

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**SOBRE LA CUANTIZACIÓN COVARIANTE DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO EN PRESENCIA DE LA MATERIA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Hector Parra
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. José A. López

Mayo-2017

Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**SOBRE LA CUANTIZACIÓN COVARIANTE DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO EN PRESENCIA DE LA MATERIA**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Hector Parra
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. José A. López

Mayo-2017
Caracas-Venezuela



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Hector Alejandro Parra De Freitas**, Cédula de Identidad **V-20588543**, bajo el título **“Sobre la cuantización covariante del campo electromagnético en presencia de la materia”**, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 16 de mayo de 2017, a Las 2:00 pm, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 16 días del mes de mayo de 2017, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof. José Antonio López Rodríguez.

Firma del jurado evaluador

Prof Nelson Enrique Bolívar
V-13568312
UCV

Lic. Gabriel Antonio Abellan
V-13518260
UCV

Prof. José Antonio López
V-10504342
UCV



Quiero agradecer a todas las personas de quienes he tenido el placer de aprender algo nuevo, que de una u otra forma tuvo una influencia en mi manera de desarrollar este proyecto. Principalmente, a mis amigos (ellos saben quienes son) por interesarse en discutir el tema conmigo, o quizás sólo escucharme hablar al respecto. Por supuesto, agradezco a mi madre y mi tía por darme todo lo necesario para concentrarme en mi carrera, cosa que no es para nada fácil hoy en día.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Ernesto Contreras por haber trabajado conmigo en mi proyecto inicial, que no pudo ser concretado, pero en el cual aprendí gran parte de las técnicas que fueron aplicadas en éste.

Agradezco a la Escuela de Física por prestarme herramientas y espacios de trabajo para el desarrollo de este proyecto.

Laboratorio de Campos y Partículas, Centro de Física Teórica y Computacional de la Escuela de Física, UCV.

RESUMEN

Se estudia una teoría modificada del campo vectorial con el propósito de modelar efectivamente la interacción de la radiación electromagnética y la materia, desde un punto de vista macroscópico. Se estudia además una teoría modificada del campo escalar. Con esto, se intenta realizar una cuantización covariante de la primera, con motivo de obtener resultados que permitan entender mejor este tipo de teorías modificadas.

Palabras clave: Cuantización covariante, Teoría Cuántica de Campos, Electromagnetismo, Materia.

Índice general

Lista de figuras	13
Lista de tablas	13
1. Introducción	13
2. El Campo Escalar	15
2.1. Cuantización covariante	16
2.2. Relaciones de Conmutación Covariantes	19
2.3. El propagador escalar	22
3. Teoría Covariante del Campo de Fotones	27
3.1. Teoría Clásica de Maxwell Libre	27
3.2. Cuantización Covariante	30
3.3. El Propagador de Fotones	32
4. Sistemas Singulares	35
4.1. Sistemas con finitos grados de libertad	35
4.2. Formulación Hamiltoniana	37
4.3. Cantidades de primera y segunda clase, corchetes de Dirac	39
4.4. Sistemas con infinitos grados de libertad	40
4.5. Caso de estudio: electromagnetismo en el vacío	44
5. Teoría del Campo Vectorial Modificada	49
5.1. Formulación covariante	49
5.2. Relaciones constitutivas	52
5.3. Densidad Lagrangiana y cantidades conservadas	53
5.4. Más acerca de los tensores de susceptibilidad y permeabilidad	54
5.5. Medios Isotrópicos	56

6. Cuantización del Campo Vectorial Modificado	59
6.1. Una Teoría de Klein-Gordon Modificada	59
6.2. Análisis Canónico del Campo Vectorial Modificado	63
6.3. Cuantización Covariante del Campo Vectorial Modificado	65
6.4. Formulación Alternativa para Medios Isotrópicos	69
Conclusiones	71

Capítulo 1

Introducción

El modelo cuántico que normalmente se usa para describir la interacción de la radiación electromagnética con la materia es la electrodinámica cuántica, en donde se consideran campos de materia y campos electromagnéticos que interactúan entre sí, lo que puede interpretarse como la interacción de partículas elementales. Si bien las predicciones de este modelo son muy precisas, puede resultar complicado explicar ciertos fenómenos macroscópicos con el mismo sin hacer simplificaciones adecuadas. Existen formas de modelar este problema, desde un punto de vista fenomenológico [1] [2]. Estos métodos sin embargo no son explícitamente covariantes. Uno puede preguntarse si existe un modelo de este problema a partir del cual se pueda realizar una cuantización covariante, tal como se suele hacer para los campos electromagnéticos en el vacío bajo el esquema de segunda cuantización. En este trabajo investigamos tal propuesta, en la que se modela la materia con un tensor de cuatro índices en su densidad Lagrangiana, de acuerdo con [8]. El enfoque con el cual se estudia tal modelo es matemático, ya que el propósito es entender el modelo en sí, sin hacer consideraciones relacionadas con el electromagnetismo que no sean necesarias.

En el capítulo 2 se estudia la teoría del campo escalar para ilustrar el proceso de cuantización covariante y obtener resultados que serán necesarios posteriormente. En el capítulo 3 se estudia el campo electromagnético en el vacío y su cuantización covariante, empleando el método de fijación de calibre a nivel de la densidad Lagrangiana. Luego, en el capítulo 4 se estudian en general los sistemas singulares, de los cuales el electromagnetismo es parte, bajo el esquema propuesto por Dirac [5]. En el capítulo 5 se estudia el modelo propuesto, que es una modificación a la teoría del campo vectorial, haciendo énfasis en su formulación Lagrangiana y estudiando en detalle el tensor que la modifica. Gran parte de este desarrollo se toma de [8]. Todo esto constituye el marco teórico del trabajo.

En el capítulo 6 se propone una teoría del campo escalar modificada por un tensor para entender más fácilmente ciertas características y posibles patologías de este tipo de teorías. Luego aplicamos el método de Dirac para analizar el campo vectorial modificado, obteniendo resultados prácticamente iguales al campo de Maxwell. Se intenta aplicar el método de segunda cuantización [3] a este modelo, encontrando ciertas dificultades al momento de fijar calibre. Finalmente, se propone un modelo más simple para medios isotrópicos en el sistema de referencia del material, que sí puede ser cuantizado bajo este esquema. Se obtienen partículas que viajan a la velocidad promedio de los fotones en la materia, $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, con ϵ y μ la permitividad y permeabilidad relativas del medio.

Capítulo 2

El Campo Escalar

Nuestro propósito es estudiar una generalización de la teoría de Maxwell, la cual es una teoría de campos vectoriales no masivos. En el capítulo 3 veremos que es posible fijar un calibre en la teoría del electromagnetismo en el vacío de forma tal que ésta sea equivalente a una teoría de cuatro campos escalares no masivos. Esto es también cierto para el electromagnetismo en la materia, bajo un calibre particular. Por esta razón, es natural realizar un estudio de la teoría del campo escalar. En particular, estudiaremos la teoría de Klein-Gordon, que describe un campo escalar masivo, y su cuantización covariante. Los resultados obtenidos aquí pueden luego ser extendidos al campo vectorial.

Para introducir la ecuación y el campo de Klein-Gordon, consideremos la ecuación de energía para una partícula relativista con masa m

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2. \quad (2.1)$$

El procedimiento de primera cuantización prescribe la promoción de las variables de posición y momentum a operadores según

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\partial/\partial t. \quad (2.2)$$

Si se impone la condición (2.1) como condición sobre una función de onda, obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar $\phi(x)$

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.3)$$

No nos preocuparemos por las peculiaridades de esta teoría que la hacen inadecuada como descripción de una partícula. Este tipo de consideraciones pueden encontrarse en la

literatura [3] [4]. Nos enfocaremos en su segunda cuantización, y la realización de ésta en forma covariante.

2.1. Cuantización covariante

Partimos de la formulación Lagrangiana. La densidad Lagrangiana para el campo escalar real ϕ de masa m , con el tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.4)$$

De ésta podemos obtener la ecuación (2.3) empleando el principio variacional. Calculemos el tensor de energía-momentum canónico, dado por

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi. \quad (2.5)$$

Obtenemos

$$\Theta_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + m^2\phi^2). \quad (2.6)$$

La energía y el momentum vienen dados, en notación cuadridimensional, por

$$P^\nu = (E, \mathbf{P}) = \int d^3x\Theta^{0\nu}(x), \quad (2.7)$$

de modo que para esta teoría,

$$E = \int d^3x\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right) \quad (2.8)$$

y

$$\mathbf{P} = \int d^3x\dot{\phi}\nabla\phi. \quad (2.9)$$

Debemos ahora realizar la formulación Hamiltoniana. Para ello, calculemos el momentum conjugado.

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \dot{\phi}. \quad (2.10)$$

Realizamos la transformación de Legendre $\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$ y sustituimos la velocidad $\dot{\phi}$, obteniendo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right). \quad (2.11)$$

Ahora realizamos la segunda cuantización. Para ello, promovemos el campo ϕ a un operador Hermítico $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$. El Hamiltoniano viene entonces dado por

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\dot{\hat{\phi}}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right). \quad (2.12)$$

El operador de campo y su momentum conjugado $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$ cumplen con las relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{y}, t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t)] &= [\dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t), \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{y}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora emplearemos una base de Fourier (soluciones de la ecuación (2.3)) para expandir el operador de campos, con el objetivo de obtener la representación de partículas de la teoría. Conviene separar la expansión en términos de frecuencia positiva y frecuencia negativa

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}^+ + \hat{\phi}^-, \quad (2.14)$$

donde

$$\hat{\phi}^+ = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \hat{a}(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\phi}^- = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (2.16)$$

Las constantes en la expansión se han escogido por conveniencia posterior, particularmente para que ciertos resultados se puedan relacionar fácilmente con el problema del oscilador armónico. Estas sumas se efectúan sobre todos los vectores de onda permitidos por las condiciones de borde sobre (2.3). Sustituyendo en esa misma ecuación esta expansión, podemos ver que

$$k^0 = \omega_{\mathbf{k}} = +(m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}, \quad (2.17)$$

de donde vemos que k^μ es el 4-vector de onda de una partícula de masa m , momentum $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ y energía $E = \omega_{\mathbf{k}}$.

Ahora bien, sabemos que los elementos de la base de Fourier cumplen con relaciones de ortogonalidad y de completitud. Empleando éstas en conjunto con (2.13), podemos

calcular las relaciones de conmutación entre los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Obtenemos

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')] &= [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Éstas son precisamente las relaciones de conmutación para los operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} de quanta para el oscilador armónico en mecánica cuántica. Todos los resultados de esa teoría pueden ser aplicados directamente en ésta. Se definen los operadores

$$N(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}), \quad (2.19)$$

que tienen como autovalores los números de ocupación $n(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$. En términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas, podemos escribir el operador Hamiltoniano y el operador de momentum empleando (2.8) y (2.9).

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.20)$$

,

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.21)$$

lo que confirma la interpretación de N como el operador de número de partículas con vector de onda \mathbf{k} . Continuando con la construcción del modelo, veamos que el estado de menor energía, o estado base, es el estado de vacío $|0\rangle$, en el cual no hay ninguna partícula presente. Podemos caracterizarlo por

$$\hat{a}(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{k}, \quad (2.22)$$

o, en términos de los operadores de campo, por

$$\hat{\phi}^+(x) |0\rangle = 0, \quad \text{para todo } x. \quad (2.23)$$

Ahora bien, si vemos detenidamente la forma del operador Hamiltoniano (2.20), nos damos cuenta de que la suma diverge, debido al término $\omega_{\mathbf{k}}/2$. Sin embargo, si consideramos la contribución de este término como la energía del estado base, podemos comenzar a medir a partir de ese valor y prescindir del mismo. En todo caso, hay una forma sistemática de prevenir la ocurrencia de estas cantidades divergentes. Definimos el *producto normal* como el producto de operadores en el cual todos los operadores de aniquilación se

encuentran a la derecha de todos los operadores de creación. Lo denotamos de la forma $N(\dots)$. Por ejemplo, tenemos que

$$N[\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_3)] = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_3)\hat{a}(\mathbf{k}_1)\hat{a}(\mathbf{k}_2). \quad (2.24)$$

Al momento de trabajar con objetos que dependan linealmente de estos operadores, como lo son los operadores de campo, se simplifican las manipulaciones si se dividen en partes que dependan una de operadores de creación y otra de operadores de aniquilación. Por esta razón, la separación (2.14) resulta particularmente conveniente. Notamos además que el orden relativo entre los operadores de aniquilación o de creación es arbitrario, ya que éstos conmutan entre sí. El ordenamiento normal, además, no cambia la física de este sistema, ya que en el fondo corresponde a un ordenamiento de los factores antes cuantizar la teoría.

Podemos escribir el 4-momentum, definido con productos normales,

$$P^\alpha = (H, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{k}} k^\alpha \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}). \quad (2.25)$$

A partir del estado de vacío $|0\rangle$, construimos los estados con más partículas vía los operadores de creación. Por ejemplo, los estados de una partícula son superposiciones lineales de

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle, \quad \text{para todo } \mathbf{k}; \quad (2.26)$$

los estados de dos partículas son superposiciones lineales de

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') |0\rangle, \quad \text{para todo } \mathbf{k} \text{ y } \mathbf{k}' \neq \mathbf{k}, \quad (2.27)$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})]^2 |0\rangle, \quad \text{para todo } \mathbf{k}, \quad (2.28)$$

y así sucesivamente. Todos los estados pueden ser normalizados, multiplicándolos por los términos apropiados, como es el caso de la ecuación (2.28) (en caso de que $|0\rangle$ a su vez esté normalizado).

2.2. Relaciones de Conmutación Covariantes

Para completar la formulación covariante de la teoría, debemos calcular las relaciones de conmutación para tiempos arbitrarios. Para esto, calculemos el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$

para dos puntos arbitrarios del espaciotiempo x y y , con separación tipo tiempo. Primero, notemos que

$$[\hat{\phi}(x)^+, \hat{\phi}(y)^+] = [\hat{\phi}(x)^-, \hat{\phi}(y)^-] = 0, \quad (2.29)$$

ya que $\hat{\phi}^+(\hat{\phi}^-)$ contiene sólo operadores de aniquilación (creación). Así,

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] &= [\hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(y)] \\ &= [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] + [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nos basta calcular el primer conmutador, $[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]$, ya que el segundo se relaciona con éste por $[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] = -[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]^\dagger$. Sustituyamos entonces en éste las expansiones (2.15) y (2.16),

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] e^{ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu} \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde hemos empleado la relación de conmutación (2.18). Conviene ahora hacer el límite $V \rightarrow \infty$, considerando que el volumen en donde estamos realizando la cuantización es lo suficientemente grande. Esto consiste simplemente en realizar el cambio

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k. \quad (2.32)$$

Tenemos entonces que, en la formulación continua,

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}. \quad (2.33)$$

Asignémosle ahora un símbolo a este conmutador, definiendo

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik_\mu x^\mu}, \quad k_0 = \omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.34)$$

Con esto, escribimos la relación de conmutación (2.31) como

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = i\Delta^+(x - y). \quad (2.35)$$

El conmutador restante viene dado por

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] &= -[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]^\dagger \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{ik_\mu(y^\mu - x^\mu)} \\ &= -i\Delta^+(y - x). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si definimos ahora la función $\Delta^-(x) \equiv -\Delta^+(-x)$, podemos escribir

$$[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] = i\Delta^-(x - y). \quad (2.37)$$

Ahora, para escribir la relación de conmutación (2.30), definimos

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(k_\mu x^\mu), \quad (2.38)$$

siendo ésta una función impar y real. Finalmente, de las ecuaciones (2.30), (2.35), (2.37) y la definición (2.38), obtenemos

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y). \quad (2.39)$$

No es difícil ver que la función Δ , así como Δ^+ y Δ^- , satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square_x + m^2)\Delta(x) = 0. \quad (2.40)$$

Resulta útil representar las funciones Δ como integrales de contorno en el plano complejo de la variable k_0 . En esta forma, las funciones $\Delta^+(x)$ y $\Delta^-(x)$ vienen dadas por

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4k e^{ik_\mu x^\mu}}{k^2 - m^2}, \quad (2.41)$$

con los contornos C^+ y C^- , para $\Delta^+(x)$ y $\Delta^-(x)$ respectivamente, mostrados en la figura 2.1. Se puede demostrar, empleando el método de los residuos con los polos $k_0 = \pm\omega_{\mathbf{k}}$, que estas definiciones se reducen a (2.34) y (2.37). La función $\Delta(x)$ es representada por la misma integral, pero empleando el contorno C .

Podemos ver además que la función $\Delta(x - y)$ es impar

$$\Delta(x - y) = -\Delta(y - x). \quad (2.42)$$

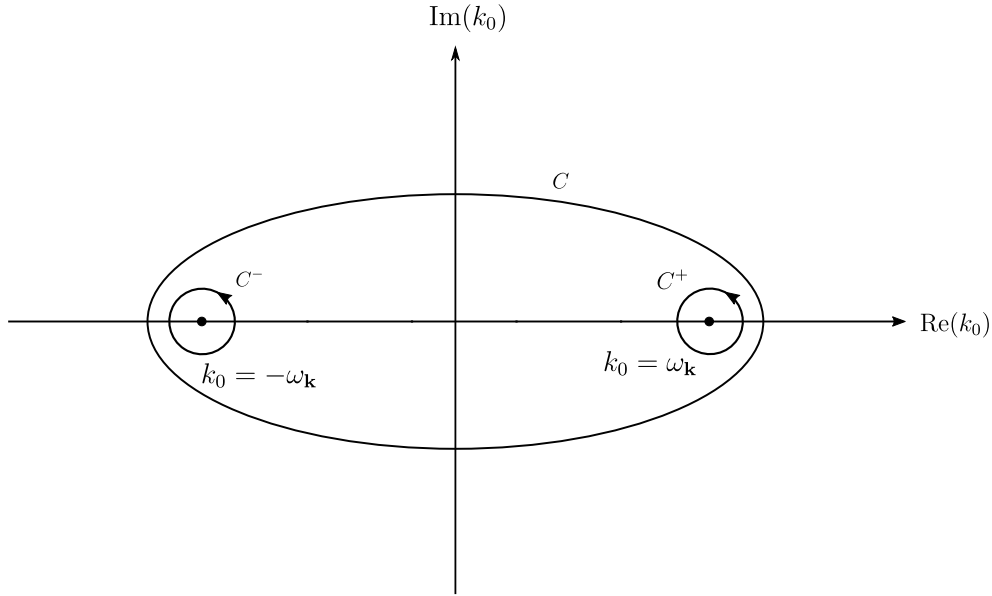


Figura 2.1: Contornos para la representación integral de las funciones $\Delta^\pm(x)$ y $\Delta(x)$

Finalmente, tenemos la propiedad fundamental

$$\Delta(x - y) = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.43)$$

Esto es, la función $\Delta(x - y)$ se anula si el argumento es un 4-vector tipo espacio. Esto tiene la consecuencia de que las mediciones realizadas en dos puntos del espacio-tiempo que tienen una separación tipo espacio no se influyen entre sí. Es decir, las perturbaciones no se pueden propagar con velocidad mayor a la de la luz. Esto se conoce como la condición de microcausalidad.

2.3. El propagador escalar

Así como se pueden representar las funciones Δ definidas anteriormente como integrales de contorno en el plano complejo de k_0 , pueden ser definidas otras funciones de este tipo empleando contornos distintos. Discutiremos aquí una de estas funciones, que es de gran importancia para la teoría cuántica de campos.

Notemos primero que la función Δ^+ puede ser escrita como el valor de expectación de

vacío del producto de dos operadores de campos. Consideremos el valor de expectación

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^-(y) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) - \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] | 0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde se ha empleado la definición (2.23) y su conjugado Hermítico. Tomando ahora el valor de expectación de vacío en ambos lados de la ecuación (2.35), tenemos

$$i\Delta^+(x-y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle. \tag{2.45}$$

Definamos ahora el producto temporalmente ordenado como

$$\text{T}\{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)\} = \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y), & \text{si } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x), & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases} \tag{2.46}$$

Esto es, los operadores evaluados en tiempos más tempranos actúan primero. Definimos la función delta de Feynman Δ_F

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0 | \text{T}\{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle. \tag{2.47}$$

Si empleamos las ecuaciones (2.45) y (2.37), podemos definir explícitamente esta función como

$$\Delta_F(x) = \begin{cases} \Delta^+(x), & \text{si } x^0 > 0 \\ -\Delta^-(x), & \text{si } x^0 < 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Nos preguntamos ahora, ¿qué interpretación física tiene esta función? Consideremos el caso $x^0 > y^0$, para el cual $\Delta_F = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle$. Podemos pensar en esta expresión como la representación de un proceso en el cual una partícula es creada en y y luego viaja a x , donde es aniquilada. Para el caso $y^0 > x^0$, tenemos que $\Delta_F = \langle 0 | \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle$ y podemos interpretar esta expresión de forma análoga. Estos procesos se ilustran en la figura 2.2. En ésta, las líneas entrecortadas representan la propagación de la partícula en la dirección de la flecha, desde y a x o vice versa. Por esta razón, nos referimos a Δ_F como el propagador de Feynman para partículas de espín cero, o simplemente el propagador escalar.

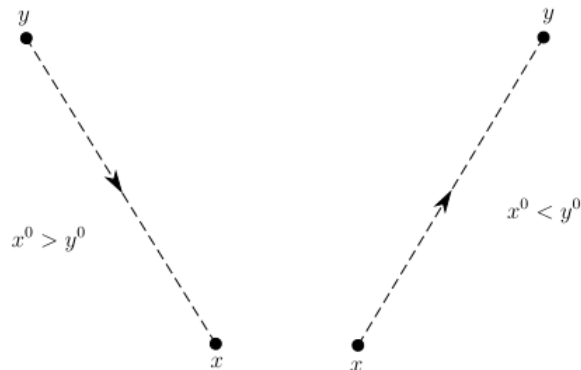


Figura 2.2: El propagador escalar

Si bien en esta teoría no hay interacciones, podemos considerar un ejemplo físico en el cuál sí las hay, para ver cómo aparecen estos propagadores. Consideremos entonces la interacción nucleón-nucleón. En este proceso, existen dos nucleones en el estado inicial y el estado final. La interacción entre los nucleones corresponde a un intercambio de mesones virtuales. Consideraremos el intercambio de un sólo mesón, que es el proceso más simple de este tipo. Éste se ilustra en la figura 2.3. Las líneas continuas representan los nucleones y las entrecortadas los mesones. Aquí se ha dividido el proceso en los dos casos $x^0 > y^0$ y $x^0 < y^0$. Sin embargo, al momento de realizar los cálculos en la teoría, se deben considerar ambos al mismo tiempo. Esto se representa esquemáticamente en la figura 2.4, que se conoce como un diagrama de Feynman. No debe interpretarse literalmente como la propagación de partículas en el espaciotiempo, sino más bien como un gráfico del cual se puede extraer cierta información física. Por ejemplo, notemos que la separación $x - y$ en este gráfico es tipo espacio, lo que no tiene sentido físico ya que implicaría que el mesón viaja más rápido que la luz.

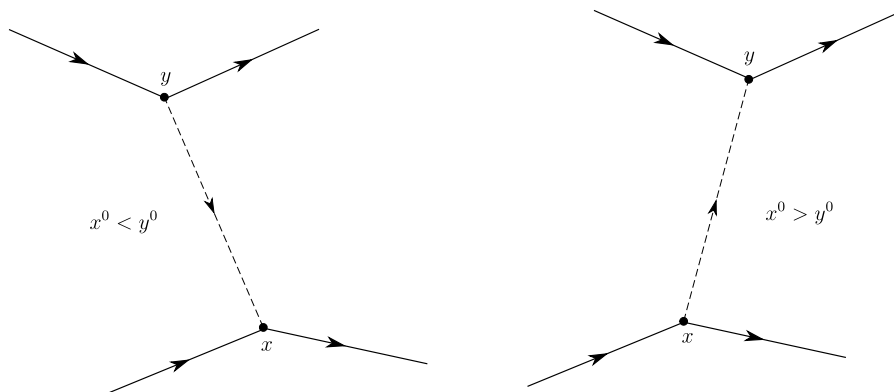


Figura 2.3: Contribución del intercambio de un mesón al scattering nucleón-nucleón.

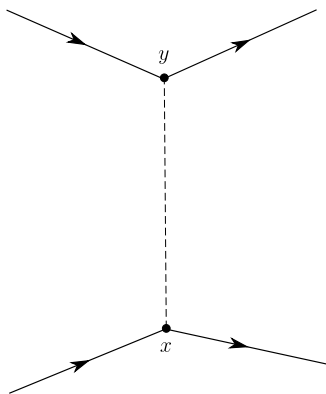


Figura 2.4: Diagrama de Feynman para la contribución del intercambio de un mesón al scattering nucleón-nucleón.

Para desarrollos posteriores, requeriremos una representación del propagador escalar en el espacio de momentum. Ésta está dada por la siguiente integral

$$\Delta_{\text{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\text{F}}} \frac{d^4 k e^{ik_{\mu} x^{\mu}}}{k^2 - m^2}, \quad (2.49)$$

donde el contorno C_{F} se muestra en la figura 2.5.

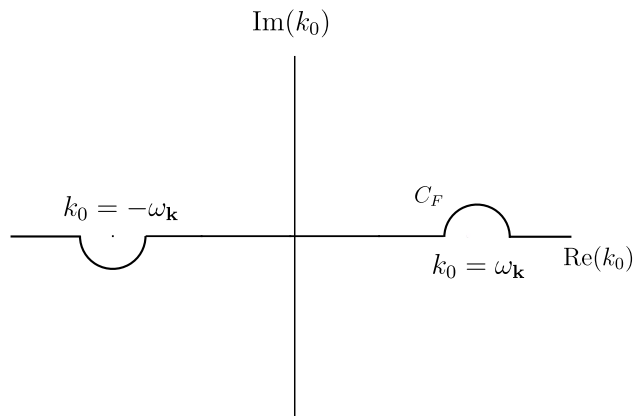


Figura 2.5: Contorno C_{F} para el propagador escalar Δ_{F}

Capítulo 3

Teoría Covariante del Campo de Fotones

En este capítulo hacemos un breve resumen de la formulación covariante de la teoría clásica de Maxwell libre, para luego realizar su cuantización con fin de obtener una teoría covariante del campo de fotones en ausencia de materia, siguiendo principalmente el desarrollo en [3].

3.1. Teoría Clásica de Maxwell Libre

Las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre pueden ser expresadas de manera covariante en términos del tensor antisimétrico de campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

quedando así de la forma

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (3.3)$$

Expresamos el tensor $F^{\mu\nu}$ en términos del 4-vector potencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ de la forma

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.4)$$

En términos de los potenciales, las ecuaciones (3.2) toman la forma

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0, \quad (3.5)$$

mientras que las ecuaciones (3.3) se satisfacen idénticamente. Las ecuaciones (3.2) pueden ser obtenidas, mediante el principio de acción estacionaria, de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Sin embargo, esta densidad Lagrangiana es singular, como veremos en el capítulo 4. Aquí no emplearemos el método allí desarrollado, sino más bien fijaremos el calibre de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ en la densidad Lagrangiana, agregándole un *término fijador de calibre*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\alpha A^\alpha)^2. \quad (3.7)$$

Si escribimos esto en términos de A^μ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\alpha A^\alpha)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2}\partial^\nu A^\nu \partial_\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde se ha integrado por partes dos veces el segundo término del lado derecho en la segunda línea, para cancelarlo con el tercero. Trabajaremos entonces con la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu). \quad (3.9)$$

Podemos ver que el efecto de fijar el calibre de Lorenz reduce efectivamente la teoría a una de cuatro campos escalares no masivos (siendo aún las componentes de un campo vectorial), sin interacciones mutuas. Calculando las ecuaciones de movimiento, vemos que

cada componente satisface la ecuación de ondas

$$\square A^\mu = 0. \quad (3.10)$$

Además, podemos ver que a nivel de las ecuaciones de movimiento, se distinguen éstas y las más generales precisamente por el término $\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)$, que se anula bajo el calibre de Lorenz. Los momenta conjugados de esta teoría son

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}^\mu. \quad (3.11)$$

Promovemos los campos y momenta a operadores $(A^\mu, \dot{A}^\mu) \rightarrow (\hat{A}^\mu, \dot{\hat{A}}^\mu)$, y los expandimos en una base de Fourier, de forma análoga al campo escalar

$$\hat{A}^\mu = \hat{A}^{\mu+} + \hat{A}^{\mu-}, \quad (3.12)$$

donde

$$\hat{A}^{\mu+} = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) e^{ik_\nu x^\nu}, \quad (3.13)$$

$$\hat{A}^{\mu-} = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ik_\nu x^\nu}. \quad (3.14)$$

Las sumas sobre \mathbf{k} en estas ecuaciones son sobre los vectores de onda permitidos por las condiciones de contorno. La suma sobre r , desde $r = 0$ hasta $r = 3$, corresponde al hecho de que para el 4-vector A^μ existe, para cada \mathbf{k} , cuatro estados de polarización linealmente independientes. Éstos están descritos por los vectores de polarización $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$, $r = 0, \dots, 3$, que escogemos como reales, y que satisfacen las relaciones de ortonormalidad y completitud (donde en r no hay suma implícita)

$$\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = \xi_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, \dots, 3, \quad (3.15)$$

$$\sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = g^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1. \quad (3.17)$$

Una escogencia específica de los vectores de polarización en un marco de referencia dado puede facilitar la interpretación. Escogeremos estos vectores como

$$\varepsilon_0^\nu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0), \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

donde $\varepsilon_1(\mathbf{k})$ y $\varepsilon_2(\mathbf{k})$ son vectores unitarios mutuamente ortogonales, que también son ortogonales a \mathbf{k} , y

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (3.20)$$

ε_1^μ y ε_2^μ son llamados polarizaciones transversas, ε_3^μ polarización longitudinal y ε_0^μ polarización escalar (no por razones físicas sino por convención).

3.2. Cuantización Covariante

Realizamos ahora la cuantización del campo electromagnético libre según la densidad Lagrangiana (3.9), aplicando el formalismo canónico. Las relaciones de conmutación a tiempos iguales para los campos y los momenta conjugados vienen dadas por

$$[\hat{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{\hat{A}}^\nu(\mathbf{y}, t)] = ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.21)$$

$$[\hat{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \hat{A}^\nu(\mathbf{y}, t)] = [\dot{\hat{A}}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{\hat{A}}^\nu(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (3.22)$$

Para obtener la interpretación de fotones de los campos cuantizados, sustituimos las expansiones (3.13) y (3.14) en las relaciones de conmutación (3.21) y (3.22), obteniendo

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \xi_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.23)$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (3.24)$$

Interpretaremos estos resultados siguiendo el procedimiento de Gupta y Bleuler. En esta teoría, los operadores a_r y a_r^\dagger , $r = 0, \dots, 3$, son interpretados como operadores de

aniquilación y creación, respectivamente, para fotones transversos, longitudinales y escalares. Recordemos que sólo los fotones transversales tienen significado físico y los otros dos tipos de fotones están presentes en la teoría por ser esta de calibre. Esto quedará claro más adelante. El estado de vacío $|0\rangle$ se define como el estado en el cual no hay presentes fotones de ningún tipo, es decir

$$a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad \text{todo } \mathbf{k}, \quad r = 0, \dots, 3, \quad (3.25)$$

ó, equivalentemente

$$A^{\mu+}(x) |0\rangle = 0, \quad \text{todo } x, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (3.26)$$

Los operadores $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ que actúan sobre el estado de vacío $|0\rangle$ generan los estados de un fotón

$$|\mathbf{1}_{\mathbf{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \quad (3.27)$$

en los cuales está presente un fotón transverso ($r = 1, 2$), longitudinal ($r = 3$) o escalar ($r = 0$), con momentum \mathbf{k} . Para justificar esta interpretación, consideremos el Hamiltoniano de la teoría, que en términos de los operadores \hat{a}_r y \hat{a}_r^\dagger se escribe

$$H = \sum_{r\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \xi_r \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}). \quad (3.28)$$

A pesar del signo negativo ($\xi_0 = -1$) asociado a los fotones escalares, se puede ver que esta energía es siempre positiva. Correspondientemente, definimos el operador de número de partículas como

$$N_r(\mathbf{k}) = \xi_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}). \quad (3.29)$$

Para hacer esta teoría equivalente a la teoría de Maxwell, debemos imponer la condición de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ como una identidad de operadores. Podemos establecer una condición más débil (método de Gupta-Bleuler)

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\Psi\rangle = 0. \quad (3.30)$$

Con esto, la condición de Lorenz se cumple explícitamente al tomar el valor de expec-

tación

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0. \quad (3.31)$$

De esta manera se asegura que se cumplen las ecuaciones de Maxwell en el límite clásico de esta teoría. Expresamos la condición (3.30) en el espacio de momentum

$$[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] |\Psi\rangle = 0, \quad \text{todo } \mathbf{k}, \quad (3.32)$$

que impone una restricción en las combinaciones lineales de fotones escalares y longitudinales, para cada valor de \mathbf{k} , presentes en un estado. Debido a esta condición, el valor de expectación de todos los observables no depende del número de fotones escalares ni longitudinales, como debe ser. En particular, el valor de expectación del Hamiltoniano tiene la forma

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle. \quad (3.33)$$

Las distintas combinaciones de fotones longitudinales y escalares permitidas se corresponden con distintos calibres, equivalentes al calibre de Lorenz, de los cuales el más sencillo corresponde a la ausencia de dichos fotones.

3.3. El Propagador de Fotones

Consideremos las relaciones de conmutación covariantes. Ya que esta teoría es una de cuatro campos escalares no masivos, podemos emplear los resultados obtenidos en el capítulo 2, en el límite $m \rightarrow 0$. Estas relaciones son entonces

$$[\hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(y)] = iD^{\mu\nu}(x - y), \quad (3.34)$$

donde

$$D^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} \Delta(x), \quad (3.35)$$

recordando que la función $\Delta(x)$ viene dada por

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(k_\mu x^\mu). \quad (3.36)$$

Definimos el propagador de fotones de Feynman de forma análoga al propagador es-

calar

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(y) \} | 0 \rangle = i D_F^{\mu\nu}(x - y), \quad (3.37)$$

donde T denota el producto tiempo-ordenado y

$$D_F^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} \lim_{m \rightarrow 0} \Delta_F(x) = \frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 e^{ik_\alpha x^\alpha}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.38)$$

Daremos interpretación al propagador de fotones (3.37) como el intercambio de los cuatro tipos de fotones en la teoría. Para esto, consideramos el propagador en el espacio de momento $D_F^{\mu\nu}(k)$, que está relacionado con el propagador en el espacio de configuraciones $D_F^{\mu\nu}(x)$ por

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D_F^{\mu\nu}(k) e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.39)$$

De las ecuaciones (3.16) y (3.38) obtenemos

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_r \xi_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}). \quad (3.40)$$

Si empleamos el marco de referencia preferencial dado por (3.18) y (3.19), esta ecuación toma la forma

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{[k^\mu - (kn)n^\mu][k^\nu - (kn)n^\nu]}{(kn)^2 - k^2} + (-1)n^\mu n^\nu \right\}, \quad (3.41)$$

en la cual se exhiben por separado las contribuciones de los fotones transversales, longitudinales y escalares, respectivamente. La interpretación del propagador, sin embargo, se hace más fácil si recombina los términos longitudinal y escalar, obteniendo

$$D_F^{\mu\nu}(k) = D_{FT}^{\mu\nu}(k) + D_{FC}^{\mu\nu}(k) + D_{FR}^{\mu\nu}(k), \quad (3.42)$$

donde

$$D_{FT}^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}), \quad (3.43)$$

$$D_{FC}^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{n^\mu n^\nu}{(kn)^2 - k^2}, \quad (3.44)$$

$$D_{FR}^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu - (kn)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(kn)^2 - k^2} \right]. \quad (3.45)$$

Consideremos el segundo término escrito en el espacio de configuraciones

$$D_{FC}^{\mu\nu}(x) = \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} \int dk^0 e^{-ik^0 x^0} = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0). \quad (3.46)$$

En esta expresión vemos que el intercambio de fotones escalares y longitudinales contenido en (3.46) se corresponde con la ley de Coulomb. En cuanto al tercer término, $D_{FR}^{\mu\nu}(k)$, se puede demostrar que no contribuye a ninguna cantidad observable.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es estudiar la forma que tiene este objeto en la teoría de Maxwell macroscópica.

Capítulo 4

Sistemas Singulares

Como es sabido, la radiación electromagnética tiene dos grados de libertad, que se corresponden a nivel cuántico con los dos posibles estados de polarización del fotón (dextrógiro y levógiro). Sin embargo, al estudiar la teoría de Maxwell, observamos que el campo A^μ tiene cuatro grados de libertad. Esto implica que dos de éstos no son físicos. Diremos que son grados de libertad espúreos y que esta teoría es singular. Todas las teorías de interacciones fundamentales son de este tipo, por ser teorías de calibre. Esto trae como consecuencia ciertas dificultades al momento de tratar de construir la formulación Hamiltoniana de la teoría, que es necesaria para su cuantización canónica.

Para resolver estas dificultades existen varios métodos. En esta sección estudiaremos el método desarrollado por Dirac y que llamamos *cuantización a la Dirac*, ya que es un método orientado a la cuantización de la teoría. Estos desarrollos se pueden encontrar en su forma original en [5]

4.1. Sistemas con finitos grados de libertad

Desarrollaremos el método de Dirac primero para sistemas singulares de finitos grados de libertad. Para ello, consideremos un sistema descrito por la siguiente acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t)), \quad (4.1)$$

donde L es el Lagrangiano, que no depende explícitamente del tiempo. El índice $i = 0, \dots, N$ denota los distintos grados de libertad. La evolución del sistema se da de tal forma que la acción se hace estacionaria bajo variaciones infinitesimales $\delta q^i(t)$ (principio

de Hamilton). Si asumimos que los límites de la integral permanecen fijos durante la variación, es decir, $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, se obtienen las ecuaciones de movimiento de la teoría (ecuaciones de Euler-Lagrange):

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0. \quad (4.2)$$

Si calculamos la derivada total temporal, obtenemos

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \quad (4.3)$$

De esta forma podemos ver que para expresar las aceleraciones \ddot{q}^i en términos de las posiciones q^i y velocidades \dot{q}^i , es necesario que la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (4.4)$$

sea invertible. Es decir, su determinante debe ser distinto de cero,

$$\det H_{ij} \neq 0. \quad (4.5)$$

Consideremos ahora la construcción de la formulación Hamiltoniana. Para ello, se definen los momenta conjugados como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (4.6)$$

Ahora bien, si la matriz Hessiana es singular (no invertible), será el caso que algunas de las variables del espacio de fases, q^i y p_i , no son independientes. Esto implica que la ecuación (4.6) no será invertible. Precisamente esto es lo que define un sistema singular. No se pueden expresar las velocidades como funciones de los momenta y las posiciones. Esto da lugar a la existencia de R relaciones entre las posiciones y los momenta

$$\phi_r(p_i, q^i) = 0, \quad r = 1, \dots, R, \quad (4.7)$$

si el rango de la matriz Hessiana es $(N - R)$. Estas ecuaciones son llamadas *vínculos primarios* y nacen naturalmente de la estructura del Lagrangiano y la definición de los momenta. Estos vínculos representan restricciones en el espacio de fases. Es decir, definen una subvariedad en el espacio de fases de dimensión $2N - R$, el cual contiene la información física del sistema.

Veamos ahora las consecuencias de estas condiciones al construir la formulación Hamiltoniana.

4.2. Formulación Hamiltoniana

La transición de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana está dada por la transformación de Legendre

$$H(p_i(t), q^i(t)) = p_i \dot{q}^i - L(q^i(t), \dot{q}^i(t)). \quad (4.8)$$

Es importante notar que el Hamiltoniano no puede estar escrito como función de las velocidades. Para esto, veamos que

$$\begin{aligned} dH &= d(p_i \dot{q}^i) - dL \\ &= \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde se ha empleado la definición de los momenta. Vemos que tan sólo quedan diferenciales de las posiciones y los momenta, de modo que el Hamiltoniano sólo puede depender de estos. Esto es, no puede depender de las velocidades. Esto es problemático ya que como consecuencia de la existencia de los vínculos primarios, no todas las velocidades pueden ser despejadas en términos de las posiciones y los momenta, por lo que habrá que hacer otras consideraciones.

Empleemos el método de los multiplicadores de Lagrange para acoplar explícitamente los vínculos primarios a la acción, denotando dichos multiplicadores por λ^r

$$S = \int dt (L + \lambda^r \phi_r). \quad (4.10)$$

Empleemos ahora la ecuación (4.8) para escribir la acción en términos del Hamiltoniano

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H + \lambda^r \phi_r). \quad (4.11)$$

Haciendo variaciones sobre esta acción, obtenemos las ecuaciones de movimiento Ha-

miltonianas para sistemas con vínculos

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^r \frac{\partial \phi_r}{\partial q^i}, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^r \frac{\partial \phi_r}{\partial p_i}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Definiendo ahora el corchete de Poisson de dos funciones del espacio de fases $F(q^i, p_i)$ y $G(q^i, p_i)$ como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i},\tag{4.13}$$

podemos escribir las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas como

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= \{p_i, H\} + \lambda^r \{p_i, \phi_r\}, \\ \dot{q}^i &= \{q^i, H\} + \lambda^r \{q^i, \phi_r\}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Es conveniente ahora definir el Hamiltoniano primario

$$H^* = H + \lambda^r \phi_r,\tag{4.15}$$

que no es más que el Hamiltoniano canónico con los vínculos primarios acoplados vía multiplicadores de Lagrange. Podemos emplear este Hamiltoniano para escribir la derivada temporal de una función del espacio de fases

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \{F, H^*\} - \{F, \lambda^r\} \phi_r \\ &\approx \{F, H^*\},\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde el símbolo \approx significa *igualdad débil*, lo que implica que la igualdad se sostiene dentro de la subvariedad física del espacio de fases, en la cual se cumple $\phi_r = 0$. Los vínculos deben ser fijados una vez hayan sido realizadas todas las cuentas (en particular, los corchetes de Poisson) para llegar a un resultado final. Esto se debe a que al fijar los vínculos estamos reduciendo el espacio de fases a la subvariedad física, de modo que si esto se hace antes de llegar a resultados finales, se puede perder información importante. Por esta razón, en general diremos que $\phi_r \approx 0$.

Ahora bien, para que el formalismo sea consistente, es necesario requerir que los vínculos primarios se preserven en el tiempo. Esto es, el sistema debe permanecer siempre en

la subvariedad física. Para ello, se debe cumplir que

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H\} + \lambda^s \{\phi_r, \phi_s\} \approx 0. \tag{4.17}$$

La preservación de estos vínculos puede tener distintas implicaciones. Es posible que la ecuación (4.17) se satisfaga idénticamente. Es decir, que se obtenga la identidad $0 = 0$. También puede obtenerse una ecuación que imponga condiciones sobre los multiplicadores λ^r . En cualquiera de estos casos, culmina la preservación de vínculos. Puede ocurrir también que se obtenga una ecuación que involucre las variables canónicas únicamente

$$\chi(q^i, p_i) = 0, \tag{4.18}$$

lo que implica la existencia de otros vínculos χ , que llamaremos *vínculos secundarios*, y que también deben ser preservados en el tiempo. Finalmente, puede obtenerse una relación inconsistente (por ejemplo, $1 = 0$), en cuyo caso la teoría misma es inconsistente y debe ser reconsiderada.

Después de haber culminado la preservación de vínculos, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \{\phi_r, H\} + \lambda^s \{\phi_r, \phi_s\} &\approx 0, & r = 1, \dots, R, \\ \{\chi_k, H\} + \lambda^s \{\chi_k, \phi_s\} &\approx 0, & k = 1, \dots, K. \end{aligned} \tag{4.19}$$

El conjunto de todos los vínculos primarios y secundarios definen entonces la subvariedad física en el espacio de fases.

4.3. Cantidades de primera y segunda clase, corchetes de Dirac

Las funciones del espacio de fases pueden ser clasificadas de la siguiente forma. Diremos que una función F es de primera clase si su corchete de Poisson con cualquier vínculo (primario o secundario) es cero, al menos débilmente,

$$\{F, \phi_r\} \approx \{F, \chi_k\} \approx 0. \tag{4.20}$$

De otro modo, diremos que F es de segunda clase. En cuanto a los vínculos, su distinción en primera y segunda clase es de gran importancia. En el caso en que todos los

vínculos de una teoría son de primera clase, se dice que el álgebra dada por los corchetes de Poisson es cerrada y el procedimiento descrito anteriormente es suficiente para aplicar las reglas de cuantización, correspondiéndose los corchetes de Poisson con los conmutadores en la teoría cuántica.

En las teorías que estudiaremos, es posible fijar calibre de modo que se le agreguen vínculos de segunda clase. En este caso, es necesario generalizar los corchetes de Poisson a los corchetes de Dirac, que se definen para dos funciones F y G del espacio de fases como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \phi_r\}(\Delta^{-1})_{rs}\{\phi_s, G\}, \quad (4.21)$$

donde $\Delta_{r,s}$ es la matriz cuadrada cuyos elementos son los corchetes de Poisson entre los $R = S$ vínculos, que no distinguiremos simbólicamente entre primarios y secundarios

$$[\Delta_{r,s}] = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_1, \phi_S\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_2, \phi_S\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_R, \phi_1\} & \{\phi_R, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_R, \phi_S\} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\dot{F} \approx \{F, H\}_D. \quad (4.23)$$

Los corchetes de Dirac, así como los de Poisson, presentan varias propiedades algebraicas. En particular, son antisimétricos, lineales y obedecen la identidad de Jacobi y la regla del producto para operadores diferenciales. Para realizar la cuantización de la teoría, son éstos los corchetes que se promueven a conmutadores. Apliquemos entonces estas ideas a una teoría en particular.

4.4. Sistemas con infinitos grados de libertad

Todo el desarrollo que se ha hecho hasta ahora es válido para sistemas con finitos grados de libertad. Sin embargo, los sistemas de interés físico con finitos grados de libertad no suelen ser singulares, de modo que se pueden manejar sin las dificultades que éstos presentan.

La motivación real de desarrollar este formalismo es estudiar teorías de interacciones fundamentales, que son singulares. Estas teorías, sin embargo, son de infinitos grados de libertad y por lo tanto hay que traducir dicho formalismo al lenguaje de teorías de campos.

Consideremos el Lagrangiano, que ahora es un funcional de los campos y sus derivadas temporales

$$L(t) = L[\varphi^I(\mathbf{x}, t); \dot{\varphi}^I(\mathbf{x}, t)], \quad I = 1, \dots, N. \quad (4.24)$$

Como nos restringimos al estudio de teorías de campos locales, podemos escribir el Lagrangiano como una integral de volumen sobre una densidad Lagrangiana \mathcal{L}

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^I(\mathbf{x}, t); \nabla \varphi^I(\mathbf{x}, t); \dot{\varphi}^I(\mathbf{x}, t)). \quad (4.25)$$

La densidad Lagrangiana es una función que depende de los campos, sus derivadas espaciales y derivadas temporales. El índice I tan sólo cuenta el número de campos, de modo que no tiene el significado de índice de un 4-vector. Para pasar a la formulación Hamiltoniana, se definen los momenta conjugados canónicos como la derivada funcional del Lagrangiano con respecto a la derivada temporal de los campos

$$\pi_I = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^I}. \quad (4.26)$$

El Hamiltoniano de teoría de campos es un funcional que depende de los campos y sus momenta conjugados

$$H(t) = H[\varphi^I(\mathbf{x}, t); \pi_I(\mathbf{x}, t)]. \quad (4.27)$$

Éste puede ser obtenido a partir del Lagrangiano vía una transformación de Legendre

$$H = \int d^3x (\pi_I \dot{\varphi}^I) - L = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_I; \varphi^I; \nabla \pi_I; \nabla \varphi^I), \quad (4.28)$$

en donde tenemos la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi_I \dot{\varphi}^I - \mathcal{L}$. Las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas vienen dadas al minimizar la acción

$$\mathcal{A} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x (\pi_I \dot{\varphi}^I - \mathcal{H}). \quad (4.29)$$

Con esto, obtenemos

$$\dot{\varphi}^I = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_I} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi_I)} = \frac{\delta H}{\delta \pi_I}, \quad (4.30)$$

$$\dot{\pi}^I = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_I} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \varphi_I)} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_I}, \quad (4.31)$$

donde se ha definido la derivada funcional

$$\frac{\delta}{\delta \varphi^I} \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^I} - \partial_i \frac{\partial}{\partial (\partial_i \varphi^I)}, \quad (4.32)$$

donde la suma en i sólo cubre las derivadas espaciales. Definimos ahora el corchete de Poisson para dos funcionales $A[\varphi^I, \pi_I]$ y $B[\varphi^I, \pi_I]$ como

$$\{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\} = \int d^3z \left(\frac{\delta A(\mathbf{x})}{\delta \varphi^I(\mathbf{z})} \frac{\delta B(\mathbf{y})}{\delta \pi_I(\mathbf{z})} - \frac{\delta B(\mathbf{y})}{\delta \varphi^I(\mathbf{z})} \frac{\delta A(\mathbf{x})}{\delta \pi_I(\mathbf{z})} \right). \quad (4.33)$$

Estos corchetes se calculan siempre a tiempos iguales, por lo que la dependencia temporal se omite en ellos por brevedad. Ahora, como uno puede escribir una función como un funcional que depende de sí misma

$$\varphi^I(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \varphi^I(\mathbf{x}', t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.34)$$

la derivada funcional se define de cuerdo a

$$\frac{\delta \varphi^I(\mathbf{x}, t)}{\delta \varphi^\nu(\mathbf{x}', t)} = \delta^I_\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.35)$$

Entonces las derivadas temporales pueden ser escritas de la forma

$$\dot{A}[\varphi^I, \pi_I] = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi^I} \dot{\varphi}^I + \frac{\delta A}{\delta \pi_I} \dot{\pi}^I \right) = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi^I} \frac{\delta H}{\delta \pi_I} - \frac{\delta H}{\delta \varphi^I} \frac{\delta A}{\delta \pi_I} \right) = \{A, H\}. \quad (4.36)$$

Podemos ver que hasta ahora los formalismos para finitos e infinitos grados de libertad son prácticamente iguales. Introducimos ahora los vínculos, que ahora son funcionales de los campos, sus momenta conjugados y los multiplicadores

$$\Phi(t) = \Phi[\varphi^I, \pi_I, \lambda] = \int d^3x \lambda(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t). \quad (4.37)$$

Los vínculos ϕ con los cuales trabajaremos son entonces densidades, que se acoplan al

Hamiltoniano via los campos multiplicadores

$$H_p = H + \Phi[\varphi^I, \pi_I, \lambda^r] = H + \int d^3x \lambda(\mathbf{x}, t) \phi_r(\mathbf{x}, t). \quad (4.38)$$

Las ecuaciones de movimiento con los vínculos acoplados pueden ser obtenidas de la acción primaria

$$\mathcal{A} = \int d^4x (\pi_I \dot{\varphi}^I - \mathcal{H} - \lambda^r \phi_r). \quad (4.39)$$

Los resultados obtenidos son

$$\dot{\varphi}^I = \{\varphi^I, H\} + \int d^3y \lambda^r(\mathbf{y}, t) \{\varphi^I(\mathbf{x}), \phi_r(\mathbf{y})\}, \quad (4.40)$$

$$\dot{\pi}_I = \{\pi_I, H\} + \int d^3y \lambda^r(\mathbf{y}, t) \{\pi_I(\mathbf{x}), \phi_r(\mathbf{y})\}, \quad (4.41)$$

o para un funcional general del espacio de fases $A(\varphi^I, \pi_I)$

$$\dot{A} = \{A, H\} + \int d^3y \lambda^r(\mathbf{y}, t) \{A(\mathbf{x}), \phi_r(\mathbf{y})\}. \quad (4.42)$$

El algoritmo de Dirac para la obtención de los vínculos, en este caso, es el mismo que para los sistemas de finitos grados de libertad. Entonces, todas las fórmulas tienen una forma similar a las ya escritas. En particular, el corchete de Dirac toma la forma

$$\{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\}_D = \{A(\mathbf{x}), B(\mathbf{y})\} - \int \int d^3u d^3v \{A(\mathbf{x}), \phi_\kappa(\mathbf{u})\} G^{\kappa\omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \{\phi_\omega(\mathbf{v}), B(\mathbf{y})\}. \quad (4.43)$$

La matriz $G^{\kappa\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la inversa de

$$G_{\kappa\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\phi_\kappa(\mathbf{x}), \phi_\omega(\mathbf{y})\}, \quad (4.44)$$

con la inversa definida por la relación integral

$$\int d^3z G^{\kappa\omega'}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) G_{\omega'\omega}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_\omega^\kappa \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.45)$$

4.5. Caso de estudio: electromagnetismo en el vacío

Habiendo ya desarrollado la formulación Lagrangiana para la teoría del electromagnetismo en el vacío, nos valemos de las definiciones y consideraciones hechas allí para acortar la discusión aquí. Consideremos la densidad Lagrangiana para el electromagnetismo en el vacío, sin fuentes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.46)$$

con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Las ecuaciones de movimiento para esta teoría son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.47)$$

Para realizar la formulación Hamiltoniana, calculemos los momenta conjugados, que denotamos por π . Éstos vienen dados

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)}. \quad (4.48)$$

Escribiendo la densidad Lagrangiana en términos A^μ y sus derivadas, efectuamos la operación para obtener $\pi^\mu = -F^{0\mu}$, que podemos separar en

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0, \\ \pi^i &= -E^i. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Es decir, el hecho de que la densidad Lagrangiana no depende del término $\partial_0 A_0$, lleva operacionalmente a la existencia de un vínculo primario $\pi^0 = 0$. De aquí que la teoría sea singular.

Consideremos ahora la construcción de la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}. \quad (4.50)$$

Para el caso que estamos desarrollando, tenemos que $\pi^\mu = 0$, por lo que debemos despejar las velocidades $\partial_0 A_i$. Para ello, usaremos (4.49),

$$\begin{aligned} \pi^i &= -F^{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\ \partial_0 A_i &= \pi^i - \partial_i A_0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Conviene además separar la densidad Lagrangiana en sus términos con índices temporales, espaciales y mixtos, y escribirla en términos de los momenta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\pi^i\pi^i - \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

La densidad Hamiltoniana es entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^i\partial_0 A_i - \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} \\
&= \pi^i\pi^i - \pi^i\partial_i A_0 - \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + A_0\partial_i\pi^i.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

De la segunda a la tercera línea se ha hecho una integración por partes $\pi^i\partial_i A_0 \rightarrow -A_0\partial_i\pi^i$, recordando que lo que es de interés físico es el Hamiltoniano, de modo que podemos pensar que estas cantidades están en un entorno de integración de forma tácita. Esto equivale a aplicar la regla del producto de Leibniz y descartar términos de divergencia. Esto puede realizarse siempre y cuando los campos considerados decaigan lo suficientemente rápido en el infinito y sus integrales de superficie se anulen.

Definamos entonces la densidad Hamiltoniana primaria, acoplando los vínculos primarios

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \lambda^r\phi_r. \tag{4.54}$$

En este caso, tenemos sólo un vínculo primario $\phi_1 = \pi^0 = -\pi_0$. Así,

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + A_0\partial_i\pi^i - \lambda_1\pi_0, \tag{4.55}$$

advirtiendo que el índice para el multiplicador no tiene significado especial y lo escribimos abajo por practicidad. El Hamiltoniano primario entonces no es más que

$$H^* = \int \mathcal{H}^* d^3x. \tag{4.56}$$

Siguiendo con el programa, debemos ahora preservar el vínculo en el tiempo. Para

realizar los cálculos con los corchetes de Poisson, es conveniente emplear los corchetes fundamentales

$$\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.57)$$

Usemos esto entonces para preservar el vínculo primario

$$\begin{aligned} \{\pi^0(\mathbf{x}), H^*\} &= \int d^3y \{\pi^0(\mathbf{x}), \mathcal{H}^*(\mathbf{y})\} \\ &= \int d^3y \{\pi^0(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y}) \partial_i \pi^i(\mathbf{y})\} \\ &= \int d^3y \{\pi^0(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y})\} \partial_i \pi^i(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_i \pi^i(\mathbf{y}) \\ &= \partial_i \pi^i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tenemos así un vínculo secundario

$$\phi^2 = \partial_i \pi^i \approx 0, \quad (4.59)$$

que no es más que la ley de Gauss $\partial_i E^i = 0$ en la subvariedad física. Tenemos por otra parte que $\dot{\phi}^2 = 0$, de modo que éstos son todos los vínculos de la teoría. Además,

$$\{\phi^1, \phi^2\} = 0, \quad (4.60)$$

de modo que los vínculos son de primera clase y en principio podemos cuantizar la teoría en este punto, dada una representación adecuada.

Veamos ahora qué ocurre si fijamos un calibre. Empleemos el calibre de radiación

$$\begin{aligned} \chi^1 &= A^0 \approx 0, \\ \chi^2 &= \partial_i A^i \approx 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tenemos ahora cuatro vínculos. Con ellos podemos calcular la matriz G . Tenemos que

$$\begin{aligned} \{\phi^1(\mathbf{x}), \chi^1(\mathbf{y})\} &= -\{\chi^1(\mathbf{x}), \phi^1(\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{\phi^2(\mathbf{x}), \chi^2(\mathbf{y})\} &= -\{\chi^2(\mathbf{x}), \phi^2(\mathbf{y})\} = -\nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

mientras que todos los demás corchetes se anulan. Tenemos entonces que

$$G_{r,s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Para calcular los corchetes de Dirac, debemos invertir esta matriz. Debido a la estructura de la misma, es necesario simplemente invertir cada uno de sus elementos. En este sentido, la inversa de la delta de Dirac es ella misma, ya que

$$\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) d^3z = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.64)$$

siendo la delta de Dirac el análogo continuo a la identidad. La inversa del operador Laplaciano no es más que la función de Green. En este caso,

$$\nabla^{-2} \equiv [\nabla^2]^{-1} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4.65)$$

Tenemos entonces que

$$G^{r,s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Con esto podemos escribir los corchetes de Dirac empleando (4.43). Los primeros dos corchetes de Dirac fundamentales se anulan idénticamente

$$\{A_\mu(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{y})\}_D = 0, \quad (4.67)$$

$$\{\pi^\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D = 0, \quad (4.68)$$

de modo que son iguales a los corchetes de Poisson. Para el último corchete, se obtiene, después de un pequeño cálculo empleando (4.43)

$$\{A_\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})\}_D = (\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \delta_\mu^i \eta^{\nu j} \partial_i \partial_j \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4.69)$$

Con esto terminamos el análisis canónico del campo de Maxwell microscópico.

Capítulo 5

Teoría del Campo Vectorial Modificada

5.1. Formulación covariante

Consideremos las ecuaciones de Maxwell microscópicas, en la presencia de cargas y corrientes arbitrarias:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Desde un punto de vista macroscópico, es posible representar las propiedades electromagnéticas de un medio material como un conjunto de fuentes ρ_b y \mathbf{j}_b , que llamamos *ligadas* [6][7]. En particular, éstas cumplen con la propiedad de poder ser escritas de la forma

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad \mathbf{j}_b = c\nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},\tag{5.2}$$

donde \mathbf{P} y \mathbf{M} son las densidades de polarización y magnetización del material respectivamente. Si consideramos que en el material solo existen cargas y corrientes ligadas, entonces las ecuaciones con fuentes en (5.1) toman la forma

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0 \qquad \nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0.\tag{5.3}$$

Definiendo el campo de desplazamiento y el campo magnetizante,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad (5.4)$$

tenemos finalmente

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Habiendo acoplado las fuentes ligadas a los campos, diremos que en esta teoría no hay fuentes. Queremos ahora escribir estas ecuaciones de una forma explícitamente covariante. Para ello, conviene escribirlas en notación de índices como

$$\partial_i D_i = 0 \qquad \epsilon_{ijk} \partial_j H_k - \partial_0 D_i = 0 \quad (5.6)$$

$$\partial_i B_i = 0 \qquad \epsilon_{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B_i = 0. \quad (5.7)$$

Definimos ahora los tensores de campos y de desplazamiento $F^{\mu\nu}$ y $H^{\mu\nu}$, según las relaciones

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad F^{0i} = E_i \qquad F^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k \quad (5.8)$$

$$H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu} \qquad H^{0i} = D_i \qquad H^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} H_k, \quad (5.9)$$

con los cuales podemos reescribir las ecuaciones de la teoría como

$$\partial_i H^{0i} = 0 \qquad \partial_\mu H^{\mu i} = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_k F^{ij} = 0 \qquad \partial_i F^{0i} - \frac{1}{2} \partial^0 F^{ij} = 0, \quad (5.11)$$

De la misma forma que se suele realizar para el campo electromagnético en el vacío. Finalmente, agrupamos estas ecuaciones de la forma

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0, \quad (5.12)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) es la identidad de Bianchi para el tensor de campos $F^{\mu\nu}$ y es consecuencia de la definición del mismo. Ésta es válida tanto en esta teoría como en la teoría para el vacío. La presencia de un medio material se ve reflejada en (5.12). No es difícil ver que al eliminar las fuentes ligadas, ésta toma la forma $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, que es precisamente la ecuación de movimiento en el vacío sin fuentes. En este sentido, estamos

generalizando la teoría. Esta idea será más evidente en los desarrollos posteriores, desde un punto de vista matemático.

Una propiedad importante de la teoría de Maxwell en el vacío (sin fuentes) es que ésta es autodual. Lo que se quiere decir con esto es que al hacer el cambio $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, las ecuaciones de la teoría son las mismas. Para traducir esto a la forma covariante, definimos el tensor $F_*^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Al examinar este tensor, se puede ver que consiste en aplicar una operación sobre el tensor $F^{\mu\nu}$ que realiza el mismo cambio entre los campos ya mencionado. En términos de este tensor, la identidad de Bianchi toma la forma $\partial_\mu F_*^{\mu\nu} = 0$. Resumiendo, tenemos que las ecuaciones de cada teoría son, en esta forma,

$$\text{Vacío} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu F_*^{\mu\nu} = 0 \quad (5.14)$$

$$\text{Materia} \quad \partial_\mu H^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu F_*^{\mu\nu} = 0 \quad (5.15)$$

Entonces, no solo tenemos expresiones más compactas (con el costo de haber introducido ciertas nociones matemáticas), sino que se hace evidente el hecho de que la teoría de Maxwell en el vacío es autodual, mientras que en la materia no lo es. Por supuesto, esto es natural ya que la presencia de materia se representa como una fuente sobre el vacío.

Las ecuaciones (5.15) son evidentemente covariantes. Esto quiere decir que las consideraciones que hemos hecho para armar esta teoría no rompen la covariancia de las ecuaciones de Maxwell originales. Habiendo cumplido este requisito, esta teoría se presta para hacer un análisis completo dirigido a su cuantización covariante, al menos en principio.

Para completar la formulación covariante, definamos el tensor de densidad dipolar $D^{\mu\nu}$ según

$$D^{\mu\nu} = -D^{\nu\mu} \quad D^{0i} = -P_i \quad D^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_k \quad (5.16)$$

Notemos que las componentes D^{0i} son negativas, a diferencia de F^{0i} y H^{0i} . Con esto, las ecuaciones (5.4) toman la forma

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - 4\pi D^{\mu\nu}. \quad (5.17)$$

5.2. Relaciones constitutivas

Las ecuaciones (5.15) son muy generales para nuestros propósitos, ya que no describen cómo se generan las fuentes ligadas. Resulta entonces razonable considerar sólo una familia de medios materiales cuyas propiedades empíricas nos permitan realizar un análisis preciso. En este sentido, consideraremos que dichos materiales responden linealmente a los campos externos a los cuales son sometidos. En términos matemáticos, esto es

$$P^i = \chi_{ij}^e E^j, \quad M^i = \chi_{ij}^m B^j. \quad (5.18)$$

Éstas son las *relaciones constitutivas* del material y están determinadas por los tensores de susceptibilidad eléctrica y magnética, respectivamente χ_{ij}^e y χ_{ij}^m . En general, las componentes de estos tensores no tienen por qué ser constantes a lo largo del material. Sin embargo, consideraremos sólo el caso en que lo sean; esto es, consideraremos únicamente materiales *homogéneos*. Las ecuaciones (5.18) pueden escribirse en términos de los tensores de campos y de desplazamiento como

$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.19)$$

donde se ha definido el 4-tensor de susceptibilidad $\chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$. El factor 1/2 surge debido a la antisimetrización en los índices covariantes del tensor de susceptibilidad inducida por el tensor de campos $F^{\alpha\beta}$. En términos matemáticos, hemos establecido que el tensor de desplazamiento no es más que el resultado de aplicar una transformación al tensor de campos. Esta transformación no es arbitraria. Debe cumplir con ciertas características que serán exploradas posteriormente.

Habiendo establecido esta relación, podemos ver que ella implica una relación entre $H^{\mu\nu}$ y $F^{\mu\nu}$. Sustituyendo (5.19) en (5.17), obtenemos

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mu^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.20)$$

donde se ha definido el 4-tensor de permeabilidad

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - 4\pi\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (5.21)$$

Bajo estas condiciones podemos, en principio, hacer un análisis completo de la teoría. Construyamos entonces su formulación Lagrangiana.

5.3. Densidad Lagrangiana y cantidades conservadas

Con motivo de realizar un análisis más a fondo de esta teoría, y posteriormente construir la formulación Hamiltoniana de la misma, procederemos a construir la formulación Lagrangiana. En esta sección seguimos varios desarrollos encontrados en [8]. Proponemos la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}H_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (5.22)$$

Empleando la relación (5.20), podemos escribir ésta como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\mu_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}. \quad (5.23)$$

De esta expresión podemos deducir inmediatamente que el tensor de permeabilidad debe tener ciertas simetrías, que llamaremos antisimetrías menores y simetría mayor

$$\begin{aligned} \mu_{\mu\nu\alpha\beta} &= -\mu_{\nu\mu\alpha\beta} = -\mu_{\mu\nu\beta\alpha}, \\ \mu_{\mu\nu\alpha\beta} &= \mu_{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.21), se puede ver que el tensor de susceptibilidad $\chi_{\mu\nu\alpha\beta}$ posee las mismas simetrías. Se puede demostrar que la imposición de tales simetrías reduce el número de componentes independientes de estos tensores a 21.

Ahora bien, esta teoría, al igual que la correspondiente al vacío, es una teoría de calibre. El campo de calibre no es más que el cuadvivector potencial A^μ , en términos del cual el tensor de campos puede ser expresado como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Precisamente, las componentes de dicho campo son las coordenadas generalizadas de la teoría. Escribamos entonces la densidad Lagrangiana en términos de éste,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\alpha A^\beta\partial^\gamma A^\delta, \quad (5.25)$$

empleando las antisimetrías del tensor de permeabilidad para reducir la expresión. Empleando ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange en forma covariante,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0, \quad (5.26)$$

podemos ver que las ecuaciones de movimiento de la teoría son

$$\partial_\alpha \mu^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \partial^\gamma A^\delta = 0, \quad (5.27)$$

que en términos del tensor de desplazamiento, se escriben como $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$. Vemos entonces que la densidad Lagrangiana propuesta reproduce las ecuaciones de movimiento de la teoría.

Calculemos ahora las cantidades conservadas. De la literatura, sabemos que el tensor de energía-momentum canónico viene dado por

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma. \quad (5.28)$$

Sustituyendo (5.22), obtenemos

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + H^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma. \quad (5.29)$$

Calculemos ahora la divergencia de este tensor $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}$. Tenemos que, empleando las ecuaciones de movimiento $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} (\partial^\nu H^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} + H^{\mu\sigma} \partial_\mu \partial^\nu A_\sigma \\ &= \frac{1}{2} H^{\alpha\beta} \partial^\nu (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde se anula la expresión por ser la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico en los mismos índices. Vemos entonces que la energía y el momentum se conservan en este sistema. Físicamente esto se debe a que las cargas y corrientes ligadas no dependen del tiempo (conservación de la energía) y son homogéneas (conservación del momentum). Es importante mencionar que este tensor de energía-momentum no es simétrico.

5.4. Más acerca de los tensores de susceptibilidad y permeabilidad

Como vimos en la sección anterior, el tensor de susceptibilidad tiene ciertas simetrías que lo obligan a tener como máximo un número de 21 componentes independientes. ¿Qué significado tienen éstas? Para responder esta pregunta, examinemos la expresión (5.19),

siguiente a [8]. Para $\mu = 0$ y $\nu = i$, tenemos

$$D^{0i} = \frac{1}{2}\chi^{0i}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \chi^{0i}_{0j}F^{0j} + \frac{1}{2}\chi^{0i}_{jk}F^{jk}, \quad (5.31)$$

que en términos de los vectores, queda como

$$P^i = \chi_{0i0j}E^j + \frac{1}{2}\chi_{0ijk}\varepsilon_{jkl}B^l. \quad (5.32)$$

De manera similar, para $\mu = i$ y $\nu = j$, tenemos

$$M^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\chi_{jk0l}E^l + \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\chi_{jklm}\varepsilon_{lmn}B^n. \quad (5.33)$$

Podemos entonces definir los siguientes 3-tensores (tensores en dimensión $d = 3$):

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^e &= \chi_{0i0j}, \\ \chi_{ij}^m &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ikl}\chi_{klmn}\varepsilon_{jmn}, \\ \chi_{ij}^{em} &= \frac{1}{2}\chi_{0ikl}\varepsilon_{klj}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Con estas relaciones podemos ver cómo se distribuyen las distintas componentes independientes del 4-tensor de susceptibilidad. Observemos primero que los tensores χ_{ij}^e y χ_{ij}^m son simétricos, de modo que tienen cada uno 6 componentes independientes. El pseudo-tensor χ_{ij}^{em} no tiene tal simetría y por lo tanto tiene 9 componentes independientes. Así, en total las componentes de estos tensores suman 21, en concordancia con el número de componentes independientes de $\chi_{\mu\nu\alpha\beta}$. Finalmente, las relaciones constitutivas toman la forma

$$\begin{aligned} P^i &= \chi_{ij}^e E^j + \chi_{ij}^{em} B^j, \\ M^i &= \chi_{ij}^m B^j + \chi_{ij}^{em} E^j. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Comparando estas ecuaciones con (5.18), podemos ver que éstas son más generales y admiten la presencia de desplazamientos eléctricos generados por campos magnéticos y magnetizaciones generadas por campos eléctricos. Esto surge naturalmente como una consecuencia de haber formulado la teoría en forma covariante. Las relaciones constitutivas originales son válidas para un observador que está en reposo con respecto al medio material. Sin embargo, en cualquier sistema que se mueva respecto a éste se observarán los efectos mencionados. Recordemos que un observador que se mueve respecto a una distribución de carga puede interpretarla como una densidad de corriente, de manera que es

natural pensar que los efectos eléctricos y magnéticos están, en general, mezclados según el sistema de referencia.

De forma análoga, podemos definir 3-tensores en función del 4-tensor de permeabilidad. Empleando (5.20), tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} D^i &= \epsilon_{ij} E^j - \mu_{ij}^{em} B^j, \\ H^i &= \zeta_{ij} B^j + \mu_{ij}^{em} E^j, \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde los 3-tensores están dados por

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= -\mu_{0i0j} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}^e, \\ \zeta_{ij} &= \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\mu_{klmn}\epsilon_{jmn} = \delta_{ij} - 4\pi\chi_{ij}^m, \\ \mu_{ij}^{em} &= \frac{1}{2}\mu_{0ikl}\epsilon_{klj} = -2\pi\chi_{0ikl}\epsilon_{klj}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

relacionándose con los 3-tensores de susceptibilidad por medio de la definición (5.21).

5.5. Medios Isotrópicos

Cuando consideramos medios isotrópicos, la teoría toma una forma relativamente simple, de la cual es más fácil extraer resultados. En un medio de este tipo se cumplen las relaciones

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (5.39)$$

siempre y cuando estemos trabajando en el marco de referencia del material. En este caso, los 3-tensores de permitividad y permeabilidad inversa se reducen a

$$\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}, \quad (5.40)$$

$$\zeta_{ij} = \zeta\delta_{ij} = \mu^{-1}\delta_{ij}. \quad (5.41)$$

Es posible además reescribir el 4-tensor de permeabilidad de una forma más simple

$$\mu_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mu(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}), \quad (5.42)$$

donde hemos definido el tensor $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Con éste, podemos fácilmente encontrar relaciones entre las componentes del tensor $\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}$ con las constantes de permitividad y permeabilidad

$$\mu_{0i0j} = \mu(h_{00}h_{ij} - h_{0j}h_{i0}) = -\epsilon\delta_{ij}, \quad (5.44)$$

$$\mu_{ijkl} = \mu(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) = \frac{1}{\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (5.45)$$

Estas relaciones sólo son válidas en el sistema de referencia del medio, ya que cualquier observador que se mueva respecto a este lo interpretará como un medio anisotrópico. Para ver esto, consideremos un sistema de referencia que se mueva con una velocidad $\boldsymbol{\beta}$ respecto al medio. En éste, se cumplen las relaciones

$$\mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}), \quad (5.46)$$

$$\mathbf{H} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}). \quad (5.47)$$

Si escribimos estas ecuaciones en notación de índices y despejamos \mathbf{H} de (5.46) para sustituirlo en (5.47), obtenemos

$$(1 - \beta^2)D_i + \beta_i\beta_j D_j = [(\epsilon - \beta^2/\mu)\delta_{ij} + \beta_i\beta_j/\mu]E_j + (\epsilon - 1/\mu)\epsilon_{ijk}\beta_j B_k. \quad (5.48)$$

Ahora, como las componentes paralelas a la velocidad $\boldsymbol{\beta}$ no cambian bajo la transformación, tenemos que

$$\beta_j D_j = \epsilon\beta_j E_j. \quad (5.49)$$

Sustituyendo esto y reescribiendo $(1 - \beta^2) = \gamma^{-2}$, tenemos finalmente

$$D_i = \gamma^2[(\epsilon - \beta^2/\mu)\delta_{ij} - (\epsilon - 1/\mu)\beta_i\beta_j]E_j + \gamma^2(\epsilon - 1/\mu)\epsilon_{ijk}\beta_j B_k. \quad (5.50)$$

Análogamente se puede obtener para \mathbf{H} la relación

$$H_i = \gamma^2(\epsilon - 1/\mu)\epsilon_{ijk}\beta_j E_k + \gamma^2[(1/\mu - \epsilon\beta^2)\delta_{ij} + (\epsilon - 1/\mu)\beta_i\beta_j]B_j. \quad (5.51)$$

Así, vemos que los tensores (5.37) toman la forma

$$\epsilon_{ij} = \gamma^2[(\epsilon - \beta^2/\mu)\delta_{ij} - (\epsilon - 1/\mu)\beta_i\beta_j], \quad (5.52)$$

$$\zeta_{ij} = \gamma^2[(1/\mu - \epsilon\beta^2)\delta_{ij} + (\epsilon - 1/\mu)\beta_i\beta_j], \quad (5.53)$$

y

$$\mu_{ij}^{em} = \gamma^2(\epsilon - 1/\mu)\epsilon_{ikj}\beta_k. \quad (5.54)$$

Así podemos ver que un observador en movimiento con respecto al material interpretará al material como uno anisótropo.

Con esto completamos el desarrollo clásico del campo vectorial modificado en la formulación covariante, necesario para proceder con la cuantización covariante del mismo.

Capítulo 6

Cuantización del Campo Vectorial Modificado

En este capítulo aplicamos el procedimiento descrito en el capítulo 3 a la teoría de Maxwell macroscópica, empleando distintos calibres. Para ello, estudiamos previamente una teoría de campo escalar modificada que comparte ciertas características con ésta, con la cual se pueden entender más fácilmente ciertos problemas que surgen en ambas. Se realiza además el análisis canónico según el método de Dirac descrito en el capítulo 4.

6.1. Una Teoría de Klein-Gordon Modificada

Como vimos anteriormente, las densidades Lagrangianas para el electromagnetismo en el vacío y en la materia son

$$\text{Vacío} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (6.1)$$

$$\text{Materia} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \quad (6.2)$$

La diferencia entre estas Lagrangianas es que en la correspondiente a la materia, uno de los campos está sometido a una transformación, lo que representa una generalización de la teoría para el vacío. En la teoría del campo escalar real, es posible también realizar esta generalización. Podemos plantear ésta e intentar extraer información que nos pueda ayudar a interpretar este tipo de generalizaciones, y que pueda ser aplicada a la teoría del electromagnetismo en la materia. Por simplicidad, consideraremos el campo escalar no masivo con una sólo dimensión espacial, i.e, en $1 + 1$.

Para hacer el estudio lo más similar posible al del campo electromagnético, consideremos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m_{\mu\nu}f^\mu f^\nu, \quad (6.3)$$

donde $f^\mu = \partial^\mu\phi$, siendo ϕ el campo escalar y $m_{\mu\nu}$ es un tensor en principio arbitrario. Podemos llamar $m_{\mu\nu}f^\nu = h_\mu$, quedando así la densidad escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}h_\mu f^\mu. \quad (6.4)$$

La ecuación de movimiento de la teoría es

$$\partial_\alpha h^\alpha = 0. \quad (6.5)$$

El momentum conjugado es

$$\pi = h_0 = m_{0\mu}\partial^\mu\phi. \quad (6.6)$$

Ahora bien, para construir la densidad Hamiltoniana, debemos despejar $\partial_0\phi$ en función de π . Desarrollando (6.6), tenemos que

$$\pi = -m_{00}\partial_0\phi + m_{01}\partial_1\phi. \quad (6.7)$$

Es necesario entonces que m_{00} sea distinto de cero. De otro modo, tendríamos un vínculo en la teoría y ésta sería singular. Para ver esto, consideremos la matriz Hessiana

$$H_{ab} = \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^a\partial\dot{\phi}^b}, \quad (6.8)$$

que en este caso es simplemente un escalar

$$H = m_{00}. \quad (6.9)$$

Entonces, vemos que $m_{00} = 0$ implica que la teoría es singular. Cabe ahora preguntarse si esto tiene algún significado físico. Para ello, veamos si al hacer una transformación de Lorentz arbitraria, se mantiene la condición de singularidad. Supongamos que $m_{00} = 0$.

Apliquemos ahora un boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

a $m_{\mu\nu}$, y llamemos a la nueva matriz $\bar{m}_{\mu\nu}$. ¿Cuáles son las condiciones para que $\bar{m}_{00} = 0$? Tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{m}_{00} &= \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu m_{\mu\nu} \\ &= \gamma^2 m_{00} - 2\gamma^2 \beta m_{01} + \gamma^2 \beta^2 m_{11}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Si fijamos entonces $m_{00} = \bar{m}_{00} = 0$, obtenemos

$$2\gamma^2 \beta m_{01} - \gamma^2 \beta^2 m_{11} = 0. \quad (6.12)$$

Suponiendo que β es distinto de 1 y 0, tenemos la condición

$$\beta = \frac{2m_{01}}{m_{11}}. \quad (6.13)$$

Esto quiere decir que cualquier transformación de Lorentz que no cumpla esta condición y esté en el rango definido para β , eliminará el vínculo primario. Esto sugiere que dicho vínculo no tiene significado físico ya que si lo tuviera, esperaríamos que no dependiera del marco de referencia. Entonces las matrices con $m_{00} = 0$ no definen una acción válida. La siguiente pregunta sería: ¿Qué familia de matrices $m_{\mu\nu}$ tienen componente m_{00} distinta de cero y preservan esta propiedad frente a todas las transformaciones de Lorentz? Supongamos que en la ecuación (6.6), $m_{00} \neq 0$ pero $\bar{m}_{00} = 0$. Las transformaciones con

$$\beta = \frac{m_{01}}{m_{11}} \pm \sqrt{\frac{m_{01}^2}{m_{11}^2} - \frac{m_{00}}{m_{11}}} \quad (6.14)$$

generarán una singularidad en la matriz. Es necesario entonces que los elementos de la matriz sean tales que en esta ecuación β sea mayor que 1 o tenga parte imaginaria. Esto sugiere que las matrices que definen acciones físicamente válidas no vuelven a éstas singulares bajo ninguna transformación de Lorentz. Esto es, todos los observadores ven un sistema regular, como es requerido. Recordemos que si $\beta = 1$, no queda determinado el problema ya que ese caso no está contemplado en esta ecuación. Sin embargo, no es difícil comprobar el buen comportamiento una teoría bajo un boost con tal condición.

Como veremos más adelante, este tipo de situaciones se presenta al hacer el análisis canónico del electromagnetismo en la materia. En este trabajo ignoraremos las matrices que tengan sectores no invertibles y por ello generen los vínculos ya estudiados.

Calculemos ahora la densidad Hamiltoniana para esta teoría. Si desarrollamos la densidad Lagrangiana (6.3), tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m_{00}\partial_0\phi\partial_0\phi + m_{01}\partial_0\phi\partial_1\phi - \frac{1}{2}m_{11}\partial_1\phi\partial_1\phi. \quad (6.15)$$

La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m^0{}_1\partial^1\phi + \pi)(m^0{}_0)^{-1}(m^0{}_1\partial^1\phi + \pi) + \frac{1}{2}m^1{}_1\partial^1\phi\partial_1\phi. \quad (6.16)$$

En general, se puede demostrar que para dimensión $d > 1$,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m^0{}_i\partial^i\phi + \pi)(m^0{}_0)^{-1}(m^0{}_j\partial^j\phi + \pi) + \frac{1}{2}m^i{}_j\partial^j\phi\partial_i\phi. \quad (6.17)$$

Ahora bien, en el caso del electromagnetismo en la materia, sabemos cuál es el significado físico del tensor $\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Representa las propiedades electromagnéticas de un medio. En el caso del campo escalar no masivo, ¿qué podemos decir de $m_{\mu\nu}$? Consideremos primero el caso en el cual este tensor es diagonal. Se puede ver que la forma más general de éste, en cuanto a las consecuencias físicas que tiene sobre la acción, es (volviendo al caso $1+1$)

$$(m_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -v^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Es decir, tenemos ahora la acción para la ecuación de ondas con velocidad de fase v . En el caso límite $v = 1$, tenemos que $m_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y recuperamos la acción para un campo escalar estándar. Podemos decir que en la velocidad de fase están implícitas las propiedades del medio que la determinan. Por ejemplo, podríamos modelar la ecuación para la cuerda empleando la tensión T de ésta y su densidad de masa μ . Cualquier modificación que se haga sobre el término m_{11} resultará en una modificación de la velocidad de fase, efectivamente, de modo que no nos interesa. Ésto puede ser importante sin embargo al momento de considerar la teoría en $d > 1$, para la cual el medio no necesariamente es isotrópico, lo que se reflejará precisamente en los elementos del sector espacial ($\mu, \nu > 0$) de la matriz.

¿Qué ocurre si la matriz no es diagonal? En este caso, tendremos términos de derivadas

espaciales y temporales cruzadas. En tal caso, por ser simétrica, la matriz siempre podrá ser diagonalizada empleando una transformación ortogonal adecuada. Dicha transformación corresponderá a un cambio de marco de referencia espacio-temporal. Por ejemplo, si tomamos

$$(m_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

ésta no es más que la métrica del espacio de Minkowski escrita un marco de referencia conocido como el marco del cono de luz [9]. En tal caso que la matriz no pueda ser transformada o reducida a $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, diremos que la formulación de la teoría es inválida físicamente, ya que estaría describiendo un espacio-tiempo con una estructura geométrica distinta (no Lorentziana). Esto sugiere de nuevo que la escogencia de la matriz no es del todo arbitraria, de modo que no hay razón para que lo sea en el caso del electromagnetismo en la materia.

En cuanto a la cuantización de la teoría, podemos ver que ésta describe un campo escalar no masivo en $1+1$, con velocidad de fase $v \leq c$. Basta entonces con adoptar todos los resultados de la teoría de Klein-Gordon en el caso $m \rightarrow 0$ y realizar el cambio $c \rightarrow v$ en la relación de dispersión. Las partículas de la teoría podríamos interpretarlas como fonones, si pensamos en sistemas mecánicos.

6.2. Análisis Canónico del Campo Vectorial Modificado

Apliquemos el método de Dirac para estudiar los vínculos de la teoría de Maxwell macroscópica según la densidad Lagrangiana (5.22). Primero calculamos los momenta

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -H^{0\mu} = -D^\mu. \quad (6.20)$$

Separemos éstos de la forma

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0, \\ \pi^i &= -D^i. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Tenemos entonces un vínculo primario $\phi^1 = \pi^0 \approx 0$. Debemos ahora construir la den-

sidad Hamiltoniana, para lo cual debemos hacer el despeje de velocidades. Consideremos

$$\pi^i = H_{0i} = \mu_{0i0j} F^{0j} + \frac{1}{2} \mu_{0ij k} F^{jk}. \quad (6.22)$$

Recordemos que $\mu_{0i0j} = -\epsilon_{ij}$. Asumiremos que este tensor es invertible, de acuerdo a la discusión en la sección anterior. Llamemos a su inversa $(\epsilon^{-1})_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}$. Entonces

$$F^{0i} = -\bar{\epsilon}_{ij} \pi^j + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{ij} \mu_{0jkl} F^{kl}. \quad (6.23)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} \\ &= \pi^i F_{0i} + \pi^i \partial_i A_0 - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Desarrollando ahora la densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} H^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} H^{ij} F_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \pi^i F_{0i} - \frac{1}{8} \mu_{ij\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \pi^i F_{0i} - \frac{1}{4} \mu_{ij0k\alpha\beta} F^{0k} F_{ij} - \frac{1}{8} \mu_{ijkl} F_{kl} F_{ij}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi^i F_{0i} + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} \mu_{ij0k\alpha\beta} F^{0k} F_{ij} + \frac{1}{8} \mu_{ijkl} F_{kl} F_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\pi^k - \frac{1}{2} \mu_{ij0k} F_{ij}) F_{0k} + \frac{1}{8} \mu_{ijkl} F_{kl} F_{ij} - A_0 \partial_i \pi_i. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sustituyendo ahora (6.23) en esta expresión, obtenemos finalmente

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\pi^i + \frac{1}{2} \mu^{0i}_{jk} F_{jk}) \bar{\epsilon}_{il} (\pi^l + \frac{1}{2} \mu^{0l}_{mn} F_{mn}) + \frac{1}{8} \mu_{ijkl} F_{kl} F_{ij} - A_0 \partial_i \pi_i. \quad (6.27)$$

El Hamiltoniano primario estará entonces dado por

$$H^* = \int d^3x (\mathcal{H} + \lambda \pi^0). \quad (6.28)$$

Con éste, preservamos el vínculo ϕ^1 en el tiempo

$$\dot{\phi}^1 = \{\pi^0, H^*\} = -\partial_i \pi_i \approx 0. \quad (6.29)$$

Obtenemos así el vínculo secundario $\phi^2 = \partial_i \pi_i \approx 0$, que no es más que la ley de Gauss macroscópica. Éstos son todos los vínculos de la teoría, y como podemos ver, son los mismos que aquellos para la teoría de Maxwell microscópica. Podemos decir entonces que las subvariedades físicas de ambas teorías tienen la misma estructura en el espacio de fases. Si uno quisiera fijar un calibre, como por ejemplo el calibre de radiación, los resultados que se obtendrían serían exactamente los mismos que para la teoría microscópica, en términos de las variables canónicas.

6.3. Cuantización Covariante del Campo Vectorial Modificado

Para la cuantización de esta teoría, seguiremos el procedimiento desarrollado en el capítulo 3. En particular, agregaremos un término fijador de calibre a la densidad Lagrangiana (5.22) para obtener una en la cual podamos despejar todas las velocidades. Existen varios calibres que podemos considerar, cada uno con sus ventajas a la hora de realizar los cálculos. Consideraremos primero el calibre de Lorenz, de modo que emplearemos el término fijador de calibre $-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$. La densidad Lagrangiana toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{8}\mu_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} - \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2\pi\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\alpha A^\beta \partial^\gamma A^\delta - \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + 2\pi\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\alpha A^\beta \partial^\gamma A^\delta. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Las ecuaciones de movimiento para esta Lagrangiana son

$$\square A_\nu - 4\pi\chi_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\mu \partial^\alpha A^\beta = 0, \quad (6.31)$$

con momenta

$$\pi^\mu = \dot{A}^\mu + D^{0\mu}. \quad (6.32)$$

Queremos saber si las ecuaciones de movimiento admiten soluciones de onda plana,

al menos en el caso isotrópico. Para ésto, consideremos por separado las ecuaciones con $\nu = 0$ y $\nu = i$. En el primer caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\square A_0 - 4\pi\chi_{\mu 0\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\alpha A^\beta &= 0 \\ \square A_0 - 4\pi\chi_{i0\alpha\beta}\partial^i\partial^\alpha A^\beta &= 0 \\ \square A_0 - 4\pi(\chi_{i00j}\partial^i\partial^0 A^j + \chi_{i0j0}\partial^i\partial^j A^0 + \chi_{i0jk}\partial^i\partial^j A^k) &= 0.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Si empleamos el marco de referencia del medio material, tenemos que $\chi_{i0jk} = 0$. Además, $\chi_{0i0j} = \chi_{ij}^e$. Entonces obtenemos

$$\square A_0 - 4\pi\chi_{ij}^e(\partial_i\partial_0 A_j - \partial_i\partial_j A_0) = 0.\tag{6.34}$$

Si el medio es isotrópico, tenemos que $\chi_{ij}^e = \chi^e\delta_{ij}$. Así, la ecuación queda como

$$\square A_0 - 4\pi\chi^e(\partial_0\partial_i A_i - \partial_i\partial_i A_0) = 0.$$

Empleamos el calibre $\partial_i A_i = \partial_0 A_0$ para obtener

$$\square A_0 + 4\pi\chi^e\square A_0 = \epsilon\square A_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \square A_0 = 0.\tag{6.35}$$

Entonces la componente A_0 satisface la ecuación de ondas. Veamos ahora el caso $\nu = i$

$$\begin{aligned}\square A_i - 4\pi\chi_{\mu i\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\alpha A^\beta &= 0 \\ \square A_i - 4\pi(\chi_{0i0j}\partial_0\partial_0 A_j + \chi_{0ij0}\partial_0\partial_j A_0 + \chi_{jikl}\partial_j\partial_k A_l) &= 0.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Si el medio es isotrópico, tenemos $\chi_{0i0j} = \chi^e\delta_{ij}$ y $\chi_{ijkl} = \chi^m(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$. Sustituyendo estas relaciones y empleando nuevamente el calibre de Lorenz, obtenemos

$$\begin{aligned}\square A_i - 4\pi[\chi^e\partial_0\partial_0 A_i - \chi^e\partial_i\partial_0 A_0 + \chi^m(\partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j)] &= 0 \\ \epsilon\square A_i - 4\pi\chi^m(\partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j) &= 0.\end{aligned}\tag{6.37}$$

El término $4\pi\chi^m(\partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j)$ no es más que la corriente ligada del material. Sería necesario que este término se anulara para que las componentes A^i se comporten como ondas lumínicas. Esto implicaría que $\mu = 1$, con ϵ una constante arbitraria. En este caso, Todos los desarrollos posteriores de la teoría son exactamente iguales al caso microscópico. Por otra parte, uno pudiera preguntarse si esta ecuación admite una solución de onda con una velocidad de fase menor en el caso $\mu \neq 1$. Como A^0 se comporta como una onda

luminica, tenemos que, con el calibre de Lorenz

$$\square A^0 = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_0 \square A^0 = 0 \quad \rightarrow \quad \square \partial_0 A^0 = 0 \quad \rightarrow \quad \square \partial_i A_i = 0. \quad (6.38)$$

Entonces la divergencia de \vec{A} también tiene forma de onda luminica. Por esta razón, sería una contradicción proponer que las componentes de este campo vectorial tuvieran otras velocidades de fase. En este sentido, la ecuación para las componentes espaciales de A^μ , bajo este calibre, no admite soluciones de tipo onda plana. Esto impide hacer la cuantización de la teoría en la representación de osciladores según el esquema del capítulo 3. Al no ser posible realizar este procedimiento en el caso isotrópico, es razonable esperar que en los casos más generales ocurra lo mismo. Estos casos no fueron trabajados explícitamente porque se suelen hacer intratables los cálculos asociados.

Consideremos la fijación de un calibre que lleve a que las ecuaciones de movimiento de la teoría se reduzcan a ecuaciones de onda. Las ecuaciones de movimiento generales se pueden escribir como

$$\square A_\nu + \partial_\nu \partial_\mu A^\mu - 4\pi \chi_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\alpha A^\beta = 0. \quad (6.39)$$

Podemos reescribirla de la forma

$$\square A^\nu + \partial^\alpha (\delta_\alpha^\nu \partial_\beta - 4\pi \chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \partial_\mu) A^\beta = 0. \quad (6.40)$$

Proponemos entonces la fijación del calibre

$$(\delta_\alpha^\nu \partial_\beta - 4\pi \chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \partial_\mu) A^\beta = 0. \quad (6.41)$$

De esta forma, la teoría se reduce a una para cuatro campos escalares no interactuantes, de la misma forma que ocurre en la teoría microscópica con el calibre de Lorenz. Entonces podemos asumir que todos los resultados son equivalentes salvo por la fijación de calibre a nivel cuántico. Consideremos entonces, de forma análoga al método de Gupta-Bleuler, la condición

$$(\delta_\alpha^\nu \partial_\beta - 4\pi \chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \partial_\mu) \hat{A}^{\beta+} |\Psi\rangle = 0, \quad (6.42)$$

donde

$$\hat{A}^{\beta+} = \sum_{r\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \epsilon_r^\beta(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) e^{ik_\nu x^\nu}. \quad (6.43)$$

Esta condición implica que

$$(\delta_\alpha^\nu k_\beta - 4\pi\chi^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} k_\mu) \epsilon_r^\beta \hat{a}_r |\Psi\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}. \quad (6.44)$$

Consideremos el caso $\nu = i$, $\alpha = 0$ en el sistema de referencia del material

$$\chi^{0i}{}_{0j} k_0 \epsilon_r^j \hat{a}_r |\Psi\rangle = 0, \quad (6.45)$$

que podemos reescribir como

$$\chi_{ij}^e \epsilon_r^j \hat{a}_r |\Psi\rangle = 0. \quad (6.46)$$

Aplicando el tensor inverso $\bar{\chi}_{ij}^e$, y empleando los vectores de polarización (3.18), obtenemos

$$(\epsilon_1^i \hat{a}_1 + \epsilon_2^i \hat{a}_2 + \epsilon_3^i \hat{a}_3) |\Psi\rangle = 0. \quad (6.47)$$

Aplicando ahora a esta ecuación su conjugado Hermítico, tenemos que

$$(\epsilon_1^i)^2 \langle \Psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | \Psi \rangle + (\epsilon_2^i)^2 \langle \Psi | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | \Psi \rangle + (\epsilon_3^i)^2 \langle \Psi | \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 | \Psi \rangle = 0. \quad (6.48)$$

Identificamos los operadores de número de partículas $N_i = a_i^\dagger a_i$ con autovalores n_i (sin suma implícita), obteniendo así, finalmente

$$(\epsilon_1^i)^2 n_1 + (\epsilon_2^i)^2 n_2 + (\epsilon_3^i)^2 n_3 = 0. \quad (6.49)$$

Esta ecuación implica que $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Es decir, el sistema cuántico es trivial ya que no se admite la presencia de partículas.

6.4. Formulación Alternativa para Medios Isotrópicos

Otro método para estudiar el problema consiste en partir de la suposición de que el medio es isotrópico y uno se encuentra en el sistema de referencia del mismo. En tal caso, podemos emplear la relación (5.42) para escribir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8}\mu(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma})F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}. \quad (6.50)$$

Las ecuaciones de movimiento quedan como

$$(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma})\partial^\alpha\partial^\gamma A^\delta = 0. \quad (6.51)$$

Fijamos ahora el calibre

$$h_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu = 0. \quad (6.52)$$

Si ahora desarrollamos la ecuación (6.51) bajo este calibre, obtenemos

$$(\epsilon\mu\partial_t^2 - \nabla^2)A^\mu = 0. \quad (6.53)$$

Podemos ver entonces que bajo este calibre el 4-vector A^μ satisface una ecuación de ondas con velocidad de fase $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = 1/n$, donde n es el índice de refracción del material. Este calibre parece ser entonces adecuado para trabajar con ondas planas, pero queda ver si es lo suficientemente débil como para no trivializar el sistema. Para ello, consideremos la condición a nivel cuántico, como en el caso anterior

$$h_{\mu\nu}k^\mu\varepsilon_r^\nu\hat{a}_r|\Psi\rangle = 0. \quad (6.54)$$

Desarrollando las sumas, obtenemos

$$(\epsilon\omega\varepsilon_r^0\hat{a}_r - \frac{1}{\mu}k^i\varepsilon_r^i\hat{a}_r)|\Psi\rangle = 0. \quad (6.55)$$

Empleando el sistema de referencia preferencial para los vectores de polarización, obtenemos

$$(\epsilon\mu\frac{\omega}{k}\hat{a}_0 - \hat{a}_3)|\Psi\rangle = 0. \quad (6.56)$$

Empleando la relación de dispersión $\omega = vk$ y $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, tenemos finalmente

$$(\hat{a}_0 - v\hat{a}_3)|\Psi\rangle = 0. \quad (6.57)$$

Esto implica que existe una relación entre las cantidades de fotones longitudinales y fotones transversales

$$n_0 - vn_3 = 0. \quad (6.58)$$

Esta ecuación tiene el inconveniente de relacionar los números de partículas escalares y longitudinales según un número no entero. Podríamos exigir que el número de partículas sea lo suficientemente grande como para que esta relación siempre se cumpla aproximadamente, ya que no son partículas observables.

Todos los resultados para esta teoría son equivalentes a los de la teoría de Maxwell libre (capítulo 3), con la diferencia de que en la relación de dispersión se tiene v en vez de c . Esto afecta por ejemplo los polos que se emplean para obtener el propagador como una integral de contorno (2.49). Podemos pensar en las partículas de esta teoría como pseudo-fotones que viajan a una velocidad menor que la de la luz, tal como ocurre con la velocidad promedio de los fotones en la materia.

Vemos entonces que con esta formulación se puede llevar a cabo el proceso de cuantización covariante. Una diferencia importante entre esta formulación y la original (5.22) es que en esta última el tensor de permeabilidad está antisimetrizado implícitamente, lo que significa que hay menos información que en la recién tratada. Una posibilidad es que la teoría deba generalizarse de forma adecuada para poder luego fijar un calibre que permita cuantizarla según este esquema.

Conclusiones

- Parece ser posible codificar la información de medios macroscópicos en teorías de campos empleando tensores adecuados, aunque éstos deben cumplir con ciertas propiedades para no generar inconsistencias en la teoría. Esto al menos es cierto para la teoría del campo escalar y la del campo vectorial.
 - La formulación empleada para el electromagnetismo en la materia parece ser inadecuada obtener un modelo cuántico vía cuantización covariante. Esto parece estar relacionado con la forma en la que tiene que ser fijado el calibre para poder obtener una teoría consistente y no trivial.
 - Un material isotrópico puede ser modelado empleando tensores que efectivamente son modificaciones del tensor métrico, siempre y cuando se tome el punto de referencia preferencial del material. Con esto se obtiene un modelo cuántico que parece ser consistente, salvo quizás por la relación entre partículas escalares y longitudinales, la cual involucra en general un número no entero.
 - Para la continuación de este trabajo se puede estudiar esta teoría acoplada a algún campo de materia escalar o vectorial. En este sentido se podría realizar una conexión más cercana con los fenómenos de óptica cuántica, por ejemplo. Pueden también considerarse otro tipo de términos en la densidad Lagrangiana, aunque esto dependerá también de que se pueda mantener la formulación en forma explícitamente covariante.
-

Bibliografía

- [1] T G Philbin. Canonical quantization of macroscopic electromagnetism. *New Journal of Physics*, 12(12):123008, 2010.
 - [2] F. Miglietta. Effective QED in dielectric media. *Nuovo Cimento D Serie*, 20:43, January 1998.
 - [3] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons, 2010.
 - [4] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*:. Springer, 1996.
 - [5] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, monograph series. Dover Publications, 2001.
 - [6] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
 - [7] W.K.H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism: Second Edition*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.
 - [8] Rodrigo Medina and J. Stephany. *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*. 2017. arXiv:1703.02109.
 - [9] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.
-