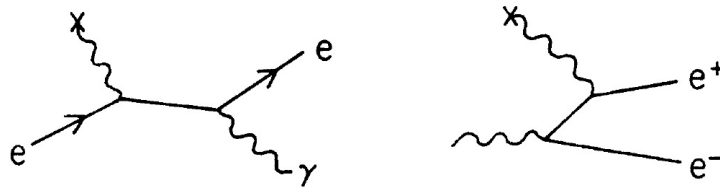


Figura 2.7: Diagramas de Feynman

A la izquierda: Diagrama de Feynman para la radiación de frenado. A la derecha: Diagrama de Feynman para la producción de pares.

A continuación, comentaremos algunas propiedades importantes de los procesos de radiación de frenado y producción de pares, que serán utilizadas posteriormente para la resolución explícita de las ecuaciones de la Cascada Atmosférica Electromagnética.

1. Radiación de Frenado

En el contexto explicado anteriormente, la probabilidad de que un electrón de energía E_0 radie un fotón de energía $W = \nu E_0$ (con $\nu \leq 1$), al atravesar una distancia $dt = dX/X_0$ de la atmósfera es [1]

$$\phi(E_0, \nu) \rightarrow \phi(\nu) = \nu + \frac{1-\nu}{\nu} \left(\frac{4}{3} + 2b \right), \quad (2.6.3)$$

donde $b \equiv \{18 \ln(183/z^{1/3})\} \simeq 0,0122$. Por nociones complementarias, la expresión para un no-apantallamiento fue obtenida por Rossi&Greisen en 1941 [33], y tiene la siguiente forma

$$\phi(E, \nu) = e\alpha \frac{N_A}{A} Z^2 r_e^2 \left(1 + (1-\nu)^2 - \frac{2}{3}(1-\nu) \right) \left(\frac{d\nu}{\nu} \right) \left[\ln \left(\frac{2E(1-\nu)}{m_e \nu} \right) - \frac{1}{2} \right].$$

Sea X_0^b la longitud de interacción electromagnética para un electrón emitiendo un fotón por radiación de frenado. Entonces, la tasa de energía perdida es

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dX} &= -\frac{1}{X_0^b} \int_0^1 d\nu (\nu E) \phi(\nu) = -\frac{1}{X_0^b} \int_0^1 d\nu \left(\nu + \frac{1-\nu}{\nu} \left(\frac{4}{3} + 2b \right) \right) \\ &= -\frac{1}{X_0^b} E \left\{ \frac{\nu^3}{3} \Big|_0^1 - \left(\frac{4}{3} + 2b \right) \frac{(1-\nu)^2}{2} \Big|_0^1 \right\} = -\frac{1}{X_0^b} E \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} + 2b \right) \frac{1}{2} \right\} \\ \frac{dE}{dX} &= -\frac{1}{X_0^b} (1+b) E \simeq -\frac{1}{X_0^b} E, \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

ya que $b \ll 1$. Con esto,

$$E(X) = E_0 e^{-X/X_0^b}. \quad (2.6.5)$$

De la ecuación (2.6.5), la energía después de una interacción es

$$E(X_0^b) = E_0 e^{-1},$$

con lo cual, $\Delta E = E_0 - E(X_0^b) = E_0 (1 - e^{-1})$, de donde

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^{-1}. \quad (2.6.6)$$

Con la ecuación (2.6.6), podemos definir la profundidad de interacción electromagnética para electrones en Bremsstrahlung:

- **Definimos** Una *longitud de interacción electromagnética* (X_0^b) como la cantidad de aire atravesado por un electrón cuando pierde una fracción $1 - e^{-1}$ de su energía por radiación de frenado.

A medida que un electrón pierde energía, las pérdidas por ionización comienzan a ser importantes frente a la producción de fotones por frenado, con lo cual, llegada una energía crítica, puede considerarse que todas las pérdidas son por ionización y que la producción de nuevos fotones se detiene. **Definimos** [34] *energía crítica* (E_c) como la energía a la cual las pérdidas por ionización, luego de recorrer una longitud de interacción, son iguales a la energía del electrón. Si bien no existe una expresión analítica para E_c , se utiliza una forma funcional del tipo

$$E_c = \frac{a}{(Z + b)^\alpha},$$

siendo a, b, α parámetros a ajustar experimentalmente. Utilizando valores típicos para el aire, obtenemos que $E_c \simeq 84\text{MeV}$.

2. Producción de Pares

La expresión correspondiente para la probabilidad de que un fotón de energía W produzca un par electrón-positrón, donde digamos que el positrón adquiere una energía $E = uW$ ($0 < u < 1$), es $\psi(W, u)dtd u$. Para esta expresión, usando la aproximación de apantallamiento completo, tenemos que [1]

$$\psi(W, u) \rightarrow \psi(u) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}b + \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \left(u - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (2.6.7)$$

Para la producción de pares, la condición de apantallamiento completo es la misma que en el caso de la radiación de frenado (2.6.1), y puede ser escrita como [34]

$$\hbar\omega \gg \frac{m_e c^2}{\alpha Z^{1/3}} \text{MeV}, \quad (2.6.8)$$

donde ω es la longitud de onda de la radiación incidente.

A diferencia de la densidad de probabilidad del Bremsstrahlung, la cual posee una clara singularidad (2.6.3), la densidad de probabilidad de la producción de pares puede ser integrada para obtener la probabilidad total por unidad de longitud de radiación. Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{pair}} &= \int_0^1 du \psi(u) = \int_0^1 du \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}b + \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \left. \frac{2}{3} - \frac{b}{2} + \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \frac{(u - \frac{1}{2})^3}{3} \right|_0^1 \\ \frac{1}{\lambda_{pair}} &= \frac{7}{9} - \frac{b}{3} \simeq \frac{7}{9}. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

De la ecuación (2.6.9) podemos definir la profundidad de interacción electromagnética para fotones en producción de pares:

- **Definimos** Una *longitud de interacción electromagnética* (X_0^p) como la cantidad de aire atravesado por un fotón cuando recorrió $\frac{7}{9}$ del camino libre medio de producción de pares.

2.6.2. Ecuación de transporte para Cascadas Electromagnéticas

La ecuación de transporte para Lluvias Atmosféricas Extendidas (2.5.3) fue obtenida en secciones anteriores. Para el caso de una cascada iniciada por una partícula de tipo electromagnético, las ecuaciones para los espectros diferenciales de fotones y electrones se obtienen directamente (donde solo tomaremos en cuenta los procesos de radiación de frenado y producción de pares descritos anteriormente). Así, el sistema de ecuaciones acopladas es

$$\frac{d\gamma}{dt}(W, t) = -\frac{1}{\lambda_{pair}}\gamma(W, t) + \int_W^\infty dE'\Pi(E', t)\frac{dn_{e\rightarrow\gamma}}{dWdt}, \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt}(E, t) = & -\frac{1}{\lambda_b}\Pi(E, t) + \int_E^\infty dE'\Pi(E', t)\frac{dn_{e\rightarrow e}}{dEdt} + \\ & 2 \int_E^\infty dW'\gamma(W', t)\frac{dn_{\gamma\rightarrow e}}{dEdt}, \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

donde $\gamma(W, t)dW$ es el número de fotones en un intervalo de energía dW a una profundidad t , $\Pi(E, t)dE$ es el número de electrones/positrones en un intervalo de energía dE a una profundidad t y $\frac{1}{\lambda_b}$ es la sección eficaz de la radiación de frenado. **Definimos** [1]

$$\begin{aligned} & \frac{dn_{e\rightarrow\gamma}}{dWdt}, \\ & \frac{dn_{e\rightarrow e}}{dEdt}, \\ & \frac{dn_{\gamma\rightarrow e}}{dEdt}, \end{aligned}$$

como los espectros inclusivos asociados a la producción de fotones y electrones menos energéticos por radiación de frenado, y a la formación de electrones/positrones por producción de pares, respectivamente. Hemos incluido el λ_m de la integral de la ecuación (2.5.3) dentro de los espectros inclusivos anteriormente nombrados.

Para energías altas comparadas con la energía crítica, las pérdidas por colisiones y dispersión de Coulomb son despreciables, y las funciones (2.6.3) y (2.6.7) pueden ser usadas en esta discusión (*aproximación A*). Recordando la definición (2.5.7), podemos hacer las siguientes identificaciones

$$E'\frac{dn_{e\rightarrow\gamma}}{dWdt} = \phi\left(\frac{W}{E'}\right) \quad (2.6.12)$$

$$E'\frac{dn_{e\rightarrow e}}{dEdt} = \phi\left(1 - \frac{E}{E'}\right) \quad (2.6.13)$$

$$W'\frac{dn_{\gamma\rightarrow e}}{dEdt} = \psi\left(\frac{W}{W'}\right) \quad (2.6.14)$$

Haciendo estas sustituciones en las ecuaciones (2.6.10) y (2.6.11), obtenemos

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\gamma}{\lambda_{pair}} + \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu^2} \Pi\left(\frac{W}{\nu}, t\right) W \frac{\phi(\nu)}{E'} = -\frac{\gamma}{\lambda_{pair}} + \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} \Pi\left(\frac{W}{\nu}, t\right) \phi(\nu) \quad (2.6.15)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\Pi}{\lambda_b} + 2 \int_0^1 \frac{du}{u} \gamma\left(\frac{E}{u}, t\right) \psi(u) + \int_0^1 d\nu \Pi\left(\frac{E}{1-\nu}, t\right) \frac{\phi(\nu)}{1-\nu} \quad (2.6.16)$$

las cuales representan la forma escalada de las ecuaciones de la Cascada Electromagnética.

2.6.3. Solución en Ley de Potencias

Supongamos un espectro incidente expresado en ley de potencias. En esta condición, las ecuaciones (2.6.15) y (2.6.16) tienen soluciones de la forma

$$\gamma(W, t) = f_\gamma(t) E^{-(s+1)} \quad (2.6.17)$$

y

$$\Pi(E, t) = f_\Pi(t) E^{-(s+1)}, \quad (2.6.18)$$

donde $f_\gamma(t)$ y $f_\Pi(t)$ son funciones a determinar y s es un parámetro característico que definiremos posteriormente. Sustituyendo el *Ansatz* anterior en las ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} f'_\gamma(t) W^{-(s+1)} &= -\frac{1}{\lambda_{pair}} f_\gamma(t) W^{-(s+1)} + f_\Pi(t) \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} \phi(\nu) \nu^{(s+1)} W^{-(s+1)} \\ f'_\gamma(t) &= -\frac{1}{\lambda_{pair}} f_\gamma(t) + f_\Pi(t) \int_0^1 d\nu \nu^s \phi(\nu) \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

y

$$\begin{aligned} f'_\Pi(t) &= -\frac{1}{\lambda_b} f_\Pi(t) + 2f_\gamma(t) \int_0^1 du \psi(u) u^s + f_\Pi(t) \int_0^1 d\nu (1-\nu)^s \phi(\nu) \\ f'_\Pi(t) &= -f_\Pi(t) \int_0^1 \{1 - (1-\nu)^s\} \phi(\nu) + 2f_\gamma(t) \int_0^1 du \psi(u) u^s, \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

donde hemos sustituido $1/\lambda_b = \int_0^1 \phi(\nu)$ como la sección eficaz de la radiación de frenado (la cual es logarítmicamente divergente en $\nu \rightarrow 0$). Tomemos

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{\lambda_{pair}} \simeq \frac{7}{9} \quad (2.6.21)$$

$$B(s) \equiv 2 \int_0^1 du \psi(u) u^s \quad (2.6.22)$$

$$A(s) \equiv \int_0^1 d\nu \{1 - (1-\nu)^s\} \phi(\nu) \quad (2.6.23)$$

$$C(s) \equiv \int_0^1 d\nu \phi(\nu) \quad (2.6.24)$$

Con estas sustituciones, las ecuaciones (2.6.19) y (2.6.20) se transforman en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \sigma_0 \right\} f_\gamma(t) - C(s)f_\Pi(t) = 0 \quad (2.6.25)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} + A(s) \right\} f_\Pi(t) - B(s)f_\gamma(t) = 0. \quad (2.6.26)$$

Derivando (2.6.25) obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} f_\gamma(t) + \sigma_0 \frac{d}{dt} f_\gamma(t) - C(s) \frac{d}{dt} f_\Pi(t) = 0,$$

y sustituyendo (2.6.25) y (2.6.26) en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} f_\gamma'' + \sigma_0 f_\gamma' - C(s) \left\{ B(s)f_\gamma - \frac{A(s)}{C(s)} (f_\gamma' + \sigma_0 f_\gamma) \right\} &= 0 \\ f_\gamma'' + \{A(s) + \sigma_0\} f_\gamma' + \{A(s)\sigma_0 - B(s)C(s)\} f_\gamma &= 0, \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

la cual representa una ecuación diferencial de segundo orden para $f_\gamma(t)$. Haciendo las mismas sustituciones para la ecuación (2.6.26), nos daremos cuenta que las funciones f_γ y f_Π satisfacen la misma ecuación diferencial. De forma general (para ambos espectros diferenciales), obtenemos:

$$f'' + \{A(s) + \sigma_0\} f' + \{A(s)\sigma_0 - B(s)C(s)\} f = 0. \quad (2.6.28)$$

Esta ecuación tiene una solución elemental $f \propto e^{\lambda(s)t}$, donde $\lambda(s)$ satisface la siguiente ecuación característica

$$\lambda^2 + \{A + \sigma_0\} \lambda + \{A\sigma_0 - BC\} = 0, \quad (2.6.29)$$

con soluciones

$$2\lambda_1 = -|A(s) + \sigma_0| + \{|A(s) - \sigma_0|^2 + 4B(s)C(s)\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.6.30)$$

$$2\lambda_2 = -|A(s) + \sigma_0| - \{|A(s) - \sigma_0|^2 + 4B(s)C(s)\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6.31)$$

En el Cuadro 2.1 se presenta una recopilación de los valores de $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$, $\lambda_1'(s)$ y $\lambda_1''(s)$ para varios valores s . Las soluciones de $f_\gamma(t)$, $f_\Pi(t)$ son entonces, combinaciones lineales de las soluciones elementales $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$, adecuadas a las condiciones del espectro incidente (*Espectro de inyección*).

Se puede demostrar que, para un espectro de inyección de fotones de la forma

$$\gamma(W, 0) = f_\gamma(0)W^{-(s+1)}, \quad (2.6.32)$$

s	$A(s)$	$B(s)$	$C(s)$	$\lambda_2(s)$	$\lambda_1(s)$	$\lambda'_1(s)$	$\lambda''_1(s)$
0.0	0,0000	1,547	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞
0.1	0,1522	1,400	12,84	-4,715	3,789	25,01	355,8
0.2	0,2865	1,280	6,123	-3,340	2,280	-9,457	65,43
0.3	0,4067	1,180	3,923	-2,749	1,569	-5,415	24,69
0.4	0,5154	1,095	2,846	-2,414	1,126	-3,655	12,48
0.5	0,6147	1,022	2,214	-2,201	0,8125	-2,693	7,418
0.6	0,7062	0,9593	1,802	-2,055	0,5754	-2,092	4,878
0.7	0,7909	0,9041	1,514	-1,952	0,3877	-1,684	3,428
0.8	0,8699	0,8554	1,302	-1,878	0,2348	-1,389	2,550
0.9	0,9439	0,8121	1,140	-1,825	0,1075	-1,166	1,965
1.0	1,014	0,7733	1,014	-1,787	0,0000	-0,9908	1,653
1.1	1,079	0,7383	0,9115	-1,761	-0,0917	-0,8497	1,276
1.2	1,142	0,7067	0,8278	-1,744	-0,1708	-0,7332	1,059
1.3	1,201	0,6778	0,7580	-1,735	-0,2391	-0,6358	0,8910
1.4	1,257	0,6515	0,6990	-1,732	-0,2984	-0,5532	0,7607
1.5	1,311	0,6273	0,6485	-1,734	-0,3501	-0,4824	0,6614
1.6	1,363	0,6049	0,6048	-1,741	-0,3952	-0,4216	0,5733
1.7	1,413	0,5843	0,5666	-1,751	-0,4347	-0,3691	0,4901
1.8	1,460	0,5651	0,5331	-1,764	-0,4693	-0,3236	0,4275
1.9	1,506	0,5473	0,5033	-1,780	-0,4996	-0,2840	0,3684
2.0	1,550	0,5360	0,4767	-1,797	-0,5263	-0,2498	0,3201
2.2	1,634	0,5004	0,4313	-1,837	-0,5704	-0,1943	0,2391
2.4	1,713	0,4737	0,394	-1,882	-0,6049	-0,1523	0,1823
2.6	1,787	0,4499	0,3627	-1,929	-0,6320	-0,1205	0,1375
2.8	1,857	0,4289	0,3362	-1,977	-0,6536	-0,0963	0,1079
3.0	1,924	0,4093	0,3134	-2,026	-0,6709	-0,0777	0,0974
4.0	2,213	0,3352	0,2349	-2,265	-0,7206	-0,0306	——
5.0	2,449	0,2848	0,1882	-2,480	-0,7419	-0,0145	——

Cuadro 2.1: Valores numéricos de las funciones $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$, $\lambda'_1(s)$ y $\lambda''_1(s)$.

las soluciones de las ecuaciones (2.6.25) y (2.6.26) son

$$f_{\Pi}(t) = \frac{B(s)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} f_{\gamma}(0) \{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\} \quad (2.6.33)$$

$$f_{\gamma}(t) = \frac{f_{\gamma}(0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \{(A + \lambda_1)e^{\lambda_1 t} - (A + \lambda_2)e^{\lambda_2 t}\}, \quad (2.6.34)$$

donde hemos usado la relación $(\lambda_2 + A) = -(\lambda_1 + \sigma_0)$.

Así, para un espectro de inyección de fotones con índice espectral s sin inyección de electrones, obtenemos que el espectro diferencial de fotones más electrones en la cascada atmosférica (parametrizado por s) es

$$\frac{dh_{\gamma+e+/-}}{dE} = \frac{f_{\gamma}(0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} E^{-(s+1)} \{(A + B + \lambda_1)e^{\lambda_1(s)t} - (A + B + \lambda_2)e^{\lambda_2(s)t}\}. \quad (2.6.35)$$

2.6.4. Un tratamiento más general

Para calcular el número de fotones y electrones en una Lluvia Atmosférica Extendida iniciada por un electrón o un fotón incidente en una profundidad $t = 0$ necesitamos soluciones de las ecuaciones (2.6.15) y (2.6.16) sujetas a la condición de frontera (2.5.4) y (2.5.5). La solución paramétrica más exacta de las ecuaciones de transporte de las Cascadas Electromagnéticas fue obtenida por Rossi&Greisen (1941).

Para empezar esta discusión,

- **Se define** [1] como *Transformada de Mellin* de una función $f(W)$ a la transformación integral de la forma

$$\{Mf\}(s) \equiv \int_0^{\infty} dW f(W) W^s,$$

la cual puede ser interpretada como la versión multiplicativa de la doble transformada de Laplace (*Two-sided Laplace Transform*)

Sea $f_{\gamma}(s, t)$ y $f_{\Pi}(s, t)$ las transformadas de Mellin de $\gamma(W, t)$ y $\Pi(E, t)$, es decir

$$\begin{aligned} \{M\gamma\}(s, t) &\equiv f_{\gamma}(s, t) = \int_0^{\infty} dW \gamma(W, t) W^s \\ \{M\Pi\}(s, t) &\equiv f_{\Pi}(s, t) = \int_0^{\infty} dE \Pi(E, t) E^s. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación (2.6.15) por W^s e integrando en W obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} dW \gamma(W, t) W^s &= -\frac{1}{\lambda_{pair}} \int_0^{\infty} dW \gamma(W, t) W^s + \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} \int_0^{\infty} dW \Pi(W/\nu, t) W^s \phi(\nu) \\ \frac{d}{dt} f_{\gamma}(s, t) &= -\frac{1}{\lambda_{pair}} f_{\gamma}(s, t) + \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} \int_0^{\infty} dW' \nu^{s+1} \Pi(W', t) W'^s \phi(\nu) \\ \frac{d}{dt} f_{\gamma}(s, t) &= -\frac{1}{\lambda_{pair}} f_{\gamma}(s, t) + f_{\Pi}(s, t) \int_0^1 d\nu \phi(\nu) \nu^s, \end{aligned}$$

de donde, con las sustituciones (2.6.21), obtenemos

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \sigma_0 \right\} f_\gamma(t, s) - C(s)f_\Pi(t, s) = 0. \quad (2.6.36)$$

De igual modo, podemos hacer las sustituciones en la ecuación (2.6.16) y obtener el siguiente resultado

$$\left\{ \frac{d}{dt} + A(s) \right\} f_\Pi(t, s) - B(s)f_\gamma(t, s) = 0. \quad (2.6.37)$$

Las ecuaciones (2.6.36) y (2.6.37) representan un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las transformadas de Mellin de los espectros diferenciales $\gamma(W, t)$ y $\Pi(E, t)$; sin embargo, hay que notar que estas ecuaciones son exactamente iguales a las que satisfacen las funciones f de la separación de variables de la solución en Ley de Potencias de la sección anterior (2.6.25) y (2.6.26).

La condición de frontera (2.5.5), adaptada a una Cascada Electromagnética iniciada por un fotón incidente de energía W_0 , es

$$\gamma(W, 0) = \delta(W - W_0),$$

con lo cual, la transformada de Mellin $f_\gamma(s, t)$ debe satisfacer la siguiente condición de frontera

$$f_\gamma(s, 0) = \int_0^\infty dW \delta(W - W_0) W^s = W_0^s. \quad (2.6.38)$$

Del mismo modo, para una Cascada Electromagnética iniciada por un electrón/positrón incidente con energía E_0 , la condición de frontera para la transformada de Mellin $f_\pi(s, t)$ debe ser

$$f_\Pi(s, 0) = E_0^s. \quad (2.6.39)$$

Los espectros diferenciales se obtienen invirtiendo la transformada de Mellin, es decir

$$\gamma(W, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+s_0}^{i\infty+s_0} ds f_\gamma(s, t) W^{-(s+1)} \quad (2.6.40)$$

y

$$\Pi(W, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+s_0}^{i\infty+s_0} ds f_\gamma(s, t) E^{-(s+1)}, \quad (2.6.41)$$

con s_0 arbitrario.

El problema del tratamiento analítico surge al tratar de invertir la transformada de Mellin, en la cual debemos hacer alguna aproximación para calcular los espectros diferenciales. La aproximación consiste en evaluar (2.6.37) y (2.6.38) por el método de punto de ensilladura (*saddle point method*). Para simplificar las fórmulas y motivar la parametrización estándar del método, es útil hacer algunas aproximaciones en las transformadas de

Mellin (2.6.33) y (2.6.34). La función $\lambda_1(s)$ es positiva para $s > 1$ y negativa para $s < 1$ (ver Cuadro 2.1). Una buena aproximación es

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{2}(s - 1 - 3 \ln s). \quad (2.6.42)$$

La raíz $\lambda_2(s)$ es siempre negativa y más grande en magnitud que $\lambda_1(s)$, por lo que el término $e^{\lambda_1(s)t}$ en las expresiones es el único importante para $t \gg 1$.

Como ejemplo específico, consideraremos la solución para electrones y positrones ($\Pi(E, t)$) de una Cascada Electromagnética iniciada por un fotón de energía W_0 . De (2.6.33), y usando la condición de contorno (2.6.38), tenemos que la transformada de Mellin de $\Pi(E, t)$ es

$$f_{\Pi}(t)^{(\gamma)} = \frac{B(s)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} W_0^s e^{\lambda_1 t}, \quad (2.6.43)$$

donde el super índice (γ) denota que la cascada fue iniciada por un fotón.

La inversa de la transformada de Mellin está dada por (2.6.40), tal que

$$\begin{aligned} \Pi(E, t) dE &= \frac{dE}{2\pi i} \int_{-i\infty+s_0}^{i\infty+s_0} ds E^{-(s+1)} \frac{B(s)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} W_0^s e^{\lambda_1 t} \\ &= \frac{dE}{E} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+s_0}^{i\infty+s_0} ds \frac{B(s)}{\sqrt{s}(\lambda_1 - \lambda_2)} \sqrt{s} \left\{ \frac{W_0}{E} \right\}^s e^{\lambda_1(s)t} \\ \Pi(E, t) dE &= \frac{dE}{E} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+s_0}^{i\infty+s_0} ds \frac{B(s)}{\sqrt{s}(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{(\lambda_1(s)t + ys + \frac{1}{2} \ln s)}, \end{aligned} \quad (2.6.44)$$

donde

$$y \equiv \ln \frac{W_0}{E} \quad (2.6.45)$$

es **definido** como *letargo* [8].

Definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \\ H_2(s) &= -\frac{\sigma_0 + \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \\ L(s) &= \frac{C(s)\sqrt{s}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \\ M(s) &= \frac{B(s)}{\sqrt{s} \{ \lambda_1(s) - \lambda_2(s) \}}, \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

las cuales son útiles en la discusión que estamos desarrollando. En el Cuadro 2.2 se muestran sus valores numéricos en función de s

Particularmente, $M(s)$ aparece en la ecuación (2.6.44), y del Cuadro 2.2 se puede ver que esta función es aproximadamente constante para valores pequeños de s (debido al factor $\sqrt{s}$ que fue incluido en la expresión). Así, la rápida variación del integrando está

contenida en el argumento de la exponencial.

Tomando en consideración esta condición, la aproximación de punto de ensilladura de (2.6.44) consiste en expandir el argumento de la exponencial en una serie de Taylor a segundo orden en s alrededor de algún $\bar{s}$, donde $\bar{s}$ es la solución de la ecuación:

$$\frac{d}{ds} \left\{ \lambda_1(s)t + sy + \frac{1}{2} \ln s \right\}.$$

La pequeña variación de $M(s)$ puede ser despreciada, y aproximar su valor evaluando $s = \bar{s}$, lo cual transforma a (2.6.44) en una integral Gaussiana que puede ser evaluada en un contorno de integración alrededor del punto de ensilladura $\bar{s}$.

s	$H_1(s)$	$H_2(s)$	$L(s)$	$M(s)$	s	$H_1(s)$	$H_2(s)$	$L(s)$	$M(s)$
0,0	0,5000	0,5000	0,4689	0,5333	1,4	0,3312	0,6688	0,5768	0,3840
0,1	0,5365	0,4635	0,4776	0,5207	1,5	0,3057	0,6943	0,5737	0,3700
0,2	0,5433	0,4567	0,4872	0,5093	1,6	0,2809	0,7191	0,5684	0,3554
0,3	0,5424	0,4576	0,4975	0,4989	1,7	0,2572	0,7428	0,5612	0,3404
0,4	0,5364	0,4636	0,5084	0,4891	1,8	0,2348	0,7653	0,5523	0,3253
0,5	0,5263	0,4737	0,5195	0,4799	1,9	0,2138	0,7862	0,5419	0,3102
0,6	0,5128	0,4872	0,5306	0,4709	2,0	0,1944	0,8057	0,5304	0,2952
0,7	0,4962	0,5038	0,5412	0,4619	2,2	0,1602	0,8398	0,5050	0,2663
0,8	0,4771	0,5229	0,5511	0,4527	2,4	0,1319	0,8681	0,4781	0,2395
0,9	0,4559	0,5442	0,5599	0,4428	2,6	0,1090	0,8910	0,4511	0,2152
1,0	0,4327	0,5673	0,5672	0,4328	2,8	0,0905	0,9096	0,4251	0,1935
1,1	0,4083	0,5917	0,5728	0,4218	3,0	0,0755	0,9244	0,4005	0,1744
1,2	0,3830	0,6171	0,5763	0,4100	4,0	0,0341	0,9659	0,3039	0,1085
1,3	0,3571	0,6429	0,5777	0,3974	5,0	0,0181	0,9819	0,2421	0,0733

Cuadro 2.2: Valores numéricos de las funciones $H_1(s)$, H_2 , $L(s)$ y $M(s)$

Se puede aplicar el mismo tratamiento para hallar las soluciones de otros tipos de Cascadas Electromagnéticas, en donde las definiciones (2.6.46) se vuelven importantes. Por ejemplo, si queremos hallar la solución para electrones y positrones de una Cascada Electromagnética iniciada por un electrón incidente de energía E_0 , la transformada de Mellin de $\Pi(E, t)$ puede ser obtenida siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2.6.3, y usando la condición de contorno (2.6.39), obteniendo

$$f_{\Pi}(s, t) = \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} E_0^s e^{\lambda_1(s)t} = H_1(s) E_0^s e^{\lambda_1(s)t}. \quad (2.6.47)$$

El espectro $\Pi(E, t)$ es obtenido regresando la transformada de Mellin y evaluando la misma por la aproximación del punto de ensilladura, como se hizo anteriormente, con la diferencia de que $H_1(s)$ es aproximadamente constante para valores pequeños de s (Cuadro 2.2) y no es necesario incluir el factor $\sqrt{s}$ que se incluyó en (2.6.44).

En general, la integral a ser aproximada será de la forma

$$I(t, \bar{s}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\bar{s}}^{i\infty+\bar{s}} ds \{G(s)\} e^{\lambda_1(s)+sy},$$

donde $G(s) \propto 1/s^n$. Así

$$\begin{aligned} I(t, \bar{s}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\bar{s}}^{i\infty+\bar{s}} ds \{G(s)s^n\} \frac{1}{s^n} e^{\lambda_1(s)+sy} \\ I(t, \bar{s}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\bar{s}}^{i\infty+\bar{s}} ds \{F(s)\} e^{\lambda_1(s)t+sy-n \ln s}, \end{aligned} \quad (2.6.48)$$

donde $F(s) = G(s)s^n$ es aproximadamente constante.

La condición de localización del extremo es entonces

$$\left. \frac{d}{ds} \{ \lambda_1(s)t + sy - n \ln s \} \right|_{\bar{s}} = \lambda_1'(\bar{s})t + y - \frac{n}{\bar{s}} = 0. \quad (2.6.49)$$

Expandiendo el integrando alrededor de $\bar{s}$ y resolviendo la integral compleja, obtenemos

$$\begin{aligned} I(t, \bar{s}) &= F(\bar{s}) e^{\lambda_1(\bar{s})t+y\bar{s}-n \ln \bar{s}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\bar{s}}^{i\infty+\bar{s}} ds e^{(\lambda_1''(s)t + \frac{n}{s^2}) \frac{(s-\bar{s})^2}{2}} \\ &\simeq \frac{F(\bar{s})}{\sqrt{\lambda_1''(\bar{s})t + \frac{n}{\bar{s}^2}}} e^{\lambda_1(\bar{s})t+y\bar{s}-n \ln \bar{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (2.6.50)$$

La ecuación (2.6.50) representa la solución para el integrando del espectro diferencial en su caso general.

Espectro a Calcular	n	$F(s)$
$e^+ + e^-$ producidos por un fotón γ	$-\frac{1}{2}$	$M(s)$
$e^+ + e^-$ producidos por un $e^{+/-}$	0	$H_1(s)$
Fotones producidos por un γ	0	$H_2(s)$
Fotones producidos por un $e^{+/-}$	$\frac{1}{2}$	$L(s)$

Cuadro 2.3: Cantidades importantes en la aproximación de Rossi&Greisen

Aún cuando hemos tratado al parámetro s sin mucha importancia, el mismo contiene un significado físico muy importante en toda la discusión que hemos elaborado en la

sección. Debido al hecho que $I(t, s)$ es proporcional a $e^{\lambda_1(s)t}$, el número de partículas en la cascada (a una energía dada) aumenta para profundidades tales que $s < 1$ (cuando $\lambda_1(s)$ es positivo), llega a su máximo cuando $s = 1$ y decae para $s > 1$ (cuando $\lambda_1(s)$ es negativo).

En la aproximación (2.6.42), vemos que

$$\lambda_1'(s) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{s} \right). \quad (2.6.51)$$

Así, combinando (2.6.51) y (2.6.49), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{s} \right) t + y - \frac{n}{s} &= \frac{t}{2} - \frac{3t}{2s} + y - \frac{n}{s} = 0 \\ \frac{st}{2} - \frac{3t}{2} + ys - n &= 0, \end{aligned}$$

de donde, **definimos** [1] como *Edad de la Lluvia* s al cociente

$$s \equiv \frac{3t + n}{t + 2y}. \quad (2.6.52)$$

Es importante recalcar que la definición de s varía dependiendo del espectro integral que se quiera obtener (Cuadro2.3).

La profundidad a la cual ocurre el máximo en el espectro es obtenida, aproximadamente, si maximizamos el argumento de la exponencial en (2.6.50), es decir

$$\frac{d}{dt} (\lambda_1(s)t + sy - n \ln s) = \left\{ \frac{d}{ds} (\lambda_1(s)t + sy - n \ln s) \right\} \frac{ds}{dt} + \lambda_1(s) = \lambda_1(s) = 0. \quad (2.6.53)$$

Como $\lambda_1(s) = 0$ para $s = 1$, obtenemos de (2.6.49) que

$$\lambda_1'(1)T + y - n = 0,$$

donde, **definimos** T como la *profundidad máxima normalizada*, tal que

$$T \equiv \frac{X_{max}}{X_0} = \frac{n - y}{\lambda_1'(s)}.$$

De (2.6.51) vemos que $\lambda_1'(1) = -1$, con lo cual obtenemos finalmente la expresión para la profundidad normalizada a la cual ocurre el máximo de la Cascada Electromagnética

$$T = \frac{X_{max}}{X_0} = \ln \frac{W_0}{E} - n. \quad (2.6.54)$$

Aquí, T es una función explícita de la energía E y es “menos profunda” para energías altas (como era de esperarse).

De (2.6.50) podemos ver que (en general) el espectro de energía para partículas en la lluvia será de la forma

$$\frac{dh}{dE} = \frac{1}{E_0} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s+1} e^{\lambda_1(s)t} \text{ (Función de } s). \quad (2.6.55)$$

Como s solo depende logarítmicamente de $y = \ln(E_0/E)$, la dependencia en energía del espectro está dada prácticamente como una ley de potencias, y por tanto el espectro se agudiza proporcionalmente a s . Particularmente, en el máximo $s = 1$, el espectro es proporcional a E^{-2} . (Notar que debido a que s sí depende realmente de y , este postulado funciona solamente para valores limitados de energía)

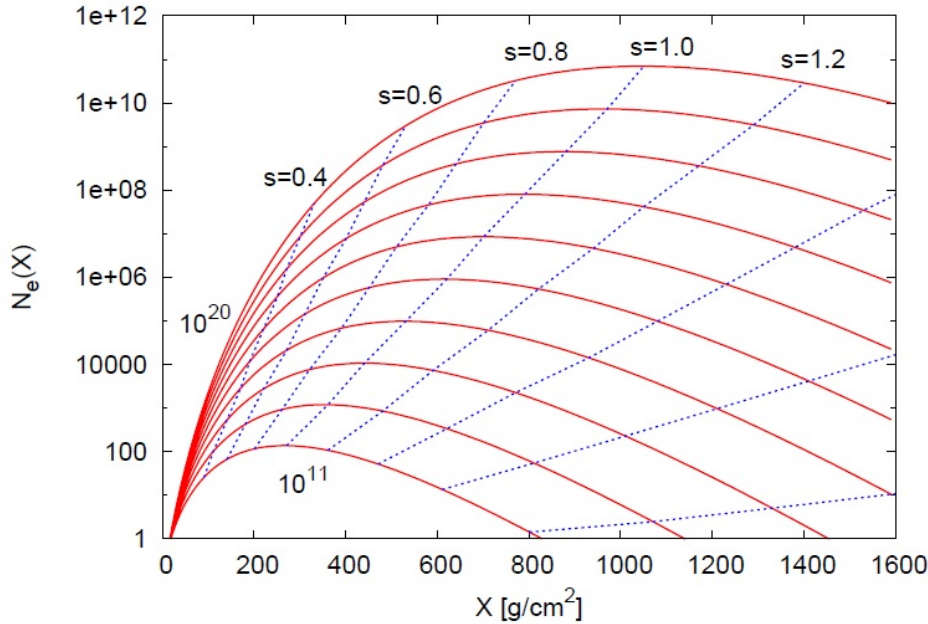


Figura 2.8: Cascada Electromagnética

Número de electrones en una Cascada Electromagnética iniciada por un fotón en función de la profundidad atmosférica, parametrizado por la energía del primario incidente. En orden creciente, las gráficas corresponden a energías del primario $E_p = 10^{11} \text{ eV}$ hasta $E_p = 10^{20} \text{ eV}$. Se muestra también la edad de la lluvia s . Imagen extraída de [37]

Para finalizar la discusión, podemos ver que el exponente $\lambda_1(s)t + sy - n \ln s$ puede ser reescrito como $n(1 - \ln s) + t(1 - \frac{3}{2} \ln s)$, por lo que, regresando a los ejemplos que motivaron esta discusión, obtenemos que el espectro de electrones/positrones de una Cascada Electromagnética iniciada por un fotón incidente o un electrón/positrón incidente

son respectivamente

$$\begin{aligned}\Pi(> E, t)^{(e^{+/-})} &\simeq \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} H_1(s) \frac{e}{\sqrt{\lambda_1''(s) t + 1}} e^{t(1 - \frac{3}{2} \ln s)} \\ \Pi(> E, t)^{(\gamma)} &\simeq \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} M(s) \frac{\sqrt{s} e^{1/2}}{\sqrt{\lambda_1''(s) t + 1}} e^{t(1 - \frac{3}{2} \ln s)},\end{aligned}$$

y en el máximo de la cascada (con $s = 1$), obtenemos que

$$\Pi(> E, t)^{(e^{+/-})} \simeq \frac{0,14}{\sqrt{\ln(E_0/E) - 0,33}} \frac{E_0}{E} \quad (2.6.56)$$

$$\Pi(> E, t)^{(\gamma)} \simeq \frac{0,14}{\sqrt{\ln(E_0/E) - 0,25}} \frac{E_0}{E}. \quad (2.6.57)$$

Es importante notar la similitud entre las fórmulas para la profundidad a la cual ocurre el máximo de partículas (2.6.54) y el número de partículas máximas producidas (2.6.56 y 2.6.57), con las expresiones correspondientes a la aproximación de Heitler (2.5.20) y (2.5.21).

La Figura 2.8 muestra un gráfico de número de electrones en función de la profundidad atmosférica de una Cascada Electromagnética iniciada por fotones con distintas energías. En ella, vemos como cambia la producción de secundarios a medida que se desarrolla la cascada, alcanzando el máximo de producción cuando $s = 1$, como se había predicho en el modelo teórico. También se puede corroborar la dependencia de X_{max} en función de la energía del primario E_p .

2.6.5. Fluctuaciones y Distribución Lateral

Para una partícula incidente dada, las fluctuaciones en el tamaño de la lluvia, medida a una determinada profundidad atmosférica, surgen de la incertidumbre en el punto de inicio de la cascada y de la forma en que, ésta, se desarrolla. Tomemos como ejemplo un fotón incidente, el cual interactúa con la atmósfera con probabilidad $dP/P = -\sigma_0 dt$, donde σ_0 es la sección eficaz de la interacción. Así, $P(t_1) = \sigma_0 e^{-\sigma_0 t_1}$ es la distribución de puntos en los cuales la lluvia pudo haberse originado. Para esta distribución:

$$\begin{aligned}\langle t_1^2 \rangle &= \int_0^\infty dt \sigma_0 e^{-\sigma_0 t_1} t^2 = \frac{2}{\sigma_0^2} \\ \langle t_1 \rangle &= \int_0^\infty dt \sigma_0 e^{-\sigma_0 t_1} t = \frac{1}{\sigma_0},\end{aligned}$$

de donde $\delta t = \sqrt{\langle t_1^2 \rangle - \langle t_1 \rangle^2} = 1/\sigma_0 = 9/7$.

Como $h(t) \propto e^{\lambda_1(s)t}$, las fluctuaciones en $\ln h$ son

$$\delta \ln h \simeq \lambda_1(s) t \delta t \simeq \frac{9}{14} (s - 1 - 3 \ln s).$$

Para un fotón de $10^{15}eV$ de energía que inicia una Lluvia Atmosférica, a nivel del mar (por ejemplo) $s \simeq 1,4$ y $\delta h \simeq 0,4h$, por lo que estas fluctuaciones son relativamente pequeñas. Sin embargo, cuando las fluctuaciones en el desarrollo de la cascada son consideradas, las fluctuaciones totales pueden llegar a ser mucho más grandes.

Definimos [8] *Radio de Molliere* a la dispersión transversal que experimentan partículas a bajas energías en una Lluvia Atmosférica, luego de atravesar una cantidad de materia igual a X_0 . Así:

$$r_m = \frac{mc^2 \sqrt{4\pi/\alpha}}{E_c} X_0, \quad (2.6.58)$$

donde E_c es la energía crítica.

Definimos [1] *Función de distribución Lateral* como aquella función que parametriza la distribución del número de secundarios en la dirección transversal al eje de la lluvia. Aún cuando el tratamiento analítico es complejo, existen aproximaciones realizadas por Greisen para obtener la forma de la distribución Lateral de una Lluvia Atmosférica dada. La *Ecuación de Greisen* para la distribución lateral es conocida como la Fórmula NKG, y tiene la siguiente forma:

$$xf(x) \propto x^{s-1} (1+x)^{s-4,5},$$

válida para $1 \leq s \leq 1,4$.

En la Fórmula NKG, podemos tomar $x = r/r_m$ como la distancia desde una partícula cualquiera al eje de la Lluvia, expresada en unidades de Molliere. Además, la densidad de partículas a una distancia perpendicular r es:

$$\rho(x, t) = \frac{N_e(t)}{r_m^2} f(x),$$

donde N_e es el número total de partículas en la Lluvia a una profundidad t .

Finalmente, obtenemos que:

$$\rho(x, t) = \left\{ \frac{\Gamma(4,5-s)}{2\Gamma(s)\Gamma(4,5-2s)} \right\} x^{s-2} (1+x)^{s-4,5} \frac{N_e(s)}{\pi r_m^2}, \quad (2.6.59)$$

donde $\Gamma(s)$ es la función Gamma.

A medida que la cascada se desarrolla, la dispersión lateral aumenta, pero las partículas continúan moviéndose en la dirección del promedio. Este hecho permite **definir** como *frente de la lluvia* a la configuración espacial que adquieren los secundarios en su propagación hacia el suelo.

2.7. Cascadas Hadrónicas

Definimos *Hadrón* a toda partícula subatómica formada por quarks que permanecen unidos debido a la interacción nuclear fuerte entre ellos. Una Lluvia Atmosférica Extendida iniciada por un Hadrón es modelada usando un tratamiento similar al realizado en la sección 2.5.3 (revisar sección 3 de [35]). Imaginemos que la atmósfera se constituye en un conjunto de capas de longitud $\lambda_I \ln 2$, donde λ_I es ahora la longitud de interacción asociada al proceso. Los piones neutros alimentan una componente de la Cascada Electromagnética, al producir fotones y electrones muy energéticos según las reacciones:

$$\begin{aligned}\pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma + e^+ + e^-. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Por su parte, los piones cargados decaen en muones energéticos que dan origen a la componente muónica de la lluvia, la cual es mucho mayor respecto a las iniciadas por partículas electromagnéticas. Los procesos que la generan son:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e, \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

y sus conjugados de carga. Mesones extraños (principalmente kaones) son también fuente de muones luego de su decaimiento vía las siguientes reacciones:

$$\begin{aligned}K^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\ K^+ &\rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e, \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

y sus conjugados de carga.

2.7.1. Recapitulando el Modelo de Heitler

De las ecuaciones anteriores, vemos que estos hadrones interactúan después de haber viajado una capa completa de la atmósfera, produciendo N_{ch} piones cargados y $\frac{1}{2}N_{ch}$ piones neutros. Consideremos un protón entrando a la atmósfera con energía E_0 . Después de n interacciones (o capas atmosféricas), habrá $N_\pi = (N_{ch})^n$ piones cargados. Asumiendo una distribución equitativa de energía, estos Piones tendrán una energía total igual a $(2/3)^n E_0$, donde la energía faltante del primario E_0 es enviada al canal electromagnético

en el decaimiento de los piones neutros π^0 .

La energía por cada pión cargado en la capa atmosférica n es

$$E_\pi = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n E_0}{N_{ch}^n} = \frac{E_0}{\left(\frac{3}{2}N_{ch}\right)^n}. \quad (2.7.4)$$

Después de un cierto número de generaciones n_c , la energía de cada pión se volverá menor que la energía crítica E_c para el proceso de producción, cesando de forma espontánea la producción de partículas. Este número de generaciones queda determinado por la ecuación $E_\pi = E_c$, de donde:

$$n_c = \frac{\ln E_0/E_c}{\ln \frac{3}{2}N_{ch}} = \beta_\pi \log \frac{E_0}{E_c}, \quad (2.7.5)$$

donde $\beta_\pi = \frac{\ln 10}{\ln 3/2N_{ch}}$

La energía del primario se divide en los N_π piones y las N_{max} partículas electromagnéticas producidas en las subcascadas electromagnéticas. Alcanzada la última generación de partículas, el número de muones totales será $N_\mu = N_\pi$, con lo cual

$$\begin{aligned} E_0 &= E_c^e N_{max} + E_c^\pi N_\mu = gE_c^e \left\{ N_e + \frac{E_c^\pi}{gE_c^e} N_\mu \right\} \\ E_0 &\simeq 0,85\text{GeV}(N_e + 24N_\mu), \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

donde hemos tomado los valores típicos de energías de corte para los procesos descritos anteriormente, y g es una constante de escalamiento tal que $N_e = N_{max}/g$.

Los muones resultantes del decaimiento de estos piones tendrán menos energía total cuanto más se haya desarrollado la Cascada Hadrónica. Consecuentemente, si la primera interacción se produjo a mayor altura en la atmósfera, más energía se habrá desviado al canal electromagnético, y por lo tanto será menor la relación entre el número de muones respecto al número de electrones. La componente muónica porta información sobre el punto de primera interacción, y por ende, sobre las secciones eficaces protón-protón, protón-aire y núcleo-aire.

La ecuación (2.7.6) representa la conservación de energía. La gran importancia de esta ecuación es que E_0 puede ser determinada en términos de N_e y N_μ , cantidades que pueden ser medidas experimentalmente.

Dado que gran fracción de toda la energía se disipa en el canal electromagnético, el máximo de la lluvia iniciada por un hadrón será aquel en el cual la componente electromagnética alcance su máximo. Recordando que en la primera interacción se producen $\frac{1}{2}N_{ch}$ piones neutros, y cada uno de estos decae en dos fotones, la Cascada Electromagnética según este modelo se inicia con $N_\gamma = n_{ch}$, cada uno con energía $\simeq E_0/(3N_{ch})$. Así

$$X_{max}^h = X' + X_0 \ln \frac{E_0}{3N_{ch}E_c} = X' + X_{max}^{em} - X_0 \ln 3N_{ch}, \quad (2.7.7)$$

donde X' es la profundidad de la primera interacción, X_0 es la longitud de interacción electromagnética y X_{max}^{em} es la profundidad a la cual ocurre el máximo en la Cascada Electromagnética (2.6.54)

Este resultado muestra que el máximo de una lluvia hadrónica se producirá antes en la atmósfera respecto a una lluvia de la misma energía iniciada por un fotón. La posición del máximo se convierte así en un observable importante para diferenciar lluvias hadrónicas de las lluvias fotónicas.

La extrapolación de las Cascadas Hadrónicas iniciadas por un protón a aquellas iniciadas por un núcleo de masa A no se estudian en el presente trabajo, pero su tratamiento se puede hacer siguiendo las mismas líneas de trabajo de esta sección.

2.7.2. Tratamiento analítico de las Cascadas Hadrónicas

Un tratamiento analítico de Cascadas Hadrónicas es muy complejo. Aún cuando existen mecanismos para resolver computacionalmente estos procesos, plantearemos las ecuaciones de transporte y difusión asociadas. Las mismas, poseen problemas matemáticos serios cuando se intentan resolver de forma explícita, cosa que no haremos en este trabajo. Es importante acotar que hoy en día las Cascadas Hadrónicas son investigadas con sofisticadas simulaciones de tipo Monte Carlo en computadores de amplia velocidad (tópico que esbozaremos en el próximo capítulo).

En analogía al problema electromagnético, la forma más simple de tratar una Cascada Hadrónica es considerar el proceso en una dimensión y limitar la población de partículas a núcleos simples, piones y muones. Siguiendo (2.5.3), obtenemos que la ecuación de transporte para estos núcleos en la atmósfera puede ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} h_N(E, X) = & -\frac{1}{\lambda_N(E)} h_N(E, X) + \int_E^{E_{max}} dE' h_N(E') \frac{W_{N,N}(E', E)}{\lambda_N(E')} + \\ & \int_E^{E_{max}} dE' h_\pi(E') \frac{W_{\pi,N}(E', E)}{\lambda_\pi(E')}, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

donde $h_N(E, X)dE$ es el flujo de núcleos a una profundidad dX en un intervalo de energía $[E, E+dE]$ y $W_{N,N}(E', E)$. $W_{\pi,N}(E', E)$ son los espectros inclusivos asociados a los núcleos producidos por colisiones entre núcleos incidentes y decaimiento de Piones cargados.

Del mismo modo, para el flujo de Piones en la cascada obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} h_\pi(E, X) = & -h_\pi(E, X) \left(\frac{1}{\lambda_\pi(E)} + \frac{B_\pi}{EX} \right) + \int_E^{E_{max}} dE' h_N(E', X) \frac{W_{\pi,N}(E', E)}{\lambda_N(E')} + \\ & \int_E^{E_{max}} dE' h_\pi(E', X) \frac{W_{\pi\pi}(E', E)}{\lambda_\pi(E')}, \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

donde B_π es la constante de decaimiento asociada a piones cargados.

Finalmente, para muones en la cascada hadrónica obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial X} h_\mu(E, X) = -\frac{B_\mu}{EX} h_\mu(E, X) + \frac{B_\pi}{EX} h_\pi(E, X) + I \frac{\partial}{\partial E} h_\mu(E, X),$$

donde el primer término hace referencia a las pérdidas por decaimiento de muones al atravesar la atmósfera, el segundo término se asocia a la producción de muones por el decaimiento de Piones cargados, y el último término cuenta las pérdidas en energía debidas a ionización en la atmósfera (término que no se presenta en la ecuación (2.5.3) y que hemos incluido a mano)

Usando métodos numéricos podemos hallar soluciones elementales a estas ecuaciones. Aplicando estas ecuaciones al espectro incidente de primarios podríamos describir de forma general flujos de Rayos Cósmicos de hadrones y muones en la atmósfera, y añadiendo este resultado a las ecuaciones análogas para Cascadas Electromagnéticas, podemos describir, en principio, todo el modelo.

Capítulo 3

Métodos de Simulación

3.1. Introducción

En el capítulo anterior, hemos dado una descripción detallada sobre la fenomenología asociada a las Cascadas Aéreas Extensas, así como de su basamento teórico. En la última sección del mismo, se advirtió que resolver las ecuaciones de transporte asociadas a estos procesos (en particular las relacionadas con Lluvias Hadrónicas) no es sencillo y, en general, requiere de técnicas mucho más sofisticadas.

Estas técnicas son expresiones probabilísticas que nos permitirán (mediante algoritmos computacionales) realizar simulaciones de estos procesos sin necesidad de resolver las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior. Con estas simulaciones computarizadas, podemos realizar y replicar experimentos sobre sistemas cuyos modelos teóricos no se presentan en un formato particularmente completo; es decir, permiten un cierto grado de libertad en la correspondencia entre el sistema estudiado y el basamento teórico que lo describe.

Definimos [38] *Simulación* como una técnica para desarrollar experimentos de prueba sobre modelos teóricos de un determinado sistema. Esta definición general es comúnmente llamada de amplio sentido (*wide sense*), mientras que en un sentido más estocástico, se **define** [39] *Simulación* como toda experimentación que se realiza con un modelo teórico a lo largo de un período de tiempo. Debido a que el muestreo de una distribución particular involucra el uso de números aleatorios, las simulaciones estocásticas son comúnmente conocidas como *simulaciones Monte Carlo*. Históricamente, el Método de Monte Carlo fue estructurado para ser una técnica que, mediante el uso de números aleatorios, soluciona modelos teóricos (**definimos** *números aleatorios* como un conjunto de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$).

El término *Monte Carlo* fue introducido por von Neumann y Ulam durante la segun-

da Guerra Mundial como una palabra clave para los trabajos secretos que se llevaban a acabo en Los Alamos (fue propuesto en honor a los casinos de la ciudad Monte Carlo en Mónaco). El Método de Monte Carlo fue posteriormente aplicado en la construcción de la bomba atómica, utilizándose simulaciones directas sobre el comportamiento aleatorio de la difusión de neutrones en materiales que podían ser sometidos a fisión nuclear. Después de estos eventos se volvió muy conocido, tanto que hoy en día es la técnica más poderosa y comúnmente usada para analizar problemas complejos.

En el presente capítulo se presentará una descripción sobre algunos de estos métodos, así como el manejo de una herramienta computacional de simulación de Cascadas Aéreas Extensas (CORSIKA), basada en el mismo.

3.2. Repaso general de Probabilidades

3.2.1. Definiciones Generales

Esta sección está construida con las partes del cálculo de probabilidades necesarias para el estudio del Método de Monte Carlo. Para una revisión más detallada consultar [40] (especialmente los capítulos 4,5,6). La teoría de probabilidades empieza con la suposición de que existen *probabilidades* asociadas a distintos tipos de eventos. El evento B tiene una probabilidad $Pr(B)$, la cual no es más que un número entre 0 y 1 que describe la fracción de veces que ocurrirá B si pudiéramos repetir el experimento muchas veces.

Dentro de este contexto, se **definen** [40] *variables aleatorias discretas* a números $X(\omega)$ que dependen de entradas aleatorias ω . Se dice que la variable aleatoria es discreta si el número de entradas ω son contables y finitas; por el contrario, si el número de entradas son infinitas y no contables se dice que la variable aleatoria es continua. **Definimos** *Valor esperado* de una variable aleatoria discreta como

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Pr(\omega), \quad (3.2.1)$$

donde Ω es el espacio de probabilidades.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua es descrita por una función de densidad de probabilidades, $f(x)$, tal que

$$Pr(B) = \int_{x \in B} dx f(x). \quad (3.2.2)$$

Definimos *Función de Distribución Acumulativa* (en una dimensión) como

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x dx f(x). \quad (3.2.3)$$

También, para una variable aleatoria continua, **definimos** *valor esperado* como

$$\mu = E[X] = \int_R x f(x) dx, \quad (3.2.4)$$

y *varianza* (en una dimensión) como

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \mu)^2 f(x). \quad (3.2.5)$$

En más de una dimensión (caso que no ocurrirá en nuestro trabajo), es útil **definir** la *matriz de varianza-covarianza* (usualmente llamada matriz de covarianza)

$$C = E[(X - \mu)(X - \mu)^*] = \int_{R^n} dx (x - \mu)(x - \mu) f(x), \quad (3.2.6)$$

cuyas entradas individuales son las covarianzas

$$C_{jk} = E[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)^*] = \text{cov}[X_j, X_k]. \quad (3.2.7)$$

3.2.2. Cuatro distribuciones y Dos teoremas

Cuatro distribuciones muy conocidas e importantes son la uniforme, la exponencial, la gaussiana (o normal) y la de Poisson. Procedemos a explicar cada una rápidamente.

■ Distribución uniforme.

La *variable aleatoria uniforme*, U , se **define** según la siguiente densidad de probabilidades

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{si } u \notin [0, 1] \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Debido a que la densidad es constante, U tiene la misma probabilidad de estar en cualquier punto perteneciente al intervalo $[0, 1]$. Con esto, podemos crear una forma general de variables aleatorias uniformemente distribuidas en un intervalo $[a, b]$, al tomar la variable $Y = (b - a)U + a$, la cual posee una densidad de probabilidades

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{si } y \notin [a, b] \end{cases} \quad (3.2.9)$$

■ Distribución exponencial.

La *variable aleatoria exponencial*, T , se **define** como

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

donde λ es la constante de cambio (definida positiva).

- Distribución normal.

Definimos *variable aleatoria normal* Z según la siguiente densidad de probabilidad

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (3.2.11)$$

En un forma mucho más general, la distribución normal se puede escribir como $X = \sigma Z + \mu$, donde μ y σ^2 son su valor esperado y su varianza, respectivamente. A esta definición, le asignaremos la siguiente densidad de probabilidades

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.2.12)$$

la cual (a partir de ahora) escribiremos como $X \simeq \eta(\mu, \sigma^2)$.

- Distribución de Poisson.

Definimos como *distribución de Poisson* a la densidad de probabilidades discreta que expresa el número de “eventos raros” ocurridos en cierto período de tiempo, por lo cual **definimos** *evento raro* a aquel suceso que ocurre con poca probabilidad en un intervalo dado. La función de distribución queda determinada según

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad (3.2.13)$$

donde k es el número de ocurrencias del evento, y el parámetro λ representa el número de veces que se espera ocurra el evento en un período de tiempo dado. Esta distribución es de gran interés en el tratamiento de procesos asociados con Rayos Cósmicos, ya que el espectro observado en la Figura 1.3 del capítulo 1 es un proceso de Poisson determinado por la distribución de probabilidades (3.2.13)

Como última parte de este corto repaso de probabilidades, presentaremos dos teoremas especialmente importantes en el tratameinto del Método de Monte Carlo.

- Teorema de los Números Grandes (Law of large numbers).

Sea $A = E[X]$ el valor esperado de la variable aleatoria X y X_k , con $k = 1, 2, \dots$ una sucesión de muestras de X . A se puede aproximar como

$$\hat{A}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad (3.2.14)$$

con un error $R_n = \hat{A}_n - A$. El Teorema de los Números Grandes establece que $\hat{A}_n \rightarrow A$ si $n \rightarrow \infty$.

- Teorema del Límite Central (Central limit theorem).

Este peculiar teorema establece que si $\sigma^2 = \text{var}(X)$ es la varianza de X , entonces $R_n = \eta(1, \sigma^2/n)$. Es fácil ver que

$$E[R_n] = E[\hat{A}_N] - A = 0,$$

de modo que (ya que A no es aleatoria) obtenemos

$$\text{var}(R_n) = \text{var}(\hat{A}_n) = \frac{1}{n} \text{var}(X) = \frac{1}{n} \sigma^2. \quad (3.2.15)$$

En la Figura 3.1 se muestra el resultado más importante de este teorema. Suponga una distribución de probabilidades como la mostrada en el primer renglón de esta figura (la cual claramente no es gaussiana). El teorema establece que la suma de las variables aleatorias independientes con esta distribución (y en general de cualquier distribución) tiende a una gaussiana en el límite de números grandes. En la misma figura vemos las distribuciones obtenidas después de haber realizado sumas de dos, tres y cuatro términos.

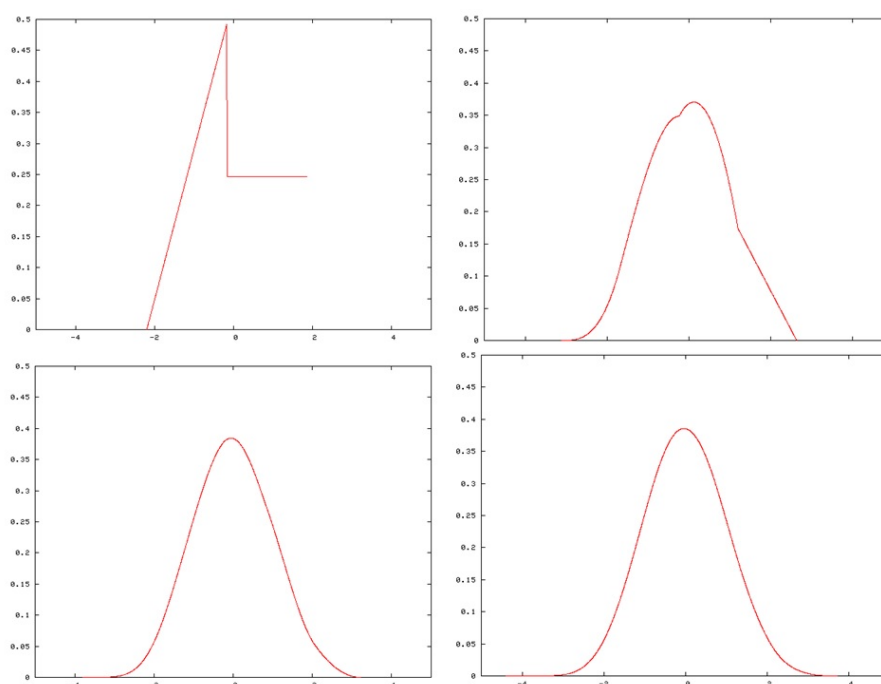


Figura 3.1: Teorema del Límite Central

Se presenta aplicado a una densidad de probabilidades (primera imagen) después de haber realizado sumas en dos, tres y cuatro términos.

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Central_limit_thm.png.

Consultado el 12/11/2016

3.3. Método de Monte Carlo

La solución de la mayoría de los problemas en matemática y física está dada en términos de integrales de funciones; sin embargo, en la mayoría de los casos reales de estudio no se puede encontrar una solución analítica de estas expresiones. Supongamos una integral de la forma

$$I = \int_{\Omega} dx f(x),$$

donde Ω es el dominio de integración. Queremos demostrar que se puede relacionar el valor de la integral I con el valor de espectación de una variable aleatoria con respecto a alguna densidad de probabilidades. Para una variable aleatoria X con densidad de probabilidad $\rho(x)$, tenemos que

$$E[f(X)] = \int_{\Omega} dx f(x) \rho(x). \quad (3.3.1)$$

La integral I puede ser expresada en términos de alguna espectación de muchas maneras. La forma más común es utilizar una densidad de probabilidad $\rho(x)$, tal que $\rho(x) > 0$ cuando $f(x) \neq 0$. De esta manera

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} dx f(x) = \int_{\Omega} dx \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) \\ &= E \left[\frac{f(X)}{\rho(X)} \right] \\ I &= E[g(X)], \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

con $g(X) = f(X)/\rho(X)$. En caso de que el dominio de integración Ω sea finito, siempre podemos utilizar la variable aleatoria X uniformemente distribuida (con densidad $\rho(X) = 1/|\Omega|$) para obtener

$$I = \int_{\Omega} dx f(x) = \int_{\Omega} dx \frac{f(x)}{1/|\Omega|} 1/|\Omega| = |\Omega| E[f(X)].$$

La utilidad de expresar la integral en términos de valores de espectación surge al hacer uso del Teorema de los Números Grandes (3.2.2), mediante el cual podemos aproximar $E[f(X)]$ haciendo uso de variables aleatorias independientes

$$E[g(x)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(X_k). \quad (3.3.3)$$

De esta manera, para aproximar cualquier integral I debemos

- Generar N variables aleatorias $\{X_k\}_{k=1}^N$ con distribución $\rho(x)$ en Ω .
- Aproximar la expresión usando el Teorema de Números Grandes

$$I \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(X_k). \quad (3.3.4)$$

Esta clase general de métodos son conocidos como Métodos de Monte Carlo, y fueron propuestos como muestreos estadísticos en los años 40 por Ulam. Para una completa revisión del Método de Monte Carlo se recomienda revisar el capítulo 4 de [38], específicamente la sección 4.2

El Método de Monte Carlo posee una exactitud (accuracy) que puede ser estimada como

$$\begin{aligned} R_N &= \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(X_k) - I \right| \\ &= \left| \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sum_{k=1}^N g(X_k) - NI}{\sigma_g \sqrt{N}} \right) \right| \\ R_N &= \left| \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}} \eta(0, 1) \right|, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde recordamos que $\sigma_g^2 = \int_{\Omega} dx (g(x) - I)^2 \rho(x)$ es la varianza y $\eta(0, 1)$ denota la variable aleatoria gaussiana con valor medio nulo y varianza 1 (en esta aproximación, se usó el Teorema del Límite Central discutido en 3.2.2).

Existen muchos métodos para generar el conjunto de variables aleatorias independientes que requiere el Método de Monte Carlo. Un muestreo simple (*sampler*) es un procedimiento que genera estas variables cada vez que es aplicado. Entre los muestreos más comunes, se encuentran el muestreo de Bernoulli, el muestreo exponencial, el método de la caja de Muller, entre otros; sin embargo, estos no son tratados en el presente trabajo.

3.4. Cosmic Ray Simulations for Kascade

Anteriormente discutimos sobre la dificultad de resolver analíticamente las ecuaciones de transporte asociadas a las Lluvias Atmosféricas Extendidas. CORSIKA (*COsmic Rays Simulation for KAscade*) es un programa para simulaciones detalladas de lluvias extendidas iniciadas por partículas de altas energía. Fue desarrollado para simulaciones en el experimento KASCADE en Karlsruhe, Alemania. Protones, núcleos pesados con números atómicos por arriba del Hierro y fotones pueden ser tratados como partículas por encima de energías de 10^{20} eV. Como hemos estudiado, estas partículas viajan por la atmósfera y colisionan con ella produciendo gran número de secundarios, o bien decaen en nuevas partículas. El programa de simulación exporta el tipo de partículas, su energía, ubicación, dirección y tiempos de llegada en 10 niveles de observación diferentes. Con esta

información, podemos extrapolar los resultados en dirección contraria, y deducir qué tipo de primario originó la cascada, así como conocer algunas de sus propiedades importantes.

3.4.1. Modelos de interacción

El código central del programa está elaborado como un archivo CMZ, por lo que varias versiones del mismo programa se pueden mantener con el mismo código. CORSIKA es la fusión de tres programas. El primero fue diseñado en 1970, y describe las interacciones hadrónicas básicas. Estas interacciones, como estudiamos, ocurren con ciertas probabilidades, por lo que necesitamos algún método para determinar qué procesos ocurrirán a lo largo del desarrollo de la cascada.

Como la mayoría de los programas de simulación, CORSIKA utiliza la teoría asociada al Método de Monte Carlo. En el caso particular de las Cascadas Atmosféricas, grandes cantidades de números aleatorios son necesarios para asegurar una simulación confiable. CORSIKA utiliza el generador de números aleatorios RANMAR de la librería de programas del CERN, el cual puede construir simultáneamente $9 \cdot 10^8$ secuencias independientes, con longitudes aproximadamente de $2 \cdot 10^{44}$ cada una.

Las interacciones hadrónicas son simuladas en CORSIKA usando distintos tipos de modelos, según las energías de cada cascada. Si la energía es lo suficientemente alta, la interacción es tratada con alguno de los modelos VENUS [41], QGSJET [42], DPM-JET [43], SIBYLL [44] o HDPM. Los modelos de altas energías alcanzan su límite cuando la producción de secundarios llega a cierto nivel de energía (*cut-off*). A partir de aquí, la simulación se realiza usando el modelo de bajas energías GEISHA. Dicha transición ocurre a energías de 12GeV .

3.4.2. Uso general

Manejar CORSIKA no es tan fácil como el manual [45] parece indicarlo. Aunque el tema y manejo central del programa están bien explicados en el manual, haremos un repaso general sobre como utilizar esta herramienta. Para obtener el programa, el lector debe enviar un correo a la dirección *dieter.heck@ik.fzk.de*. Se le pedirá que reporte el host-name de un computador, desde el cual irá un servidor indicado a descargar el ejecutable y todos los archivos que se necesitan para su funcionamiento. Una vez se hayan descargado todos los archivos, se debe leer el documento etiquetado como *README*. También se recomienda leer los dos primeros capítulos del manual de usuario [45].

Entre los archivos de la descarga, existe uno etiquetado como *cosika6031.car*. El mismo es un archivo CMZ que permite extraer distintas versiones del programa, dependiendo del sistema operativo, del compilador que se usará para compilar los archivos de fortran y de

los modelos de interacción que se deseen utilizar.

Una vez instalado satisfactoriamente el programa, se debe generar un archivo de entrada para comenzar las simulaciones. En el capítulo 3 del manual del usuario se encuentran detallados todos los distintivos que debe contener el archivo (dependiendo del tipo de simulación que se desee realizar). Como ejemplo, se presenta en el Cuadro 3.1 una archivo de entrada. Cada parámetro indicado en este archivo corresponde a un parámetro fijado en la Lluvia Atmosférica Extendida, como por ejemplo, el número de la corrida, el número de simulaciones a realizar, el tipo de primario, los ángulos de entrada, los valores de campo magnético en la zona en la que se desarrollará la cascada, entre otros. Para mayor profundizaje en el significado de los parámetros del archivo presentado, se recomienda revisar el capítulo 4 de [45].

Después de la ejecución de la simulación, varios archivos de salida son generados:

- **DATnnnnnnn.LONG** donde *n* es el número de la corrida. Este archivo contiene la distribución longitudinal de algunas de las partículas generadas, y una tabla con los depósitos de energías longitudinales (en GeV) para distintas familias de partículas en función de la profundidad atmosférica.
- **DATnnnnnnn.DBASE** el cual contiene una recapitulación del archivo de entrada.
- **CERNnnnnnnn** que contiene la salida de todos los fenómenos de tipo Cherenkov ocurridos en la Lluvia Atmosférica.

El archivo **DATnnnnnnn** es la salida principal generada por CORSIKA. Dependiendo del número de corridas y la energía de cada una, este archivo puede ser de gran extensión. Se pueden encontrar algunos detalles de la estructura de este archivo en el manual del usuario. El archivo es binario, y puede ser transformado usando algún convertidor de texto con código fortran, incluidos en la carpeta de descarga de CORSIKA. El archivo contiene 8 columnas con varias líneas de información, que tienen la siguiente estructura:

- **RUN HEADER:** este bloque está constituido por 39 filas de 8 columnas cada una y comienza con la palabra RUNH. Cada entrada contiene información detallada de la corrida realizada (para más información, visitar la página 75 de [45]).
- **EVENT HEADER:** este bloque contiene 39 filas con información de cada evento ocurrido, y comienza con la palabra EVTH.
- **DATA BLOCKS:** este bloque contiene toda la información física que queremos obtener del simulador. Para cada partícula, se reporta el tipo, las componentes de su momentum lineal, la posición y la profundidad a la que fueron formadas.

RUNNR	1					
EVTNR	1					
NSHOW	100					
PRMPAR	14					
ESLOPE	0.0					
ERANGE	1.E8	1.E8				
THETAP	0.	0.				
PHIP	0.	360				
SEED	1	0	0	hadronic part		
SEED	2	0	0	EGS4 part		
ATMOD	7					
QGSJET	T	0				
FIXHEI	0.	0.				
FIXCHI	0.					
HADFLG	0	0	0	0	0	2
ELMFLG	T	T				
STEPFC	1.					
MAGNET	18.799	44.98				
ECUTS	0.05	0.05	0.001	0.001		
LONGI	T	20.	T	T		
MUMULT	T					
MUADDI	F					
OBSLEV	1.0E2					
ARRANG	0.					
MAXPRT	10					
THIN	1.E-6	1.E30	0.			
CERARAY	20	20	15000.	15000.	100.	
DIRECT	directory					
DATBAS	T					
USER	Haverhoek					
DEBUG	F	6	F	999999999		
EXIT						

Cuadro 3.1: Archivo de entrada a CORSIKA.

- **EVENT END:** este bloque indica el fin de la lluvia estudiada. En caso de haber simulado más de una lluvia en la misma corrida, la sucesión de bloques presentada

anteriormente se repite.

- **RUN END:** después de haber terminado todas las lluvias realizadas en la simulación, las últimas 39 líneas corresponden al final del archivo.

Capítulo 4

Fluencia en Localidades de Interés Astrofísico

4.1. Introducción

En el Apéndice A se estudian distintas herramientas computacionales que facilitan el tratamiento de Cascadas Aéreas Extensas. Se recomienda revisar dicho Apéndice antes de continuar con la discusión del capítulo. El objetivo del proyecto siempre fue familiarizarse con estas herramientas, y generar data sintética en localidades venezolanas de interés astrofísico, con la cual pudieramos comparar cantidades importantes asociadas al proceso de producción de secundarios en la atmósfera (en base a los modelos teóricos estudiados en los capítulos 1 y 2) y obtener resultados que no son observables fácilmente de forma analítica.

En este capítulo, presentaremos la recopilación de criterios usados para fijar los parámetros de simulación, los procedimientos específicos realizados para generar la data sintética, los resultados obtenidos, y sus respectivas discusiones. En este contexto, pretendemos estudiar la isotropía del espectro de muones en la atmósfera, como función de los ángulos cenital y azimutal. También estudiaremos la forma del espectro general de partículas, producidas en la Cascada Aérea Extensa, y su relación con las variables y modelos estudiados en el capítulo dos.

4.2. Límites de Energía

Según lo comentado en el Apéndice A, el script *do_halleyclus.sh* configura el proyecto en base a distintos parámetros asociados a la simulación. Entre ellos (como se observa

en la Figura A.6 del Apéndice A) encontramos los límites superior e inferior de energía que serán considerados en el cálculo de probabilidades que realiza el script *genEspectra.pl* para crear el espectro de inyección de primarios a CORSIKA. Sabemos que para energías inferiores a, aproximadamente, 5 GeV, el espectro de Rayos Cósmicos está completamente dominado por el viento solar y los campos magnéticos de la heliósfera y magnetósfera; razón por la cual consideramos este valor como nuestro corte de energía interior.

Por otro lado, queremos encontrar un valor de energía E_0 , tal que, la probabilidad de que partículas con energías superiores al corte que alcancen el detector, sea baja.

Sabemos que el espectro de Rayos Cósmicos puede ser ajustado según la siguiente ley de potencias

$$\frac{dN}{dE} \simeq 1,8E^{-2,7} \frac{\text{nucleos}}{\text{cm}^2.\text{Sr.s.GeV}}, \quad (4.2.1)$$

ecuación aplicable únicamente para energías menores a 2.10^{15}eV .

Integrando el espectro (4.2.1), podemos conseguir el número total de primarios (que denotaremos con la letra λ) por intervalo de energía, tiempo, área y ángulo sólido. Así:

$$\lambda = \int dA \int dt \int d\Omega \int_{E_0}^{\infty} 1,8E^{-2,7} = 2\pi.A.\Delta t \int_{E_0}^{\infty} 1,8E^{-2,7}.$$

Supondremos un detector de 1m de diámetro, que (en promedio) posee un área $A \simeq 3,1415.10^4\text{cm}^2$. Si consideramos como intervalo temporal $\Delta t = 1\text{s}$, obtenemos:

$$\lambda = \frac{2,09.10^5}{E_0^{1,7}}. \quad (4.2.2)$$

El arribo de partículas del espectro de Rayos Cósmicos sigue un proceso de Poisson, cuya función de probabilidad está determinada por la ecuación (3.2.13) del capítulo 3:

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

donde k es el número de veces que ocurre el evento, y λ es el promedio de eventos en un intervalo dado. Bajo estas condiciones, la probabilidad de que ocurra algún evento es

$$f(> 0) = 1 - f(0) = 1 - e^{-\lambda}. \quad (4.2.3)$$

Para fijar la cota superior, E_0 , para las energías de partículas esperadas en una región dada, debemos fijar una cota inferior aceptable para la probabilidad de observación de eventos con energías iguales o superiores a E_0 . Si fijamos esta probabilidad como 10^{-6} , y la sustituimos, junto a (4.2.2), en la condición anterior, obtendremos que $E_0 \simeq 10^{15}\text{eV}$. Así, queda **definida** la *Banda de Primarios* a inyectar en CORSIKA como el intervalo $[5.10^9, 10^{15}]\text{eV}$.

4.3. Fluencia en localidades de interés astrofísico

4.3.1. Parámetros de entrada

Una vez establecida la Banda de Primarios sobre la cual se generó el espectro de inyección, procedemos a presentar los parámetros de cada simulación realizada, representados en los Cuadros del 4.1 al 4.4.

Es importante destacar que estamos trabajando con detectores volumétricos (parámetro que fue especificado en el script *do_halleyclus.sh*), razón por la cual utilizaremos todos los secundarios producidos en media esfera (es decir $\theta \in [0, 90]$). Fijamos también como corte de rigidez magnética 5GV, ya que sabemos que valores de rigidez superiores a 10GV hacen que la partícula sea transparente a los efectos del campo magnético, y para valores inferiores a 2GV aparecen corrientes indeseadas en la magnetósfera terrestre.

- Páramo de Piedras Blancas.

Parámetro	Valor fijo
Latitud	8°51'31"N
Longitud	71°57'06"O
Altitud	4748.21 msnv
Energía mínima	5 GeV
Energía máxima	1000000 GeV
Mínimo theta observado	0°
Máximo theta observado	90°
Corte de rigidez	5 GV
Componente horizontal de campo magnético	26.79 μ T
Componente vertical de campo magnético	17.98 μ T
Modelo atmosférico	E1

Cuadro 4.1: Parámetros para cálculo de fluencia en el Páramo de Piedras Blancas.

- Pico Espejo.

Parámetro	Valor fijo
Latitud	8°31'45"N
Longitud	71°03'49"O
Altitud	4765 msnv
Energía mínima	5 GeV
Energía máxima	1000000 GeV
Mínimo theta observado	0°
Máximo theta observado	90°
Corte de rigidez	5 GV
Componente horizontal de campo magnético	26.75 μ T
Componente vertical de campo magnético	17.46 μ T
Modelo atmosférico	E1

Cuadro 4.2: Parámetros para cálculo de fluencia en el Pico Espejo.

- Universidad Central de Venezuela.

Parámetro	Valor fijo
Latitud	10°29'30"
Longitud	66°53'09"
Altitud	900 msnv
Energía mínima	5 GeV
Energía máxima	1000000 GeV
Mínimo theta observado	0°
Máximo theta observado	90°
Corte de rigidez	5 GV
Componente horizontal de campo magnético	26.69 μ T
Componente vertical de campo magnético	18.18 μ T
Modelo atmosférico	E1

Cuadro 4.3: Parámetros para cálculo de fluencia en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

- Universidad Simón Bolívar.

Parámetro	Valor fijo
Latitud	10°24' N
Longitud	66°54' O
Altitud	1250 msnv
Energía mínima	5 GeV
Energía máxima	1000000 GeV
Mínimo theta observado	0°
Máximo theta observado	90°
Corte de rigidez	5 GV
Componente horizontal de campo magnético	26.69 μ T
Componente vertical de campo magnético	18.09 μ T
Modelo atmosférico	E1

Cuadro 4.4: Parámetros para cálculo de fluencia en la Universidad Simón Bolívar.

4.3.2. Producción y procesamiento de data sintética

Una vez establecidos los parámetros específicos de cada simulación, se usaron las *CRK-Tools* (siguiendo los métodos explicados en el Apéndice A) para generar la data sintética asociada a los procesos de producción de secundarios, en cada una de las localidades mencionadas anteriormente.

Sabemos que el script *do_halleyclus.sh* genera un conjunto de 8 archivos ejecutables, que contienen el espectro de inyección de primarios que usará CORSIKA para simular la Cascada Aérea Extensa. En el Apéndice B: “Desarrollos Computacionales”, se encuentran todos los scripts desarrollados a lo largo del proyecto. Para ejecutar los archivos generados por *do_halleyclus.sh* se usaron (en conjunto) los script “*fix644.sh*” y “*runall.sh*” (consultar B.1). Estos archivos ejecutables generan un conjunto de datos, en el directorio de trabajo, con distintas extensiones; en particular, los archivos con extensión .lst.bz2 contienen toda la información sobre la producción de secundarios (número de partículas, energías, profundidades atmosféricas, ángulos de producción, entre otros).

Estos archivos son de gran tamaño, y para descomprimirlos se usó el script “*descomprimir.sh*” (consultar B.2) en la línea de comando **nohup ./descomprimir.sh &** (ganando tiempo al evitar la impresión en pantalla de los datos). El comando anterior genera en el directorio de trabajo 60 archivos de extensión .sec.bz2, con la estructura presentada en el Cuadro 4.5. En él, se observa la gran cantidad de información que contienen estos archivos, y de ellos se extrajeron algunos resultados importantes para ser discutidos en las próximas secciones (como por ejemplo la dependencia angular del espectro de muones).

```
# # # sec
# # This is the Secondaries file - CrkTools v3r0
# # 12 column format is:

# # CorsikaId  px  py  pz  x  y  t  shower_id  prm_id  prm.energy  prm.theta
# #                                     prm_phi
```

Cuadro 4.5: Estructura básica de los archivos .sec.bz2.

4.4. Espectro de muones

4.4.1. Dependencia cenital

Uno de los objetivos del proyecto fue observar el espectro de muones a distintas altitudes, y ver la isotropía del mismo en función de la variable cenital (denotada con la letra ϕ en las coordenadas de CORSIKA). El espectro de muones es bastante conocido, por lo que puede ser usado para corroborar la fiabilidad de la data generada.

Para extraer el espectro de muones de los archivos .sec.bz2 presentados en el Cuadro 4.5, se utilizó el script “extraerparticulas.sh” (consultar B.3), que indentifica las partículas para las cuales CorsikaId es igual a 005 o 006 (códigos CORSIKA para muones), y las extrae a otro archivo (con nombre *muon_desordenado.dat*) junto con las componentes de su momentum y el valor de su energía.

Con el script “FiltroPhi” (consultar B.4) se filtró el archivo de muones para distintos valores de ángulo cenital; es decir, se fijó un ancho de 20° (subdividiendo así la circunferencia polar en 18 regiones), y se usó “FiltroPhi” para contar el número de muones generados en cada franja. Finalmente, usando el script “Particulas-Energia.sh” (que toma la subdivisión en energía preestablecida en el archivo “NuevaEnergia.awk”), se generó un histograma con el Número de partículas en función de su energía (consultar B.6).

La gráfica del espectro de muones en función del ángulo cenital (en coordenadas cartesianas) para el Páramo de Piedras Blancas se presenta en la Figura 4.1. El mapa de color representa la densidad poblacional de muones (ver leyenda a la izquierda de la figura), siendo las zonas rojas aquellas que presentan mayor cantidad de población.

En esta gráfica, podemos observar la dependencia directa del número de muones producidos (N) en función de la energía; vemos que N decae rápidamente al aumentar E , habiéndose reducido a un 20 % de su valor máximo cuando $E = 25\text{GeV}$.

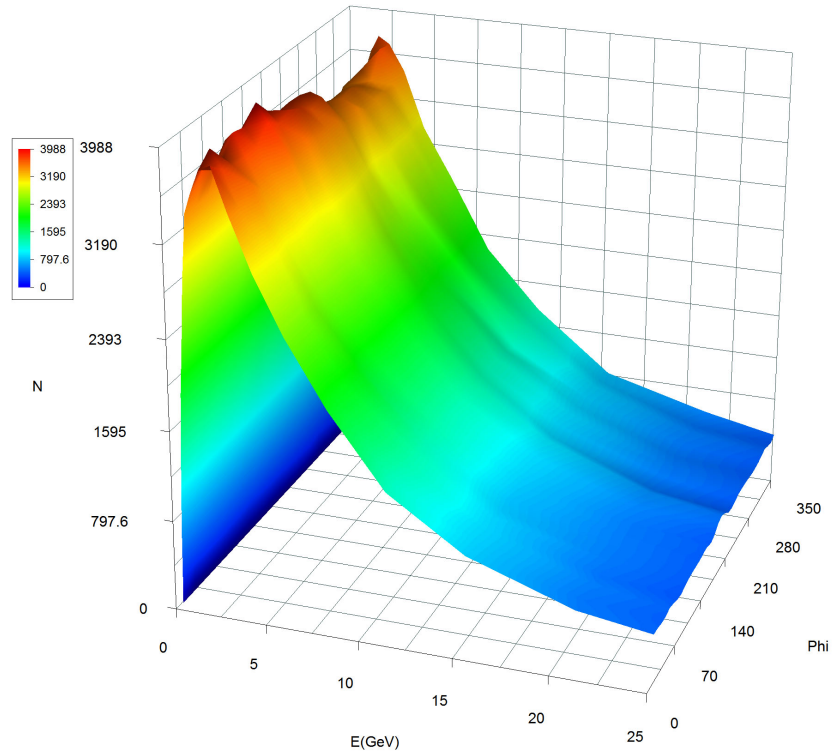


Figura 4.1: Espectro de muones en función del ángulo cenital. Visión general
Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación cartesiana).

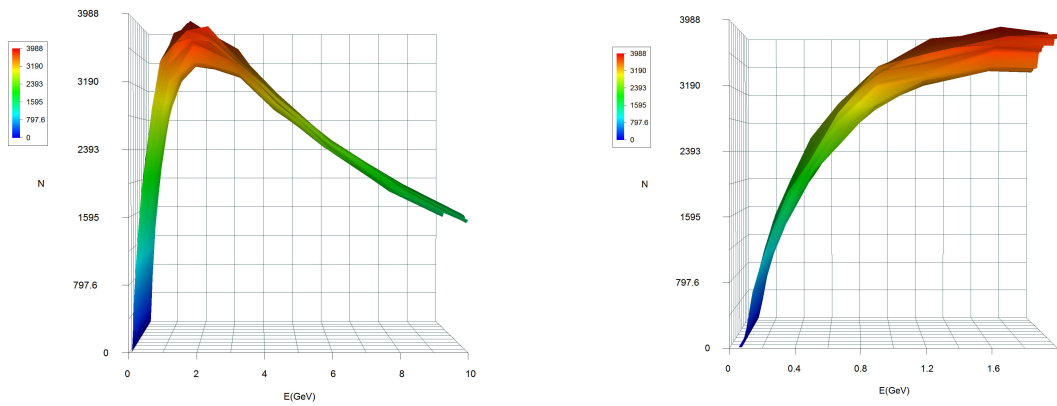


Figura 4.2: Espectro de muones en función del ángulo cenital. Toma frontal
Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación frontal cartesiana).

En la Figura 4.2 se presentan dos vistas frontales del espectro de muones, en sus versiones natural (izquierda) y ampliada (derecha). En ellas, observamos la presencia de un máximo en el número de muones a una energía $E \simeq 1,8\text{GeV}$ (según nuestras tablas de

datos), resultado que habíamos predicho sobre el espectro de secundarios en el capítulo 2 del presente trabajo.

En la Figuras 4.1 observamos que la energía a la cual ocurre el máximo en el número de muones se mantiene constante sin importar la dirección en la cual fue medido, lo cual nos permite concluir que el espectro de muones en la atmósfera es isotrópico respecto a la variable cenital.

Para una mejor visualización, se presenta en la Figura 4.3 el espectro de muones en coordenadas cilíndricas, el cual se realizó transformando la data con el script “Cambio-Polar” (consultar B.8) y graficando la energía en la dirección radial, el ángulo cenital en la dirección polar, y el número de muones en la dirección z .

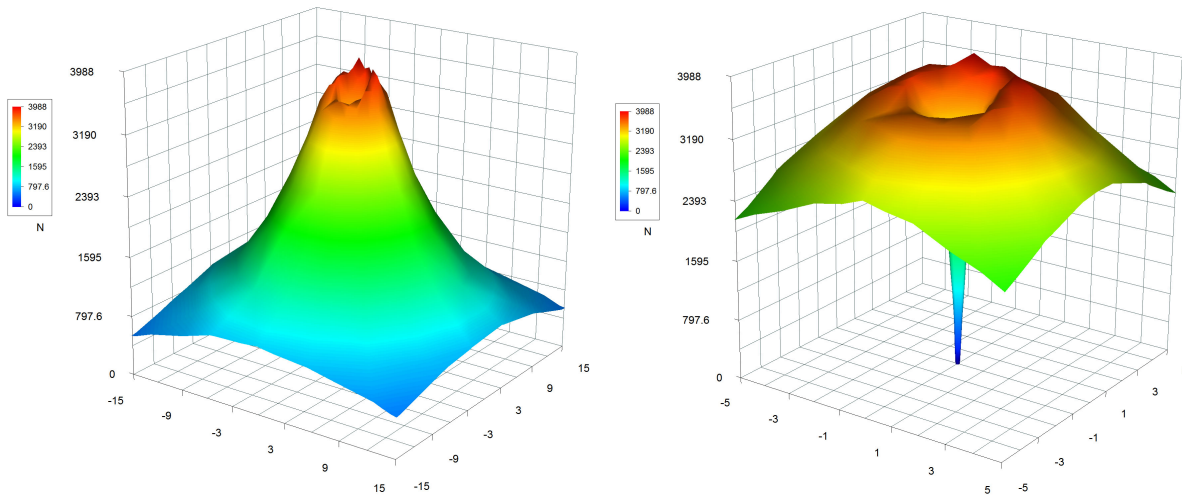


Figura 4.3: Espectro de muones en función del ángulo cenital. Coordenadas cilíndricas Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación cilíndrica). En el plano se presenta graficada la energía de la partícula, y en el mapa de color el Número de muones

En la Figura 4.4, se presenta una vista superior del espectro de muones en coordenadas cilíndricas, en la cual se puede observar claramente su simetría cenital (quedando corroborada su isotropía). En ella, también podemos observar una ausencia total de muones para bajas energías, representada en el mapa de color con azul, y que corresponde a una característica clásica del espectro de muones en la atmósfera.

Estas gráficas fueron realizadas para cada una de las localidades de interés astrofísico citadas anteriormente, y son presentadas en el Apéndice C: “Visualizaciones Complementarias”

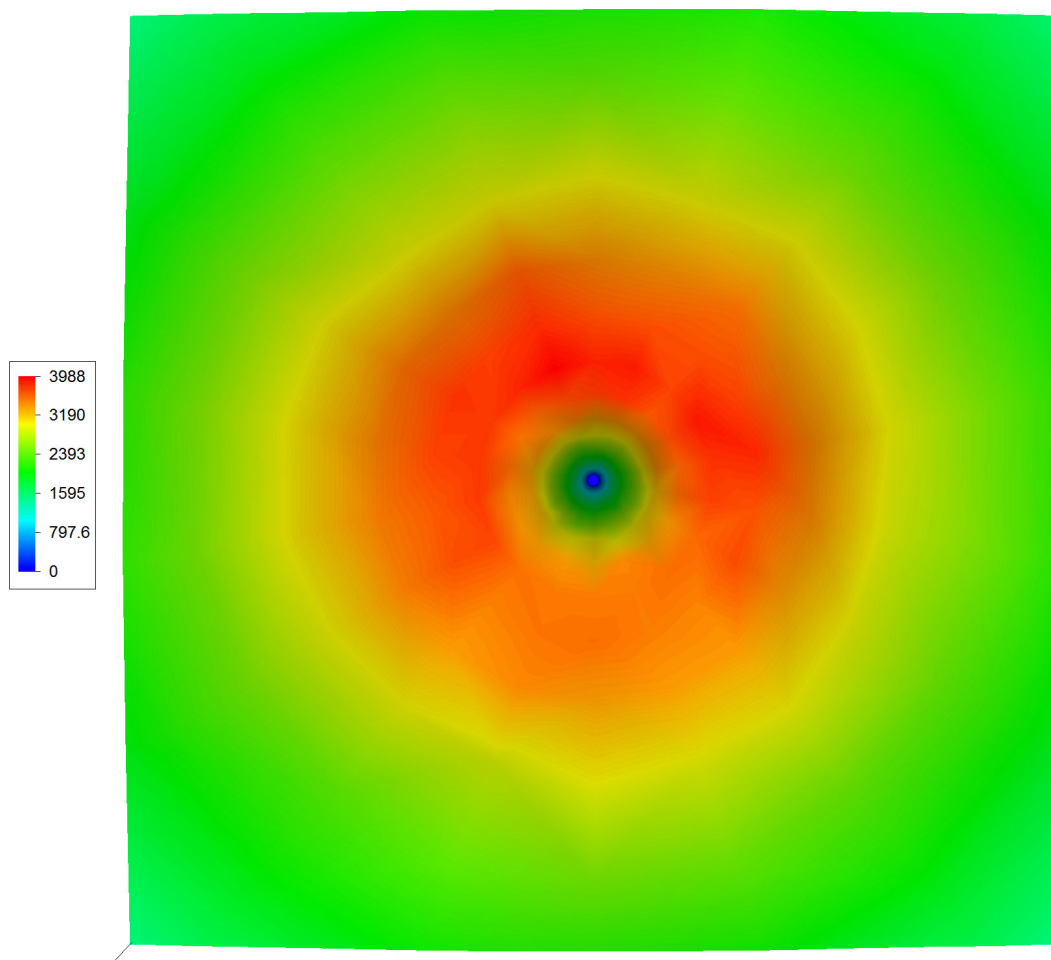


Figura 4.4: Espectro de muones en función del ángulo cenital. Vista superior Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación cilíndrica) en un corte superior. En el plano se presenta graficada la energía de la partícula, y en el mapa de color el Número de muones

4.4.2. Dependencia azimutal

A diferencia del caso cenital, sabemos que la profundidad atmosférica varía considerablemente al medir el número de partículas para distintas direcciones azimutales (consultar sección 2.3 del capítulo 2), por lo que esperamos que este fenómeno (sumado al aumento del ángulo sólido) tenga un importante efecto sobre el espectro de muones.

El script “FiltroTheta” (consultar B.5) se usó para filtrar el archivo de muones a distintos valores de ángulo azimutal; es decir, se fijó un ancho de 10° (subdividiendo el medio-meridiano en 9 regiones) y se siguieron los mismos métodos que en el caso cenital, para obtener un histograma del número de muones en función de su energía. En la Figura 4.5 se observa una representación cartesiana de este histograma, donde los datos experi-

mentales se presentan con esferas de color gris (asociados a las 9 muestras tomadas) y el mapa de color hace referencia a la densidad poblacional de muones (siendo rojo las zonas más pobladas).

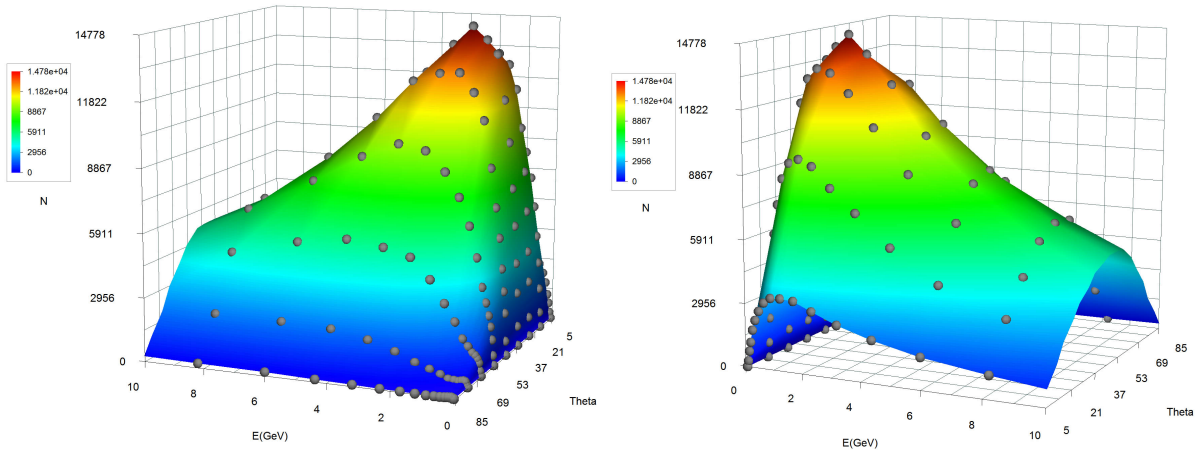


Figura 4.5: Espectro de muones en función del ángulo azimutal en dos perspectivas Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación cartesiana).

La diferencia entre este gráfico de superficies y el asociado a la variable cenital es clara; mientras que el número máximo de muones se mantiene constante para distintos valores de ángulo cenital (Figura 4.1), en la Figura 4.5 vemos que presenta un máximo respecto a la variable azimutal (ubicado aproximadamente en $\theta \simeq 36^\circ$).

El incremento en el ángulo azimutal produce un aumento de ángulo sólido, permitiendo que mayor número de partículas puedan ser detectadas; sin embargo, para valores altos de θ , el número de muones disminuye (ya que es poco probable detectar partículas con ángulo de entrada cercano a 90°), lo que trae como resultado el máximo del espectro observado en la Figura 4.5.

Recordamos que las soluciones de las ecuaciones (2.5.3) están dadas (bajo ciertas condiciones de energía) en leyes de potencias de la forma (2.5.14), con dependencia explícitamente de la profundidad atmosférica. Estas ecuaciones podrían reducirse con modelos simples como el de Heitler, y predecir ciertos fenómenos como la aparición del máximo, según la ecuación (2.5.18), para una profundidad atmosférica (2.5.19).

Además, en el capítulo 2 del presente trabajo, se concluyó que la energía a la cual ocurre el máximo en el número de partículas es una función que aumenta directamente respecto a la profundidad atmosférica (que sabemos aumenta con θ). En la Figura 4.6, observamos una vista lateral del Espectro de muones en función del ángulo azimutal, con la cual podemos corroborar dicho aumento (la línea negra representa los puntos máximos

de cada muestra).

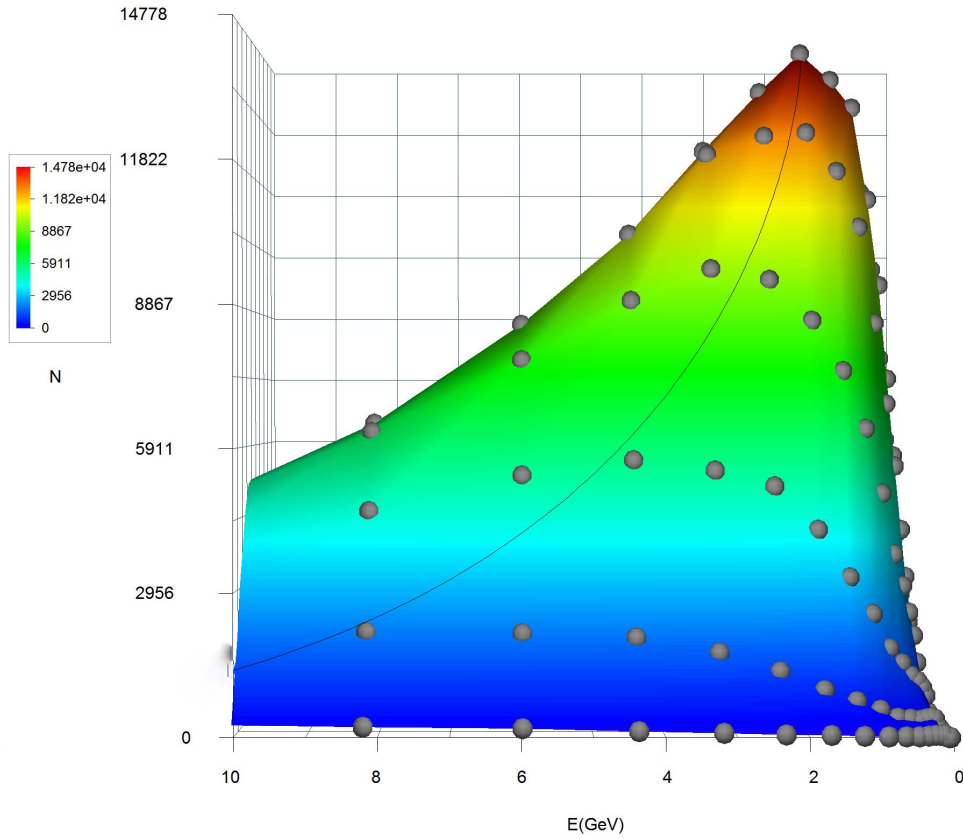


Figura 4.6: Espectro de muones en función del ángulo azimutal. Toma lateral Simulado en el Páramo de Piedras Blancas (representación cartesiana) en un corte lateral. La línea negra representa los puntos máximos de cada muestra

Para observar estas gráficas asociadas a las tres regiones de interés astrofísico faltantes, visitar el Apéndice C: “Visualizaciones Complementarias”

4.5. Espectro general de partículas

Como último resultado importante de este capítulo, estudiamos la forma del espectro general de partículas y sus relaciones con el formalismo desarrollado en el capítulo 2. Para obtener la forma del número total de partículas producidas en la Lluvia Atmosférica Extendida, se usó el script “extraerparticulas.sh”, para extraer de los archivos .sec.bz2 todas las partículas con códigos CORSIKA entre 0001 (fotones) y 00015 (antiprotonoes).

Estos archivos fueron filtrados en histogramas con el script “Energia-Particula.sh” para cada localidad de interés astrofísico, y la gráfica asociada al Páramo de Piedras Blancas

se presenta en la Figura 4.7. En dicha gráfica, solo se presentan aquellas partículas cuyo histograma fue no nulo.

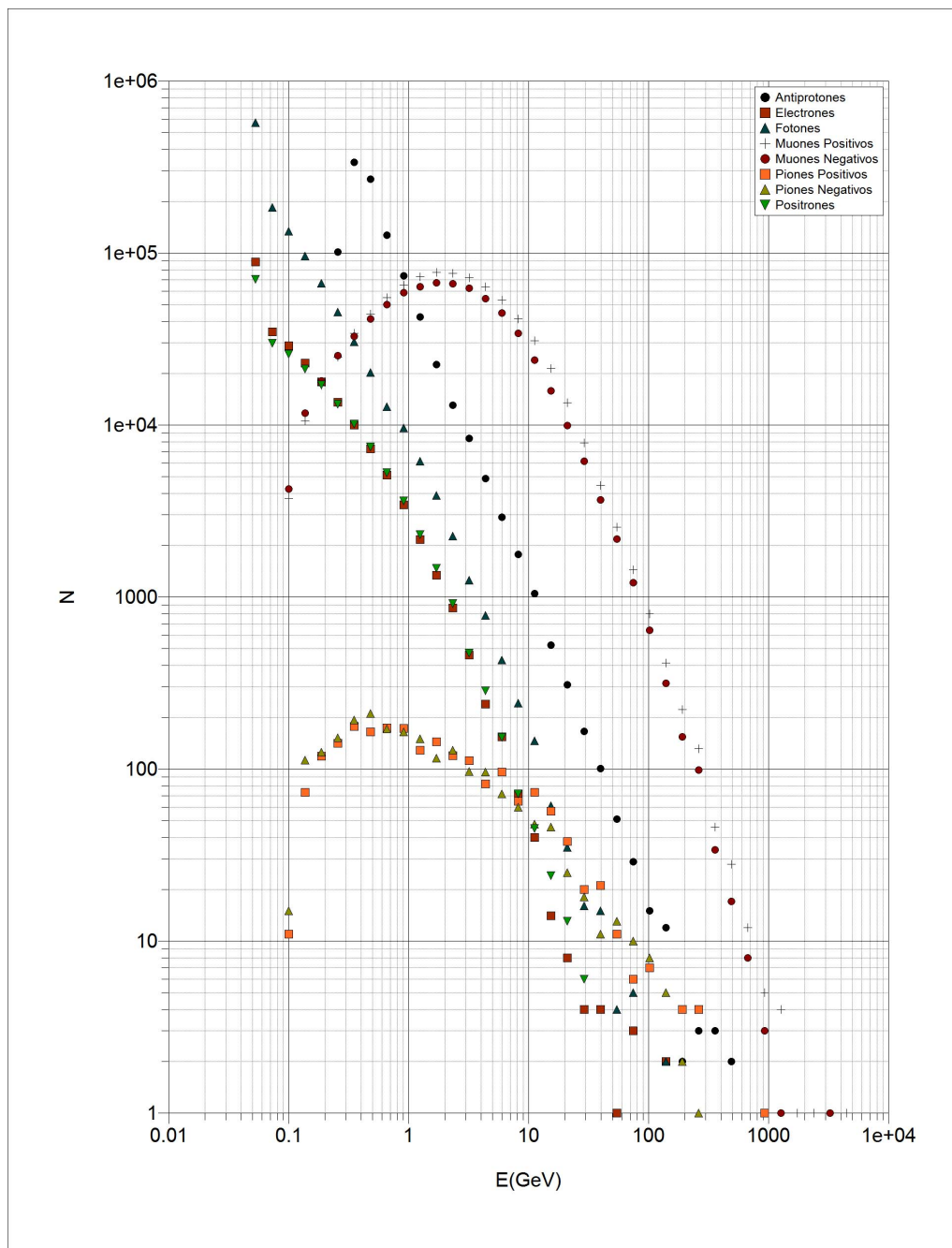


Figura 4.7: Espectro general de partículas
Simulado en el Páramo de Piedras Blancas.

Se realizó un ajuste potencial de la forma $N = A.E^B$, y los resultados se presentan en los siguientes cuadros:

Partícula	A	B	r^2
Antiprotones	50542.89	-1.705	0.98
Electrones	1595.01	-1.519	0.97
Fotones	5527.52	-1.594	0.99
Positrones	1721.68	-1.421	0.98

Cuadro 4.6: Ajuste para el espectro de secundarios-Páramo de Piedras Blancas.

Partícula	A	B	r^2
Antiprotones	70743.98	-1.720	0.98
Electrones	2110.99	-1.580	0.97
Fotones	7889.31	-1.590	0.99
Positrones	2168.09	-1.506	0.97

Cuadro 4.7: Ajuste para el espectro de secundarios-Pico Espejo.

Partícula	A	B	r^2
Antiprotones	4041.36	-1.710	0.98
Electrones	424.47	-1.438	0.96
Fotones	1047.89	-1.640	0.98
Positrones	448.74	-1.391	0.95

Cuadro 4.8: Ajuste para el espectro de secundarios-Universidad Central de Venezuela.

Partícula	A	B	r^2
Antiprotones	5824.39	-1.783	0.97
Electrones	485.03	-1.480	0.95
Fotones	1290.73	-1.625	0.98
Positrones	511.37	-1.419	0.95

Cuadro 4.9: Ajuste para el espectro de secundarios-Universidad Simón Bolívar.

En el capítulo 2, estudiamos con cierta profundidad los procesos de producción de secundarios en Lluvias Atmosféricas Extendidas. Aún cuando los resultados fueron obtenidos para Cascadas Electromagnéticas, recordamos que su extrapolación a Cascadas

Hadrónicas es directa.

La ecuación (2.6.55) establece la forma explícita del espectro general de partículas en una Cascada Electromagnética como función de la energía, la profundidad atmosférica normalizada y la edad de la lluvia. Sabemos que s solo depende logarítmicamente de la energía (a través del letargo y), por lo que la dependencia en energía del espectro está dada prácticamente como una ley de potencias (es importante recordar que s sí depende del letargo, por lo que esta reducción en ley de potencias solo es válida para valores limitados de energía). Este fenómeno, sumado al hecho de que el espectro de Rayos Cósmicos primarios también cumple con una ley de potencias (1.3.1), permite suponer que los espectros de secundarios en la Cascada Hadrónica deben satisfacer leyes de potencias, las cuales observamos en la Figura 4.7.

La ecuación (2.6.52) establece la relación entre la edad de la lluvia y distintas cantidades del formalismo; particularmente, la ecuación determina la relación entre s y n (que recordamos es un parámetro que varía según el tipo de partícula estudiada), por lo que las distintas leyes de potencias (observadas en la Figura 4.7) son consecuencia del cambio en la definición de la edad de la lluvia para los distintos espectros.

Para observar estas gráficas asociadas a las tres regiones de interés astrofísico faltantes, visitar el Apéndice C: “Visualizaciones Complementarias”

Conclusiones

En el capítulo 4 del presente trabajo, se obtuvieron resultados que permiten realizar conclusiones importantes sobre el espectro de secundarios. Aún cuando los procesos asociados a la producción y transporte de partículas secundarias en la atmósfera son sumamente complejos (debido a la inhomogeneidad de la misma), los resultados demuestran que los espectros poseen una forma esencialmente parecida al espectro de Rayos Cósmicos. Aún más, el espectro de secundarios producido en una Cascada Aérea Extensa iniciada por un espectro variado de primarios, guarda ciertas relaciones con el análogo generado por un solo primario electromagnético.

En base a estas discusiones, y a las realizadas en las secciones 4.4 y 4.5 del capítulo 4, concluimos:

- El espectro de muones en la atmósfera es isotrópico respecto a la variable angular cenital, puesto que la profundidad atmosférica, a la cual fueron realizadas las mediciones, se mantiene constante al hacer variaciones cenitales.
 - El espectro de muones en la atmósfera no es isotrópico respecto a la variable angular azimutal, puesto que la profundidad atmosférica, a la cual son realizadas las mediciones, cambia en función del ángulo azimutal.
 - El número de muones en función de la energía aumenta para valores pequeños de ángulo azimutal, debido al aumento del ángulo sólido. Para valores grandes de ángulo azimutal, el número de muones en función de la energía decrece, debido a la baja probabilidad de medir partículas con dirección netamente horizontal. Estas condiciones se traducen en la presencia de un máximo absoluto en el espectro de muones en función del ángulo azimutal.
 - La energía a la cual ocurre el máximo en el número de partículas del espectro de muones (para distintos valores de variable azimutal), depende de la profundidad atmosférica a la cual fue medido el espectro.
 - El espectro general de partículas secundarias en la atmósfera, producido en una Cascada Aérea Extensa, satisface una ley de potencias (distinta para cada tipo de
-

partícula estudiada), que puede ser asociada con la ley de potencias que satisface el espectro de Rayos Cósmicos, y con aquellas que satisfacen las Cascadas Electromagnéticas iniciadas por un primario electromagnético.

Apéndice A

Técnicas Computacionales. CRK-Tools

A.1. Introducción

En el capítulo 3 explicamos los métodos generales para la realización del presente trabajo, así como todas las herramientas probabilísticas implicadas en dichos modelos. Aún cuando hemos reducido notoriamente el trabajo que debíamos realizar (puesto que contamos con una herramienta computarizada de alto nivel para la realización de simulaciones), la realización de proyectos enteros directamente con CORSIKA puede no ser la forma mas efectiva de proceder. En el presente Apéndice, y a manera de continuación, expondremos los procedimientos específicos necesarios para la realización de proyectos completos, realizados de una forma mucho más óptima.



Figura A.1: Emblema del Instituto KIT

Organización de élite a nivel mundial en tratamiento de astropartículas, y responsable del diseño de CORSIKA.

A.2. Una forma distinta de hacer simulaciones

Como dijimos en el capítulo 3, la herramienta mas adecuada para la realización de simulaciones asociadas a procesos con Rayos Cósmicos y Cascadas Aéreas Extensas es CORSIKA. Pero esta forma de realizar simulaciones no es la más eficiente; más aún, los archivos de salida que genera CORSIKA son de un gran tamaño (puesto que manejan gran cantidad de datos), y su lectura puede resultar complicada.

Para evitar problemas de esta índole, el Doctor Hernán Asorey [8] desarrolló un conjunto de herramientas computarizadas, llamadas *CRK-Tools*, que permiten la realización de proyectos completos con menos interacción directa con CORSIKA. Teniendo acceso al Cluster del Grupo Halley, pudimos realizar todas las pruebas y simulaciones del presente trabajo (las cuales son expuestas y discutidas a detalle en el capítulo 4). A continuación, presentamos un repaso general sobre la utilización de las *CRK-Tools*, la cuales pueden ser obtenidas de [46].

A.2.1. Generando una simulación



```
Microsoft Windows [Versión 6.1.7601]
Copyright (c) 2009 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

C:\Users\gdasilva>cd ../../openssh
C:\openssh>ssh jdasilva@200.16.117.76
Password:
Last login: Sun Apr 2 17:37:27 2017 from 190.79.231.100

Obatala-2:~ jdasilva$ ssh jdasilva@192.168.20.110
jdasilva@192.168.20.110's password:
Bienvenido al Cluster Halley. Por favor lea algunas políticas de uso y cómo
correr trabajos en el siguiente link: http://auger.uis.edu.co/cluster.html
TENGA EN CUENTA LO SIGUIENTE: TODOS LOS JOBS SE TIENEN QUE ENVIAR CON EL
MANEJADOR DE COLAS SLURM, CUALQUIER JOB QUE SE EJECUTE EN EL FRONTEND SIN
EL MANEJADOR DE COLAS SERÁ CANCELADO SIN PREVIO AVISO.
Last login: Sun Apr 2 17:31:05 2017 from 192.168.28.240

jdasilva@frontend:~$
```

Figura A.2: Entrada al servidor del Cluster del Grupo Halley

Entrada desde una ubicación fuera de red de la Universidad Industrial de Santander

Haremos un pequeño recorrido (con un simple ejemplo) sobre los pasos necesarios para realizar simulaciones de esta índole, usando las herramientas desarrolladas por el Grupo Halley. Estos protocolos fueron suministrados a través del documento [36]. Primero debemos conectarnos al Cluster del Grupo Halley, y en la Figura A.2 vemos la forma correcta de hacerlo. Puesto que estamos entrando desde una localización fuera de la red

de la Universidad, debemos conectarnos primero al servidor de la UIS, con la cuenta y password que nos fue otorgada:

ssh usuario200.16.117.76

Seguidamente, debemos conectarnos, de la misma manera, al servidor del Cluster Halley

ssh usuario@192.168.20.110

Una vez dentro del servidor del Cluster, ya podemos empezar a crear nuevos proyectos. Por defecto, la entrada al Cluster se hace en el directorio /home/jdasilva. Las *CRK-Tools* (Figura A.3) se encuentran en el directorio /scratch/for-halleyclus:

- do_halleyclus.sh
- genEspectra.dat
- genEspectra.pl
- newprj-halleyclus.sh
- rain-halleyclus.pl

```

Microsoft Windows [Version 6.1.7601]
Copyright (c) 2009 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

C:\Users\gdasilva>cd ../opssh
C:\opssh>ssh jdasilva@200.16.117.76
Password:
Last login: Sun Apr  2 18:52:44 2017 from 190.79.231.100

Obatala-2:~ jdasilva$ ssh jdasilva@192.168.20.110
jdasilva@192.168.20.110's password:
Permission denied, please try again.
jdasilva@192.168.20.110's password:
Bienvenido al Cluster Halley. Por favor lea algunas políticas de uso y cómo
correr trabajos en el siguiente link: http://auger.uis.edu.co/cluster.html

TENGA EN CUENTA LO SIGUIENTE: TODOS LOS JOBS SE TIENEN QUE ENVIAR CON EL
MANEJADOR DE COLAS SLURM. CUALQUIER JOB QUE SE EJECUTE EN EL FRONTEND SIN
EL MANEJADOR DE COLAS SERÁ CANCELADO SIN PREVIO AVISO.
Last login: Sun Apr  2 18:46:19 2017 from 192.168.28.240

jdasilva@frontend:~$ ls ../scratch/for-halleyclus/
do_halleyclus.sh  genEspectra.dat  genEspectra.pl  newprj-halleyclus.sh  rain-halleyclus.pl
jdasilva@frontend:~$

```

Figura A.3: *CRK-Tools*

El archivo *do_halleyclus.sh* es el script principal para el cálculo de fluencias que pretendemos realizar. Este código preconfigura la corrida, considerando el lugar donde los archivos binarios de CORSIKA están instalados, el nombre del proyecto, junto a otros

parámetros asociados directamente con la simulación. El archivo *genEspectra.pl* (acompañado por el archivo *genEspectra.dat*) es un script, escrito en perl, que calcula el espectro de primarios en un sitio determinado (haciendo un conteo de probabilidades con el espectro de Rayos Cósmicos de la Figura 1.3 del capítulo 1), y que genera archivos de salida que serán usados por *rain-halleyclus.pl* para ejecutar las simulaciones. Por último, el script *newprj-halleyclus.sh* crea el proyecto (con una copia de CORSIKA incluida) para la ejecución de las corridas correspondientes.

A.2.2. Creando un proyecto

La forma correcta de iniciar un proyecto es usando el script *newprj-halleyclus.sh* como sigue (Figura A.4)

```
/newprj-halleyclus.sh -s /home/programs/corsika/lago-corsika -p PruebaTesis -u jdasilva
```

donde **-s** especifica el directorio donde se encuentra CORSIKA, **-p** es el nombre del proyecto, y **-u** especifica el usuario que lo creó. Este script crea en el directorio scratch una carpeta (con el nombre asignado al proyecto) con todos los archivos necesarios para realizar las simulaciones deseadas (incluyendo una copia de CORSIKA)

```

jdasilva@frontend:~$ ./descomprimir.sh Espejo
jdasilva@frontend:~$
jdasilva@frontend:~$ cd ../../scratch/for-halleyclus/
jdasilva@frontend:~/scratch/for-halleyclus$ ./newprj-halleyclus.sh

# ERROR: You have to provide a project name (suggested format: nnn)
./newprj-halleyclus.sh version v3r0
Note: You should run this script at halley cluster frontend

USAGE ./newprj-halleyclus.sh:
  -s <source bin directory>      : Where corsika binary files are located
  -p <project name>              : Project base name (suggested format: nnn)
  -u <user name>                 : cluster user name,
  -d <project name>              : Erase project from cluster. WARNING: Can't not be undone
  -?                             : Shows this help and exit.

jdasilva@frontend:~/scratch/for-halleyclus$ ./newprj-halleyclus.sh -s /home/programs/corsika/lago-corsika/ -p PruebaTesis -u jdasilva

# Source bin directory      = /home/programs/corsika/lago-corsika/
# Project base name         = PruebaTesis
# User name                 = jdasilva

# READY: Press enter to continue, <ctrl-c> to abort!

# DONE: Project PruebaTesis has been created. You can access the project folder
#       by just typing PruebaTesis anywhere.
#       Run do_halley.sh to continue
jdasilva@frontend:~/scratch/for-halleyclus$
  
```

Figura A.4: Creando un proyecto

En rojo se presentan los parámetros solicitados por el script, y en azul los parámetros suminitrados por el usuario

A.2.3. Configuración

Como dijimos antes, para configurar el proyecto debemos ejecutar el script *do_halley.sh* con el siguiente comando

```
./do_halleyclus.sh -w /scratch/PruebaTesis -p PruebaTesis -t 5 -v 74005 -u jdasilva -k 90000 -y
```

donde **-w** especifica el directorio de trabajo, **-p** es el nombre del archivo de simulación (PruebaTesis en nuestro caso), **-t** especifica el período de tiempo (en segundos), **-v** es la versión de CORSIKA usada (en nuestro caso 74005), **-u** fija el usuario que ejecutó el proyecto, **-y** para seleccionar detectores volumétricos y **-k** para la altitud a la cual se encuentra el detector (medida en cm s.n.m).

En las Figuras A.6 y A.5 observamos los distintos parámetros que solicita el script una vez que fue ejecutado, entre los cuales están los valores máximos angulares de primarios que medirá el detector, los valores máximos de energía que se quieren registrar, la rigidez magnética de la atmósfera, el modelo atmosférico de la localización geográfica y los valores de las componentes horizontal y vertical del campo magnético (para conocer estos últimos valores, se recomienda visitar <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web/#igrfwmm>).

```

-s <site> : Location (several options)
-y : Select volumetric detector mode (default=flat array)
-e : Enable CHERENKOV mode
-d : Enable DEBUG mode
-a : Enable high energy cuts for secondaries
-k <altitude, in cm> : Fix altitude, even for predefined sites
-l <cluster user name> : Enable OAR cluster compatibility, use $USER
-? : Shows this help and exit.

jdasilva@frontend:/scratch/for-halleyclus$ ./do_halleyclus.sh

ERROR: You have to provide a project name (suggested format: NAMEXX, where XX is a number between 0 and 99)

./do_halleyclus.sh version v3r0

USAGE ./do_halleyclus.sh:

-w <working dir> : Working directory, where bin files are located
-p <project name> : Project name (suggested format: NAMEXX)
-t <flux time> : Flux time (in seconds) for simulations
-v <CORSIKA version> : CORSIKA version
-h <HE Int Model (EPOS|QGSII)> : Define the high interaction model to be used
-u <user name> : User Name
-s <site> : Location (several options)
-y : Select volumetric detector mode (default=flat array)
-e : Enable CHERENKOV mode
-d : Enable DEBUG mode
-a : Enable high energy cuts for secondaries
-k <altitude, in cm> : Fix altitude, even for predefined sites
-l <cluster user name> : Enable OAR cluster compatibility, use $USER
-? : Shows this help and exit.

jdasilva@frontend:/scratch/for-halleyclus$ ./do_halleyclus.sh -w /scratch/PruebaTesis/ -p PruebaTesis -t 5 -v 74005 -u jdasilva -y -k 90000

# Working dir = /scratch/PruebaTesis/
# Project name = PruebaTesis
# Flux time = 5
# CORSIKA version = 74005
# User name = jdasilva
# Volumetric detector mode for =
# Altitude = 90000
# WARNING: High energy interaction model was not provided. Using default: QGSII

### Shower parameters ###

Low edge of zenith angle (THETAP) [deg]?
<THETPR(1) 0>:

```

Figura A.5: Configurando el proyecto-Parámetros primarios

En rojo se presentan los parámetros solicitados por el script, y en azul los parámetros suministrados por el usuario.

A.2.4. Final del proyecto

El script *do_halleyclus.sh* genera una serie de archivos ejecutables en el directorio de trabajo (PruebaTesis) necesarios para empezar a correr la simulación. Una vez ejecutados, obtendremos varios grupos de 60 archivos con distintas extensiones; entre ellos, 60 archivos con extensión *.lst.bz2*. Estos últimos contienen los resultados de la simulación (número de partículas producidas, momentum, posición, profundidad atmosférica a la cual fueron producidas, entre otros), y se pueden descomprimir fácilmente usando distintas técnicas de programación. No profundizaremos en estos procesos, ya que son explicados en detalle en el capítulo 4 (aplicados directamente a las simulaciones de interés del presente trabajo).

```
jdasilva@frontend:/scratch/for-halleyclus$ ./do_halleyclus.sh -w /scratch/PruebaTesis/ -p PruebaTesis -t 5 -v 74005 -u jdasilva -y -k 90000
jdasilva@frontend:/scratch/for-halleyclus$ ./do_halleyclus.sh -w /scratch/PruebaTesis/ -p PruebaTesis -t 5 -v 74005 -u jdasilva -y -k 90000

# Working dir           = /scratch/PruebaTesis/
# Project name          = PruebaTesis
# Flux time             = 5
# CORSIKA version       = 74005
# User name             = jdasilva
# Volumetric detector mode for =
# Altitude              = 90000
# WARNING: High energy interaction model was not provided. Using default: QGSII

### Shower parameters ###
Low edge of zenith angle (THETAP) [deg]?
<THETPR(1) 0>:
High edge of zenith angle (THETAP) [deg]?
<THETPR(2) 90>:
Lower limit of the primary particle energy (ERANGE) [GeV]?
<LLIMIT 5>:
Upper limit of the primary particle energy (ERANGE) [GeV]?
<ULIMIT 1000000>:

### Site parameters ###
Use rigidity cutoff? (0=no, Rigidity value=yes [GV])?
< S>:
Atmospheric model selection. Start number with 'E' to use external atmospheres module?
<ATMOD 19>:
Horizontal comp. of the Earth's mag. field (MAGNET) [North,muT],
see values at http://www.ngdc.noaa.gov/geomagmodels/struts/calclGFWMM?
<BX 0>: 20
Vertical comp. of the Earth's mag. field (MAGNET) [downwards,muT]?
<BZ 0>: 20
```

Figura A.6: Configurando el proyecto-Parámetros secundarios
Valores específicos de la simulación

Apéndice B

Desarrollos Computacionales

Tenga en cuenta el compilador usado. Los script en c han sido probados en Windows (Borland) y Linux (GCC). Las líneas comentadas con `//` contienen información sobre los archivos de entrada específicos de cada script. Los script se presentan en orden de uso; sientase libre de ser creativo.

B.1. Script para ejecutar los archivos generados por *do_halley.clus*

- *fix644.sh*

```
#!/bin/bash
if [ -z "$1" ]
then
    echo -e "USAGE ./fix644.sh ProjectName \n\n(ProjectName
        from ./do_halley.sh)"
else
    for i in go-$1-*
    do
        sed -i -e 's/644 s/644 \s/' $i
    done
fi
```

Tomado de [47]

- *runall.sh*
-

```
#!/bin/bash
if [ -z "$1" ]
then
    echo -e "USAGE ./runall.sh ProjectName \n\n(ProjectName
        from ./do_halley.sh)"
else
    cuantos=0
    for i in go-$1-*.sh
    do
        if [ "$cuantos" -lt "4" ]
        then
            ./ $i
            let cuantos+=1
        fi
    done
fi
```

Tomado de [47]

B.2. Script para descomprimir los archivos .lst.bz2

- *preparadescomp.sh*

```
#!/bin/bash
if [ ! -e salida ] || [ ! -d salida ]
then
    echo "crear directorio y archivos"
    mkdir salida
    > salida/procesados_extraer.dat
    > salida/procesados_descomprimir.dat
fi
if [ ! -e salida/procesados_extraer.dat ]
then
    echo "crear archivo procesados_extraer"
    > salida/procesados_extraer.dat
fi
if [ ! -e salida/procesados_descomprimir.dat ]
```

```

then
    echo "crear archivo procesados_descomprimir"
    > salida/procesados_descomprimir.dat
fi

```

Tomado de [47]

■ *descomprimir.sh*

```

#!/bin/bash
if [ ! -e salida/procesados_descomprimir.dat ]
then
    echo "Ejecute preparaextraccion.sh"
    return 1
fi
cuenta=0
for i in DAT??????.bz2
do
    procesado=$(awk 'BEGIN{salida=1}{if($0=="$i"){salida=0}}END{print salida}' salida/procesados_descomprimir.dat)
    echo $i $procesado "(0 -> fue procesado, 1 -> no ha sido procesado)"
    if [ "$cuenta" -lt "3" ] && [ "$procesado" = "1" ]
    then
        j=$(echo $i | sed -e 's/.bz2//')
        u=$(echo $j | sed -e 's/DAT//')
        #echo $i" "$j" "$u
        bzip2 -d -k $i
        echo $j | /home/programs/crktools/lagocrkread |
            /home/programs/crktools/analysis -p -v $u
        rm $j
        echo $i >> salida/procesados_descomprimir.dat
        let cuenta+=1
    fi
done

```

Tomado de [47]

B.3. Script para extraer partículas

- *extraerparticulas.sh*

```
#!/bin/bash
PARTNMBR=0006
OUTPUTFILE=muon_desordenado.dat
N_OF_PROCFILES=60
while [ "$1" != "" ]
do
    case $1 in
        -p)
            PARTNMBR=$2
            ;;
        -f)
            OUTPUTFILE=$2
            ;;
        -n)
            N_OF_PROCFILES=$2
            ;;
        -h)
            echo "USO: $./extraerparticulas.sh -p
                codigo_corsika_particula -n
                numero_de_archivos_a_procesar -f archivo_de_salida"
            exit 0
        esac
        # Shift all the parameters down by one
        shift
    done
    echo $PARTNMBR, $OUTPUTFILE, $N_OF_PROCFILES
    if [ ! -e salida/procesados_extraer.dat ]
    then
        echo "No existe el archivo salida/procesados_extraer"
        return 1
    fi
    cuenta=0
    for i in ??????.sec.bz2
    do
```

```

procesado=$(awk 'BEGIN{salida=1}{if($0=="$PARTNMBR"){
    {salida=0}}END{print salida}' salida/
    procesados_extraer.dat)
echo $i $procesado "(0 -> fue procesado, 1 -> no ha sido
    procesado)"
if [ "$cuenta" -lt "$N_OF_PROFILES" ] && [ "$procesado"
    == "1" ]
then
    bzcat $i | awk '{if($1=="$PARTNMBR"){j=sqrt(($2*
        $2)+($3*$3)+($4*$4)); print j"\t"$2"\t"$3"\t"
        $4 } }' >> OUTPUTFILE
    echo $$PARTNMBR >> salida/procesados_extraer.
        dat
    let cuenta+=1
fi
done

```

Tomado de [47]

B.4. Filtro de partículas según su ángulo cenital

■ *FiltroPhi.c*

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main()
{
    int a,b,contador;
    float p2,px,py,pz,phi,delta,fijo;
    char archivo1[30],archivo2[30];
    FILE *fa,*fb,*fc;
    printf("Introduzca el archivo de entrada\n");//archivo con
        los datos para filtrar (muon_desordenado.dat por ejemplo)
    scanf("%30s",&archivo1);
    fa=fopen(archivo1,"r");
    if(fa==NULL){

```

```

    printf("El archivo de entrada no existe\n");
    return 0;
}
printf("Introduzca el valor de variable zenital que desea
    observar (en grados)\n");
scanf("%f",&fijo);
printf("Cual es el valor de subdivision zenital que quiere
    fijar (en grados)\n");
scanf("%f",&delta);
printf("Introduzca el nombre del archivo donde quiere guardar
    los resultados\n");//momentum total y componentes
scanf("%30s",archivo2);
fb=fopen(archivo2,"w");
fc=fopen("AngularPhi.dat","w");//momentum total y angulo
    cenital
contador=0;
phi=0;
while( fscanf(fa,"%f %f %f %f\n",&p2,&px,&py,&pz)!=EOF){
    if(px>0&&py>0) phi=atan(py/px)*180/M_PI;
    if(px>0&&py<0) phi=(2*M_PI+atan(py/px))*180/M_PI;
        if(px<0) phi=(M_PI+atan(py/px))*180/M_PI;
    if(px==0&&py>0) phi=90;
    if(px==0&&py<0) phi=-90;

    if(phi>=(fijo-delta/2)&&phi<=(fijo+delta/2)){
        fprintf(fb,"%f %f %f %f\n",p2,px,py,pz);
        fprintf(fc,"%f %f\n",p2,phi);
        contador++;
    }
}
printf("El numero total de particulas en este intervalo es %
    d\n",contador);
return 0;
}

```

Tomado de [48]

B.5. Filtro de partículas según su ángulo azimutal

■ *FiltroTheta.c*

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main()
{
    int a,b,contador;
    float p2,px,py,pz,theta,delta,fijo;
    char archivo1[30],archivo2[30];
    FILE *fa,*fb,*fc;
    printf("Introduzca el archivo de entrada\n");//archivo con
        los datos para filtrar (muon_desordenado.dat por ejemplo)
    scanf("%30s",&archivo1);
    fa=fopen(archivo1,"r");
    if(fa==NULL){
        printf("El archivo de entrada no existe\n");
        return 0;
    }
    printf("Introduzca el valor de variable azimutal que desea
        observar (en grados)\n");
    scanf("%f",&fijo);
    printf("Cual es el valor de subdivision azimutal que quiere
        fijar (en grados)\n");
    scanf("%f",&delta);
    printf("Introduzca el nombre del archivo donde quiere guardar
        los resultados\n");//momentum total y componentes
    scanf("%30s",archivo2);
    fb=fopen(archivo2,"w");
    fc=fopen("AngularTheta.dat","w");//momentum total y angulo
        azimutal
    contador=0;
    theta=0;
    while(fscanf(fa,"%f %f %f %f\n",&p2,&px,&py,&pz)!=EOF){
        if(pz<0)theta=(M_PI+atan(sqrt(px*px+py*py)/pz))*180/M_PI;
        if(pz>0)theta=atan(sqrt(px*px+py*py)/pz)*180/M_PI;
```

```

    if (pz==0) theta=90;
    if (theta>=(fijo-delta/2)&&theta<=(fijo+delta/2)){
        fprintf(fb,"%f %f %f %f\n",p2,px,py,pz);
        fprintf(fc,"%f %f\n",p2,theta);
        contador++;
    }
}
printf("El numero total de particulas en este intervalo es %d\n",contador);
return 0;
}

```

Tomado de [48]

B.6. Script para realizar histogramas Número de partículas/Energía

- *Energia-Particula.sh*

```

#!/bin/bash
OUTPUTFILE=histograma.dat
while [ "$1" != "" ]
do
    case $1 in
        -i)
            INPUTFILE=$2
            ;;
        -o)
            OUTPUTFILE=$2
            ;;
        -h)
            echo "USO: $./Fhist.sh -i input_file -o
                archivo_de_salida"
            exit 0
        esac
        # Shift all the parameters down by one
    done

```

```
        shif
done
echo $INPUTFILE, $OUTPUTFILE
if [ ! -e $INPUTFILE ]
then
    echo "No existe el archivo de entrada"
else
    awk '/^[^#]/' $INPUTFILE |awk -f NuevaEnergia.awk|
        column -t > $OUTPUTFILE
    cat $OUTPUTFILE
fi
```

Tomado de [48]

■ *NuevaEnergia.awk*

```
BEGIN{
    FS="\t"
    ENERGIAS
        ="0.053,0.073,0.100,0.137,0.188,0.257,0.352,0.482,
0.661,0.906,1.241,1.700,2.329,3.191,4.372,5.989,8.205,
11.24,15.40,21.10,28.90,39.60,54.25,74.32,101.8,
139.5,191.1,261.8,358.7,491.4,673.2,922.4,1264,1731,
2372,3249,4451,6098,8355,11446,15681,21483"
    split(ENERGIAS, ENERGIA, ",")
    emax=190
    emin=1
    binmax=0
}
# /^[^#]/
{
    if ($1>emax){emax=$1}
    if ($1<emin){emin=$1}
    #print $0
    #print $1, $1/0.053, log($1/0.053), log($1/0.053)/log
        (1.37), int(log($1/0.053)/log(1.37))
    caja=int(log($1/0.053)/log(1.37)) + 1
    #print caja
```

```

    ++EB[ENERGIA[ caja ]]
    if (EB[ENERGIA[ caja ]] > binmax) { binmax=EB[ENERGIA[ caja ]] }
    #print EB[ENERGIA[ caja ]]
}
END{
    print "E(GeV)\t Npart\t"
    for(k in ENERGIA){
        if (EB[ENERGIA[k]]!=0) {
            print ENERGIA[k] , "\t" ,EB[ENERGIA[k]]
        }
        else {
            print ENERGIA[k] , 0
        }
    }
}
function barra(n){
    c=1
    out=""
    do{
        out=out"--"
        c++
    }
    while(c<n)
    out=out"o"
    return out
}

```

Tomado de [48]

B.7. Graficación cenital en cartesianas

■ *Juntar.c*

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>

int main()

```

```

{
    float p2,Angulo;
    char lecture[20],archivos[18][30],archivo[30],archivo2[30];
    FILE *fa,*fb,*fc;
    int N,i;
    printf("Introduzca el archivo de entrada\n");//archivo con el
        nombre de los archivos de datos a combinar
    scanf("%30s",&archivo);
    fa=fopen(archivo,"r");
    if(fa==NULL){
        printf("El archivo de entrada no existe\n");
        return 0;
    }
    printf("Archivo de salida\n");//donde quiere guardar el
        archivo general
    scanf("%30s",&archivo2);
    fb=fopen(archivo2,"a");
    for(i=0;i<18;i++){
        printf("Angulo\n");//solicita el angulo cenital
            especifico de cada archivo de datos (los 18 archivos
            obtenidos de FiltroPhi)
        scanf("%f",&Angulo);
        fscanf(fa,"%30s\n",&archivos[i]);
        fc=fopen(archivos[i],"r");
        fgets(lecture,20,fc);
        while(fscanf(fc,"%f %d\n",&p2,&N)!=EOF){
            fprintf(fb,"%f %d %f\n",p2,N,Angulo);
        }
        fclose(fc);
    }
    fclose(fa);
    fclose(fb);
    return 0;
}

```

Tomado de [48]

B.8. Graficación cenital en cilíndricas

- *CambioPolar.c*

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
    float p2, px, py, Angulo;
    char archivo1[30], archivo[30];
    FILE *fa, *fb;
    int N;
    printf("Entrada\n"); // archivo generado en Juntar.c
    scanf("%30s", &archivo1);
    fa = fopen(archivo1, "r");
    if (fa == NULL) {
        return 0;
    }
    printf("Salida\n"); // archivo con coordenadas cilíndricas
    para graficar
    scanf("%30s", &archivo);
    fb = fopen(archivo, "w");
    while (fscanf(fa, "%f %d %f", &p2, &N, &Angulo) != EOF) {
        px = p2 * cos(Angulo * M_PI / 180);
        py = p2 * sin(Angulo * M_PI / 180);
        fprintf(fb, "%f %f %d\n", px, py, N);
    }
    return 0;
}
```

Tomado de [48]

B.9. Script para contar el Número de secundarios en función de la profundidad atmosférica

- *FiltroProfundidad.c*

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>

void contar(char archivo1[30]){
    int N,i,sw,k,j,contador;
    float* pro;
    float* c;
    float a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12;
    FILE *fa,*fb;
    char archivo2[30],lectura[200];
    fa=fopen(archivo1,"r");
    fb=fopen("Filtro1.dat","a");
    N=0;
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    while(fscanf(fa,"%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f
        %f %f",&a1,&a2,&a3,&a4,&a5,&a6,&a7,&a8,&a9,&a10,&
        a11,&a12) != EOF){
        N++;
    }
    rewind(fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    fgets(lectura,200,fa);
    pro = (float*)malloc(N*sizeof(float));
    c= (float*)malloc(N*sizeof(float));
    for(i=0;i<N;i++){
        c[i]=-1;
    }
    for(i=0;i<N;i++){
        fscanf(fa,"%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f
            f %f %f",&a1,&a2,&a3,&a4,&a5,&a6,&pro[i],&
            a8,&a9,&a10,&a11,&a12);
    }
}

```

```

    }
    contador=1;
    for ( i=0;i<N; i++){
    for (k=0;k<N;k++){
        if (pro [ i]==c [k]) break ;
        else {
            if ( c [k]<0){
                c [k]=pro [ i];
                for ( j=i+1;j<N; j++){
                    if ( pro [ i]==pro [ j ])  contador++;
                }
                fprintf(fb," %f  %d\n",pro [ i] , contador );
                contador=1;
                break ;
            }
        }
    }
}

    free (pro);
    free (c);
    fclose (fa);
    fclose (fb);
    return ;
}

void  cuenta_final ()
{
    int  N,i ,sw,k,j;
    float*  pro;
    float*  c;
    int*  contadores;
    float  a1,a2,a3;
    FILE  *fa,*fb;
    char  archivo1 [30] , archivo2 [30];
    fa=fopen (" Filtro1 .dat" ," r");
    N=0;
    while ( fscanf (fa," %f  %f",&a1,&a2) != EOF) {
        N++;

```

```

    }
    rewind(fa);
    pro = (float*) malloc(N*sizeof(float));
    contadores = (int*) malloc(N*sizeof(int));
    c = (float*) malloc(N*sizeof(float));
    for(i=0;i<N;i++){
        c[i]=-1;
        contadores[i]=1;
    }
    for(i=0;i<N;i++){
        fscanf(fa,"%f %d",&pro[i],&contadores[i]);
    }
    fb=fopen("FiltroProfundidad.dat","w");
    for(i=0;i<N;i++){
        for(k=0;k<N;k++){
            if(pro[i]==c[k]) break;
            else {
                if(c[k]<0){
                    c[k]=pro[i];
                    for(j=i+1;j<N;j++){
                        if(pro[i]==pro[j]) contadores[i]=contadores[i]
                            +contadores[j];
                    }
                    fprintf(fb,"%f %d\n",pro[i],contadores[i]);
                    break;
                }
            }
        }
    }
}

free(pro);
free(c);
free(contadores);
fclose(fa);
a3=remove("Filtro1.dat");
if(a3==0) printf("Proceso exitoso. Sus resultados se
    encuentran en el archivo FiltroProfundidad.dat\n");
}

```

```
int main()
{
    int i;
    char archi , archivo [30] , archivo1 [60][30];
    FILE *fa;
    printf(" Archivo de entrada\n"); // archivo que contiene
        los 60 archivos .sec.bz2
    scanf("%30s",&archivo);
    fa=fopen(archivo,"r");
    for(i=0;i<60;i++){
        fscanf(fa,"%30s",&archivo1[i]);
    }
    for(i=0;i<60;i++){
        contar(archivo1[i]);
    }
    fclose(fa);
    cuenta_final();
    return 0;
}
```

Tomado de [48]

Apéndice C

Visualizaciones Complementarias

- Espectro de muones en función del ángulo cenital

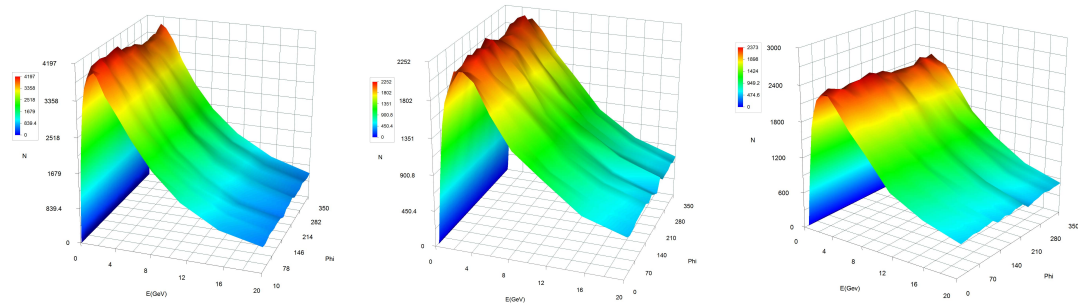


Figura C.1: Espectro de muones-Representación cartesiana
Simulado en Pico Espejo (izquierda), Universidad Central de Venezuela (centro) y
Universidad Simón Bolívar (derecha).

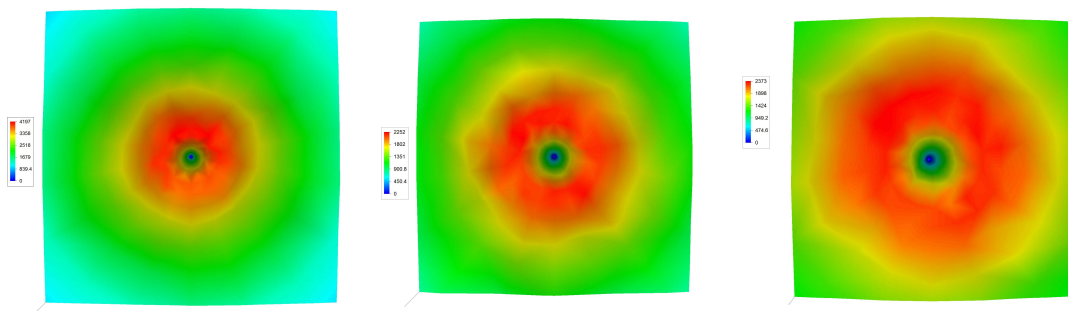


Figura C.2: Espectro de muones-Representación cilíndrica
Simulado en Pico Espejo (izquierda), Universidad Central de Venezuela (centro) y
Universidad Simón Bolívar (derecha). Se grafica la energía radialmente y el Número de
partículas en el mapa de color.

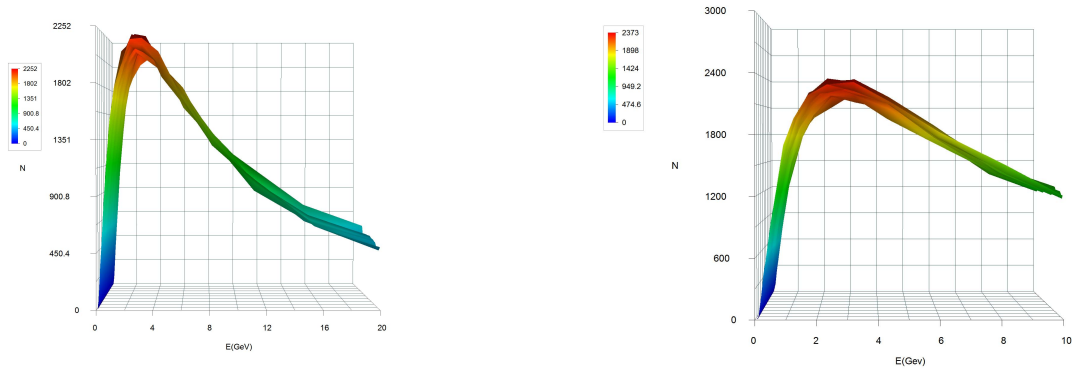


Figura C.3: Espectro de muones-Representación frontal cartesiana
Simulado en Universidad Central de Venezuela (izquierda) y Universidad Simón Bolívar
(derecha).

■ Espectro de muones en función del ángulo azimutal

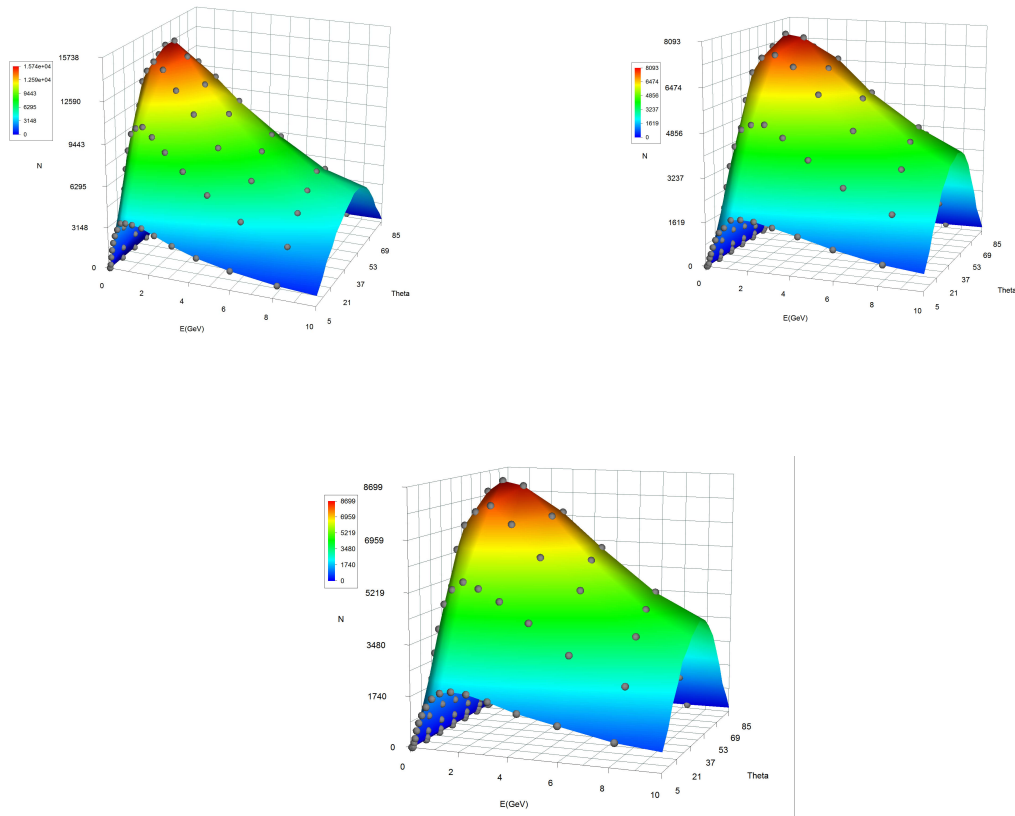


Figura C.4: Espectro de muones-Representación cartesiana (Primera perspectiva)
Simulado Pico Espejo (izquierda), en la Universidad Central de Venezuela (derecha) y
Universidad Simón Bolívar (abajo).

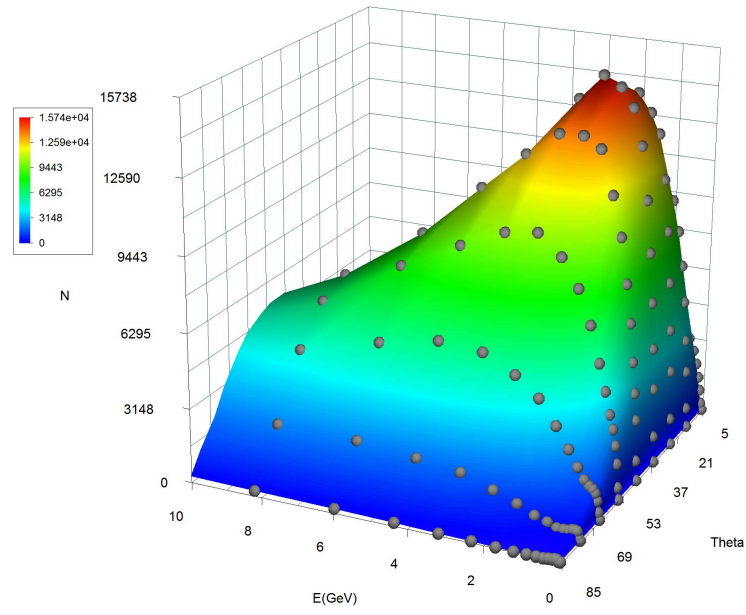


Figura C.5: Espectro de muones-Representación cartesiana (Segunda perspectiva)
Simulado en el Pico Espejo.

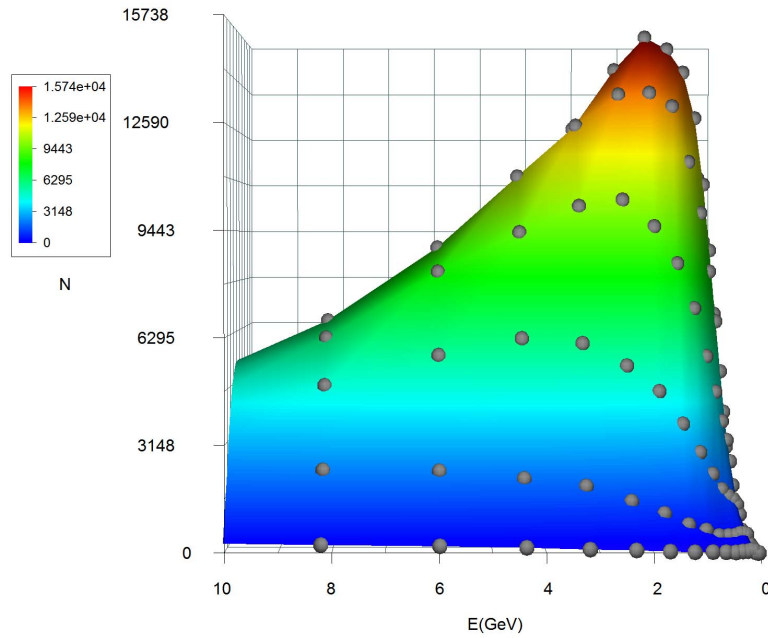


Figura C.6: Espectro de muones-Representación cartesiana lateral (Primera perspectiva)
Simulado en el Pico Espejo.

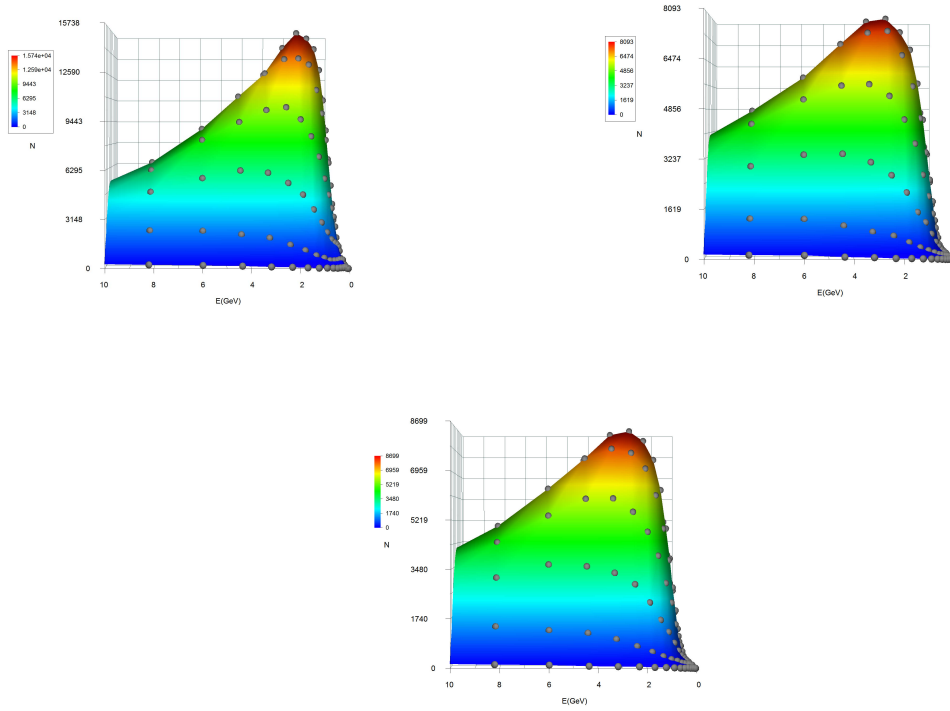


Figura C.7: Espectro de muones-Representación cartesiana lateral (Segunda perspectiva)
Simulado en Pico Espejo (izquierda), Universidad Central de Venezuela (derecha) y
Universidad Simón Bolívar (abajo).

■ Espectro general de partículas

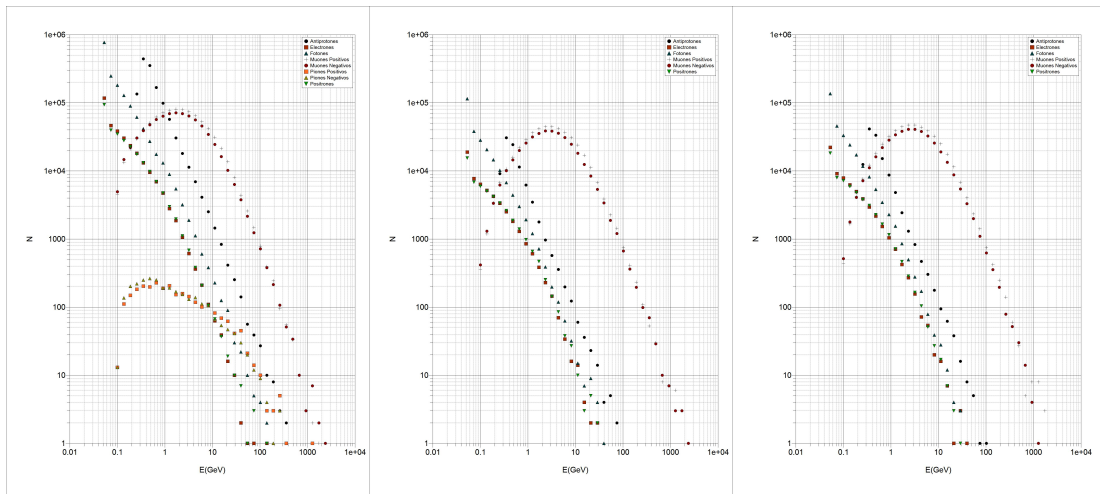


Figura C.8: Espectro general de partículas
Simulado en Pico Espejo (izquierda), Universidad Central de Venezuela (centro) y
Universidad Simón Bolívar (derecha).

Bibliografía

- [1] T.K. Gaisser, R. Engel, and E. Resconi. *Cosmic Rays and Particle Physics*. Cambridge University Press, 2016.
 - [2] F.B. Mc. Donald. Galactic cosmic rays, the century of space science. *Kluwer Academic Publishers*, 2001.
 - [3] M.A. Benítez. Cien años de rayos cósmicos. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 105, 2011.
 - [4] T. Wulf. About the radiation of high penetration capacity contained in the atmosphere. *Physikalische Zeitschrift*, 1910.
 - [5] V. Hess. Über beobachtungen der durchdringenden strahlung bei sieben freiballonfahrten. *Physikalische Zeitschrift*, 1912.
 - [6] International Space Science Institute. Cosmic rays. *Spatium*, (11), 2003.
 - [7] Julián Candia, Silvia Mollerach, and Esteban Roulet. Cosmic ray spectrum and anisotropies from the knee to the second knee. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2003(05):003, 2003.
 - [8] H. Asorey. Los detectores cherenkov del observatorio pierre auger y su aplicación al estudio de fondos de radiación. *Instituto Balseiro. Universidad Nacional de Cuyo. Comisión Nacional de Energía Atómica (Tesis Doctoral)*, 2012.
 - [9] R.J. Protheroe; R.W. Clay. Ultra high energy cosmic rays. *Astronomical Society of Australia*, 21, 2003.
 - [10] L. Van Eijsden. Cosmic rays: their energizing mechanism and their energy limit, 2010.
 - [11] A. Gal-Yam. Luminous Supernovae. *Science*, 337:927, August 2012.
 - [12] S. Childress. An introduction to theoretical fluid dynamics, 2008.
-

- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*. Course of theoretical physics / by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6. Butterworth-Heinemann, 2 edition, January 1987.
 - [14] K. Kotera and A. V. Olinto. The Astrophysics of Ultrahigh-Energy Cosmic Rays. 49:119–153, September 2011.
 - [15] James E. Gunn and Jeremiah P. Ostriker. Acceleration of high-energy cosmic rays by pulsars. *Phys. Rev. Lett.*, 22:728–731, Apr 1969.
 - [16] L. Lopes and D. Menezes. On magnetized neutron stars. *Departamento de Física, CFM - Universidade Federal de Santa Catarina*, 8:002, aug 2015.
 - [17] J.Arons. Magnetars in the metagalaxy: an origin for ultrahigh-energy cosmic rays in the nearby universe, 2003.
 - [18] J.P. Ostriker and J. E. Gunn. On the Nature of Pulsars. I. Theory. *The Astrophysical Journal*, 157:1395, 1969.
 - [19] A.M. Hillas. The origin of ultra-high-energy cosmic rays. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 22, 1984.
 - [20] C. L. Bennett, M. Bay, M. Halpern, G. Hinshaw, C. Jackson, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, D. T. Wilkinson, E. Wollack, and E. L. Wright. The microwave anisotropy probe mission. *The Astrophysical Journal*, 583(1):1, 2003.
 - [21] Pijushpani Bhattacharjee. Neutrinos and origin of ultrahigh energy cosmic rays. *Proceedings of the Indian National Science Academy: Physical sciences*, 70:135, 2004.
 - [22] K Nakamura and Particle Data Group. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 37(7A):075021, 2010.
 - [23] I. Gebauter. An anisotropic model for galactic cosmic ray transport and its implications for indirect dark matter searches. *Karlsruher Institut für Technologie*, 2010.
 - [24] A.P. Snodin; A. Shukurov; G.R Sarson; P.J. Bushby; L.F.S. Rodrigues. Global diffusion of cosmic rays in random magnetic fields, 2016.
 - [25] H. Moraal. Cosmic-ray modulation equations. *Space Sci Rev*, 10, 2010.
 - [26] M. Berberam; E. Bodunov; L. Poglian. On the barometric formula. *American Association of Physics Teachers*, 1996.
-

-
- [27] S. Chapman. The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating earth. *Proceedings of the Physical Society*, 43(1):26, 1931.
- [28] D.F.Smart. A review of geomagnetic cutoff rigidities for earth-orbiting spacecraft. *Advances in Space Research*, 2005.
- [29] H.Asorey. Calculo de fluencia en lago. flujo de primarios. *Grupo Halley de astronomía, Ciencias Aeroespaciales y Escuela de Física (no publicado)*, 2013.
- [30] C Stormer. The Polar Aurora. *Clarendon Press, Oxford*, 1955.
- [31] C.E McIlwain. Coordinates for mapping the distribution of trapped particles. *J. Geophys. Res.* 66, 3681–3691, 1961.
- [32] G. Bossard; H.J.Drescher; N.N. Kalmykov; S. Ostapchenko; A.I. Pavlov; T. Piergo; E.A. Vishnevskaya; K. Wernes. Cosmic rays air shower characteristics in the framework of the parto-based gribov-regge model nexus, 2008.
- [33] Bruno Rossi and Kenneth Greisen. Cosmic-ray theory. *Rev. Mod. Phys.*, 13:240–309, Oct 1941.
- [34] P.K.F. Grieder. *Extensive air showers : high energy phenomena and astrophysical aspects ; a tutorial, reference manual and data book*. 2. Number v. 1. Springer, 2010.
- [35] J. Matthews. A heitler model of extensive air showers. *Astroparticle Physics*, 22, 2004.
- [36] D. Sierra. Manual de simulación de cascadas de rayos cósmicos usando corsika (no publicado), 2017.
- [37] Kachelrieb.M. Lecture notes on high energy cormic rays. *Institutt for fysikk, NTNU, Trondheim, Norway*, 2007.
- [38] Reuven Y Rubinstein and Dirk P Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. John Wiley & Sons, 2011.
- [39] J. P. C. Kleinen. *Statistical Techniques in Centurion*, volume I. 1974.
- [40] S.M. Ross. *A First Course in Probability*. Pearson Education, 2014.
- [41] K Werner. Strings, pomerons and the {VENUS} model of hadronic interactions at ultrarelativistic energies. *Physics Reports*, 232(2–5):87 – 299, 1993.
-

- [42] S. Ostapchenko. Air shower calculations with qgsjet-ii: effects of pomeron loops. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 196:90 – 93, 2009.
 - [43] M Nagano. Search for the end of the energy spectrum of primary cosmic rays. *New Journal of Physics*, 11(6):065012, 2009.
 - [44] M. Ambrosio, C. Aramo, A. Della Selva, G. Miele, S. Pastor, O. Pisanti, and L. Rosa. Corsika+Herwig Monte Carlo Simulation of Neutrino Induced Atmospheric Air Showers. *ArXiv Astrophysics e-prints*, February 2003.
 - [45] D. Heck, T. Pierog, Forschungszentrum Karlsruhe Gmbh, and Eine Benutzeranleitung. Extensive air shower simulation with corsika: A user’s manual, kernforschungs-zentrum karlsruhe, kfk 5196b. *Kernforschungszentrum Karlsruhe KfK 5196 B*, 1993.
 - [46] <https://github.com/lagoproject/arti>. Último acceso: 2017-04.
 - [47] <https://github.com/jal70/lagohelp>. Último acceso: 2017-04.
 - [48] <https://github.com/Jorgeldasilvag/LagoTools>. Último acceso: 2017-04.
-