

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**TODAS LAS SOLUCIONES ESTÁTICAS, ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICAS, ANISÓTROPAS Y POLÍTOPAS DE LAS
ECUACIONES DE EINSTEIN**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Christian Medina
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Dr. Ernesto Fuenmayor
Lic. Pablo León

Mayo-2017
Caracas-Venezuela

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



**TODAS LAS SOLUCIONES ESTÁTICAS, ESFÉRICAMENTE
SIMÉTRICAS, ANISÓTROPAS Y POLÍTROPAS DE LAS
ECUACIONES DE EINSTEIN**

Trabajo Especial de Grado presentado por
Christian Medina
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Dr. Ernesto Fuenmayor
Lic. Pablo León

Mayo-2017
Caracas-Venezuela



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA



VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por **Christian David Medina Garcia**, Cédula de Identidad V-21375324, bajo el título "**Todas las Soluciones Estáticas, Esféricamente Simétricas, Anisótropas y Politropas de las Ecuaciones de Einstein**", a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **Licenciado en Física**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 17 de mayo de 2017, a las 8:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.
2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 17 días del mes de mayo de 2017, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Ernesto Fuenmayor Di Prisco.

Firma del jurado evaluador

Prof Pío José Arias
V-7183922
UCV

Prof Nelson Enrique Bolívar
V-13568312
UCV

Prof Ernesto Fuenmayor
V-10336198
UCV

Página libre

Dedicado a todos mis seres amados, a los precursores de la ciencia y a los futuros investigadores que pavimentarán el camino del conocimiento, dando su vida por el avance de la sociedad.

Agradecimientos

Agradezco a mis tutores, mi familia y mis amigos por todo el apoyo.

RESUMEN

Desarrollamos un método que permite obtener soluciones internas a las ecuaciones de Einstein para sistemas estáticos, esféricamente simétricos, anisótropos y que cumplen con la ecuación polítropa de estado [5, 10, 11]. Para tal fin, se introdujo una ecuación de estado poítropa como información adicional requerida por el sistema y se aplicó el algoritmo extendido de Lake [13], propuesto por Luis Herrera [12]. Obtuvimos expresiones para las variables físicas que definen el sistema considerado dependientes de una función generatriz $Y(r)$.

El método propuesto nos permite reproducir los resultados del modelo de Cosenza [11, 14], ya que se obtienen las mismas expresiones para las variables físicas, por lo que nuestro modelo puede ser considerado como un modelo alternativo para resolver las ecuaciones de campo, dentro de la materia que cumplen con esa ecuación de estado mencionada.

Palabras clave: Relatividad general, polítropo, ecuaciones de Einstein.

ÍNDICE GENERAL

Lista de figuras	13
Lista de tablas	13
1. introducción	13
2. Ecuaciones de Campo	17
2.1. Ecuaciones de Campo para Fluidos Anisótropos	17
2.2. Esquema de Bondi	18
2.3. Condiciones de Acoplamiento	21
3. El Polítropo	25
3.1. Polítropo Newtoniano	26
3.1.1. Polítropo para Fluidos Perfectos	26
3.1.2. Construcción de Modelos	29
3.1.3. Polítropo Anisótropo	31
3.1.4. Modelado de Polítropo Anisótropo	33
3.2. Polítropo Relativista General	35
3.2.1. Caso I para Fluidos Isótropos	35
3.2.2. Caso II para Fluidos Isótropos	37
3.2.3. Caso I para Fluidos Anisótropos	39
3.2.4. Caso II para Fluidos Anisótropos	39
3.2.5. Modelado del Polítropo Anisótropo en el Caso I y II	40

4. Introducción del Polítropo Dentro del Algoritmo	43
4.1. El Algoritmo para Fluidos Anisótropos	44
4.2. Ejemplos de aplicación del Algoritmo	46
4.2.1. Fluido Anisótropo Confórmemente Plano	46
4.2.2. Solución de Bowers-Liang	46
4.2.3. Solución Anisótropa con Ecuación de Estado No Local	47
4.3. El Algoritmo Usando el Polítropo	48
4.3.1. Método I	48
4.3.2. Método II	50
4.4. Aplicación del Algoritmo a Casos Particulares y Modelos	51
4.4.1. Modelo de Bowers y Liang	51
4.4.2. Modelo de Cosenza	52
5. conclusión	57

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En 1638 surgió por primera vez el concepto de relatividad bajo la formulación dada por el famoso físico, matemático y astrónomo, Galileo Galilei, expuesta en sus obras "Diálogo sobre los principales sistemas del mundo" y "Diálogos acerca de Dos Nuevas Ciencias". Tales estudios versan sobre el movimiento descrito en distintos sistemas de referencia inerciales, la descripción del movimiento de una partícula aislada de toda interacción y el rozamiento. La Relatividad Galileana estableció las bases del principio de inercia y las equivalencias entre las medidas de las variables cinemáticas de un cuerpo para cualquier sistema de referencia inercial mediante las transformaciones de Galileo, la relatividad de las trayectorias y su teorema de adición de velocidades [3, 8]. La relatividad definida por Galileo perduró por muchos años hasta que surgió la idea de que en nuestro mundo existe una velocidad límite, imposible de superar, que es la velocidad de la luz [3, 8]. Luego de ser medida satisfactoriamente dicha velocidad y demostrarse que no hay información capaz de viajar a una velocidad mayor, se encontró que la Relatividad Galileana fallaba cerca de ese límite. Por lo tanto, surgió la necesidad de extender la teoría de la relatividad para velocidades cercanas a la de la luz.

Este campo fue extendido exitosamente por el físico teórico Albert Einstein en 1905 al formular en el artículo titulado "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimientos", la teoría de relatividad especial, la cual establece las equivalencias correctas entre sistemas de referencia inerciales que se mueven unos respecto a los otros con velocidades cercanas a la luz, conectándose por medio de las transformaciones de Lorentz [2, 3, 4, 8]. Sin embargo, esta teoría solo se cumple en sistemas inerciales, es decir, sistemas que no estén sometidos a aceleraciones. En 1915, Albert Einstein vuelve a extender la teoría al proponer

el principio de la relatividad general en su publicación titulada "Las ecuaciones de campo de gravitación", para incluir a los sistemas no inerciales. La teoría de la relatividad general ha sido exitosa ya que en el año 2015 cumplió 100 años de ser formulada y gran variedad de sus predicciones han sido satisfactoriamente comprobadas.

La teoría de la relatividad general de Einstein es una teoría geométrica de la gravitación. Establece una relación entre la energía contenida en el espacio y la curvatura del propio espacio-tiempo producida por la misma, representando la fusión entre los mecanismos de la gravitación y la geometría del universo [2, 3, 4, 8]. Es la teoría más general desarrollada hasta ahora, capaz de explicar los fenómenos relativistas gravitacionales observados en cualquier punto del espacio-tiempo y medidos por cualquier sistema general de referencia. Esta teoría es una generalización de la teoría de la relatividad especial de Einstein y hace uso de un principio pilar que es el Principio de equivalencia [2, 3, 4, 8]. Según la formulación de la relatividad general, la gravedad ya no es considerada como una fuerza de acción a distancia inmediata, en su lugar el campo gravitacional es tomado como la curvatura del espacio-tiempo.

La relatividad general [1, 2, 3, 4, 8, 9] está tomando un nuevo auge debido a la primera observación de las ondas gravitacionales, realizada el 14 de septiembre del 2015 por los científicos del observatorio de detección de ondas gravitacionales, las cuales fueron detectadas con interferómetros laser llamados LIGO, ubicados en Estados Unidos, uno en Hanford, Washington y el otro en Livingstone, Louisiana. Estas detecciones representaron una perturbación gravitatoria viajera del espacio-tiempo, propágandose en la velocidad de la luz.

Un mes después de que Einstein publicara su teoría de la relatividad general, el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein [2, 3, 4, 8]. La solución de vacío de Schwarzschild describe el campo gravitatorio generado por una estrella o una masa esférica en el vacío (fuera de ella). Mas adelante, se han hallado otras soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein con el fin de poder describir diferentes sistemas, mayormente en el área de la astrofísica, como por ejemplo diversos cuerpos compactos estelares, tales como enanas blancas y diferentes configuraciones estelares. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14].

Por otro lado, comenzaron a desarrollarse métodos para obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein dentro de distribuciones de materia. Sin embargo, se necesitaba proporcionar información adicional, debido a que en el planteamiento del problema se tenían más variables que ecuaciones para determinarlas. Una manera de enfrentar este problema fue introducir ecuaciones de estado plausibles que generen información adicional con lo que se logró resolver el sistema [5, 10, 11, 14]. La ecuación de estado es una expresión

matemática que genera una relación entre las diferentes funciones de estado, como por ejemplo una relación entre la presión y la densidad de masa o energía. Estas ecuaciones de estado [1, 5, 14] sirven para describir las propiedades de los fluidos, como lo es el interior de las estrellas [1, 2, 9, 14].

Una ecuación de estado que ha surgido desde hace algunos años ha sido la ecuación Polítropa de estado [5, 6, 7, 10, 11], cuya forma viene dada por

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (1.1)$$

donde P es la presión isótropa, ρ la densidad de masa bariónica, K es la constante polítropa, γ el exponente polítropo y n el índice polítropo. Esta ecuación ha sido bastante útil a lo largo de la historia para determinar soluciones interiores en distribuciones de materia esféricas y estáticas, gracias a su gran simplicidad y versatilidad. Con esta ecuación se han resuelto con mucha precisión gran cantidad de problemas astrofísicos en el contexto Newtoniano, y posteriormente, dentro del marco relativista general [5, 6, 7, 10, 11]. Debido a que la ecuación del polítropo puede ser usada para describir una gran cantidad de objetos compactos que se presentan en el campo de la astrofísica [5, 10, 11], ha sido utilizada para describir sistemas incluso si los cuerpos compactos son de alta densidad, caso en el cual los efectos relativistas se hacen evidentes [11].

En el estudio de la evolución estelar [5, 6, 7] suponer isotropía local en cuerpos compactos es totalmente válido y ha resultado satisfactorio debido a la gran cantidad de sistemas que se pueden describir bajo esta premisa. Sin embargo, existe una gran variedad de fenómenos físicos de interés que no son posibles de modelar bajo esta suposición. La anisotropía local en los objetos compactos se genera a través de diversas fuentes tales como: intensos campos magnéticos, superposición de materia isótropa, elevados índices de viscosidad, entre otros y éstos se expresan en forma de presiones tangenciales dentro del fluido. La aparición de la anisotropía nos lleva a la extensión de la teoría de polítropos, con el fin de poder describir cuerpos anisótropos tanto en el ámbito Newtoniano como en el relativista general [10, 11, 12, 14].

Recientemente ha surgido un método alternativo y práctico para resolver las ecuaciones de Einstein y obtener la expresión del espacio-tiempo interior a cuerpos compactos con anisotropía local. Se basa en un algoritmo planteado por Lake [13] y posteriormente extendido por Luis Herrera [12], que consiste en proponer dos funciones generatrices que otorguen la información adicional requerida por el sistema y de esta manera poder resolver las ecuaciones de campo dentro de la materia.

El objetivo principal de este trabajo es resolver las ecuaciones de Einstein para los sistemas esféricamente simétricos, estáticos y anisótropos que cumplan con la ecuación

polítropa de estado [5, 10, 11] y aplicando el algoritmo extendido de Lake [12, 13]. Luego, para comprobar su "efectividad", se aplicará el nuevo método a modelos conocidos [12], para intentar reproducir las mismas expresiones y relaciones entre las variables físicas incluidas en sus soluciones.

Al introducir la ecuación de estado polítropa en el algoritmo, ya no será necesario proveer dos funciones generadoras, ya que con una condición adicional se tendrá resuelto el sistema. Esto resulta ser beneficioso ya que se podría obtener toda la descripción interna del espacio-tiempo del cuerpo compacto, introduciendo la información adicional necesaria en la forma de la ecuación de estado polítropa y así concentrar todos los esfuerzos en el desarrollo de una sola función generadora, para poder hallar la solución a las ecuaciones de campo.

A continuación será presentado el marco teórico del trabajo realizado, el cual se estructurará de la siguiente manera. El primer capítulo se desarrolló parte de la teoría de la relatividad general, haciendo especial énfasis en las ecuaciones de campo de Einstein, las condiciones de acoplamiento entre regiones, la función masa y la ecuación de equilibrio hidrostático relativista para materia anisótropa e isotrópica [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14].

En el segundo capítulo se expuso la teoría de politropos, comenzando con el Newtoniano [5, 10, 14] y finalizando con el relativista general [11], (incluyendo el caso isotrópico y anisótropo).

Finalmente en el capítulo 3 se construyó el algoritmo de Lake extendido por Luis Herrera [12, 13] para obtener las soluciones interiores a las ecuaciones de campo de Einstein para cuerpos compactos anisotropos y terminamos exponiendo algunos ejemplos para ilustrar la aplicación del algoritmo [11, 12, 14]. Luego desarrollamos e ilustramos nuestro método haciendo uso de la ecuación de estado polítropa [11, 14] en el algoritmo extendido de Lake por Luis Herrera [12], con el fin de poder hallar todas las soluciones interiores en distribuciones de materia esféricamente simétricas, estáticas y anisotropas, asimismo se demostró la aplicación de nuestro método con algunos modelos específicos.

Este proyecto finaliza con una sección donde se exponen las conclusiones obtenidas al crear y aplicar nuestro método, junto con algunas recomendaciones para trabajos futuros y la bibliografía utilizada.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DE CAMPO

En este capítulo obtendremos las ecuaciones de campo para la región interior de un fluido anisótropo, esféricamente simétrico, que evoluciona en el tiempo y que disipa energía [1]. Se desarrollará el método ideado por Bondi [9, 1] para obtener la relación entre las variables físicas de interés, tales como densidad de energía ρ , presión tangencial $P_\perp$ y radial P_r y las ecuaciones de campo calculadas. Finalmente serán calculadas las condiciones necesarias y suficientes para que las regiones exterior e interior del espacio-tiempo puedan acoplarse en su superficie [1, 2].

2.1. Ecuaciones de Campo para Fluidos Anisótropos

Comenzaremos estudiando la evolución de una distribución de materia esféricamente simétrica, localmente anisótropa, que disipa energía a través de un flujo radial de calor y acotada por una superficie esférica finita de radio r_Σ [1]. Trabajaremos hasta el final del capítulo con unidades "geometrizadas", es decir $c = G = 1$ donde c es la velocidad de la luz y G es la constante de gravitación universal.

El interior de esta distribución está descrito por el elemento de línea tipo Schwarzschild [2, 3, 4, 8], el cual está dado por la siguiente expresión

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.1)$$

donde $\nu(t, r)$ y $\lambda(t, r)$ son variables que dependen de sus argumentos y las coordenadas siguen la siguiente numeración: $x^0 = t$; $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \phi$.

La métrica dada por la expresión (1.1) debe satisfacer las ecuaciones de Einstein [1, 2, 3, 4, 8]

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = -8\pi T^\nu_\mu, \quad (2.2)$$

donde R^ν_μ es el tensor de Ricci; R el escalar de curvatura y T^ν_μ el tensor energía-momento de la distribución de fluido. A partir del elemento de línea (1.1) y las ecuaciones de Einstein (1.2) podemos encontrar las siguientes expresiones para las ecuaciones de campo [1, 2, 3, 4, 8]

$$-8\pi T^0_0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (2.3)$$

$$-8\pi T^1_1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right), \quad (2.4)$$

$$-8\pi T^2_2 = -8\pi T^3_3 = -\frac{e^{-\nu}}{4} (2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (2.5)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (2.6)$$

donde la prima indica derivación con respecto a la coordenada espacial r y el punto indica derivación con respecto a la coordenada temporal t . Como nuestro sistema evoluciona en el tiempo y está disipando energía a través de un flujo de calor, debemos dotar con significado físico al tensor energía-momento. Para ello vamos a utilizar el siguiente procedimiento propuesto por Bondi [9, 1].

2.2. Esquema de Bondi

Como mencionamos anteriormente, el tensor energía-momento de nuestro sistema no puede ser dotado de significado físico, esto debido a que el fluido evoluciona en el tiempo y tiene un flujo radial de calor, por lo tanto las componentes del tensor energía-momento fuera de la diagonal no son necesariamente cero y las componentes en la diagonal no poseen el mismo significado físico que el de un fluido estático, esféricamente simétrico y anisótropo.

En este capítulo dotaremos de significado físico a nuestro tensor energía-momento aplicando el esquema de Bondi [9, 1], con el cual nos trasladaremos a un sistema en el cual conozcamos las componentes del tensor.

Vamos a proceder con el esquema propuesto por Bondi, empezando por introducir un sistema de coordenadas localmente Minkowskianas (τ, x, y, z) [1]

$$d\tau = e^{\frac{\nu}{2}} dt, \quad dx = e^{\frac{\lambda}{2}} dr, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\phi. \quad (2.7)$$

Para el nuevo sistema localmente Minkowskiano las variables ν y λ son consideradas constantes. Introduciendo las nuevas coordenadas (1.7) se obtiene que el elemento de línea (1.1) se escribe de la siguiente manera [1]

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.8)$$

Podemos encontrar que las componentes del tensor energía-momento en el nuevo sistema local Minkowskiano cumplen las siguientes relaciones

$$\bar{T}_0^0 = T_0^0, \quad \bar{T}_1^1 = T_1^1, \quad \bar{T}_2^2 = T_2^2, \quad \bar{T}_3^3 = T_3^3, \quad \bar{T}_{01} = e^{-(\nu+\lambda)/2} T_{01}, \quad (2.9)$$

donde la barra indica las componentes en el nuevo sistema. Este resultado se obtiene usando las nuevas coordenadas (1.7) y la siguiente transformación tensorial

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu, \quad \Lambda_\beta^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}. \quad (2.10)$$

Como el sistema local Minkowskiano es un fluido relativista en movimiento, aplicamos las transformaciones de Lorentz para pasar a un sistema comóvil con la materia en cada punto, donde la velocidad del fluido respecto al sistema local es ω . En este sistema el contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo, estático, esféricamente simétrico, con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial $P_\perp$ y que disipa energía a través de un flujo radial de calor $\hat{q}$.

Para un observador comóvil con la materia, las componentes covariantes del tensor energía-momento $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ son

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & -\hat{q} & 0 & 0 \\ -\hat{q} & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Deseamos tener una expresión para las componentes del tensor energía-momento en el sistema general que se tenía originalmente. Para ello, vamos a devolver los cambios de sistema realizados, pasando del sistema comóvil con la materia al sistema localmente Minkowskiano y luego pasando del Minkowskiano al general.

Entonces regresamos al sistema local Minkowskiano para obtener las componentes de $\bar{T}^{\alpha\beta}$ a través de la siguiente transformación tensorial

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma\delta}, \quad \Lambda_\beta^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta}, \quad (2.12)$$

donde $\tilde{x}^\beta$ ($\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$), esta dada por las transformaciones de Lorentz, es decir

$$\tau = \frac{\tilde{t} + \omega \tilde{x}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \quad x = \frac{\tilde{x} + \omega \tilde{t}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}. \quad (2.13)$$

Usando (1.12) y (1.13) hallamos las matrices de Lorentz Λ_β^α , que están dadas por

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

A partir de (1.12) y (1.14) obtenemos las relaciones entre las componentes del tensor energía-momento del sistema comóvil con la materia y el sistema local Minkowskiano. Ahora, para obtener las relaciones que deseamos con el sistema original, usamos (1.9) y se obtienen los siguientes resultados

$$T_0^0 = \bar{T}_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} + \frac{2Q\omega e^{\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \quad (2.15)$$

$$T_1^1 = \bar{T}_1^1 = -\frac{P_r + \rho\omega^2}{1 - \omega^2} - \frac{2Q\omega e^{\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}, \quad (2.16)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \bar{T}_2^2 = \bar{T}_3^3 = -P_\perp, \quad (2.17)$$

$$T_{01} = e^{(\nu+\lambda)/2} \bar{T}_{01} = -\frac{(\rho + P_r) \omega e^{(\nu+\lambda)/2}}{1 - \omega^2} - \frac{Q e^{\nu/2} e^\lambda}{(1 - \omega^2)^{1/2}} (1 + \omega^2), \quad (2.18)$$

donde:

$$Q = \frac{\hat{q} e^{-\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (2.19)$$

Ya hemos expresado las componentes del tensor energía-momento en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) a través de las variables físicas medidas por un observador comóvil con la materia y localmente Minkowskiano. Ahora aplicaremos las siguientes condiciones

$$\ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = Q = 0. \quad (2.20)$$

Estas condiciones representan un fluido estático, esféricamente simétrico, anisótropo y que no disipa calor, el cual sera de utilidad ya que va a ser considerado en los capítulos posteriores. Sustituyendo (1.20) en las componentes del tensor energía-momento tenemos

$$T_0^0 = \rho, \quad (2.21)$$

$$T_1^1 = -P_r, \quad (2.22)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_\perp. \quad (2.23)$$

Derivamos la ecuación (1.4) respecto a r , para luego combinarla con (1.3), (1.5) y (1.22) y de esta manera obtener la siguiente relación

$$P_r' = -\frac{\nu'}{2} (\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r}, \quad (2.24)$$

esta es la ecuación de equilibrio hidrostático Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para un fluido anisótropo [1, 2, 11]. Para obtener la ecuación TOV en el caso isótropo hacemos $P_r = P_\perp = P$ y obtenemos

$$P' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P) \quad (2.25)$$

y a partir de la ecuación (1.3) y (1.21) se puede obtener

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.26)$$

donde $m(r)$ es la función masa, la cual se define de la manera usual [2, 14]

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr. \quad (2.27)$$

Usando las ecuaciones (1.4), (1.22) y (1.26) podemos escribir

$$\nu' = 2 \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)}, \quad (2.28)$$

y usando (1.28) podemos reescribir (1.24) y (1.25) así,

$$P'_r = -\frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)}(\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} \quad (2.29)$$

y

$$P' = -\frac{m + 4\pi P r^3}{r(r - 2m)}(\rho + P), \quad (2.30)$$

que son las ecuaciones de equilibrio hidrostático para los casos anisótropo e isótropo respectivamente.

2.3. Condiciones de Acoplamiento

En esta sección desarrollaremos las condiciones de acoplamiento entre la solución exterior a nuestro sistema, que es la de Schwarzschild y la solución interior, con el fin de evitar comportamientos singulares en la superficie $r = r_\Sigma$ de acoplamiento que divide ambas regiones del espacio-tiempo y así asegurar la continuidad en las soluciones. Para poder acoplar ambas regiones del espacio-tiempo se deben satisfacer una serie de condiciones, llamadas condiciones de acoplamiento [1, 2].

Las condiciones de acoplamiento fueron definidas por primera vez, de manera matemáticamente rigurosa, por Darmois. De acuerdo con Darmois las condiciones necesarias y suficientes para el acoplamiento están dadas por la primera y segunda forma fundamental, es decir, la continuidad entre las métricas de cada región sobre la superficie de

acoplamiento, y la continuidad de la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre dicha superficie de acoplamiento.

Posteriormente Lichnerowicz propuso un conjunto de condiciones de acoplamiento alternativo, las cuales Bonnor y Vickers demostraron ser equivalentes a las condiciones de acoplamiento de Darmois. Según Lichnerowicz la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento es que exista un sistema de coordenadas en el cual, tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuas a través de la superficie de separación.

La región del espacio-tiempo interior a la distribución, que está descrita por la métrica tipo Schwarzschild (1.1), debe acoplarse en su superficie $r = r_\Sigma$ con la region exterior, constituida por el espacio-tiempo definido por la solución de vacío de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.31)$$

En nuestro caso para acoplar las dos regiones del espacio-tiempo vamos a exigir la continuidad de la primera forma fundamental y en lugar de usar la segunda, exigiremos la continuidad, a traves de r_Σ , de las componentes independientes del flujo de energía-momento [1].

Para exigir la continuidad de la primera forma fundamental, procedemos a igualar los elementos de linea (1.1) y (1.25) en la superficie r_Σ para obtener

$$\left[e^{\nu_\Sigma} - e^{\nu_\lambda} \dot{r}_\Sigma^2\right] dt^2 = \left[\left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right)^{-1} \dot{r}_\Sigma^2\right] dt^2, \quad (2.32)$$

donde las cantidades con el subíndice Σ están evaluadas en la superficie de acople. La ecuación (1.26) se satisface solamente si

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \quad (2.33)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \quad (2.34)$$

las cuales son nuestras primeras condiciones de acoplamiento. Ahora, exigimos la continuidad de las componentes del flujo energía-momento a través de la superficie Σ [1], es decir,

$$(T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu)_\Sigma^{(-)}, \quad (2.35)$$

$$(T_{\mu\nu} \eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} \eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)}, \quad (2.36)$$

donde η_μ es un vector tipo espacio normal a la superficie Σ y v^μ es un vector tipo tiempo. El símbolo (+) indica que las componentes del vector están siendo evaluadas en la región exterior de la superficie Σ y el signo (−) indica que se evalúa en la región interior a dicha

superficie. Para obtener las componentes de η_μ en ambas regiones del espacio-tiempo, vamos a definir la ecuación de la frontera [1]

$$\Psi \equiv r - r_\Sigma = 0 \quad (2.37)$$

y el vector unitario normal a dicha superficie $\eta_\mu^{(+)}$ esta dado por

$$\eta_\mu^{(+)} = \frac{\partial_\mu \Psi}{(-\partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}}. \quad (2.38)$$

Introduciendo la métrica dada por el elemento de línea (1.31) y la ecuación de frontera (1.37) en (1.38) podemos hallar las componentes de η_μ en la región exterior a la superficie Σ , que son

$$\eta_\mu^{(+)} = (-\beta \dot{r}_\Sigma, \beta, 0, 0), \quad (2.39)$$

donde β está dado por

$$\beta = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right)^{-1} \dot{r}_\Sigma^2 \right]^{1/2}}. \quad (2.40)$$

Ahora hallamos $\eta_\mu^{(-)}$, sustituyendo la métrica dada por (1.1) y la expresión (1.37) en la ecuación (1.38) evaluada en la región interior a Σ , encontramos el siguiente resultado

$$\eta_\mu^{(-)} = (-\gamma \dot{r}_\Sigma, \gamma, 0, 0), \quad (2.41)$$

donde γ esta dado por

$$\gamma = \frac{1}{[e^{-\lambda_\Sigma} - e^{-\nu_\Sigma} \dot{r}_\Sigma^2]^{1/2}}. \quad (2.42)$$

Definamos ahora un vector tipo tiempo v^μ , el cual sea unitario y perpendicular al vector normal η_μ , esto con el fin de poder observar la componente del flujo de energía a través de este vector segun la ecuacion (1.36) [1]. Por lo tanto este vector cumple que

$$v^\mu v_\mu = 1, \quad (2.43)$$

donde se puede obtener que las componentes de este vector dentro y fuera de la superficie Σ se pueden escribir de la siguiente manera

$$v^{\mu(+)} = \beta \delta_t^\mu + \beta \dot{r}_\Sigma \delta_r^\mu = (\beta, \beta \dot{r}_\Sigma, 0, 0), \quad (2.44)$$

$$v^{\mu(-)} = e^{-\nu_\Sigma/2} \delta_t^\mu = (e^{-\nu_\Sigma/2}, 0, 0, 0). \quad (2.45)$$

Escribimos el tensor energía-momento en ambos lados de la superficie de la siguiente manera [2, 3, 4, 11]

$$T_{\mu\nu}^{(+)} = 0, \quad (2.46)$$

$$T_{\mu\nu}^{(-)} = (\rho + P_{\perp}) u_{\mu} u_{\nu} - P_{\perp} g_{\mu\nu} + (P_r - P_{\perp}) s_{\mu} s_{\nu}, \quad (2.47)$$

que representan el vacío para la región exterior de r_{Σ} y un fluido esférico anisótropo para la región interior, tal que

$$u^{\mu} = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0), \quad (2.48)$$

$$s^{\mu} = (0, e^{-\lambda/2}, 0, 0), \quad (2.49)$$

donde u_{μ} es la cuadri-velocidad y definimos s_{μ} como un vector ortogonal a la cuadri-velocidad y que cumple con las propiedades $s^{\mu} u_{\mu} = 0$ y $s^{\mu} s_{\mu} = -1$. Buscaremos ahora la continuidad del flujo energía-momento entre las regiones del espacio-tiempo sustituyendo el vector unitario a la superficie η_{μ} , el vector unitario tipo tiempo v^{μ} y las expresiones del vector energía-momento (1.46) y (1.47) en las ecuaciones (1.35) y (1.36), lo que nos provee el siguiente resultado

$$[P_r]_{\Sigma} = 0, \quad (2.50)$$

que es nuestra segunda condición necesaria para el acople entre la región interior y exterior del espacio-tiempo.

El resultado anterior tiene sentido ya que la región exterior a r_{Σ} está descrita por la solución de vacío de Schwarzschild [2, 3, 4]. Por lo tanto para que el espacio-tiempo sea continuo sobre la superficie r_{Σ} se deben cumplir las condiciones necesarias para el acoplamiento dadas por las ecuaciones (1.33), (1.34) y (1.50).

CAPÍTULO 3

EL POLÍTROPO

En este capítulo se estudia la teoría de polítropos, comenzando desde los polítropos Newtonianos hasta los Relativistas Generales y observando detalladamente sus casos isótropos y anisótropos respectivamente. Esto con el fin de poder demostrar que el polítropo resulta útil para obtener las variables físicas del cuerpo compacto estudiado y modelarlo [5, 10, 11].

Las ecuaciones de estado polítropas, en el contexto de la gravedad Newtoniana, nacen con el fin de resolver gran cantidad de problemas astrofísicos, como lo es el modelado de objetos compactos como estrellas de neutrones, enanas blancas, estrellas de quarks, entre otros cuerpos estelares. Su gran éxito deriva de la simplicidad de la ecuación y que nos lleva fácilmente a la ecuación de Lane-Emden. Ahora si los cuerpos estelares resultan ser muy densos, los efectos relativistas se hacen evidentes, por lo cual la teoría de polítropos se extiende al contexto de la relatividad general [5, 6, 7, 10, 11].

El polítropo, de manera general, es una familia ecuaciones de estado, la cual relaciona la presión isótropa con la densidad de masa bariónica a través de la siguiente relación en el caso Newtoniano

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (3.1)$$

donde P es la presión isótropa, ρ es la densidad de masa bariónica, K es la constante polítropa, γ el exponente polítropo y n el índice polítropo. La constante polítropa y el índice polítropo se relacionan a través de

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (3.2)$$

El polítropo sirve para modelar 2 tipos de situaciones muy diferentes dependiendo de

su constante polítropa, por lo tanto nos genera una familia de ecuaciones [5]:

1. La constante polítropa K está fija y puede ser hallada a partir de otras constantes naturales, tal es el caso de gases de electrones completamente degenerados, tanto en el límite no relativista ($n = 3/2$), como el límite relativista ($n = 3$). Esta clase de polítopos es particularmente útil para modelar objetos compactos como enanas blancas.
2. La constante polítropa K es un parámetro libre, es decir, será particular para cada objeto compacto. Este es el caso de un gas ideal isotérmico ($\gamma = 1$) en donde la constante se halla a partir de la ecuación del gas ideal y va a depender de la estructura de cada estrella. También es el caso de una estrella completamente convectiva ($n = 3/2$), en este caso la constante polítropa dependerá del gradiente de temperatura de la estrella. Otro ejemplo es una esfera gaseosa homogénea ($n = 0$), donde se asume que es un gas ideal y la constante dependerá de la temperatura.

3.1. Polítropo Newtoniano

Iniciaremos con el estudio de un sistema esféricamente simétrico, estático e isótropo en el régimen Newtoniano, donde queremos obtener expresiones para las distribuciones de densidad, presión y masa, con el fin de poder modelar todo el cuerpo compacto. El objetivo será llegar a la ecuación de Lane-Emden para integrar el sistema. Posteriormente introduciremos anisotropía en el sistema y repetiremos el procedimiento [5, 10].

3.1.1. Polítropo para Fluidos Perfectos

Se desea obtener la ecuación de Lane-Emden para el caso de un fluido isótropo Newtoniano. Para ello vamos a estudiar un fluido con simetría esférica e isótropo que se encuentra en equilibrio hidrostático [5, 10].

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho, \quad (3.4)$$

donde G es la constante de gravitación universal, Φ es el potencial gravitatorio usual y r la coordenada radial. Estas ecuaciones son la ecuación de equilibrio hidrostático (2.3) y la ecuación de Poisson (2.4) en coordenadas esféricas, donde solo tomaremos en cuenta la derivada respecto a la coordenada radial debido a la simetría esférica y a que el sistema es estático.

Combinando (2.1) y (2.3), independientemente si la constante K es un parámetro libre o está fija, podemos obtener

$$\frac{d\Phi}{dr}\rho = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (3.5)$$

y esto solo si $\gamma \neq 1$ (el caso $\gamma = 1, n = \infty$ corresponde a un modelo que se estudiará posteriormente). La ecuación (2.5) se puede integrar resultando en

$$\rho = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n, \quad (3.6)$$

donde para la integración podemos elegir $\phi = 0$ en la superficie ($\rho = 0$). Ahora introduciendo (2.6) en la ecuación de Pöisson podemos obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria para Φ

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n. \quad (3.7)$$

Definamos las nuevas variables adimensionales

$$\begin{aligned} z &= Ar, & A^2 &= \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}, \\ w &= \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde el subíndice c indica que la cantidad está siendo evaluada en el centro. Para evitar comportamientos singulares en ($r = 0$) se tiene que en el centro $z = 0$, $\Phi = \Phi_c$, $\rho = \rho_c$ y $w = 1$. Por lo tanto introduciendo las nuevas variables en (2.7) obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0, \quad (3.9)$$

que también se escribe como

$$\frac{1}{z^2} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0. \quad (3.10)$$

Ambas expresiones (2.9) y (2.10) definen a la ecuación de Lane-Emden, que resulta ser sumamente útil debido a que es integrable y se pueden conocer sus soluciones analíticas y numéricas [5, 10]. Como mencionamos anteriormente, para evitar los comportamientos singulares en el centro ($r = 0$) tenemos las siguientes condiciones

$$\frac{dw}{dz}(z=0) = 0, \quad w(z=0) = 1, \quad (3.11)$$

además de tener las siguientes condiciones límites en la superficie de la esfera definida por $z = z_n$

$$w(z_n) = 0. \quad (3.12)$$

Podemos hallar las soluciones analíticas a la ecuación de Lane-Emden haciendo una expansión en serie de potencias en $w(z)$ [5]

$$w(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (3.13)$$

Aplicando la serie de potencias encontramos que existen soluciones analíticas solamente para los siguientes valores de n

$$n = 0, \quad w(z) = 1 - \frac{1}{6} z^2, \quad (3.14)$$

$$n = 1, \quad w(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad (3.15)$$

$$n = 5, \quad w(z) = \frac{1}{(1 - z^2/3)^{1/2}}. \quad (3.16)$$

Todas las demás soluciones para otros n se hallan de forma numérica y los casos correspondientes a $n > 5$ son sistemas de radio infinito.

Consideremos ahora el caso $\gamma = 1$ que corresponde a un gas ideal isotérmico [5, 10]. Para ello partiremos de las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.4) para combinarlas e introducir las siguientes variables adimensionales

$$r = \frac{z}{A}, \quad A^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{K}, \quad w = \frac{\Phi}{K}. \quad (3.17)$$

Sustituyendo las variables (2.17) en la combinación de las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.4) se obtiene la ecuación equivalente de Lane-Emden

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} = e^{-w}, \quad (3.18)$$

donde aplican las siguientes condiciones limites

$$\frac{dw}{dz}(z=0) = 0, \quad w(z=0) = 0. \quad (3.19)$$

Usando las condiciones en el centro se puede hallar la solución a la ecuación diferencial. Al resolver la ecuación de Lane-Emden de forma numérica podemos encontrar valores para las cantidades z_n , $\left(-z^2 \frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}$ y $\rho_c/\bar{\rho}$ de la siguiente manera [5]:

- El valor z_n se halla a partir de la condicion de frontera $w(z_n) = 0$ para un n dado.
- la cantidad $\left(-z^2 \frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}$ se obtiene acomodando la ecuación de Lane-Emden a la forma (2.10) y evaluarla en la superficie z_n .

- la relación entre densidades $\rho_c/\bar{\rho}$ se obtiene de la definición de función masa (1.26) [2, 14], sustituyendo las nuevas variables adimensionales se puede obtener la siguiente relación

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \left(-\frac{3}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n}. \quad (3.20)$$

Usando estos valores, se puede construir la siguiente tabla de resultados [5]

n	z_n	$\left(-z^2 \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n}$	$\rho_c/\bar{\rho}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
1	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2	4.35287	2.41105	11.40254
3	6.89685	2.01824	54.1825
4	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.8365	1.73780	6,189.47
5	∞	1.73205	∞

3.1.2. Construcción de Modelos

Ahora presentaremos el procedimiento a seguir para construir el modelo de un cuerpo compacto usando el polítropo [5]. La construcción dependerá de la constante polítropa, es decir, si es un parámetro libre o si tiene un valor fijo hallado a partir de constantes naturales. Vamos a estudiar ambos casos por separado.

Vamos a construir un modelo teniendo a K como un parámetro libre, para valores de M , R y n dados, donde M es la masa total y R el radio total del cuerpo compacto. Como el valor de la constante polítropa n es dado, las soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden nos proporciona las funciones w , w' , $\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n}$ y z_n . Primero usamos los valores de radio total R y masa total M para obtener el valor de la densidad media usando

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (3.21)$$

A partir de los resultados numéricos de la tabla anterior y la densidad media, podemos hallar la densidad en el centro con (2.20). Ahora evaluando el cambio de variable (2.8) en la superficie se puede encontrar el valor de la constante A

$$z_n = AR. \quad (3.22)$$

Usando nuevamente (2.8) se puede hallar la constante polítropa K con

$$A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}} \quad (3.23)$$

y la distribución de densidad

$$\rho(r) = \rho_c w^n \quad (3.24)$$

la podemos hallar usando el valor de la densidad en el centro ρ_c y los resultados de la tabla para w . Ahora, con el valor de ρ_c , los resultados para w y la constante polítropa K se encuentra la distribución de presiones

$$P(r) = K \rho_c^{(n+1)/n} w^{n+1} \quad (3.25)$$

y la masa local la podemos hallar a partir de

$$m(r) = 4\pi \rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right), \quad (3.26)$$

donde conocemos ρ_c y el valor de la derivada a partir de la tabla. Una vez halladas las distribuciones de masa, densidad y presión, toda la estructura mecánica interna del cuerpo compacto está determinada y por lo tanto el modelo construido.

Vamos a dar el siguiente ejemplo aplicando la construcción del modelo polítropo para nuestro Sol [5], solamente dando los valores de radio total R , masa total M y n que dependera del tipo de objeto compacto estudiado.

$$M = 1,989 \times 10^{33}g, \quad n = 3, \quad R = 6,96 \times 10^{10}cm. \quad (3.27)$$

Como tenemos el valor de n , conocemos los valores de z_n y $\rho_c/\bar{\rho}$ a partir de la tabla

$$z_3 = 6,897, \quad \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = 54,18. \quad (3.28)$$

Calculamos la densidad media $\bar{\rho}$ y la densidad en el centro ρ_c con (2.20) y (2.21) para obtener

$$\bar{\rho} = 1,41gcm^{-3}, \quad \rho_c = 76,39gcm^{-3}. \quad (3.29)$$

Con los valores anteriores hallamos la constante A y la constante polítropa K usando (2.22) y (2.23)

$$A = \frac{z_3}{R} = 9,91 \times 10^{-11}, \quad K = 3,85 \times 10^{14}. \quad (3.30)$$

Con el valor de la constante polítropa K encontramos la presión en el centro a través de

$$P_c = K \rho_c^{1+2/n}, \quad P_c = 1,24 \times 10^{17}dyn/cm^2. \quad (3.31)$$

Con el peso molecular del Sol como dato conocido y la ecuación del gas ideal, se puede obtener la temperatura en el centro del sol

$$T_c = 1,2 \times 10^7 K, \quad \mu = 0,62. \quad (3.32)$$

Por otra parte, si se utiliza el conjunto completo de ecuaciones de estructura estelar se puede obtener el siguiente valor para temperatura en el centro del sol

$$T_c = 1,5 \times 10^7 K, \quad 1M_\odot. \quad (3.33)$$

Se puede observar que la estimación realizada a partir del polítropo resulta ser considerablemente cercana al valor real de la temperatura en el centro del Sol.

Para construir un modelo en el cual la constante polítropa es fija se sigue un proceso similar al caso anterior. Para este modelo podremos encontrar el valor de la constante polítropa K a partir de otras constantes siempre que conozcamos los valores n , ρ_c y la composición química interna del cuerpo compacto.

Al conocer el valor de n , conocemos todas las soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden, es decir, los valores de las funciones w , w' , $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}$ y z_n . La constante polítropa K se halla entonces a partir de la ecuación de estado de dicho gas y de su composición química.

Con los valores de K y ρ_c podemos conocer la constante A con la ecuación (2.23). Para hallar los valores de M y R usamos (2.26) evaluada en la superficie y (2.22) respectivamente. Con los valores de M , R , K y ρ_c se repite el procedimiento para hallar las distribuciones de presión, masa y densidad con los cuales podemos conocer la estructura mecánica interna del cuerpo compacto y así tener el modelo finalmente construido.

3.1.3. Polítropo Anisótropo

La isotropía local es una suposición muy comun en el estudio de objetos compactos autogravitantes, sin embargo para ciertos rangos de densidades, existe una gran variedad de fenómenos físicos que pueden dar lugar a la anisotropía local. Estos fenómenos físicos pueden ser generados por diversas fuentes, por ejemplo, intensos campos magnéticos observados en enanas blancas, estrellas magnetizadas de quarks extraños, elevados índices de viscosidad, superposición de materia isótropa, entre otras. Por lo tanto, en este capítulo el formalismo del polítropo es extendido para el caso de un fluido anisótropo, esto con el fin de modelar objetos compactos con una gran variedad de fenómenos físicos de interés que contribuyan a la anisotropía en forma de una presión tangencial [10].

Para modelar cuerpos compactos anisótropos se seguirá el procedimiento realizado para el caso isótropo, es decir, combinar de forma conveniente las ecuaciones para poder llegar a la ecuación de Lane-Emden. Para el caso de fluidos anisótropos Newtonianos, la ecuación de equilibrio hidrostático se le agrega el factor de anisotropía y se lee como

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r), \quad (3.34)$$

donde $P_{\perp}$ es la presión tangencial y P_r es la presión radial.

La ecuación polítropa de estado en el caso de fluidos anisótropos se asume con la presión radial de la siguiente forma

$$P_r = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+1/n}. \quad (3.35)$$

Introducimos (2.35) en (2.34) para obtener

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho}, \quad (3.36)$$

donde $\Delta = P_{\perp} - P_r$ y con $\gamma \neq 1$. La ecuación (2.36) puede ser integrada entre un r interior y la superficie $r = r_{\Sigma}$ para obtener

$$\Phi = F(r) - K(n+1)\rho^{1/n}, \quad (3.37)$$

el cual puede ser escrito como

$$\rho = \left[\frac{(\Phi - F)}{-K(n+1)} \right]^n, \quad (3.38)$$

donde

$$F(r) = 2 \int_{r_{\Sigma}}^r \frac{\Delta}{r\rho} dr. \quad (3.39)$$

El siguiente paso es introducir las siguientes variables adimensionales

$$z = \alpha r, \quad (3.40)$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} [-(\Phi_c - F_c)]^{n-1} \quad (3.41)$$

y

$$w = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} = \frac{\Phi - F}{\Phi_c - F_c}, \quad (3.42)$$

donde igual que en el caso isótropo, el subíndice c indica que la cantidad está siendo evaluada en $r = 0$. Combinando la ecuación de Pöisson (2.4), (2.38) y las nuevas variables (2.40), (2.41) y (2.42) obtenemos ecuación extendida de Lane-Emden.

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dX}{dz} + (X - Y)^n = 0, \quad (3.43)$$

donde

$$X = w + Y \quad (3.44)$$

y

$$Y = \frac{F}{\Phi_c - F_c}. \quad (3.45)$$

Esta ecuación no puede ser integrada todavía debido a que no se conoce $F(r)$ explícitamente, es decir, no se conoce la forma exacta del factor de anisotropía, por lo tanto se debe desarrollar un método con el que se pueda resolver la ecuación diferencial para poder modelar los cuerpos compactos anisótropos, dicho método será desarrollado en la sección 2.1.4. Por ahora vamos a obtener la ecuación de Lane-Emden equivalente para el caso de un gas isotérmico que corresponde a $\gamma = 1$ y en presencia de anisotropía. Introducimos la ecuación (2.35) en (2.34) sustituyendo $\gamma = 1$ para obtener

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2}{r} \frac{\Delta}{\rho} \quad (3.46)$$

que al ser integrado entre un r interior y la superficie r_Σ es

$$\rho = \rho_c e^{(F-\Phi)/K}, \quad (3.47)$$

donde $\Phi_c = 0$ para $r = 0$. Ahora introducimos las siguientes variables adimensionales

$$z = \alpha r \quad (3.48)$$

y

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{K}. \quad (3.49)$$

Combinando la ecuación de Pöisson (2.4), (2.47) y las variables adimensionales (2.48) y (2.49) obtenemos la ecuación de Lane-Emden equivalente a este caso

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dX}{dz} = e^{-w}, \quad (3.50)$$

donde

$$X = \frac{F}{K} + w = \frac{\Phi}{K}. \quad (3.51)$$

De igual manera que (2.43), esta ecuación no puede ser integrada por el hecho que no conocemos el termino $F(r)$ que depende de la anisotropía. Por lo tanto vamos a presentar un método en la sección posterior para poder integrar esta ecuación y resolver el sistema.

3.1.4. Modelado de Polítropo Anisótropo

Para poder resolver la ecuación de Lane-Emden para el caso anisótropo, independiente del valor de γ , requerimos dar información adicional sobre la anisotropía. Esta información adicional será dada siguiendo el ansatz propuesto por Luis Herrera y M. Consenza [10, 14] y es un procedimiento sencillo con el que se obtiene la ecuación diferencial que necesitamos.

- (i) En el primer paso, se propone una expresión general para la anisotropía Δ , que abarca gran cantidad de modelos anisótropos, de la forma

$$\Delta = Cf(r)\rho r^N, \quad (3.52)$$

donde C es un parámetro que mide la anisotropía y la función f y el número N dependerán de cada modelo.

- (ii) Se asume

$$fr^{N-1} = \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.53)$$

Esta suposición no se hace en base a ningún fundamento físico, solo se asume así por conveniencia pura, ya que al combinarla con la ecuación (2.52) se obtiene una relación muy sencilla que nos permite conectar con el caso isótropo fácilmente.

- (iii) Combinando (2.39), (2.52) y (2.53) se obtiene

$$F = 2C\Phi. \quad (3.54)$$

La relación (2.54) se inserta en la ecuación equivalente de Lane-Emden (2.43) para así obtener

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + hw^n = 0, \quad (3.55)$$

donde $h = 1 - 2C$, la cual por simplicidad se asume constante en toda la esfera, aunque las presiones no necesariamente. Es fácil notar que se puede volver al caso isótropo eligiendo $h = 1$. Especificando h , que dependerá del modelo que se desee construir, se puede integrar numéricamente la ecuación diferencial (2.55) con las siguientes condiciones límites

$$w(0) = 1, \quad \frac{dw}{dz}(0) = 0. \quad (3.56)$$

Una vez reseulta la ecuación (2.55) con todos sus resultados numéricos, se procede a construir el modelo de la forma mencionada anteriormente. Vamos a sustituir ahora la expresión de F (2.54) en la ecuación (2.47) y en la ecuación equivalente de Lane-Emden (2.50) en el caso $\gamma = 1$, para obtener

$$\rho = \rho_c e^{-h\Phi/K} \quad (3.57)$$

y

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} = he^{-w}, \quad (3.58)$$

donde

$$\Phi = \frac{K}{h}w, \quad (3.59)$$

donde de igual manera que para la ecuación (2.55), se puede construir el modelo deseado si se especifica h e integrando de forma numérica la ecuación (2.58) con las siguientes condiciones en el centro

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dz}(0) = 0. \quad (3.60)$$

3.2. Polítropo Relativista General

Cuando los objetos compactos estudiados son muy densos, sus efectos relativistas se hacen evidentes, por lo tanto es necesario extender el formalismo del polítropo para el caso de la relatividad general [11]. Esto nos permitirá modelar objetos compactos relativistas. Se realizará un procedimiento similar para obtener la ecuación equivalente de Lane-Emden, sumamente útil por el hecho de que se puede ser integrada de forma numérica y así obtener las soluciones correspondientes. La ecuación de estado polítropa en el contexto de la relatividad general tiene dos posibles formas diferentes, las cuales en su límite Newtoniano coinciden. Estas dos expresiones son

$$P = K\rho_0^\gamma = K\rho_0^{1+1/n}, \quad (3.61)$$

y

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (3.62)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa bariónica, ρ es la densidad de energía y las constantes K , γ y n son las mismas del caso Newtoniano. Por lo tanto el desarrollo del polítropo relativista general será dividido en caso I y caso II, dependiendo de la ecuación polítropa de estado que se utilice. En esta sección trabajaremos nuevamente con unidades geometrizadas, es decir $c = G = 1$ e iniciaremos con el estudio de un fluido isótropo esféricamente simétrico y estático, para el cual obtendremos la expresión de la ecuación generalizada de Lane-Emden en ambos casos I y II, esto con el fin de poder modelar cuerpos compactos relativistas y posteriormente introducir anisotropía para generalizar la teoría.

3.2.1. Caso I para Fluidos Isótropos

Comenzaremos con el Caso I, es decir, usando la ecuación de estado con la densidad de masa bariónica ρ_0 . En esta sección se desea obtener la ecuación equivalente de Lane-Emden [11]. El polítropo se asume en equilibrio hidrostático, por lo que se tiene la ecuación de equilibrio hidrostático relativista general para materia isótropa dada por la ecuación (1.30), obtenida en el capítulo 1. Sin embargo, la ecuación de estado (2.61) y la ecuación de equilibrio hidrostático (1.30) no son suficientes para obtener la ecuación de Lane-Emden,

ya que una depende de la densidad de energía ρ y otra de la densidad de masa bariónica ρ_0 . Por lo tanto requerimos de otra ecuación que relacione las densidades. Con el fin de obtener esta relación, vamos a considerar la primera y segunda ley de la termodinámica escrita como

$$d\left(\frac{\rho + P}{\mathcal{N}}\right) - \frac{dP}{\mathcal{N}} = Td\left(\frac{\sigma}{\mathcal{N}}\right), \quad (3.63)$$

donde T es la temperatura, σ es la entropía por unidad de volumen propio y $\mathcal{N}$ es la densidad de partículas, tal que

$$\rho_0 = \mathcal{N}m_0, \quad (3.64)$$

donde m_0 indica la masa de cada partícula. Como nuestro sistema no disipa energía a través de flujos de calor, podemos asumir un proceso adiabático, por lo que la ecuación (2.63) se escribe

$$d\left(\frac{\rho}{\mathcal{N}}\right) + Pd\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\right) = 0 \quad (3.65)$$

que al combinarla con la ecuación (2.61) se obtiene

$$K\rho_0^{\gamma-2} = \frac{d(\rho/\rho_0)}{d\rho_0}. \quad (3.66)$$

Si $\gamma \neq 1$ la ecuación (2.66) se puede integrar resultando en

$$\rho = C\rho_0 + \frac{P}{\gamma - 1}, \quad (3.67)$$

donde C es una constante de integración. Aplicando el límite no relativista ($\rho \rightarrow \rho_0$) a (2.67) obtenemos que $C = 1$. De esta manera la ecuación polítropa de estado viene dada por

$$\rho = \rho_0 + \frac{P}{\gamma - 1}, \quad (3.68)$$

donde consideramos de ahora en adelante $\gamma \neq 1$. Ahora introducimos las nuevas variables adimensionales

$$\alpha = \frac{P_c}{\rho_c}, \quad r = \frac{\xi}{A}, \quad A^2 = \frac{4\pi\rho_c}{\alpha(n+1)}, \quad (3.69)$$

$$\psi_0^n = \frac{\rho_o}{\rho_{0c}}, \quad v(\xi) = \frac{m(r)A^3}{(4\pi\rho_c)}, \quad (3.70)$$

donde el subíndice c indica que la cantidad está siendo evaluada en el centro. Ahora combinando la ecuaciones de estado (2.61) y (2.68), la ecuación TOV (1.30) y las nuevas variables adimensionales (2.69) y (2.70) obtenemos la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff adimensional

$$\xi^2 \frac{d\psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1-n\alpha) + (n+1)\alpha\psi_0} \right] + v + \alpha\xi^3\psi_0^{n+1} = 0 \quad (3.71)$$

y de la definición de función masa (1.27) se puede obtener

$$m' = 4\pi r^2 \rho. \quad (3.72)$$

Insertando las nuevas variables (2.69) y (2.70) en la derivada de la función masa (2.72) se encuentra

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \psi_0^n (1 - n\alpha + n\alpha\psi_0). \quad (3.73)$$

La superficie límite de la esfera está definida por $\xi = \xi_n$, tal que $\psi_0(\xi_n) = 0$ y en ella aplican las siguientes condiciones en el centro

$$\psi_0(\xi = 0) = 1, \quad v(\xi = 0) = 0. \quad (3.74)$$

Combinando las ecuaciones (2.71) y (2.73) se obtiene la ecuación generalizada de Lane-Emden para el caso I, dada por

$$\begin{aligned} & a \frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi_0}{d\xi} \left\{ a - \alpha \xi (n+1) \right. \\ & \times \left[\xi \psi_0^n (b - \alpha \psi_0) - \frac{v}{\xi^2} + \frac{a}{2b} \frac{d\psi_0}{d\xi} - \frac{b \xi \psi_0^n}{2} \right] \Big\} \\ & + b \psi_0^n (3\alpha \psi_0 + b - \alpha \psi_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

que puede ser integrada de forma numérica usando las condiciones en el centro (2.74) y donde

$$a \equiv 1 - 2(n+1)\alpha v/\xi \quad (3.76)$$

y

$$b \equiv (1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\psi_0. \quad (3.77)$$

En el límite Newtoniano ($\alpha \rightarrow 0$) llegamos a

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi_0}{d\xi} + \psi_0^n = 0, \quad (3.78)$$

que es la ecuación de Lane-Emden clásica.

3.2.2. Caso II para Fluidos Isótropos

En este caso, se considera el polítropo relativista definido por la ecuación de estado (2.62) dependiente de la densidad de energía ρ [11]. El tratamiento es más sencillo que en el caso anterior debido a que la ecuación TOV relativista (1.30) y la ecuación de estado (2.62) se pueden combinar sin la necesidad de una relación adicional para obtener la ecuación de Lane-Emden. Sin embargo se obtendrá una relación entre las densidades

de masa bariónica ρ_0 y energía ρ para comparar con el caso anterior. Realizando un procedimiento análogo al usado en el caso I, se obtiene la siguiente relación

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 - K\rho_0^{1/n}\right)^n}, \quad (3.79)$$

donde si $\alpha = \frac{P_c}{\rho_c}$ es suficientemente pequeño, se expande (2.70) en serie de potencias de α usando (2.62) y (2.69) para obtener la siguiente aproximación

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 + nK\rho_0^{1/n}\right). \quad (3.80)$$

Se puede observar que las ecuaciones (2.68) y (2.80) son idénticas, esto implica que ambos casos I y II difieren en terminos de orden α^2 y mayores. Sin embargo ambos casos coinciden en el límite Newtoniano.

Una vez observada la diferencia entre el caso I y II, vamos a introducir la siguiente variable adimensional

$$\psi^n = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.81)$$

Por lo tanto usando (1.30), (2.62), (2.69), (2.70) y (2.81) obtenemos la ecuación TOV adimensional para este caso

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] + v + \alpha\xi^3\psi^{n+1} = 0 \quad (3.82)$$

y de la ecuación (2.72), (2.81) y las variables adimensionales (2.69) y (2.70) se llega a

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\psi^n. \quad (3.83)$$

Combinando las ecuaciones (2.82) y (2.83) se obtiene la ecuación generalizada de Lane-Emden, dada por

$$\begin{aligned} & a \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} \left\{ a - \alpha\xi^2(n+1)\psi^n + \frac{v(n+1)\alpha}{\xi} \right. \\ & \left. - \frac{d\psi}{d\xi} \frac{\xi a \alpha}{2c} + \frac{\xi^2 \alpha c(n+1)\psi^n}{2} \right\} \\ & + c\psi^n + 3\alpha c\psi^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde

$$c \equiv 1 + \alpha\psi. \quad (3.85)$$

De igual manera que en el caso I, en el límite no relativista ($\alpha \rightarrow 0$), se recupera la ecuación de Lane-Emden clásica (2.78).

3.2.3. Caso I para Fluidos Anisótropos

Igual que con el polítropo Newtoniano, el formalismo del polítropo relativista general será extendido para el caso de materia anisótropa [11], en el cual estudiaremos cada caso detalladamente. Para un fluido anisótropo la ecuación TOV relativista general está dada por la expresión (1.29) [1, 11], por lo tanto siguiendo el mismo procedimiento del polítropo relativista general para materia isótropa obtendremos la ecuación equivalente de Lane-Emden para este fluido.

Para el caso I repetimos el procedimiento realizado en el caso isótropo, es decir, usamos la ecuación de estado (2.61), la ecuación TOV (1.29), la relación entre densidades (2.68) y las variables adimensionales (2.69) y (2.70) para obtener la ecuación TOV adimensional para materia anisótropa escrita como

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d\psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1-n\alpha) + (n+1)\alpha\psi_0} \right] + v + \alpha \xi^3 \psi_0^{n+1} \\ + \frac{2\Delta\psi_0^{-n}\xi}{P_{rc}(n+1)} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1-n\alpha) + (n+1)\alpha\psi_0} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde ahora $\alpha = P_{rc}/\rho_c$ y $\Delta = -\Pi = P_\perp - P_r$. Ahora, combinamos la expresión (2.73) con la ecuación (2.86) para así obtener la ecuación de Lane-Emden generalizada en este caso,

$$\begin{aligned} a \frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi_0}{d\xi} \left\{ a - \alpha \xi (n+1) \left[\xi \psi_0^n (b - \alpha\psi_0) - \frac{v}{\xi^2} - \frac{a}{2b} \frac{d\psi_0}{d\xi} - \frac{b\xi\psi_0^n}{2} \right] \right. \\ - \frac{\xi^2}{(n+1)P_{rc}} \left[\psi_0^{-n} \Delta \frac{a}{b} \right] \left[\frac{(n+1)\alpha}{b} + \frac{n}{\psi_0} \right] \left. \right\} + b\psi_0^n (3\alpha\psi_0 + b - \alpha\psi_0) \\ + \frac{2}{(n+1)P_{rc}} \left[\psi_0^{-n} \Delta \frac{a}{b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} + \frac{1}{\xi} + \frac{2(n+1)\alpha}{a} \right. \\ \times \left. \left[-\xi\psi_0^n [1 + n\alpha(\psi_0 - 1)] + \frac{v}{\xi^2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Como observamos en el caso Newtoniano anisótropo, esta ecuación no puede ser integrada numéricamente ya que no conocemos la forma de la anisotropía Δ , por lo que más adelante usaremos el método propuesto por Luis Herrera y M. Consenza para poder resolver la ecuación diferencial y poder integrarla.

3.2.4. Caso II para Fluidos Anisótropos

En este caso la ecuación de estado está dada por (2.62), entonces, al igual que en el caso anterior combinamos la ecuación de estado junto con la ecuación TOV (1.29) y las

variables adimensionales (2.69), (2.70) y (2.81) para llegar a la ecuación de Lane-Emden adimensional que se escribe como

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] + v + \alpha\xi^3\psi^{n+1} + \frac{2\Delta\psi_0^{-n}\xi}{P_{rc}(n+1)} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] = 0 \quad (3.88)$$

y nuevamente, si combinamos esta ecuación (2.88) con (2.83) llegamos finalmente a la ecuación de Lane-Emden generalizada para este caso,

$$\begin{aligned} & a \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} \left\{ a - \alpha\xi^2(n+1)\psi^n + \frac{v(n+1)\alpha}{\xi} - \frac{d\psi}{d\xi} \frac{\xi a \alpha}{2c} \right. \\ & + \frac{\xi^2 \alpha c (n+1) \psi^n}{2} - \frac{\xi^2}{(n+1) P_{rc}} \left[\psi^{-n} \Delta \frac{a}{c} \right] \left[\frac{n}{\psi} + \frac{\alpha}{c} \right] \Big\} \\ & + c\psi^n + 3\alpha c \psi^{n+1} + \frac{2}{(n+1) P_{rc}} \left[\psi^{-n} \Delta \xi \frac{a}{c} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\xi} + \frac{1}{\xi} + \frac{2(n+1)\alpha}{a} \right. \\ & \times \left. \left[-\xi\psi^n + \frac{v}{\xi^2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

De igual manera que en el caso anterior, esta ecuación no se puede resolver sin antes especificar la forma de la anisotropía local Δ .

3.2.5. Modelado del Polítropo Anisótropo en el Caso I y II

De acuerdo a las secciones anteriores, si no se especifica la forma de la anisotropía Δ , no se puede integrar las ecuaciones diferenciales y crear los modelos de los sistemas deseados, por lo tanto en esta sección se tiene como objetivo obtener modelos específicos, para ello vamos a seguir el siguiente "ansatz" propuesto por M. Consenza y Luis Herrera [11, 14] y aplicar el procedimiento realizado anteriormente para modelar el polítropo anisótropo Newtoniano, lo cual nos permitirá resolver las ecuaciones diferenciales (2.87) y (2.89).

(i) Proponemos que

$$\Delta = C f(P_r, r) (\rho + P_r) r^N, \quad (3.90)$$

donde C , f y N indican lo mismo que en el caso del polítropo Newtoniano.

(ii) Asumimos la siguiente relación

$$f(P_r, r) r^{N-1} = \frac{\nu'}{2}, \quad (3.91)$$

la cual no tiene ningún fundamento físico, se asume así por pura conveniencia y facilidad a la hora de combinar las ecuaciones.

(iii) Combinamos (2.90) y (2.91) con la ecuación TOV anisótropa (1.29) para obtener

$$\frac{dP_r}{dr} = -h(\rho + P_r) \frac{\nu'}{2}, \quad (3.92)$$

donde $h = 1 - C$. Por simplicidad h se asume constante en toda la esfera aunque las presiones no lo sean.

Usando la nueva ecuación TOV (2.92) podemos encontrar que para el caso I, la ecuación TOV adimensional para materia anisótropa se escribe como

$$\xi^2 \frac{d\psi_0}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{(1 - n\alpha) + (n+1)\alpha\psi_0} \right] + h(v + \alpha\xi^3\psi_0^{n+1}) = 0. \quad (3.93)$$

Esta nueva ecuación TOV adimensional (2.93), ahora combinada con (2.73) resulta en la ecuación de Lane-Emden generalizada, la cual si especificamos h podemos integrarla y así resolver el sistema. Repitiendo el procedimiento anterior, podemos encontrar que para el caso II la ecuación TOV adimensional es

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[\frac{1 - 2(n+1)\alpha v/\xi}{1 + \alpha\psi} \right] + h(v + \alpha\xi^3\psi^{n+1}) = 0, \quad (3.94)$$

la cual junto la ecuación (2.83) resulta en la ecuación de Lane-Emden para ese caso y se puede integrar con las condiciones limites correspondientes. Al integrar las ecuaciones (2.73) y (2.93) para el caso I y las ecuaciones (2.83) y (2.94) para el caso II, se obtiene directamente las funciones λ , m y P_r , sin embargo necesitamos una expresión para ν que obtendremos de la siguiente forma para el caso I. Sustituimos el cambio de variable (2.70) en las ecuaciones (2.61) y (2.68) para llegar a

$$P_r = K\rho_{0c}^{1+1/n}\psi_0^{n+1} \quad (3.95)$$

y

$$\rho = \rho_{0c}\psi_0^n (1 + nK\rho_{0c}^{1/n}\psi_0). \quad (3.96)$$

Ahora introduciendo las ecuaciones (2.95) y (2.96) en la ecuación (2.92) obtenemos la siguiente relación

$$2(n+1)\beta d\psi_0 + h d\nu [1 + \beta\psi_0(n+1)] = 0, \quad (3.97)$$

donde el parámetro $\beta = K\rho_{0c}^{1/n}$ en función de α está dado por

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - n\alpha}. \quad (3.98)$$

Integramos la ecuación (2.97) de manera indefinida para obtener

$$e^\nu = \frac{C}{[1 + (n+1)\beta\psi_0]^{2/h}}, \quad (3.99)$$

donde C es una constante de integración. Ahora usamos la condición en el centro ($r = 0$) $\psi_0 = 1$, para escribir la ecuación (2.99) como

$$e^\nu = e^{\nu_c} \frac{[1 + (n+1)\beta]^{2/h}}{[1 + (n+1)\beta\psi_0]^{2/h}}. \quad (3.100)$$

Finalmente, usando las condiciones (1.33) y (1.50) en la superficie $r = r_\Sigma$ obtenemos la expresión para e^ν en el caso I, que viene dada por

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) [1 + (n+1)\beta\psi_0]^{-2/h}. \quad (3.101)$$

Para el caso II se sigue un procedimiento similar. Sustituimos el cambio de variable (2.81) en la ecuación de estado (2.62), de esta manera podemos transformar la ecuación (2.92) en

$$2(n+1)\alpha d\psi + h(1 + \alpha\psi) d\nu = 0. \quad (3.102)$$

Integrando la ecuación (2.102) y aplicando las condiciones en el centro $r = 0$ con $\psi = 1$ y en la frontera $r = r_\Sigma$ (1.33) y (1.50) obtenemos el resultado para e^ν correspondiente al caso II que se escribe como

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma}\right) (1 + \alpha\psi)^{-2(n+1)/h}. \quad (3.103)$$

CAPÍTULO 4

INTRODUCCIÓN DEL POLÍTROPO DENTRO DEL ALGORITMO

Como es bien conocido, en el campo de la relatividad general, las distribuciones de materia esféricamente simétricas y estáticas están descritas por tres ecuaciones de Einstein independientes para cuatro variables (dos funciones métricas, la densidad de energía y la presión isotropa) [2, 3]. Por lo tanto, es necesario proveer de información adicional en forma de una ecuación de estado o una suposición heurística que envuelva las variables físicas y/o métricas, esto con el fin de poder integrar el sistema. Esta situación sugiere la posibilidad de obtener todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein dando únicamente una función generatriz la cual proporcionará la información adicional necesaria. Lake [13] desarrolló un algoritmo para obtener todas las soluciones de un fluido perfecto esféricamente simétrico y estático usando únicamente una sola función generatriz.

En este capítulo se desarrollará el método ideado por Luis Herrera [12] para extender el algoritmo de Lake [13] a el caso de materia anisótropa, esto con el fin de obtener una expresión para las variables físicas y el elemento de línea de interior que solamente dependan de las funciones generatrices propuestas. Posteriormente construiremos nuestro propio modelo introduciendo la ecuación de estado polítropa en el algoritmo extendido de Lake por Luis Herrera [12], de tal manera que solo requeriremos de una función generatriz para describir nuestro sistema estudiado y así finalizar el capítulo aplicando nuestro modelo a casos específicos.

El sistema que deseamos resolver en esta sección va a consistir en una distribución de materia anisótropa, esféricamente simétrica y estática, para la cual definiremos el elemento

de línea como

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

donde ν y λ son variables que dependen únicamente de la coordenada radial r . Este elemento de línea satisface las ecuaciones de Einstein (1.2) [1, 2, 3, 4] y produce el siguiente conjunto de ecuaciones de campo

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (4.2)$$

$$8\pi P_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (4.3)$$

$$8\pi P_\perp = \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (4.4)$$

donde las primas denotan derivada respecto a r , y ρ , P_r y $P_\perp$ tienen el mismo significado que el expuesto en el capítulo 1.

4.1. El Algoritmo para Fluidos Anisótropos

En esta sección será desarrollado y explicado el algoritmo de Lake extendido por Luis Herrera [12], para un fluido esféricamente simétrico, estático y con anisotropía local. Con la ayuda de este algoritmo podremos dar la información necesaria que requiere el sistema para poder resolver las ecuaciones de Einstein y obtener expresiones para ν , λ , P_r , $P_\perp$ y ρ .

En primer lugar, comenzamos por combinar las ecuaciones de campo (3.3) y (3.4) para obtener

$$\begin{aligned} 8\pi(P_r - P_\perp) = & e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 + \frac{\nu'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) \\ & + e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora, se proponen e introducen las siguientes variables

$$e^{\nu(r)} = e^{\int (2z(r) - 2/r) dr} \quad (4.6)$$

y

$$e^{-\lambda} = y(r), \quad (4.7)$$

que serán sustituidas en la ecuación (3.5) para llegar a la siguiente expresión

$$y' + y \left[\frac{2z'}{z} + 2z - \frac{6}{r} + \frac{4}{r^2 z} \right] = -\frac{2}{z} \left(\frac{1}{r^2} + \Pi(r) \right), \quad (4.8)$$

con $\Pi(r) = 8\pi (P_r - P_\perp)$.

La ecuación diferencial (3.8) puede ser integrada usando el método de factor integrante y así obtener la siguiente expresión para λ

$$e^{\lambda(r)} = \frac{z^2(r) e^{\int ([4/r^2 z(r)] + 2z(r)) dr}}{r^6 \left(-2 \int \frac{z(r)(1+\Pi(r)r^2) e^{\int ([4/r^2 z(r)] + 2z(r)) dr}}{r^8} dr + C \right)}, \quad (4.9)$$

donde C es una constante de integración. Una vez obtenido el resultado anterior, podemos reescribir el elemento de línea (3.1) sustituyendo (3.6) y (3.9) y así llegar a

$$\begin{aligned} ds^2 = & - e^{\int (2z(r) - 2/r) dr} dt^2 \\ & + \frac{z^2(r) e^{\int ([4/r^2 z(r)] + 2z(r)) dr}}{r^6 \left(-2 \int \frac{z(r)(1+\Pi(r)r^2) e^{\int ([4/r^2 z(r)] + 2z(r)) dr}}{r^8} dr + C \right)} dr^2 \\ & + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente, se obtiene que el elemento de línea (3.10), el cual describe el espacio-tiempo de nuestro sistema y está totalmente determinado si conocemos las dos funciones generatrices $z(r)$ y $\Pi(r)$. De igual manera podemos escribir las variables físicas ρ , P_r y $P_\perp$ en función de $z(r)$ y $\Pi(r)$ con el fin de imponer condiciones físicamente posibles. De esta forma las variables físicas quedan expresadas como

$$4\pi P_r = \frac{z(r - 2m) + m/r - 1}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$4\pi \rho = \frac{m'}{r^2} \quad (4.12)$$

y

$$4\pi P_\perp = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(z' + z^2 - \frac{z}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + z \left(\frac{m}{r^2} - \frac{m'}{r}\right), \quad (4.13)$$

donde m es la función masa y fue definida en (1.26).

De manera idéntica que con el elemento de línea (3.10), si proporcionamos dos funciones generatrices conocidas $z(r)$ y $\Pi(r)$, las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) están totalmente determinadas. Las soluciones físicamente posibles deben ser regulares en el origen $r = 0$ y deben satisfacer las condiciones $\rho > 0$, $\rho > P_r, P_\perp$. Si la estabilidad es requerida, entonces ρ y P_r deben decrecer monotónicamente en función de r . Para evadir los comportamientos singulares en la superficie de la fuente $r = r_\Sigma$, las soluciones deben satisfacer las condiciones de acoplamiento de Darmois [1, 2] expuestas en el capítulo 1, es decir deben satisfacer (1.33), (1.34) y (1.50).

Si se impone la condición de presión isotropa $\Pi(r) = 8\pi (P_r - P_\perp) = 0$, se obtiene el resultado hallado por Lake en su algoritmo [13] con $z(r) = \phi(r)' + \frac{1}{r}$.

4.2. Ejemplos de aplicación del Algoritmo

En esta sección aplicaremos el algoritmo a modelos ya determinados anteriormente. Esto lo haremos con el fin de ilustrar la efectividad del mismo y mostrar que si damos las dos funciones generatrices $z(r)$ y $\Pi(r)$ se puede obtener todas las soluciones esféricamente simétricas, estáticas y además anisótropas. El algoritmo será aplicado a tres modelos diferentes que son: el fluido anisótropo conformemente plano, el modelo de Bowers-Liang y el fluido con densidad no local [12]. El objetivo será introducir las condiciones de cada modelo para obtener las expresiones de $z(r)$ y $\Pi(r)$ para cada uno.

4.2.1. Fluido Anisótropo Confórmemente Plano

Iniciaremos aplicando el algoritmo extendido de Luis Herrera [12] a un fluido esféricamente simétrico y estático bajo la condición conformemente plano, que se obtiene a partir de la componente independiente del tensor de Weyl [1, 2, 3, 4] y es la siguiente:

$$\frac{\nu''}{2} + \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu' - \lambda'}{2r} + \frac{1 - e^\lambda}{r^2} = 0. \quad (4.14)$$

Esta ecuación puede ser integrada [12], resultando en

$$e^{\nu/2} = C r \cosh \left(\int \frac{e^{\lambda/2}}{r} dr \right), \quad (4.15)$$

donde C es una constante de integración. Ahora, reescribiendo (3.15) en términos de $z(r)$ se llega a

$$z = \frac{2}{r} + \frac{e^{\lambda/2}}{r} \tanh \left(\int \frac{e^{\lambda/2}}{r} dr \right). \quad (4.16)$$

Podemos observar que para un fluido bajo la condición conformemente plano se obtiene una expresión de la función generadora $z(r)$. Ahora, para completar el algoritmo se hallará la función generadora $\Pi(r)$ a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.14), se obtiene

$$\Pi = r \left(\frac{1 - e^\lambda}{r^2} \right)'. \quad (4.17)$$

Este modelo estará totalmente determinado si la función $z(r)$ es conocida. De esta manera las ecuaciones de campo podrán ser conocidas y el sistema estará resuelto.

4.2.2. Solución de Bowers-Liang

El modelo de Bowers y Liang [12] corresponde con un fluido esféricamente simétrico, estático, anisótropo y que posee una distribución homogénea de densidad de energía $\rho =$

$\rho_0 = \text{Constante}$. incorporando esta condición sobre ρ se puede obtener una expresión de e^ν que es

$$e^\nu = \left[\frac{3(1 - 2M/r_\Sigma)^{h/2} - (1 - 2m/r)^{h/2}}{2} \right]^{2/h}, \quad (4.18)$$

donde

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad M = \frac{4\pi}{3} r_\Sigma^3 \rho_0. \quad (4.19)$$

Una vez obtenida la expresión (3.18) la igualamos con la ecuación para e^ν en (3.6) del algoritmo extendido por Luis Herrera [12], con el fin de adquirir una expresión de la función generatriz $z(r)$ que viene dada por

$$z = \frac{\frac{2m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{(h/2)-1}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R_\Sigma}\right)^{h/2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{h/2}} + \frac{1}{r}, \quad (4.20)$$

donde $h = 1 - 2C = \text{Constante}$. Con $z(r)$ determinada, se busca ahora la otra función generadora $\Pi(r)$, resultando en

$$\Pi = -6C \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{R_\Sigma}\right)^{h/2}}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{(h/2)-1}} \quad (4.21)$$

A través de las ecuaciones (3.20) y (3.21) se pueden determinar todas las variables físicas del sistema estudiado y modelarlo. También se puede observar que si se elige $h = 1$ se reproduce la bien conocida solución interior de Schwarzschild [2, 3, 4, 12].

4.2.3. Solución Anisótropa con Ecuación de Estado No Local

Como último ejemplo a presentar, está la familia de soluciones que pueden ser halladas bajo la suposición de que la densidad de energía y la presión radial están relacionadas por una ecuación de estado no local de la forma

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r} + \frac{C}{2\pi r^3}, \quad (4.22)$$

donde C es una constante. Ahora introduciendo el resultado para ρ (3.12) del algoritmo se obtiene lo siguiente

$$P_r(r) = \frac{m'}{4\pi r^2} - \frac{m}{2\pi r^3} + \frac{C}{2\pi r^3}. \quad (4.23)$$

Usando las ecuaciones (3.11) y (3.23) se puede hallar una expresión para la función generatriz $z(r)$ de la forma

$$z = \frac{rm' - 3m + 2C + r}{r(r - 2m)} \quad (4.24)$$

y nuevamente con $z(r)$ obtenida, se puede encontrar la otra función generadora $\Pi(r)$, con lo cual se resuelven las ecuaciones de Einstein y se modela el sistema.

4.3. El Algoritmo Usando el Polítropo

En esta sección vamos a crear nuestro propio modelo uniendo la teoría de polítropos junto con el algoritmo expuesto previamente. Al desarrollar el algoritmo tendremos como ecuación adicional la ecuación de estado polítropa (2.62), la cual combinándola con las demás ecuaciones de campo podremos obtener todas las soluciones a nuestro sistema estudiado. Generar este modelo trae la ventaja de que en lugar de dar dos funciones generadoras, tendremos que dar solamente una, por el hecho de que la información adicional que se requiere vendrá expresada en la forma de la ecuación de estado polítropa [5, 10, 11].

Por ahora solamente trabajaremos con la ecuación de estado polítropa que depende de la densidad de energía (2.62) [11] y se desarrollará un nuevo algoritmo para obtener todas las soluciones interiores de un fluido estático, esféricamente simétrico y anisótropo cuya ecuación de estado es polítropa.

En primer lugar se construirá nuestro algoritmo de tal manera que al proveer únicamente solo una función generatriz el sistema estará resuelto. Posteriormente se aplicará nuestro método a modelos específicos con el fin de obtener los resultados que se obtienen en trabajos previos [11, 12, 14]. Desarrollamos a continuación nuestro procedimiento de dos formas diferentes, pero obteniendo los mismos resultados y la misma función generatriz.

4.3.1. Método I

Como hemos mencionamos, queremos desarrollar un algoritmo que incluya la ecuación de estado polítropa y que solo requiera de una función generatriz para poder llegar a las soluciones del sistema. Partiremos de la ecuación de estado para el caso II (2.62), las ecuaciones de campo (3.2), (3.3) y (3.4) y la definición de función masa (1.26) junto con su derivada (2.72). Estas ecuaciones las reescribiremos de manera conveniente tal que demuestren que solo se necesita de una sola función generatriz para obtener cualquier solución polítropa. Definiremos la variable métrica como

$$e^{-\lambda} \equiv Y(r). \quad (4.25)$$

Ahora sustituimos la ecuación (3.25) en (1.26) y despejamos $m(r)$ para llegar a

$$m = \frac{r(1-Y)}{2}. \quad (4.26)$$

Derivando (3.26) resulta,

$$m' = \frac{1-Y}{2} - \frac{rY'}{2} \quad (4.27)$$

y ahora la igualamos con (2.72) obteniendo

$$\frac{1-Y}{2} - \frac{rY'}{2} = 4\pi r^2 \rho. \quad (4.28)$$

De (3.28) despejamos la densidad de energía ρ llegando a la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY'), \quad (4.29)$$

donde podemos notar que si damos la función generadora Y , podemos conocer la distribución de densidad de energía interior al fluido.

Vamos a escribir otras variables físicas como ν y P_r en función de Y . Para obtener la expresión de P_r basta con sustituir la expresión de ρ (3.29) en la ecuación de estado (2.62) para obtener

$$P_r = K \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^\gamma, \quad (4.30)$$

donde se puede apreciar que (3.30) depende únicamente de la función Y , por lo que si es dada, se puede obtener la distribución de presión radial interior del sistema estudiado.

Para llegar a ν sustituiremos la expresión obtenida de P_r en la ecuación de campo (3.3) lo cual queda como

$$8\pi K \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^\gamma = -\frac{1}{r^2} + Y \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (4.31)$$

y reacomodando los términos se llega a

$$\frac{\nu'}{r} = \frac{8\pi K \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^\gamma + \frac{1}{r^2}}{Y} - \frac{1}{r^2}. \quad (4.32)$$

Esta ecuación (3.32) se integra de manera indefinida y así obtenemos una expresión para ν que solo dependerá de la función generadora Y

$$\nu = \int \left[\frac{8\pi K r \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^\gamma + \frac{1}{r}}{Y} - \frac{1}{r} \right] dr + C. \quad (4.33)$$

Para obtener la expresión de $P_\perp$ que solo dependa de Y es necesario usar la ecuación de campo (3.4) y sustituir los valores de λ' , ν' y ν'' las cuales se pueden hallar a partir de

las expresiones (3.33) y (3.25).

$$\begin{aligned}
P_{\perp} = \frac{Y}{32\pi} \left\{ 2 \left[\frac{8\pi K \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma} + 8\pi K r \gamma \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma-1} \left(\frac{-2Y'-rY''}{8\pi r^2} - \frac{1-Y-rY'}{4\pi r^3} \right) - \frac{1}{r^2}}{Y} \right. \right. \\
- \left. \left(\frac{8\pi K r \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma} + \frac{1}{r}}{Y^2} \right) Y' + \frac{1}{r^2} \right] + \left(\frac{8\pi K r \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma} + \frac{1}{r}}{Y} - \frac{1}{r} + C \right)^2 \\
+ \frac{Y'}{Y} \left(\frac{8\pi K r \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma} + \frac{1}{r}}{Y} - \frac{1}{r} + C \right) \\
\left. + 2 \left[\frac{8\pi K r \left[\frac{1-Y-rY'}{8\pi r^2} \right]^{\gamma} + \frac{1}{r}}{Y} - \frac{1}{r} + C - \frac{Y'}{Y} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

4.3.2. Método II

Ahora obtendremos los mismos resultados para ρ , P_r , $P_{\perp}$ y ν aplicando un procedimiento diferente. Comenzaremos por sustituir la ecuación de estado (2.62) en la ecuación de campo (3.3) para obtener

$$8\pi K \rho^{\gamma} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \tag{4.35}$$

y dentro de ella sustituiremos la ecuación de campo (3.2) para que la ecuación (3.35) quede como

$$8\pi K \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \right) \right]^{\gamma} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right). \tag{4.36}$$

Usamos la misma función generadora (3.25) definida anteriormente, junto con su derivada en la ecuación (3.36) y llegamos a

$$8\pi K \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{r^2} - Y \left(\frac{1}{r^2} - \frac{Y'}{rY} \right) \right) \right]^{\gamma} = -\frac{1}{r^2} + Y \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right). \tag{4.37}$$

Procedemos con el despeje de ν' con el fin de integrarla y luego obtener una expresión para la misma. Al despejar la ecuación (3.37) se convierte en

$$\frac{\nu'}{r} = \frac{8\pi K \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{Y}{r^2} - \frac{Y'r}{r^2} \right) \right]^{\gamma} + \frac{1}{r^2}}{Y} - \frac{1}{r^2} \tag{4.38}$$

y ahora integramos de manera indefinida para llegar a la expresión de ν que solamente depende de la función generadora Y

$$\nu = \int \left[\frac{8\pi K r \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - Y'r) \right]^{\gamma} + \frac{1}{r}}{Y} - \frac{1}{r} \right] dr + C. \tag{4.39}$$

Encontramos que la ecuación (3.39) es idéntica a la ecuación (3.33), por lo tanto, por medio de este método se pueden llegar a los mismos resultados de P_r , $P_\perp$ y ρ . Ambos métodos para nuestro algoritmo son equivalentes y si damos una función generadora $Y(r)$ conocida podemos resolver el sistema. Finalmente escribimos el elemento de línea en función de Y sustituyendo (3.25) y (3.33) en (3.1)

$$ds^2 = -e^{\int \left[\frac{8\pi K r \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1-Y-Y'r) \right]^{\gamma + \frac{1}{r}}}{Y} - \frac{1}{r} \right] dr + C} dt^2 + \frac{dr^2}{Y} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.40)$$

Analizando el elemento de línea (3.40) podemos observar que únicamente depende de la función generadora Y , por lo tanto si es conocida esta función, ya toda la estructura del espacio-tiempo interior a la distribución estudiada esta totalmente determinada.

4.4. Aplicación del Algoritmo a Casos Particulares y Modelos

Una vez obtenida toda la estructura de nuestro algoritmo, hace falta obtener evidencia de que puede ser utilizado para la resolución de problemas reales, para ello, en esta sección se le aplicará nuestro algoritmo a algunos modelos conocidos, con el fin de corroborar los resultados. Los modelos que serán estudiados a continuación son el de Bowers y Liang, que describe un fluido anisótropo de densidad constante y el modelo dado por la ecuación de Cosenza [10, 11, 14].

4.4.1. Modelo de Bowers y Liang

El modelo de Bowers y Liang describe un fluido anisótropo, esféricamente simétrico y de densidad constante, es decir $\rho = \rho_0 = \text{Constante}$. En esta sección deseamos encontrar una función generatriz Y que pueda describir este sistema y demostrar que es idéntico a usar el algoritmo extendido de Lake por Luis Herrera [12].

Para este modelo se requiere una densidad de energía ρ constante en todo el fluido, lo que según la ecuación de estado politropa (2.62) implica que la presión radial P_r debe ser constante también, sin embargo esto último no es posible, ya que la condición de acople con la región exterior [1, 2, 5] (1.50) (solucion de vacio de Schwarzschild) nos indica que la presión en la superficie debe ser cero $P_{r_\Sigma} = 0$. Por lo tanto nuestro algoritmo con la ecuación politropa no puede describir el modelo de Bowers y Liang.

4.4.2. Modelo de Cosenza

La ecuación de estado de Cosenza [10, 11, 14] está dada por la expresión (2.92), que describe varios tipos de anisotropía. En esta sección combinaremos la ecuación (2.92) con nuestro algoritmo para obtener resultados conocidos, tales como la expresión para ν , la ecuación TOV adimensional y finalmente se obtendrá una función generatriz Y que describa los mismos sistemas que la ecuación de Cosenza.

Comenzaremos usando la expresión obtenida de nuestro algoritmo (3.38) donde despejamos ν' y cambiamos $\gamma = 1 + 1/n$ para obtener

$$\nu' = \frac{8\pi K}{Y} \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^{1+1/n} r + \frac{1}{Yr} - \frac{1}{r}. \quad (4.41)$$

Ahora, sustituimos la ecuación de ρ (3.29) en (3.42) y se llega a

$$\nu' = \frac{8\pi K}{Y} [\rho]^{1+1/n} r + \frac{1}{Yr} - \frac{1}{r}, \quad (4.42)$$

donde insertamos los cambios de variable (2.69) y (2.81) para transformar la ecuación anterior en

$$\frac{d\nu}{d\xi} = \frac{8\pi P_{rc} \psi^{n+1} \xi}{YA^2} + \frac{1}{Y\xi} - \frac{1}{\xi}, \quad (4.43)$$

donde $P_{rc} = K\rho_c^{1+1/n}$. Ahora definimos la nueva variable α como

$$\alpha = \frac{P_{rc}}{\rho_c}, \quad (4.44)$$

la cual introduciremos dentro de la ecuación (3.43) junto con el otro cambio de variable (2.69) que incluye a la constante A . Haciendo ésto la ecuación queda con la siguiente forma

$$d\nu = \left[\frac{2\alpha^2 (n+1) \psi^{n+1} \xi}{Y} + \frac{1}{Y\xi} - \frac{1}{\xi} \right] d\xi. \quad (4.45)$$

Como vimos anteriormente, a partir de la ecuación de Cosenza [14] se puede obtener la ecuación (2.97), la cual nos resulta útil porque despejando se encuentra una expresión para $d\nu$ dada por la siguiente ecuación

$$d\nu = -\frac{2(n+1)\alpha d\psi}{h(1+\alpha\psi)}. \quad (4.46)$$

Ahora, igualando las expresiones de $d\nu$ (3.45) y (3.46) obtenemos la ecuación

$$\frac{2\alpha^2 (n+1) \psi^{n+1} \xi^2 + 1}{Y\xi} - \frac{1}{\xi} = -\frac{2(n+1)\alpha}{h(1+\alpha\psi)} \frac{d\psi}{d\xi}. \quad (4.47)$$

Introduciendo los cambios de variable (2.69) y (2.70) en (3.26) podemos obtener la siguiente relación

$$Y = 1 - \frac{2\alpha(n+1)v}{\xi}, \quad (4.48)$$

que usaremos para sustituir en la ecuación (3.47) y así poder despejar $\frac{d\psi}{d\xi}$. Realizando ésto la ecuación queda de esta manera

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\frac{2\alpha^2(n+1)\psi^{n+1}\xi^2+1}{\xi\left(1-\frac{2\alpha(n+1)v}{\xi}\right)} - \frac{1}{\xi}}{-\frac{2(n+1)\alpha}{h(1+\alpha\psi)}} \quad (4.49)$$

y manejando algebraicamente los términos de manera conveniente se puede escribir de la siguiente forma

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \frac{\left[1 - \frac{2\alpha(n+1)v}{\xi}\right]}{1 + \alpha\psi} + h \left[\alpha\psi^{n+1}\xi^3 + v \right] = 0, \quad (4.50)$$

que es la ecuación TOV adimensional (2.94) obtenida en el capítulo anterior usando la ecuación de Cosenza [14]. Este resultado nos da evidencia que nuestro algoritmo con el Polítropo puede resultar útil y describir modelos ya existentes, específicamente los modelos que describe la ecuación de Cosenza, sin embargo intentaremos llegar a otro resultado conocido.

Se partirá de la ecuación de Cosenza (2.92) [11, 14]. En ella sustituiremos las expresiones obtenidas en nuestro algoritmo para P_r (3.30) y ρ (3.29) con el fin de obtener una expresión para e^ν . Sustituyendo esas expresiones obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{n}\right) K \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^{\frac{1}{n}} \left[\frac{-Y' - Y' - rY''}{8\pi r^2} - \frac{2(1 - Y - rY')}{8\pi r^2} \right] \\ &= -h \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') + K \left[\frac{1}{8\pi r^2} (1 - Y - rY') \right]^{1+\frac{1}{n}} \right] \frac{\nu'}{2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ahora introducimos las variables adimensionales (2.69), (2.70) y (3.44) en la ecuación (3.50) para llegar a

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{n} \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(1 - Y - \xi \frac{dY}{d\xi} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\xi^2\alpha} \left[\xi \frac{d^2Y}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} - \frac{2Y}{\xi} \right] \\ &= \frac{h}{2} \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(1 - Y - \xi \frac{dY}{d\xi} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \\ &+ \alpha \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(1 - Y - \xi \frac{dY}{d\xi} \right) \right]^{1+\frac{1}{n}} \left[\frac{d\nu}{d\xi} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

En la ecuación anterior sustituimos la expresión (3.48) para Y y así obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{n} \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(2\alpha(n+1) \frac{dv}{d\xi} \right) \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\xi^2\alpha} \left[\xi \left(\frac{2\alpha(n+1)}{\xi} \left(-\frac{d^2v}{d\xi^2} + \frac{dv}{\xi d\xi} - \frac{v}{\xi^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\alpha(n+1)}{\xi^2} \left(-\frac{dv}{d\xi} + \frac{v}{\xi} \right) \right) + \frac{2}{\xi} - \frac{2}{\xi} \left(1 - \frac{2\alpha(n+1)v}{\xi} \right) \right] \\
& = \frac{h}{2} \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(2\alpha(n+1) \frac{dv}{d\xi} \right) \right. \\
& \left. + \alpha \left[\frac{1}{2\xi^2\alpha(n+1)} \left(2\alpha(n+1) \frac{dv}{d\xi} \right) \right]^{1+\frac{1}{n}} \right] \frac{dv}{d\xi}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Introduciremos dentro de la ecuación (3.53) la expresión de $\frac{dv}{d\xi}$ obtenida en (2.83). Aplicando ésto la ecuación toma la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\xi^2n} \left[\frac{\xi^2\psi^n}{\xi^2} \right] \left[2\alpha(n+1) \left(-2\xi\psi^n - n\xi^2\psi^{n-1} \frac{d\psi}{d\xi} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\xi^2\psi^n}{\xi} - \frac{v}{\xi^2} + \frac{\xi^2\psi^n}{\xi} - \frac{v}{\xi^2} \right) + \frac{2}{\xi} - \frac{2}{\xi} + \frac{4\alpha(n+1)v}{\xi^2} \right] \\
& = \frac{h}{2} \left[\frac{\xi^2\psi^n}{\xi^2} + \alpha \left[\frac{\xi^2\psi^n}{\xi^2} \right]^{1+\frac{1}{n}} \right] \frac{d\psi}{d\xi}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Simplificando e integrando (3.54) de manera indefinida obtenemos el siguiente resultado

$$\nu = -(n+1) \ln(1 + \alpha\psi)^{\frac{2}{h}} + C, \tag{4.55}$$

donde C es una constante de integración. A partir de (3.55) buscamos una expresión para e^ν ,

$$e^\nu = C(1 + \alpha\psi)^{-\frac{2(n+1)}{h}}. \tag{4.56}$$

Para obtener la forma de la constante de integración C aplicamos las condiciones en el centro $\psi = 1$ y frontera (1.33) y (1.50) [11] y así de esta manera obtenemos el siguiente resultado

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2M}{R} \right) (1 + \alpha\psi)^{-\frac{2(n+1)}{h}}, \tag{4.57}$$

que es el mismo resultado obtenido en la ecuación (2.103) del capítulo 2 para e^ν . Por lo tanto, a través de nuestro algoritmo también se pueden obtener los resultados hallados previamente en el capítulo 2 usando solamente el polítropo y la ecuación de Cosenza [14]. Para finalizar vamos a obtener una expresión de la función generatriz Y para este modelo en particular. Partiremos de la ecuación (3.47) en la cual vamos a despejar Y y llegar a

$$Y = \frac{2\alpha^2(n+1)\psi^{n+1}\xi^2 + 1}{-\frac{2(n+1)\alpha}{h(1+\alpha\psi)} \frac{d\psi}{d\xi} + 1} \tag{4.58}$$

Insertamos la ecuación (3.49) dentro de la ecuación (3.58) y así obtenemos una expresión para Y en función de v , ψ y ξ que sería

$$Y = \frac{2\alpha (n+1) \psi^{n+1} \xi^4 - 4\alpha^3 (n+1)^2 \psi^{n+1} \xi^3 v + \xi^2 - 2(n+1) v \alpha \xi}{2(n+1) v \alpha \xi + 2\alpha^2 \xi^4 \psi^{n+1} (n+1) + \xi^2 - 2\xi (n+1) v \alpha}. \quad (4.59)$$

Esta es la función generatriz que corresponde para los modelos dados por la ecuación de Cosenza [14, 11]. Las ecuaciones (3.50), (3.57) y (3.59) muestran que nuestro algoritmo usando el polítopo es de utilidad y proporciona una manera alternativa de obtener las soluciones del espacio-tiempo de los sistemas estudiados, únicamente dando como conocida la función Y .

CAPÍTULO 5

CONCLUSIÓN

En este trabajo se realizó un estudio en el campo de la relatividad general, con el objetivo de desarrollar un método con el cual sea plausible obtener todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein, para sistemas esféricamente simétricos, estáticos, anisótropos y que cumplan con la ecuación de estado polítropa [5, 10, 11], aplicando el algoritmo de Lake extendido por Luis Herrera al caso anisótropo [12].

Para realizar el estudio fue necesario profundizar en los siguientes temas; las ecuaciones de campo relativistas de Einstein, las condiciones de juntura y acoplamiento [1, 2, 3, 4, 8, 9], la ecuación de estado polítropa Newtoniana isótropa, anisótropa, junto con sus extensiones a la relatividad general [5, 6, 7, 10, 11].

Este estudio lo desarrollamos en base al algoritmo de Lake [13], con el cual se pueden obtener todas las soluciones interiores para sistemas esféricamente simétricos, estáticos e isótropos haciendo uso de una función generadora y la "importante" extensión del mismo realizada por Luis Herrera [12], con el cual introduce anisotropía en el sistema y hace uso de dos funciones generadoras, además de la aplicación a modelos específicos [12, 13].

Desarrollamos el método introduciendo la ecuación de estado del polítropo [5, 10, 11] como la información adicional necesaria que requiere el sistema y así plantear un algoritmo similar al de Lake (o al extendido por Luis Herrera) [12, 13], donde obtenemos todas las soluciones internas que se modelan con polítropos anisótropos. De esta forma podemos resolver las ecuaciones de Einstein y determinar completamente el sistema necesitando una función generatriz $Y(r)$.

Al finalizar nuestro proyecto se lograron obtener expresiones de las diferentes variables físicas (ρ , P_r y $P_\perp$) y del elemento de línea interior a un fluido esféricamente simétrico,

estático, anisótropo y polítropo [1, 12], dependiente de una función generatriz $Y(r)$. Si proveemos la función Y , las ecuaciones de Einstein quedarán resueltas y por lo tanto habremos determinado toda la estructura interna del espacio-tiempo del sistema bajo estudio.

Un segundo resultado fue encontrado al aplicar nuestro método a dos modelos estudiados previamente, el de Bowers-Liang [12] y el modelo de Cosenza [11, 14]. Encontramos que al aplicar nuestro método al modelo de Bowers-Liang no es posible que este pueda describir este tipo de sistemas, ya que este modelo supone la condición de densidad de energía ρ constante en todo el fluido [12], por lo tanto al utilizar la ecuación de estado polítropa [10, 11], junto con la condición de acoplamiento $P_{r_\Sigma} = 0$ [1] se obtiene una solución trivial.

Por otro lado, aplicamos nuestro método al modelo de Cosenza [14], el cual describe sistemas esféricamente simétricos, estáticos y anisótropos, haciendo uso de una expresión general que abarca gran cantidad de modelos anisótropos y permite volver al caso isótropo continuamente [10, 11, 14]. Se obtuvo un resultado satisfactorio, ya que logramos describir el modelo completamente, debido a que obtuvimos las mismas expresiones para todas las variables físicas. Este método entonces genera una vía alternativa para poder resolver este sistema, al obtener una función generatriz específica. Al aplicar nuestro método para hallar la estructura interna del modelo de Cosenza [14], se obtiene una función generatriz que reproduce, en otro contexto, los resultados conocidos del modelo.

Para finalizar la discusión planteamos, por completitud, las siguientes extensiones de este trabajo, que pueden servir de insumos para futuras investigaciones. Una posible extensión pudiera ser aplicar nuestro método a fluidos anisótropos que cumplan con la condición conformemente plano, esto es, que las componentes independientes del tensor de Weyl se anulen [1, 12, 17]. En el caso estático, esféricamente simétrico y anisótropo existe una sola componente independiente que se anula, por lo tanto, la métrica correspondiente a estos sistemas es una combinación de la métrica plana multiplicada por una función adicional de las variables, esto es una transformación conforme. Esto se podría realizar con el fin de corroborar si los resultados obtenidos para el elemento de línea bajo esta condición son los mismos que se encontraron siguiendo la vía usual [12, 17].

Adicionalmente sería conveniente extender este algoritmo para el caso donde la ecuación polítropa de estado se trabaja usando la densidad de masa bariónica y no con la densidad de energía, como hemos realizado en nuestro caso, ya que existen modelos que pueden ser descritos formalmente con esta densidad.

En último lugar sería interesante aplicar el algoritmo a sistemas que posean una solución exterior diferente a la solución de vacío de Schwarzschild, como por ejemplo sis-

temas cargados eléctricamente, que se acoplarían en la frontera a la solución exterior de Reissner-Nordstrom [2]: solución exacta con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein que describe el campo gravitatorio de un cuerpo masivo con carga neta diferente de cero.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Goran, L. Herrera, and J. Jimenez. II Escuela venezolana de relatividad, campos y astrofisica. Universidad de Los Andes Facultad de Ciencias Merida, Venezuela, November 1996.
 - [2] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, Introduction to general relativity. New York, 1975.
 - [3] W. Rindler, Relativity special, general, and cosmology. University of Texas, 2006.
 - [4] J. Foster And J. D. Nightingale, A short course in General Relativity. New York, 1979.
 - [5] R. Kippenhahn and A. Weigert, Stellar Structure and Evolution. Springer Verlag, Berlin, 1990.
 - [6] C. Hansen and S. Kawaler, Stellar Interiors: Physical Principe Structure and Evolution. Springer Verlag, Berlin, 1994.
 - [7] S. Chandrasekhar, An introduction to the stydy of Stellar Structure. University of Chicago, 1939.
 - [8] D. McMahon, Relativity Demystified. McGraw-Hill Companies, United States 2006.
 - [9] H. Bondi, Proc. R. Soc. Lond. A 281, 39-48, (1964).
 - [10] L. Herrera and W. Barreto, Phys. Rev. D 87, 087303, (2013).
 - [11] L. Herrera and W. Barreto, Phys. Rev. D 88, 084022, (2013).
-

- [12] L. Herrera, J. Ospino and A. Di Prisco, Phys. Rev. D 77, 027502, (2008).
 - [13] K. Lake, Phys. Rev. D 67, 104015, (2003).
 - [14] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi and L. Witten, J. Math. Phys. (N.Y) 22, 118, (1981).
 - [15] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Martin, J. Ospino, N. O. Santos and O. Troconis, Phys. Rev. D. 69, 084026, (2004).
 - [16] L. Herrera and N. O. Santos, Phys. Rev. 286, 53, (1997).
 - [17] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino, E. Fuenmayor, J. Math. Phys. 42, 2129, (2001).
 - [18] L. Herrera, A. Di Prisco, W. Barreto and J. Ospino, Gen. Relativ. Gravit. 46, 1827, (2014).
 - [19] R. Tooper, Astrophys. J. 143, 465(1966).
 - [20] S. Rahman and M. Visser, Classical quantum gravity 16, 935, (2002).
-