

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ENFOQUE MULTIFRACTAL DE REGISTROS GEOFÍSICOS DE POZO EN LAS SECCIONES DE INTERÉS DEL OCCIDENTE DE VENEZUELA

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela para
optar por el Título de Ingeniero Geofísico
Por el Br. Martínez R., Modesto

Caracas, Noviembre de 2003

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ENFOQUE MULTIFRACTAL DE REGISTROS GEOFÍSICOS DE POZO EN LAS SECCIONES DE INTERÉS DEL OCCIDENTE DE VENEZUELA

Tutor Académico: Msc. Figueroa Marcos

Tutor Industrial: Msc. González Manuel

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela para
optar por el Título de Ingeniero Geofísico
Por el Br. Martínez R., Modesto

Caracas, Noviembre de 2003

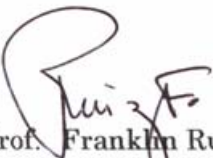
Caracas, 7 de noviembre de 2003

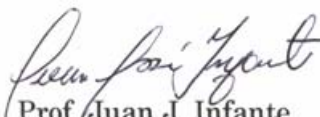
Los abajo firmantes, integrantes de el Jurado designado por el consejo de Escuela de Ingeniería Geofísica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller Modesto Martínez Robles, titulado:

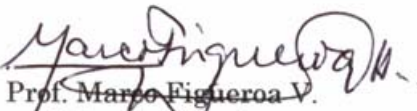
“Enfoque Multifractal de Registros Geofísicos de pozo en las secciones de interés del Occidente de Venezuela”

Consideran, que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Geofísico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.

En fe de lo cual nos suscribimos,


Prof. Franklin Ruiz
Miembro del Jurado

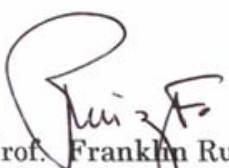

Prof. Juan J. Infante
Miembro del Jurado


Prof. Marco Figueroa V.
Tutor Académico

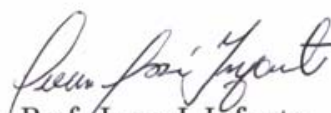
Caracas, 7 noviembre de 2003

Los abajo firmantes, integrantes de el Jurado examinador designado por el Consejo de Escuela de Geología, Minas y Geofísica para evaluar el Trabajo Especial de Grado titulado: "ENFOQUE MULTIFRACTAL DE POZO EN LAS SECCIONES DE INTERÉS DEL OCCIDENTE DE VENEZUELA, presentado por el Br. MODESTO MARTÍNEZ R. Cédula de Identidad N° 82.042.676 para obtener el título de Ingeniero Geofísico, en el acto de defensa correspondiente, acordaron por unanimidad otorgar MENCIÓN PUBLICACIÓN a dicho Trabajo Especial de Grado, por considerar que el mismo constituye un aporte original en el desarrollo de una metodología que permite evidenciar que los registros gamma pueden ser utilizados para obtener dimensiones fractales cónsonas con la existencia de hidrocarburos y por ende, disminuyen el riesgo de exploración, dado que la metodología usada se basa en las técnicas numéricas más refinadas del ultimo estado del arte.

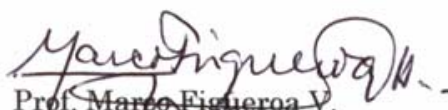
En fe de lo cual nos suscribimos,



Prof. Franklin Ruiz
Miembro del Jurado



Prof. Juan J. Infante
Miembro del Jurado



Prof. Marco Figueroa V.
Tutor Académico

DEDICATORIA

A Dios le doy las gracias por ser mi guía en el transcurso de mi carrera y por la fe que me inspiró.

A mi madre Bárbara Robles de Martínez, y a mi padre Gebert Luis Martínez.

A mi Abuela Eliselbia.

A mi hija Naomi Stephanie, que en los últimos momentos del desarrollo del trabajo de tesis, se convirtió en mi fuente de inspiración y completó la fuerza que necesitaba para el feliz término de mi meta.

A Patricia Coll, por estar a mi lado en todo momento y por brindarme su amor incondicional.

A mis hermanos Herbert Luis, Hanny Carolina y Hubert Luis, esperando que este logro sea fuente de inspiración para ellos.

AGRADECIMIENTO

Institucional

Al departamento de Geofísica de la Escuela de Geología, Minas y Geofísica de la Universidad Central de Venezuela, por permitir culminar mis estudios universitarios, realizar este trabajo especial de grado y poder optar al título de Ingeniero Geofísico.

Académico

Al profesor Marco Figueroa por aceptar y guiar el desarrollo del presente trabajo, sin importar las adversidades encontradas, al Msc. Manuel González por proponer el tema y contribuir generosamente con información necesaria para el desarrollo de este trabajo.

Personal

A mis padres Bárbara Robles de Martínez y Gebert L. Martínez por el apoyo brindado durante mis estudios y en el desarrollo de este trabajo. A Patricia Coll, por el apoyo brindado. A mi gran amigo Tsuyoshi Arikuma por prestarme su ayuda desinteresadamente. A Enrique y a Yolima por enseñarme y guiarme en mis momentos más difíciles. A mis compañeros de estudios y amigos, Carlos Espinoza, Carlos Vargas, Franklin Tapias, Rosmari Usta, Luis Mata, Ernesto, Rosaura Avendaño, Josmat Rodríguez, y demás personas (que por razones de memoria no los he mencionado y deseo me disculpen) con las cuales he compartido y aprendido.

Martínez R., Modesto

ENFOQUE MULTIFRACTAL DE REGISTROS GEOFÍSICOS DE POZO EN LAS SECCIONES DE INTERÉS DEL OCCIDENTE DE VENEZUELA

Tutor Académico: Msc. Figueroa Marcos, **Tutor Industrial:** Msc. González Manuel. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Geología, Minas y Geofísica (Ingeniería Geofísica). Año 2003, 250 páginas.

Palabras Claves: Petrofísica, Registros Rayos Gamma, Dimensión Fractal.

Resumen: Este trabajo explora, hasta que punto la información que se obtiene de los registros de rayos gamma, está dominada por el azar o por una regla determinista. A su vez se calcula la dimensión fractal de dicho conjunto de datos. Para este estudio se utilizaron datos de rayos gamma, proveniente de un pozo perforado en la Cuenca de Maracaibo.

Los datos de rayos gamma, pertenecen al Pozo DM-159 del campo Mara Oeste. El Campo Mara Oeste está ubicado al noroeste de Maracaibo, a unos 8 Km. del campo Mara y a unos 25 Km. al norte del Campo la Paz. Estos datos pertenecen a una sección del Grupo Cogollo, el cual está conformado por las formaciones: Maraca, Lisure y Apón.

La metodología implementada para desarrollar este trabajo se dividió en las siguientes fases: primero, una etapa investigativa del formalismo fractal y multifractal donde se recabó toda la información necesaria, para así poder aplicarla en el área de la Geofísica; como segundo paso se procedió a elegir 4 métodos más confiables para calcular las dimensiones de Capacidad D_0 , de Información D_1 y de Correlación D_2 , para cada formación involucrada. Tales métodos fueron: Espectro de Potencia, Radio de Giro, Variograma y el método por Conteo de Caja. Como tercer paso se propusieron 2 modelos teóricos para determinar el espectro multifractal

correspondiente a cada formación. Dichos modelos propuestos fueron: Línea Cargada y Conjunto Triádico de Cantor.

Los métodos más confiables para determinar la dimensión fractal de un conjunto de datos, fueron el de el Espectro de Potencia y el de el Radio de Giro.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTOS	vi
RESUMEN	vii
ÍNDICE GENERAL	ix
LISTA DE FIGURAS Y GRÁFICAS	xiii
LISTA DE TABLAS	xix

CAPÍTULO I

1.0._ Introducción	1
1.1._ Definición del problema	3
1.2._ Objetivos	4
1.2.1._ Objetivo general	4
1.2.2._ Objetivos específicos	4
1.3._ Justificación	5
1.3.1._ Académica	5
1.3.2._ Industrial	5
1.4._ Ubicación del área de estudio	6
1.5._ Antecedentes	7

CAPÍTULO II

2.0._ Aspecto geológico	24
2.1._ Cuenca de Maracaibo	24
2.1.1._ Geología regional	24
2.1.1.1._ Evaluación geológica de la cuenca	27
2.1.2._ Geología local	31
2.1.2.1._ Interpretación estructural	31
2.1.2.2._ Estratigrafía	33
2.1.2.3._ Sedimentología	38

CAPÍTULO III

3.0._ Marco teórico	41
3.1._ Petrofísica	41
3.1.1._ Fundamentos de la interpretación cuantitativa de perfiles	42
3.1.1.1._ Evaluación de los parámetros relevantes del reservorio	42
3.1.2._ Definiciones y principios básicos de los perfiles nucleares	44
3.1.2.1._ Radioactividad	44
3.1.2.2._ Isótopos	44
3.1.2.3._ Principios físicos. Fuentes de radioactividad natural	46
3.1.2.3.1._ Ley de desintegración	46
3.1.3._ Registro de pozo a utilizar	51
3.1.3.1._ Perfiles de rayos gamma	51
3.1.3.2._ Unidades del rayo gamma	52
3.1.3.3._ Detectores de radiación utilizados en la industria	52
3.1.3.4._ Calibración del perfil – rayos gamma	58
3.1.3.5._ Respuestas del rayo gamma	58
3.1.3.6._ Aplicaciones del registro de rayos gamma	59
3.1.3.7._ Resolución del aparato	61
3.1.3.8._ Variaciones estadísticas y velocidades del registro	63
3.1.3.9._ Criterio de selección	66
3.1.3.10._ Limitaciones de la herramienta de rayos gamma	67
3.1.3.11._ Respuesta obtenida del espectro del rayo gamma	68
3.1.3.12._ Estimación del volumen de arcillosidad	69
3.2._ Elementos de la teoría de probabilidades y estadística	74
3.2.1._ Objetivo y motivación	74
3.2.2._ Nociones fundamentales	75
3.2.3._ Nociones de clases o campo Booleano	85
3.2.4._ Noción de medida	87
3.2.4.1._ Medida probabilística	89
3.2.4.2._ Propiedades de la medida probabilística y Cálculo de	

probabilidades	89
3.2.5._ Variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad	97
3.2.5.1._ Distribución de probabilidades binomial	101
3.2.5.2._ Distribución de Poisson	103
3.2.6._ Características numéricas de las magnitudes aleatorias	107
3.3._ Diferentes medidas y dimensiones fractales	112
3.3.1._ Nociones fundamentales	112
3.3.2._ Relación entre la medida Lebesgue y Hausdorff	128
3.3.2.1._ Definición de dimensión de Caja	132
3.3.2.2._ Definición de dimensión de Hausdorff	133
3.3.3._ Entropía y dimensión de Información	134
3.3.4._ Dimensión de Correlación	147

CAPÍTULO IV

4.0._ Metodología	151
4.0.1._ Etapas y Procesos Involucrados en la Investigación	151
4.0.2._ Marco Geológico Estructural	152
4.1._ Origen de las Series Temporales	156
4.2._ Extracción de información Geométrica a partir de una Serie Temporal	159
4.3._ Enfoque Estadístico de las Series de Datos Adquiridos	161
4.4._ Métodos para Determinar la Dimensión Fractal	168
4.4.1._ Espectro de Potencia	169
4.4.2._ Método del Radio de Giro	177
4.4.3._ Variograma	179
4.4.4._ Método del Conteo de Caja	185
4.5._ Dimensión Generalizada y Multifractales	189
4.5.1._ Espectro Mutifractal $f(\alpha)$ Vs α	194

4.5.2._ Determinación Práctica de $\tau(q)$	201
4.5.3._ Hipótesis de Trabajo, Modelos para el Espectro $f(\alpha)$	202

CAPÍTULO V

5.0._ Análisis y Resultados	204
5.1._ Presentación de los primeros Retornos e Histogramas correspon - dientes a las diferencias de Amplitudes en las formaciones involucradas	204
5.2._ Cálculo de la dimensión fractal utilizando la Transformada de Fourier y el Espectro de Potencia	212
5.3._ Cálculo de la dimensión fractal utilizando Radio de Giro	223
5.4._ Cálculo de la dimensión fractal utilizando el Variograma	224
5.5._ Cálculo de la dimensión de Capacidad, de Información y Cuadrática utilizando el Histograma	236
5.6._ Determinación del Espectro Multifractal	249
5.7._ Espectro Multifractal Práctico formación Maraca	255

CAPÍTULO VI

6.0._ Conclusiones	258
6.1._ Recomendaciones	261
Bibliografías	262

LISTA DE FIGURAS Y GRÁFICAS

Figura I-1: Ubicación Geográfica del Campo Mara Oeste	6
Figura I-2: Gráfica de la función Weierstrass	9
Figura I-3: Conjunto Cantor	13
Figura II-1: Ubicación y Sistema regional de fallas en la Cuenca de Maracaibo	26
Figura II-2: Sección Geológica, Norte-Sur, Cuenca de Maracaibo	30
Figura II-3: Mapa estructural en el tope del Miembro Socuy de la Formación Colón mostrando la distribución de los pozos en el Campo Mara Oeste	32
Figura II-4: Sección sísmica ilustrando la estructura principal en el Campo Mara Oeste	32
Figura III-1: Isótopo del Hidrógeno	45
Figura III-2: Distribución de los rayos gamma para los tres isótopos que ocurren en forma natural	50
Figura III-3: (a) Dispersión Compton, (b) Efecto Fotoeléctrico, (c) Producción de Pares	56
Figura III-3d: Región dominante de los tres efectos en la interacción de los rayos gamma	57
Figura III-4: Respuesta del rayo gamma	60
Figura III-5: Representación esquemática de la distorsión de la resolución de una distribución “ideal” $F(x)$	62
Figura III-6a: Resolución de la herramienta para una $CT = 4\text{seg}$ con Velocidad de registro (pie/seg.) variable en el GR	65
Figura III-6b: Resolución de la herramienta para una $CT = 1\text{seg}$ con Velocidad de registro (pie/seg.) variable en el GR	65
Figura III-7: Línea de arena y línea de lutita (arcilla) de un registro de rayos gamma	70
Figura III-8a: Selección de GR_{cl} , GR_{sh} y GR en un registro común de rayos gamma	71

Figura III-8b: Representación grafica de la relación relativa entre el rayo gamma y el volumen de arcilla	72
Figura III-9: Aplicación de un espacio de resultados W sobre el espacio de la medida probabilística, mediante la función P , de variable real	81
Figura III-10: Función de distribución en el caso discreto (finito)	84
Figura III-11: (a) Eventos incompatibles; (b) Eventos complementarios e incompatibles; (c) Eventos compatibles inclusivos; (d) Eventos compatibles arbitrarios	92
Figura III-12: Función de distribución en el caso continuo	99
Figura III-13: Valor de D_H	118
Figura III-14: Rejilla unidimensional con unidades de longitud variable	121
Figura III-15: Representación de Medida	131
Figura III-16: Contraste de dimensión geométrica D_0 y D_1 respectivamente	146
Figura IV-1: Registro de Rayas Gamma del Pozo	154
Figura IV-2: Esquema de la Tasa de Sedimentación y Tiempo Geológico de La Cuenca de Maracaibo	155
Figura IV-3: Esquema de reducción para conocer un patrón	162
Figura IV-4: Forma de un Variograma Típico	181
Figura IV-5: Datos de Porosidad en un núcleo separado 1 centímetro	183
Grafica IV-1: Variograma experimental para los valores de la Figura IV-5	184
Gráfica V-1: Primer retorno de las primeras diferencias, formación Maraca	205
Gráfica V-2: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca	205
Gráfica V-3: Primer retorno de las primeras diferencias, formación Lisure	206
Gráfica V-4: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Lisure	207
Gráfica V-5: Primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón .	208
Gráfica V-6: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón	208
Gráfica V-7a: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de	

la formación Maraca	209
Gráfica V-7b: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca	210
Gráfica V-8: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Lisure	210
Gráfica V-9: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón	211
Gráfica V-10: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Maraca	212
Gráfica V-11: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Maraca	213
Gráfica V-12: Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Maraca	213
Gráfica V-13: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Maraca	214
Gráfica V-14: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial, ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Maraca	215
Gráfica V-15: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Lisure	216
Gráfica V-16: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Lisure	216
Gráfica V-17: Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Lisure	216
Gráfica V-18: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Lisure	217
Gráfica V-19: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la	

formación Lisure	218
Gráfica V-20: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial, ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Lisure	219
Gráfica V-21: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Apón	220
Gráfica V-22: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Apón	220
Gráfica V-23: Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón	221
Gráfica V-24: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón	222
Gráfica V-25: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón	223
Gráfica V-26: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial, ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Apón	224
Gráfica V-27: Logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Maraca	225
Gráfica V-28: Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Maraca	226
Gráfica V-29: Logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Lisure	226
Gráfica V-30: Intervalo del logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , válidos para la determinación de la dimensión fractal, de la formación Lisure	227
Gráfica V-31: Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro	

Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Lisure	228
Gráfica V-32: Intervalo del logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , válidos para la determinación de la dimensión fractal, de la formación Apón	229
Gráfica V-33: Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Lisure	229
Gráfica V-34: Variograma correspondiente a la formación Maraca	229
Gráfica V-35: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Maraca	231
Gráfica V-36: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Maraca	231
Gráfica V-37: Variograma correspondiente a la formación Lisure	232
Gráfica V-38: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Lisure	233
Gráfica V-39: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Lisure	233
Gráfica V-40: Variograma correspondiente a la formación Apón	234
Gráfica V-41: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Apón	235
Gráfica V-42: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Apón	235
Gráfica V-43: Histograma formación Maraca, utilizando 60 clases y un ancho $\varepsilon = 7,840$	238
Gráfica V-44: Histograma formación Maraca, utilizando 67 clases y un ancho $\varepsilon = 7,0259$	239
Gráfica V-45: Histograma formación Lisure, utilizando 113 clases y un ancho $\varepsilon = 7,840$	242
Gráfica V-46: Histograma formación Lisure, utilizando 100 clases y un ancho $\varepsilon = 6,3524$	243
Gráfica V-47: Histograma formación Apón, utilizando 123 clases y un ancho	

$\varepsilon = 4,0140$	246
Gráfica V-48: Histograma formación Apón, utilizando 70 clases y un ancho	
$\varepsilon = 7,06312$	247
Gráfica V-49: Espectro multifractal formación Maraca, utilizando el modelo	
teórico de la Línea Cargada	249
Gráfica V-50: Espectro multifractal formación Lisure, utilizando el modelo	
teórico de la Línea Cargada	250
Gráfica V-51: Espectro multifractal formación Apón, utilizando el modelo	
teórico de la Línea Cargada	251
Gráfica V-52: Espectro multifractal, formación Maraca, utilizando el modelo	
teórico del Conjunto Triádico de Cantor	252
Gráfica V-53: Espectro multifractal, formación Lisure, utilizando el modelo	
teórico del Conjunto Triádico de Cantor	253
Gráfica V-54: Espectro multifractal, formación Apón, utilizando el modelo	
teórico del Conjunto Triádico de Cantor	254
Gráfica V-55: Espectro multifractal Práctico, formación Maraca	255
Gráfica V-56: Espectro multifractal Práctico Vs Modelo Teórico de la Línea	
Cargada, formación Maraca	256
Gráfica V-57: Espectro multifractal Práctico Vs Modelo Teórico del Conjunto	
Triádico de Cantor, formación Maraca	257

LISTA DE TABLAS

Tabla II-1: Estratigrafía del Campo Mara Oeste	37
Tabla II-2: Clasificación de rocas carbonáticas de acuerdo a la textura deposicional	40
Tabla V-1: Valores correspondiente a la dimensión fractal (Según el método utilizado), para cada formación	248

CAPÍTULO I

1.0._ INTRODUCCIÓN

A medida que pasa el tiempo el desarrollo de la ciencia y la ingeniería se ha incrementado, exponencialmente, evidenciándose de tal manera nuevos procesos y nuevas investigaciones en todas las áreas en que el ser humano tenga alguna necesidad.

El éxito más resaltante para el avance de la ingeniería y de la ciencia, radica en la capacidad o flexibilidad con que el ser humano adapta y/o implementa analogías, pertenecientes a un área específica de la investigación en otra. Esto es, modelos físicos – matemáticos de teorías cerradas, se utilizan en un campo, (aparentemente distinto), para explicar nuevas fenomenologías; por ejemplo, la función de partición en física estadística, para explicar la “multifractalidad” inherente en un conjunto de medidas acerca de otro campo escalar físico.

Por ende, el problema de determinar hasta que punto la información que hemos logrado obtener acerca de un fenómeno específico, está dominada por el azar o por una regla determinista es, en un amplio sentido, el patrón que subyace detrás de este Proyecto de Tesis.

En primer lugar, si por hipótesis sólo admitimos, que los datos contenidos en Registros de Geofísica de Pozos, deben ser números reales, y de segundo, suponemos que detrás de ellos existe algún tipo de *cronología* en los mismos, (esto es, si es posible ordenarlos de manera tal que tenga algún sentido decir cuál dato x_j *antecede* al x_{j+k} .), ello no necesariamente, implica el que se deba abordar el problema en cuestión, a través de series temporales. Por ejemplo, los datos pueden corresponder a los valores de la porosidad de la roca en un pozo petrolero a diferentes profundidades,

de manera que éstos pueden ordenarse, naturalmente, en función de la profundidad. (Jiménez, T. 1996).

Sin embargo, los registros de pozo en Geofísica, pueden ser visualizados como series temporales sedimentarias, con características especiales, las cuales las hacen diferentes y con un mayor grado de complejidad, que otros tipos de series temporales como las que surgen en teoría económica, respecto a los índices de precios. En efecto, los procesos sedimentarios son, frecuentemente, no estacionarios y discontinuos, ya que ellos pueden comenzar o finalizar repentinamente. De igual manera, el intervalo entre muestras dadas, no necesariamente, representa intervalos de tiempo constante. Por lo tanto, la aplicación de métodos **no lineales**, como el formulismo multifractal, pueden resultar muy útiles en la caracterización de los Registros Geofísicos de Pozos.

La zona donde se aplica el presente estudio comprende el Campo Mara Oeste, el cual ha sido ubicado en una zona litológicamente compleja debido a la alta frecuencia de intercalaciones arenisca – lutita; la presencia de ambientes sedimentarios combinados, fluviales, marinos, y pertenecientes a una litología Cretácica. Las Formaciones involucradas son Maraca, Lisure y Apón; éstas conforman al grupo Cogollo.

1.1._ DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La aparición de la geometría fractal y más recientemente, del formalismo multifractal, (Falconer, 1997^a), han permitido analizar y caracterizar fenómenos “irregulares altamente NO LINEALES”, que escapaban a las técnicas del análisis clásico estadístico, en donde es válido, el Principio de Superposición. Específicamente, los conceptos de dimensión fractal y espectro multifractal, proporcionan una caracterización cuantitativa de la irregularidad o inhomogeneidad ya sea de una serie temporal de datos (1D) o de un objeto geométrico (2D y 3D) y de sus medidas respectivas, (Dubois, 1998).

En general, las Series Temporales pueden concretizarse de manera obtrinsible, dentro del campo de la Geofísica y Geología, en procesos de sedimentación, erosión, morfología y fragmentación, (Turcootte, 1997). Las Series Temporales, (historia de su evolución), están inmersas en un espacio matemático cuya dimensionalidad se torna extraña a la de los espacios y métodos clásicos tradicionales. Por tal razón, en los últimos 30 años, después de la proposición y descubrimiento de Mandelbrot, (1982), que los fenómenos de Naturaleza son de carácter fractal, algunos Geólogos se han volcado a la investigación de ciertos procesos naturales, desde la óptica de la dimensión fractal y/o multifractal. (Burrough, 1989^a).

1.2._ OBJETIVOS

1.2.1._ OBJETIVO GENERAL

Caracterizar Estructuras Espacio-Temporales de cantidades, procesos u objetos subyacentes en Series Temporales provenientes del Registro Geofísicos de Pozo (Rayos Gamma).

1.2.2._ OBJETIVOS ESPECÍFICOS

En particular, la proposición del Proyecto de Tesis en cuestión, se concierne con:

- ☒ Análisis de Series Temporales y/o Espaciales pertinentes al proceso de sedimentación. En particular, se pretende MOSTRAR que los datos recabados de pozo, provenientes de medidas de Gamma Ray, están sumergidos dentro de un espacio de dimensión fractal y/o multifractal.
- ☒ Se desea estimar la dimensión fractal generalizada de los datos provenientes de los registros de Gamma Ray y los límites de detectabilidad de los registros geofísicos en relación a los sensores utilizados.
- ☒ Se desea explorar las consecuencias pragmáticas (inmediatas), que se puedan derivar de la determinación de las “dimensiones fractales generalizadas” o espectro multifractal.

1.3._ JUSTIFICACIÓN

1.3.1._ ACADÉMICA

Requisito exigido por la Universidad Central de Venezuela, para optar al título de ingeniero Geofísico, otorgado por la Facultad de Ingeniería, Escuela de Geología, Minas y Geofísica.

1.3.2._ INDUSTRIAL

La producción de petróleo en Venezuela proviene de formaciones pertenecientes a las cuencas Maracaibo-Falcón, Barinas-Apure y Oriente de Venezuela. Estas formaciones varían en edades geológicas desde el Terciario hasta el Cretácico.

Por lo tanto, este estudio podría proporcionar una mejor comprensión, primeramente, del conjunto de diversos mecanismos físicos que se conjugan simultáneamente sobre la secuencia sedimentaria. Por ende, en segundo lugar, se capacitaría, tanto al geólogo como al geofísico, para una mejor interpretación de los Registros Geofísicos de Pozos, anteriormente mencionados en la cuenca Maracaibo – Falcón, a partir del uso del *formulismo multifractal*.

1.4._ UBICACIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO

Para el estudio se tomaron los datos del campo Mara Oeste, pozo DM-159, utilizados en la Tesis del Bachiller Tsuyoshi Arikuma, 2000.

El Campo Mara Oeste está ubicado al noroeste de Maracaibo, a unos 8 Km. del campo Mara y a unos 25 Km., (figura I-1, ubicación geográfica), al norte del Campo la Paz.

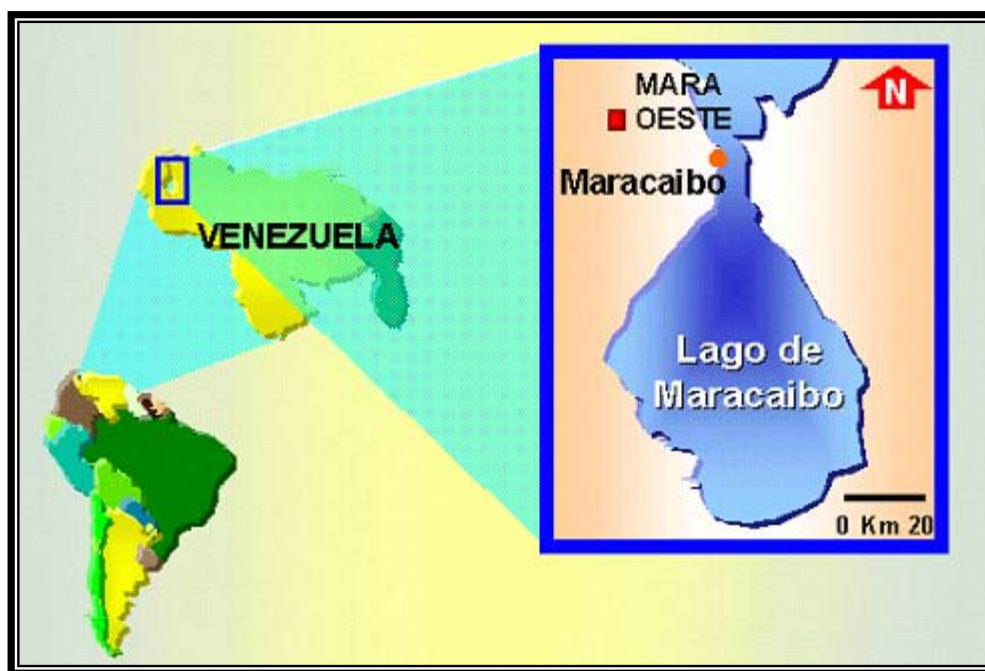


Figura I-1: Ubicación Geográfica del Campo Mara Oeste.
(Tomado del WEC Venezuela 1997)

1.5._ ANTECEDENTES

1.5.1._ UN POCO DE HISTORIA Y PROPIEDADES BÁSICAS SOBRE OBJETOS FRACTALES Y DIMENSIÓN DE ÉSTOS

Desde que Newton, Leibnitz y Euler sentaron las bases del Análisis, la mayoría de los matemáticos asumieron que las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de las funciones, EXISTÍAN, implícitamente, (Kirichenko, 1994^a).

Sin embargo, al final del Siglo XIX, Weirstrass, (1886), construyó un ejemplo de una función continua, la cual no poseía derivada en punto alguno del dominio de definición; es decir, una función CONTINUA pero NO DIFERENCIABLE. Para facilidad del lector, se recuerda que una función f es CONTINUA en un punto a si, (i) f está definida en “ a ”, (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, y por otro lado, se dice que f es DIFERENCIABLE en el punto “ a ”, si y sólo si se verifica que (iii) $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$. La función en cuestión, (que actualmente lleva su nombre), es de la forma:

$$W(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x), \quad (1-1a)$$

$$= a \cos(b \pi x) + a^2 \cos(b^2 \pi x) + \dots, \quad (1-1b)$$

donde se estipula que a es un entero impar y $0 < b < 1$, con el proviso de que se satisfaga la desigualdad,

$$ab > 1 + \frac{3 \cdot \pi}{2} \quad (1-1c)$$

con $x \in [0, 1]$. La gráfica de ésta, se muestra en la figura I-2a, y su no diferenciabilidad se puede explicar, cuantitativamente, de la siguiente manera:

- usando la ecuación (1-1b), obsérvese que $W(x)$ se ensambla o construye a partir de una función SUAVE, (i.e. continua), $W_1 = a\cos(b\pi x)$,
- sobre esta última se superpone o se agrega la ondulación, $W_2 = a^2\cos(b^2\pi x)$, la cual tiene mayor amplitud y número de onda, $b^2\pi = k_2$, menor que la contribución W_1 ,
- luego, se agrega una ondulación más fina sobre las dos anteriores y así sucesivamente. En consecuencia, el resultado es una curva INFINITAMENTE QUEBRADA como allí se muestra.

Por otro lado, según Hardy (1916), se puede mostrar que $W(x)$ es NO DIFERENCIABLE si $ab > 1$. En este caso, la explicación cuantitativa dependerá de la elección de cuál de los dos parámetros a ó b se escoja como entero positivo y/o a cuál de éstos se le adjudique un valor menor que la unidad, para toda $x \in [0, 1]$.

Así tenemos que si $a < 1$ y b un entero impar, entonces se dice que sobre la contribución SUAVE $W_1 = a\cos(b\pi x)$, superponemos la ondulación $W_2 = a^2\cos(b^2\pi x)$, la cual tiene menor amplitud y frecuencia espacial (i.e. longitud de onda) mayor que W_1 . Luego, agregamos una ondulación W_3 , mas fina que las anteriores; esto es, de un orden de magnitud menor que W_2 , pero cuya frecuencia espacial es aún mayor que las de W_1 y W_2 , etc... y así sucesivamente.

Por otro lado, la forma de cómo se ensamble la $W(x)$, sugiere y destaca a la vez, una interesante propiedad de la curva considerada, la cual explicaremos a continuación.

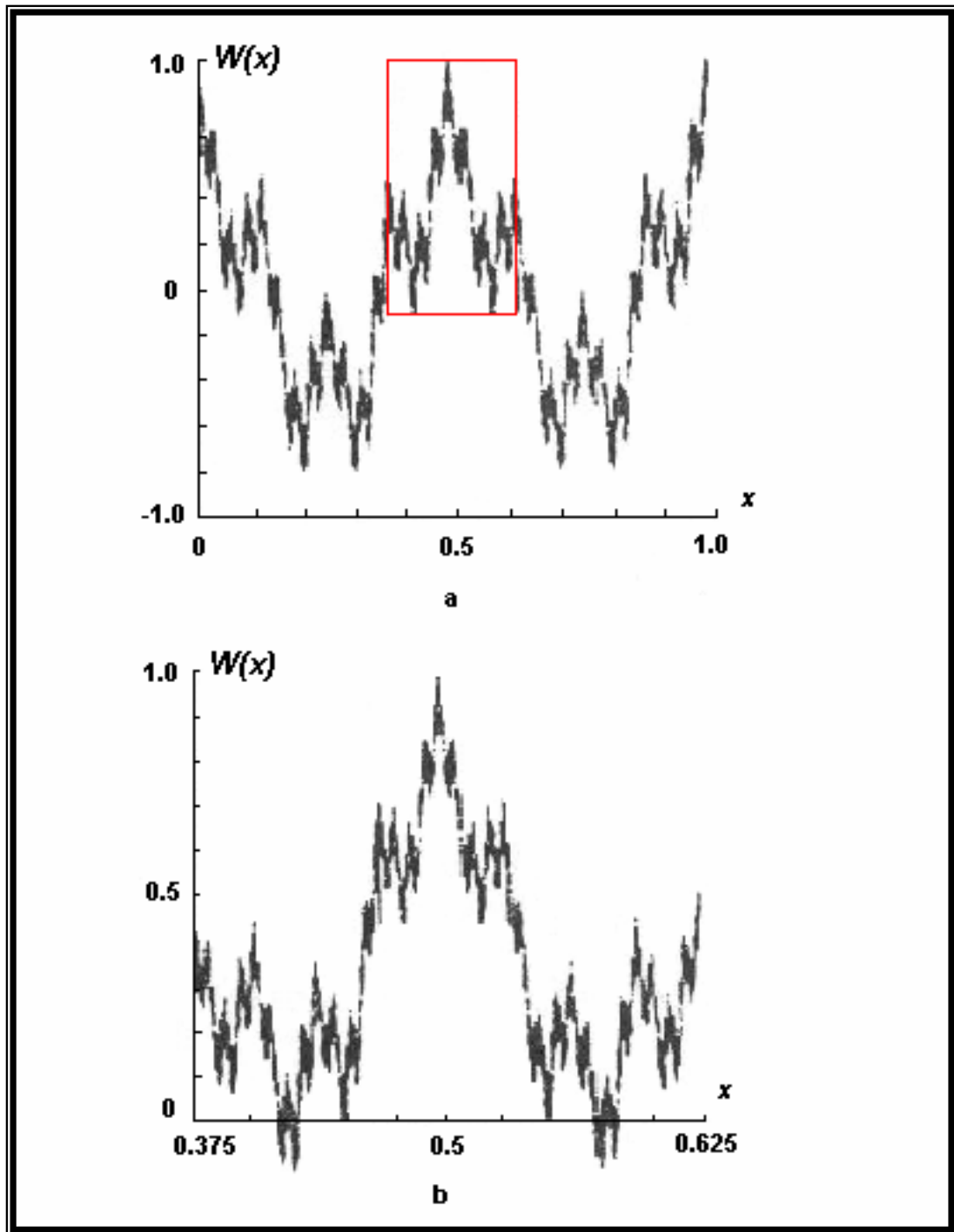


Figura I-2: (a) Gráfica de la función Weierstrass. (b) Parte de la curva marcada por el rectángulo en (a), donde se usa la condición de Ardy

Primeramente, recordemos los siguientes hechos puntuales acerca de una curva dada por la expresión $y = \Phi(x)$, la cual está definida para todo valor de x perteneciente al intervalo cerrado $[0, 1]$. Obviamente, $\Phi_1(x) \equiv m\Phi(x)$ representaría otra, cuya amplitud sería m -veces más alta que la $\Phi(x)$ para toda $x \in [0, 1]$. Por otro lado, si escribimos $\Phi_2(x) \equiv \Phi(nx)$, esta representaría una curva n -veces más estrecha que la $\Phi(x)$ original, $\forall x \in [0, 1]$, (Zeldovich y Myskis, 1976). En consecuencia, matemáticamente, $\Phi_{mn1}(x) \equiv m\Phi(nx)$, daría lugar a una curva, m -veces más alta y n -veces más estrecha que la $\Phi(x)$ originalmente considerada. En segundo lugar, escojamos un rectángulo, como el indicado en la Figura I-2a, cuyas dimensiones, (vertical y horizontal) son: $(\frac{1}{a}) \times (b)$; es decir, un rectángulo de altura a^{-1} -veces más pequeño y b -veces más estrecho que toda la figura presentada.

Por ende, si se desea examinar la curva dentro del rectángulo indicado, será necesario amplificarlo, al menos, en proporción inversa a las escalas propias del rectángulo escogido. Esto es, magnificar la escala vertical a -veces y la horizontal $(1/b)$ -veces. Sorprendentemente, se observará que la curva obtenida, es casi una copia exacta de la totalidad mostrada en primer lugar. Si repetimos, recursivamente este último procedimiento, primero sobre la figura I-2b, y así sucesivamente, encontraremos que cualesquiera curvas así obtenidas, NO CAMBIAN DE APARIENCIA, frente a un cambio de magnificación. En efecto, si escogemos primeramente a $\Phi(x) = W(x)$, con $m = a$ y $n = b$ comprendemos que enmarcar un trozo de la curva dentro de un rectángulo tal, es cuantitativamente equivalente a REDIMENSIONALIZAR cada contribución W_n de la curva, en la forma:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= a \cos(b\theta) \rightarrow \left(\frac{1}{a}\right) a \cos(b\theta \cdot b) = \cos(b^2\theta), \\
 W_2 &= a^2 \cos(b^2\theta) \rightarrow a \cos(b^3\theta), \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 W_n &= a^n \cos(b^n\theta) \rightarrow a^{n-1} \cos(b^{n+1}\theta); \quad \theta = \pi x,
 \end{aligned} \tag{1-1d}$$

con lo cual, podemos escribir que el efecto del rectángulo sobre la $W(x)$, se tornará en una expresión global, $W'(x)$ de la forma,

$$W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \cos(b^{n+1} \theta), \quad (1-1e)$$

En consecuencia, primeramente, el efecto neto del rectángulo sobre $W(x)$ estará dado por una reducción en la amplitud “ a ” un orden de magnitud y un argumento b -veces más angosto que el original, $\vartheta = \pi x \forall x \in [0, 1]$. En segundo lugar, si inversamente, magnificamos el rectángulo original, a -veces verticalmente y $1/b$ -veces horizontalmente, entonces dicho efecto sobre la curva $W(x)$, será equivalente a multiplicar por a y ensanchar su argumento ($b^{n+1} \vartheta$) por medio de multiplicarlo con $1/b$:

$$\therefore W'(x) \rightarrow a \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \cos(b^{n+1} \vartheta / b) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \vartheta) \quad (1-1f)$$

esto es, la curva original de Weirstrass. De esta manera, hemos mostrado lo que, conceptualmente, se denomina como AUTO SIMILITUD, (Selfsimilarity), es decir, “una parte es similar a la totalidad”, (Falconer, 1990^b).

Se puede fácilmente ahora concluir, el objeto matemático introducido por Weirstrass, desafía toda la intuición con que el individuo promedio está dotado: concebir una curva, la cual es continua pero que no posee tangente en ningún punto de su dominio de definición.

Lo anteriormente enunciado, nos indica que debemos aprender a renunciar y/o desconfiar de juicios intuitivos, cuando deseamos familiarizarnos con la nueva metodología que entraña la noción de “fractal” y de su peculiar “dimensión”. Por tal razón y a título de preparación intelectual, parece conveniente, retroceder en la

historia al año 1883 (tres años antes de Weirstrass), y discutir con cierto detalle, el descubrimiento del matemático G. Cantor (1883), en el curso de sus investigaciones sobre teoría de conjuntos. En principio, su “conjunto perfecto”, (Burrie y Knudsen, 1969^a) se puede syndicar de germen catalizador en la aparición de objetos matemáticos, con sorprendentes propiedades con, las cuales se han venido comparando los resultados experimentales de diversos campos físicos, en los últimos veinte años, (Burrough, 1989). Por tal motivo, a continuación se explicara, como se construye y analiza el conjunto en cuestión.

1.5.2._ CONJUNTO TRIÁDICO DE CANTOR

Designaremos por F_0 al segmento $[0, 1]$ de la recta numérica y para comenzar:

1. Al dividirlo en 3 partes iguales, excluimos de él la parte central, (es decir, el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$).
2. Denotamos por F_1 al conjunto cerrado remanente, $\therefore F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, DONDE EL SÍMBOLO, » **Ú** unión o suma lógica de los conjuntos de puntos contenidos en los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Omitamos de éste, los intervalos abiertos centrales de cada uno, (esto es, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$), (cuyas longitudes son $\frac{1}{3^2}$).
3. Designando por F_2 al conjunto cerrado residual, $F_2 = ([0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]) \cup ([\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1])$, eliminemos de cada uno los intervalos abiertos centrales pertinentes, (cuyas longitudes son $\frac{1}{3^3}$).
4. Denotando por F_3 al conjunto restante, omitiendo el segmento central – abierto, en cada uno de los intervalos cerrados existentes, y repitiendo el

proceso “ad infinitum”, se obtiene el esquema estructural que se muestra en la figura I-3.

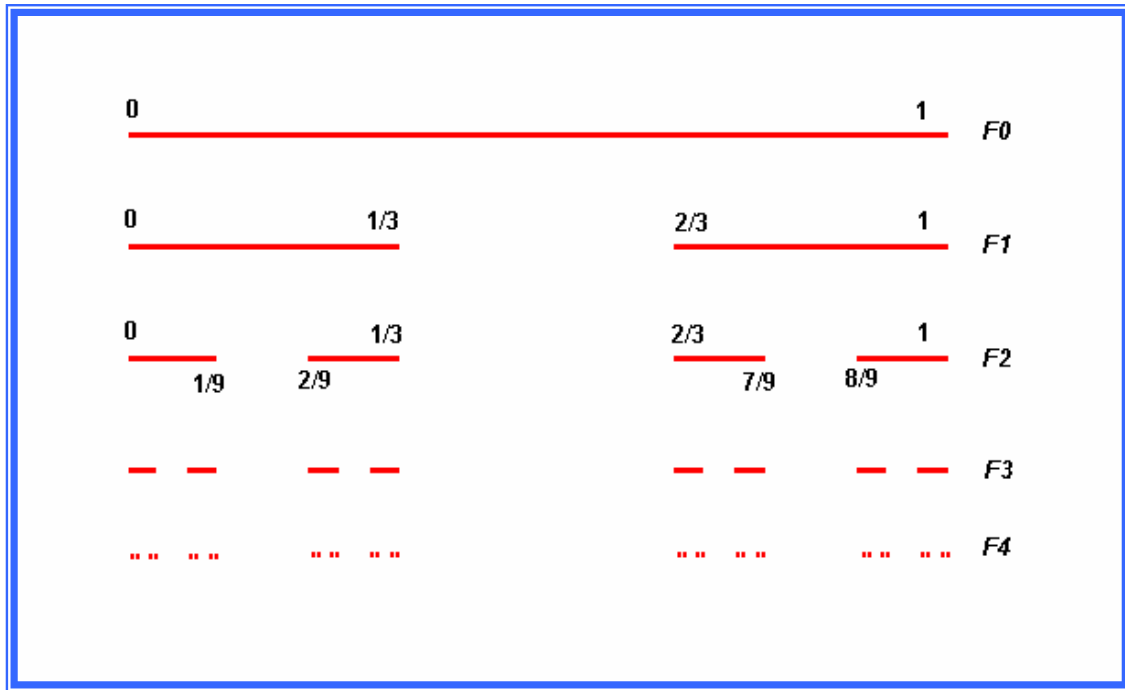


Figura I-3: Conjunto Cantor: (Tomado del texto de Kolmogorov – Fomin, 1972)

De la figura anterior, es evidente que entre el 1º intervalo de F_1 y los 2 primeros de F_2 , existe un solapamiento o intersección de puntos comunes, tales como:

$$[0, \frac{1}{3}] \cap ([0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}],$$

donde el símbolo, ... **ú** intersección de los conjuntos de puntos contenidos en los intervalos cerrados, $[0, \frac{1}{3}]$ y $[0, \frac{1}{9}]$

y análogamente entre el 2º intervalo de F_1 y los 2 segmentos de F_2 ,

$$[\frac{2}{3}, 1] \cap ([\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]) = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Si continuamos con un análisis similar, entre F_2 y F_3 , ... entre F_{i-1} y F_i , ..., indefinidamente, es obvio que obtendremos una sucesión DECRECIENTE, $\{F_n\}_{n=1,2,\dots}$, de conjuntos cerrados. Por ende, denotamos por F , al conjunto formado por las intersecciones de los F_n ,

$$F = F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_i \dots = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n,$$

el cual es cerrado (por ser intersección de cerrados). Dicho conjunto se ha obtenido a partir del segmento $[0, 1]$, desechando un número infinito DENUMERABLE de intervalos. Por otro lado, al examinar la estructura de F , sugerida en la Figura I-3, resulta evidente que, en primer lugar, a éste pertenecen (al menos) los puntos,

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots$$

los cuales son en si, los extremos de los intervalos omitidos. Sin embargo, el conjunto F , no está compuesto solamente de estos puntos. El caso es que si expresamos los puntos de $[0, 1]$ en la base ternaria:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

donde x representa cada uno de los números x , $0 \leq x \leq 1$, entonces los coeficientes a_n pueden tomar los valores 0, 1 y 2. Al igual que en el caso de las fracciones decimales, ciertos números pueden tener 2 representaciones. Así tenemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \dots + \frac{0}{3^n} + \dots,$$

ó

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

En consecuencia, se puede aseverar, (Kolmogorov – Fomin, 1972), que el conjunto F está compuesto por aquellos puntos (números) y sólomente aquellos x , $0 \leq x \leq 1$, los cuales pueden representarse, al menos de una forma ternaria, pero de manera tal que en la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ no aparece la unidad. Por consiguiente, a cada punto $x \in F$, se le puede poner en correspondencia la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, donde a_n es igual a 0 ó a 2. De esto resulta que podemos describir a los puntos del conjunto de Cantor, por medio de la expresión,

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad (1-2)$$

donde a_n asume los valores de 0 ó 2. En consecuencia, el conjunto, de Cantor tiene métrica o distancia NULA. En efecto, si durante la primera etapa se elimina $q = \frac{1}{3}$ del segmento unitario, queda un remanente de longitud $(1-q)$. Luego en la segunda etapa, se descarta $(1-q)q$, dejándonos un segmento de longitud,

$$(1-q) - (1-q)q \equiv (1-q)^2.$$

Por ende, en la tercera etapa del esquema en cuestión, se descartara una cantidad de la forma:

$$[(1-q) - (1-q)q]q \equiv (1-q)^2 q$$

con lo cual el remanente tendrá una longitud de $(1-q)^3$. De donde, después de infinitas remociones, se puede escribir que la LONGITUD DE LOS INTERVALOS ELIMINADOS será,

$$\therefore \ell_{e\lim} = q + (1-q)q + (1-q)^2 q + \dots$$

la cual es una progresión GEOMÉTRICA con infinitos términos, y por ende, sus suma está dada por la expresión,

$$\therefore \ell_{e\lim} = \frac{q}{1-(1-q)} \Big|_{q=1/3} = 1 \quad (1-3)$$

Por otro lado, la potencia del conjunto de puntos $\mathbb{R}$, QUE NO SE HAN DESECHADO, es igual a la “potencia del continuo”. Esto significa que se puede mostrar que el conjunto en cuestión tiene la misma “potencia” del conjunto de puntos contenidos en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, todos los números en dicho intervalo, se puede representar como una expansión binaria de la forma,

$$A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \quad (1-4)$$

donde los b_n son 0 ó 1, de manera tal que CADA número A en $[0, 1]$ se puede poner en correspondencia con una “sucesión” (secuencia) ESPECÍFICAMENTE $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ (Lang, Análisis I, 1974),

$$\{b_n\}_{n=1,2,\dots} := \{b_1, b_2, \dots, b_n \dots\},$$

esto es, haciendo uso del “principio de definición recursiva”, (Royden, 1965), la sucesión infinita $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$, se puede escribir como,

$$b_1 = x_1, \quad b_2 = f(x_1), \quad b_3 = f(x_2), \dots, \quad b_i = f(x_{i-1}),$$

para cada $i \leq n$, lo cual entraña (existencia) de que si $b_1 = x_1$, entonces, $b_2 = f(b_1)$, $b_3 = f(b_2)$ etc. Análogamente, cada número B del conjunto de Cantor, se puede poner en correspondencia con una sucesión $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} := \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, por medio de escribir:

$$a_i = f(y_{i-1}); \quad \forall i \leq n,$$

con $a_1 = y_1$, $a_2 = y_2$, etc. En consecuencia, si asumimos que $a_n = 2b_n$, estamos estableciendo una aplicación 1 a 1, entre los puntos del conjunto de Cantor y los puntos del segmento $[0, 1]$. Por ende, hemos establecido que el conjunto de Cantor, tiene la misma POTENCIA que el conjunto de puntos sobre el segmento en cuestión, es decir, la potencia del continuo.

Por otro lado, (al igual que en el caso de la curva de Weirstrass), se observa que el conjunto de Cantor, también posee la propiedad geométrica de auto – similitud. En efecto, tomemos por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, \frac{1}{3}]$, (ver figura I-3), y MAGNIFIQUÉMOSLO tres veces; en consecuencia, obtendremos un conjunto, el cual es idénticamente, igual al conjunto formado a partir del segmento original, es decir, al F antes mencionado. Si además, se repite este proceso un número arbitrario de veces, (esto es, designando por F_n al conjunto obtenido después del n -ésimo paso y haciendo uso del mismo primer segmento del extremo izquierdo, al cual “se estira” hasta tres veces su longitud propia, para formar al conjunto F_{n+1}), entonces se arriba al conjunto original en cada etapa. De donde,

$$F = F_1 = F_2 = \dots,$$

$$F = F_1 = F_2 = \dots \quad (1-5)$$

En otras palabras, cada parte del conjunto es una copia al carbón del conjunto de partida. La propiedad en cuestión, también se suele denominar en la literatura inglesa como “INVARIANZA”, (i.e., “invariance”) frente a un cambio de escala, ó frente a un proceso de redimensionalización.

Análogamente, un proceso INVERSO de construcción similar, es dividir el intervalo dado, en n partes, en lugar de tres, de manera que el factor $q = \frac{1}{3}$ se remplaza por $q \equiv \frac{1}{n}$. Por ende, se puede mostrar que la longitud de la parte removida es nuevamente la unidad, y la parte remanente no contiene “parte completa alguna” del intervalo original. De nuevo, se puede mostrar que el conjunto así construido es AUTOSIMILAR y posee métrica NULA; tales conjuntos poseen la estructura del Conjunto de Cantor.

De lo anterior se desprende que en futuras aplicaciones, la construcción de un conjunto DETERMINISTICO, n -ádico, con estructura de Cantor,

- i)** Es un proceso inverso al de REDIMENSIONAR;
- ii)** Si k denota el k -ésimo paso de su construcción, entonces para $k = 1$, cualquier “objeto” con longitud lineal característica, $L_0 = 1$, se divide en n partes iguales, (réplicas);
- iii)** Cada una de las partes así obtenidas, es una versión REDUCIDA del objeto o estructura original, con el mismo factor de contracción

$$q \equiv \frac{1}{r}. \quad (1-6)$$

- iv)** Para $k = 2$, las n copias del “objeto” inicial, son de nuevo reducidas en un factor

$$q^2 \equiv \left(\frac{1}{r}\right)^2, \quad (1-7)$$

y dichas partes son redistribuidas en cada una de las partes generadas cuando $k = 1$; esto es, se debe ejecutar dicha distribución, de manera cónsona con la distribución de las partes prevalentes(existentes) en la etapa previa.

- v) Después de k etapas, cada uno de las n^k réplicas obtenidas, es remplazada por la configuración obtenida para $k = 1$, pero REDUCIDA a través de un factor

$$q^k \equiv \left(\frac{1}{r}\right)^k, \quad (1-8)$$

De lo anterior, es obvio que el número de “segmentos”, (o bolas unidimensionales) de radio

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{r}\right)^k, \quad (1-9)$$

necesarias para cubrir el “objeto” (o estructura bajo estudio), crece con k , en la forma: n^k

1.5.3._ DIMENSIÓN TOPOLÓGICA Y DIMENSIÓN FRACTAL

Como se pudo observar en la construcción del conjunto de Cantor, en la primera etapa de su construcción se determinó que los puntos contorno $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ y 1 pertenecían a éste, y que por ende dicho conjunto podría ser cubierto con dos

intervalos cerrados, $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$, cada uno de los cuales tenía longitud $\varepsilon_1 = \frac{1}{3} = 3^{-1}$. En la segunda etapa de la construcción recursiva, al remover los intervalos abiertos correspondientes a la tercera parte central de los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$, entonces además de los puntos $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, también se engendran los puntos $\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\}$; por lo tanto, el conjunto,

$$F_2' = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\}$$

compuesto, solamente, por puntos contorno de los intervalos removidos, son ahora cubiertos por cuatro intervalos cerrados:

$$[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$$

cada uno de longitud $\varepsilon_2 = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$.

En consecuencia, en la n -ésima iteración de la regla recursiva, el conjunto F_n' , al igual que los puntos expresados por

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}, \quad (1-10)$$

se cubrirán con $N_n \equiv 2^n$ intervalos cerrados, cada uno con longitud $\varepsilon \equiv 3^{-n}$. Por ende, en esta n -ésima iteración, se tendrá $2^n + 2$ elementos provenientes de los puntos contorno de los intervalos cerrados.

¿Cuál es entonces la dimensión del Conjunto de Cantor: 0 o 1? Para contestar esta pregunta es necesario, primeramente, considerar que en el limite $n = \infty$, este

conjunto de puntos es NO- INTUITIVO, puesto que tiene 2^∞ puntos, la cual es la cardinalidad (potencia) del continuo. Por lo tanto sus puntos no se pueden contar, y sin embargo es “intermitente”. Esto quiere decir, (Mc Cauley, 1994^a), que hay tanto espacio VACÍO entre sus puntos constitutivos que, prácticamente, éstos últimos no ocupan espacio alguno en el intervalo unitario de partida. En realidad, se puede mostrar, (Vicsek, 1989^a) que el espacio entre los puntos en cuestión, están distribuidos de acuerdo a una ley de potencia, lo cual es una de las propiedades características de un objeto de naturaleza fractal. En particular, para el conjunto de Cantor de dimensión “ D_0 ”, el Número de brechas, $N(\Delta x > \Delta x_0)$, o espacios vacíos Δx mayores que Δx_0 , posee la ley de potencia

$$N(\Delta x > \Delta x_0) \cong (\Delta x_0)^{-D_0}. \quad (1-11)$$

Por tal razón, se dice que para un conjunto , , empotrado en un espacio unidimensional (o de dimensión topológica igual a 1), el cual se puede cubrir con un número mínimo de $N(\varepsilon)$ “segmentos” (o bolas unidimensionales) de diámetro ε , se debe verificar la ley de potencia,

$$N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0} \equiv \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_0}. \quad (1-12)$$

a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$; pero esto es equivalente a

$$D_0 = \frac{\text{Ln}(N(\varepsilon))}{\text{Ln}(1/\varepsilon)}. \quad (1-13)$$

siempre y cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

La definición de D_0 arriba estipulada: $\lim \varepsilon \rightarrow 0$, para describir un conjunto fractal de puntos, (o una curva fractal), tiene la connotación de referirse a un conjunto de puntos no contable. En física al igual que en ingeniería y/o computación, el rango de ε es siempre finito, como también lo es la escala mas pequeña en la sucesión de valores, $\{\varepsilon_n\}_{n=1,2,\dots}$, con $\varepsilon_n = 3^{-n}$. Por tal motivo, nos permitimos denominar, (junto con Mc. Cauley), “FRACTAL”, cualquier colección de fragmentos que verifique la expresión (1-12), para cierto rango de escalas,

$$\varepsilon_{Min} < \varepsilon < \varepsilon_{Max}, \quad (1-14)$$

donde ε_{Min} es grande comparado al “espaciamiento interatómico promedio” y ε_{Max} es pequeño frente a la extensión del objeto fragmentado por estudiar.

Así las cosas, se tendrá que al insertar $N_n = 2^n$ y $\varepsilon_n = 3^{-n}$ en la ecuación (1-13):

$$\therefore D_0 = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (1-15)$$

con $\varepsilon = \varepsilon_n$

$$D_0 = \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}, \quad (1-16)$$

$$\therefore D_0 \cong 0,6309$$

Evidentemente, el conjunto de Cantor posee una dimensión de carácter fractal, la cual es menor que la dimensión topológica $d_T = 1$ en la cual se encuentra empotrado.

De lo anterior se concluye que (Vicsek, 1989^b), un objeto se define de naturaleza fractal si y sólo si su dimensión D_0 , determinada a través de ecuación (1-15), es menor que su dimensión de empotramiento d_T .

Dado el carácter original del tema en cuestión, sólo se podrá explorar la aplicación de medidas fractales en otros campos de la Geofísica. Hasta el momento, la aplicación del Formalismo Multifractal sobre los registros de pozos, es un “problema abierto”.

CAPÍTULO II

2.0._ ASPECTOS GEOLÓGICOS

Este capítulo, ha sido concebido para dar una visión general de la Geología de la Cuenca de Maracaibo pretendiendo dar un análisis al campo Mara-Oeste, mediante la integración de diversos trabajos existentes, entre los cuales se destacan los estudios de: Gonzáles de Juana, 1980; Bellizzia *et al*, 1981.

2.1._ CUENCA DE MARACAIBO

La cuenca de Maracaibo se encuentra localizada al noroeste de Venezuela y forma una depresión topográfica flanqueada por 3 principales rasgos estructurales: limita al oeste con la serranías de Perijá y Montes de Oca, al sur con la Cordillera de los Andes, al este con la serranía de Trujillo y al norte con la plataforma del Golfo de Venezuela, cuya separación se materializa por un bloque triangular delimitado por 3 principales fallas transcurrentes, al norte por la falla de Oca, al este por la falla de Boconó y al oeste por la falla de Santa Marta (J. Méndez Z., 1986), (figura II-1).

2.1.1._ GEOLOGÍA REGIONAL

La Cuenca de Maracaibo, ocupa la parte nor-occidental de Venezuela y se extiende en dirección suroeste hacia Colombia, cubriendo un área total aproximadamente de 50.000km. Esta cuenca es de tipo íntermontano y geográficamente coincide con la hoya hidrográfica del Lago de Maracaibo. Dentro de la Cuenca se estima que existe un volumen total de sedimentos Pre-Cretácicos, Cretácicos, Terciarios, y Cuaternarios variables entre 250.000 y 300.000km³.

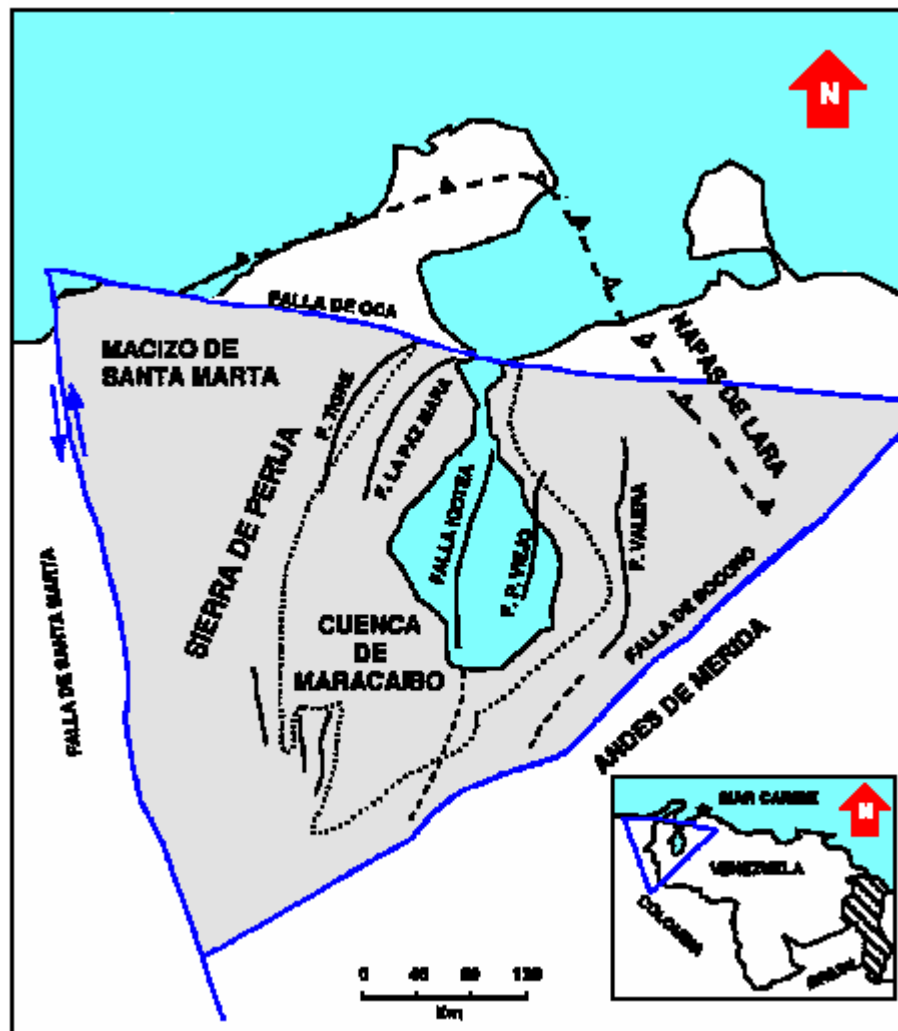
Desde el punto de vista petrolífero existen dentro de la cuenca unos 40 campos con 700 yacimientos activos. Algunos de ellos ya están agotados, mientras que 8 han

sido clasificados como gigantes, habiendo alcanzado una producción acumulada de manera individualizada superior a los 80 millones de metros cúbicos.

Genéticamente esta cuenca pertenece al sistema de cuencas pericratónicas, la cual tuvo sedimentación discontinua hasta quedar aislada de la Cuenca Barinas-Apure al sureste y de la Cuenca del Magdalena al suroeste, debido al levantamiento de los Andes y de la Sierra de Perijá en el Terciario (Plio-Pleistoceno); el límite norte está dado por el sistema transcurrente dextral de la Falla de Oca, expresión del actual límite entre la Placa de Sudamérica al sur y la Placa del Caribe al norte.

La cuenca estuvo sometida a sedimentación continua en ambientes marinos someros plataformales durante todo el Cretácico, sufriendo al final del período efectos menores. Los ambientes durante el Paleoceno fueron parálisos y el ciclo termina con nuevos pulsos tectónicos. Después de un período de erosión regional, se empezó a desarrollar una cuenca subsidente hacia al noreste, alcanzando espesores eocenos mayores de 4.200 metros. Posteriormente debido a los fuertes movimientos tectónicos del Eoceno medio y superior la cuenca fue invertida y la parte norte de la misma tuvo una gran erosión, estimada entre 2.400 y 3.600 metros de sedimentos removidos.

La Cuenca de Maracaibo es notable por su actual relieve estructural por su complejidad geológica y por su prolífero hábitat de hidrocarburos. En esta cuenca se han descubierto campos gigantes, como el Costanero Bolívar, La Paz-Mara, Lama-Lamar y otros. Se han perforado unos 10.000 pozos, la mayoría de los cuales se encuentran en producción. (Tomado de La Industria Venezolana de Hidrocarburos, Tomo I).



2.1.1.1._ EVOLUCIÓN GEOLÓGICA DE LA CUENCA

El basamento en el área de la cuenca se caracteriza por rocas ígneo metamórficas de edad Pre-Cretácica. En algunas fosas jurasicas quedaron preservadas sobre el basamento rocas sedimentarias continentales de la Formación La Quinta y algunas rocas volcánicas asociadas. Este conjunto de rocas a finales del Jurásico fue sometido a procesos tectónicos y erosivos, formándose una peniplanicie sobre la cual se depositó posteriormente toda la secuencia sedimentaria de interés petrolífero.

La historia geológica de la cuenca de Maracaibo comienza en el Pérmico Triásico. Durante este periodo ocurrieron algunos cambios en la paleogeografía de la cuenca que incluye el levantamiento del Arco de Mérida (Gonzáles de Juana *et. al*, 1980) hacia el NW. Durante el Triásico-Jurásico se produjo una fase extensional que dio lugar a un conjunto de fisuras el cual evolucionó en un margen pasivo durante todo el Cretácico y Paleoceno Temprano, el desarrollo de la cuenca desde el Jurásico hasta finales del Cretácico ocurrió sobre un margen pasivo estable subsidente afectado principalmente por la tectónica extensional (Lugo J, 1991). Las rocas Paleozoicas Metamorfizadas así como las areniscas continentales rojas y conglomerados de la Formación La Quinta del Jurásico constituyen el basamento de la cuenca (González de Juana *et al*, 1980; Bellizzia *et al*, 1981^a).

La sedimentación Cretácica estuvo caracterizada por el desarrollo de una secuencia de carbonatos y siliciclásticos de plataforma como consecuencia de la subsidencia y transgresión durante la apertura de la fisura Atlántico - Caribe.

La sedimentación comienza con acumulaciones detríticas, de ambientes predominantemente fluvial, en los surcos de Uribante, Machiques y Barquisimeto que corresponden a la Formación Río Negro del Barremiense (Vanherenkamp *et al*, 1993). La erosión del Arco de Mérida, una característica positiva para el tiempo, parcialmente provee los sedimentos que rellenan los surcos.

La sedimentación durante el Aptiense - Albiense ocurrió en un ambiente de aguas someras y corresponde a las calizas bioclásticas del Grupo Cogollo. Los carbonatos gradan en depósitos clásticos al sureste, hacia el Arco de Mérida y el Escudo de Guayana. Un extenso periodo de depositación bajo condiciones euxínicas, correspondiente a la máxima trasgresión del Cretácico, es indicado por la ocurrencia de lutitas ricas en organismos del Cenomaniense-Santoniense de la Formación La Luna. Un periodo de baja tasa de sedimentación, es representado por el Miembro Socuy de la Formación Colón. Los depósitos marinos del Campaniense-Maestrichtiense de las formaciones Colón y Mito Juan son las primeras indicaciones del periodo regresivo (González de Juana *et al*, 1980; Bellizia *et al*, 1981^b). La exposición sub-área y la consecuente erosión del Arco de Mérida provee parcialmente los sedimentos para el relleno de la cuenca durante el Cenozoico.

El desarrollo tectónico en la cuenca posterior al Cretácico (Eoceno medio-superior y hasta el Eoceno superior) estuvo fuertemente influenciado por la interacción de las placas del Caribe con movimiento hacia el este y de Sudamérica, con movimiento hacia el norte, comenzando con una fase de transgresión en el Eoceno Temprano relacionada a la subducción oblicua de la placa del Caribe por debajo de la placa de Suramérica.

En este periodo continuó la compresión manifestada en una serie de pulsos orogénicos que culminaron en el Eoceno Superior y dieron origen a varios ciclos de levantamiento y depositación, causando la reactivación e inversión de las características estructurales preexistentes.

La sedimentación del Terciario Temprano estuvo caracterizada por depósitos carbonáticos y fluviales-deltaicos correspondientes a la Formación Guasare del Paleoceno, compuesta de calizas y areniscas, que gradan hacia el noroeste en lutitas y areniscas de la Formación Marcelina y hacia el sur en clásticos fluviales y depósitos deltaicos del Grupo Orocué (González de Juana *et al*, 1980; Bellizia *et al*, 1981^c).

Al final del Paleoceno hasta el Plioceno comienza la tectónica convergente al norte de Venezuela, caracterizada por una serie de colisiones y sutura de los terrenos derivados del Caribe en el margen continental. La sedimentación Eocena en la Cuenca de Maracaibo esta caracterizada por depósitos fluviales de la Formación Mirador al suroeste, Deltaicos de la Formación Misoa en el Lago de Maracaibo y Turbidíticos de la Formación Trujillo hacia el este (González de Juana *et al*, 1980; Bellizia *et al*, 1981^d). Una transgresión marina es interpretada por la ocurrencia de gruesas lutitas marinas de la Formación Paují, las cuales son transicionales con las capas más altas de la Formación Misoa (González de Juana *et al*, 1980^e).

La erosión de áreas positivas en las partes norte y noreste de la cuenca y la depositación de sedimentos continentales de la Formación Icotea en las áreas oeste-suroeste caracterizan la sedimentación durante el Oligoceno a Mioceno Temprano (González de Juana y otros, 1980^f), en este periodo también comenzó el levantamiento de los Andes Venezolanos y la Sierra de Perijá (Lugo, 1991).

Durante el Oligoceno y Mioceno inferior continuo el proceso erosivo en la parte NE del lago y se depositaron sedimentos no marinos al oeste-suroeste. La sedimentación marina fue reanudada en el Mioceno Medio cuando la transgresión que se extendía al sur invadía la cuenca, los depósitos de este periodo están representados por las lutitas marinas de la Formación La Rosa. Este episodio marino finalizó en el Mioceno Tardío como una consecuencia del levantamiento de los Andes Venezolanos y está representado por la ocurrencia de areniscas de las formaciones Lagunillas y La Puerta que marcan el comienzo de la sedimentación continental que ha continuado hasta el presente. Cambios importantes en la paleogeografía de la cuenca ocurrieron al final del Mioceno y durante el Plioceno.

Al final el Mioceno se produjo el levantamiento definitivo de la Cordillera de los Andes y de la Sierra de Perijá, afectando al triángulo Oca-Boconó-Perijá, el cual

delimito la Cuenca de Maracaibo en su actual configuración. (Tomado de La Industria Venezolana de Hidrocarburos, Tomo I), (figura II-2)

Los procesos orogénicos a lo largo de los Andes Venezolanos y la sedimentación continental han continuado durante el Holoceno, resultando en la depositación de la Formación El Milagro (González de Juana *et al*, 1980; Bellizia *et al*, 1981^g).

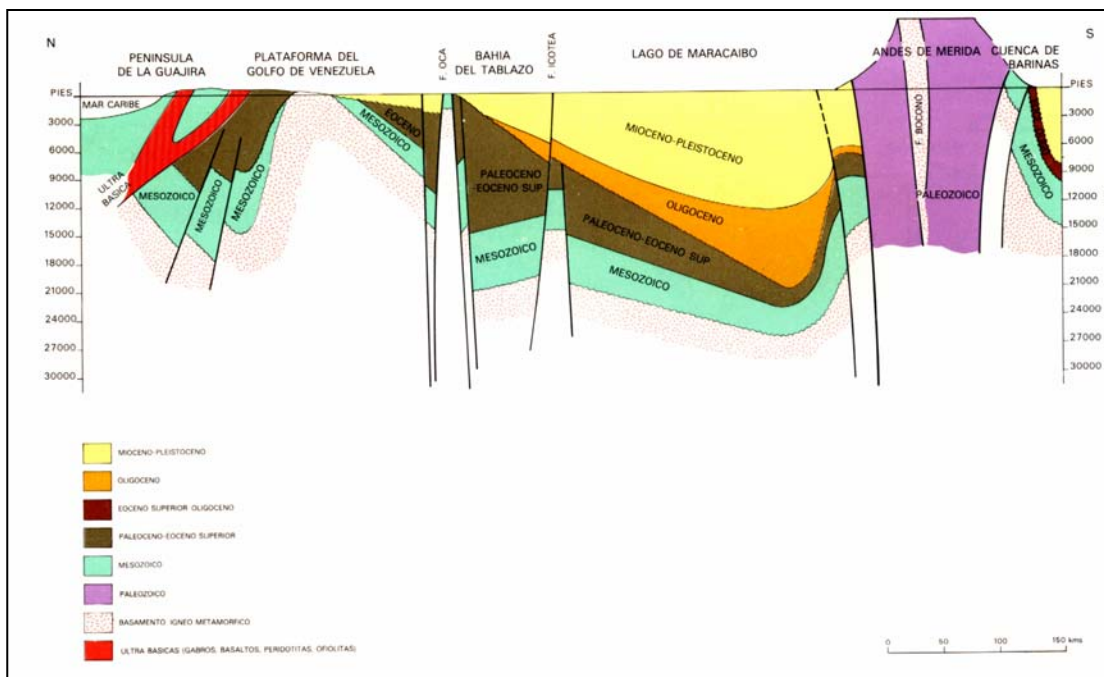


Figura II-2: Sección Geológica, Norte-Sur, Cuenca de Maracaibo.
(Tomado de Evaluación Formaciones en Venezuela, Schlumberger, 1980)

2.1.2._ GEOLOGÍA LOCAL

2.1.2.1._ INTERPRETACIÓN ESTRUCTURAL

La interpretación estructural del Campo Mara Oeste esta basado en el análisis de líneas sísmicas migradas 2D obtenidas en 1982, conjuntamente con la correlación estratigráfica de los pozos perforados en el área. Se elaboró entonces un mapa estructural al nivel del Miembro Socuy, Formación Colón, (figura II-3 y figura II-4).

El Campo Mara Oeste está formado estructuralmente por dos áreas separadas entre sí por una falla de corrimiento de rumbo NE; un bloque deprimido al norte y un bloque estructural levantado al sur del campo. La falla tiene una extensión lateral de más de 15 Km. y un salto vertical promedio de 3500 pies en su parte central (Vieira y Oquendo, 1993^a).

El bloque levantado al sureste, actualmente en explotación comercial, está en un pliegue de arrastre donde el entrapamiento es de tipo estructural. Esta unidad se caracteriza por la presencia de un grupo de fallas normales de rumbo N30°W, con saltos verticales variables entre 800 y 900 pies, y altos ángulos de buzamiento entre 75° y 85°. Existen además fallas normales menores, perpendiculares a la falla mayor inversa, con ángulos de buzamiento en un rango de 50° a 55°. Estas fallas normales dividen al área en siete bloques estructurales bien definidos con buzamiento al sur de aproximadamente 20° (Vieira y Oquendo, 1993^b).

El área al noroeste del campo está en el bloque deprimido de la estructura, en un homoclinal sin cierre estructural aparente, el buzamiento arriba es truncado por la discordancia Oligo-Miocena. Presenta un buzamiento menor a 20° y está cortado por fallas inversas de rumbo N20°W y N10°E, así como por fallas normales de rumbo N25°W (Vieira y Oquendo, 1993^c).

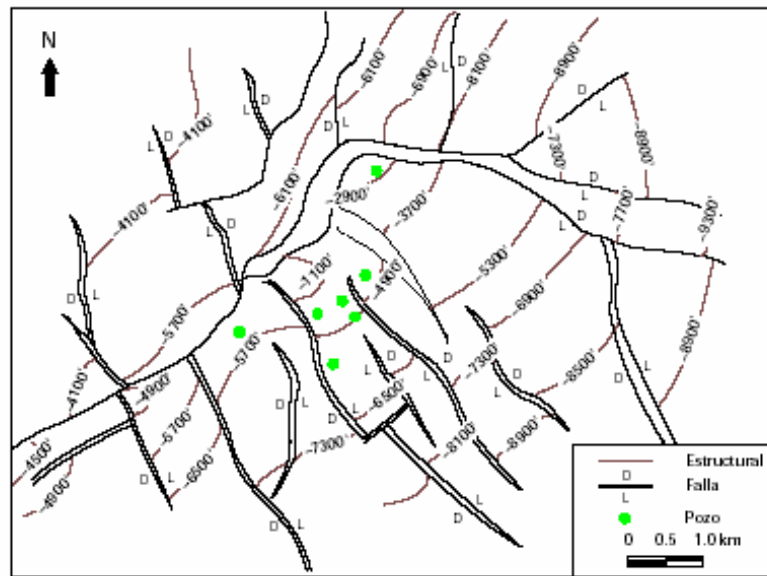


Figura II-3: Mapa estructural en el tope del Miembro Socuy de la Formación Colón mostrando la distribución de los pozos en el Campo Mara Oeste. (Tomado del WEC Venezuela 1997)

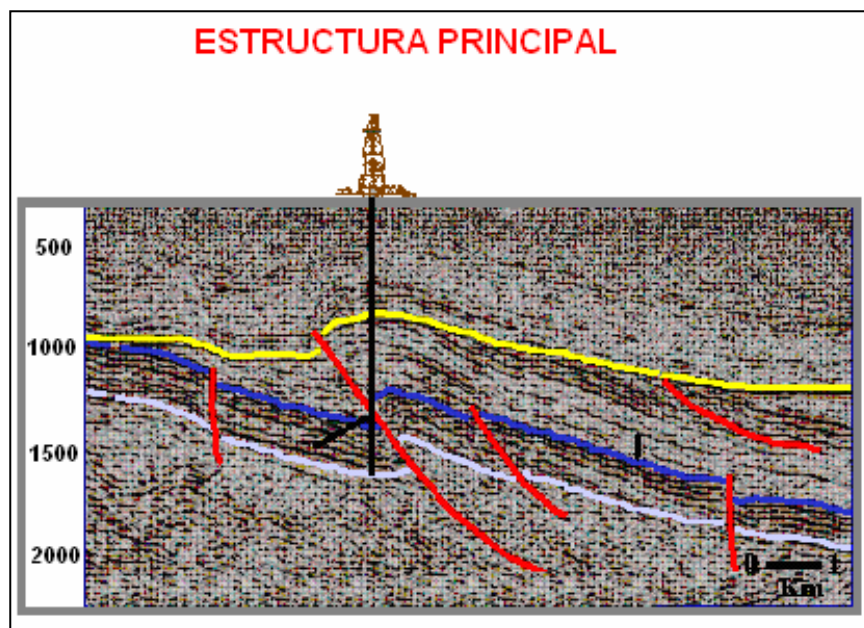


Figura II-4: Sección sísmica ilustrando la estructura principal en el Campo Mara Oeste. Cortesía de la Unidad Tierra Costa Oeste de Pdvsa Exploración y Producción. (Modificado de Cárdenas 1998)

2.1.2.2._ ESTRATIGRAFÍA

Según Vieira y Oquendo (1993), la secuencia estratigráfica en el Campo Mara Oeste está constituida por un basamento Precretácico conformado por rocas ígneo-metamórficas sobre el cual descansa discordantemente la secuencia cretácica conformada por las formaciones Río Negro, el Grupo Cogollo, formación La Luna Mito Juan y Colón. Suprayacentes y concordantes a la secuencia cretácica se encuentran las formaciones Guasare y Marcelina del Paleoceno, discordantes a los sedimentos post - Eocenos hacia el Oeste del área bajo estudio, (tabla II-1).

Para la **Edad Cretácica**, se dieron lugar las siguientes formaciones:

Formación Río Negro

Para el Cretácico Temprano, durante el Barremiense, y en ambiente fluvial, se establecieron depósitos de areniscas blancas, generalmente de grano grueso, conglomerados heterogéneos; arcillas y lutitas variables, típicamente en tonos brillantes de amarillo, rojo y morado. De acuerdo con su fuente sedimentaria, las areniscas basales varían, desde cuarzosas y conglomeráticas, de carácter transgresivo, con intercalaciones de lutitas muy cuarzosas a muy feldespáticas. (Van Andel, 1958).

Grupo Cogollo

La edad del Grupo Cogollo esta comprendida desde el Aptiense temprano. Según Kiser (1997) su edad en el área de río Calderas es Aptiense – Albéense. Se presentan 3 ambientes sedimentarios:

Deltáico, plataforma interna marina restringida y plataforma externa marina abierta, conformados en un modelo sedimentario.

Su litología es variada. Está caracterizado por depósitos de carácter transgresivo constituidos por una combinación de carbonatos y siliciclastos en la parte inferior, y por depósitos carbonáticos limpios en la parte superior. El Grupo Cogollo se encuentra dividido en 3 unidades litológicas:

Formación Apón

Abarca una sedimentación inicial en el Habítense hasta el Albiense y en un ambiente litoral, esta constituida por calizas grises y azulosas, duras y densas, areniscas, lutitas y dolomitas. Se subdivide, a su vez, en 3 miembros:

Mb. El Piché: Consiste en un alto y variado contenido de calizas entre las que se encuentran: fosilíferas del tipo coquina, criptocristalina, de estratificación media a delgada con planos de estratificación ondulados con intercalaciones de color gris oscuro a negro, nodulares con estratificación delgada, nodulares margosas y margas de color gris claro azulado. Se encuentra desde la subcuenca de Machiques, al campo La Paz y plataforma de Maracaibo.

Mb. Machiques: Predominan las calizas negras, laminadas, lodosas y muy bituminosas, que se intercalan con margas y lutitas negras y calcáreas, presenta un buen potencial de roca madre madura.

Mb. Tibú: Predominan las calizas arenosas, areniscas calcáreas y en menor grado hay presencia de lutitas orgánicas y calcáreas hacia el tope. Las calizas son grises que muestran toda clase de gradación entre coquinas puras con moluscos bien preservados, calizas microcristalinas con bioclastos, intercaladas con margas y calizas negras laminadas.

Formación Lisure

Esta unidad, considerada de ambiente marino interno que se formó durante el Albiense, esta constituida principalmente por calizas interestratificadas con lutitas y conformada por calizas bioclásticas. Las areniscas son de tipo calcáreas cuarzosas gluconíticas, grises o verdosas, de granos medio a fino, y algunas micáceas laminares. Esta formación representa, a nivel regional, un sello cuya densidad de fracturas es muy baja, aislando los reservorios de la Formación Maraca y Apón.

Según González de Juana et. Al. (1980), la presencia de areniscas y glaucomita es el principal elemento que la diferencia del resto de las formaciones del Grupo Cogollo. Algunos horizontes pertenecientes a esta formación son productores de petróleo en la cuenca de Maracaibo.

Formación La Luna

Su periodo de sedimentación va desde el Cenomaniense hasta el Campaniense y se formo en un ambiente euxínico (marino profundo). Está constituida por calizas bituminosas laminadas intercaladas con lutitas marinas con alto contenido de materia orgánica y constituye la roca madre más importante en la Cuenca de Maracaibo.

Las calizas de la formación despiden fuerte olor a petróleo en fracturas fresca y es frecuente encontrar gotas de petróleo en los fósiles incorporados en las concreciones. Las capas de caliza varían en espesor de 1 – 2 cms hasta unos 50 cms, con estratificación uniforme y monótona.

Suprayacente a la Formación La Luna se encuentra la Formación Colón, en la base de esta unidad estratigráfica se encuentra un horizonte delgado compuesto por una caliza micrítica denominada Miembro Socuy. El resto de la Formación Colón está compuesto por lutitas marinas negras que constituyen el sello principal del

yacimiento en las calizas cretácicas infrayacentes. La Formación Mito Juan suprayace la Formación Colón y se compone de areniscas lutíticas.

El Paleoceno se inicia con las lutitas de la Formación Guasare, seguidas por areniscas y calizas en su parte superior. Por encima se encuentra la secuencia de carbones y areniscas de la Formación Marcelina.

Los sedimentos del Eoceno que descansan sobre el Paleoceno están constituidos esencialmente por areniscas, y tienen muy poco espesor por estar prácticamente erosionados. Por encima del Eoceno erosionado se encuentran los depósitos de las formaciones La Villa y La Puerta constituidos por arenas, areniscas, arcilitas, capas de lignitos y limolitas.

Tabla II-1: Estratigrafía del Campo Mara Oeste
(Tomado y modificado de Cárdenas 1998)

EDAD		UNIDAD	ESPESOR	DESCRIPCIÓN
PLEISTOCENO		ALUVIONES		Arenas y conglomerados.
OLIGO - MIO - PLIOCENO		LA VILLA LA PUERTA	3200	Arenas, areniscas, arcillas, capas de lignitos y limonitas.
EOCENO		MISOA	560	Areniscas intercaladas con lutitas, arcillas y carbón.
PALEOCENO		MARCELINA	550	Areniscas, limonitas y carbón.
		GUASARE	930	Calizas glauconíticas y areniscas calcáreas.
CRETÁCICO	SUPERIOR	MITO JUAN COLON	1850	Lutitas con intercalaciones de Areniscas calcáreas.
		MBRO. SOCUY	45	Caliza margosa
	MEDIO	LA LUNA	340	Calizas bituminosas intercaladas con lutitas.
	INFERIOR	GRUPO COGOLLO	1400	Calizas bioclásticas con intercalaciones de lutitas y areniscas.
		RÍO NEGRO	65	Areniscas y conglomerados.
PRECRETÁCICO		BASAMENTO	?	Rocas ígneas - metamórficas.

2.1.2.3._ SEDIMENTOLOGÍA

Seguidamente se presentan las características, ambientes sedimentarios y análisis secuencial de la sección Cretácica de edad Aptiense - Albiense Temprano (Formación Apón).

FACIES SEDIMENTARIAS

Las facies sedimentarias fueron determinadas con base en las características texturales, composición mineralógica, color, estructuras sedimentarias, contenido fósil, porosidad, aspectos diagenéticos y fracturas, (tabla II-2). (Cárdenas, 1998).

Rudstone de Ostreas: Esta facie de rudstone es de color gris claro a marrón claro, se encuentran pobremente impregnados con petróleo. Están compuestos por fragmentos de ostras moderados a bien escogidos. La proporción de bioclastos varía entre 40% y 85%, los granos son angulares a subredondeados con tamaño comprendidos entre 2mm y 3.5cm.

Rudstone de Fragmentos Esqueletales: Esta facie de rudstone es de color marrón oscuro en una matriz de packstone. Está generalmente impregnado con petróleo y los tubos de gusano son comunes hacia el tope de la secuencia. La proporción de los bioclastos varía entre 60% y 82%, los granos son sub-angulares a sub-redondeados, con tamaños comprendidos entre 2mm a 4 cm.

Floatstone de Fragmentos Esqueletales: Esta facie de floatstone es de color marrón en una matriz packstone. La proporción de los bioclastos varían entre 70% y 75%, los granos son sub-redondeados con tamaños comprendidos entre 3mm y 5 cm.

Packstone de Orbitolinas: Esta facie de packstones es de color marrón y están constituidos por granos de orbitolinas bien escogidos. La proporción de los bioclastos varía entre 62% y 76%, los fragmentos son sub-angulares a Sub-redondeados con tamaños comprendidos entre 0.005mm y 2mm.

Packstone de fragmentos esqueléticos: Esta facie de Packstone es de color marrón claro a oscuro. La proporción de bioclastos varía entre 60% y 78%, los granos son angulares a sub-redondeados, con tamaños comprendidos entre 0.002mm y 2mm.

Wackstone de fragmentos esqueléticos: Esta facie de Wackestone es de color marrón. La proporciones de bioclastos varía entre 10% y 36%, los granos son sub-redondeados a sub-angulares, con tamaños comprendidos entre 0.02mm y 2mm.

Mudstone de fragmentos esqueléticos: Esta facie de mudstone es de color marrón a gris claro. La impregnación de petróleo varía de moderada a común, estando ausente hacia el tope de la secuencia. Son muy comunes las horadaciones del tipo Thalassinoides. La proporción de bioclastos varía entre 6% y 8%, los granos son angulares a sub-redondeados, con tamaños comprendidos entre 0.004mm y 1.8mm.

Mudstone Dolomitizados: Esta facie de mudstone es de color gris claro. La impregnación de petróleo esta ausente y se observan horadaciones del tipo Thalassinoides. La proporción de bioclastos varía entre 2% y 3%, los granos son angulares a sub-redondeados, con tamaños comprendidos entre 0.5mm y 2mm.

Tabla II-2: Clasificación de rocas carbonáticas de acuerdo a la textura depositacional. Clasificación de Embry y Klovan (1971) complementando la clasificación de Dunham (1962). Modificado por Reeckmann y Friedman (1991) (Modificado de Cárdenas, 1998)

Los componentes originales no se encuentran juntos durante la depositación						Los componentes originales se encuentran juntos durante la depositación		
Partículas < 2 mm				Partículas > 2 mm		Organismos constructores de esqueletos rígidos	Organismos que incrustan los elementos constructores	Organismos ramosos que Entrampan los sedimentos
Contiene lodo		Sin lodo	Soporte Lodoso	Soporte Granular	Boundstone			
Soporte Lodoso		Soporte Granular						
Menos del 10% de partículas	Mayor del 10% de partículas							
Mudtone	Wackestone	Packstone	Grainstone	Floatstone	Rudstone	Framestone	Bindstone	Bafflestone
Soporte Lodoso		Soporte Granular		Aloquímicos		Bioagregados		
Menos del 10% de partículas	Mayor del 10% de partículas							
Con Lodo		Sin Lodo				Matriz o Cemento		

Dunham	Emby & Klován
WACKSTONE	WACKSTONE
	FLAATSTONE
PAKSTONE	PAKSTONE
	RUDSTONE
GRANSTONE	GRANSTONE
	RUDSTONE

CAPÍTULO III

3.0._ MARCO TEÓRICO

En este capítulo se explicaran los principios básicos de funcionamiento, aplicaciones y limitaciones de la herramienta de los rayos gamma. Seguidamente, se describirán los teoremas que se utilizarán de la teoría de probabilidad y estadística. Por último, se abordarán los conceptos necesarios sobre la geometría fractal y formulismo multifractal, los cuales ayudaran a comprender y desarrollar el tema de tesis.

3.1._ PETROFÍSICA

Se puede intuir que la palabra petrofísica quiere decir, disciplina que se encarga del estudio de las propiedades físicas de las rocas del yacimiento. Pero cuando aumentamos la escala visual en las rocas del yacimiento, es decir, estudiar y describir el sistema conformado por rocas y los distintos fluidos que ésta puede contener, podemos observar que la simple palabra petrofísica significa mucho más, (Mata, 2002). Por ejemplo: justificar (razonar) a través de leyes físicas DETERMINISTICAS y/o aparentemente ALEATORIAS, los hechos observacionales recabados en las secuencias sedimentarias inherentes a las trampas de hidrocarburos.

A continuación se describirán los fundamentos básicos y procesos de evaluación de los perfiles, para así darse una idea de lo compleja y extensa que es la rama en cuestión; sin embargo para la realización de este trabajo especial de grado, sólo se utilizó el perfil nuclear (rayos gamma).

3.1.1._ FUNDAMENTOS DE LA INTERPRETACIÓN CUANTITATIVA DE PERFILES

En el área de los hidrocarburos se efectúa una gran variedad de mediciones y técnicas analíticas, para evaluar las características físicas de las formaciones del subsuelo.

La mayoría de los yacimientos de hidrocarburos, están asociados con rocas sedimentarias, las cuales están compuestas de una parte sólida, llamada **matriz de roca** y una parte fluida, llamada **espacio poroso**, (Schlumberger, 1975^a). El objetivo principal en la evaluación de formaciones, es estudiar y describir este sistema roca – fluido, lo cual implica un entendimiento claro de las propiedades como litología, porosidad, permeabilidad y saturaciones.

Sin embargo, las propiedades en cuestión, no pueden ser cuantitativamente determinadas, directamente del pozo, sino inferidas a través de las mediciones de los registros de pozos. En consecuencia, es importante comprender “a priori” las propiedades físicas de las rocas existentes en el yacimiento y las formas de relacionar éstas con las mediciones de los registros petrofísicos.

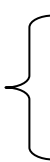
3.1.1.1._ EVALUACIÓN DE LOS PARÁMETROS RELEVANTES DEL RESERVORIO

En general, el petróleo y/o gas que se extrae en la actualidad proviene, PARCIALMENTE, de acumulaciones que se encuentran atrapadas en el “espacio poral” de las rocas, contenidas en un RESERVORIO. Por ende, la cantidad de petróleo y/o gas, contenido en una unidad de volumen de dicha roca, (inmersa en el reservorio), será el producto de la porosidad de ésta, por la saturación de los hidrocarburos.

Por otro lado, para estimar la factibilidad de si un reservorio es comercialmente productivo es necesario tener, primeramente, conocimiento del espesor de la formación en cuestión. Sin embargo, dicha factibilidad depende, (entre otros parámetros), de la facilidad con la cual un “fluido viscoso” puede desplazarse a través del sistema poral, es decir, de la PERMEABILIDAD de la roca (promedio). En segundo lugar, para determinar las “saturaciones” tanto en la zona virgen como en la zona lavada, es necesario obtenerlas a través de la RESISTIVIDAD eléctrica en dichas zonas. (PDVSA CIED, 1999^a).

Por ende, los datos recabados de la RESISTIVIDAD del H₂O y de la formación dan lugar al cálculo de SATURACIONES y éstos últimos, junto con los de POROSIDAD, son usados para evaluar la “probabilidad” de si la formación en estudio es comercialmente productiva.

De la exposición anterior se desprende que los parámetros físicos, tales como POROSIDAD y PERMEABILIDAD de la formación, VISCOSIDAD del fluido y RESISTIVIDAD eléctrica de la zona virgen y zona lavada, son de fundamental importancia en la evaluación de un reservorio. En consecuencia, dado el actual estado del arte en los aspectos teóricos y tecnológicos, la metodología ingenieril hace uso de los parámetros físicos que se listan a continuación:

- Resistividad 
 - de la formación,
 - del H₂O de la formación
- Temperatura de la formación
- Porosidad de la roca promedio
- Factor de Resistividad de la formación
- Saturación de Hidrocarburos
- Permeabilidad de la roca promedio
- Viscosidad del fluido

Dichos parámetros pueden ser derivados o deducidos (inferidos) a partir de los Perfiles Eléctricos, Nucleares y/o Acústicos.

Dada la extensa naturaleza involucrada en la determinación de los parámetros físicos del reservorio, y al mismo tiempo, abordar la teoría relevante al tema objeto de este trabajo especial de grado, preferimos referir al lector interesado en éstos, a los diferentes textos especializados en la materia. En lo que sigue, más bien, nos concentraremos en los principios físicos que subyacen detrás de los perfiles nucleares y el registro de pozo a utilizar, como también a la instrumentación necesaria para dicho registro.

3.1.2._ DEFINICIONES Y PRINCIPIOS BÁSICOS DE LOS PERFILES NUCLEARES

3.1.2.1._ RADIOACTIVIDAD

Por ésta se entiende, la facultad de emisión de “radiación de rayos **a**, **b** o **g**”, que poseen ciertos núcleos de elementos químicos, donde el átomo original se transforma en un nuevo elemento, el cual puede resultar en un estado excitado para ser radiactivo, hasta descargar toda su energía de excitación, (Berthelot, 1958); **a** es sinónimo de núcleos de átomos de helio, (He), **b** de electrones y **g** significa radiación en forma de fotones.

3.1.2.2._ ISÓTOPOS

Los átomos están compuestos por tres partículas elementales: electrones, protones, y neutrones. Los electrones (e^-) tienen carga negativa, y muy poca masa. Los protones (H^+) son la contrapartida en carga de los electrones, porque la tienen positiva, pero a diferencia de los electrones, son bastante masivos. Los neutrones (n) no poseen carga, pero en cambio son ligeramente más masivos que los protones. Los

protones y los neutrones constituyen el núcleo de los átomos. Los electrones “giran” alrededor de ese núcleo, en una especie de “órbita cerrada”.

Por ende, un núcleo “X” se caracteriza, genéricamente, por dos parámetros: su número atómico, Z, y su número másico, A. El número atómico, denota el número de protones del núcleo. El número másico es el número de protones y neutrones del núcleo. Como los neutrones no poseen carga, el número atómico (o número de protones) es el que determina la carga del núcleo, que es por lo tanto positiva. Lo que determina que un átomo sea de hidrógeno, de carbono, o de hierro, es el número de protones del núcleo, es decir, su número atómico. En consecuencia,

Se dice que dos núcleos son isótopos o presentan una relación de isotopía, cuando teniendo el mismo número atómico, poseen distinto número másico, es decir, distinto número de neutrones en su núcleo: ${}_Z X^A$ y ${}_Z X^{A'}$.

Por ejemplo, en la figura III-1 se muestra el núcleo del elemento más común del hidrógeno el cual no tiene ningún neutrón; también hay un isótopo del hidrógeno llamado deuterio, con un neutrón, y otro, tritio, con dos neutrones.

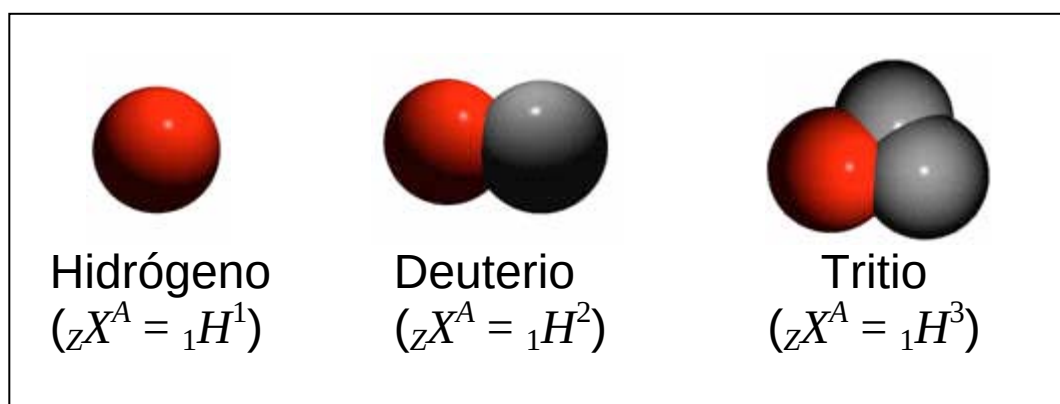


Figura III-1: Isótopo del Hidrógeno

3.1.2.3._ PRINCIPIOS FÍSICOS. FUENTES DE RADIOACTIVIDAD NATURAL

3.1.2.3.1._ LEY DE DESINTEGRACIÓN

En 1900 Rutherford descubrió que el ritmo con el que una sustancia emitía partículas radiactivas no es constante sino que disminuía exponencialmente con el tiempo. Esta dependencia exponencial con el tiempo es característica de todos los procesos de radioactividad e indica que dicha desintegración es un proceso estadístico. Ésto quiere decir, que la desintegración de un núcleo cualquiera individual es un suceso al azar, (Tipler, 1986^a). Para cualquier elemento o núcleo radiactivo, se debe cumplir la ley de desintegración,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (3-1a)$$

en donde, λ : constante de desintegración, (propia de cada núcleo), N_0 representa el número de átomos (o núcleos) inicialmente existentes (en el instante $t = 0$) y $N(t)$ denota el número de núcleos sin desintegrar para el tiempo t . Dicha relación es la solución de la simple ecuación diferencial de 1° orden:

$$\frac{dN(t)}{dt} \approx -N(t) \Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} \equiv -\lambda N(t), \quad (3-1b)$$

Separando variables de la ecuación 3-1b se obtiene:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$$

Si integramos ambos miembros de la igualdad anterior, se puede proceder a despejar el número de núcleos sin desintegrar $N(t)$, para cualquier tiempo t :

$$\int \frac{1}{N(t)} dN(t) = -\int \lambda dt \Rightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + C$$

Elevando ambos miembros de la igualdad a una exponencial, y agrupando,

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{-\lambda t} \cdot e^C, \quad e^C = A, \\ \therefore N(t) &= A e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (3-1c)$$

Usando condiciones iniciales en la ecuación (3-1c), podemos determinar el valor de la constante A , y así obtener una solución particular:

$$\text{Para } N(t=0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \Rightarrow A = N_o \Rightarrow N(t) = N_o e^{-\lambda t},$$

$$\text{I} \quad N(t) = N_o e^{-\lambda t}. \quad (3-1d)$$

La ecuación (3-1d), nos está indicando que el número de núcleos sin desintegrar en un tiempo t , es directamente proporcional al número de átomos inicial y a su vez depende de la constante de desintegración **I**.

Por otro lado si hacemos $N(t) = N_o / 2$, entonces correspondientemente, $t_{1/2}$ será el tiempo de Semi – desintegración, con lo cual:

$$\therefore \frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t_{1/2}}$$

Nuevamente, elevando ambos miembros a una exponencial, obtenemos,

$$\ln(2) = \lambda \cdot t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\therefore t_{\frac{1}{2}} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (3-1e)$$

A través de la ecuación (3-1e), se puede determinar el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los núcleos iniciales, por lo tanto a este tiempo también se le llama periodo de semidesintegración. Más concretamente, en un periodo de tal, se desintegrarán la mitad del número original de núcleos radioactivos, y por lo tanto, en el siguiente período de semidesintegración se efectuará, la desintegración de la mitad de los núcleos restantes, etc. Los periodos de semidesintegración de diferentes núcleos radiactivos, varían desde tiempos muy pequeños (menores de un microsegundo 10^{-6} seg.) hasta tiempos muy grandes, por ejemplo de 10^{16} años. Algunos núcleos que son, teóricamente inestables frente a la desintegración, poseen un período de semidesintegración tan largos como la edad del universo, (Tipler, 1986^b).

Recordemos, que la edad de la tierra es de unos 4.55×10^9 años, (Zharkov, 1985). Todas las rocas, en particular las rocas sedimentarias, contienen elementos radioactivos en cantidades variables. Las arenas limpias contienen pocos elementos radioactivos, las arcillas contienen mayor cantidad. A través de esta propiedad radioactiva presente en algunas rocas, podemos identificar claramente, zonas de interés petrolero por medio de la herramienta de rayos gamma.

Los únicos isótopos inestables que por su degradación producen una apreciable cantidad de rayos gamma y cuyas vidas medias, son comparables con la edad de la tierra, son:

$$\text{Isótopos} \left\{ \begin{array}{l} {}_{19}\text{K}^{40} (1.3 \times 10^9 \text{ años}), \\ {}_{92}\text{U}^{238} (4.4 \times 10^9 \text{ años}), \\ {}_{90}\text{Th}^{232} (1.4 \times 10^{10} \text{ años}). \end{array} \right.$$

Es importante darnos cuenta que al hacer la comparación entre la edad de la tierra, 4.55×10^9 años contra los 1.4×10^{10} años del isótopo del torio (Th), hay una diferencia negativa de -9.45×10^9 años, de lo cual podemos inferir que antes de que la tierra se formara, ya existían elementos radioactivos para su integración. Este es el caso particular del Torio.

Estos tres isótopos en su degradación hacia isótopos estables, son los que originan la radioactividad natural de las formaciones: los núcleos de K, U, Th, son responsables de la actividad observada de rayos gamma. El Potasio 40, decae directamente en Argón 40 que es estable; el proceso origina la emisión de rayos gamma de 1.46 MeV (1.46×10^6 eV), de energía. El proceso es mucho más complejo para el Uranio 238 y el Torio 232, pues éstos generan una serie de isótopos intermedios inestables antes de decaer al isótopo estable final. Cada uno de los isótopos intermedios genera rayos gamma cuando decae en el isótopo siguiente. Ambas series (Uranio y Torio) producen rayos gamma con diferentes energías como se muestra en la figura III-2.

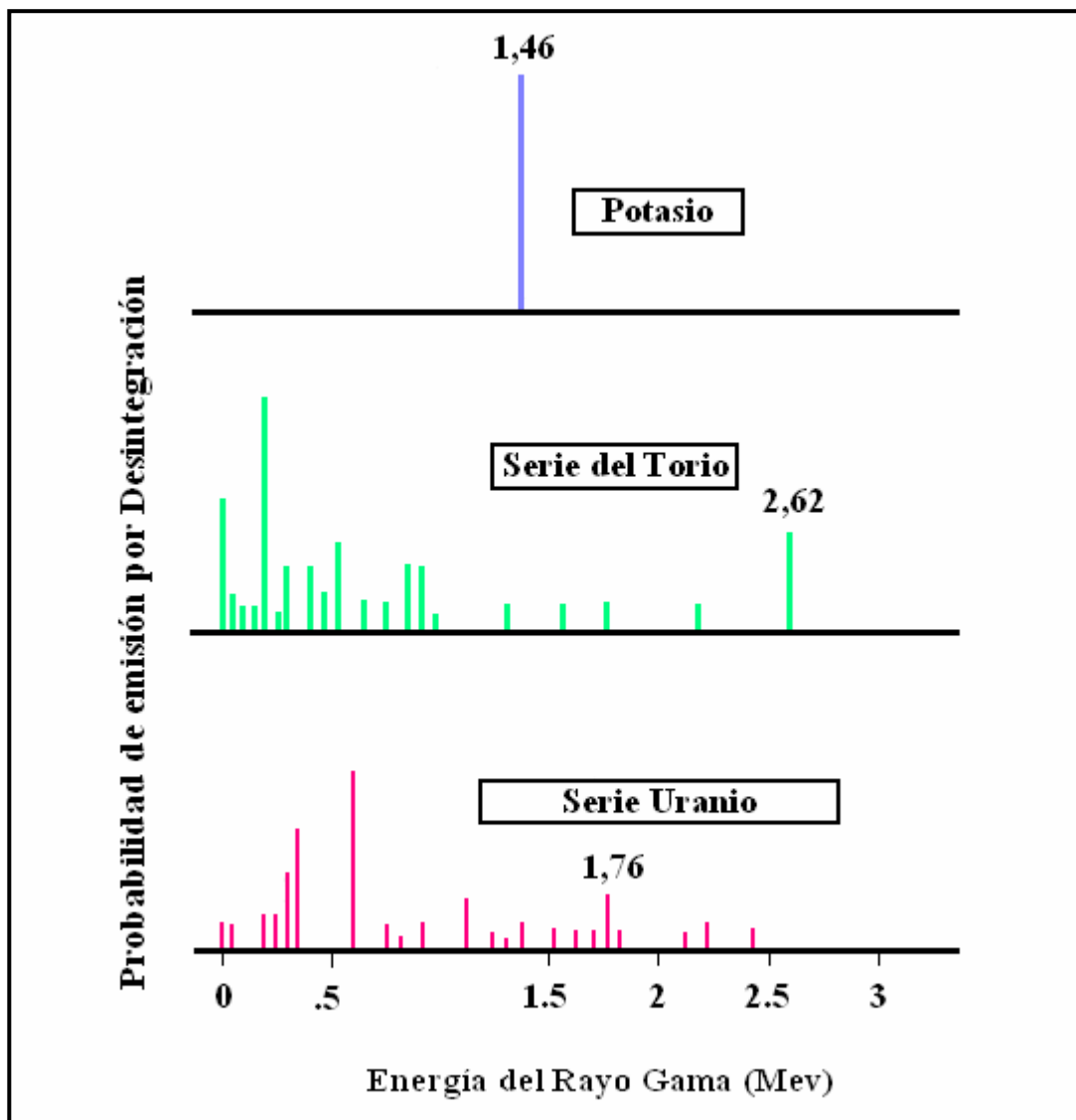


Figura III-2: Distribución de los rayos gamma para los tres isótopos que ocurren en forma natural: El rayo gamma prominente emitido en la serie del Uranio se debe al isótopo Bismuto ($_{83}\text{Bi}^{209}$), mientras que el de la serie de Torio, es debido al isótopo Talio ($_{81}\text{Tl}^{205}$), (Modificado de Rider, 1986).

3.1.3._ REGISTRO DE POZO A UTILIZAR

3.1.3.1_ PERFILES DE RAYOS GAMMA

Los perfiles de Rayos Gamma han sido utilizados durante mucho tiempo en los campos petrolíferos de Venezuela. El perfil de Rayos Gamma es una medida de la radiactividad natural de las formaciones. Es por lo tanto, útil en la detección y evaluación de minerales radioactivos como potasio y uranio. Fue utilizado por primera vez en 1935 por la compañía Well Survery, Inc., precursora de Dresser Atlas Research, quien desarrolló los primeros instrumentos prácticos capaces de registrar las radiaciones naturales del subsuelo, como técnica para determinar la litología de los pozos entubados que nunca antes habían sido registrados.

Tres décadas después, hoy se dispone de una gran cantidad de instrumentos de perfilaje de radiaciones nucleares de pozos. Las mediciones radioactivas son ya una fuente de información ampliamente aceptada, tanto en la fase de exploración como en la de explotación y producción en la industria petrolera (Dresser Atlas, 1974^a).

Una de las características importante del perfil de rayos gamma es que puede correrse en perforaciones abiertas o entubadas, ya sean vacíos o llenos de fluidos de cualquier tipo. Dicho perfil es, frecuentemente, utilizado como sustituto del registro SP (Potencial espontáneo) en pozos entubados donde es imposible obtener el éste.

Cuando se desea estudiar un pozo, y dependiendo de la cantidad de dinero que se disponga, es natural que se utilicen varias herramientas en una sola corrida. Por lo tanto, es frecuente que la curva de rayos gamma se presenta en la primera pista del perfil, con el incremento de la radioactividad hacia la derecha, cuya deflexión hacia la derecha señala la presencia de lutitas.

3.1.3.2_ UNIDADES DEL RAYO GAMMA

A lo largo del tiempo la industria ya ha adoptado ampliamente a la “Unidad API de Rayos Gamma” como la unidad oficial para las mediciones de dichos rayos. Las principales compañías de servicios, normalizan todos sus sistemas detectores y medidores en la unidad API. Esta normalización la realizan en el pozo de pruebas de regulación API de la Universidad de Houston, Texas, Estados Unidos, (Dresser Atlas, 1974^b).

Es importante destacar que cada unidad “API” corresponde a 1/200 partes, de la respuesta generada por una formación artificial, la cual contiene cantidades conocidas y precisas de U, Th y K, estipuladas por el American Petroleum Institute. Dicho pozo de pruebas, está construido de tal modo que la lutita promedio de la zona central petrolera de los Estados Unidos, produzca un registro de unas 100 Unidades API de Rayos Gamma, (Dresser Atlas, 1974^c).

La representación de la escala en las unidades API de los rayos gamma en un registro, usualmente va desde cero a la izquierda (valor menor de radiación), hasta un valor arbitrario a la derecha (valor mayor de radiación); comúnmente este valor mayor de radiación es de 150 unidades API.

3.1.3.3_ DETECTORES DE RADIACIÓN UTILIZADOS EN LA INDUSTRIA

Desde el comienzo del perfilaje radioactivo fueron usados cuatro tipos básicos de detectores: (1) Cámaras de Ionización, (2) Detectores Geiger – Müeller, (3) Contadores Proporcionales, y (4) Detectores de Centelleo. Actualmente, sólo los contadores proporcionales, se utilizan en el perfilaje neutrónico; los otros tres tipos de detectores se han usado, comúnmente, para las mediciones de rayos gamma y también para los perfilajes neutrónicos. Los primeros 3 tipos de detectores, operan bajo el principio general de “ionización de gases”, causado por la incidencia de rayos

gamma sobre un volumen de gas confinado, (especialmente), a altas o bajas presiones. Las cámaras de ionización se han abandonado desde hace mucho tiempo. Los detectores más usados, actualmente, son los contadores proporcionales y los detectores Geiger – Müeller en herramientas miniaturizadas. Esto se debe al limitado espacio disponible para las herramientas usadas en pozos que poseen diámetros pequeños, lo cual no permite la protección termal necesaria para los detectores de centelleo (Dresser Atlas, 1974^d).

El principio de la detección de centelleo se fundamenta en la capacidad de los rayos gamma para producir pequeños destellos de la luz a medida que se van consumiendo dentro de ciertos cristales. Esos destellos o centelleos son luego convertidos en pulsos eléctricos. Es importante destacar que este contador debido a su pequeño tamaño, nos capacita para definir capas delgadas con una mayor exactitud. Dichos detectores, dan lugar a una buena definición en capas tan delgadas como de 3 pies de espesor.

Por otro lado, existen tres maneras en que la interacción de los rayos gamma contribuye a las mediciones registradas por los instrumentos mencionados anteriormente. Tales son:

Dispersión Compton: El efecto Compton sucede cuando un rayo gamma “colisiona” con un electrón libre o ligado a un átomo, el cual cede una parte de su energía a éste y emite otro rayo gamma con energía menor, (figura III-3a). La energía del rayo gamma resultante, depende de la energía del rayo incidente y del ángulo entre la trayectoria del rayo incidente y el que sale de la colisión. Toda dispersión que ocurra contribuye a la respuesta total registrada por los detectores;

Efecto Fotoeléctrico: Éste fue descubierto por Heinrich Hertz en 1887. En este proceso un rayo gamma o fotón, puede chocar con un electrón y perder como consecuencia toda su energía, ocasionando que el electrón sea disparado del átomo,

(figura III-3b). Este proceso, es mayor para los rayos gamma de baja energía y elementos con un número atómico alto. Es importante destacar, que en esta interacción, el fotón desaparece por completo.

La mayoría de los sistemas de detección de radiación de rayos γ , están basados en el efecto fotoeléctrico por dos razones principales: el electrón liberado del átomo tiene una energía, directamente, relacionada con la energía el rayo gamma que lo liberó y para rayos gamma con baja energía, es la interacción dominante con la materia;

Producción Par: La producción par ocurre cuando hay una interacción fotón-átomo. Al final de dicho proceso ocurre la producción de una pareja de electrones, (figura III-3c).

Las anteriores interacciones, ocurren de acuerdo con la ley de Einstein: $E = mc^2$, donde m es la masa en reposo de un electrón, 9.11×10^{-28} gr., y c es la velocidad de la luz, 2.998×10^8 m/seg. Por lo tanto, la energía de un electrón es: 0.511×10^6 eV o 0.511 MeV. Como se puede ver en la figura III-3c, la producción par crea un negatrón (electrón de carga negativa) y un positrón (electrón de carga positiva), cuando la mínima energía que posee el fotón, es de 2 veces la energía del electrón, es decir, $2(0.511 \text{ MeV}) = 1.02 \text{ MeV}$. Por encima de este nivel de energía, la probabilidad de producción de pares aumenta rápidamente (Dresser Atlas, 1974^e).

Luego el positrón se combina con un electrón para formar “el positronio”, con una vida promedio de 10^{-10} segundos; después de transcurrido este tiempo, las 2 partículas se “aniquilan” entre sí. De acuerdo con la ley de Einstein, la masa de este sistema binario se convierte en energía y se producen 2 fotones de 0.51 MeV. La irradiación de aniquilación es la que puede contarse en el contador.

Por otro lado, para concluir sobre donde ocurre cada uno de los procesos explicados, en la figura III-3d, se ha graficado, el atómico Z del elemento absorbente contra los umbrales de energía, (MeV), que caracterizan los procesos en cuestión. De aquí se infiere la importancia relativa de cada uno de éstos.

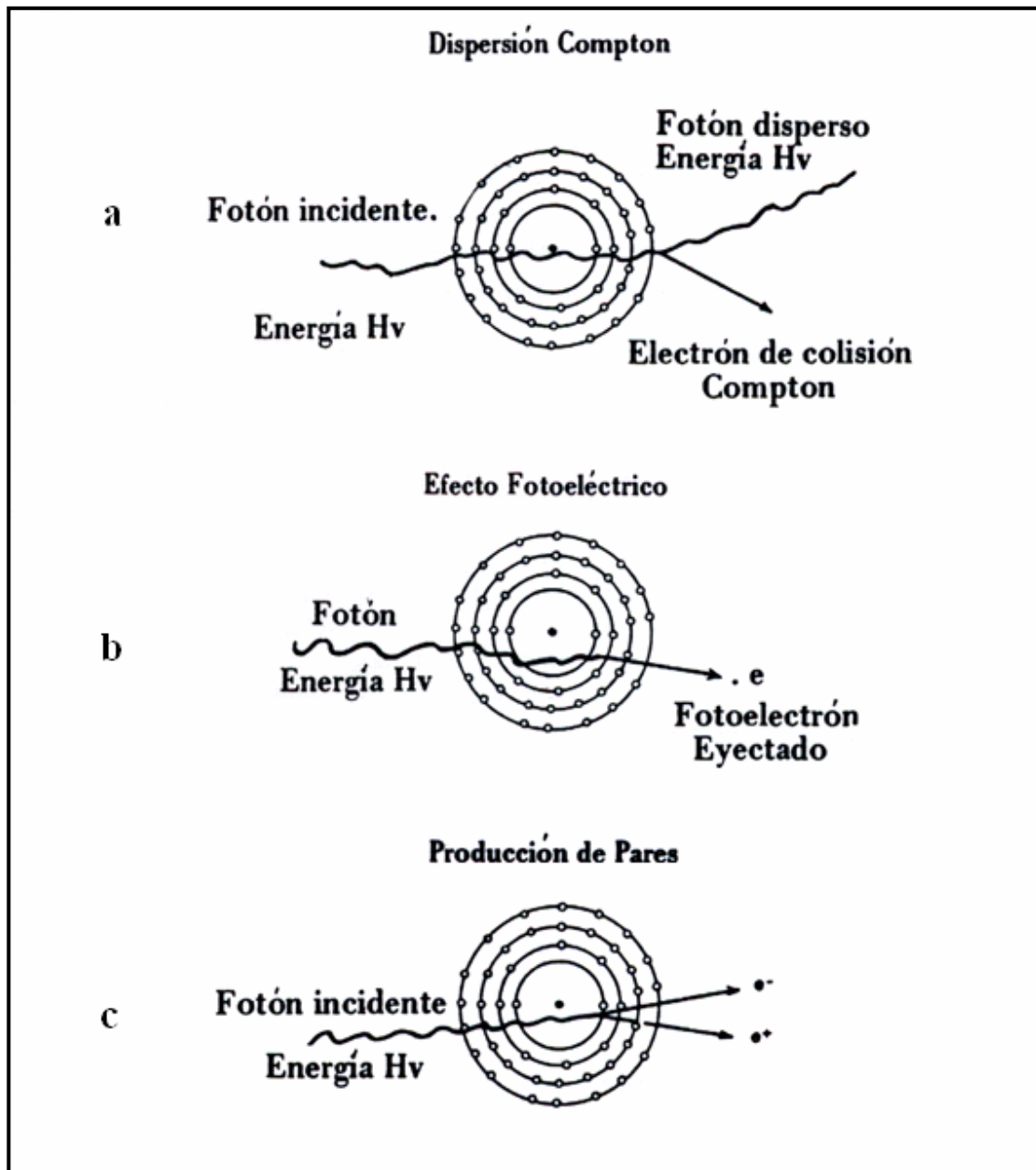


Figura III-3: (a) Dispersión Compton, (b) Efecto Fotoeléctrico, (c) Producción de Pares (Modificado de Dresser Atlas, 1974)

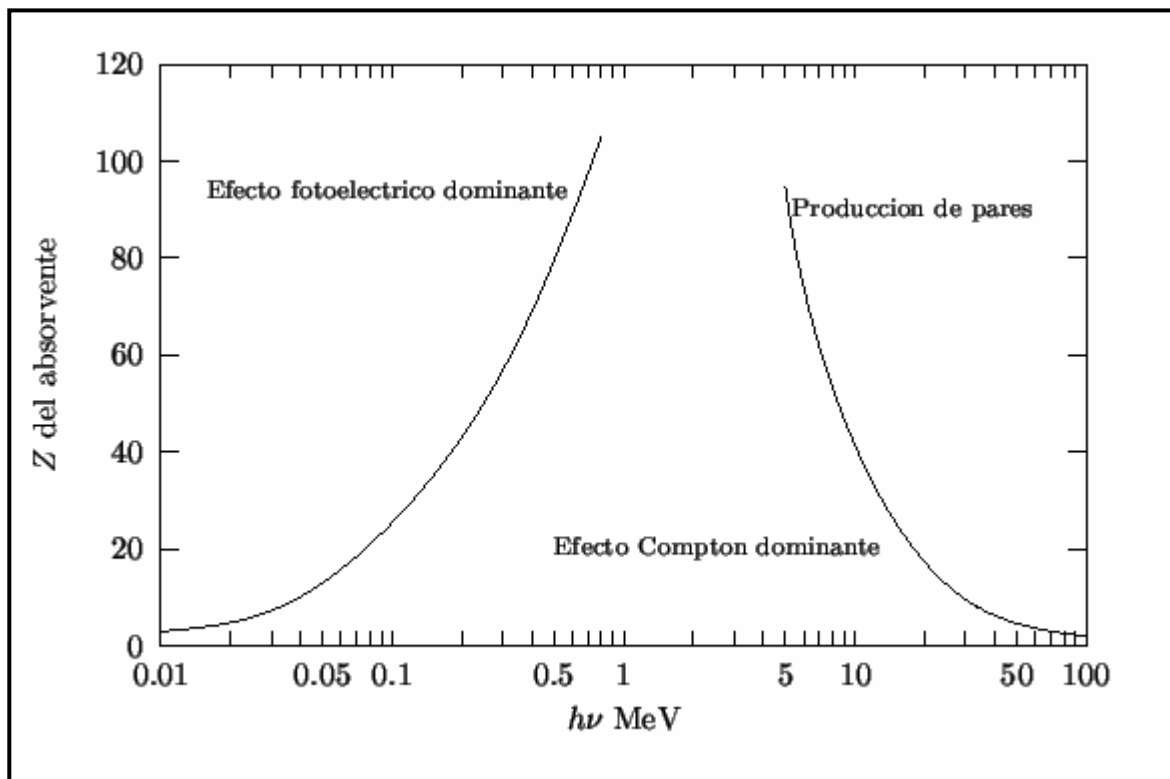


Figura III-3d: Región dominante de los tres efectos en la interacción de los rayos gamma (Modificado de Bassiouni, 1994)

3.1.3.4_ CALIBRACIÓN DEL PERFIL - RAYOS GAMMA

La calibración de los perfiles de rayos gamma se realiza en cada pozo del campo, usando un calibrador el cual se ubica a una determinada distancia del detector. El calibrador es una fuente radioactiva de control conocida que representa una cierta cantidad de unidades API de rayos gamma. Dicha cantidad se establece mediante comparación de las respuestas de la herramienta ante el pozo de prueba API y ante el calibrador, (Dresser Atlas, 1974^f).

Es importante señalar que el rayo gamma (GR) se calibra bajo condiciones de perforación de 8 pulgadas de diámetro, un lodo de 10 libras por galón y con una herramienta de diámetro de 3 5/8 pulgadas colocada excéntricamente, no necesitando correcciones para estas condiciones. Si se realizan perforaciones con un mayor diámetro, se tiene que utilizar un lodo más pesado.

3.1.3.5_ RESPUESTAS DEL RAYO GAMMA

La respuesta obtenida al usar la herramienta del GR, es básicamente una medida de la radioactividad natural contenida en el subsuelo de la formación, contra profundidad. Los rayos Gamma son capaces de penetrar unas pocas pulgadas en las roca y una fracción de ellos, (originados cerca del hoyo), lo atraviesan pudiendo ser detectados por un sensor de rayos gamma, el cual es, típicamente un cintilómetro de una longitud activa de 8 a 12 pulgadas. Probablemente un 90% de los rayos gamma medidos provienen dentro de las primeras seis pulgadas (15 cm.) de la formación que se investiga. (Es importante recordar que el efecto causado por la introducción de medios adicionales, tales como el cemento y la cañería, solamente reduce la cantidad total de rayos gamma disponibles para la medición, (Dresser Atlas, 1974^g). Este detector produce un pulso eléctrico por cada rayo gamma, si y sólo si, el rayo gamma inicial es totalmente absorbido por el cristal. Entonces el parámetro registrado es el número de pulsos captado por unidad de tiempo. Las respuestas típicas de diferentes formaciones en el subsuelo al registro GR son:

Para las calizas y las anhidritas tenemos que presentan las lecturas más bajas. Éstas están entre 15-20 unidades API. Para las dolomitas y las arenas limpias tenemos valores un poco superiores, 20-30 unidades API. Por último se tiene que las arcillas promedian alrededor de 100 unidades API, pero pueden variar desde 75 a 150 unidades API. Unas pocas pueden ser muy radiactivas causando lecturas de hasta 200-300 API y más, (PDVSA CIED, Prof. Eduardo García, 2002^a).

3.1.3.6_ APLICACIONES DEL REGISTRO DE RAYOS GAMMA

Entre las múltiples aplicaciones que se le pueden dar a los registros de rayos gamma, la principal aplicación consiste en la identificación de la litología. Este perfil constituye una ayuda para identificar estratos potencialmente productivos, determinar el índice de la permeabilidad en formaciones lutíticas, es decir, registro GR puede distinguir zonas permeables de las no permeables por el hecho de que los elementos radiactivos tienden a ser abundantes en las lutitas, (las cuales son impermeables), mientras que en los carbonatos y arenas, estos son menos reactivos, (generalmente permeables). Lo anterior permite detectar sellos dentro de la formación, suministran información sobre los espesores de capas, (cálculo de arenas), y una guía para la corrección de otras mediciones hechas en los pozos.

Normalmente entonces, el registro de rayos gamma GR, puede separar arenas limpias y carbonatos de las arcillas bastante bien y es por eso que es usado, extensamente, por los geólogos como un registro de correlación, (figura III-4), asociando la estratigrafía de un pozo a la de los pozos vecinos, con la encontrada en trabajos de superficie en los alrededores de la cuenca. Sin embargo, existen áreas donde hay presencia de arenas y dolomitas, (elementos con respuestas radioactivas muy bajas), libres de arcilla, que son lo suficientemente radiactivas, las cuales dificultan el proceso de interpretación de capas de interés productivo.

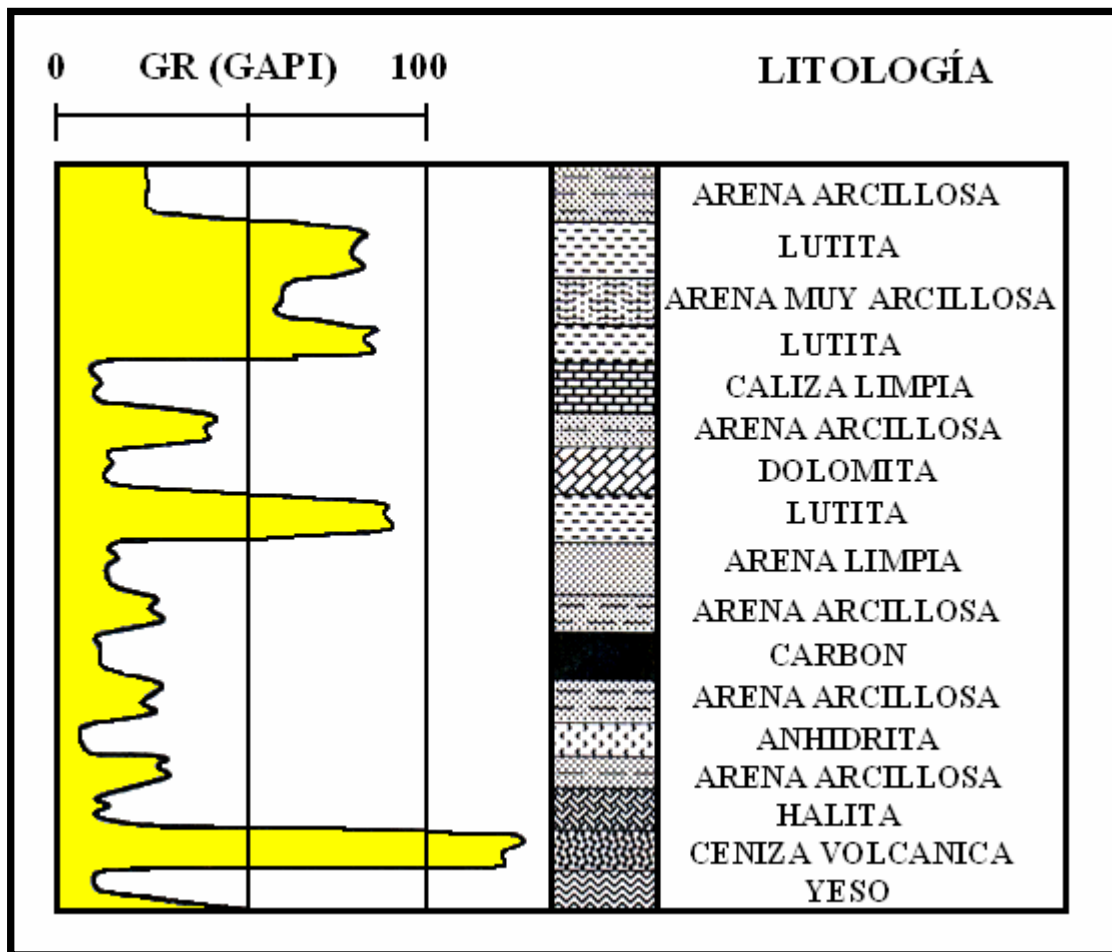


Figura III-4: Respuesta del rayo gamma: Se muestran las lecturas más bajas, 15-20 API, mientras que las dolomitas y las arenas limpias muestran valores un poco superiores, 20-30 API. Las arcillas promedian alrededor de 100 API pero pueden variar desde 75 a 150. Unas pocas pueden ser muy radioactivas leyendo hasta 200-300 API. Modificado de Dewan, T., Hohn, 1984.

3.1.3.7._ RESOLUCIÓN DEL “APARATO”

En general, ninguna medición de una magnitud física, (i.e., campo escalar o vectorial) involucra un acto exacto. En particular, en el caso de procesos nucleares, donde el número de eventos OBSERVADOS es pequeño, la aleatoriedad de los mismos es IMPORTANTE. Por lo tanto, sólo se puede hablar inteligiblemente, acerca de un grupo de partículas (o eventos) y de la distribución de valores medidos alrededor de cierto promedio.

Por ende, dejemos que $F(x)$ represente una función sobre la distribución de valores medidos de la magnitud física en cuestión. Dicha función $F(x)$ será definida como el número de rayos g por unidad del intervalo de la variable independiente x (o t), de manera tal que $a \leq x \leq b$. Consideremos un intervalo muy pequeño, de anchura Δx_i , localizado en cualquier punto x_i , como se muestra en la figura III-5. Sea $F(x_i) \equiv F_i$. Luego suponemos que se dispone de un instrumento adecuado, (sensor), para medir a F_i . El efecto de este aparato al realizar las medidas, es el de transformar la distribución “ideal” F , en la región Δx_i , en una “distribución medida”, denotada por $f_i(x)$ y que expresamos en la forma,

$$f_i(x) \equiv A_i g(x_i, w_i, x) \quad (3-2)$$

donde ahora $\alpha \leq x \leq \beta$, A_i es el factor de amplitud, y g es una función de distribución, la cual se puede describir, (en general), por medio de especificar los valores de los 2 parámetros: x_i y w_i . Estos son x_i = localización y w_i = la anchura característica de dicha distribución medida. La w_i es más, apropiadamente, denominada, “anchura del aparato” y es, (en general), función de la variable independiente x (o t).

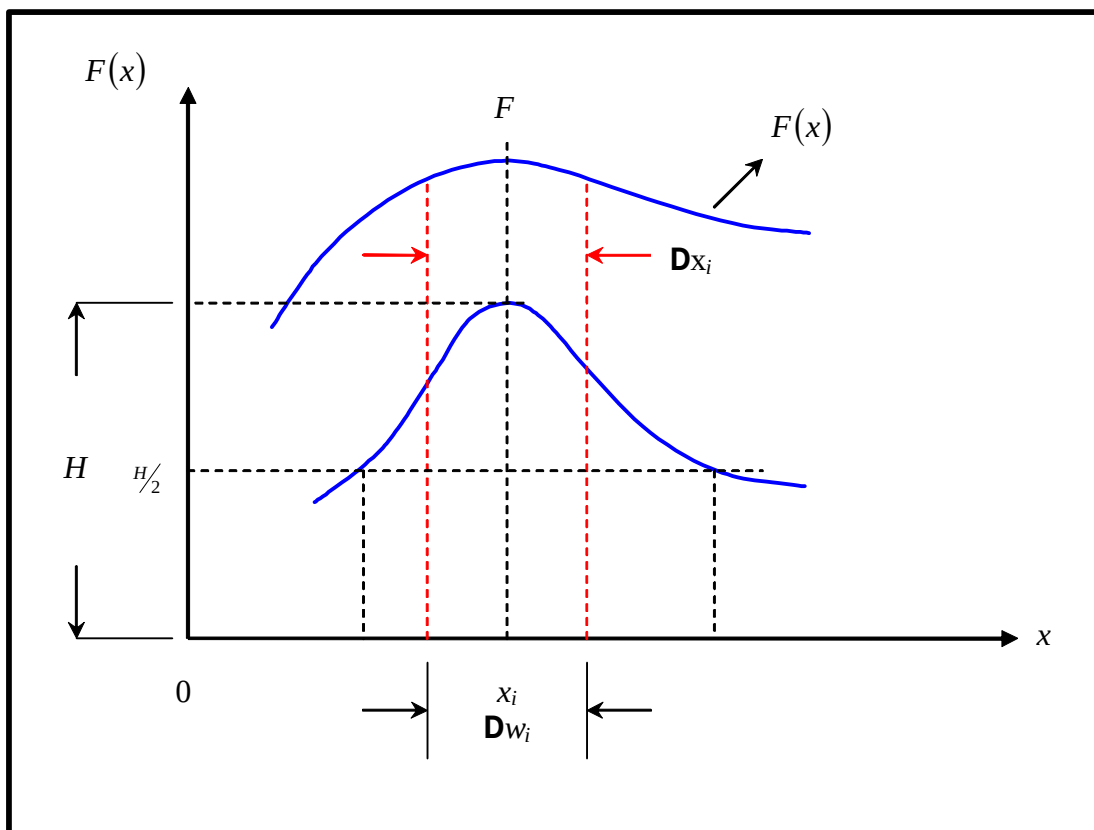


Figura III-5: Representación esquemática de la distorsión de la resolución de una distribución “ideal” $F(x)$.

La definición convencional de “Resolución del aparato” se da como:

$$R \equiv \frac{w_i}{x_i}.$$

Por otro lado, g es también denominada: función de resolución o función de transferencia del sistema. Aquí estamos usando el término “aparato”, en el contexto de inclusión de todos los procesos físicos involucrados en el acto de medición. Obsérvese que $\alpha \leq x \leq \beta$, en general, no coincide con el intervalo para el cual F está definida.

Se puede mostrar, usando la ecuación (3-2) para el valor de A_i , que,

$$f_i(x) = \frac{F_i[g(x_i, w_i, x)]}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x_i, w_i, \xi) d\xi} \cdot \Delta x_i$$

y por ende,

$$f(x) = \sum_i f_i(x) \equiv \sum_i \frac{F_i[g(x_i, w_i, x)]}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x_i, w_i, \xi) d\xi} \cdot \Delta x_i, \text{ (Grisson y Kochler, 1967^a)}.$$

3.1.3.8._ VARIACIONES ESTADÍSTICAS Y VELOCIDADES DE REGISTROS

La naturaleza aleatoria, con que son emitidas las radiaciones gamma, induce una variación en el conteo de éstos respecto al tiempo, el cual obedece la ley de Poisson que explicaremos más adelante. Por ello, las mediciones instantáneas o en breves intervalos, nunca son 100% exactas. Estas variaciones temporales en la

emisión explican la “naturaleza estadística” de los perfiles radioactivos. En un sistema de medición para detectar cierta radioactividad, se usa un circuito promediador, (el cual asigna un valor medio de radioactividad a un intervalo de tiempo, llamada, “constante de tiempo”), para disminuir fluctuaciones estadísticas. Ésto aumenta necesariamente el “tiempo de respuesta” total y limita la velocidad a la cual este sistema puede hacer mediciones precisas. En consecuencia, la selección de una constante de tiempo constituye siempre un compromiso entre la velocidad de perfilaje y una calidad estadística aceptable (Dresser Atlas, 1974^b).

Este procedimiento no es usado hoy en día, pero provee una metodología para explicar las relaciones entre el perfil, la velocidad de registro y la rapidez de respuesta. (PDVSA CIED, Prof. García Eduardo, 2002^b).

Como se muestra en las figuras III-6a, III-6b, para constantes de tiempo (CT) cortas, la rapidez de respuesta a cambios en los niveles de radioactividad, son muchos mayores, lo cual resulta en variaciones que son sólo estadísticas y no representativas de un cambio verdadero en los niveles de radioactividad.

La idea, a la hora de correr cualquier registro, es acotar fluctuaciones de las mediciones a un valor mínimo, manteniendo al mismo tiempo, velocidades de registro aceptables. Estas constantes de tiempo pueden ser calculadas una vez que las rapidezces de conteos máximas y mínimas se hallan determinado. Se debe puntualizar, que la rapidez de conteo, no es igual a la magnitud en API, lo cual determina que estén, generalmente, estandarizadas para áreas geográficas específicas, siendo raramente recalculadas en el sitio del pozo. Estas constantes de tiempo son, generalmente, usadas para propósitos de calibración (PDVSA CIED, Prof. García Eduardo, 2002^c). La velocidad del registro resulta, usualmente, de un compromiso entre el tiempo de taladro y la calidad del registro: cuanto más rápida sea la velocidad o mayor la constante, tanto mayor será el desplazamiento de la profundidad aparente de la anomalía en la dirección del movimiento del aparato.

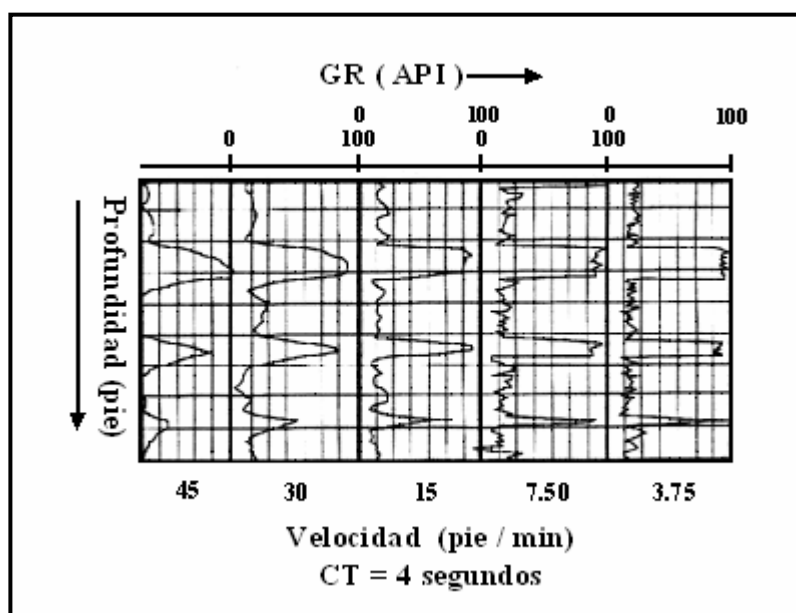


Figura III-6a: Resolución de la herramienta para una $CT = 4\text{seg}$ con Velocidad de registro (pie/seg.) variable en el GR (Modificado de Western Atlas, 1992).

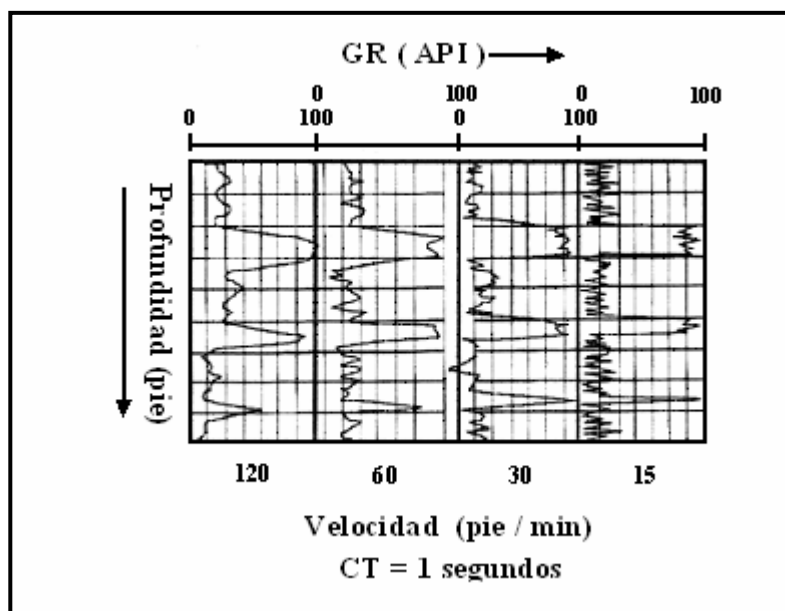


Figura III-6b: Resolución de la herramienta para una $CT = 1\text{seg}$ con Velocidad de registro (pie/seg.) variable en el GR (Modificado de Western Atlas, 1992).

3.1.3.9._ CRITERIO DE SELECCIÓN

De lo anterior se evidencia que para evitar que la curva tenga una mayor “distorsión”, se selecciona la velocidad de registro de tal manera que el desfasaje espacial o la “demora”, es más o menos un pie (33cms). Así, para una constante de tiempo de 2 segundos, la velocidad de registro es de 0,5 pies/seg. ó 1.800 pies/hora (590 metros/hora), (Schlumberger, 1972^b). Esto permite un detalle razonable, en una escala de profundidad expandida (1:200 o 1:240).

La velocidad requerida para una “resolución” alrededor del “promedio” de API es, usualmente, de 30 pies/minuto (1.800 pies/hora) o menor, dependiendo de las características de la formación. Para usos de correlación, la velocidad es, generalmente, de 60 pies/minuto (3.600 pies/hora). (PDVSA CIED, García Eduardo, 2002^d).

En el pasado, los circuitos que implementan las constantes de tiempo no reaccionaban, instantáneamente, a cambios en la radioactividad. Los tiempos de retardo, causaban que los límites de las capas aparecieran más arriba en la perforación, que a su profundidad real, siendo esta diferencia denominada *desplazamiento*.

Este retardo (*lag*), es aproximadamente, igual a la distancia que se desplaza el contador por una constante de tiempo, de acuerdo con la relación:

$$\text{Retardo}(\text{pies}) = \text{velocidad de registro} \left(\frac{\text{pies}}{\text{segundo}} \right) \times \text{constante de tiempo}(\text{seg})$$

3.1.3.10._ LIMITACIONES DE LA HERRAMIENTA DE RAYOS GAMMA

1. Pierde resolución cuando la litología existente tiene un bajo contenido de lutitas o el registro de SP no presenta una curva redondeada.
2. Falta de presencia de elementos radioactivos.
3. Se producen desviaciones en las lecturas cuando es usando en pozos entubados.
4. Los sensores de la herramienta son sensibles a los cambios de temperaturas, (depende de si el sensor usado, es producto de la tecnología derivada a través de “semiconductores”; en tal caso, dicho aparato debe ser operado a temperaturas extremadamente bajas).
5. El rango de penetración solo es de 6 a 12 pulgadas (Dresser Atlas, 1974ⁱ).
6. La velocidad de ejecución debe ser controlada ya que la resolución vertical recomendable, es de 3 pies.

3.1.3.11._ CARACTERIZACIÓN DE LITOLOGÍAS A TRAVÉS DE LOS REGISTROS DEL ESPECTRO DE RAYOS GAMMA

Potasio: La presencia del potasio está íntimamente relacionada con los minerales de arcillas, evaporitas, feldespatos, micas y en rocas arenáceas, compuestas por sedimentos marinos. Debido a su abundancia en la naturaleza, la respuesta emitida por el potasio está expresada en términos de porcentaje. Este elemento es muy sensitivo a la erosión-meteorización y a los efectos diagenéticos, por lo que a menudo es retrabajado y transportado a grandes distancias.

Uranio: La movilidad y acumulación del uranio en el subsuelo, está controlada por los siguientes factores: físicos, químicos, biológicos e hidrológicos. El uranio se fija en la roca por infiltración de aguas meteóricas con pérdida de oxígeno, acción bacterial, reacciones geoquímicas que cambian las condiciones oxidantes a reductoras y está relacionado tanto a sedimentos detríticos, o químicos. En los carbonatos ricos en materia orgánica, bajo condiciones reductoras, a menudo presentan altas cantidades de uranio. Debido a que este elemento necesita un ambiente muy ácido para poder ser fijado, la materia orgánica absorbe este elemento. De la misma manera, se da en condiciones de sedimentación baja, como por ejemplo en un límite de secuencia en donde se ha encontrado alta acumulación de uranio.

Torio: La presencia del torio está relacionada, solamente, a sedimentos detríticos, es decir, que éste excluye a las rocas carbonáticas y dolomíticas. Por esta razón, en reservorios carbonáticos éste es un buen indicador de arcillas. El torio está asociado a minerales de arcilla, minerales pesados como zircón, rutilo, y otros. También se encuentra en sedimentos residuales formados por alteración de cenizas volcánicas. Presenta muy baja solubilidad, lo que limita su movilidad durante los procesos de meteorización. Su origen es predominantemente marino.

3.1.3.12._ ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN DE ARCILLOSIDAD

Los minerales de arcilla poseen la mayor concentración de elementos radioactivos, por lo tanto el registro de rayos gamma (GR) es usado, extensamente, en interpretación de arenas arcillosas para estimar la fracción de lutita por volumen, o V_{sh} , en dichas arenas.

Aunque el valor de rayos gamma para las lutitas varía enormemente, los valores para lutita (pura) tienden a ser constantes, ver figura III-7. Si se considera un valor promedio máximo para rayos gamma 100% lutita (i.e. línea de lutita, figura III-7), y el valor más bajo para indicar la no presencia de lutita (i.e. línea de arena, figura III-7), entonces, se puede construir una escala lineal en porcentajes, de 0 al 100% de lutita, para cualquier valor de (GR) del registro se puede calcular el volumen de lutita con la simple definición:

$$V_{sh} = \frac{GR - GR_{cl}}{GR_{sh} - GR_{cl}} \quad (3-3)$$

en donde: GR: Lectura de gamma en la zona de interés

GR_{cl} : Lectura mínima de gamma (zona limpia) 0% lutita

GR_{sh} : Lectura máxima de gamma (zona con lutita) 100% lutita

Generalmente, el valor arrojado por la ecuación (3-3) tiende a dar un límite superior al volumen de arcilla (lutita) (Rider, 1986), como se muestra a través de la recta de línea continua, figura III-8b. Por tal motivo, al tomar en cuenta, la presencia de otros elementos radioactivos, (a demás de la lutitas y arcillas), se prefiere “redefinir” la anterior relación (3-3), como el *Índice de Rayos Gamma*. En consecuencia es definido como:

$$I_{GR} = \frac{GR - GR_{cl}}{GR_{sh} - GR_{cl}} \cdot \quad (3-4)$$

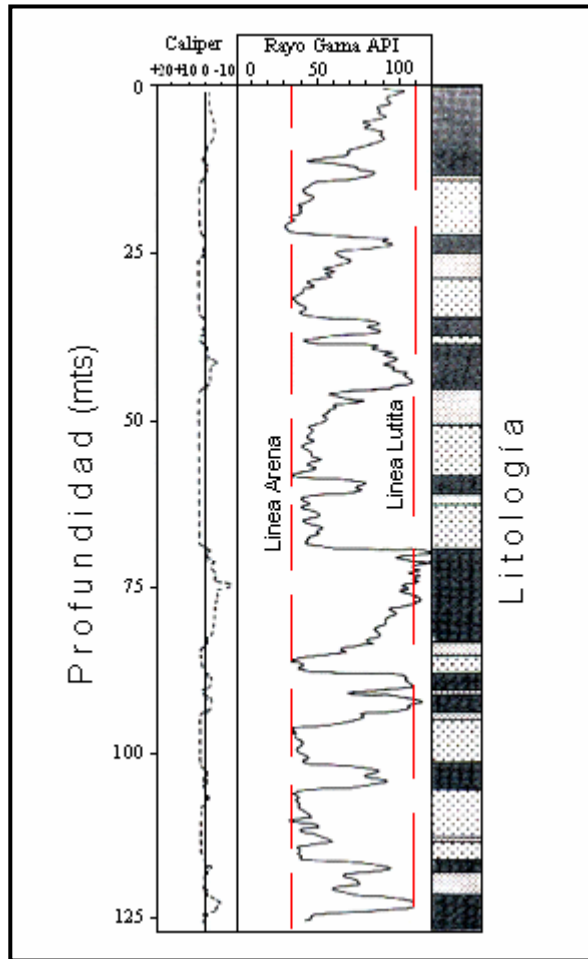


Figura III-7: Línea de arena y línea de lutita (arcilla) de un registro de rayos gamma (Modificado de Rider, 1986).

De lo anterior se desprende que el GR es la respuesta del registro en la zona de interés, GR_{cl} el valor leído en una zona considerada limpia o libre de arcilla y GR_{sh} la lectura en una capa de lutita, todas en unidades API. En la figura III-8a se toma como ejemplo, $GR_{cl} = 32$ API, $GR_{sh} = 94$ API y $GR = 59$ API para un cuerpo arenoso que se encuentra, aproximadamente, a la mitad del registro. Por lo tanto, el valor del índice de rayos gamma para este cuerpo será calculado como,

$$I_{GR} = \frac{(59 - 32)}{(94 - 32)} = 0.44$$

El índice de rayos gamma ha sido correlacionado, empíricamente, con volúmenes fraccionales de lutita para determinar una corrección a la respuesta lineal en rocas de ciertas edades. En la figura III-8b, la curva de trazo continuo representa la respuesta lineal de I_{GR} Vs GR , de 0 a 100% lutita y representa el límite superior de V_{sh} para una formación dada. La curva de trazos largos es descrita por Larinov como representativa de la verdadera correlación de arcillosidad en rocas de edad mesozoica y paleozoica. Cuando la roca es terciaria o consolidada, esta curva tendrá a sobre – estimar el valor de V_{sh} y por lo tanto, el mismo Larinov propone la curva mostrada de trazos cortos para este tipo de rocas (PDVSA CIED, Prof. Eduardo García, 2002^e).

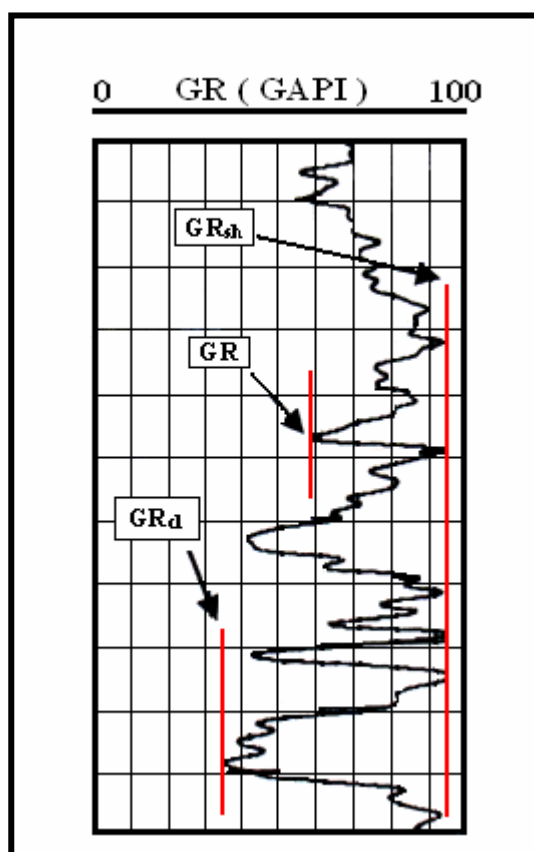


Figura III-8a: Selección de GR_{cl} , GR_{sh} y GR en un registro común de rayos gamma (Tomado, PDVSA CIED, 2002).

Por ejemplo, cuando 2 formaciones poseen la misma cantidad de lutita, pero difieren en edades geológicas, la respuesta de GR será menor para la roca más vieja, más consolidada y probablemente más densa, ya que la absorción de rayos gamma se incrementa con la densidad de la matriz a través de la cual esta radiación pasa. Para el ejemplo citado, el I_{GR} calculado de 0.44, la respuesta lineal nos dará $V_{sh} = 0.44$ ó 44%; para rocas mesozoicas o paleozoicas 0.28 ó 28% y para rocas terciarias 0.20 ó 20%.

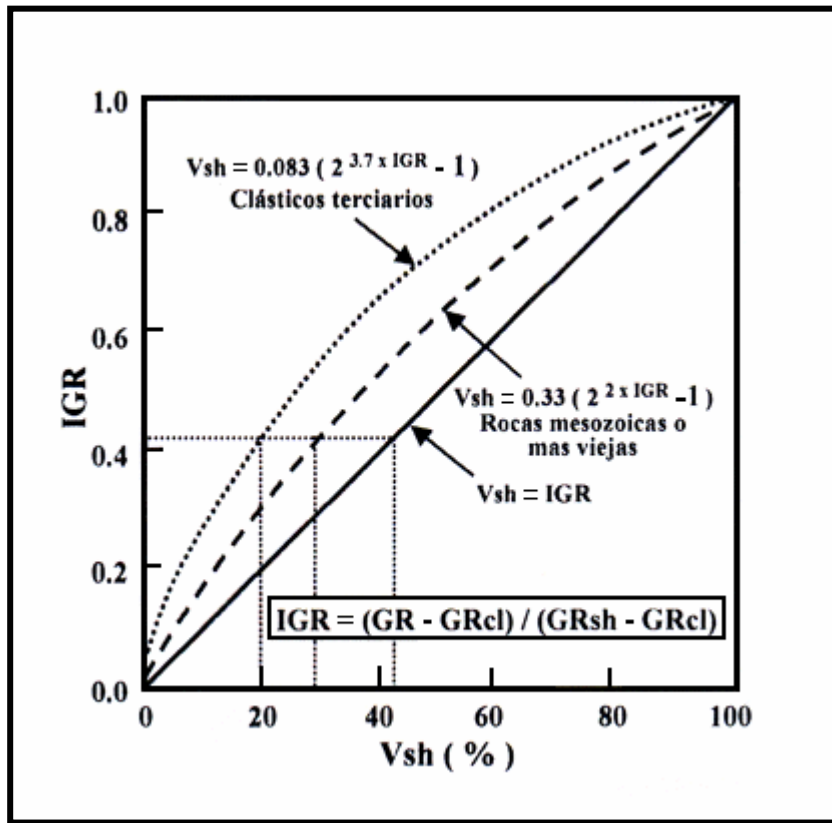


Figura III-8b: Representación grafica de la relación relativa entre el rayo gamma y el volumen de arcilla (Modificado Dresser Atlas, 1982).

La estimación de los valores para GR_{cl} y GR_{sh} no es siempre fácil. Puede que halla sólo unas pocas arenas limpias de poco espesor y la actividad de las lutitas puede ser muy variable. Por lo tanto, un juicio ponderado es a menudo necesario. Una lectura anómalamente alta en una capa lutítica, debe ser ignorada. (PDVSA CIED, Prof. Eduardo García, 2002^f).

Sin embargo, frente a la posibilidad de incrustaciones de material altamente radioactivo, en el estudio cuantitativo que haremos más adelante, tal sugerencia será ignorada. La razón de esto, se sustenta en el reconocimiento, de que las series en profundidad (o temporales), están constituidas por amplitudes medidas en API, a manera de base “completa” de un espacio vectorial. En consecuencia, el ignorar una “cierta amplitud”, equivale a destruir la posibilidad de aplicar el principio de superposición, en estadística matemática.

3.2._ ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

3.2.1._ OBJETIVO Y MOTIVACIÓN

Una gran variedad de fenómenos naturales, biológicos, sociales, o interacciones entre éstos, tienen la característica de generar resultados u observaciones que no son susceptibles de predecirse con certeza. Esto es, que aún cuando se estudien repetitivamente bajo un mismo conjunto de circunstancias, no siempre se observa el mismo resultado. Una familia de ejemplos, muy conocida, la proporcionan ciertos fenómenos naturales como los meteorológicos: magnitud, intensidad y extensión de las lluvias; humedad, dirección y velocidad de los vientos; temperaturas máximas y mínimas; y todas sus consecuencias como volúmenes de agua en las represas, magnitud de los daños provocados por inundaciones, sequías, heladas.

Por otro lado, es importante destacar que en aplicaciones de las ciencias básicas, surgen muchos problemas donde, no existen leyes físicas conocidas, tales como un principio de conservación, simetría, etc., que nos permitan encontrar soluciones expeditas de los mismos. Por lo tanto, debemos acudir a la Teoría de Probabilidades para tener una mejor ponderación sobre la cuantificación de la incertidumbre con la que determinado fenómeno pueda ocurrir.

En consecuencia, frente a la imposibilidad de calcular y/o predecir con CERTEZA, la ocurrencia de dichos fenómenos se les categoriza de ALEATORIOS o ESTOCÁSTICOS. Por ende, el uso de los calificativos involucrados, será sinónimo de NO DETERMINÍSTICO.

Desde un punto de vista matemático, la decisión de acudir (apelar) al uso de la Teoría de Probabilidad, surge de manera natural cuando al tratar de correlacionar un

conjunto de **observaciones**, (imagen), con un conjunto de puntos denominados “Causas”, (Pre-imagen), no existe una aplicación biyectiva, (i.e., 1 a 1 y sobre). Específicamente, cuando las relaciones correlacionadas, entre el conjunto de causas y el de los efectos, son del tipo de “1 a muchos”: una causa y varios efectos. Por lo tanto, cuando no es posible enmarcar los hechos observacionales dentro de un cierto formato conveniente, llamado “**FUNCIÓN**”, se hace necesario introducir las nociones de: (a) Eventos (Sucesos) Aleatorios, (b) Espacio de Eventos, (c) Variable (Magnitud) Aleatoria, (d) Probabilidad (Absoluta), (e) Leyes de Distribución, (f) Funciones Aleatorias, etc., entre otras, (Prof. Figueroa, 1994).

En lo que sigue trataremos de esbozar, SÓLO aquellas nociones de la teoría en cuestión y sus conexiones con la Estadística Matemática, que nos parecen, **ABSOLUTAMENTE NECESARIAS**, para la comprensión y elaboración del análisis de medidas provenientes de un perfil de rayos gamma, (GR). Por lo tanto, debemos puntualizar, que para lograr tal objetivo, evitaremos en lo posible el uso canónico del Espacio de Probabilidades y más bien, nos concretaremos a explicar cualquier noción necesaria, dentro de la óptica de EL CAMPO DE PROBABILIDADES. Esto es, en la mayoría de las monografías y textos acreditados sobre la temática en cuestión, se acostumbra a introducir 3 objetos: (Espacio muestral, clase de sucesos, medida probabilística) ^a (W, F, P) , para explicar conceptos inherentes a fenómenos aleatorios. Sin embargo, para nuestros propósitos sólo es necesario hacer uso del par, (F, P) ^a Campo de probabilidades o simplemente el par, (W, P) , para copar con fenómenos, (¿aparentemente?) ESTOCASTICOS o ACAUSALES.

3.2.2._ NOCIONES FUNDAMENTALES

El concepto primordial en la Teoría de Probabilidades es la noción de **Evento** ó **Suceso** “**Aleatorio**”. Por lo tanto, para el desarrollo de la Teoría de Probabilidades es necesario relacionar dicho “suceso” con la realización, (ejecución), de un experimento o pruebas tipo Gedanken, (i.e. experimentos conceptuales, ideales,

(Panofsky & Phillips, 1962). De esta forma, decimos que al realizar un experimento e interesarnos en sus resultados, suponiendo un conjunto dado (específico) de “condiciones” (hipótesis) para su realización, entonces al repetir “ n -veces” dicha experiencia, podemos “ordenar” y sintetizar dichos resultados en un conjunto con estructura, (i.e. espacio), que denotamos por,

$$W = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \quad (3-5)$$

y lo denominaremos como espacio MUESTRAL.

Se sobreentiende que la relación (3-5), representa los n diferentes valores con que se han realizado, n -veces, un “Idéntico Experimento”, y por otro lado, que dentro de este conjunto ordenado, (i.e., por cronología o profundidad), puede ocurrir que los diferentes resultados, r_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), se den o acontezcan con mayor o menor “frecuencia”. Ahora bien, si como resultado de repetir la misma experiencia, n -veces, obtenemos n -resultados, entonces es obvio que por cada experiencia sólo puede existir uno y sólo un resultado. Por ende, no puede haber experimento alguno a consecuencia del cual haya dos o más resultados simultáneamente. Es importante tener esto claro y no confundirlo con la “multiplicidad” de valores o “frecuencia” con que del total de n -resultados, se den los r_1 , los r_2 , ..., los r_n .

Por lo tanto, se denomina Aleatorio, (estocástico), a cualquier suceso o evento r , que como resultado de un experimento o prueba, puede ocurrir o no.

Por otro lado, cualquier característica cuantitativa adjudicada a la realización de un experimento, se denomina Magnitud o Variable Aleatoria. Más generalmente, se llama ALEATORIA a toda magnitud A PRIORI DESCONOCIDA, que como resultado de un sólo experimento, sólo toma un valor cualquiera, y la cual como resultado de n pruebas similares, (idealmente idénticas), puede tomar m diferentes valores, donde $m \leq n$.

Por ende se dice que los valores de la magnitud aleatoria, son los resultados (números) $r_1, r_2, \dots, r_n$, es decir, los eventos o sucesos elementales, (puntos muestrales); al conjunto finito estructurado $W = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, se le denomina el Espacio de los eventos elementales (Espacio Muestral), en donde,

$r_i \in W :=$ evento o suceso i -ésimo elemental en el espacio W ,

(Algunas veces, sólo se indica como $r \in W$ para connotar lo mismo).

La especificación del espacio de los sucesos elementales es el primer paso en la formulación de un modelo probabilístico de un experimento o prueba. Sin embargo, EN LA PRACTICA, el máximo interés se centra, no precisamente en los sucesos elementales en sí, sino más bien en cierto grupo de ellos, los cuales son SUBCONJUNTOS de partes de W . Por lo que es menester, introducir el siguiente concepto con el proviso de sobrentender que cada vez que se haga referencia al término “evento o suceso”, nos estaremos refiriendo a uno de índole estocástico.

Sea S cualquier subconjunto de W : $S \subseteq W$; luego calificaremos de “suceso” ó “evento” S en el espacio W , a cualquier $S \subseteq W$. Es decir, si r_i es el resultado del i -ésimo experimento entonces él está contenido en el subconjunto S de partes de W .

De lo anterior se desprende que si S_1 y S_2 son dos sucesos o eventos cualesquiera, (elementos de W), entonces:

1. La unión de los sucesos (eventos) S_1 , y S_2 , denotada como $S_1 \cup S_2$, connota la realización del evento (S_1 ó S_2), ó, (S_1 y S_2), es decir, S_1 o/y S_2 .
2. La intersección de los sucesos (eventos) S_1 y S_2 , denotada como $S_1 \cap S_2$, connota la realización del evento S_1 y S_2 .

3. $S_1 \dots S_2 = \llcorner :=$ intercepción vacía de los sucesos o eventos S_1 y S_2 , connota que los mismos son incompatibles, es decir, la realización de uno de ellos, automáticamente, excluye la posibilidad de que se efectúe la realización del otro.

En consecuencia, la realización del incumplimiento del suceso S , se denota mediante $\bar{S}$, y se denomina, el complemento de S , respecto de un espacio de eventos referencial o muestral. Por el contrario, un suceso o evento es cierto, (S_c) , si consiste en la realización de, al menos, uno de los sucesos elementales, $r \in W$, es decir, $S_c \neq \llcorner$.

Por ende, un suceso o evento es imposible, (S_I) , si consiste en la realización de cualquier otro resultado que no está incluido en el espacio, $W = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, (i.e. cuando $m > n$), y por lo tanto, escribiremos $S_I : \text{a} \llcorner$.

De lo anterior, es obvio que el espacio W , NO es un Espacio Lineal, es decir, W NO posee las propiedades de aditividad y homogeneidad dada por las aplicaciones,

$$\begin{aligned} \forall : X \times X \not\subseteq X; & \quad (x, y) \not\subseteq x + y, \\ : \dots \times X \not\subseteq X; & \quad " x, y \in X, \lambda \in \dots \end{aligned}$$

donde $X :=$ conjunto de vectores y $\dots :=$ conjunto de escalares (reales), y $X \times X$ denota el producto "CARTESIANO" de X consigo mismo.

La notación precedente para caracterizar un ESPACIO VECTORIAL significa: dado un conjunto Z de "puntos" (datos), $x, y, z, \dots$ que bajo la operación, $f :=$ suma (resta) de dos cualesquiera de ellos, dé lugar a otro "punto" que también pertenezca a él y además que bajo la operación, $g :=$ multiplicación de cualquier elemento por un número $\mathbf{l}$ (real), resulta en otro "punto" que está contenido en Z .

Dichas operaciones, “+” ú f y “ $\times$ ” ú g , definidas sobre los elementos de Z , identifican la estructura de un espacio vectorial en la matemática moderna.

Sin embrago al recordar el enunciado: “a cada experimento que se efectúe, le corresponde, algún resultado, $r \in W$, y sólo uno en cada prueba”, inferimos intuitivamente que si le asignamos una medida numérica a cada $r_i \in W$, entonces estaríamos cuantificando la información contenida en W como también la contenida en un HISTOGRAMA. Por ende, estaremos en la ruta de construir un Espacio Lineal. En efecto, si “por definición” (construcción), acordamos que por **Probabilidad** de un resultado $r_i \in W$, se entiende la medida numérica que caracteriza la posibilidad objetiva de un resultado (dado) en un experimento, entonces parece expedito que debemos asignar a cada uno de los elementos $r_i \in W$, cierto peso numérico. Es decir, crear una biyección entre los elementos de W , y un conjunto de valores del cuerpo conmutativo real ..., (Voevodin, 1986). Además, dicho número, deberá estar sujeto a las siguientes restricciones:

1. El peso “ p ” asignado, será tanto mayor, mientras mayor sea la frecuencia (seguridad o grado de confianza) con que se dé el $r \in W$ en cuestión;
2. La suma de los pesos, p_i , asignados a la totalidad de los resultados posibles, r_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), debe ser igual a la unidad.
3. En general, la asignación del peso $p = 0$, a cualquier elemento $r \in W$ significa que el resultado en cuestión no puede pertenecer al conjunto de valores posibles W ; es decir, que el evento con el cual se asocia un peso nulo, es imposible.

Por el contrario, si a algún elemento $r \in W$, se le asigna un peso $p = 1$, significa que el resultado denotado por r , constituye un evento cierto.

De lo anterior se desprende que entonces podemos considerar aplicaciones del espacio de eventos W en el subconjunto, $[0, 1]$ de la recta real positiva, $\tilde{N}^+$. Es decir, “asignaciones de números reales positivos” a cada evento dentro del espacio muestral. En consecuencia, la asignación en cuestión, DEFINE una FUNCIÓN de valor real SOBRE el espacio de EVENTOS, W . Por otro lado, como los resultados $r_i \in W$ o eventos $S \in W$, SON MAGNITUDES ALEATORIAS entonces, cualquier función real, X , sobre el espacio W , se denominará correspondientemente, variable aleatoria real (Friedman, 1969^a).

En este orden de ideas, es necesario resaltar una característica primordial de la variable (magnitud) ALEATORIA por definir.

- i) Si el conjunto de resultados o DOMINIO de definición de la MAGNITUD aleatoria en cuestión, es de naturaleza DISCRETA y FINITA, entonces

$$P : W \rightarrow \tilde{N}^+,$$

connota la aplicación del espacio CONTABLE W , “en” el subconjunto de NÚMEROS POSITIVOS, contenidos en el intervalo cerrado, $[0, 1]$;

- ii) por lo tanto, se debe verificar (cumplir) que para $r_i \in W$, $r_i \mapsto p_i = P(r_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Es decir, le hacemos corresponder un valor numérico que, comúnmente, designaremos por un número p_i a n_i , el cual pertenece a $[0, 1] \subset \tilde{N}^+$; además $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i \equiv 1$, (figura III-9).

- iii) Si por otro lado, nos interesa visualizar al espacio W como integrado por S_k eventos, (no elementales), entonces

$$F = W = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}, \quad k < n,$$

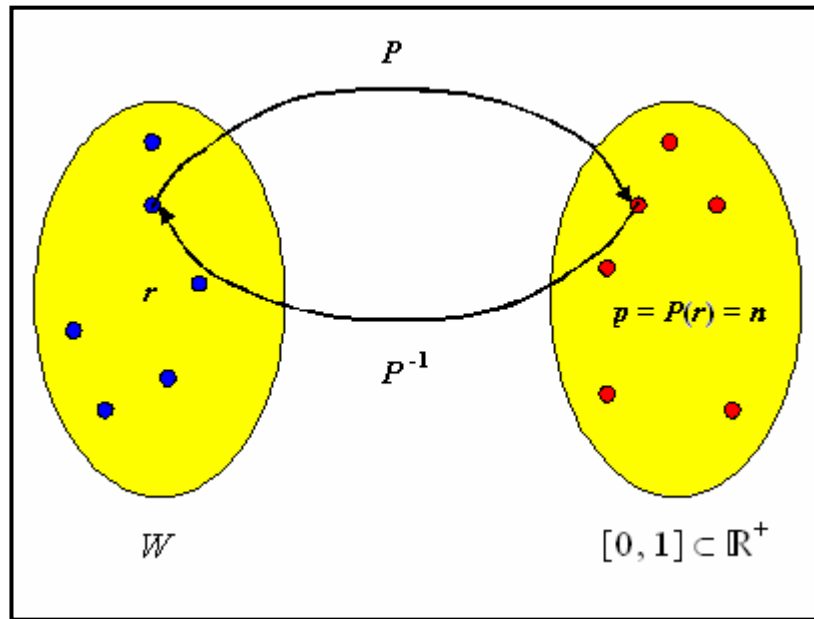


Figura III-9: Aplicación de un espacio de resultados W sobre el espacio de la medida probabilística, mediante la función P , de variable real.

Obviamente, para la variable aleatoria, $X = X'$, se tendrá que la aplicación,

$$W = F \times \tilde{N}^+$$

de manera tal que

$$S_j \rightarrow P_j = P(S_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

junto con $P_j \geq 0$, y $\sum_j P_j = 1$.

iv) En la práctica, es a menudo conveniente presentar lo anterior, como la gráfica de la siguiente tabla,

Eje X	W	S_1	S_2	...	S_k
Eje Y	P	P_1	P_2	...	P_k

la cual se puede identificar como un HISTOGRAMA NORMALIZADO.

A continuación, daremos un ejemplo sobre el lanzamiento simultáneo de 2 monedas (idénticamente iguales), por cuanto la solución de éste guarda estrecha relación con un espacio de fase y la interpretación de un HISTOGRAMA NORMALIZADO.

Por ejemplo, si 2 monedas son lanzadas al aire, (simultáneamente), entonces el espacio de eventos POSIBLES estará constituido por los siguientes resultados $W = \{(C, C), (S, S), (C, S), (S, C)\}$, donde hemos usado $C := \text{cara}$, $S := \text{sello}$ y la noción de “producto cartesiano” de los resultados posibles de cada moneda; esto es,

$$W := \{C, S\} \times \{C, S\},$$

en concordancia con la definición:

$$W := A \times B \equiv \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Ahora definamos la variable aleatoria; si designamos por N al Número de caras que puedan resultar después de lanzar las 2 monedas al aire SIMULTÁNEAMENTE, y puesto que $N(C, C) = 2$, $N(S, S) = 0$, $N(C, S) = 1$, $N(S, C) = 1$, entonces para la asignación del peso, se observa el siguiente procedimiento:

- (a)** a cada uno de los pares en W , se le asigna, provisionalmente, la unidad,
- (b)** se divide cada peso provisional por la totalidad de los pesos asignados al conjunto de los resultados en W ,
- (c)** de donde se obtiene un peso NORMALIZADO para cada uno de los “eventos – pares”, como si éstas fuesen equiprobables.

De lo anterior, se obtiene evidentemente, la fracción $\frac{1}{4}$, como peso equiprobable. En consecuencia, puesto que el evento que queremos “cuantificar”, es el Número de caras, N , comprendemos que dicha variable aleatoria real (V.A.R.) asume los valores de 2 y 0 con probabilidad $p = \frac{1}{4}$ (cada uno), y el valor de 1 con probabilidad $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

En consecuencia, para un conjunto de resultados W , FINITO, (i.e. contable), el espacio de la variable $X = N$, es un “espacio de funciones”, sobre el espacio de eventos W , (o clases F), con valores en $\tilde{N}^+$.

- v) Finalmente, cuando el espacio de resultados W es finito – contable, también se puede construir, (a partir del Histograma Normalizado), otro que representa a la Función de Distribución de Probabilidades. En efecto, si acordamos que por ésta se entiende la “totalidad” de los pesos $p(S_j)$, para todos los $S_j \in W$, ($j = 1, 2, \dots, k$), contra los diferentes eventos S_j , entonces al designar al eje Y como $F(x_j)$ y el eje X para los valores puntuales de $x_j = S_j$, etc., obtenemos la gráfica presentada en la figura III-10. La función $F(x_j)$ determina la probabilidad de que los valores de la magnitud aleatoria X , no excedan de una $x_j = S_j$ “dada”. Esto es,

$$F(S_j) \equiv P(0 < X \leq S_j).$$

Dicha definición y por ende, su gráfica es de una gran relevancia en la interpretación de un conjunto de medidas recabadas, para un “campo físico escalar”, como lo puede ser el conjunto de amplitudes obtenidas de un perfil de rayos gamma.

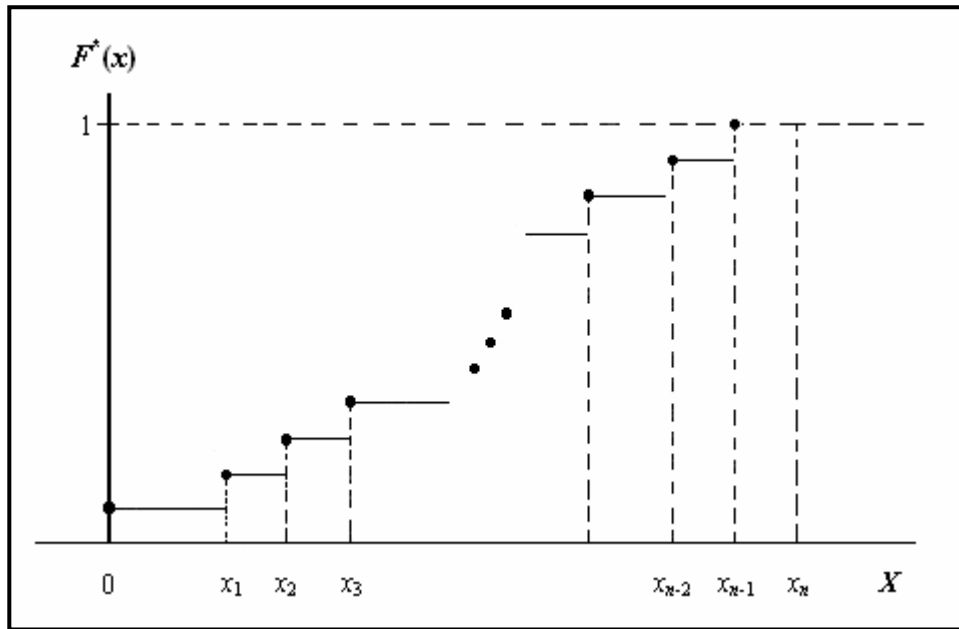


Figura III-10: Función de distribución en el caso discreto (finito): Es decir,
 $F(S_1) = P(0 < X \leq S_1)$, $F(S_2) = P(0 < X \leq S_2)$ etc., donde $F(S_m) = \sum_{j=1}^m P_j$

3.2.3._ NOCIÓN DE CLASE O CAMPO BOOLEANO

En las explicaciones precedentes, obsérvese que hemos identificado al espacio de resultados W , con el conjunto F . Esto es, primeramente, hemos fraccionado al conjunto W en un sistema de SUBCONJUNTOS “ F ”, para indicar que hemos agrupado los sucesos ELEMENTALES, $r_i \in W$, ($i = 1, 2, \dots, n$) en m subconjuntos:

$$\{S_1, S_2, \dots, S_m\},$$

donde $m \leq n$. Estrictamente hablando, por ortografía matemática, no se debería escribir $W = F$. En su lugar, se debe escribir que dado $W = \{r_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces, se tiene $F = \{S_j\}$, ($j = 1, 2, \dots, m$); éste último se cualifica como fraccionamiento de W , si satisface las siguientes propiedades:

i) Cualquier conjunto S de F es subconjunto de W ,

$$\forall S \in F : S \subseteq W$$

ii) Cualesquiera 2 conjuntos de F , S y S' , no deben tener elemento común alguno,

$$\therefore \forall S, S' \in F : S \neq S' \Rightarrow S \cap S' = \emptyset$$

iii) La unión (Suma Lógica) de todos los conjuntos que forman parte del fraccionamiento da el conjunto,

$$\bigcup_{S \in F} S \equiv W.$$

En segundo lugar, ¿Cuántos subconjuntos tiene W ? A primera vista, la pregunta en cuestión es una “perigrullada”. Sin embargo, nótese que por la propiedad (i), la determinación o cualificación de S en F , implica la determinación de otro subconjunto $\bar{S}$, llamado complemento de S , (i.e. la negación del evento S), el cual es el conjunto de los elementos de W , que no pertenecen a S . ¿Y si el conjunto S abarca todos los elementos del conjunto W ? En este caso, diremos que el subconjunto $\bar{S}$ es VACÍO; es decir, $\bar{S} \text{ a } \emptyset$.

De lo anterior se desprende que si W tiene el número finito de “ n elementos”, entonces, (al contar al conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo conjunto W), el número k de subconjuntos se determina como sigue:

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	etc
$\forall k = 1$	$\forall k = 3$	$\forall k = 4$	$\forall k = 8$	

$$\forall \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ 2k \end{matrix} \right\}$$

Por lo tanto, para un número n de elementos, el número de subconjuntos es $k = 2^n$, por ejemplo, un conjunto de 10 elementos, $W = \{r_i\}, (i = 1, 2, \dots, 10)$, tiene $2^{10} = 1024$ subconjuntos.

Lo anterior, tienen 2 consecuencias para el análisis de un conjunto de n medidas experimentales:

- 1.- El número máximo de Histogramas normalizados (posibles) será de 2^n , si originalmente se tienen n datos.

2.- Los sucesos que pueden tener lugar en el espacio finito de resultados (del experimento), W , forman la clase de eventos F , denominada “clase finita aditiva” o “campo booleano” o “álgebra booleana”, por cuanto satisface las siguientes condiciones:

- i) Si $S \in F$, entonces $\bar{S} \in F$
- ii) Si $S \in F$ y $S' \in F$, entonces $S \cup S' \in F$.

Empleando sucesivamente estas condiciones, se puede demostrar que pertenecen al campo booleano F la “UNIÓN” y/o la “INTERSECCIÓN” de cualquier número finito de conjuntos S_k de F , así como también las “diferencias” de estos conjuntos (Korshunov, 1976^a).

En la literatura sobre probabilidades y sus relaciones con geometría fractal, la mayoría de los autores, muy a menudo usan el término de “MEDIDA”. La experiencia (personal) muestra que no se puede llegar muy lejos al estudiar la matemática propia de FRACTALES, sin antes tener una noción clara de algunas ideas fundamentales a tal respecto.

3.2.4._ NOCIÓN DE MEDIDA

Básicamente, para el matemático hablar de una medida, es sinónimo de adjudicar una magnitud numérica al tamaño de un conjunto, pero de manera tal que si éste se fracciona en un número finito de partes, (en forma razonable), el tamaño del todo debe ser la suma de sus partes, (Falconer, 1990^d).

En principio, para que cualquier objeto físico tenga una medida, éste debe ser conmensurable; por muy tautológica que dicha afirmación parezca, el caso es que las definiciones “operacionales” del arte matemático, son aplicadas como idealizaciones de ciertos objetos físicos, (Ruelle, 1990^a).

En tal sentido, con muy alta probabilidad, el lector ya se ha familiarizado con la noción en cuestión, cuando en sus cursos de física básica usó las mismas ideas bajo el disfraz de distribuciones continuas de masa y carga eléctrica. Desde la óptica del matemático, se llama medida “ μ ” sobre $\tilde{N}^n$ (o $\tilde{N}$), a la asignación de un número positivo, (posiblemente $\aleph$), a cada subconjunto de $\tilde{N}^n$ que verifica las axiomas:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$

iii) Si $A_1, A_2, \dots$ es una sucesión contable (finita) de conjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

pero si los A_i son disjuntos entre si, 2 a 2, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

En tal sentido, $\mu(A)$ se denomina “medida del conjunto A ” y se le visualiza como el tamaño de A , ponderado de alguna manera específica. La axioma (i) asevera que al conjunto sin elementos tiene medida nula; la axioma (ii) connota que mientras más grande es el conjunto, más grande es su medida y la axioma (iii) afirma que la medida de la unión de un conjunto contable de partes con solapamiento, (i.e. con intersección no nula) es, al menos, la suma de las medidas de sus partes. Por el contrario, cuando dichas partes no presentan solapamiento alguno, la medida del todo es idéntica a la medida de sus partes. Por razones técnicas, que son irrelevantes a nuestro objetivo, los conjuntos que conforman con la segunda parte del axioma (iii), se denominan de Borel.

En particular, todas las imágenes de los conjuntos de la clase F , bajo aplicaciones por medio de funciones continuas, conforman con (verifican) identidad

de la axioma (iii). A tal efecto, tenemos como caso particular, la medida probabilística.

3.2.4.1._ MEDIDA PROBABILÍSTICA

Se denomina Medida Probabilística en la clase F de sucesos pertinentes a la variable aleatoria X , a la función $P(S)$, (o función de conjunto, i.e. “set function”), que satisface las condiciones siguientes:

- i) $P(S) \geq 0, S \in W$; (i.e. positiva semi-definida).
- ii) Si $S_1, S_2, \dots, S_k$ es una sucesión de eventos incompatibles, (i.e. disjuntos dos a dos): $S_i \cap S_j = \emptyset$, entonces,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^k S_k\right) = \sum_k P(S_k) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_k),$$

- iii) $P(W) = 1$

3.2.4.2._ PROPIEDADES DE LA MEDIDA PROBABILÍSTICA Y CALCULO DE PROBABILIDADES

Ciertas propiedades de la Medida Probabilística, P , son extremadamente útiles para abordar el cálculo de probabilidades de diversos sucesos que se presentan en la práctica.

Sean S_i y S_j sucesos o eventos que están contenidos en el espacio de los resultados W del experimento, ó equivalentemente, en el conjunto de clases, F :

- i) Si $S_i \cap S_j = \emptyset$, es decir, si los sucesos S_i y S_j , ($i \neq j$), en W (o F) son incompatibles, (si la ocurrencia de uno excluye la aparición del otro), entonces

$$P(S_i \cup S_j) = P(S_i) + P(S_j). \quad (3-6)$$

- ii) Si $S_i \cup \overline{S_i} = W$ y $S_i \cap \overline{S_i} = \emptyset$, esto es, si los sucesos en W (o F) son complementarios y por ende incompatibles, entonces

$$\begin{aligned} P(S_i \cup \overline{S_i}) &= P(S_i) + P(\overline{S_i}) = P(W) \\ \vee P(S_i) + P(\overline{S_i}) &= 1, \end{aligned}$$

de donde,

$$P(\overline{S_i}) = 1 - P(S_i); \quad (3-7)$$

análogamente,

$$P(S_j) = 1 - P(\overline{S_j}) \quad (3-8)$$

- iii) Si $S_i \subseteq S_j$ y $S_i \cap S_j = S_i$; es decir, si los sucesos en cuestión son compatibles pero inclusivos (encajados) en W (o F), entonces

$$P(S_j) \geq P(S_i), \quad (3-9)$$

$$\vee P(S_j \setminus S_i) = P(S_j) - P(S_i). \quad (3-10)$$

iv) Si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, pero $S_i \cap S_j \subseteq S_j$; es decir, son arbitrarios pero compatibles en W (o F), entonces

$$P(S_i \cup S_j) = P(S_i) + P(S_j) - P(S_i \cap S_j). \quad (3-11)$$

En las figuras (III-a, b, c, d) se muestran los diagramas que dan lugar a las expresiones (3-6), (3-7), (3-10) y (3-11).

En principio, se puede verificar, fácilmente, que las expresiones (3-6), (3-7) y (3-8) son consecuencia directa de la axioma (iii) pertinente a la definición de medida. La (3-10) se desprende de escribir a S_j como la unión disjunta, $S_j = S_i \cup (S_j \setminus S_i)$, donde, $(S_j \setminus S_i) \equiv \{x \mid x \in S_j, x \notin S_i\}$ ^a diferencia de conjuntos; la (3-11) proviene de representar los eventos S_i y S_j , como la unión de 2 conjuntos excluyentes, $S_i \cup S_j = S_i \cup (S_j \setminus (S_i \cap S_j))$, etc.

Con las anteriores propiedades, el investigador sólo puede transcribir las preguntas y repuestas, (en forma cuantitativa), que corresponden al léxico normal:

i) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso A o B , cuando ellos son incompatibles?

$$\vee \Pr(A \text{ o } B) = \Pr(A) + \Pr(B) \quad (3-12)$$

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A , cuando A , B son complementarios entre si?

$$\vee \Pr(A) = 1 - \Pr(B) \equiv 1 - \Pr(\bar{A}) \quad (3-13)$$

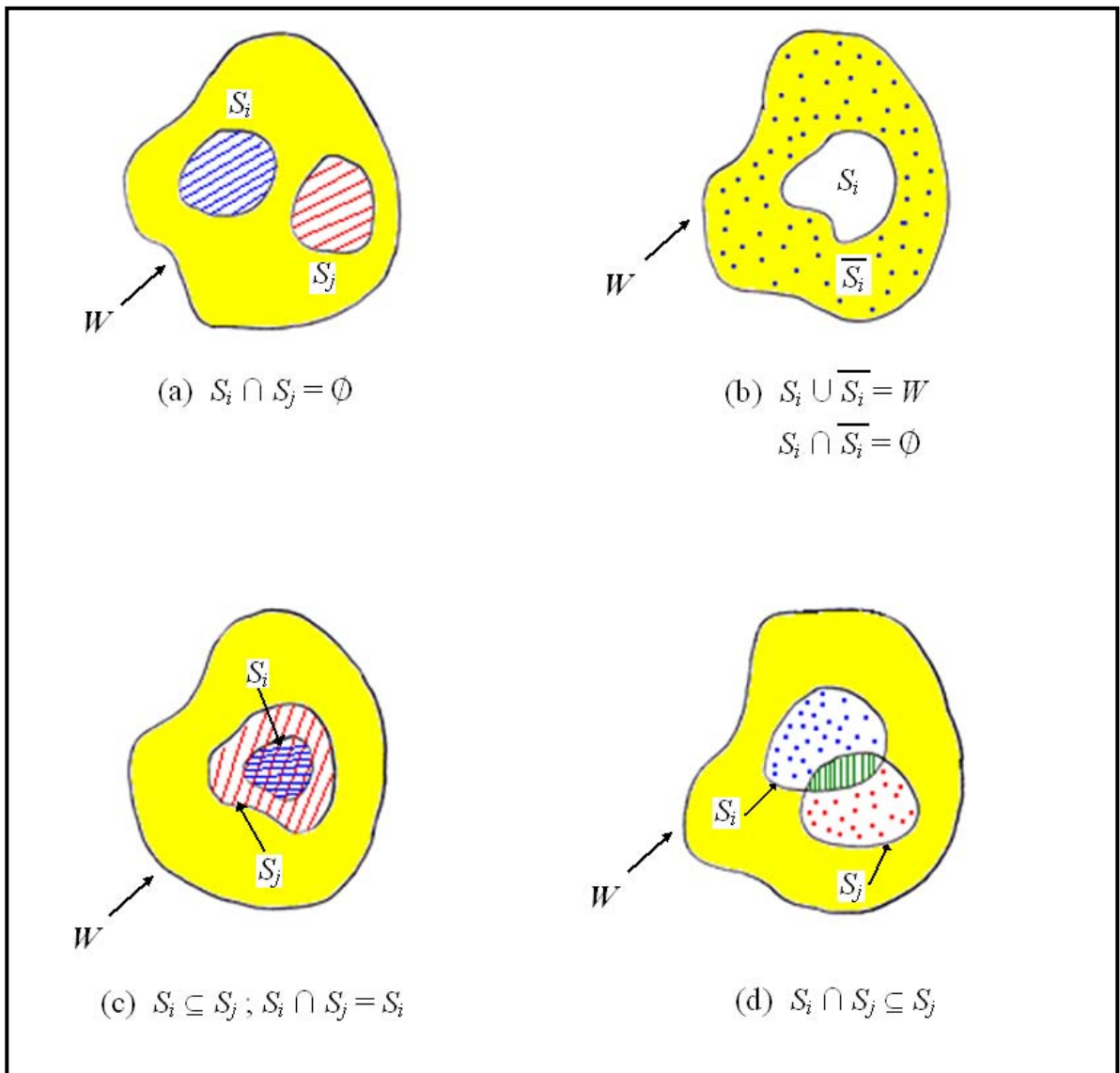


Figura III-11: (a) Eventos incompatibles; (b) Eventos complementarios e incompatibles; (c) Eventos compatibles inclusivos; (d) Eventos compatibles arbitrarios.

Sin embargo, la propiedad (iv) involucra la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o B cuando ellos son compatibles?

$$\text{Pr}(A \text{ o } B) = \text{Pr}(A) + \text{Pr}(B) - \text{Pr}(A \text{ y } B) \quad (3-14)$$

Pero, ¿cómo encontrar al término $-\text{Pr}(A \text{ y } B)$? Primeramente, puesto que los términos considerados son meramente números POSITIVOS, entonces, podemos escribir la (3-14) en las formas:

$$\frac{\text{Pr}(A \text{ o } B)}{\text{Pr}(A)} = 1 + \frac{\text{Pr}(B)}{\text{Pr}(A)} - \frac{\text{Pr}(A \text{ y } B)}{\text{Pr}(A)} \quad (3-15a)$$

o

$$\frac{\text{Pr}(A \text{ o } B)}{\text{Pr}(B)} = 1 + \frac{\text{Pr}(A)}{\text{Pr}(B)} - \frac{\text{Pr}(A \text{ y } B)}{\text{Pr}(B)} \quad (3-15b)$$

respectivamente. Por otro lado, como la probabilidad de todos los eventos en el espacio W , no puede sobrepasar la unidad entonces se debe verificar que

$$\therefore \frac{\text{Pr}(B)}{\text{Pr}(A)} = \frac{\text{Pr}(A \text{ y } B)}{\text{Pr}(A)}, \quad (3-16a)$$

junto con,

$$\frac{\text{Pr}(A \text{ o } B)}{\text{Pr}(A)} = 1, \quad (3-16b)$$

y análogamente,

$$\therefore \frac{\text{Pr}(A)}{\text{Pr}(B)} = \frac{\text{Pr}(A \text{ y } B)}{\text{Pr}(B)}, \quad (3-17a)$$

con

$$\frac{\Pr(A \text{ o } B)}{\Pr(B)} = 1. \quad (3-17b)$$

En segundo lugar, ¿cuál será el significado que se le deba adjudicar a las expresiones, $\frac{\Pr(B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \text{ y } B)}{\Pr(A)}$, $\frac{\Pr(A)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A \text{ y } B)}{\Pr(B)}$?

Para tal fin, simplificamos el problema; por ejemplo, consideremos $\frac{\Pr(A \text{ y } B)}{\Pr(A)}$. Si B sólo consistiese de un solo elemento, $r \in W$ y se realizase un número total de N experimentos, entonces la probabilidad de que r ocurriese, sería, $\Pr(r) \equiv \frac{N_r}{N}$, donde N_r **ú** n° de experimentos con el resultado $r \in W$, (es decir, n° de casos favorables). Luego, si se impone que el evento A ha ocurrido **CONJUNTAMENTE** con $r \in B$, entonces hay que excluir de N , aquellos eventos en donde A no ha ocurrido; esto es, se debe remplazar N por N_A , y por ende, N_r por N_{rA} **ú** n° de casos donde el evento r y A ocurren conjuntamente. De aquí se desprende que se debería escribir $\Pr(r|A)$ en lugar de $\Pr(r)$, de manera tal que,

$$\Pr(r|A) = \frac{N_{rA}}{N_A},$$

y al dividir por N , (numerador y denominador), obtenemos,

$$\therefore \Pr(r|A) = \frac{\Pr(r \text{ y } A)}{\Pr(A)},$$

donde estamos usando $\Pr(r|A)$ para connotar la probabilidad CONDICIONAL de la ocurrencia de r habiendo ocurrido el evento A . Por ende, si ahora asumimos que el evento B , incluye todos los sucesos elementales propios de su clase, es decir, si el evento B es un conjunto arbitrario de W (o elemento del conjunto de clases, F), entonces debemos Σ sobre todos los elementos r de B :

$$\therefore \sum_{r \in B} \Pr(r|A) = \frac{\sum_{r \in B} \Pr(r \text{ y } A)}{\Pr(A)}$$

$$\therefore \Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \text{ y } A)}{\Pr(A)} \quad (3-18a)$$

dado que, $\Pr(B) = \sum_{r \in B} \Pr(r)$,

$$\therefore \sum_{r \in B} \Pr(r \text{ y } A) \equiv \Pr\left(\sum_{r \in B} r \text{ y } A\right) = \Pr(B \text{ y } A)$$

Obsérvese que la (3-18a) también se suele escribir como,

$$\Pr(B \text{ y } A) = \Pr(B|A)\Pr(A) \equiv \Pr(A \text{ y } B).$$

Análogamente, se tiene

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \text{ y } B)}{\Pr(B)}. \quad (3-18b)$$

Por otro lado, de las condiciones (3-16b) y (3-17b), se tiene

$$\Pr(A \text{ o } B) = \Pr(A)$$

$$\Pr(A \text{ o } B) = \Pr(B),$$

entonces,

$$P(A \text{ y } B) = P(A|B)\Pr(B) = P(B|A)\Pr(A),$$

de la cual se obtiene una forma especial del Teorema de Bayes (Silvia, D.S., 1990),

$$\Pr(A|B) = \frac{1}{\Pr(B)} \Pr(B|A)\Pr(A).$$

Finalmente, si los sucesos A y B son INDEPENDIENTES, entonces se debe verificar $\Pr(A|B) = \Pr(A)$; $\Pr(B|A) = \Pr(B)$, con lo cual

$$P(A \text{ y } B) \equiv \Pr(A)\Pr(B) = \Pr(B)\Pr(A), \quad (3-19)$$

que es la conocida regla de multiplicación de probabilidades cuando los eventos son compatibles e “independientes”. Con ésta última, la propiedad (3-20) de las propiedades de la medida probabilística, se expresa como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (3-20)$$

si A y B son independientes.

3.2.5._ VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS Y SUS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

En las secciones anteriormente expuestas, hemos supuesto que el espacio de resultados W es un conjunto finito, y por ende CONTABLE. Sin embargo, en muchos casos de la praxis, el resultado, r , de un “experimento” puede ser cualquier valor en cierto intervalo $a \leq r \leq b$. Entonces r se convierte en una MAGNITUD ALEATORIA CONTINUA x , en donde el espacio de resultados W para el experimento en cuestión, será todo el intervalo de sus valores posibles y por lo tanto,

$$W \equiv \{\xi \mid a \leq \xi \leq b\} \quad (3-21)$$

el cual contiene un número infinito de puntos, y en donde hemos usado x a r . Por ejemplo, considere el caso de una ruleta ideal en la cual el “puntero indicador” es una aguja extremadamente fina. En tal caso, el intervalo $[a, b] = [0, 2\pi]$, y por ende $r \equiv \theta :=$ entre cero (incluido) y 2π (punto. incluido). Por lo tanto, no podemos asignar un peso a un evento individual, (especificado por el valor de θ), pero si al subconjunto de eventos que corresponden a los valores de θ , entre 2 números fijos, a y b . En consecuencia, el peso normalizado será para el subconjunto en cuestión de la forma: $(b-a)/2\pi$, etc.

En general, ya no es posible hablar, en el caso continuo, de la probabilidad de un resultado particular, puesto que según, la “noción clásica” de probabilidad, se tendría un peso probabilística igual a cero, dado que el número de casos posibles sería infinito. En consecuencia, para una magnitud aleatoria continua, la distribución de probabilidades se determina de una manera diferente que en el caso discreto.

En efecto, para tal fin, se utilizan 2 tipos de distribución, denominadas distribución de probabilidades “ F ” y densidad de distribución de probabilidad, “ W ”.

De lo anterior se desprende que, si W está definido según la (3-21), y $\mathbf{x}$ la variable aleatoria unidimensional, la cual toma (recorre) todos los valores reales contenidos en $\tilde{N}$, y cuyos elementos designamos por x , entonces

$$F(x) \equiv P(-\infty < \xi \leq x), \quad (3-22)$$

será la distribución de probabilidades, por cuanto expresa la probabilidad de que los valores de la magnitud $\mathbf{x}$, NO EXCEDAN un valor prefijado de x , (es decir, una x dada). El carácter general de $F(x)$ se puede representar, basándose en algunas de sus propiedades:

- i) Dado que para $x'' > x'$, el intervalo $(-\infty, x']$ está totalmente contenido en el intervalo $(-\infty, x'']$, entonces según la (3-22), $F(x'') \geq F(x')$; esto es, la función $F(x)$ es MONÓTONA CRECIENTE.
- ii) $F(-\infty) \equiv 0$, dado que el resultado o suceso $\xi \in (-\infty, x]$, no se puede concretar cuando $x = -\infty$, es decir, es un evento imposible.
- iii) $F(+\infty) \equiv 1$, puesto que el evento $\xi \in (-\infty, x]$ es un suceso cierto cuanto $x = +\infty$.

De estas propiedades se desprende que el gráfico de $F(x)$ debe ser como se muestra en la figura III-12.

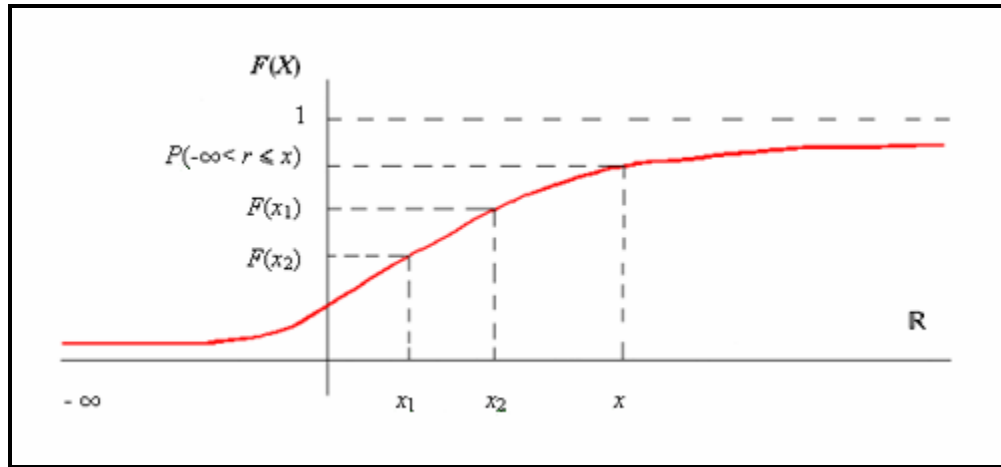


Figura III-12: Función de Distribución en el caso continuo.

Por otro lado, habiendo definido la función de distribución, según (3-22), y suponiendo que dicha distribución es conocida, entonces se puede calcular la probabilidad de que el valor de la magnitud aleatoria, se encuentre dentro del pequeño intervalo entre x y $x+\Delta x$. Esto es, según la definición de $F(x)$, la probabilidad en cuestión será dada por,

$$F(x + \Delta x) - F(x) \equiv \left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right] \cdot \Delta x \quad (3-23)$$

Obsérvese que el primer factor del segundo miembro en (3-23), representa el valor de la probabilidad, correspondiente a la longitud, Δx . Por lo tanto, si el límite existe cuando $\Delta x \rightarrow 0$, (lo cual es usual para la mayoría de las magnitudes aleatorias continuas), entonces tenemos que

$$W(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right\} = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3-24)$$

de manera que

$$F(x + \Delta x) - F(x) \cong w(x)\Delta x \quad (3-25)$$

y en donde $w(x)$ se denomina “densidad de probabilidad”.

Repasemos algunas de las propiedades de la función $w(x)$. Sean a y b puntos arbitrarios del eje real, donde $b > a$. Examinemos el significado de la integral

$\int_a^b w(x)dx$. Usando la (3-24), obtenemos:

$$\int_a^b w(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} dF(x) = F(b) - F(a). \quad (3-26)$$

Pero según (3-22), esta expresión da la probabilidad de que la magnitud aleatoria, $\mathbf{x}$, tome un valor que esté dentro del intervalo (a, b) . Esto es,

$$P(a < \xi < b) \equiv \int_a^b w(x)dx \quad (3-27)$$

En consecuencia, de esta formula se desprende, como caso especial, la relación de NORMALIZACIÓN,

$$\int_a^b w(x)dx \equiv \int_{\mathfrak{R}} w(x)dx = 1, \quad (3-28)$$

la cual muestra que el área bajo la curva, $w(x)$, y el eje de las abcisas es siempre igual a la unidad. Por otro lado, la formula (3-27) permite expresar de modo integral la relación entre las funciones $F(x)$ y $w(x)$. En efecto, comparando la (3-22) con la (3-27), hallamos que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(\xi) d\xi.$$

Los conceptos de función de distribución de probabilidades y densidad de ésta, se pueden fácilmente extender (prolongar), al caso de una magnitud aleatoria bidimensional, tridimensional, ..., multidimensional. A continuación daremos algunas leyes de distribución de magnitudes aleatorias pertinentes a nuestro análisis.

3.2.5.1._ DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES BINOMIAL

Dicha ley se presenta en la práctica en el caso en el que el proceso experimental de pruebas sea considerado como pruebas independientes, en el que sólo nos interesan 2 resultados de cada experimento. Esto es, sólo se plantea la pregunta de si ocurrirá o no ocurrirá cierto suceso, S , como resultado del experimento en cuestión. Convengamos en llamar “éxito” a un resultado y “fracaso”, al otro; igualmente, podemos denotar el “éxito” como “1” y al “fracaso” como “0”, para transcribir dicho resultado al lenguaje binario.

Por ende, si designamos por p la probabilidad de éxito y por $q = (1 - p)$, la probabilidad del fracaso en el experimento, entonces: ¿Cuál es la probabilidad $w(r, n, p)$ de que al realizar n experimentos ocurran r éxitos? Entonces, dado que 1 “éxito” y 0 “fracaso”, el logro de r éxitos con n experimentos va a corresponder a una sucesión de r UNIDADES y $(n - r)$ ceros. Como los resultados de los éxitos SEPARADAMENTE, son independientes, entonces la probabilidad de esta secuencia es igual al producto de las probabilidades de dichos resultados por SEPARADO, y se determina por la expresión

$$p^r q^{n-r}.$$

El número total de distintas sucesiones, de n elementos que contienen r unidades, es igual al número de combinaciones de n elementos tomados de r a r , es decir,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \equiv C_r^n.$$

Dado que todas estas sucesiones son incompatibles, (i.e. si aparece un de ellas, queda, automáticamente, excluida la posibilidad de que surja cualquier otra), entonces la probabilidad de que aparezca cualquiera de ellas será igual a

$$w(r, n, p) \equiv C_r^n p^r q^{n-r}$$

Por otro lado, es fácil comprobar que la suma de las probabilidades cuando variamos r , desde 0 hasta n , es igual a la unidad. La distribución de probabilidades dada por la expresión $w(r, n, p)$ se llama DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. Para graficarla, es necesario asignar, numéricamente, tanto el número n como la probabilidad p , utilizando los valores de $r = 0, 1, \dots, n$ como las coordenadas de las abscisas correspondientes a las ordenadas $w(r, n, p)$.

Muy a menudo es necesario determinar el valor r , con el que w alcanza su máximo. Se puede demostrar, (Korshunov, 1976^b), que la función w alcanza su máximo en

$$r^* \equiv \text{ent}(n+1)p,$$

donde $\text{ent}(x)$ es la parte entera del número x .

Sirven de parámetros o características numéricas de la distribución binomial, su valor medio ν_r y su dispersión σ_r^2 dadas por las expresiones:

$$\nu_r \equiv np ; \quad \sigma_r^2 \equiv npq .$$

3.2.5.2._ DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Desde el punto de vista operacional, el cómputo de la distribución binomial, $w(r, n, p)$, se torna engorrosa, cuando n toma grandes valores. Sin embargo, existen métodos aproximados que simplifican, notablemente, el cálculo de estas probabilidades. Uno de ellos es sustituir la distribución binomial por la de Poisson.

En efecto, sea $w(r, n, p)$ la distribución binomial anteriormente dada. Es fácil cerciorarse de que en el límite $n \rightarrow \infty$, (de manera tal que $np \equiv a = \text{const}$ y por ende $p = (a/n)$), con $p \rightarrow 0$, es decir,

$$w(r, a) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} w(r, n, p)$$

da lugar a

$$w(r, a) \equiv \frac{a^r e^{-a}}{r!} \quad (3-29)$$

Primeramente, desde el punto de vista de conjuntos en el espacio W (o F), se tiene que la distribución binomial,

$$w(r, n, p) = C_r^n p^r q^{n-r} \quad (3-30)$$

posee un sentido muy sencillo, pues si A y B , (S_1 y S_2), son clases que no se solapan en W , (i.e. complementarias), entonces poniendo

$$p := \frac{N_A}{N}, \quad q := \frac{N_B}{N} \equiv \left(1 - \frac{N_A}{N}\right) = (1 - p),$$

donde N es un número grande de experimentos y N_A y N_B son los números de casos favorables de los eventos A y B respectivamente. Por otro lado acordemos que, por razones concretas, el espacio de resultados W (o F), está empotrado en un espacio (físico) cuya dimensión Euclídea o TOPOLÓGICA, es $d := 2$. Esto implica, en el vocabulario matemático, que su volumen “ V ” es bidimensional y por ende, el evento A tendrá volumen V_A , B tendrá V_B . Por lo tanto, si $a \equiv \text{const} = \text{Número medio (promedio) de “puntos” en el suceso } A$, y $\frac{N}{V}$ es la CONCENTRACIÓN (nucleación) media de puntos en todo el volumen, entonces,

$$\frac{a}{V_A} = \frac{N}{V}$$

ó

$$\frac{V_A}{V} = \frac{a}{N} \equiv p$$

De donde, al sustituir en la ecuación (7.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{N!}{r!(N-r)!} \left(\frac{a}{N}\right)^r \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{N-r} \\ &= \frac{a^r}{r!} \left[\frac{N!}{N^r (N-r)!} \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{N-r} \right]. \end{aligned}$$

Al tomar el $\lim N \rightarrow \infty$,

$$\lambda = \frac{a^r}{r!} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N!}{N^r (N-r)!} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{a}{N} \right)^{N-r} \right]$$

y recordar que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{N^r (N-r)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(1 - \frac{2}{N} \right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{N} \right) \right\} = 1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{a}{N} \right)^{N-r} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1 - a/N)^N}{(1 - a/N)^r} \right\} = e^{-a},$$

Obtenemos,

$$w(r, a) \equiv \frac{a^r e^{-a}}{r!},$$

la cual es la distribución de Poisson. Una característica particular de la distribución en cuestión es el hecho de que su valor medio ν (valor esperado) y su varianza σ^2 son idénticamente iguales a la constante “a”:

$$\lambda \quad \nu_r = \sigma^2 \equiv a \equiv np \quad (3-31)$$

La distribución de Poisson constituye una buena aproximación a la distribución binomial, con pequeñas p . De esta manera, para $p \leq 0.01$ puede sustituirse el cálculo de la distribución binomial por el computo de la distribución de Poisson, comenzando por $n = 10$, etc. (Bolshakov, 1989).

Para su aplicación futura, consideremos la sucesión de eventos, $\{S\}$, que siguen uno tras otro al cabo de intervalos de tiempo ALEATORIOS o pautas completamente al azar. El número de éstos “SUCESOS” que acontecen en una

ventana temporal τ , (o en un intervalo espacial fijo $\mathbf{L}$), será una magnitud aleatoria, $\lambda\tau$, donde λ es el número medio de sucesos por unidad de tiempo, (o $\lambda\mathbf{L}$, donde λ es el número medio de sucesos por unidad de longitud). Encontremos la probabilidad de que en el intervalo τ (o $\mathbf{L}$) ocurran, exactamente, r sucesos. Para tal fin, se divide el intervalo τ (o $\mathbf{L}$) en pequeños intervalos de duración $\Delta\tau$, (o $\Delta\mathbf{L}$), en cada uno de los cuales, no pueda ocurrir más de un suceso S . El número total de estos intervalos es igual a $n = \tau/\Delta\tau$ (o $\mathbf{L}/\Delta\mathbf{L}$) y la probabilidad de que el suceso ocurra en uno de los intervalos $\Delta\tau$ (o $\Delta\mathbf{L}$) igual a $p \equiv \lambda\tau/n$ (o $\Delta\mathbf{L}/n$), de manera tal que $np = \lambda\tau$ (o $np = \lambda\mathbf{L}$). Dado que se puede considerar (Hipótesis) que en cada uno de los intervalos $\Delta\tau$, el suceso S (o $\Delta\mathbf{L}$) ocurre, INDEPENDIENTEMENTE de si aconteció o no en otros intervalos, arribamos al proceso de pruebas o experimentos independientes con distribución de probabilidad “binomial”, $w(r, n, p)$, donde $np \equiv \lambda\tau$ (o $np = \lambda\mathbf{L}$).

Sin embargo, la suposición de que en el intervalo $\Delta\tau$, (o $\Delta\mathbf{L}$), no puede ocurrir más de un suceso S , sólo queda justificada (validada) en el caso en que la duración de dicho intervalo, sea muy pequeña. Es decir, en el límite con $\Delta\tau \rightarrow 0$ (o $\Delta\mathbf{L} \rightarrow 0$). Entonces, como $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$, (cuando $np = \lambda\tau$ (o $np = \lambda\mathbf{L}$)), el proceso involucrado, obedece a la ley de Poisson, con la distribución de probabilidad,

$$W(r, \lambda\tau) = \frac{(\lambda\tau)^r e^{-\lambda\tau}}{r!}$$

ó

$$W(r, \lambda\mathbf{L}) = \frac{(\lambda\mathbf{L})^r e^{-\lambda\mathbf{L}}}{r!}$$

3.2.6._ CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DE LAS MAGNITUDES ALEATORIAS

Consideremos el espacio de las magnitudes aleatorias r , es decir, el espacio de las funciones que le asignan a los eventos o sucesos en W , una (medida) cantidad numérica, denominada probabilidad. Entonces, como se estableció con anterioridad, que dicho espacio era lineal (i.e, vectorial) consecuentemente, se puede definir en él un “producto escalar”. En efecto, supongamos que X e Y son variables aleatorias, de manera tal que, X tiene el valor $X(S_k)$ e Y tiene el valor $Y(S_k)$, cuando el evento S_k , ocurre. Es decir, si

$$S_k \rightarrow X_k = X(S_k),$$

$$S_l \rightarrow Y_l = Y(S_l), \text{ " } S_l \in W \text{ y } S_l, S_k : \text{eventos (o elementos del conjunto de clases } F),$$

en consecuencia, podemos definir el producto escalar de X e Y , de manera tal que,

$$\langle X|Y \rangle = \sum_k P_k X(S_k)Y(S_k) \quad (3-32)$$

donde los coeficientes en el miembro de la derecha están definidos mediante:

$$P_k \equiv \frac{W_k}{W}, \quad W \equiv \sum_k W_k ; \quad W_k : \text{ peso asignado de } S_k;$$

con el proviso de que los vectores bases en el espacio lineal considerado, tienen longitudes $\sqrt{P_1}, \sqrt{P_2}, \dots, \sqrt{P_k}, \dots$ (Friedman, 1969^b) y la suma es convergente.

Luego, se suele llamar al producto escalar (3-32), $\langle X|Y \rangle$: **valor esperado**, o **esperanza matemática**, o **valor medio** del producto XY , y comúnmente se denota en la literatura americana por $E(XY)$, (respectivamente por $M(XY)$ en la rusa). Por lo

tanto, una variable aleatoria, particularmente importante, es aquella que asigna el número 1 a cada evento, $\forall S_i \in W$. Denotaremos dicha variable especial, con el símbolo 1; por ende,

$$\forall E(1^2) \equiv \langle 1|1 \rangle = \sum_k P_k = 1 \quad (3-33a)$$

$$\forall E(X) \equiv E(1X) = \langle 1|X \rangle = \sum_k P_k X(S_k). \quad (3-33b)$$

Precisamente, este número dado por la ecuación (3-33b), es lo que se conoce como valor esperado o valor medio (promedio) de la variable aleatoria X , es decir, el **primer momento de X** , cuando la variable aleatoria es discreta.

De lo anterior se desprende la siguiente generalización:

Sea ξ una variable aleatoria discreta (ó continua), que toma cada valor posible de x con la correspondiente probabilidad P_k (o $w(x)$). Se dice que la magnitud aleatoria ξ , tiene una esperanza matemática finita, $E(\xi)$, (llamada también valor medio), a la cantidad,

$$E(\xi) = \sum_k X(S_k) P_k, \quad (3-34)$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x) dx, \quad (3-35)$$

si la serie (3-34) converge absolutamente, es decir,

$$\sum_k |X(S_k) P_k| < \infty \quad (3-36)$$

o si la integral (3-35) converge absolutamente, es decir, (Klimov, 1986)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| w(x) dx < \infty. \quad (3-37)$$

Cuando el espacio de eventos es finito, la expresión (3-32) es manejable; sin embargo, si el espacio W es infinito, esta puede no ser convergente. Para evitar dificultades, nos restringiremos a la clase de magnitudes aleatorias para las cuales, se verifique

$$\langle X|X \rangle \equiv E(X^2) < \infty, \quad (3-38)$$

esto es, con NORMA FINITA.

De donde, se define a $E(X^2)$: **a momento de segundo orden**, de la variable aleatoria x , y a la (3-32), $E(XY)$: **a covarianza** de las magnitudes estocásticas X e Y .

Por ende se tiene en general, que se denomina **momento de orden k** , de la magnitud aleatoria ξ , al valor medio $E(\xi^k)$, es decir,

$$E(\xi^k) = \sum_k x^k P_\xi(x), \quad (3-39)$$

$$E(\xi^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k w(x) dx, \quad (3-40)$$

para magnitudes aleatorias distribuidas de manera discreta y continua, respectivamente.

Por otro lado, la proyección de la variable aleatoria X , sobre la variable aleatoria 1, será $E(X)1$, ya que $X - E(X)1$ es ortogonal a 1. En efecto,

$$\langle X - E(X)1 | 1 \rangle = \langle X | 1 \rangle - E(X) \langle 1 | 1 \rangle = 0$$

lo que es evidente al usar la (3-33).

Por otro lado, poniendo $X' \equiv X - E(X)$: variable normalizada X o centrada, obtenemos que,

$$E(X') \equiv 0$$

De lo anterior, es conveniente introducir la noción de fluctuación de la variable aleatoria $\mathbf{x}$, a través del espacio muestral.

Por lo tanto, se denomina varianza $V(\xi)$ ó dispersión $\sigma^2(\xi)$ de la variable aleatoria ξ , al valor cuadrático medio de la diferencia entre la magnitud aleatoria y su esperanza matemática, es decir,

$$\begin{aligned} V(\xi) &\equiv E(\xi - E(\xi))^2 \\ \vee \sigma^2 &= E(\xi^2) - E(\xi)^2 \end{aligned} \tag{3-41}$$

Al número $\sigma = +[V(\xi)]^{1/2}$, se le llama Desviación Estándar de ξ .

Se dice que dos variables aleatorias, X e Y , no están correlacionadas, si y sólo si sus variables normalizadas correspondientes, X' e Y' , son ortogonales entre si:

$$\vee E(X'Y') = \langle X'|Y' \rangle = 0,$$

De esta forma, se tiene la siguiente definición:

Sean ξ y η variables aleatorias. Al número,

$$\text{cov}(\xi, \eta) \equiv E(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta)) \tag{3-42}$$

se le denomina la COVARIANZA de las magnitudes ξ y η . Ahora, si $V(\xi) > 0$ y $V(\eta) > 0$, entonces se puede definir al número,

$$\rho(\xi, \eta) \equiv \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{[V(\xi)V(\eta)]^{1/2}} \quad (3-43)$$

al cual se le denomina coeficiente de correlación de las variables ξ y η .

De la desigualdad de Schwarz, $\langle x|y \rangle \leq |x||y|$, se desprende que el coeficiente de correlación, cumple con la desigualdad: $-1 \leq \rho \leq +1$.

Notemos que $\rho = 0$, implica que ξ y η no están correlacionadas en absoluto.

3.3._ DIFERENTES MEDIDAS Y DIMENSIONES FRACTALES

3.3.1._ NOCIONES FUNDAMENTALES

En el capítulo I sección (1.5.2), cuando se explicó el Conjunto de Cantor, se ASEVERÓ que el número N de intervalos descartados, (vacíos), con longitud Δx , mayor que la Δx_0 de cada intervalo REMANENTE (lleno) de éste, se distribuyen según, (la ley de potencia),

$$N(\Delta x > \Delta x_0) \cong (\Delta x_0)^{-D_0}, \quad (3-44)$$

donde, el exponente $D_0 = 0,6309... \equiv$ Dimensión fractal del conjunto en cuestión. La demostración heurística de (3-44), se facilita, si introducimos, en general, la cantidad adimensional,

$$\varepsilon \equiv \frac{l}{L},$$

la cual dicta (fija) el tamaño de la “bolas” unidimensionales (i.e. intervalos) para cubrir (o contener) los intervalos remanentes y L es la longitud lineal del conjunto S de partida, en nuestro caso ($L = 1$). Nótese que el tamaño de ε está NORMALIZADO (o ponderado) con respecto a la longitud L . Dado que estamos interesados en la distribución de las “brechas” entre intervalos llenos, que sobrepasan el tamaño de éstos últimos, entonces se debe decrementar a la magnitud de ε , para que el tamaño de las brechas aumente. Por lo tanto, para transcribir esta competencia entre brechas e intervalos llenos, escribimos,

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon - \Delta \varepsilon,$$

Por otro lado, es obvio que la longitud total que se puede cubrir con los segmentos tipo ε , es

$$L(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0+1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{D_0}}. \quad (3-45)$$

De donde,

$$\backslash \quad L(\varepsilon') = L(\varepsilon - \Delta\varepsilon) \cong L(\varepsilon) - \frac{dL}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon,$$

con lo cual el cambio inducido en L , (alrededor de ε y $\varepsilon - \Delta\varepsilon$), será

$$\Delta L \equiv L(\varepsilon') - L(\varepsilon) \cong -\frac{dL}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon,$$

es decir,

$$\backslash \quad -\frac{\Delta L}{\Delta\varepsilon} \cong +\frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} = [-D_0 + 1] \cdot \varepsilon^{-D_0}$$

lo cual se puede escribir como,

$$\frac{\Delta L}{\Delta\varepsilon} \cong \varepsilon^{-D_0}. \quad (3-46)$$

Por lo tanto, se puede definir a la cantidad $n(\varepsilon, \Delta\varepsilon)$ como el número de brechas con longitud entre ε y $\varepsilon - \Delta\varepsilon$, en la forma:

$$\frac{\Delta L(\varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \Delta\varepsilon \cong \varepsilon^{-D_0} \Delta\varepsilon \cong n(\varepsilon, \Delta\varepsilon) \cdot \varepsilon \Delta\varepsilon,$$

con lo cual

$$n(\varepsilon, \Delta\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0-1} \quad (3-47)$$

y por ende, se define

$$N(\varepsilon', \varepsilon) \equiv n(\varepsilon, \Delta\varepsilon)\varepsilon$$

$$\forall \quad N(\varepsilon', \varepsilon) \cong (\varepsilon)^{-D_0}$$

que usualmente, se describe como

$$N(S, \varepsilon) \cong (\varepsilon)^{-D_0}. \quad (3-48)$$

Una definición, análoga a la (3-48), fue propuesta por Hausdorff en 1919, para dar cuenta de una dimensión “no entera”, de objetos geométricos extremadamente complejos. La intención original de Hausdorff fue la de definir una “MEDIDA”, que fuese INDEPENDIENTE de la resolución de la medición, ε . Para tal fin, él sugirió que el volumen del objeto geométrico en cuestión, debería medirse por medio de cubrir su estructura con “esferas” ordinarias (i.e. tridimensionales), pero asumiendo que el volumen (o medida) de la “bola”, fuese: ε^D . En consecuencia, la re-nombrada medida de Hausdorff, (Vicsek, 1989^c) se calcula de acuerdo a la expresión,

$$F = N(\varepsilon)\varepsilon^D. \quad (3-49)$$

Se puede evidenciar de la (3-48) que F es independiente de ε , si y sólo si, $D_0 = D$. Por lo tanto, la dimensión D_0 , apropiadamente, denominada dimensión de Capacidad (o Kolmogorov), es un caso especial de la ecuación (3-49). Desde la óptica

matemática y dado que ésta aparece, tanto en los artículos pioneros como en la literatura actual, parece conveniente, abordar la medida de Hausdorff (3-49), con la terminología propia de dicha disciplina. En consecuencia, introduciremos ciertas nociones necesarias para su comprensión.

Sea S un conjunto dado como NO VACÍO, en un espacio n -dimensional cartesiano $\tilde{N}^n$ y denotemos por $|S|$ al diámetro de éste como la mayor distancia entre cualesquiera de sus puntos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por la métrica, (distancia),

$$|S| \equiv \sup_{x, y \in S} |\vec{x} - \vec{y}|, \quad (3-50)$$

entonces, cualquier familia contable (o finita) de subconjuntos (ABIERTOS) $\{S_i\}$ de $\tilde{N}^n$, con todos los diámetros ε_i de cada S_i , menores que o iguales a un número prefijado a ε ,

$$0 < \varepsilon_i \leq \varepsilon, \quad (3-51)$$

y de manera tal que S está contenido en la UNIÓN de todos los subconjuntos “ABIERTOS” de $\{S_i\}$,

$$S \subset \bigcup_i S_i, \quad (3-52)$$

se denomina CUBRIMIENTO de S . Por otro lado, se define a la cantidad

$$F^D(S, \varepsilon) \equiv \inf_{\{S_i\}} \left(\sum_i |S_i|^D \right), \quad (3-53a)$$

$$F^D(S, \varepsilon) \equiv \inf_{\varepsilon_i \leq \varepsilon} \left(\sum_i \varepsilon_i^D \right), \quad (3-53b)$$

como aquella colección de subconjuntos (ABIERTOS) covectores $\{S_i\}$, que con diámetros $\leq \varepsilon$, MINIMIZAN la suma en (3-53a). [La abreviatura *Inf* arriba, significa COTA MÁXIMA INFERIOR y conceptualmente, indica que de todas las cotas inferiores, se debe tomar la máxima; correspondientemente *Sup* significa COTA MÍNIMA SUPERIOR de manera que de todas las cotas superiores, se usa la mínima. Tanto, “*Inf*” como “*Sup*”, provienen de los vocablos en Latín INFIMUM y SUPREMUM, respectivamente. Entiéndase por cotas, los diferentes números que provienen de efectuar sumatorias con diferente números de sumandos en (3-53a, b)].

Nótese que si la $\sum_i$ en (3-53) se extiende o prolonga, hasta un número k suficientemente grande, (dado que ε está predeterminado (fijo), entonces la clase de cubrimientos $\{S_i\}$ permisibles tendrá un $i = k^*$, con un $\varepsilon_i|_{i=k^*} > 0$, para el cual, geoméricamente, se satura. Por otro lado, si se asume que el número de subconjuntos en $\{S_i\}$ es la cantidad finita k , entonces el número de partes con que se puede cubrir al conjunto S , NO PUEDE EXCEDER de 2^k . Por lo tanto, $k^* = 2^k$ dicta, operacionalmente, el número máximo de cubrimientos permisibles que pueden MINIMIZAR la sumatoria en (3-53). Pero como se puede observar de (3-52), no existe condición explícita alguna que restrinja el miembro de la derecha en (3-52). Igualmente, puedo tener otro cubrimiento $\sigma' \equiv \{S'_i\}$ con $\bigcup_i S'_i \supset \bigcup_i S_i$. Por tal motivo parece lógico, más bien, restringir la clase de cubrimientos permisibles por medio de acotar el valor prefijado de ε , a otros valores prefijados, cada vez más pequeños que el ε original. Esto es, tomando el límite, cuando ε tiende a cero, de la expresión (3-53). Por ende, definimos

$$F^D(S) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^D(S, \varepsilon), \quad (3-54a)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf_{\{S_i\}} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^D \right) \right], \quad (3-54b)$$

como la “medida de Hausdorff en dimensión D o D -dimensional”. En efecto, cuando ε decrece, el Infimum en (3-53) se prolonga (extiende) sobre clases de cubrimientos, cada vez más pequeños. En consecuencia, $F^D(S, \varepsilon)$ crece, (Ruelle, 1987^b) o al menos no decrece debido a la saturación. De donde, el límite en (3-54) existe. Sin embargo, es conveniente puntualizar que dicho límite puede ser finito o infinito. El hecho es que en el fondo, la (3-54b) tiene una forma que se conoce en matemáticas bajo el nombre de “límite inferior”, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \left(\inf_r \{f(x) | 0 < x < r\} \right),$$

el cual siempre existe, (Falconer, 1990^e).

Por otro lado, para definir la dimensión de Hausdorff, correspondiente al conjunto S dado, es necesario considerar a $F^D(S)$ NO COMO UNA FUNCIÓN DEL CONJUNTO S , sino más bien, como una función del EXPONENTE D . En primer lugar, si $D > D'$ y $\sigma \equiv \{S_i\}$ es un posible cubrimiento ε de S , entonces es obvio que

$$\sum_i \varepsilon_i^D \leq \varepsilon^{(D-D')} \sum_i \varepsilon_i^{D'},$$

dado que $\varepsilon_i \leq \varepsilon < 1$, por definición. Por lo tanto, tomando el Infimum en ambos miembros, podemos escribir

$$F^D(S, \varepsilon) \leq \varepsilon^{(D-D')} F^{D'}(S, \varepsilon). \quad (3-55)$$

Luego al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, comprendemos que si $F^{D'}(S)$ da un valor finito: $F^{D'}(S) < \infty$, entonces

$$\bigwedge F^D(S) \equiv 0, \quad \forall D > D'. \quad (3-56)$$

Por lo tanto, al graficar $F^D(S)$ contra D , vemos que existe un punto D' , o valor crítico (umbral) en donde $F^D(S) \equiv D_H$ si $D < D'$ y $F^D(S) \equiv 0$ si $D > D'$. Por ende, si $F^{D'}(S) \equiv +\infty$, entonces $F^D(S) \equiv +\infty$ si $D < D'$ y $F^D(S) \equiv 0$ si $D > D'$, (figura III-13). En síntesis,

$$\begin{aligned} D_H(S) &= \text{Sup}\{D \mid F^D(S) = \dim_H(S)\} \\ &= \text{Inf}\{D \mid F^D(S) = 0\}. \end{aligned} \quad (3-57)$$

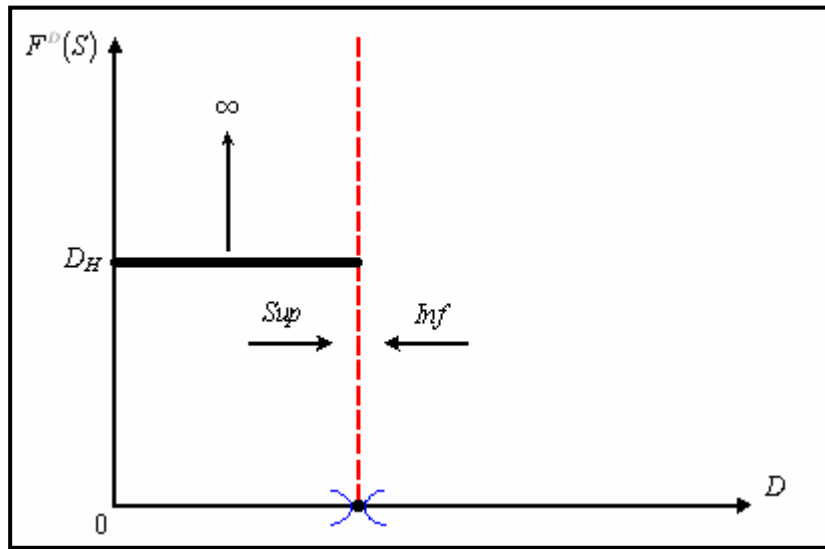


Figura III-13: El valor de D_H cuando dicha dimensión es “finita”, delimita un cuadrado respecto del eje x ; cuando $\dim_H(S) = +\infty$, sólo se puede indicar como se muestra.

Las medidas de Hausdorff generalizan nuestras habituales nociones de longitud, área y volumen de conjuntos simples.

Por otro lado, para futuras aplicaciones, es necesario recalcar que se puede verificar que $F^D(S)$ posee las propiedades fundamentales estipuladas para la medida $\mathfrak{m}$ antes mencionada en la sección 3.2 de este capítulo. En particular destacamos las 2 propiedades fundamentales, de las cuales haremos uso más adelante:

- i) Si $\{S_i\}$ es cualquier colección de conjuntos disjuntos CONTABLES (o clases de F sin solapamiento), entonces,

$$F^D\left(\bigcup_i S_i\right) \equiv \sum_i F^D(S_i). \quad (3-58)$$

- ii) Si $S \in \tilde{\mathcal{O}}^n$ y $\lambda > 0$ un factor de magnificación (o de reducción), entonces,

$$F^D(\lambda S) \equiv \lambda^D F^D(S), \quad (3-59)$$

donde $\lambda S \equiv \{\lambda x \mid x \in S\}$.

Además, si acordamos que un conjunto S se califica de “compacto”, cuando existe un cubrimiento $\{S_i\}$ de él, el cual también posee otra subcolección FINITA, que también lo cubre, entonces, (Ruelle, 1987^c),

$$D_H(S) \leq D_0(S). \quad (3-60)$$

Según Falconer (1990), la (3-60) se debe verificar porque existen ciertos ejemplos de conjuntos $S \in \tilde{\mathcal{O}}^n$, no trivialmente simples, los cuales se amendan a ella. Sin embargo, según Goltz (1998), la desigualdad en cuestión se debe verificar en el sentido opuesto:

$$D_0 \leq D_H \leq d_T. \quad (3-61)$$

Naturalmente, para quien desde las filas de la Ingeniería, desea explorar las potencialidades de la geometría fractal, dicha dicotomía debe ser elucidada. Por lo tanto, es “extremadamente importante” saber distinguir qué connota el matemático, cuando exige el límite de cierta cantidad $Q = Q(\delta, x, y, \dots)$ donde ésta tiene el contenido físico de un proceso de fragmentación, al menos de la forma:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Q(\delta, x, y, \dots) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup_{x_i \leq \delta} q(\delta, x, y) \right]$$

ó

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Q(\delta, x, y, \dots) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf_{x_i \leq \delta} q(\delta, x, y) \right]$$

donde x e y son elementos de $\tilde{N}^n$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

y la cantidad δ es un número > 0 , escogido “a priori”, como pequeño frente a la longitud L del objeto Q .

Por otro lado, para tener una noción CONCRETA del proceso de fragmentación, nos podemos referir al tamaño de los intervalos CERRADOS, que se generan en la construcción del conjunto de Cantor; (refiérase al Capítulo I). Por ejemplo, si quisiéramos ordenar por tamaño, la longitud de éstos cuando concluimos el k -ésimo paso de su construcción (determinística), antes debemos tener un procedimiento auxiliar que nos permita discernir tales longitudes. Como se recordará,

en el k -ésimo paso se obtiene que F_k consiste de 2^k intervalos (cerrados), cada uno de longitud $1/3^k$. Por lo tanto, si se desea discriminar las longitudes

$$I = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^k} \right\},$$

entonces deberemos introducir cierto “tamiz unidimensional” o “rejilla graduada” con unidades de al menos $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^k}$; (si $k = 5$, $2^5 = 32$ y $1/3^5 = 1/243$). Se dice entonces que se debe cubrir la sucesión I , con conjuntos de intervalos abiertos $\sigma = \{S_k\}$, cuyos diámetros $|S_k| = \varepsilon_i$, son, menores o iguales que $\delta = \frac{1}{3}$ y de manera tal que

$$I \subset \bigcup_i^N S_i.$$

Obsérvese que la rejilla usada como “Filtro” o “tamiz unidimensional”, tendría la apariencia que mostramos en la figura III-14.

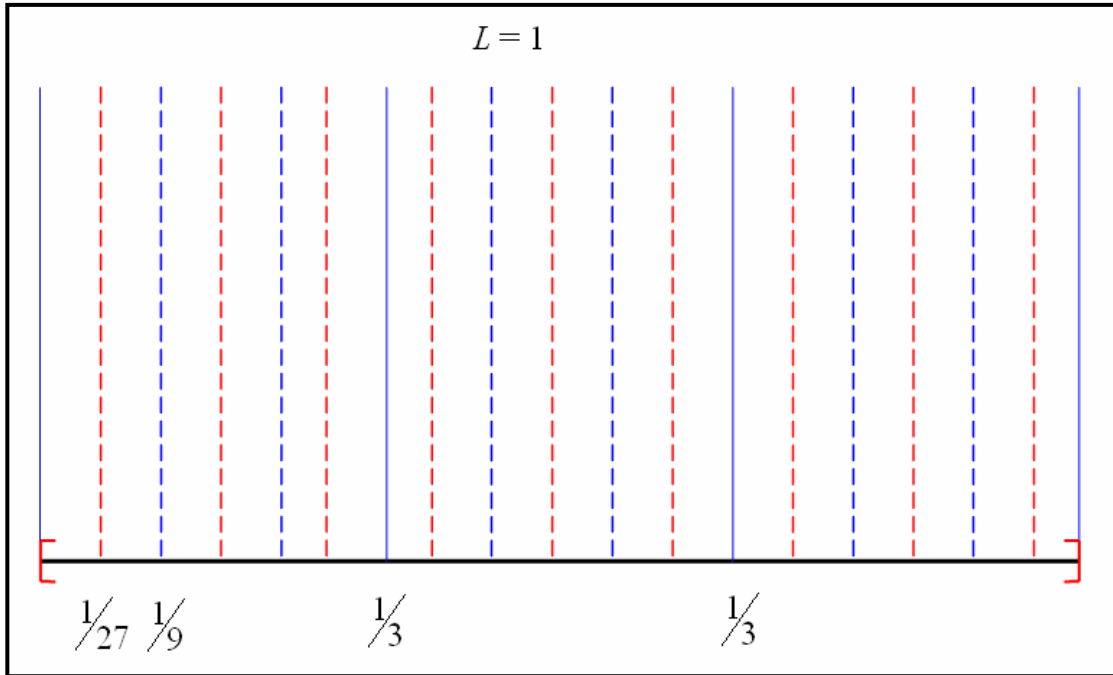


Figura III-14: Rejilla unidimensional con unidades de longitud variable.

Es obvio que si $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, se necesitarían, al menos, $N_1 = 2$ conjuntos para cubrir todas las longitudes de l ; si $\varepsilon_2 = \frac{1}{9}$, $\vee N_2 = 4$, ..., si $\varepsilon_5 = \frac{1}{243}$, $\vee N_5 = 32$.

Por lo tanto, escribimos,

$$N_1 \varepsilon_1^D = N_2 \varepsilon_2^D = N_3 \varepsilon_3^D = N_4 \varepsilon_4^D = N_5 \varepsilon_5^D = L(=1)$$

con lo cual,

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^D; \frac{N_2}{N_3} = \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right)^D; \dots; \frac{N_4}{N_5} = \left(\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_4} \right)^D$$

donde D es un exponente por descubrir, que fácilmente, obtenemos como

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \equiv D_0$$

Por otro lado, si se desea evaluar la $\sum_i \varepsilon_i^D$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ (o para un rango infinito), se debe tener en cuenta que ésta está precedida en la definición (), por las siglas “*Inf*”. En consecuencia, es importante destacar que en ella, intervienen, cantidades ε_i , de diferentes magnitudes, pues el “*Inf*” indicado se toma sobre “todos” los posibles cubrimientos σ_i para los cuales se verifique la desigualdad: $0 < \varepsilon_i \leq \delta$, (con $\varepsilon = \delta$, por razones que explicaremos adelante). Por ejemplo, si se denota por $\sigma_k \equiv \{S_i^{(k)}\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, 2^k$, tendremos, (según la receta F_k : $\therefore N_k = 2^k$, $\varepsilon_k = \frac{1}{3^k}$), las siguientes familias de cubrimientos:

$$\begin{aligned}
k=1, \quad \sigma_1 &= \{S_1^{(1)}, S_2^{(1)}\}, \quad \therefore \varepsilon_1 = 1/3, N_1 = 2 \\
k=2, \quad \sigma_2 &= \{S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, S_4^{(2)}\}, \quad \therefore \varepsilon_2 = 1/9, N_2 = 4 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
k=5, \quad \sigma_5 &= \{S_1^{(5)}, \dots, S_{32}^{(5)}\}, \quad \therefore \varepsilon_5 = 1/243, N_5 = 32 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{3-62}$$

Por lo tanto, el desarrollo de $\sum_i \varepsilon_i^D$, debe ser de la forma, (para $k = 5$),

$$\sum_i \varepsilon_i^D = w_1 \varepsilon_1^D + w_2 \varepsilon_2^D + \dots + w_5 \varepsilon_5^D, \tag{3-63}$$

donde los w_i representan los diferentes pesos con que los diferentes ε_i se concretizan, es decir,

$$\sum_i \varepsilon_i^D = 2\varepsilon_1^D + 4\varepsilon_2^D + \dots + 32\varepsilon_5^D, \tag{3-64}$$

$$= 2\varepsilon_1^D + 4\varepsilon_2^D + \dots + 2^5 \varepsilon_5^D,$$

$$\sum_i \varepsilon_i^D = \sum_{j=1}^5 2^j \varepsilon_j^D. \tag{3-65}$$

De esta manera, dado que anteriormente se concluyó que

$$N_i \varepsilon_i^D = N_{i+1} \varepsilon_{i+1}^D = 1,$$

entonces, para el ejemplo planteado en (3-62), cuando $k = 2$ se genera la siguiente relación:

$$2\varepsilon_1^D + 4\varepsilon_2^D = 2. \tag{3-66}$$

Es fácil verificar que si hacemos $\varepsilon_1^D = x$, entonces obtenemos

$$2x + 4x^2 = 2$$

y por ende las dos raíces son,

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases} \quad (3-67)$$

con lo cual $x = \varepsilon_1^D = \frac{1}{2}$, da lugar a

$$D_H = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}. \quad (3-68)$$

Obsérvese que la otra raíz, da lugar a una dimensión imaginaria, que se descarta, en base a las propiedades estipuladas para una “MEDIDA”. De igual forma se puede, plantear para $k = 3$, una ecuación del tipo:

$$2\varepsilon_1^D + 4\varepsilon_2^D + 8\varepsilon_3^D = 3,$$

ó

$$2x + 4x^2 + 8x^3 = 3$$

ó

$$\bar{Y} + \bar{Y}^2 + \bar{Y}^3 = 3,$$

la cual posee al menos una raíz que da lugar a un idéntico valor de D_H .

Lo anteriormente puntualizado, aparece en ciertos tratados sobre FRACTALES bajo la forma de un teorema, válido para conjuntos

AUTOSIMILARES. Por tal razón, recalculamos la dimensión del conjunto de Cantor, a través de la definición de la medida de Hausdorff en la forma siguiente:

1. Considere el esquema de la figura (I-3), capítulo I, donde

$$F_0 = [0, 1], \quad (i)$$

$$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \quad (ii)$$

$$F_2 = \{ [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \} \cup \{ [\frac{2}{3}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \}, \quad (iii)$$

·
·
·

Por lo tanto,

$$F_0 \cap F_1 = F_1$$

$$F_1 \cap F_2 = F_2$$

$$F_2 \cap F_3 = F_3 \quad (iv)$$

y por ende, podemos definir a $F =$, como la “UNIÓN DISJUNTA” DE INFINITOS conjuntos

$$F^a = \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i. \quad (v)$$

2. Obviamente, podemos representar a $F =$, como la unión disjunta de , a y , b ,

$$F = F_a \cup F_b$$

$$F^a = \{ [0, \frac{1}{3}] \} \cup \{ [\frac{2}{3}, 1] \}, \quad (3-69)$$

donde A_a y A_b son réplicas del conjunto A .

3. En consecuencia, según la propiedad de la medida de Hausdorff,

$$F^D \left(\bigcup_i A_i \right) = \sum_i F^D (A_i),$$

se puede escribir,

$$F^D (A) = F^D (A_a) + F^D (A_b). \quad (3-70)$$

4. Por otro lado, en general se tiene que si un conjunto A es “autosimilar”, ello implica que cada réplica reducida de éste, se puede “redimensionalizar” para convertirla, IDÉNTICAMENTE, en el conjunto A , al cual pertenece, (o viceversa). En particular, se observa que tanto el conjunto $[0, \frac{1}{3}]$ como el $[\frac{2}{3}, 1]$, se pueden convertir en el conjunto A , por medio de magnificarlos 3 veces, y/o a partir de A , se pueden obtener por medio de reducirlos a $\frac{1}{3}$ de su tamaño original.

5. Dado que la medida de Hausdorff posee la propiedad

$$F^D(\lambda A) = \lambda^D F^D(A)$$

para $A \in \mathcal{H}^n$ (o $\mathcal{H}^1$), con $\lambda > 0$, entonces,

$$\bigwedge F^D (A) = F^D (A_a) + F^D (A_b)$$

$$= F^D (\frac{1}{3} A) + F^D (\frac{1}{3} A),$$

donde $\mathcal{I}_a = \{ \frac{1}{3}x \mid x \in \mathcal{I} \}$ y análogamente para $\mathcal{I}_b$. De donde, si

$$F^D(\mathcal{I}) = F^D(\mathcal{I}_a) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D + F^D(\mathcal{I}_b) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D, \quad (3-71)$$

al dividir por $F^D(\mathcal{I})$, se obtiene

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^D,$$

de la cual se extrae por logaritmación, el valor finito $D = D_H$,

$$D_H = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}. \quad (3-72)$$

Sin embargo, denominando a los intervalos de longitud 3^{-k} , ($k = 1, 2, \dots$), que constituyen los conjuntos $\mathcal{I}_k$, intervalos básicos, entonces el cubrimiento $\{S_i\}$ de $\mathcal{I}$, consistirá de 2^k intervalos de $\mathcal{I}_k$ de longitud 3^{-k} .

Ahora, puesto que

$$F^D(\mathcal{I}, \delta = 3^{-k}) \equiv \inf_{\{S_i\}} \sum_i \varepsilon_i^D,$$

entonces,

$$F^D(\mathcal{I}, \delta = 3^{-k}) \leq \sum_i \varepsilon_i^D.$$

Pero, para una k particular se debe verificar que

$$\sum_i \varepsilon_i^D \equiv 2^k \cdot 3^{-kD} = N_k \varepsilon_k^D \equiv 1, \quad (3-73)$$

con lo cual se obtiene,

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \equiv \frac{\ln(N_k)}{\ln(1/\varepsilon_k)} \equiv D_0. \quad (3-74)$$

Esto muestra que $D_H = D_0$, cuando $S = \mathcal{C}$. Por otro lado, $2^k \cdot 3^{-kD} = (2/3^D)^k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$; equivalentemente, si se escoge a $\delta = 1/3^k$, cuando $k \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. De donde,

$$\begin{aligned} F^D(\mathcal{C}, \delta) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} F^D(\mathcal{C}, \delta, \mathbf{d}), \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (2^k / 3^{kD}) \leq 1, \\ \mathcal{C} \quad F^D(\mathcal{C}, \delta) &\leq 1, \end{aligned} \quad (3-75)$$

lo cual muestra que, la medida de Hausdorff para el conjunto de Cantor, debe estar acotada por la unidad.

3.3.2._ RELACIÓN ENTRE LA MEDIDA DE LEBESGUE Y HAUSDORFF

En general, dado un conjunto S , (no vacío), se encuentra que $D_H(S) \neq D_0(S)$, de manera tal que $D_H(S) \leq D_0(S)$. La razón que subyace detrás de esta desigualdad, estriba en la manera de cómo se definió a la magnitud,

$$F^D(S, \delta) = \inf_{\{S_i\}} \left(\sum_i |S_i|^D \right), \quad (3-76)$$

previamente.

Desde el punto de vista de la teoría de la medida, se tiene que dado un conjunto, S de “puntos”, sumergido en un intervalo finito (a, b) (o $[a, b]$), (es decir, contenido o dentro de) éste se puede cubrir con un CONJUNTO finito (o denumerable) de intervalos, cuya longitud total es M . Por ende, la longitud M , tendrá diferentes valores, dependiendo de las diferentes elecciones que hagamos de los cubrimientos usados. En consecuencia, se define a la cota mínima Inferior de dichos valores, como la medida EXTERNA de S , (según Lebesgue), la cual denotamos por $\overline{m}(S)$:

$$\overline{m}(S) = \text{Inf } \{M\}, \quad (3-77)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Inf}_{\{S_i\}} \left(\sum_i |S_i| \right) \\ &= \text{Inf}_{\{S_i\}} \left\{ \sum_i |S_i| \mid \{S_i\} \text{ cubrimientos } \delta \text{ de } S \right\} \end{aligned} \quad (3-78)$$

De donde, resulta obvio que la $F^D(S, \delta)$ antes descrita, es una medida externa del conjunto involucrado, cuando $D=1$. Por otro lado, si por $\overline{S}$ se denota al conjunto de todos aquellos puntos de (a, b) que en $\tilde{N}^1$, no pertenecen a S , (ver figura III-15i), entonces escribimos:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= (a, b) - S \\ \text{V } \underline{m}(S) &= (a - b) - \overline{m}(\overline{S}) \\ &= \text{Sup} \{ \overline{m}(S') \mid S' \subset S \}, \end{aligned}$$

la cual se denomina, medida INTERNA de S , donde $\underline{m}(S) \leq \overline{m}(S)$. En caso de que

$$\overline{m}(S) \equiv \underline{m}(S),$$

se denotará por $m(S)$ al valor común de dichas cantidades, y (según Lebesgue), la denominaremos MEDIDA de S . Por ende, se dirá que S es un conjunto “medible” o ponderable. Se puede demostrar que la medida y la mesurabilidad de S , NO DEPENDEN de la longitud del intervalo (a, b) (o $[a, b]$), (Wiener, 1933), (Burrie y knudsen, 1969^b).

Concluyendo, si S' es un subconjunto del intervalo $[0, 1]$, (ver Figura III-15ii) entonces,

$$F_{\delta}^1(S') \equiv F^1(S', \delta) \leq 1,$$

dado que $F_{\delta}^1(S')$ es, justamente, la medida externa (ordinaria) de $S' = (c, d) \subset [0, 1]$. Sin embargo, como por definición,

$$F_{\delta}^1(S') = \lim_{\delta \rightarrow 0} F^1(S', \delta) = D_H$$

entonces D_H debe tener un valor entre cero y la unidad. Por otro lado, en el caso de que los conjuntos S_i que integran el cubrimiento de S' sean de tipo “Borel”, (es decir, disjuntos 2 a 2, (ver figura III-15iii), o S' es un conjunto tipo Borel con medida de Lebesgue positiva, (por ejemplo, un segmento de recta), se obtiene,

$$F^1(S') > 0, \quad \therefore \quad D_H(S') = 1.$$

Conversamente, para un conjunto MONO-PUNTUAL y por ende, para cualquier conjunto finito contable de puntos, A , se tiene,

$$\forall \quad D_H(A) \equiv 0.$$

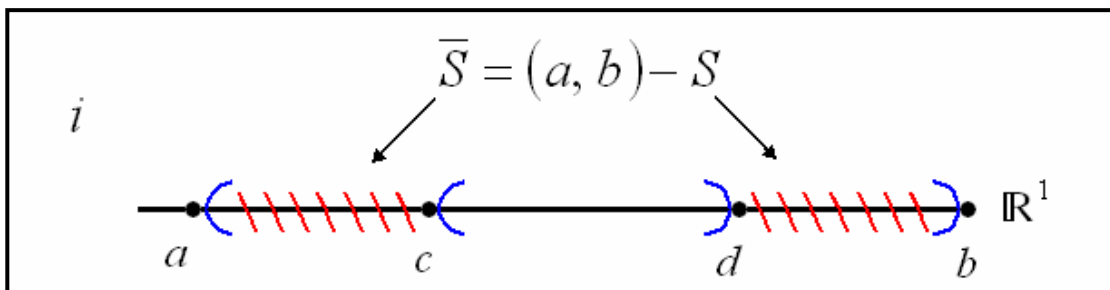


Figura III-15: i) $\bar{S} = (a, b) - S$, ii) $S' \subset [0, 1]$, iii) $\{S_i\}$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$

Esto muestra que para objetos geométricos ORDINARIOS, se obtienen sus habituales dimensiones topológicas. Entre éstas, se encuentra, por ejemplo, la del conjunto de Cantor, para la cual hemos obtenido la dimensión en $\ln(2)/\ln(3)$.

En particular, se debe destacar que fue B. Mandelbrot, quien acuñó el término “dimensión fractal” para denotar dimensión de Hausdorff, la cual otros autores se han dado en denominar como dimensión de capacidad de Kolmogorov, $D_k = D_0$, (Ruelle, 1987^d). Así las cosas, entonces

$$D_H(A) \leq D_0(A) \Rightarrow D_0(A) \leq D_H(A),$$

siendo Goltz (1998) uno de estos autores, y $D_0(A)$ sería la dimensión de Hausdorff, propiamente. Por último con la finalidad de organizar estas ideas, junto con Robinson (1995), procederemos a enunciar ideas precisas a tal respecto.

3.3.2.1._ DEFINICIÓN DE DIMENSIÓN DE CAJA (Box Dimensión)

Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ denota un subconjunto (compacto) del espacio EUCLIDEO, n -dimensional, se define la dimensión (de conteo) de cajas de S , a través de

$$\dim_B(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right]. \quad (3-79)$$

Esta dimensión ha sido a menudo llamada la dimensión de capacidad de S . Pero debido a que el calificativo de “capacidad” tiene otros significados en ciertas discusiones de sistemas dinámicos complejos, el término DIMENSIÓN DE CAJA, se está convirtiendo, en el término estándar para esta cantidad, donde apuntamos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ y “ ε ” denota el tamaño o grosor del filtro, tamiz o caja a utilizar en su

determinación. Obviamente en la praxis, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \neq 0$, dada la precisión finita de un experimento. Análogamente, si se usa $\lim Sup$, en lugar de $\lim Inf$ tendremos, (Falconer, 1997^f),

$$\overline{\dim}_B(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[Sup \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right], \quad (3-80)$$

donde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Sup \equiv \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0}$. Si los anteriores límites son iguales, nos referiremos a dicho valor común, como la dimensión de caja de S ,

$$D_0 \equiv \dim_B(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[Sup \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right]. \quad (3-81)$$

Finalmente, para la dimensión de Hausdorff tendremos:

3.3.2.2._ DEFINICIÓN DE DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

Si U es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, dejemos que

$$|U| = Sup \left\{ |\bar{x} - \bar{y}| : \bar{x}, \bar{y} \in U \right\}, \quad (3-82)$$

denote el “DIÁMETRO” de U . Si $S \subset \bigcup_i U_i$, donde cada U_i es una “bola” (esfera sólida) de diámetro menor o igual que un δ preasignado, entonces $\{U_i\}$ es un cubrimiento δ de S .

Sea $0 \leq D$; definamos la medida D de un conjunto de Borel S , para $\delta > 0$ como

$$F_{\delta}^D(S) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^D, \quad (3-83)$$

donde el Infimun se toma sobre todos los cubrimientos δ contables. (Nótese que en esta sumatoria, no todos los diámetros de los diferentes conjuntos son iguales; ésto contrasta con la definición de dimensión de caja). Luego, tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ se define

$$F^D(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_{\delta}^D(S), \quad (3-84)$$

como la medida de Hausdorff, D -dimensional de S . Si además el conjunto (de datos) S está sumergido (empotrado) en $\tilde{N}^n$, entonces $F^D(S)$ es la medida de Lebesgue de S . Por ende, la dimensión de Hausdorff de S , se define como D_H , si

$$F^D(S) = \begin{cases} \infty & \text{para } 0 \leq D < D_H, \\ 0 & \text{para } D_H < D \leq \infty, \end{cases} \quad (3-85)$$

y se puntualiza que D_H puede ser cero, infinito o un número finito. Obsérvese que en cierta forma, la dimensión de Hausdorff se define muy similarmente a la medida de Lebesgue.

3.3.3._ ENTROPÍA Y DIMENSIÓN DE INFORMACIÓN

En la discusión precedente acerca de la dimensión de caja, D_0 , se ha dejado de lado, la posibilidad de que exista una distribución no homogénea de puntos, dentro de las “esferas” (bolas) usadas como unidades de cubrimientos. Más bien, se ha enfatizado el aspecto geométrico del concepto en cuestión. Es decir, D_0 no mide la frecuencia con que surge un proceso de NUCLEACIÓN, (clustering), físicamente

hablando o “puntos de acumulación de una sucesión”, matemáticamente hablando. El aspecto en cuestión, está íntimamente ligado con una estructura más fina que surge en la práctica al observar distribuciones fractales, NO-AUTOAFINES, esto es, en conjuntos de datos, provenientes de procesos físicos. Por tal razón, acudimos (primeramente) a la teoría de información de Shannon, (1949). Para concretar, supongamos que se efectúa un experimento con m posibles resultados, por ejemplo, lanzar un dado con m caras, (i.e. dado poliédrico). Sean entonces, $p_1, p_2, \dots, p_m$ las probabilidades resultantes de los diferentes resultados. Por otro lado, es un hecho conocido, que la asignación de probabilidades a ciertos eventos, representa en cierto sentido INFORMACIÓN. Por ende, ciertas distribuciones de probabilidad, representan más información que otras. Por lo tanto, sería de interés poder medir, “a priori” la cantidad de incertidumbre heredada (contenida) en el “experimento”, es decir, poder cuantificar la duda con que se visualicen los resultados antes de cada observación. En consecuencia, una posible manera de medir tal grado de ignorancia, se basa en la noción de ENTROPÍA, operacionalmente definida como

$$H(p_1, p_2, \dots, p_m) = -\sum_{i=1}^m p_i \log_b(p_i), \quad (3-86)$$

en el entendido de que si $p_k = 0$, entonces $p_k \log_b(p_k) \equiv 0$. En efecto, junto con Shannon, denotamos por $H(\{p_i\})$ con, $\{p_i\} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, la medida cuantitativa de la “incertidumbre”, y estipulemos los siguientes requerimientos:

(a) $H(\{p_i\})$ debe ser una función continua, diferenciable y unívaleda de las

distintas p_i , (con $0 \leq p_i \leq 1$; $\sum_{i=1}^N p_i \equiv 1$).

(b) Cuando todas las p_i son iguales ($p_i = 1/N$), la función $A(N) \equiv H(\{p_i = 1/N\})$ es una función monótona creciente de n .

(c) La incertidumbre de un conjunto de probabilidades, $\{p_i\}$ no cambia si las probabilidades individuales se agrupan en subconjuntos de éstas, cada una con su propia incertidumbre. Es decir,

$$H(\{p_i\}) = H(\{w_j\}) + \sum_{j=1}^k w_j H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j}\right\}_j\right), \quad (3-87)$$

donde:

$$w_1 \equiv \sum_{i=1}^{n_1} p_i, \quad w_2 \equiv \sum_{i=n_1+1}^{n_2} p_i, \dots, w_k \equiv \sum_{i=n_{(k-1)}+1}^{n_k=N} p_i,$$

y la notación $\left\{\frac{p_i}{w_j}\right\}_j$ significa el conjunto de p_i 's que totalizan w_j . Cada una de las

p_i 's en el segundo término del miembro de la derecha, debe dividirse por el w_j apropiado, como se indicó, de manera que la suma de cada uno de los conjuntos es la unidad; recuérdese que H está definido sólo para un conjunto tal. Obsérvese que los multiplicadores en el segundo término, representan la probabilidad de que el evento está en el j -ésimo subconjunto; es decir, la incertidumbre asociada con el j -ésimo subconjunto debería contribuir sólo en proporción a la probabilidad de que el evento esté en ese subconjunto.

Dados (a), (b) y (c), se puede determinar la forma funcional de H . En efecto, para facilitar las evaluaciones del segundo término en el miembro de la derecha en (3-87), primero veamos cómo constructivamente, se interpreta la ecuación en cuestión. Primero agrupemos las p_i de $\{p_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), en 2 conjuntos de j y $(N-j)$ elementos de manera tal que se verifique,

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 = \sum_{i=1}^j p_i + \sum_{i=j+1}^N p_i .$$

Si hacemos $j = n_j$, los $(N - n_j)$ términos de la segunda sumatoria se denotaran por $n_k = N - n_j$, $\ni n_j + n_k = N$. Por ende la anterior relación, se transcribe en

$$\sum_i p_i = w_j + w_k = 1 \Rightarrow \{p_i\} = \{w_j\} \cup \{w_k\},$$

$$\vee H(\{p_i\}) = H\{w_j\} + H\{w_k\},$$

Sin embargo,

$$H(\{w_k\}) = \sum_{j=1}^{n_k} H(\{p_i\}_j) = \sum_{j=1}^{n_k} w_j \left(\left\{ \frac{p_i}{w_j} \right\}_j \right).$$

Análogamente,

$$H(\{w_j\}) = \sum_{l=1}^{n_j=j} H(\{p_i\}_l) = \sum_{l=1}^j w_l \left(\left\{ \frac{p_i}{w_l} \right\}_l \right),$$

con lo cual, (3-87) se puede llevar a la forma

$$H(\{p_i\}) = \sum_{l=1}^j w_l H\left(\left\{ \frac{p_i}{w_l} \right\}_l\right) + \sum_{j=1}^k w_j H\left(\left\{ \frac{p_i}{w_j} \right\}_j\right)$$

pero como l es mudo, entonces,

$$H(\{p_i\}) = \sum_{j=1}^N w_j H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j}\right\}_j\right).$$

Por otro lado, si escogemos todas las $p_i \equiv 1/m \cdot n$ (con m y n enteros), y todas las $w_j = 1/m$, al hacer uso de (b) entonces tendremos:

$$\text{si } N = m \cdot n : H\left(\left\{p_i = \frac{1}{m \cdot n}\right\}\right) \equiv A(m \cdot n),$$

$$\text{si } w_j = \frac{1}{m} : H\left(\left\{w_j = \frac{1}{m}\right\}\right) \equiv A(m),$$

$$\text{si } \frac{p_i}{w_j} = \frac{1}{n} : H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j} = \frac{1}{n}\right\}_j\right) \equiv A(n)/n,$$

$$\forall \sum_{j=1}^N w_j H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j}\right\}_j\right) = \sum_j^{m \cdot n} \frac{1}{m} \frac{A(n)}{n} \equiv A(n).$$

Por lo tanto la (3-87) da lugar a,

$$\forall \quad A(m \cdot n) = A(m) + A(n). \quad (3-88)$$

Pero debido a la continuidad adjudicada en (a), podemos tratar a m y n como variables continuas. Por lo tanto, al hacer $p = m \cdot n$ y tomar derivada parcial con respecto a n concluimos que

$$m \frac{dA(p)}{dp} = \frac{dA(n)}{dn}.$$

Multiplicando ambos miembros por “ n ”, da lugar a

$$p \frac{dA(p)}{dp} = n \frac{dA(n)}{dn} \equiv c ,$$

donde c debe ser una constante, dado que p puede cambiar, manteniendo n constante. De aquí se desprende que

$$A(n) = c \ln(n) + d .$$

Sustituyendo este resultado en (3-88) se determina que $d = 0$, y

$$A(n) = c \ln(n), \quad (3-89)$$

donde c está todavía sin especificar.

Regresando a la (3-87) y escogiendo todas las $p_i \equiv 1/n$, (donde n es un entero), y haciendo $w_j = \alpha_j/n$, donde α_j es otro entero de manera tal que $\sum_j \alpha_j = n$, entonces:

$$\begin{aligned} A(n) &= H(\{w_j\}) + \sum_{j=1}^k H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j}\right\}_j\right) w_j \\ &= H(\{w_j\}) + \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{n}\right) H\left(\left\{\frac{p_i}{w_j} = \frac{1/n}{\alpha_j/n}\right\}_j\right) \\ &= H(\{w_j\}) + \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{n}\right) A(\alpha_j) \end{aligned}$$

o

$$H(\{w_j\}) = A(n) - \frac{1}{n} \sum_j \alpha_j A(\alpha_j),$$

pero dado que $\sum_j \alpha_j/n \equiv \sum_j w_j \equiv 1$, entonces,

$$H(\{w_j\}) = \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{n} \right) [A(n) - A(\alpha_j)]. \quad (3-90)$$

Finalmente, haciendo uso de (3-89) en (3-90), da lugar a

$$\begin{aligned} H(\{w_j\}) &= c \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{n} \right) [\ln(n) - \ln(\alpha_j)] \\ &= -c \sum_j \left(\frac{\alpha_j}{n} \right) \ln(\alpha_j/n), \end{aligned}$$

ó

$$H(\{w_j\}) = -c \sum_j w_j \ln(w_j). \quad (3-91)$$

Excepto por la constante c , hemos determinado la forma funcional de la función de conjunto H , de manera unívoca (o única). Obsérvese que puesto $w_j \leq 1$, el término $\ln(w_j)$ es no positivo, pero el signo negativo que lo precede la torna en una medida (no-negativa) de la incertidumbre cuando c es positiva. En un contexto diferente al térmico, c es usualmente la unidad o remplazado por $1/\ln(2)$. Al respecto, para medir la entropía de una fente informativa, es necesario definir la unidad de información como, (Andrews, 1972),

$$I(S_k) = \log_b \frac{1}{P(S_k)} = \log_b \frac{1}{P_k},$$

donde la base b del logaritmo usado describe las unidades de medida:

- i) $b = 2, \therefore I_k = \text{bits}$
- ii) $b = e, \therefore I_k = \text{nats}$
- iii) $b = 10, \therefore I_k = \text{Hartleys}$

Nótese que si hacemos $c = 1/\ln(2)$, entonces $c \ln w_i$ se convierte efectivamente en $\ln(w_i)/\ln(2) \equiv \log_2(w_i)$.

Por otro lado, la incertidumbre, $H(\{p_i\})$, asociada con un conjunto de probabilidades, es proporcional al valor promedio o valor esperado de $-\ln(p_i)$ como se puede evidenciar de la lectura de la sección sobre probabilidad. La cantidad $-\ln(p_i)$ aparece tan frecuentemente que se le ha dado el descriptivo nombre de “SORPRESA”. Cuando cualquier $p_i = 1$, el resultado del experimento es “cierto”; no hay sorpresa, y $-\ln(p_i) = 0$ como debe ser. Para $p_i < 1$, el resultado del experimento no es 100 % cierto, (o seguro). En consecuencia, podemos conceptualizar la sorpresa como positiva dada por $-\ln(p_i)$. Mientras más pequeña sea p_i , mayor será la sorpresa si el i -ésimo evento ocurre, y en consecuencia, el nombre de $-\ln(p_i)$ parece cada vez más apto.

Finalmente, se puede fácilmente ver que dado un número n de eventos posibles, H es máximo cuando éstos son igualmente probables: $p_i = \frac{1}{n} \forall i, H(\{p_i\}) = A(n) = c \ln(n)$. Esto implica que se aprende, en forma máxima, acerca de lo que se examina, por medio de observar el resultado de una fuente de información, uniformemente distribuida. Esto es equivalente a enunciar que tenemos la más grande incertidumbre acerca de tal fuente distribuida porque cada clase es igualmente posible de que se concrete.

Examinando la expresión deducida, cuando $b = e$ (base de logaritmos neperianos),

$$H(\{w_j\}) = \sum_j w_j \ln(w_j), \quad (3-92)$$

comprendemos que ésta engloba la concepción heredada del espacio de eventos, por medio del cual se distinguió entre sucesos elementales y eventos propiamente dichos. Evidentemente, la probabilidad w_j , para cada j fija, indica a través de la suma parcial,

$$w_j = \sum_{l=1}^j p_l,$$

que el j -ésimo evento está compuesto por los sucesos elementales, $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$. De aquí se desprende que si se desea computar la entropía heredada en un conjunto de N datos o resultados elementales:

$$\{r_1, r_2, \dots, r_N\},$$

y después de clasificarlos en m grupos, según la conocida regla, (empírica), de la estadística (NO GAUSEANA):

$$m = 1.0 + 3.3 \log_{10}(N),$$

entonces, obtendremos las m clases disjuntas (o m elementos) del campo F ,

$$\{S_1, S_2, \dots, S_m\},$$

a las cuales, se les asigna la distribución de probabilidades,

$$\{p_m\} \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_m\}.$$

Por ende, su entropía correspondiente sería, en principio,

$$\forall H(\{p_m\}) = -\sum_{i=1}^m p_i \ln(p_i).$$

Desde la óptica de la matemática, se debe entonces introducir , nuevamente, un cubrimiento de n “esferas” (bolas), ($n > m$), cada una de igual diámetro ε , y luego se busca al número $N' \equiv N^\circ$ mínimo de esferas (no solapadas) que con diámetro ε , cubren al conjunto de datos $\{S\} = \{w\}$ **ú** conjunto de resultados.

De esta manera, si hacemos $N' \equiv N(S, \varepsilon)$, entonces se denotará por $p_i(S, \varepsilon)$ ^a probabilidad de encontrar un punto elegido al azar, en la i -ésima bola (o celda o clase S_i).

Por otro lado, dado que $\sum_i^{N(S, \varepsilon)} p_i(S, \varepsilon) \equiv 1$, entonces la información (medida en *nats*), transportada o contenida por cada “esfera” de radio ε , será

$$I_i(S, \varepsilon) = -\ln p_i(S, \varepsilon),$$

es decir, la SORPRESA de encontrar un punto (o dato) en la i -ésima esfera. Por ende, la incertidumbre total, de todo el conjunto de probabilidades $\{p_i\}$, estará dada por el valor esperado, o “promedio” según la jerga de los físicos, quienes lo expresan con la notación,

$$\langle y \rangle = \sum_{i=1}^N y_i p_i, \quad (3-93)$$

$$I(S, \varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(S, \varepsilon)} p_i \ln p_i(S, \varepsilon), \quad (3-94)$$

o equivalentemente,

$$H(\{p_m\}) \equiv I(S, \varepsilon). \quad (3-95)$$

Por otro lado, la información promedio, dada por la ecuación (3-94), se encuentra por medio de computar lo que los especialistas en comunicaciones, denominan “ENTROPÍA DE LA INFORMACIÓN”.

De lo anterior queda claro que la (3-94) es una cuantificación de la impredecibilidad: si los puntos (datos) están uniformemente distribuidos en S , entonces $I(S, \varepsilon)$ adquiere su valor máximo (o mínima predictibilidad).

Por lo tanto, para generalizar la dimensión fractal (de carácter geométrico) D_0 , se define la dimensión de información, a través de la relación operacional,

$$D_1 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I(S, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I(S, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right]. \quad (3-96)$$

En efecto, dado un conjunto de resultados S , en donde $p_i(S, \varepsilon) \equiv 1/N(S, \varepsilon)$ entonces la (3-94),

$$- \sum_{i=1}^{N(S, \varepsilon)} \frac{1}{N} \ln \left(\frac{1}{N} \right) \equiv \ln N(S, \varepsilon),$$

y consecuentemente, $D_1 \equiv D_0$.

Obviamente, la D_1 se amenda a situaciones físicas, con distribuciones de puntos, aparentemente ESTOCÁSTICAS, es decir con distribuciones (aparentemente) no correlacionadas. Además, si los puntos se suponen distribuidos UNIFORMEMENTE pero empotrados (sumergidos) en un espacio “ d -dimensional”, (con $d = 1, 2$ o 3), entonces cada $p_i(S, \varepsilon)$ depende simplemente del tamaño de la esfera involucrada: $p_i \cong \varepsilon^d$, con lo cual $N(S, \varepsilon)\varepsilon^d = 1$ y $D_1 = d$, como se puede fácilmente verificar. De aquí se concluye que la D_1 también da cuenta de la habitual dimensión topológica, o también referida como experimental (Goltz, 1997^a).

Por otro lado, si la data en S , no es UNIFORME, entonces se debe verificar la siguiente desigualdad, (Goltz, 1997^b),

$$D_1 \leq D_0. \quad (3-97)$$

Por lo tanto, se puede enunciar que la D_1 cuantifica la no uniformidad de la distribución de puntos en cuestión, por medio de asignar menos “peso” (o ponderar menos) a aquellas “esferas” cuyo contenido de puntos sea menor que el de otras. La idea en cuestión, se esquematiza en la figura III-16.

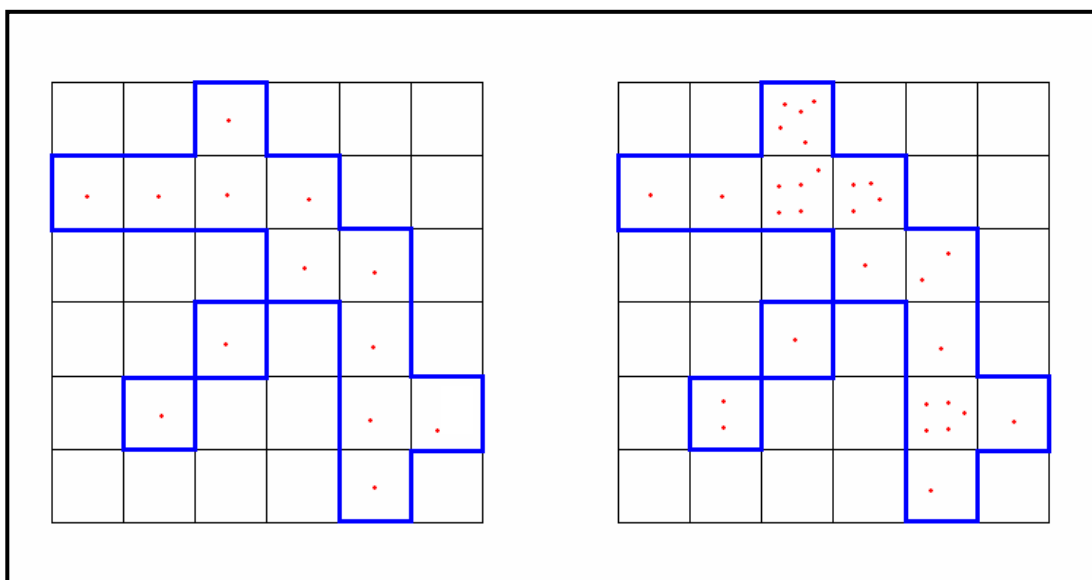


Figura III-16: Contraste de dimensión geométrica D_0 y D_1 respectivamente

3.3.4._ DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN

Si deseamos generalizar (prolongar) las nociones de dimensión fractal, más allá de las D_0 y D_1 , entonces parecerá intuitivo, dada la definición (3-96) de D_1 , proponer, tentativamente,

$$I(S, \varepsilon) \rightarrow I'(S, \varepsilon),$$

de manera tal que para todo cubrimiento $\{S_i\}$ de S , (con $|S_i| = \varepsilon_i \equiv \varepsilon$), se definiese

$$I'(S, \varepsilon) = \ln \left(\sum_1^{N(S, \varepsilon)} p_i^2 \right),$$

y entonces

$$D_2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I'(S, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right], \quad (3-98a)$$

$$D_2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{N(S, \varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln(\varepsilon)} \right]. \quad (3-98b)$$

Para la justificación de la definición operacional propuesta, primeramente recordemos que en general, la función característica de un conjunto A , es la función $\Theta_A(x)$:

$$\Theta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

En particular, la función característica para el conjunto $A = [0, x)$, (denotada apropiadamente como $\Theta_A(x)$, $[0, \infty)$), se define a través de la “función escalón” o de Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \equiv H(x).$$

Por ende, si $x \in \tilde{N}^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces tendremos $\theta_n(x)$:

$$\Theta_n(x) \equiv \Theta(x_1) \cdot \Theta(x_2) \cdots \Theta(x_n),$$

(Vladimirov, 1979). Por otro lado, dada una n -ada de datos: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = S$ nos interesa calcular la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$, de que cualquier par de puntos x_i, x_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$ (con $i \neq j$), tenga una separación MENOR que ε . Es decir, si $A = \{x_i\}$ y $B = \{x_j\}$, queremos la probabilidad de que el par genérico (x_i, x_j) se encuentre en un mismo intervalo de máxima longitud ε . Obviamente, si $N(S, \varepsilon)$ es el total de bolas que cubren a S , entonces la probabilidad de encontrar un sólo punto (x_i, x_j) , será $1/N(S, \varepsilon)$. Por ende, si n_i es el número de puntos que yacen en la i -ésima “bola” (unidimensional), será

$$p_i(S, \varepsilon) \equiv \frac{n_i}{N(S, \varepsilon)}.$$

Pero puesto que ε es el diámetro de cada “bola”, todas las bolas que a lo sumo contengan n_i puntos estarán, al menos separadas una distancia ε , si y sólo si fuesen geoméricamente contiguas. Si tal es el caso, entonces existirán n_i^2 pares de puntos (x_i, x_j) , si y sólo si contamos el par $(x_i, x_j) \neq (x_j, x_i)$.

Por lo tanto, si dichos pares son estadísticamente INDEPENDIENTES, se debe tener que la probabilidad conjunta, $p(A|B) = p(x_i|x_j) = p(x_i) \cdot p(x_j)$ si visualizamos los conjuntos A y B , como compuestos por un solo elemento x_i y x_j respectivamente. Entonces p_i^2 es la probabilidad de que los puntos x_i, x_j estén en un mismo intervalo i , con lo cual, $\sum_i^{N_i} p_i^2$ también será la probabilidad de que cualesquiera dos x_i, x_j se encuentren a una distancia menor que ε , (Mc Cauley, 1994^b). En consecuencia, $\sum_i p_i^2$ es el número de pares con una separación menor que ε y por lo tanto podemos escribir

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(S, \varepsilon)} p_i^2, \quad (3-99)$$

o equivalentemente,

$$C(\varepsilon) \equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N(S, \varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(S, \varepsilon)} \Theta[\varepsilon - |x_i - x_j|]. \quad (3-100)$$

De lo anterior se desprende que igualmente podemos definir a D_2 como

$$D_2 \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right], \quad (3-101)$$

donde algorítmicamente se especifica,

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \left\{ n^\circ \text{ pares } (x_i, x_j) \ni |x_i - x_j| < \varepsilon \right\}, \quad (3-102)$$

con

$$C(\varepsilon) \cong \varepsilon^{D_2}. \quad (3-103)$$

De nuevo se puntualiza que D_2 enfatiza aún más el peso que se les asigna a las “bolas” (unidimensionales) densamente pobladas. Por ende, es una dimensión fractal, más fina que la aportada por D_1 . De donde, se debe verificar la desigualdad

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0,$$

(Goltz, 1997^c), para conjuntos de datos inhomogéneos que poseen la característica de NUCLEACIÓN.

CAPÍTULO IV

4.0._ METODOLOGÍA

En este capítulo se explicarán las etapas desarrolladas durante el trabajo, para cumplir con los objetivos propuestos.

4.0.1._ ETAPAS Y PROCESOS INVOLUCRADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado, se cumplió con las etapas que se exponen a continuación.

☒ **Búsqueda y recolección de información:**

- Estado actual del arte de la Tecnología pertinente en los registros de Rayos Gamma,
- Geología de la zona,
- Conceptos pertinentes de Teoría de Probabilidad,
- Conceptos teóricos sobre Dimensión. Teoría básica del formulismo fractal,
- Necesidad de la introducción de un formulismo Multifractal para develar fenómenos no lineales,
- Medidas sobre fractales y espectro multifractal,

☒ **Registros de pozo:**

- Atributos Geofísicos (variables), que se miden,
- Geometría de adquisición,
- Resolución, particularidades con respecto a otras series temporales,
- Particularidades de las Series Temporales Sedimentarias dentro del periodo del Cretácico, como series en profundidad.

Por lo tanto, a continuación se explicará, en forma global la temática que se lista subsecuentemente.

☑ **Análisis fractal y multifractal de Series Temporales y/o en Profundidad:**

- Origen de las Series Temporales,
- Espacio de Fase y Sistemas Dinámicos,
- Relevancia de los conceptos de fractalidad en el contexto de la Petrofísica,
- Métodos prácticos para determinar las medidas fractales y el espectro multifractal.

Las especificaciones necesarias acerca del cálculo de las dimensiones fractales, algoritmos implementados, programas utilizados, así como su importancia para la realización del proyecto se describen en este Capítulo secuencialmente, conforme a su relevancia.

4.0.2._ MARCO GEOLÓGICO Y ESTRUCTURAL

Indiscutiblemente a la hora de realizar un trabajo de investigación, nunca antes desarrollado, o aplicado en cualquier área, es importante la elaboración de un marco geológico que caracterice, en lo posible, la configuración geológico-estructural del subsuelo del área en el cual se intenta implementar alguna técnica. De donde, resulta que dicho marco es de suma importancia en el desarrollo y diseño de la estrategia a seguir, para dar cumplimiento a los objetivos de este Trabajo Especial de Grado.

El sistema de unidades usado fue el ingles: pies para definir las profundidades del marco geológico y del registro petrofisico usado, y se adoptó el sistema métrico en superficie (direcciones E-O y N-S) en el cual se expresan las coordenadas UTM.

Seguidamente, la búsqueda de información condujo a un registro de Rayos Gamma del Tope del Grupo Cogollo (Formación Maraca, Formación Lisure y Formación Apón) (Figura IV-1), realizado por Arikuma Tsuyoshi (2000).

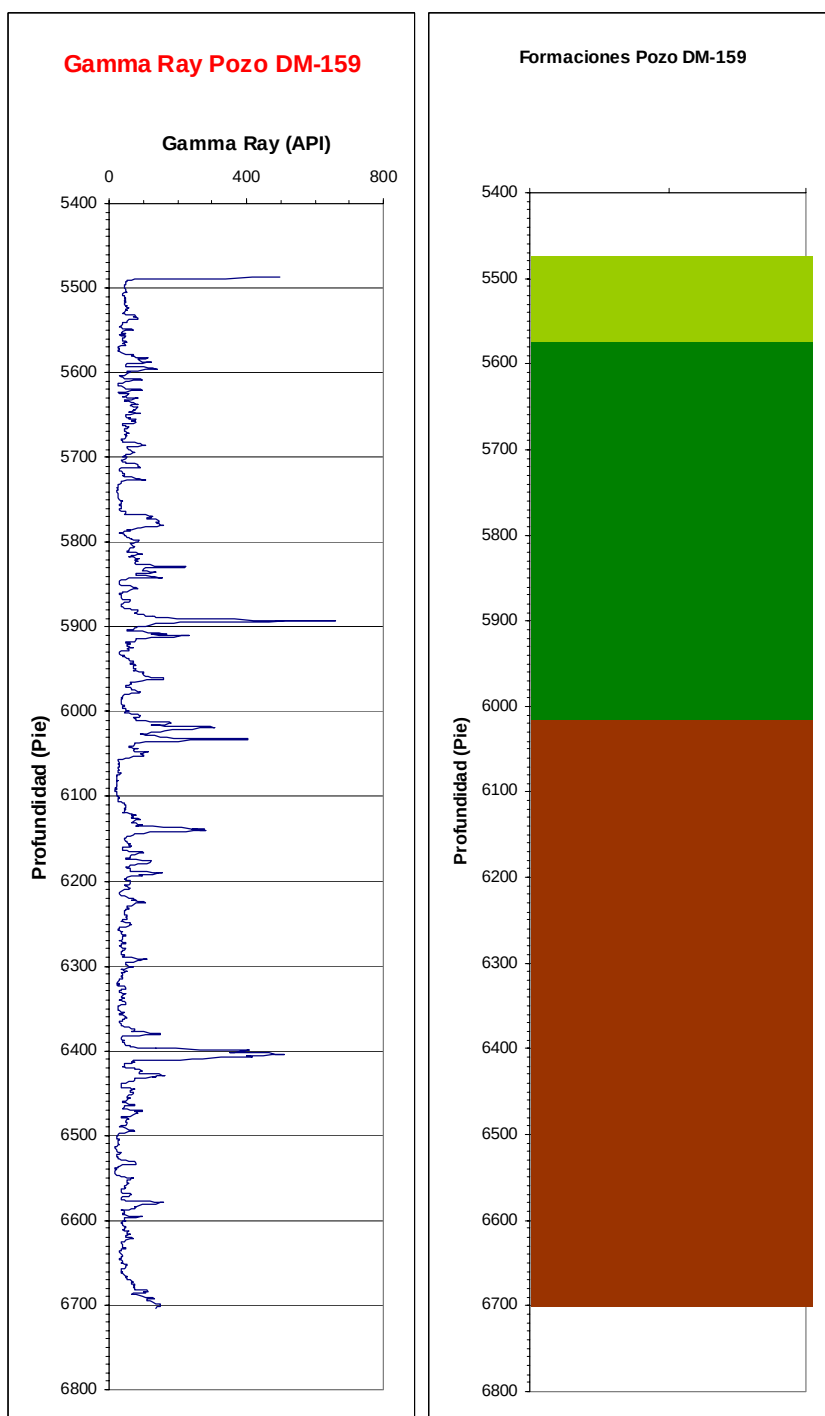


Figura IV-1: Registro del Rayo Gamma del Pozo DM-159, Campo Mara Oeste.
(Digitalizado y editado de Arikuma, 2000)

Fm. Maraca



Fm. Lisure



Fm. Apón



Además del registro de Rayos Gamma, se contó con la información del esquema de la tasa de sedimentación del Cretácico y Terciario en la cuenca de Maracaibo (Figura IV-2), cuya información servirá para realizar el análisis del registro de Rayos Gamma como una serie temporal y por ende espacial.

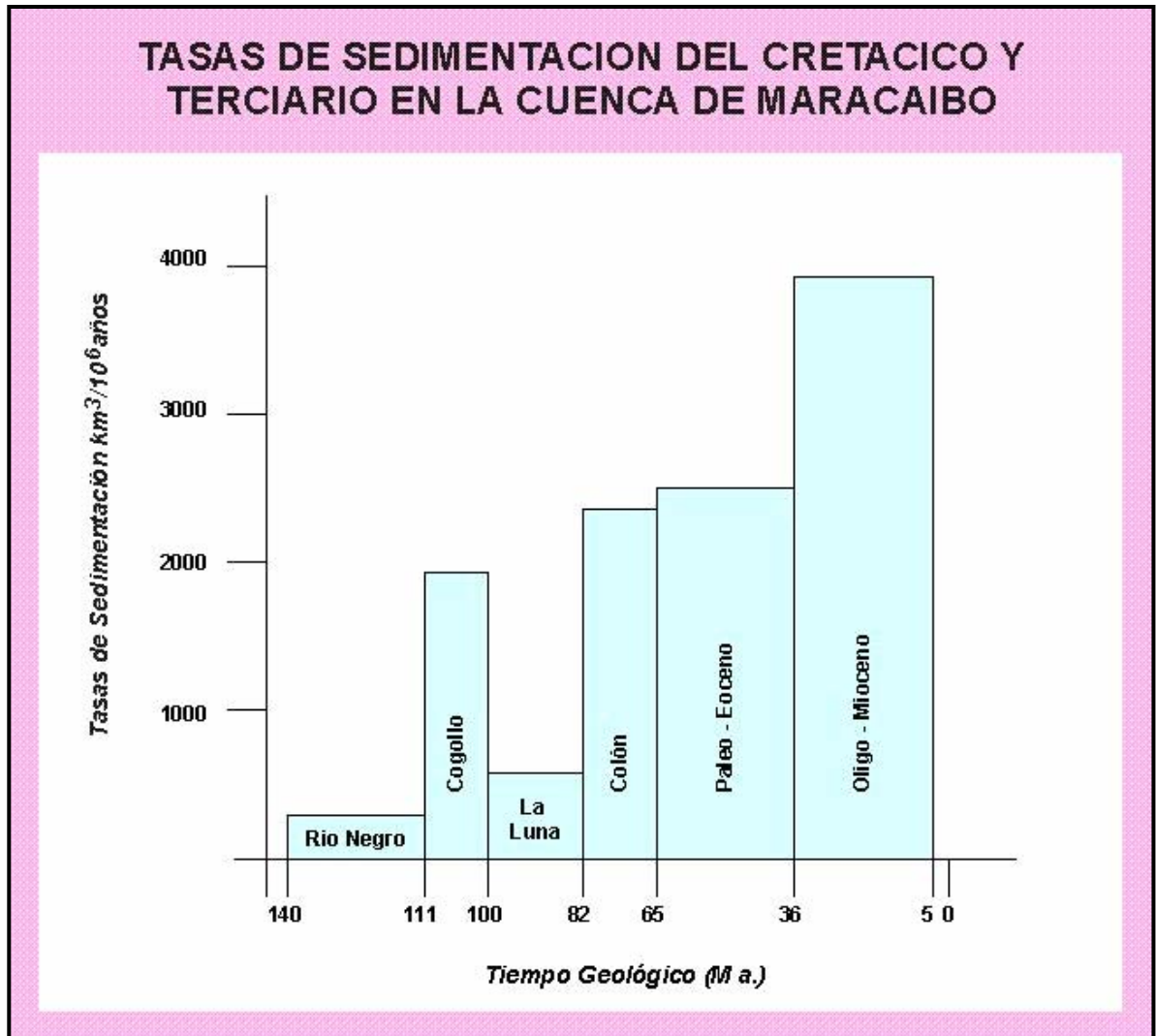


Figura IV-2: Esquema de la tasa de sedimentación y tiempo geológico de la Cuenca de Maracaibo, (Editado de Arikuma, 2000)

4.1._ ORIGEN DE LAS SERIES TEMPORALES

En general, para entender (investigar) un “sistema”, ya sea de índole geológica, sociológica, química o económica, etc. es fundamentalmente necesario:

1. Caracterizar su “estado”, y
2. Observar cómo evoluciona éste con el correr del tiempo.

En consecuencia el estado de un sistema particular, se describe mediante la combinación de variables DINÁMICAS y ESTÁTICAS. Entiéndase que en un contexto muy amplio, se pueden identificar las variables dinámicas como la posición y velocidad de un cierto “ente” por definir y por variables estáticas a ciertos parámetros y constantes peculiares al sistema escogido. Por ende, denominaremos “espacio de fase” a la representación gráfica CARTESIANA, donde cada eje es una variable dinámica. En éste, preferentemente, el eje de las abscisas representa las posiciones y el eje de las ordenadas, las rapidezces que el “ente” escogido adquiere con el transcurso del tiempo, respectivamente. Dicho espacio de fase es un utensilio de trabajo, extremadamente útil, por cuanto nos permite analizar de un solo vistazo toda la dinámica del sistema, bajo estudio. Esto es, bajo qué reglas EVOLUCIONA dicho sistema, al cabo de un lapso de tiempo “suficientemente grande”. En efecto, cada punto en el gráfico propuesto, DEFINE el ESTADO del “sistema” en un instante dado y la línea descrita por la sucesión de PUNTOS ESTADO, es la “trayectoria” la cual a lo largo del tiempo es arrastrada hacia una región (vecindad) del espacio de fases, que la nueva generación de físicos, denomina “atractor”.

En consecuencia, desde un punto de vista formal, (Eckmann, Ruelle, 1985^e), si x denota el estado de un sistema en particular, entonces se introduce la noción de “operador”, no lineal, de evolución temporal f^t con las propiedades básicas:

$$(i) \quad f^{t=0}x = f^0x \equiv x; \quad (ii) \quad f^{t_1+t_2}x \equiv f^{t_1} \circ f^{t_2}x,$$

$(\forall t \geq 0)$, el cual actúa en el “espacio de fase M ”, para arrastrar (transportar) al estado x hacia una región (vecindad) de M .

Por ejemplo, asumiendo que los procesos geológicos (o geomorfológicos) se describen por medio de ecuaciones en derivadas parciales, (Scheidegger, 1983, 1987^a), y que además éstas, se pueden transformar (reducir) en un conjunto de n -ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} \equiv f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} \equiv f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} \equiv f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{4-1a}$$

es decir,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4-1b}$$

entonces las n variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son coordenadas del espacio de estados o fase M . Por otro lado, la ecuación (4-1a) se puede reducir a una ecuación diferencial, altamente no lineal, de n -ésimo orden, por medio de diferenciación sucesiva de la primera de las ecuaciones en (4-1a) que describen el sistema, dando lugar a

$$\frac{d^n x_i}{dt^n} \equiv x_i^{(n)} = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (4-2)$$

Dicha ecuación es fácilmente verificable, particularizando la ecuación (4-1b) para el caso de cuando $i = 1, 2$, luego para $i = 1, 2, 3$, etc. Pero por otro lado, la ecuación (4-2), es equivalente a un conjunto de n ecuaciones que describen la evolución temporal $x(t)$ y sus $(n-1)$ derivadas: $x^{(0)}(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$, donde hemos puesto, $x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x^{(2)}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$, ..., $x^{(n-1)}(t) = \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}$, con la identidad, $x^{(0)}(t) = \frac{d^0 x(t)}{dt^0} = x(t)$ de manera tal que:

$$f^0 x \leftrightarrow \frac{d^0 x(t)}{dt^0}; \quad f^{t_1+t_2} x = f^{t_1} \circ f^{t_2} x \leftrightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \text{ etc....}$$

En consecuencia podemos describir, la evolución temporal del sistema como,

$$x(t) \equiv [x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)] , \quad (4-3)$$

cuya notación explicaremos más adelante.

Dicha ecuación, es la base para el uso de series temporales DISCRETAS de una sola REALIZACIÓN del sistema considerado, para evaluar su comportamiento, (aparentemente), CAÓTICO, (Robinson, 1995).

4.2._ EXTRACCIÓN DE INFORMACIÓN GEOMÉTRICA A PARTIR DE UNA SERIE TEMPORAL

En general, la posibilidad de reconstruir retratos o imágenes del espacio de fase M , a partir de una sola coordenada $x(t)$, (comúnmente denominada “señal”), está garantizada por un teorema de Takens, (1981), el cual asevera que NO es necesario medir todas las variables de un “sistema dinámico”. Por tal razón, la filosofía general en este enfoque, es la de focalizarse (investigar) en algunas propiedades que caractericen la evolución temporal del sistema analizado, en términos de cantidades geométricas. De donde, se pospone cualquier intento de obtener conocimiento detallado acerca de su dinámica. Además, debido al pequeño número de datos del cual se dispone, la búsqueda de un posible “ATRACTOR” se torna ilusoria.

Por otro lado, dado que originalmente, se tenían derivadas temporales: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x_3(t) = \ddot{x}(t)$, ..., al principio Ruelle las transcribió, (Packard et al, 1980), a través de “retardos temporales” y por ende escribió,

$$x_k(t) \equiv x(t + (k-1)\tau); \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4-4)$$

donde τ es un intervalo fijo de tiempo. De esta manera, se puede generar una señal N -dimensional, la cual se puede escribir como representativa del vector estado,

$$x(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t + \tau) \\ \vdots \\ x(t + (N-1)\tau) \end{pmatrix}. \quad (4-5)$$

Sin embargo, el problema que ingenierilmente se confronta, no es la construcción del vector estado $x(t)$, dado por la ecuación (4-5) y sus diferentes SIMULACIONES al variar la magnitud de τ . Más bien, es un problema, en donde los datos que se recaban en el experimento, constituyen un problema de “muestreo” de una señal $x(t)$, el cual está dictado por las posibilidades tecnológicas de medición del estado del arte contemporáneo. Pero, se debe puntualizar que no es un problema de interpolación óptima.

Dada la libertad, tácitamente englobada por la cantidad τ en la ecuación (4-4), preferimos escribir al vector estado de acuerdo a la ecuación (4-3) en la forma,

$$\mathbf{V} \quad x(t) \cong \begin{pmatrix} x(t) \\ x^1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{pmatrix}, \quad (4-6)$$

pero con el proviso de que no se debe presumir, que cualquier componente de éste es de la forma

$$A_{p+1} = f(A_p), \quad (4-7)$$

por cuanto no se conoce “a priori” la forma funcional de la aplicación f , (i.e. mapping), y en donde A_i es una “amplitud” de cualquier campo escalar, a la profundidad $x^{(i)}(t)$, (Jiménez, J. 1996^b). En tales condiciones, tenemos un problema estadístico por resolver, para el cual sugerimos la metodología esbozada en el siguiente aparte.

4.3._ ENFOQUE ESTADÍSTICO DE LA SERIE DE DATOS ADQUIRIDOS

Primeramente, se debe señalar que de la última sección del capítulo anterior, se desprende formalmente que,

i) si los datos disponibles son (aparentemente) no correlacionados, y además son del tipo en donde n de ellos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se aplican en $(r_1 x_1, r_2 x_2, \dots, r_n x_n)$:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{T} (r_1 x_1, r_2 x_2, \dots, r_n x_n)$, entonces se dice que T es una transformación de “AFINIDAD”, por cuanto cada eje, x_i , es redimensionalizado con una constante numérica diferente. En consecuencia la “AUTOSIMILITUD”, debe ser interpretada ESTADÍSTICAMENTE. Una terminología adecuada es la de cualificar a un conjunto de tal tipo de datos como AUTO-AFIN. Por ende, si S es “autoafin” éste será inhomogéneo y NO-ISOTRÓPICO, pero sin embargo, continua siendo la unión disjunta de N copias de $rS = \{r\bar{x} | \bar{x} \in S\}$;

ii) si el conjunto de datos es autosimilar, entonces será un caso particular de (i), cuando $r_i \equiv r_{i+1}, \forall i = 1, \dots, n$. Por ende, se dirá que T representa un atransformación de Similitud y S se califica además de isotrópico y AUTOSIMILIAR, (Voss, 1985).

iii) Dado que en el reconocimiento de un patrón subyacente en un conjunto S el uso de la estadística (ordinaria) se amolda a la reducción, (Andrews, 1972) presentada en la Figura IV-3, entonces la estrategia a seguir, para datos (aparentemente) no correlacionados, engloba al “aparato” y al “proceso de reducción de dimensionalidad”, dentro del tratamiento de variables discretas de la función g de transferencia del “sistema” analizado y resolución R del aparato. En efecto, si regresamos a la expresión dada en la pagina (63), para la “resolución integral del aparato”,

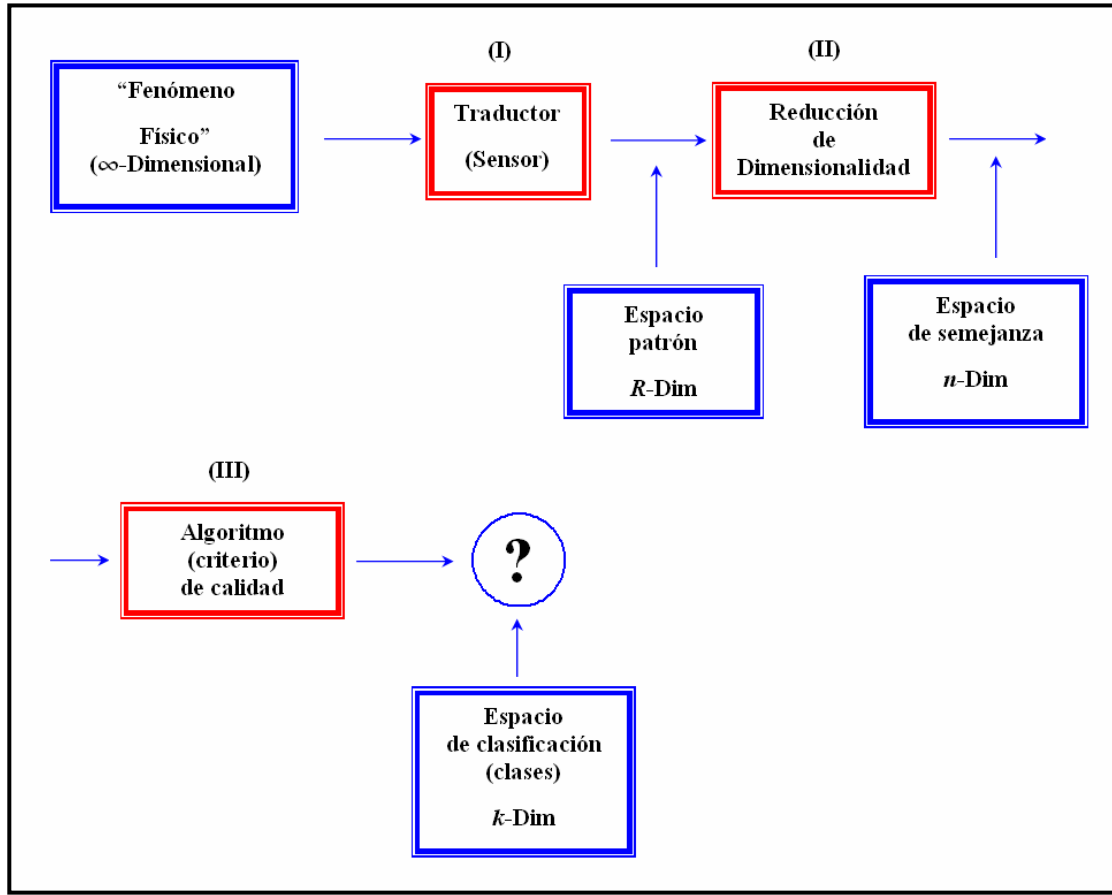


Figura IV-3: Esquema de reducción para reconocer un patrón

$$\text{I} \quad f(x) = \sum_i f_i(x) = \sum_i \frac{F_i [g(x_i, w_i, x)]}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x_i, w_i, \xi) d\xi} \Delta x_i, \quad (4-8)$$

y definimos,

$$\frac{[g(x_i, w_i, x)]}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x_i, w_i, \xi) d\xi} \equiv G(x_i, W_i, x), \quad (4-9)$$

como la función de resolución NORMALIZADA, entonces,

$$f(x) = \sum_i F_i G(x_i, W_i, x) \Delta x_i, \quad (4-10)$$

y fácilmente, se entiende que en el límite, da lugar a la expresión

$$f(x) = \int_a^b F(x') G(x', W(x'), x) dx, \quad (4-11)$$

que, igualmente, podemos expresar como una convolución, etc. En palabras, la fuente o distribución ideal $F(x)$ que queremos medir con un aparato $G(x', W(x'), x)$, da lugar a la distribución (idealmente) continua de datos medidos $f(x)$. De esta manera, se podría, “grosamente hablando”, enunciar que las cosas tienen la apariencia del cristal con que se miren. Sin embargo, para un ingeniero, el límite involucrado en la ecuación (4.-11) carece de sentido práctico. Por lo tanto, supone pragmáticamente que tanto, F como f son funciones discretas, solamente definidas en los puntos x_i . Por lo tanto, se visualiza las distribuciones en cuestión como vectores MULTIDIMENSIONALES, (tipo columna) y a la función de transformación (rectangular) que opera sobre F , para producir a f . En esta formulación, la integral (4-11) se remplacea por una suma discreta de manera que

$$f_i = \sum_j G_{ij} F_j; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, R, \quad (4-12)$$

donde F está representado por un vector columna con R componentes, y f como otro n -dimensional, pero G_{ij} será la matriz resolución $n \times R$ definida sólo en puntos discretos. Nótese que, por definición, $R > n$ (véase figura III-5).

iv) Por otro lado, se puede mostrar, (Wortman y Cramer (1964), Grissom y Soller (1967^b)), que cuando los procesos físicos que intervienen en la herramienta de medida, son de “índole estadística” (estocástica), entonces estos producen resultados

$\{f_i\}$ que se distribuyen de acuerdo a las leyes fundamentales de probabilidad: la Binomial, la de Poisson o la Normal. De aquí se tiene, que si en (4-12) ponemos los f_j provenientes de una $\{F_j\}$ a {Distribución de Poisson} @ {Distribución binomial, con probabilidad $p = 0.01$ }, entonces para simplificar argumentos teóricos, podemos suponer que $G_{ij} \propto \text{const. } \delta_{ij}$, y $f_i = \sum_{j=1} G_{ij} F_j$, con $j = 1, 2, \dots, n$, da lugar a

$$f_i = \text{const} \cdot F_i, \quad (4-13)$$

con lo cual esperamos que, teóricamente, las medidas (Amplitudes) obtenidas, se distribuyan de acuerdo a una distribución binomial, redimensionalizada.

v) Desde el punto de vista de la estadística (ordinaria), el “algoritmo de calidad” (o criterio de clasificación) es en general un arte. Por tal razón, lo único que en principio podemos enunciar es: “dado un conjunto de n datos, clasificarlos en k clases, es equivalente a matemáticamente, hallar superficies de separación en $\tilde{N}^n$ ”. Luego, para poder asignar cierto grado de confianza a dicha clasificación, debemos disponer de ciertas medidas de similitud y/o afinidad entre puntos de $\tilde{N}^n$. Por lo tanto el disponer de tales utensilios, presupone endosarle (atribuirle) cierta estructura adicional, al simple conjunto de n -datos. Usualmente, se asume que el espacio de datos es de carácter MÉTRICO. En el argot de “sistemas dinámicos”, se acostumbra a denominar a dicho espacio por el nombre de variedad (i.e. manifold).

vi) En consecuencia se dirá que el espacio constituido por n -datos, será de carácter MÉTRICO, si posee una función real (métrica) que tres cualesquiera de sus puntos, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ cumple con las axiomas:

- (a) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$,
- (b) $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ sii $\bar{x} \neq \bar{y}$,

- (c) $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ sii $\bar{y} = \bar{x}$,
 (d) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{y}, \bar{z}) + d(\bar{x}, \bar{z})$.

De donde, para $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de la forma

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

entonces la métrica euclídea será

$$d(x, y) \equiv |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$$

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} . \quad (4-14)$$

En particular, si el conjunto de n -datos, posee además, funciones reales diferenciables, que relacionen cambios de coordenadas, entonces el espacio en cuestión será denominada “variedad diferenciable”.

En términos ingenieriles, se podría describir la variedad en cuestión, como la generalización de una superficie, empotrada o sumergida en un espacio de menor dimensión con $d = 1, 2$ o 3 , (Apóstol, 1974). Por lo tanto, identifiquemos dicha variedad con el espacio de fase o de estados M .

vii) Si además agrupamos los elementos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \tilde{N}^n$ en un conjunto de K clases, disjuntas, (por medio de algún criterio o condición global), entonces los valores columna, con supra-índice (k , y m componentes:

$$y_m^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4-15)$$

representarían los prototipos de los vectores de clase (k) , con $(k = 1, 2, \dots, K)$ y el subíndice m representaría el m -ésimo prototipo de la clase S_k , con $m = 1, 2, \dots, M_K$, donde se asume que hay M_K prototipos que describen la k -ésima clase S_k . Pero una descripción de vectores tipo $y_m^{(k)}$ se amolda (o amolda) en forma natural, a la representación de un HISTOGRAMA, el cual se sustenta en la Condición Global:

$$\sum_{l=1}^K S_l \leq n^\circ \text{ de datos.} \quad (4-16)$$

De donde, el espacio de fase M puede ser manipulado, equivalentemente, a través de histogramas simples o NORMALIZADOS, si y sólo si se respeta la (4-16). Por ende, para cada uno de éstos, es concebible definir la similaridad (estadística) de un punto $\bar{x}$ con la k -ésima clase S_k como,

$$S(\bar{x}, \{y_m^{(k)}\}) = \frac{1}{M_K} \sum_{m=1}^{M_K} d^2(\bar{x}, y_m^{(k)}). \quad (4-17)$$

Tal similaridad es simplemente una distancia cuadrática promedio, entre un punto $\bar{x}$ y el conjunto de prototipos $y_m^{(k)}$, que definen la k -ésima clase, (Sebestyen, 1962).

viii) Sin embargo, dentro de la óptica fractal, la similaridad expresada por la (4-17), se aborda a través de las medidas INVARIANTES de la variedad M o espacio de fase. Tales son, (Takens, 1981^a), en principio D_0 , D_1 y D_2 .

ix) En consecuencia, debido a la conclusión del punto (iii) y las técnicas que implementaremos para determinar las dimensiones D_1 y D_2 , es conveniente destacar la siguiente situación.

Dada la distribución binomial, obtenida a través de un HISTOGRAMA,

$$w(r, n, p) = C_r^n p^r q^{n-r}, \quad (4-18)$$

es necesario determinar, experimentalmente, el punto r^* , donde ésta alcanza su máximo. De donde, calculemos previamente, el cociente de dos ordenadas adyacentes de (4-18):

$$\frac{w(r, n, p)}{w(r-1, n, p)} = \frac{C_r^n p^r q^{n-r}}{C_{(r-1)}^n p^{(r-1)} q^{(n-r+1)}} = \frac{(n-r+1)p}{rq},$$

pero esta relación no puede ser menor que la unidad, si $r \geq (n+1)p$. Por lo tanto, la función $w(r, n, p)$ alcanza el máximo mostrado en el histograma, cuando $r = r^*$,

$$\text{I} \quad r^* = \text{ent}(n+1)p, \quad (4-19)$$

donde, $\text{ent}(x)$ es la parte entera del número x , y n representa el número de clases disjuntas S_k , al cual nos hemos referido en el aparte anterior, como el entero k y previamente, se ha utilizado la conocida regla:

$$k \equiv \sqrt{N}, \quad (4-20)$$

donde, N : Número total de datos, k : Número de clases disjuntas, ó

$$k' \equiv 1.0 + 3.3 \log(N), \quad (4-21)$$

donde, k' : Número mínimo de clases disjuntas. Por ende, se encuentra que

$$k' = \sqrt{N} = 1.0 + 11.02 \log(N), \quad (4-22)$$

4.4._ MÉTODOS PARA DETERMINAR LA DIMENSIÓN FRACTAL

En las ciencias naturales, y muy en particular en geología, se ha venido reconociendo en las últimas tres décadas, que en todo proceso de fragmentación, los procesos físicos involucrados siempre están acompañados de “Fluctuaciones”, (Burrough, 1989^b). Lo anterior, origina la observación de estructuras físicas carentes de perfecta simetría. En consecuencia, las distribuciones observadas en las medidas de campos físicos, denominadas “Fractales Físicos”, (Vicsek, 1989^d), son más o menos aleatorias, con un bajo nivel de simetría. Por tal razón, junto con Burrough puntualizamos sobre ciertas metodologías que algunos investigadores, han diseñado (creado y usado) para estimar las dimensiones D_0 , D_1 y D_2 , cuando se trabaja con fractales AFINES:

- (a) Método de el Espectro de Potencia,
- (b) Método de el Radio de Giro,
- (c) Método de el Variograma,
- (d) Método de el Conteo de cajas.

4.4.1._ ESPECTRO DE POTENCIA

Originalmente, el método en cuestión fue propuesto por Voss (1985) y subsecuentemente discutido por Hough (1989). Como tal, es aplicable a fractales AUTO-AFINES. En particular distribuciones auto-afines, como las superficies de los “poros” y volúmenes de éstos, son CONTINUAS pero NO-DIFERENCIABLES y correlacionadas sobre un cierto rango de varias escalas. Según Scheidegger (1961), esta metodología, se usa para obtener información acerca de la estructura de un medio poroso. La idea detrás de esta técnica procede a lo largo de los siguientes pasos.

Sea $Z(t)$ una función acotada y continua, para todo $t \geq 0$; esto es, $Z : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^1$ y por conveniencia, consideramos su transformada de FOURIER, sobre una ventana temporal suficientemente “grande”, $0 < t < T$. Por lo tanto,

$$\tilde{Z}(\omega, T) = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4-23)$$

denota su TF en $(0, T)$, y por ende se define su densidad espectral $S(\omega)$, como

$$S(\omega) = T |\tilde{Z}(\omega, T)|^2, \quad (4-24)$$

a medida que $T \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el “Espectro de Potencia” (o “espectro de frecuencia”),

$$S(\omega) = \underline{const} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T Z(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\} \quad (4-25)$$

mide la cantidad de energía por unidad de tiempo, contenida en la señal $Z(t)$, como una función S de ω . En otras palabras, refleja cuál es la “intensidad” de ω en una descomposición armónica de $Z(t)$.

Por otro lado, para “Fractales Afines” (o físicos), se tiene que

$$S(\omega) \cong \frac{1}{\omega^\alpha} = c\omega^{-\alpha} \quad (4-26)$$

es decir, $S(\omega)$ está relacionada con la frecuencia ω , a través de una ley de potencia, cuando ω adquiere altos valores. Además, si deseamos averiguar la correlación entre los valores de $Z(t)$, separados entre si por intervalos de duración “ τ ”, entonces se debe hacer uso de la función de AUTOCORRELACIÓN:

$$C(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T [Z(t+\tau) - \bar{Z}] [Z(t) - \bar{Z}] dt \right), \quad (4-27a)$$

donde $\bar{Z}$ denota el promedio de la $Z(t)$ sobre la ventana temporal T , dado como

$$\bar{Z}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt \right).$$

Es evidente que la (4-27a) se puede expresar como,

$$C(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (Z(t+\tau)Z(t)) dt - (\bar{Z})^2 \right), \quad (4-27b)$$

la cual Scheidegger prefiere denotar con la notación,

$$C(\tau) = \langle Z(t + \tau)Z(t) \rangle - \langle Z(t) \rangle^2, \quad (4-27c)$$

y denomina FUNCIÓN DE AUTO-CORRELACIÓN BIPUNTUAL. Para el caso de cuando el proceso físico, responsable o causante de fragmentación o porosidad del medio, es ALEATORIO y ESTACIONARIO, entonces $S(\omega)$ y $C(\tau)$ están relacionados a través del teorema de Wiener-Khintchine (Zverev, 1978),

$$\forall \quad C(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (4-28)$$

Sin embargo, la (4-28) se puede aplicar también al caso de procesos no-estacionarios. Entonces, para fractales afines usando (4-26) en (4-28), da lugar a

$$C(\tau) \approx \tau^{(\alpha-1)} = b \tau^{(\alpha-1)}. \quad (4-29)$$

Además, puesto que

$$\int_0^T [Z(t + \tau) - Z(t)]^2 dt = \int_0^T Z(t + \tau)^2 dt + \int_0^T Z(t)^2 dt - 2 \int_0^T [Z(t + \tau)Z(t)] dt$$

Obviamente al despejar por $\int_0^T [Z(t + \tau)Z(t)] dt$ y dividir miembro a miembro por T :

$$\frac{1}{T} \int_0^T Z(t + \tau)Z(t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T Z^2(t + \tau) dt + \frac{1}{2T} \int_0^T Z^2(t) dt - \frac{1}{2T} \int_0^T [Z(t + \tau) - Z(t)]^2 dt$$

;

pero se puede fácilmente mostrar que si hacemos $y = t + \tau$,

$$\frac{1}{2T} \int_0^T Z^2(t+\tau) dt = \frac{1}{2T} \int_{\tau}^{T+\tau} Z^2(y) dy = \frac{1}{2T} \int_0^T Z^2(t') dt'$$

con lo cual,

$$\frac{1}{T} \int_0^T Z^2(t+\tau) Z(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Z^2(t) dt - \frac{1}{2T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt. \quad (4-30)$$

Tomando el límite $T \rightarrow \infty$ y restando en ambos miembros de (4-30) la cantidad $(\bar{Z})^2$:

$$C(\tau) = \overline{Z^2} - (\bar{Z})^2 - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt \right), \quad (4-31)$$

donde hemos puesto,

$$\overline{Z^2} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T Z^2(t) dt \right), \quad (4-32)$$

como el “promedio cuadrático” de $Z(t)$ sobre la ventana T . Finalmente, como de la (4-27b) es inmediato que cuando $\tau \equiv 0$,

$$C(0) = \overline{Z^2} - (\bar{Z})^2,$$

entonces, podemos expresar la (4-31) en la forma,

$$C(\tau) = C(0) - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt \right),$$

o equivalentemente como

$$C(0) - C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt \right). \quad (4-32)$$

Es importante puntualizar que Scheidegger, denota a la expresión

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt \right) \equiv M_i(\tau),$$

y en su notación,

$$M_i(\tau) \equiv \langle [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 \rangle,$$

la denomina “promedio cuadrático incremental de la función $Z(t)$ ”. En consecuencia,

$$2[C(0) - C(\tau)] \equiv M_i(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T [Z(t+\tau) - Z(t)]^2 dt \right). \quad (4-32a)$$

Experimentalmente, se encuentra que si la ventana T es grande en comparación con el incremento τ , entonces

$$C(0) - C(\tau) \cong c \tau^{4-2s}, \quad (4-33)$$

es decir, una ley de potencia en donde s sería la dimensión de la señal $Z(t)$. De donde al comparar la (4-29) con (4-33), se concluye que

$$\text{Re}(s) = 4 - 2s = \alpha - 1,$$

6

$$\text{Re}(s) = \frac{1}{2}(5 - \alpha), \quad (4-34)$$

es la “estimación” (espectral) de la “dimensión de caja D_0 ”, para la señal $Z(t)$. En consecuencia, es razonable esperar que si una señal posee un espectro de potencia de la forma $1/\omega^\alpha$, entonces el gráfico de $Z(t)$ tiene dimensión igual a $s = \frac{1}{2}(5 - \alpha)$. Su estimación se consigue por medio de Gráficar $\log S(\omega)$ contra el $\log(\omega)$ y su pendiente será igual a $-(5 - 2s) = \alpha(-1)$.

Con respecto a la determinación de la pendiente “ α ” en el gráfico anteriormente mencionado, es necesario puntualizar que ésta se calcula a través del proceso numérico de Mínimos Cuadrados:

$$\text{pendiente} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2},$$

donde x_i corresponde a $\ln(\omega_i)$ y la y_i corresponde a $\ln S(\omega_i)$. Como se observará en los subsecuentes resultados, (más adelante), existirá un rango limitado en donde la pendiente α , es aproximadamente constante. En consecuencia, según algunos autores, (Parker y Chua, 1987) sólo los datos correspondientes a dicho rango deben ser usados. Sin embargo, también se debe puntualizar que a la par con dicho criterio, se debe resaltar el hecho que por construcción al implementar NUMÉRICAMENTE una TF, para cada valor discreto de ω , ésta recibe contribuciones de cada instante t donde la señal ha sido muestreada. Es decir, la transformada de FOURIER no tiene

carácter local en el tiempo. Por ende, tampoco lo tiene en el espacio, si se implementa la TF de una serie espacial de datos. Esto es, por cada valor discreto de $k = 2\pi/\lambda$, esta recibe contribuciones de cada punto x , donde la señal ha sido muestreada. Por lo tanto, esta característica peculiar de la TF, la convierte en una herramienta que al explorar (utilizar) cada amplitud del conjunto de datos, entonces $\phi(k_i)$, la sintetiza como la respuesta correspondiente a la globalidad de las $\phi(x_j) \forall j = 1, 2, \dots, N$. En síntesis, la TF se amolda a la exploración de las diferentes escalas físicas involucradas en las λ_i de $k_j = 2\pi/\lambda_j$. Precisamente, esto es lo que se persigue en la determinación de una dimensión D_0 del conjunto de datos.

Desafortunadamente, no existe hasta el momento, una técnica robusta que nos permita detectar, a priori, el rango útil de ω , en forma automática.

Finalmente, puesto que los datos fueron adquiridos respecto a una profundidad L , (para cada formación geológica involucrada), a continuación se lista en forma pormenorizada la transformada de FOURIER en el espacio k (número de onda) que se usó en la presente investigación.

Definición 1:

$$X_k = \frac{1}{L} \int_0^L x(h) \cdot e^{(-2\pi i \cdot f_k \cdot h)} dh \quad (4-35)$$

donde:

X_k : Transformada de Fourier de $x(h)$,

L : Ventana espacial (Profundidad total del intervalo de la formación involucrada),

$x(h)$: Valores de rayos gamma según la profundidad (API),

h : Intervalo de muestreo en profundidad (1 pie),

f_k : Frecuencia espacial $\propto k/L$,

N : Número total de datos,

$$L \equiv N \cdot h .$$

La integral (4-35) puede escribirse en forma discreta como:

$$X_{(fk)} = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cdot \left[(\cos(2\pi \cdot f_k \cdot h_j)) - i (\sin(2\pi \cdot f_k \cdot h_j)) \right], \quad (4-36)$$

donde hemos usado la identidad de Euler:

$$e^{-i\theta} \equiv \cos(\theta) - i \sin(\theta) . \quad (4-37)$$

La ecuación (4-37) es válida para $\forall k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Luego de obtener la transformada de Fourier para cada una de las formaciones (Maraca, Lisure y Apón), se determina la Densidad Espectral de dicha Transformada:

Definición 2:

$$S_x(f_k) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \left| \overrightarrow{X(f_k)} \right|^2, \quad (4-38)$$

donde:

$S_x(f_k)$: Es la densidad espectral, la cual debe ser de la forma

$$S_x(f_k) \cong \frac{1}{k^\alpha}, \quad (4-39)$$

donde α se refiere a la pendiente del espectro de potencia en cuestión.

4.4.2._ MÉTODO DEL RADIO DE GIRO

El método en cuestión, adquiere su nombre de la conjunción de la teoría de probabilidad de variables aleatorias discretas y la mecánica elemental de masas puntuales.

En efecto, como se recordará, el valor esperado de una variable aleatoria DISCRETA X , está dada por

$$\langle x \rangle = E[X] \equiv \sum_i x_i w_i , \quad (4-40)$$

donde w_i denota la densidad de probabilidad discreta de que el evento o clase S , se encuentre dentro del espacio de resultados W o el espacio F de clases disjuntas. Por ende, el valor cuadrático esperado de X , se define como

$$\langle x^2 \rangle = E[X^2] \equiv \sum_i x_i^2 w_i , \quad (4-41)$$

En consecuencia, la VARIANZA de X , será

$$\sigma_x^2 \equiv \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 w_i , \quad (4-42a)$$

$$\sigma_x^2 \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 . \quad (4-42b)$$

Por otro lado, en mecánica elemental, dada una distribución de masas puntuales, w_i , situadas cada una a una distancia x_i de su centro de masa $\langle x \rangle$, entonces la cantidad

$$R_g^2 \equiv \sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 w_i, \quad (4-43)$$

recibe el nombre de radio de giro al cuadrado, del sistema de partículas $\{w_i\}$. Por tal razón, junto con Viseck (1989), definimos para distribuciones fractales afines, el “radio de giro R_g ” de una distribución de datos, en donde el total de éstos posee diferentes “nucleaciones”, por medio de la expresión,

$$R_g(N) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \right\}^{1/2}, \quad (4-44)$$

en donde, r_i denota la distancia de la i -ésima “partícula” (dato) que integra una “nucleación”, al centro de masa de ésta; N es el número total de “partículas” en dicha “nucleación”. En consecuencia, se postula la ley de potencia

$$R_g(N) \sim N^\nu \equiv N^{1/D}. \quad (4-45)$$

Por otro lado, $1/D$ se puede obtener a partir de la pendiente del gráfico: $\ln R_g(N)$ contra el $\ln(N)$. Esto es,

$$\ln R_g(N) = \nu \ln(N) = \frac{1}{D} \ln(N)$$

es decir,

$$D = \frac{1}{\nu} = \frac{\ln(N)}{\ln(R_g)} \quad (4-46)$$

donde ν es la pendiente del gráfico.

4.4.3._ VARIOGRAMA

Originalmente, Matheron (1971), desarrolló los métodos geoestadísticos, para resolver problemas asociados con el cálculo de “promedios ponderados” acerca del nivel de minerales, (contenidos en bloques geológicos), a partir de nuestras procedentes de perforaciones (i.e. boreholes). Tales métodos se crearon para estimar las incertidumbres locales e irregularidades en las variaciones de una “propiedad” o atributo geofísico que se mide en ciertos puntos maestres. En consecuencia, dichas medidas están íntimamente ligadas con el aspecto estocástico de las variaciones en cuestión. Por ende, en la literatura geoestadística, se le encuentra bajo la subdivisión de “Teoría de Variable Regionalizada”, (Burrough, 1989^c). Como tal, al hacer uso de los valores estadísticos “promedio” de las variaciones de alguna propiedad geofísica, calcula pesos óptimos para interpolar y/o “predecir” valores de la propiedad en cuestión. Por ende, es un método, de interpolación óptima.

Por otro lado, los métodos geoestadísticos, descansan sobre la hipótesis de trabajo de que cualquier variable “regionalizada”, es tan altamente irregular que su modelaje, no se puede plasmar a través de funciones “suaves”. Esto implica que una variable regionalizada, debe ser la síntesis de 3 componentes:

- i) Componente estructural asociada a un valor constante,
- ii) Componente aleatoria, asociada a una correlación espacial,
- iii) Componente aleatoria ruidosa, asociada a los residuos al calcular el término correspondiente al “error”.

En consecuencia, si x expresa la posición en 1, 2 o 3 dimensiones, entonces se postula que el valor de la variable regionalizada Z está dado por

$$Z(x) = m(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon'', \quad (4-47)$$

donde $m(x)$ es una función determinística que describe la componente estructural en x ; $\varepsilon'(x)$ es el término que denota la variación local estocástica, el cual depende de los residuos con referencia a $m(x)$; ε'' es un término independiente residual, que denota ruido Gaussiano, con promedio cero y varianza σ^2 .

Por ende, en el caso más simple (menos complejo), el valor promedio o valor esperado, (ver Capítulo III), de la diferencia de valores de Z en x y $x + h$ será nulo:

$$\forall \quad E[Z(x) - Z(x + h)] \equiv 0. \quad (4-48)$$

Además, se asume que la varianza de las diferencias depende, sólomente, de la distancia h entre los sitios o lugares donde se efectúan las mediciones,

$$\forall \quad E[(Z(x) - Z(x + h))^2] \equiv E[(\varepsilon'(x) - \varepsilon'(x + h))^2] = 2\gamma(h), \quad (4-49)$$

donde $\gamma(h)$ es una función denominada como SEMI-VARIANZA.

Estas dos condiciones, (4-48) y (4-49), denominadas estacionalidad de las diferencias y varianza de las diferencias, definen los requisitos para la hipótesis INTRÍNSECA de la variable regionalizada por estudiar. (Reacuérdesse que

$$E[x] = \sum_i x_i p_i, \quad (4-50)$$

donde p_i es la probabilidad de que la variable estocástica x , adquiriera el valor x_i , etc. es decir, $x = Z(x) - Z(x + h)$.

Esto significa que después de caracterizar los efectos estructurales, los cambios remanentes, son homogéneos en su variación, de manera que las diferencias entre los lugares de muestreo son funciones de la distancia h entre ellos. Tales diferencias se modelan por medio de variar la SEMIVARIANZA con la distancia, lo cual se conoce como “variograma”.

En consecuencia, para implementar un VARIOGRAMA, a partir de la señal espacialmente muestreada, se utiliza el estimador,

$$\hat{\gamma}_n(h) \equiv \hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2, \quad (4-51)$$

donde, n denota el Número de pares de puntos muestrales, separados por una distancia h , (también denominado desfase o retardo).

La forma típica de variación con distancia, para una dirección dada, de los variogramas correspondientes a funciones aleatorias estacionarias se muestra en la Figura IV-4.

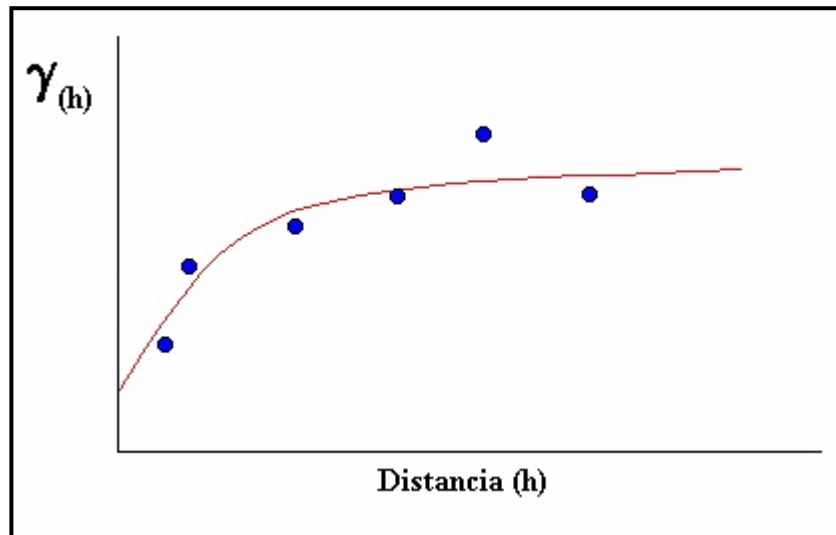


Figura IV-4: Forma de un Variograma Típico

Experimentalmente, se encuentra que cuando el log de la semivarianza se Gráfica contra el log de intervalo h , de muestreo, entonces la pendiente varía como $\alpha \equiv (4 - 2s)$.

Esto es,

$$2\gamma(h) = h^{4-2s}, \quad (4-52)$$

y por ende hay que hacer uso del método de mínimos cuadrados antes explicado, para determinar el valor de α y luego encontrar s ,

$$s = \frac{1}{2}[4 - \alpha], \quad (4-53)$$

como la estimación de D_0 a partir del variograma.

En lo que sigue, se dará una breve explicación de cómo determinar y graficar el variograma con datos igualmente espaciados, el cual posteriormente se utilizará para la determinación de la D_0 como ya se explicó anteriormente.

En este caso, se sabe, primeramente, exactamente la distancia (profundidad) que separa a los datos; basta entonces, dado un valor numérico h , tomar la suma de las diferencias al cuadrado, de los pares de puntos que se encuentran a la distancia h , en la dirección en la cual se calcula el variograma. Luego se divide por el doble del número de pares encontrados. El procedimiento se repite para distintos valores de h ,

cuyo valor depende del espaciamiento que tengan los datos. Por ejemplo, considérese que los datos de la Figura IV-5, representan valores de porosidad medida en un núcleo cada centímetro.

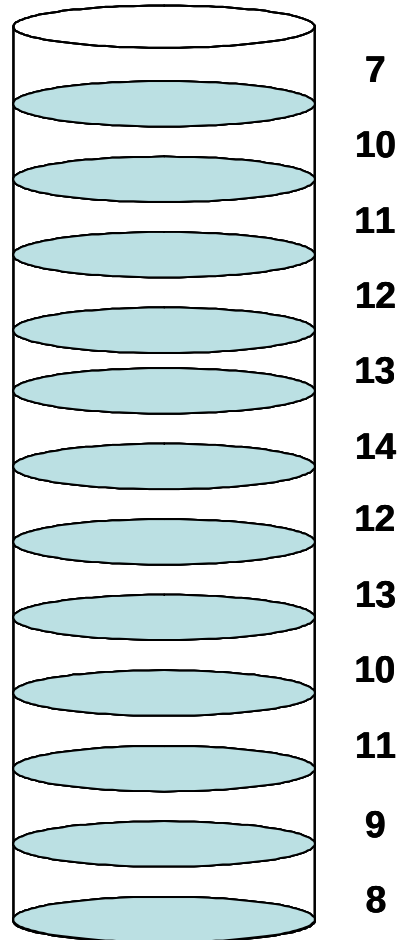


Figura IV-5: Datos de porosidad en un núcleo separados 1 centímetro.

A la distancia cero el variograma es igual a cero por definición; así $\gamma(0) = 0$. Usando la definición (4-51), se tiene que el valor del variograma a la distancia de un (1) centímetro se obtiene considerando todos los pares de puntos separados por 1

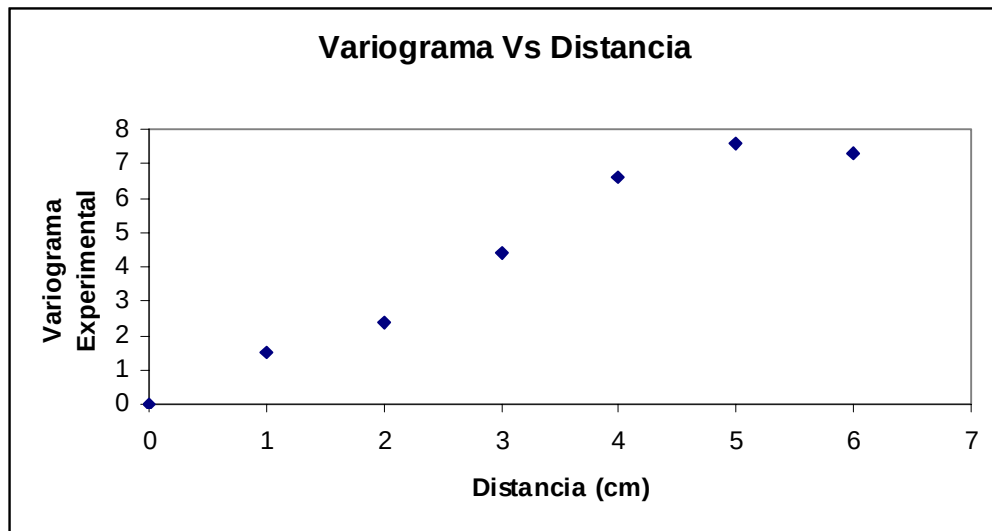
centímetro. Así, puesto que el número de pares de puntos separados 1 centímetro, es igual a 11 se tiene que:

$$\gamma^*(1) = \frac{1}{2 \cdot 11} \left((7-10)^2 + (10-11)^2 + (11-12)^2 + (12-13)^2 + (13-14)^2 + \dots + (9-8)^2 \right) = 1.5$$

Se procede de la misma manera, para el valor del variograma experimental a la distancia de 2 centímetros. Este se obtiene considerando los pares de puntos separados por 2 centímetros, en cuyo caso el número de pares es 10, entonces:

$$\gamma^*(2) = \frac{1}{2 \cdot 10} \left((7-11)^2 + (10-12)^2 + (11-13)^2 + (12-14)^2 + (13-12)^2 + \dots + (11-8)^2 \right) = 2.4$$

Análogamente, se van obteniendo los diversos valores del variograma a diversas distancias, con lo cual $\gamma^*(3) = 4.4$, $\gamma^*(4) = 6.62$, $\gamma^*(5) = 7.57$, $\gamma^*(6) = 7.33$. Al graficar los valores de h considerados contra los valores del variograma obtenido, se obtiene la gráfica IV-1.



Gráfica IV-1: Variograma experimental para los valores de la Figura IV-5

4.4.4._ MÉTODO DEL CONTEO DE CAJAS

Para comenzar, se podría afirmar que la técnica en cuestión ya ha sido explicada, reiteradamente. En efecto, cada vez que en una explicación teórica, se halla usado el término: “cubrimiento $C = \{A_i\}$, de un conjunto de puntos S ”, estamos creando una red irregular de conjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, cada uno con diámetro $|A_i| = \varepsilon_i \leq \delta (\forall i)$, de manera tal que el conjunto de datos S , sea un subconjunto propio de $C : S \subset C$. La razón de introducir un cubrimiento, de manera tal que su “UNIÓN”, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ contenga a S , obviamente, es la de ponderar, “en algún contexto”, cuan grande, es el conjunto S .

Por otro lado, ha quedado claro (según previos argumentos), que la “ponderación” de S se efectúa, (parcial o totalmente), a través de la dimensión de Capacidad D_0 , según S sea auto-similar o afín respectivamente. Por lo tanto es inmediato, que para obtener una relación entre el volumen de datos en S y los diámetros ε_i de cada “bola” A_i de C , dichas “esferas sólidas”, no se deberían solapar (interceptar) entre si. Sin embargo, con anterioridad se introdujo el concepto de ESPACIO DE FASE o de estados, como un espacio cartesiano, en donde el eje X está “abscisado” con las amplitudes A_i y el eje Y “ordenado” con las amplitudes A_{i+1} , $(\forall i = 1, 2, \dots)$, donde hemos asignado al “vector estado X ”, las coordenadas $(x_i, \dot{x}_i) \equiv (A_i, A_{i+1})$. Obviamente, resulta muy conveniente sumergir, (empotrar) el objeto fractal S , (línea continua pero no diferenciable, área o volumen altamente

irregular), en una retícula multidimensional de “bolas cuadradas”, de lado $\varepsilon_i \equiv \varepsilon \leq d$ $\forall i$ respectivamente. Preferentemente, para no abusar del lenguaje, se prefiere designar las “bolas” en cuestión, como “celdas”. Por ende, se cuentan las celdas $N(\varepsilon)$ que con diámetro ε , contienen elementos (o subconjuntos de elementos) que integran al objeto fractal S . De esta manera, si se denota por $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_1$, al diámetro de las celdas usadas, en el primer conteo, y $N(\varepsilon_1)$ el número de celdas pertinentes y luego usamos un $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ para obtener $N(\varepsilon_2)$ en el segundo conteo, y continuamos el proceso, un “gran número m de veces”, disponemos de dos vectores, cada uno de m -componentes. En consecuencia, si se Gráfica el $\ln N(\varepsilon_i)$ contra $\ln(\varepsilon_i)$, la pendiente de la mejor línea ajustada por el método de mínimos cuadrados será una buena aproximación, D_0^* , de D_0 . Sin embargo, a pesar de la simplicidad con que la metodología descrita concuerda con la noción matemática del “límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ ”, su implementación no resulta trivial e inmediata cuando se trabaja con un histograma, en donde el radio ε resulte ser el ancho de clase variable.

En tal sentido, se postula que

$$D'_0 \equiv \frac{\ln(N_n)}{\ln(2^n)}, \quad (4-54)$$

por cuanto si el volumen de datos es N_n , el máximo número de conjuntos que se pueden formar con éstos debe ser 2^n . Por lo tanto, si

$$N_n = 2^n, \\ \therefore n = \frac{\ln(N_n)}{\ln(2)}, \quad (4-55)$$

será la potencia, a la cual hay que elevar el número 2 para cubrir N_n datos, con cuadrados adyacentes, de lado $\varepsilon = 1/2^n$. En consecuencia, para cubrir un conjunto de amplitudes, donde $\Delta A = A_{\text{Max}} - A_{\text{Min}}$, con cuadrados de lado $\varepsilon = 1/2^n$, se necesitaran

$$N_n^* = \frac{\Delta A}{(1/2^n)}, \quad (4-56)$$

con lo cual al usar la ecuación (4-54), obtenemos la D'_0 correspondiente. Por otro lado, si D_0 se ha determinado, previamente por el método (confiable) del espectro de potencia, entonces por hipótesis, postulamos que

$$D_0 \equiv D'_0, \quad (4-57)$$

y por ende, al usar la definición canónica de dimensión de capacidad D_0 ,

$$\therefore D'_0 = \frac{\ln N(S, \varepsilon')}{\ln(1/\varepsilon')}, \quad (4-58)$$

con $N(S, \varepsilon') \equiv N_n$ original, se despeja ε' :

$$\varepsilon' \equiv \frac{1}{N(S, \varepsilon')^{1/D_0}}. \quad (4-59)$$

Luego, como el espacio de fase es “métrico cuadrático” con respecto a las abscisas de clase de un Histograma, entonces, se define,

$$\frac{\Delta A}{\varepsilon'} = k^2 : \text{Número de clases al cuadrado con el valor } \varepsilon', \quad (4-60)$$

y en consecuencia,

$$\therefore N_C = k = \sqrt{\frac{\Delta A}{\varepsilon'}}, \quad (4-61)$$

será el número de clases con ancho $1/\varepsilon'$ que cubren todos los datos contenidos en $\Delta A = A_{\text{Max}} - A_{\text{Min}}$. Las ecuaciones y pasos involucrados en las ecuaciones (4-54) - (4-61), evitan la búsqueda “aleatoria” del número de clases apropiadas.

4.5._ DIMENSIÓN GENERALIZADA Y MULTIFRACTALES

De la discusión anterior acerca de las metodologías para determinar D_0 , D_1 y D_2 , ha quedado claro que:

1. El método espectral es el más confiable (teóricamente) para determinar la estimación de D_0 .
2. Cada definición sucesiva de D_0 , D_1 y D_2 , es una generalización de la anterior.
3. El cómputo de una sólo dimensión no es suficiente para caracterizar la inhomogeneidad de distribuciones fractales del tipo auto-afin.

Por lo tanto, en el contexto de las secciones precedentes, es importante ver cómo las diferentes dimensiones hasta ahora consideradas, se pueden deducir a partir de una sola formula, (Goltz, 1997).

Primeramente, se debe puntualizar, que las dimensiones mencionadas:

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0, \quad (4-62)$$

constituyen en realidad, un pequeño subconjunto de la infinidad existente de dimensiones generalizadas, de la forma

$$D_q \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I(q, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right], \quad (4-63)$$

donde,

$$I(q, \varepsilon) \equiv \frac{1}{(1-q)} \ln \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(i, \varepsilon)^q \right), \quad (4-64)$$

también,

$$D_q = \frac{1}{(1-q)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4-63^*)$$

con $P(i, \varepsilon)^q$ **ú** q -ésima potencia de la probabilidad de que puntos del conjunto de datos S , se encuentren en la i -ésima “bola” (esfera o celda o clase) de radio ε perteneciente a un cubrimiento (mínimo) de S , en el espacio de fase o estados; $N(\varepsilon)$ es el número de “bolas” en dicho cubrimiento, (Grassberger, 1983; Hentschel y Procaccia, 1983; Renyi, 1970).

De la definición (4-63), se desprende que para $q \rightarrow 0$, da lugar a la dimensión D_0 ; cuando $q \rightarrow 1$ obtenemos la dimensión D_1 y correspondientemente, para $q \rightarrow 2$, resulta la D_2 .

Dado que la obtención de D_0 y D_2 son fácilmente verificables, sólo mostraremos el caso de cuando $q \rightarrow 1$, implica la consecución de la dimensión de información D_1 .

En efecto, al hacer $q = 1$ en (4-64), $I(0, \varepsilon) \rightarrow \infty$. Por lo tanto, se debe pasar al límite mediante los siguientes pasos:

(i) Primeramente, se acuerdo a definiciones previas, la sumatoria en (4-64) debe dar lugar a

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(i, \varepsilon) \equiv 1, \quad (4-65)$$

y por lo tanto,

$$\ln \sum_{i=1} P(i, \varepsilon)^q = \ln \left(\sum_{i=1} P(i, \varepsilon)^q - 1 + 1 \right) \cong \sum_{i=1} P(i, \varepsilon)^q - 1, \quad (4-66)$$

con el proviso de que $q \sim 1$.

(ii) Entonces hacemos $q = 1 + \delta q$, con lo cual

$$\backslash \quad P(i, \varepsilon)^q = P(i, \varepsilon)^{1+\delta q} \cong P(i, \varepsilon) P(i, \varepsilon)^{\delta q},$$

luego, dado que

$$\backslash \quad e^{\ln P(i, \varepsilon)} = P(i, \varepsilon), \quad \therefore \quad P(i, \varepsilon)^{\delta q} = e^{\delta q \ln P(i, \varepsilon)},$$

y en consecuencia,

$$P(i, \varepsilon)^q \approx P(i, \varepsilon) \cdot (1 + \delta q \ln P(i, \varepsilon) - \dots). \quad (4-67)$$

(iii) Por lo tanto, la (4-66) junto con (4-67) da lugar a,

$$\sum_i P(i, \varepsilon)^q - 1 \approx \sum_i P(i, \varepsilon) + \delta q \sum_i P(i, \varepsilon) \ln P(i, \varepsilon) - 1$$

$$\approx \delta q \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(i, \varepsilon) \ln P(i, \varepsilon). \quad (4-68)$$

(iv) De donde, se concluye que

$$\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(i, \varepsilon)^q \approx \delta q \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(i, \varepsilon) \ln P(i, \varepsilon), \quad (4-69)$$

cuando $q = 1 + \delta q$. Obviamente, $D_q \rightarrow D_1$ si $\delta q \rightarrow 0$, de manera que al observar la (4-63), (antes de efectuar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$), se debe dividir por $\delta q \ln(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} D_1 &\approx \frac{\delta q}{\delta q} \sum_i \frac{P(i, \varepsilon) \ln P(i, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}, \\ &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{P(i, \varepsilon) \ln P(i, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (4-70)$$

cuando $\delta q \rightarrow 0$. Sin embargo, preferimos escribir la (4-70) en una forma más pedestre,

$$D_1 \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{P_i \ln P_i}{\ln(\varepsilon_n)}, \quad (4-71)$$

para enfatizar el hecho, de que en la práctica, NO disponemos de una precisión infinita; más bien visualizamos el límite en la (4-63) como la sucesión de valores: $\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_{k^*}\}$, donde $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_k$, etc. y ε_{k^*} fija el diámetro mínimo de la “bola” (o ancho de clase) con que se pueda trabajar en la práctica. Esto es, si matemáticamente,

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{I(q, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right],$$

entonces en la práctica interpretamos

$$D_1^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_k^*} \left[\frac{I(q, \varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right], \quad (4-72)$$

como la estimación experimental de la dimensión de información, D_1 .

Por otro lado, como se recordará en teoría de información,

$$I(S, \varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(S, \varepsilon) \ln P_i(S, \varepsilon), \quad (4-73)$$

al igual que en Mecánica Estadística, la (4-73) se denomina “Entropía de Gibbs”, de manera que

$$e^{I(S, \varepsilon)} \cong \varepsilon^{-D_1}, \quad (4-74)$$

define la dimensión de Información D_1 .

Es conveniente puntualizar que de la (4-63) se desprende que para fractales afines (heterogéneos), D_∞ es el límite inferior de las dimensiones fractales, es decir, la dimensión fractal de la nucleación más intensa en los datos. Por el contrario, $D_{-\infty}$ caracteriza la nucleación menos intensa dentro de dicho conjunto; equivalentemente, la menor concentración de energía de una señal.

La otra propiedad de la D_q es que ella decrece, cuando q crece: $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ si $q_1 > q_2$, con lo cual se verifica la (4-62).

4.5.1._ ESPECTRO MULTIFRACTAL $f(\alpha)$ VERSUS α

En la literatura especializada, (mencionada en párrafo anterior), la expresión,

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(1-q)} \frac{\ln \left(\sum_i P(i, \varepsilon)^q \right)}{\ln(1/\varepsilon)} \right], \quad (4-75a)$$

o lo equivalentemente dada por Halsey et al (1986),

$$D_q = \frac{1}{(q-1)} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(\sum_i \{P_i(r)\}^q \right)}{\ln(r)} \right], \quad (4-75b)$$

se conoce como “notación de atractores extraños”, nombre que se acuñó porque, originalmente, se aplicó a las distribuciones de probabilidad de atractores extraños sobre el espacio de fase o estados. Sin embargo, existe un formalismo alterno, denominado el espectro multifractal $f(\alpha) - \alpha$, que se introduce a continuación.

Primeramente, es necesario visualizar al espacio de fase, $\bar{x} = (x_1, x_2) = (x_1, \dot{x}_1)$ particionado por una cuadrícula de cuadrados de lado ε , y al conjunto de datos $\{A_i\}$ como puntos distribuidos no homogéneamente, sobre dicho plano cartesiano, de manera que éstos se distribuyen de acuerdo a la abscisa A_i y ordenada A_{i+1} , " $i = 1, 2, \dots, N$. En segundo lugar, se debe asumir que la magnitud de ε es muy pequeña frente a la longitud arbitraria escogida como patrón de medida en el espacio de fase. En consecuencia, se puede asumir que el número de estos cubos bidimensionales (i.e. cuadrados) es muy grande. En tercer lugar, hay que asumir que la medida probabilística $\mu_i = \mu(c_i)$ de cada cuadrado c_i , se denota por $P_i = \mu(c_i)$, de manera tal que la medida del conjunto A de amplitudes $\{A_i\}$ cumple con la propiedad $\mu(A) = P(A) \equiv 1$. Luego a cada cuadrado, se le asocia la probabilidad

$$P_i \equiv \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (4-76)$$

en donde α_i será denominado “índice de singularidad”. Por lo tanto, si queremos contar el número de cuadrados para los cuales α_i está contenido en el pequeño rango entre α y $\Delta\alpha$, (dado que ε es muy pequeño), entonces remplazamos $\Delta\alpha$ por $d\alpha$ y por lo tanto, se asume que el número de éstos será

$$N(\alpha) = \varepsilon(\alpha)^{-f(\alpha)}, \quad (4-77)$$

o equivalentemente, de la forma

$$p(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha)} d\alpha; \quad (4-78)$$

aquí, $f(\alpha)$ denota la medida fractal del subconjunto de cuadrados que tienen probabilidad $P_i = \varepsilon^{\alpha_i}$.

En consecuencia, para relacionar la cantidad $f(\alpha)$, con la dimensión generalizada, observamos que

$$I(q, \varepsilon) = \sum_i P(i, \varepsilon)^q,$$

al usar la (4-76) y (4-77), se puede escribir como

$$I(q, \varepsilon) = \int d\alpha' p(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')} \varepsilon^{q\alpha'},$$

$$I(q, \varepsilon) = \int d\alpha' p(\alpha') \varepsilon^{\{[f(\alpha') - q\alpha'] \ln(1/\varepsilon)\}}. \quad (4-79)$$

Pero como estamos interesados en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $\ln(1/\varepsilon)$ será grande en magnitud. En tal caso, la principal contribución a la integral sobre α' proviene de la vecindad del máximo valor de la función $[f(\alpha') - \alpha'q]$. Asumiendo que $f(\alpha)$ es “suave”, el máximo de ésta está localizado en $\alpha' = \alpha(q)$, dado por

$$\frac{d}{d\alpha'} [f(\alpha') - \alpha'q] \Big|_{\alpha'=\alpha(q)} = 0,$$

siempre y cuando,

$$\frac{d^2}{d\alpha'^2} [f(\alpha') - \alpha'q] \Big|_{\alpha'=\alpha(q)} < 0,$$

es decir,

$$f'(\alpha(q)) = q \quad (4-80a)$$

$$f''(\alpha(q)) < 0. \quad (4-80b)$$

En consecuencia, regresamos a la integral,

$$I(q, \varepsilon) = \int d\alpha' p(\alpha') \varepsilon^{\{[f(\alpha') - q\alpha'] \ln(1/\varepsilon)\}},$$

y con la intención de facilitarle al lector el procedimiento computacional involucrado, la escribimos en la forma

$$I = \int d\alpha' p(\alpha') \Phi(\alpha'), \quad (4-81)$$

en donde hemos puesto

$$\Phi(\alpha') \equiv e^{\phi(\alpha')}, \quad (4-82a)$$

$$\phi(\alpha') \equiv [f(\alpha') - q\alpha'] c; \quad c = \ln(1/\varepsilon) \quad (4-82b)$$

De donde, para incorporar los resultados (4-80a, b) en dicha integral, debemos por lo tanto escribir a la función $\Phi(\alpha')$ como una serie de Taylor alrededor de $\alpha' = \alpha(q)$ en potencias de $\Delta\alpha$. Para tal fin, previamente rescribimos la función $\Phi(\alpha')$ como,

$$\Phi(\alpha') \equiv \Phi(\alpha' + \alpha(q) - \alpha(q))$$

$$\forall \quad \Phi(\alpha') \equiv \Phi(\alpha(q) + \Delta\alpha); \quad \Delta\alpha \equiv \alpha' - \alpha(q).$$

Entonces, según Taylor,

$$\Phi(\alpha(q) + \Delta\alpha) = \Phi(\alpha(q)) + \Phi'(\alpha(q))\Delta\alpha + \frac{1}{2}\Phi''(\alpha(q))\Delta^2 + \dots \quad (4-83)$$

Por ende, en atención a la (4-82a, b), escribimos $\phi(\alpha')$ correspondientemente según la transformación: $\alpha' \mapsto \alpha(q) + \Delta\alpha$. Esto es,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha') &\rightarrow \phi(\alpha(q) + \Delta\alpha), \\ &= c \{ f(\alpha(q) + \Delta\alpha) - q[\alpha(q) + \Delta\alpha] \} ; \end{aligned}$$

nuevamente desarrollando en Taylor, obtenemos explícitamente,

$$\phi(\alpha(q) + \Delta\alpha) = c \left\{ f[\alpha(q)] + f'[\alpha(q)]\Delta\alpha + \frac{1}{2}f''[\alpha(q)]\Delta^2 + \dots - q\alpha(q) - q\Delta\alpha \right\} ;$$

tomando en cuenta que $f'[\alpha(q)] = q$,

$$\phi(\alpha(q) + \Delta\alpha) \cong c \{ f(q) - q\alpha(q) \} + \frac{c}{2} f''(q)\Delta^2 \quad (4-84)$$

dado que $f[\alpha(q)] \equiv f(q)$, $f''[\alpha(q)] \equiv f''(q)$. Por lo tanto, al regresar a la integral (4-81) e insertar la (4-84), podemos escribirla en la forma,

$$I \cong e^{[f(q) - q\alpha(q)] \ln(1/\varepsilon)} \int d\alpha' p(\alpha') e^{\left\{ \frac{1}{2} f''[\alpha' - \alpha]^2 \ln(1/\varepsilon) \right\}}. \quad (4-85)$$

Sin embargo,

$$e^{\left\{\frac{1}{2}f''[\alpha'-\alpha]^2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}} = e^{\left\{-\frac{1}{2}f''[\alpha'-\alpha]^2\ln(\varepsilon)\right\}}, \quad (4-86)$$

$$= e^{\left\{\ln(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}f''[\alpha'-\alpha]^2}\right\}},$$

$$\backslash \equiv (\varepsilon)^{-\frac{1}{2}f''[\alpha'-\alpha]^2}, \quad (4-87)$$

con lo cual,

$$I \cong e^{[f(q)-q\alpha(q)]\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \int d\alpha' p(\alpha') \varepsilon^{-\frac{1}{2}f''[\alpha'-\alpha]^2},$$

es decir,

$$\backslash I \sim e^{[f(q)-q\alpha(q)]\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (4-88)$$

Ahora sustituyendo (4-88) en la definición (4-63^{*}), (omitiendo el límite $\varepsilon \rightarrow 0$),

$$D_q = \frac{1}{(1-q)} \left[\frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right], \quad (4-75a)$$

obtenemos la expresión,

$$D_q = \frac{1}{(1-q)} [f(\alpha(q)) - q\alpha(q)],$$

ó

$$D_q = \frac{1}{(q-1)} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))]. \quad (4-89)$$

De lo anterior se desprende que si previamente, se ha calculado D_q por medio de la ecuación (4-75a), [para diferentes valores de $q = 1, 2, 3, \dots$], entonces como D_q es CONOCIDA,

1°) Rescribimos la (4-72), en la forma

$$(q-1)D_q = q\alpha(q) - f(\alpha(q)),$$

y por conveniencia, bautizamos el miembro de la izquierda como

$$\tau(q) \equiv (q-1)D_q, \quad (4-90)$$

$$\vee \quad \tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)). \quad (4-91)$$

2°) Diferenciamos el miembro de la derecha en la (4-91) con respecto a q , es decir,

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = q \frac{d\alpha(q)}{dq} + \alpha(q) - \left(\frac{df}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha(q)}{dq}, \quad (4-92)$$

la cual todavía es una función de q , como variable independiente.

3°) Por lo tanto, si queremos obtener a “ f ” como función de $\alpha = \alpha(q)$, primero se debe usar la (4-90) en (4-92):

$$\vee \quad \frac{d\tau(q)}{dq} = \alpha(q), \quad (4-93)$$

con la cual al regresar a la (4-91), ésta última se puede escribir como

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \tau(q) \quad (4-94a)$$

$$f(\alpha(q)) = q\tau'(q) - \tau(q). \quad (4-94b)$$

4º) Desde este punto de vista, para cada valor de q , ($= 0, 1, 2, \dots$), se obtiene un $\tau'(q) = \alpha(q)$; correspondiente, la (4-94) produce un valor de $f(\alpha(q))$. Es decir, la (4-94b) es una ESPECIFICACIÓN PARAMÉTRICA de $f(\alpha)$.

En la literatura reciente, (Herrmann, 1997), se acostumbra a sintetizar dichos aspectos en la forma siguiente:

dado $\tau(q)$,

$$\vee \begin{cases} f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \\ \alpha = \frac{\partial}{\partial q} \tau(q) \end{cases}$$

y conversamente, dado $f(\alpha)$,

$$\vee \begin{cases} \tau(q) = q\alpha - f(\alpha) \\ q = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha) \end{cases}$$

y sólo se menciona que estas ecuaciones establecen un nexo – vía una transformada de Legendre – entre las dimensiones generalizadas D_q y el espectro de singularidad $f(\alpha)$.

4.5.2._ DETERMINACIÓN PRÁCTICA DE $\tau(q)$

Primeramente, a través de un histograma normalizado, se determinan las medidas probabilísticas mediante, una generación de mínimo número de clases. Es decir, si este último está dado por

$$k = 1.0 + 3.3 \log(N)$$

$$\mu_i = P_i = \frac{N_i}{N}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

En segundo lugar, se calcula la función generalizada (o función de Partición) $Z(q, \varepsilon)$ para varios exponentes:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_i P_i(\varepsilon)^q,$$

y se intenta determinar al exponente $\tau(q)$ usando,

$$Z(q, \varepsilon) \cong \varepsilon^{-\tau(q)},$$

por medio de graficar $\log Z$ versus $\log(\varepsilon)$, para obtener

$$\ln(Z) = -\tau(q) \ln(\varepsilon).$$

4.5.3._ HIPÓTESIS DE TRABAJO, MODELOS USADOS PARA EL ESPECTRO $f(\alpha)$

Según Goltz, (1977), el minerólogo De Wijs encontró en 1953 que la distribución de minerales en las rocas se podía aproximar, (bastante bien), por una distribución binomial. Esto es, si una roca contiene cierto mineral con masa total μ , entonces al dividirla en partes iguales, una de ellas contiene la fracción $p\mu$ y la otra $(1-p)\mu$. Dividiendo cada parte en dos volúmenes iguales NUEVAMENTE, la parte izquierda contiene $p^2\mu$ y la derecha contiene $p(1-p)\mu$, etc. En este modelo con $p \neq \frac{1}{2}$, se observa (experimentalmente) un multifractal

DETERMINISTICO. Si el proceso descrito se asume que toma lugar en un plano vertical y la masa total del mineral es la unidad, el resultado de sucesivas divisiones es una medida de probabilidad.

A tal efecto, según Takasu, (1990), el espectro $f(\alpha)$ Vs (α) de la redistribución de masa del mineral (sobre una línea) deberá estar dado por,

$$\alpha_q = -\frac{(p^q \log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p))}{(p^q + (1-p)^q)}, \quad (4-95a)$$

con

$$f(\alpha_q) = q\alpha_q + \log_2(p^q + (1-p)^q). \quad (4-95b)$$

Por otro lado, Falconer (1990), usando una distribución binomial, definida sobre un conjunto Triádico de Cantor, obtiene para el espectro $f(\alpha)$ Vs (α) las expresiones

$$\alpha(q) = -\frac{(p^q \ln(p) + (1-p)^2 \ln(1-p))}{(p^q + (1-p)^q \ln(3))}, \quad (4-96a)$$

con,

$$f(\alpha(q)) = \frac{\left[\ln(p^q + (1-p)^q) - \frac{q(p^q \ln(p) + (1-p)^q \ln(1-p))}{(p^q + (1-p)^q)} \right]}{\ln(3)}. \quad (4-96b)$$

Los anteriores modelos serán usados para confrontar los resultados que se obtengan de la presente investigación.

CAPÍTULO V

5.0._ ANÁLISIS Y RESULTADOS

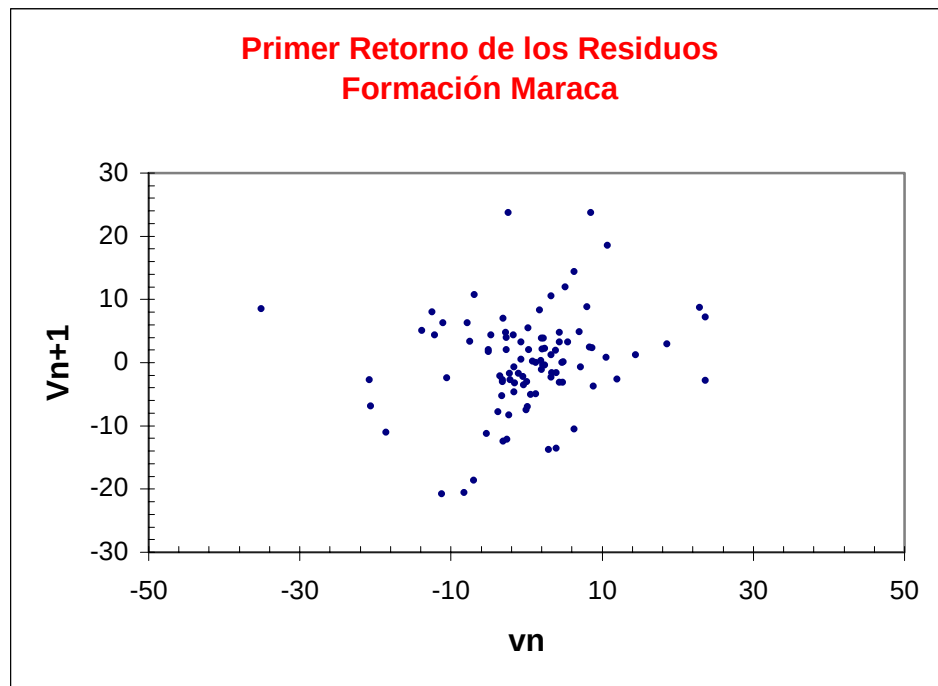
En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la metodología experimental planteada anteriormente y se expone el análisis realizado dichos los resultados.

5.1._ PRESENTACIÓN DE LOS PRIMEROS RETORNOS E HISTOGRAMAS CORRESPONDIENTES A LAS DIFERENCIAS DE AMPLITUDES EN LAS FORMACIONES INVOLUCRADAS

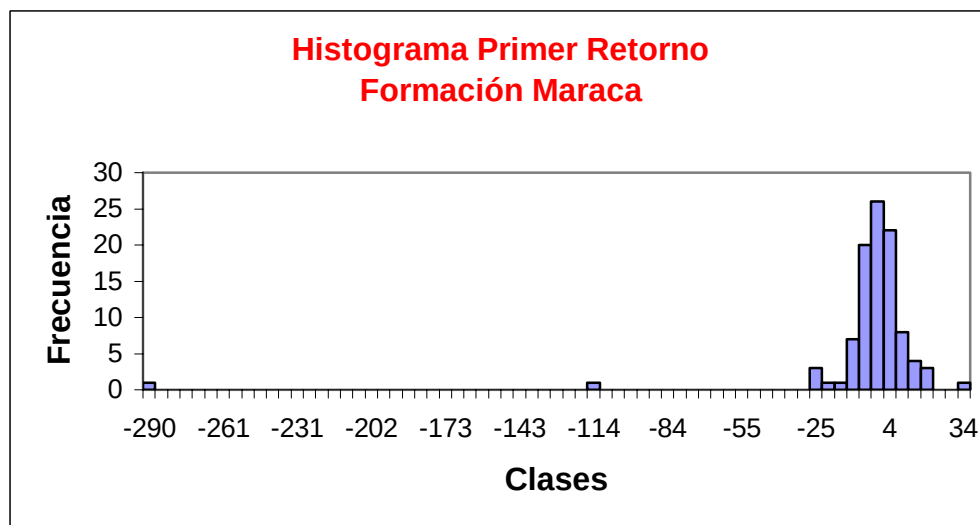
Es importante indicar que existen sistemas dinámicos, no lineales determinísticos, que pueden llegar a ser buenos imitadores de procesos aleatorios, por lo que nos vemos en la obligación de presentar algunas características de las fluctuaciones en las diferencias de amplitudes, correspondientes a las formaciones Maraca, Lisure y Apón. Se estimó pertinente mostrar para estas series de valores de rayos gama, el cálculo del primer retorno, histograma y el correlograma de las primeras diferencias de valores en dicho registro.

En las gráficas V-1, V-2 podemos ver el primer retorno y el histograma de estas primeras diferencias de la formación Maraca; en la gráfica V-1 se puede observar una nube de puntos bastante dispersa, pero con nucleación relativa en el intervalo $[-3, 3]$.

Al ver el histograma del primer retorno (ver gráfica V-2) de las primeras diferencias, se observa que las mayores frecuencias se encuentran, mayormente, en el intervalo $[-25, 18]$, presentándose la mayor de 26 para el intervalo de clases $[-3.249, 1.657]$. Además, tiene aspecto Gaussiano.



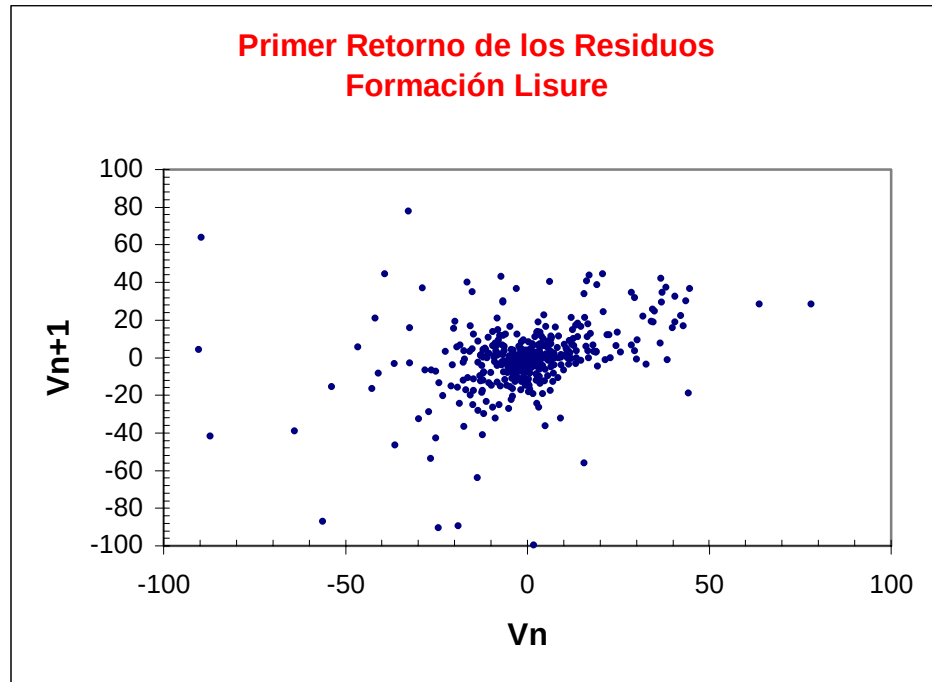
Gráfica V-1: Primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca



Gráfica V-2: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca

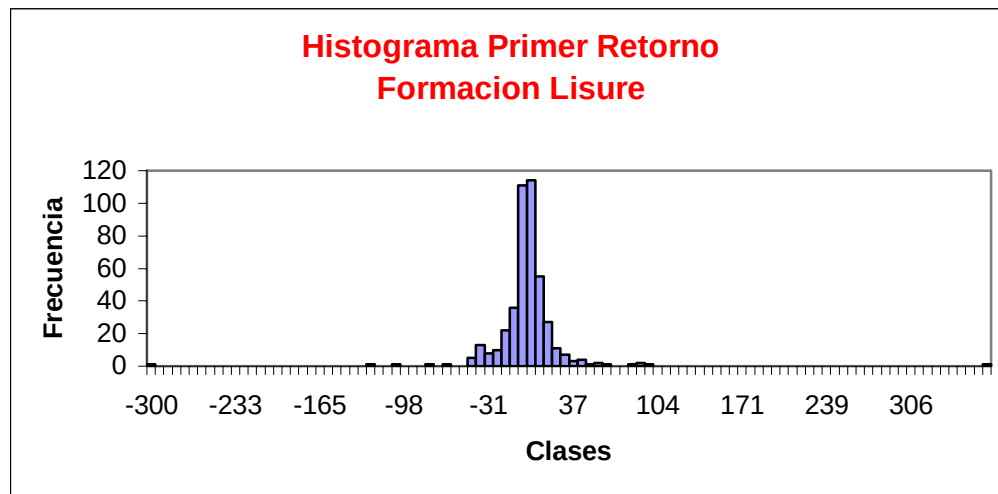
En las gráficas V-3 y V-4 podemos ver el primer retorno y el histograma de las primeras diferencias de la formación Lisure. Se puede observar que la

representación del primer retorno de esta formación es, al igual que en la formación Maraca, una nube de puntos, pero con la diferencia que ésta última presenta una nucleación fuerte aproximadamente en el intervalo $[-20, 20]$.



Gráfica V-3: Primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Lisure

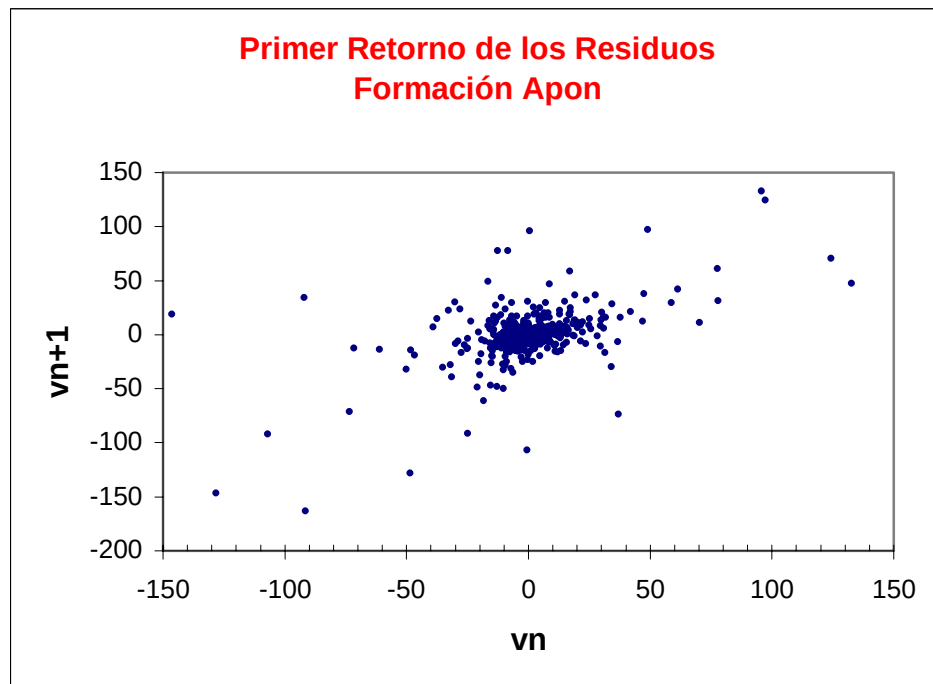
El histograma del primer retorno de la formación Lisure tiene un aspecto prácticamente gaussiano; los valores de las frecuencias se concentran aproximadamente en el intervalo $[-40, 30]$, con una frecuencia mayor de 114 para el intervalo de clases $[-0.2944, 6.438]$.



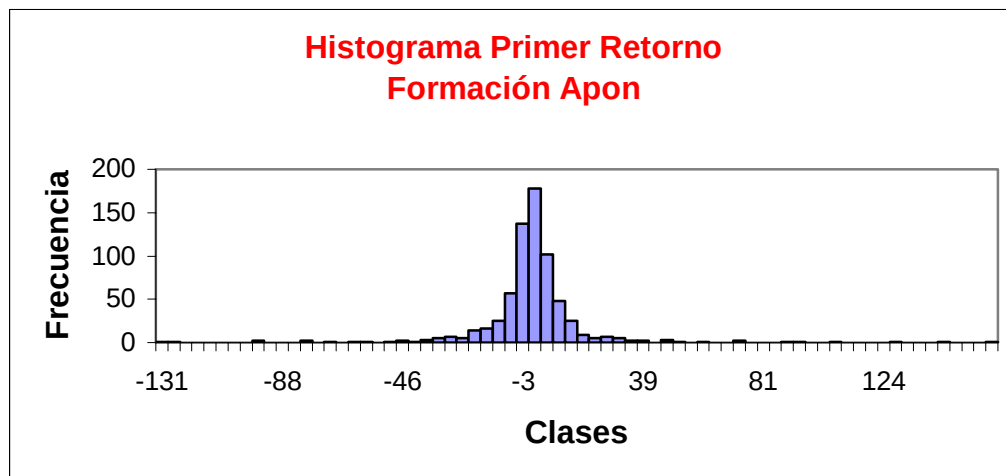
Gráfica V-4: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Lisure

En las gráficas V-5 y V-6 nuevamente, se puede observar el primer retorno y el histograma de las primeras diferencias de la formación Apón. La representación del primer retorno de esta formación es mucho más nucleada que la formación Lisure y por supuesto que Maraca. Ésta se presenta aproximadamente en el intervalo $[-20, 20]$, al igual que en la formación Lisure.

El histograma del primer retorno de la formación Apón es aproximadamente gaussiano, los valores de las frecuencias se concentran, mayormente, en el intervalo $[-20, 13]$, presentándose una mayor de 178 para el intervalo de clases $[-1.3204, 2.9185]$.



Gráfica V-5: Primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón



Gráfica V-6: Histograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón

5.1.1._ PRESENTACIÓN DE LOS CORRELOGRAMAS DE LAS FORMACIONES INVOLUCRADAS

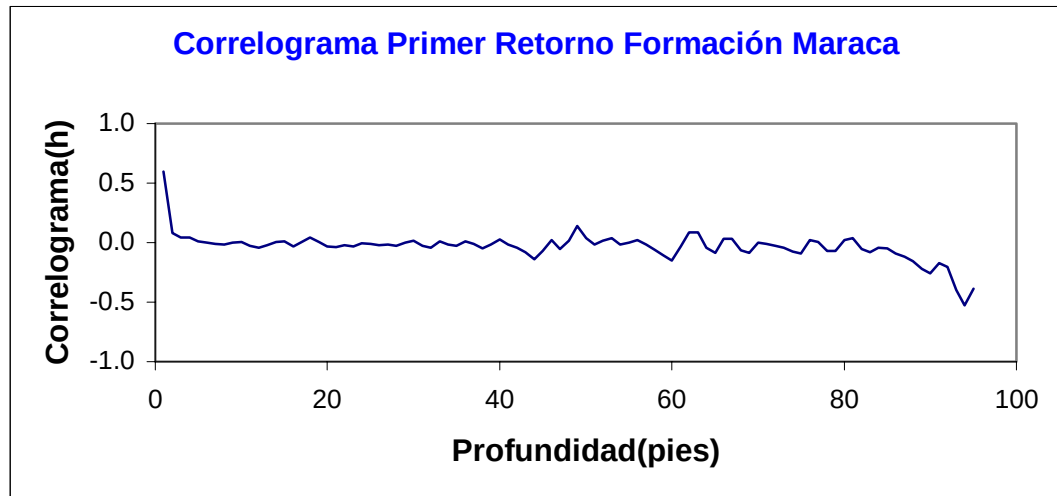
Para el cálculo del correlograma se utilizó la fórmula dada por Jiménez, Juan (1990):

$$C_m = \frac{1}{\rho^2} \sum_{n \geq 0} v_{n+m} v_n$$

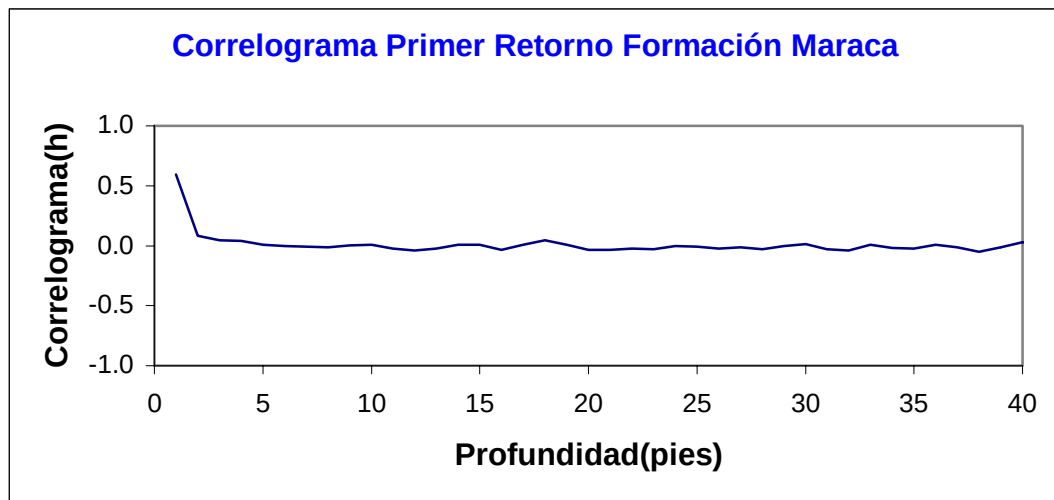
con

$$\rho^2 = \sum_{n \geq 0} v_n^2 \quad \ni v_n = A_{n+1} - A_n$$

En la gráfica V-7a se puede observar el correlograma correspondiente a la formación Maraca. Es evidente la pérdida de memoria del sistema, ya que los valores de la ordenada en el intervalo de profundidad $[2, 40]$ son prácticamente constantes. Este intervalo está mostrado en la gráfica V-7b.

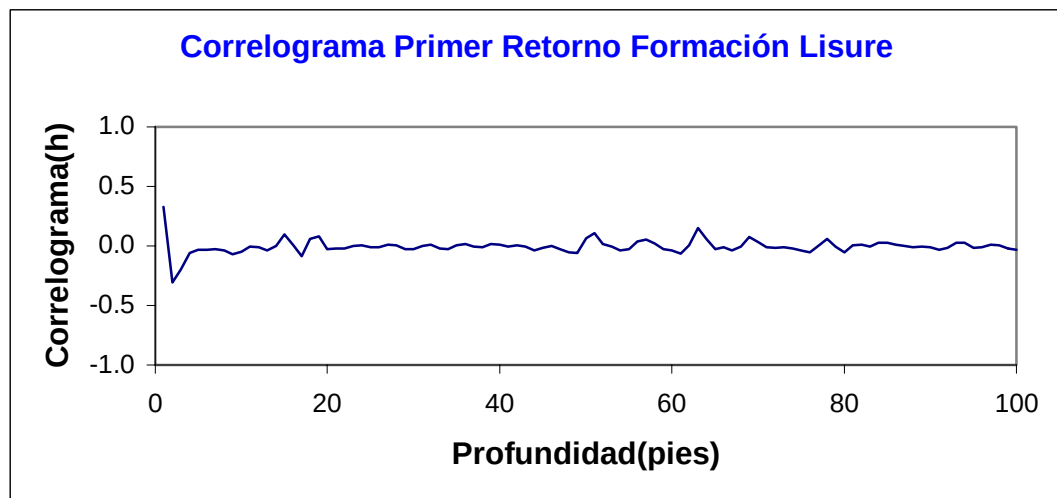


Gráfica V-7a: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca



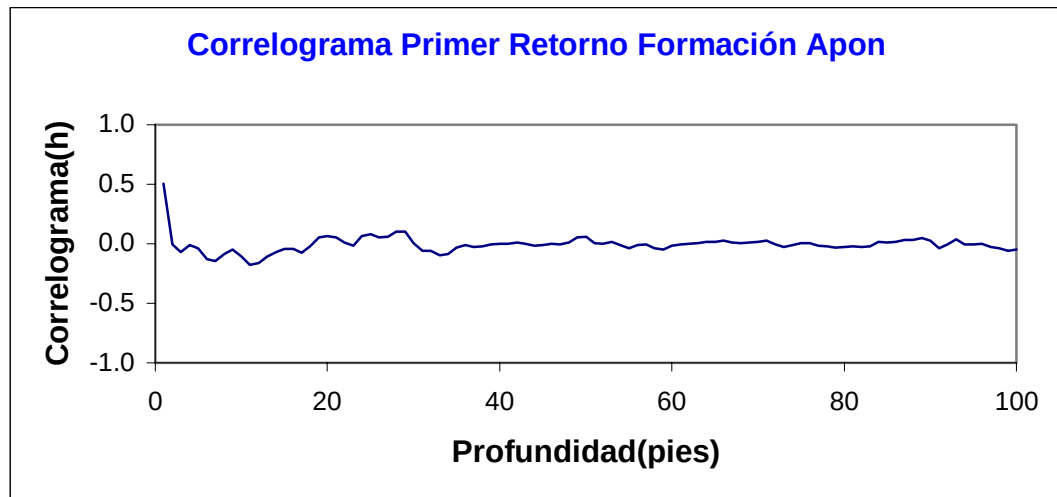
Gráfica V-7b: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Maraca

En la gráfica V-8 se puede observar el correlograma correspondiente a la formación Lisure. Es evidente nuevamente, la pérdida de memoria del sistema, ya que los valores de la ordenada en el intervalo de profundidad $[4, 15]$ son prácticamente constantes.



Gráfica V-8: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Lisure

Por ultimo en la gráfica V-9 se muestra el correlograma correspondiente a la formación Apón. Sin embargo, aquí el sistema no pierde memoria, por cuanto su ordenada presenta una fluctuación, (aparentemente creciente), en las profundidades correspondientes al intervalo $[3, 17]$. Por ende, se sospecha que el histograma, sea de carácter Poissoniano: $\sigma_r = \nu$.

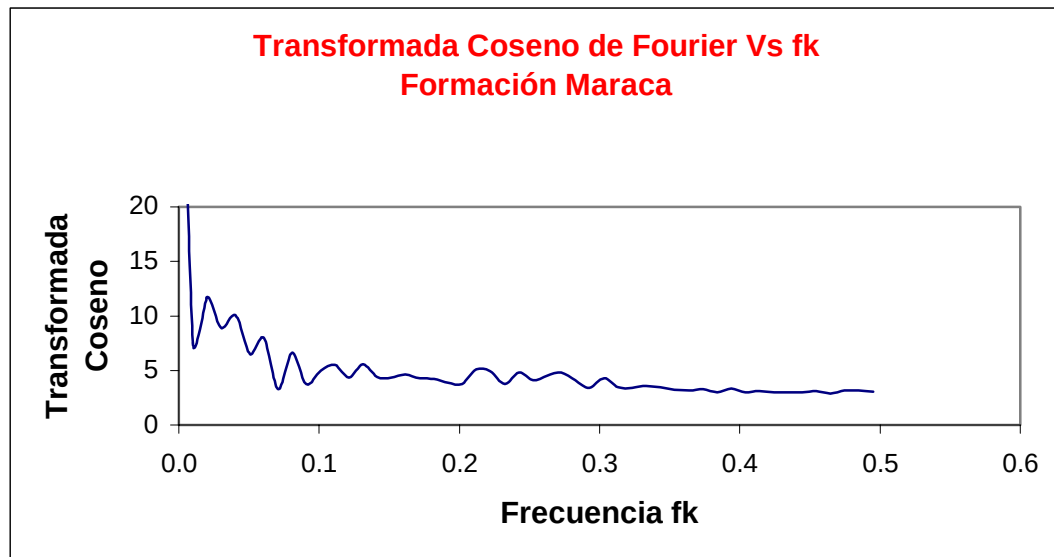


Gráfica V-9: Correlograma del primer retorno de las primeras diferencias, de la formación Apón

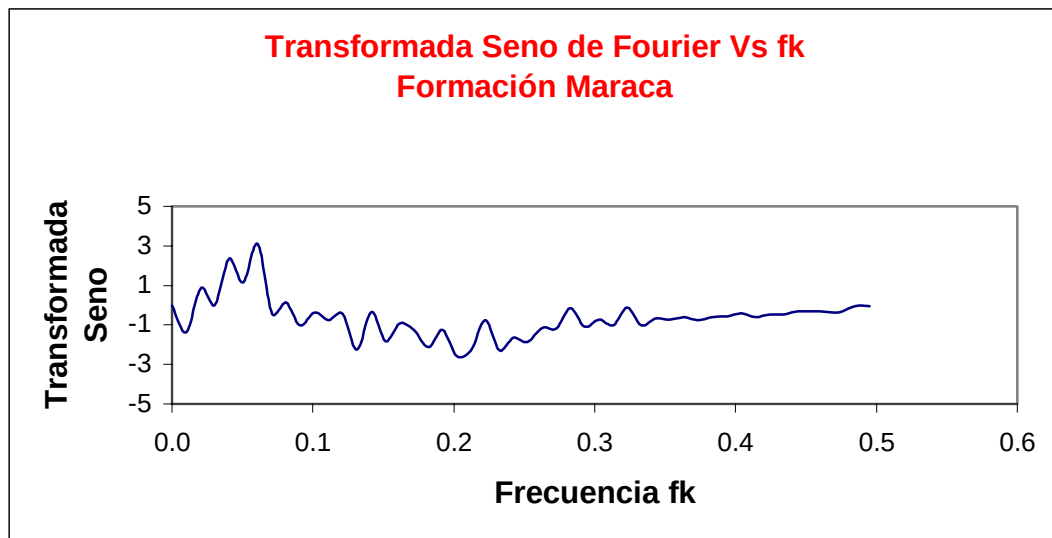
A continuación se presentan los resultados arrojados por los 4 métodos utilizados en la determinación de la dimensión fractal, en el pozo DM-159 del Campo Mara Oeste. Estos resultados corresponden a las tres formaciones: MARACA, LISURE Y APÓN, las cuales conforman el grupo Cogollo.

5.2._CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL UTILIZANDO EL ESPECTRO DE POTENCIA

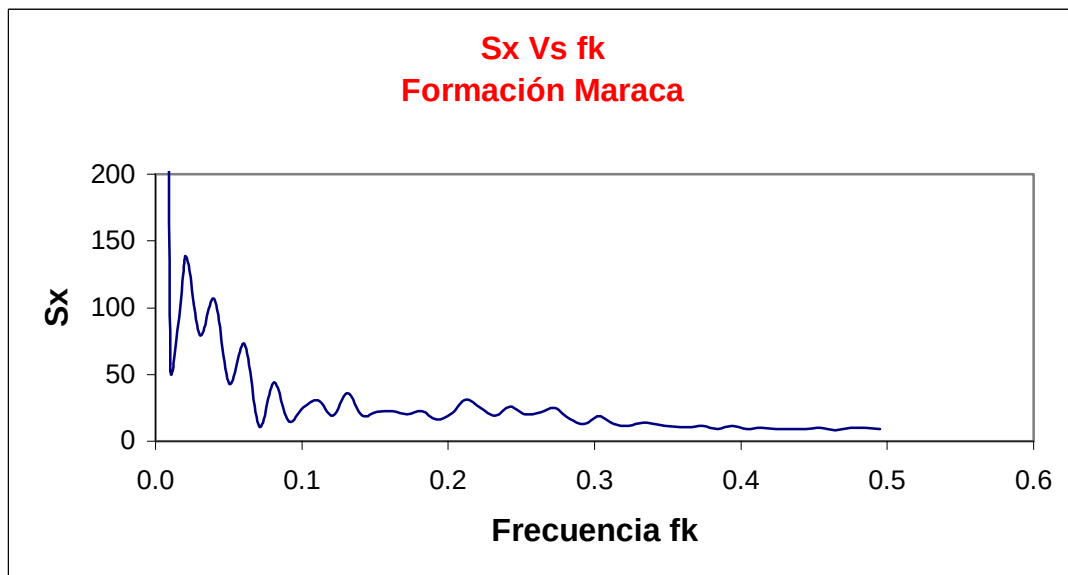
En las gráficas V-10 y V-11, se observan las componentes (Coseno, Seno) de la transformada de Fourier; respectivamente en la gráfica V-12 se presenta el Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Maraca.



Gráfica V-10: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Maraca

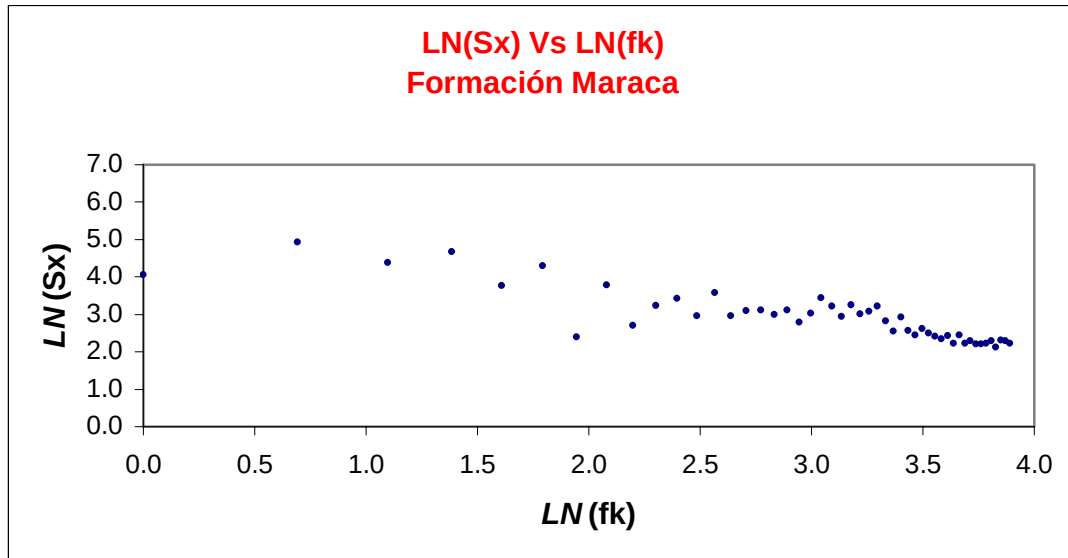


Gráfica V-11: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Maraca



Gráfica V-12: Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Maraca

En la gráfica V-13 se puede observar la nube de puntos correspondiente al logaritmo neperiano del espectro de potencia versus el logaritmo neperiano de la frecuencia espacial.



Gráfica V-13: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Maraca

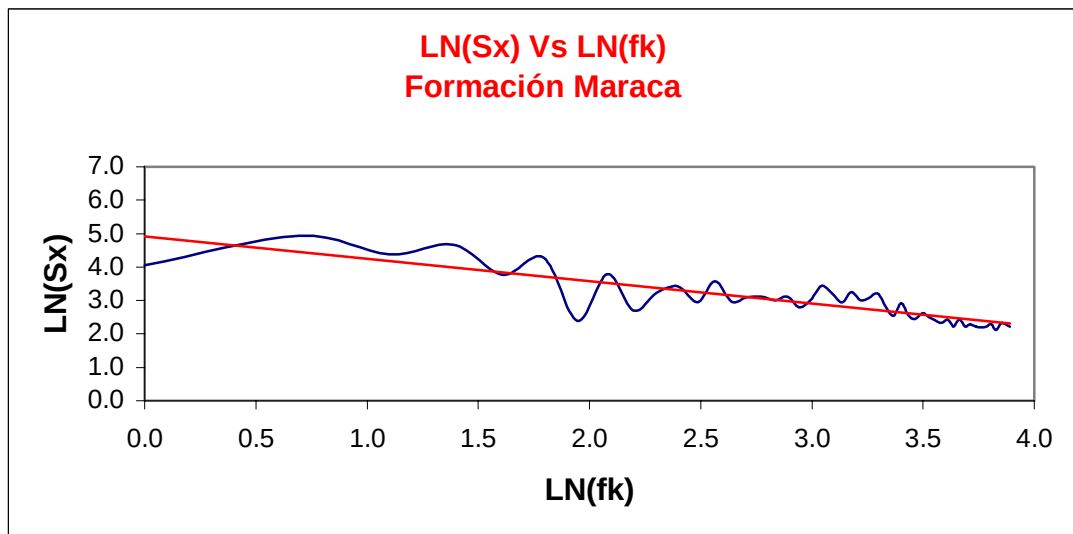
En la gráfica V-14 se puede observar el mejor ajuste de una línea recta a la nube de puntos.

Ajuste de la mejor recta de los puntos, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\backslash \quad y = -0.6666x + 4.9071$$

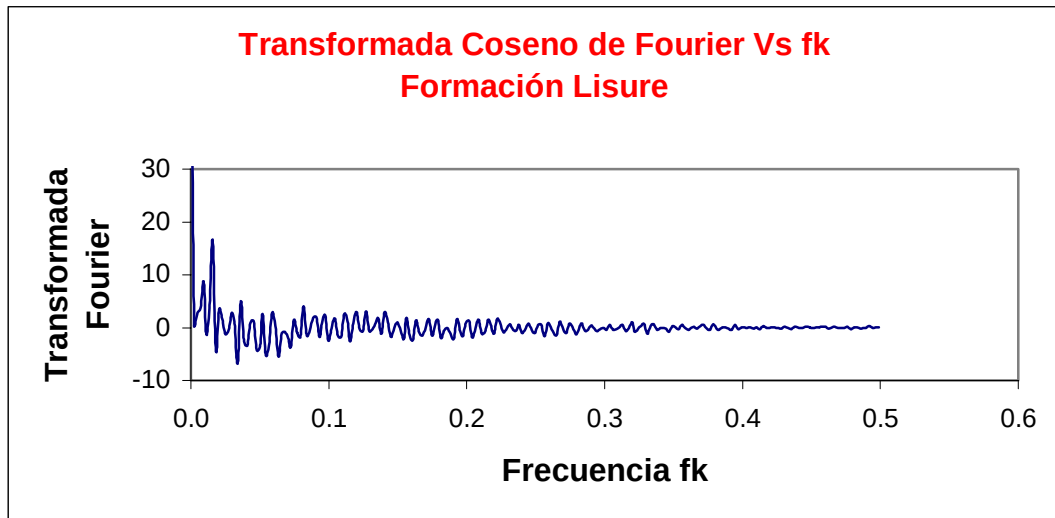
Como ya se vió en el capítulo IV, la dimensión fractal correspondiente a este ajuste viene siendo:

$$Dimensión = \frac{5 - 0,6666}{2}, \quad Dimensión = 2,1667$$

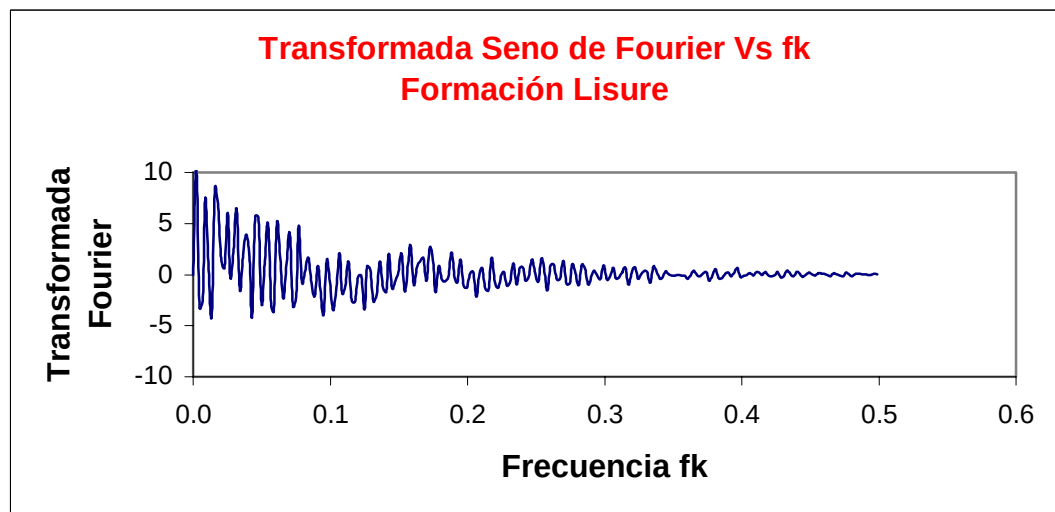


Gráfica V-14: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial, ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Maraca

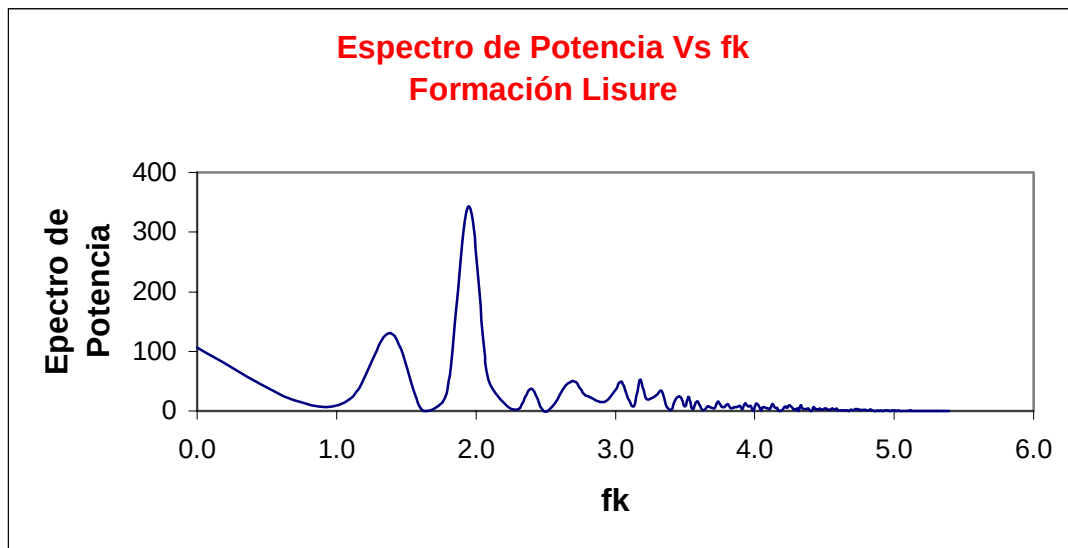
En las gráficas V-15 y V-16, se observan las componentes (Coseno, Seno) de la transformada de Fourier y en la V-17, el Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial respectivamente, correspondientes a la formación Lisure. Presentando una frecuencia dominante $\lambda = 0.5263$ pies equivalente a $\lambda = 16.0416$ cms.



Gráfica V-15: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Lisure

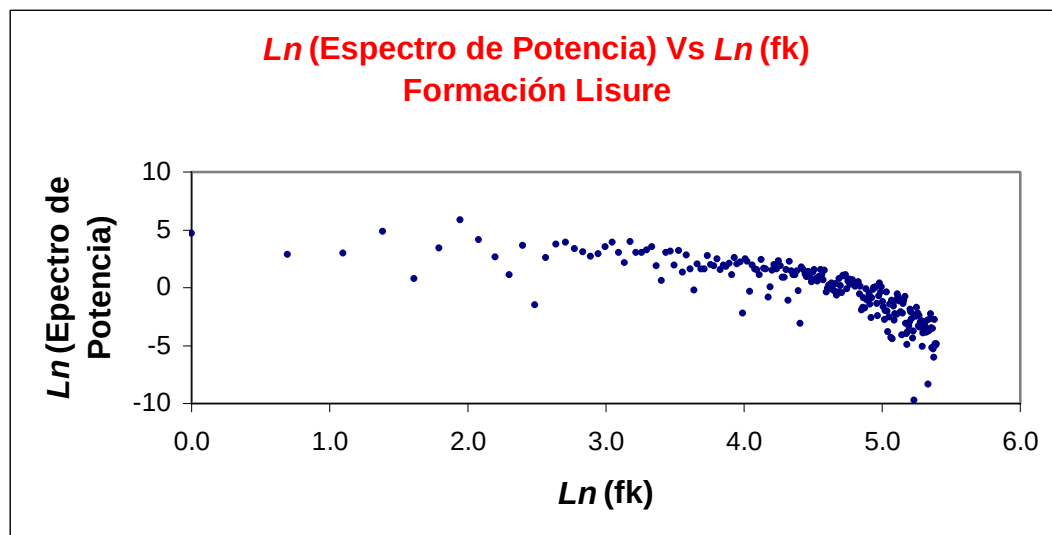


Gráfica V-16: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Lisure



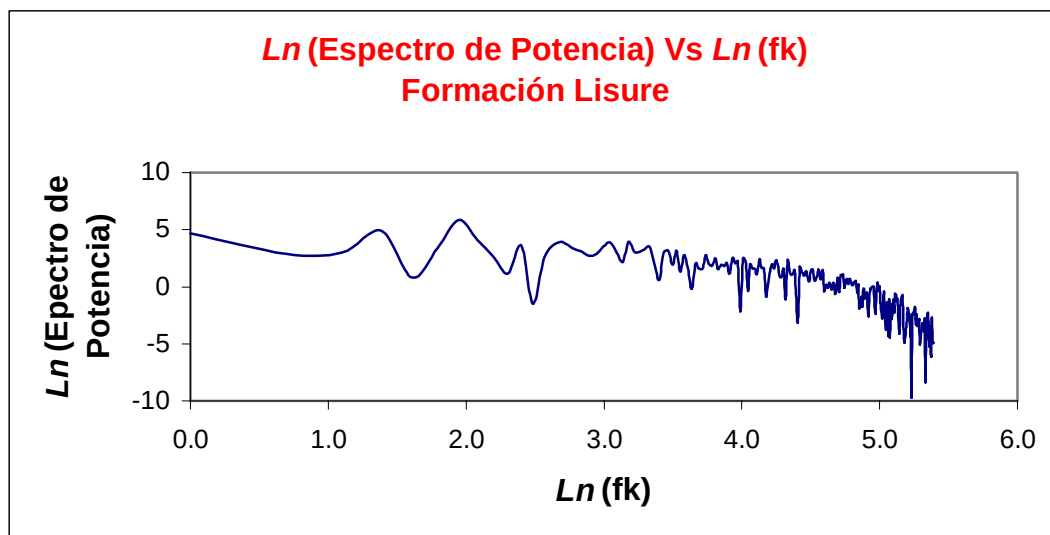
Gráfica V-17: *Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Lisure*

En la gráfica V-18 se puede observar la nube de puntos correspondiente al logaritmo neperiano del espectro de potencia versus el logaritmo neperiano de la frecuencia espacial. Es obvio que dicha nube es más saturada que la mostrada en la formación Maraca ya que la formación Lisure posee más datos.



Gráfica V-18: *Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Lisure*

En la gráfica V-19 se muestra la señal transformada mediante el logaritmo del espectro de potencia, contra el logaritmo de la frecuencia espacial. Se puede observar que a valores de logaritmos neperianos de frecuencias mayores de 4.0 no hay una homogeneidad en la señal transformada, lo cual dificulta ajustar la mejor recta sin ambigüedad alguna. Por los tanto se hace indispensable cortar la señal en el intervalo $[0, 4.0]$, usando a $\ln(k)=4$ como frecuencia (espacial) de corte. (lo cual denominaremos $\Omega \equiv \ln(k)$ ú frecuencia logarítmica de corte).



Gráfica V-19: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Lisure

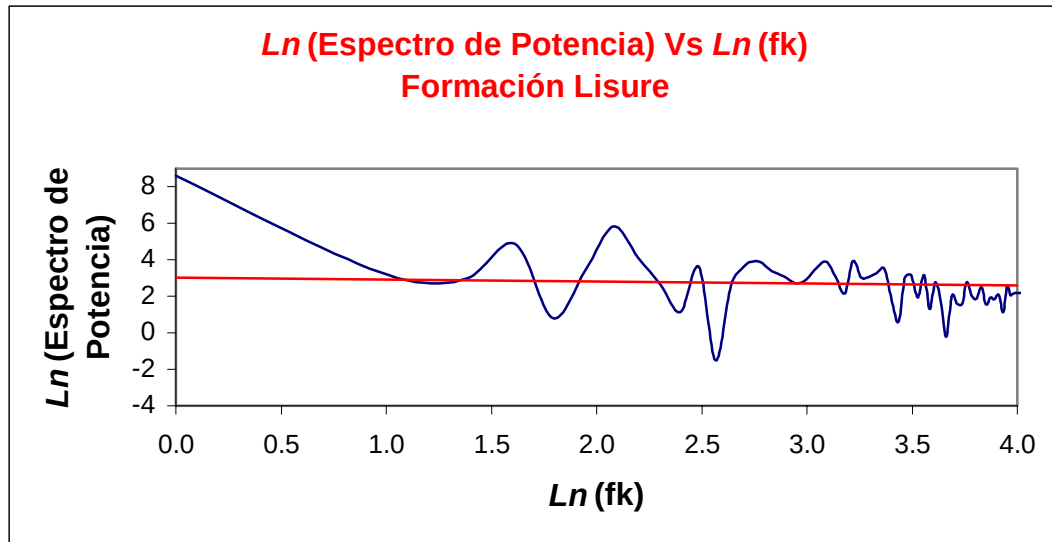
En la gráfica V-20 se puede observar claramente que sigue habiendo problemas para ajustar la mejor recta, ya que hay muchos saltos en los valores del logaritmo neperiano del espectro de potencia, pero para los fines que se persiguen, este ajuste es suficiente.

Ajuste de la mejor recta de los puntos, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\backslash \quad y = -0.1068x + 3.0203$$

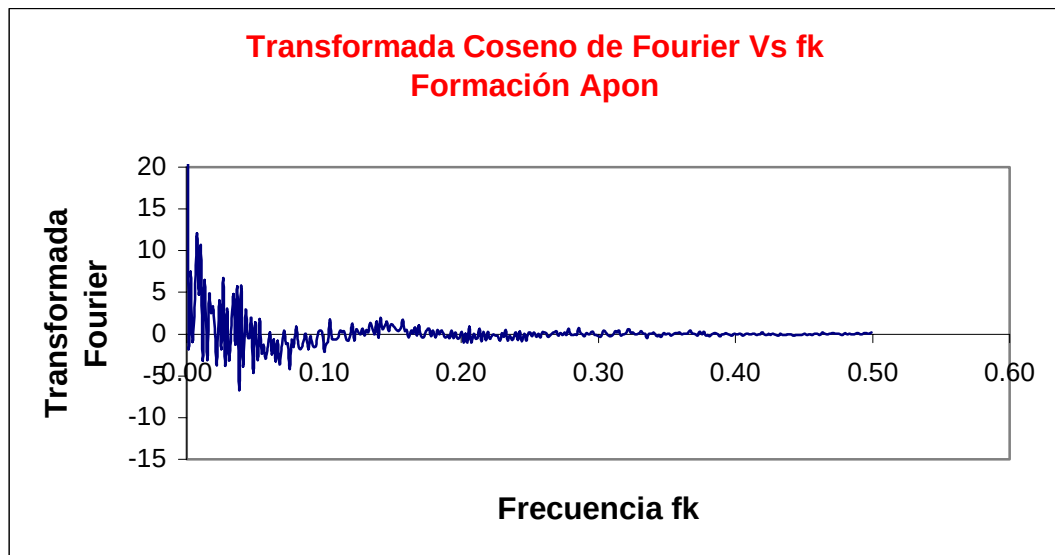
Por lo tanto, la dimensión fractal correspondiente a este ajuste viene siendo:

$$Dimensión = \frac{5 - 0,1068}{2}, Dimensión = 2,4466$$

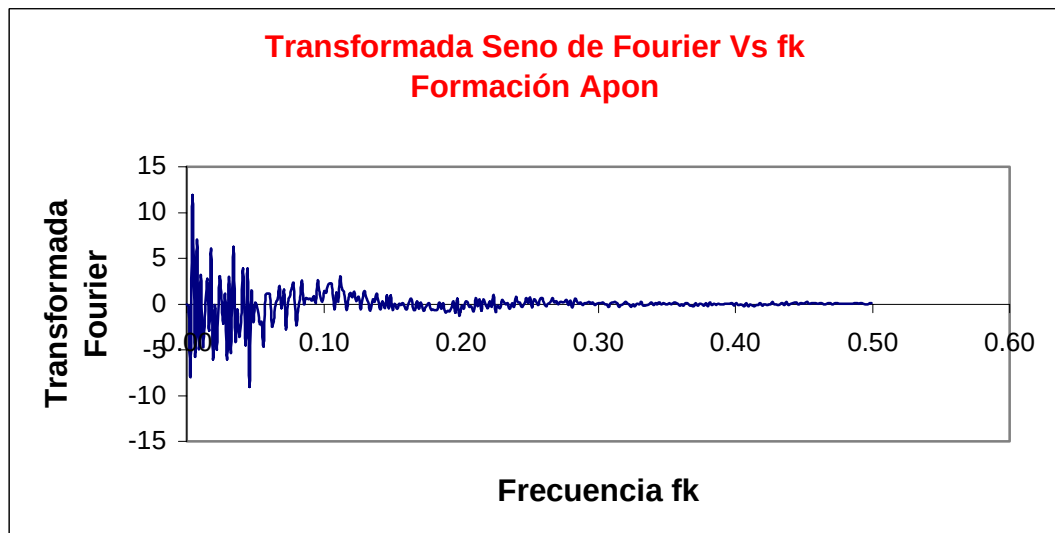


Gráfica V-20: Ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Lisure

En las gráficas V-21 y V-22, se observan nuevamente, las componentes (Coseno, Seno) de la transformada de Fourier, respectivamente. En la V-23, se muestra el Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Apón.

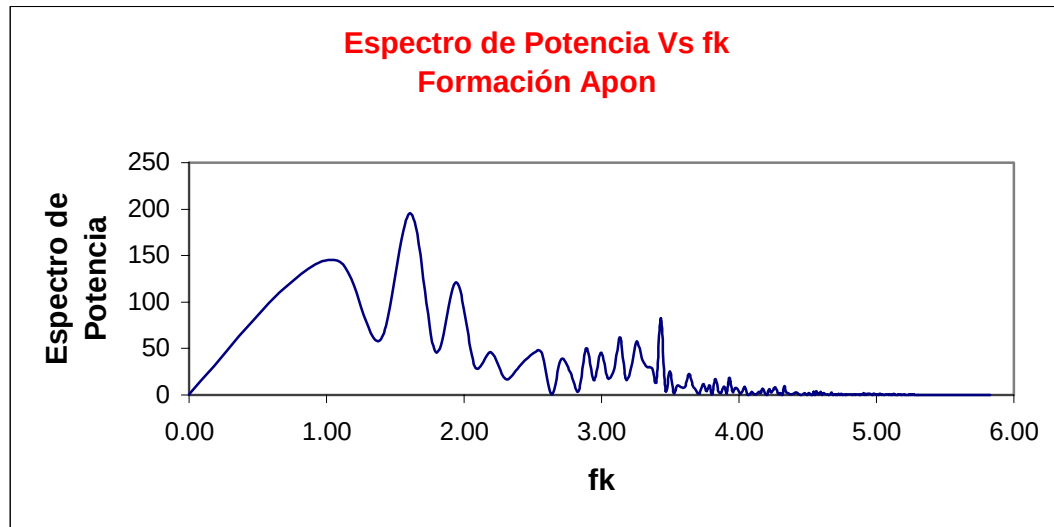


Gráfica V-21: Transformada Coseno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Apón



Gráfica V-22: Transformada Seno de Fourier Vs Frecuencia Espacial, correspondiente a la formación Apón

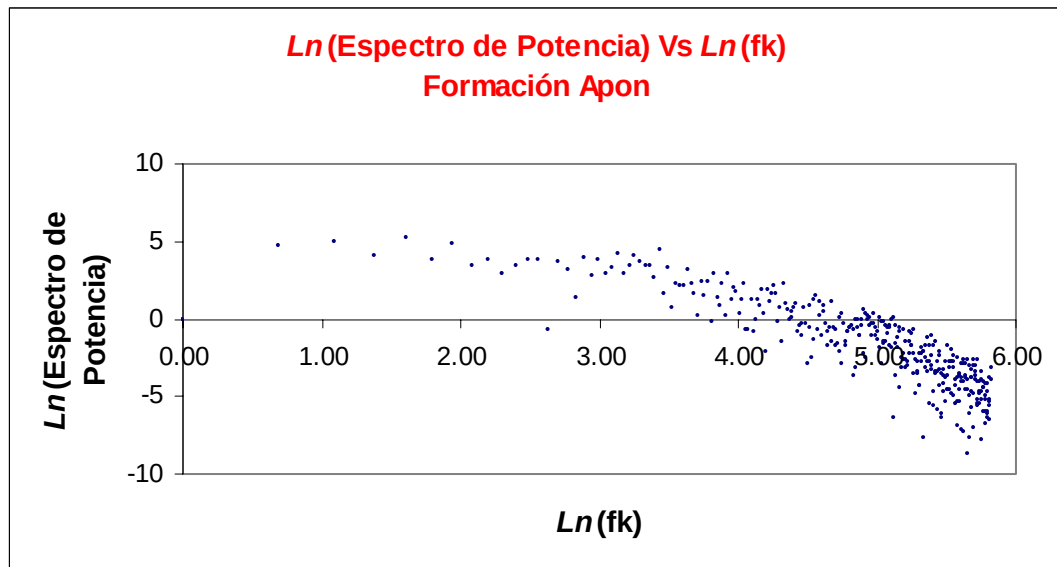
En la gráfica V-23 se puede observar que los valores espectro de potencia para frecuencias mayores de 4.0 es prácticamente cero. Presentando una frecuencia dominante $\lambda = 0.6250$ pies equivalente a $\lambda = 19.05$ cms.



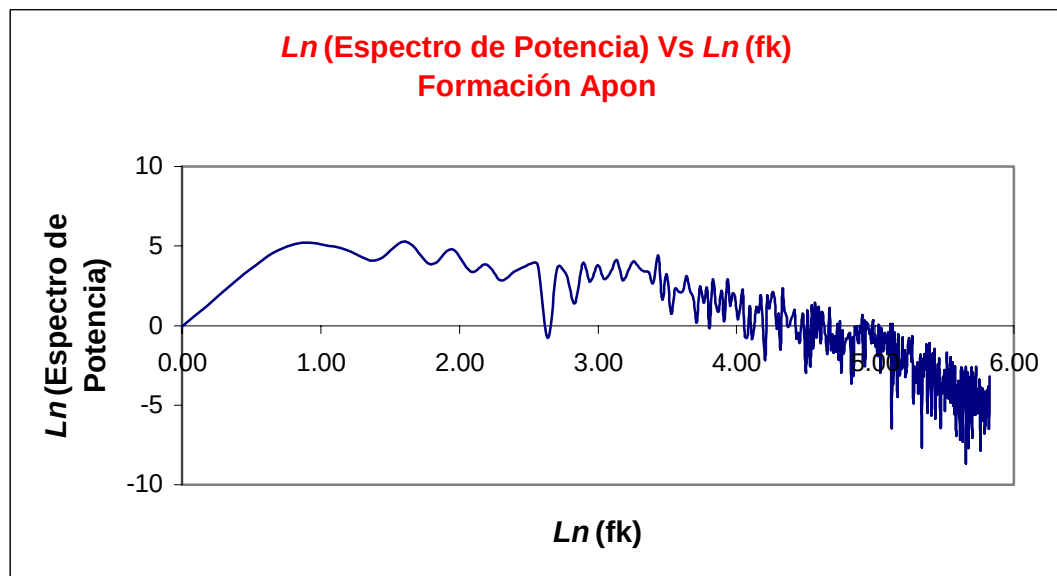
Gráfica V-23: *Espectro de Potencia Vs Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón*

En la gráfica V-24 se puede observar la nube de puntos correspondiente al logaritmo neperiano del espectro de potencia versus el logaritmo neperiano de la frecuencia espacial de la formación Apón. Nuevamente dicha nube es más saturada que la mostrada en la formación Maraca e incluso en Lisure.

En la gráfica V-25 se muestra la señal representada por la nube de puntos del logaritmo neperiano del espectro de potencia. Se puede observar, al igual que en la formación Lisure, que a valores de logaritmo neperiano de frecuencia mayores de 4.0 no hay una homogeneidad en la señal, lo cual dificulta ajustar la mejor recta sin ambigüedad alguna. Por los tanto se hace indispensable cortar la señal nuevamente en el intervalo $[0, 4.0]$, usando $\ln(k) = 4$ como frecuencia de corte.



Gráfica V-24: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón



Gráfica V-25: Logaritmo neperiano del Espectro de Potencia Vs logaritmo neperiano de la Frecuencia Espacial correspondiente a la formación Apón

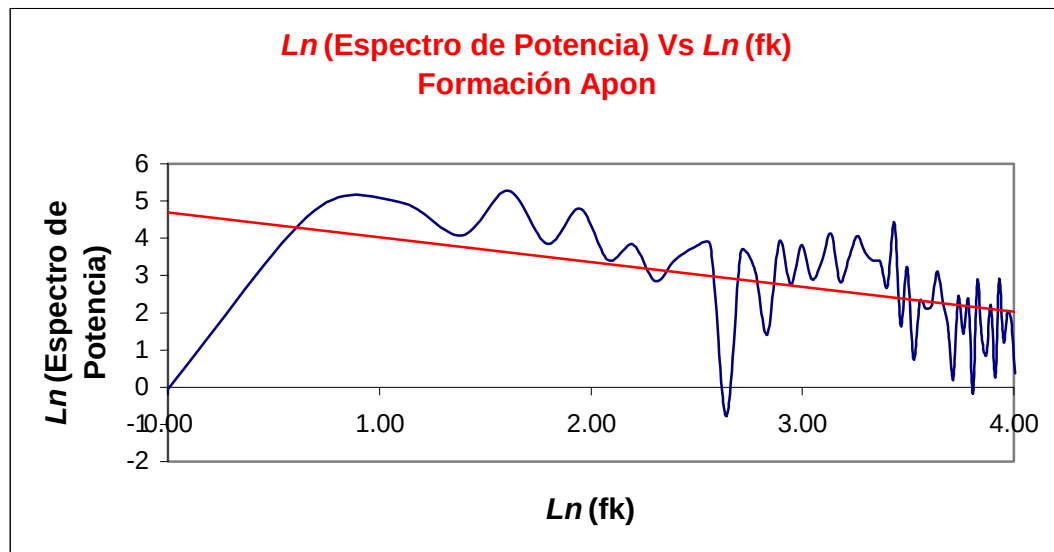
En la gráfica V-26 se puede observar que sigue habiendo problemas para ajustar la mejor recta, ya que hay muchos saltos en los valores del logaritmo neperiano del espectro de potencia.

Ajuste de la mejor recta de los puntos, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$y = -0.6648x + 4.6935$$

Por lo tanto, la dimensión fractal correspondiente a este ajuste viene siendo:

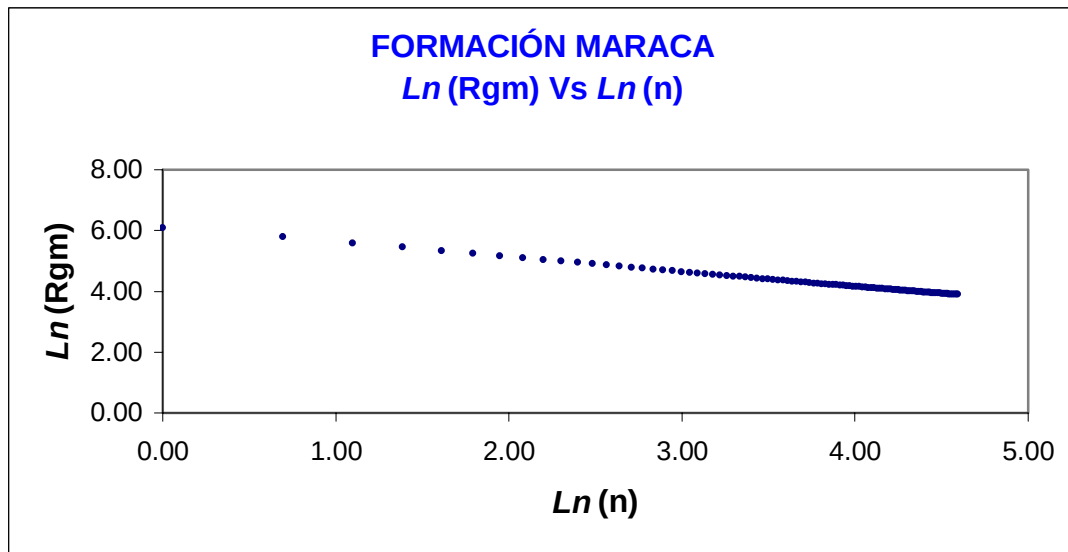
$$Dimensión = \frac{5 - 0,6648}{2}, Dimensión = 2,1676$$



Gráfica V-26: Ajuste de la mejor recta a la nube de puntos correspondiente a la formación Apón

5.3._CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL UTILIZANDO EL RADIO DE GIRO DE GIRO

En la gráfica V-27 se muestra la representación del logaritmo neperiano del radio de giro R_{gm} Vs el logaritmo neperiano del número de pasos n , correspondiente a la formación Maraca.



Gráfica V-27: Logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Maraca

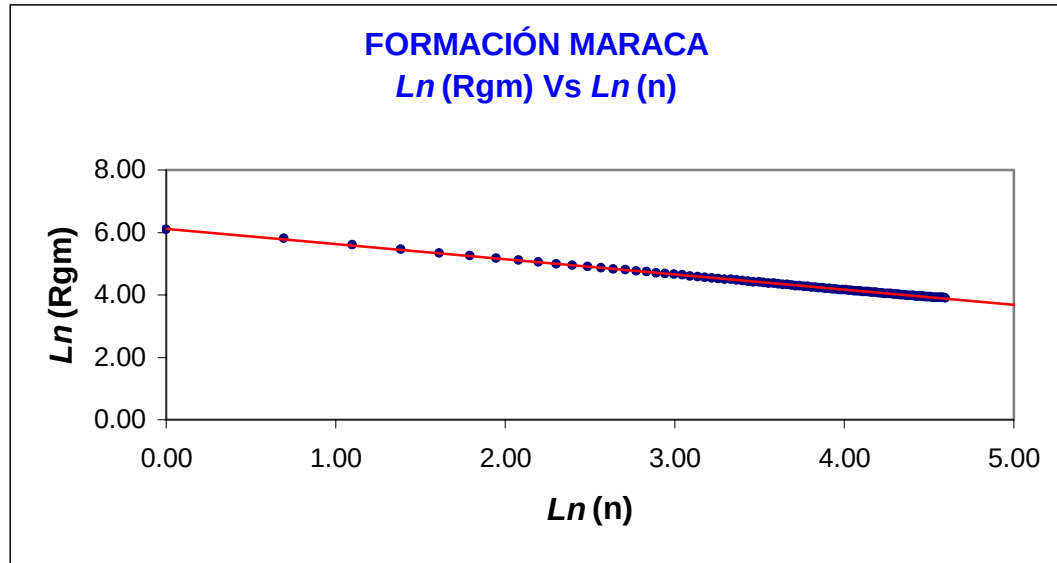
En la gráfica V-28 se muestra el ajuste a la mejor recta, el cual nos servirá para el cálculo de la dimensión:

Ajuste de la mejor recta de los puntos, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$y = -0.485x + 6.1064$$

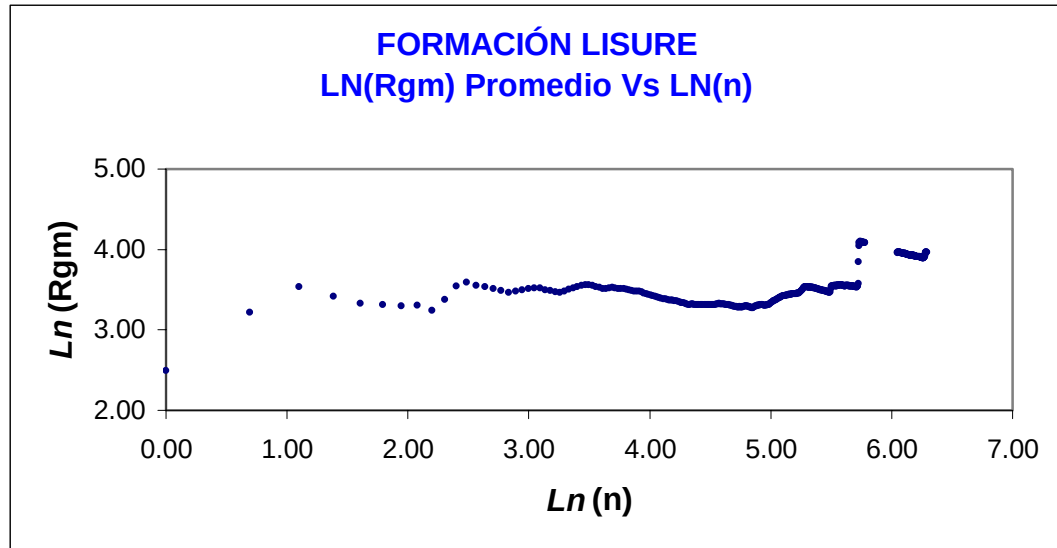
Por la definición dada en el capítulo IV, la dimensión usando el radio de giro es:

$$\text{Dimensión} = \frac{1}{0.485} = 2.0618$$



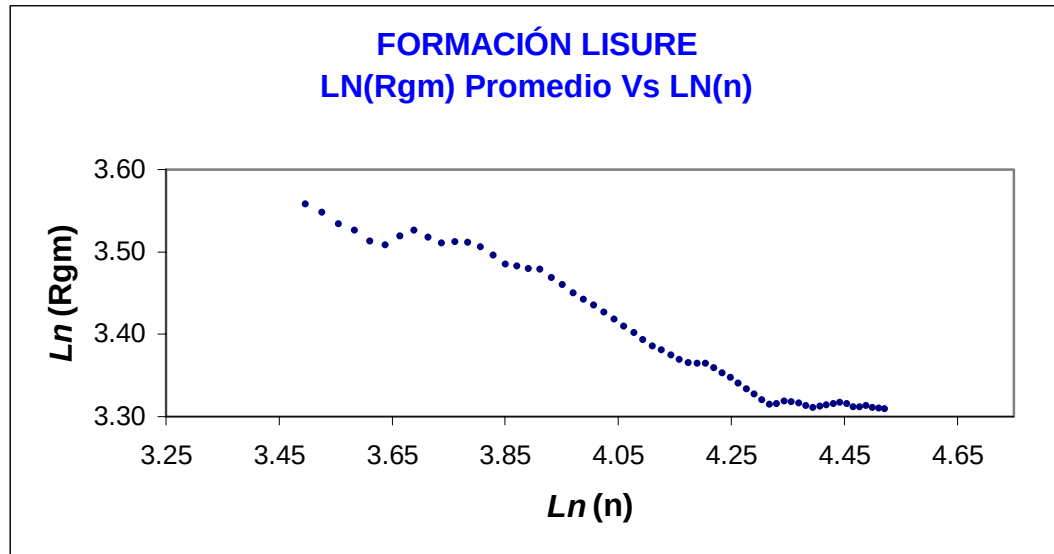
Gráfica V-28: Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Maraca

En la gráfica V-29 se muestra la representación del logaritmo neperiano del radio de giro R_{gm} Vs el logaritmo neperiano del número de pasos n , correspondiente a la formación Lisure.



Gráfica V-29: Logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Lisure

Se puede observar en la gráfica V-29, lo dificultoso que se hace ajustar una recta ya que hay presencia de lo que llamamos “crossover” (por la izquierda y derecha de la curva), por lo tanto es conveniente utilizar sólo el intervalo $[3.50, 4.50]$ para así evitar estos “crossover” como se muestra en la gráfica V-30.



Gráfica V-30: Intervalo del logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , valido para la determinación de la dimensión fractal, de la formación Lisure

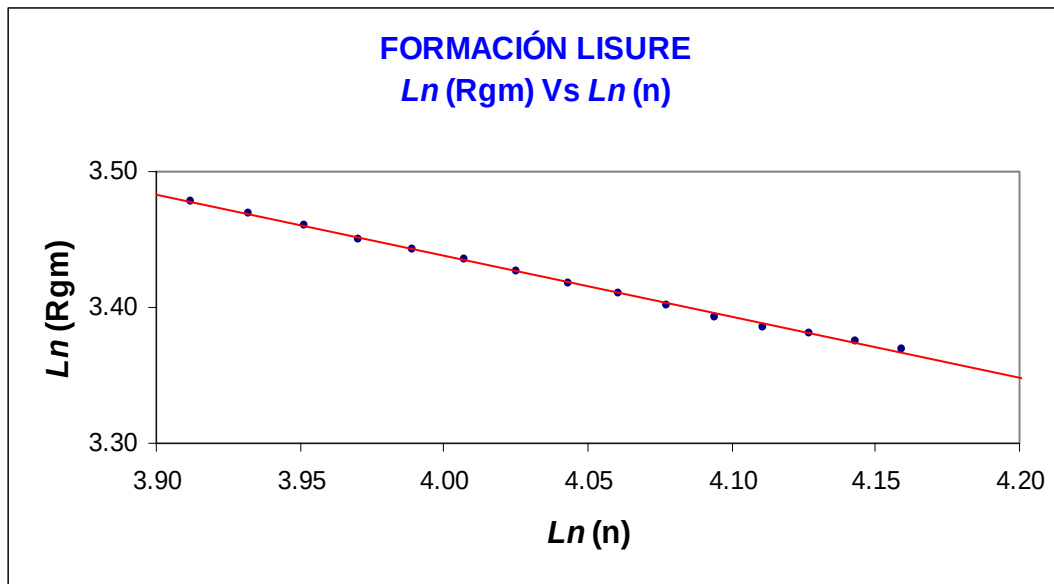
En la gráfica V-31 se puede observar el mejor ajuste de una línea recta, la cual permite por este método determinar la dimensión fractal.

Ajuste de la mejor recta de los puntos, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\backslash \quad y = -0.4491x + 5.2343$$

Nuevamente usando la definición dada en el capítulo IV, la dimensión usando el radio de giro es:

$$\text{Dimensión} = \frac{1}{0.4491} = 2.2266$$



Gráfica V-31: *Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n, de la formación Lisure*

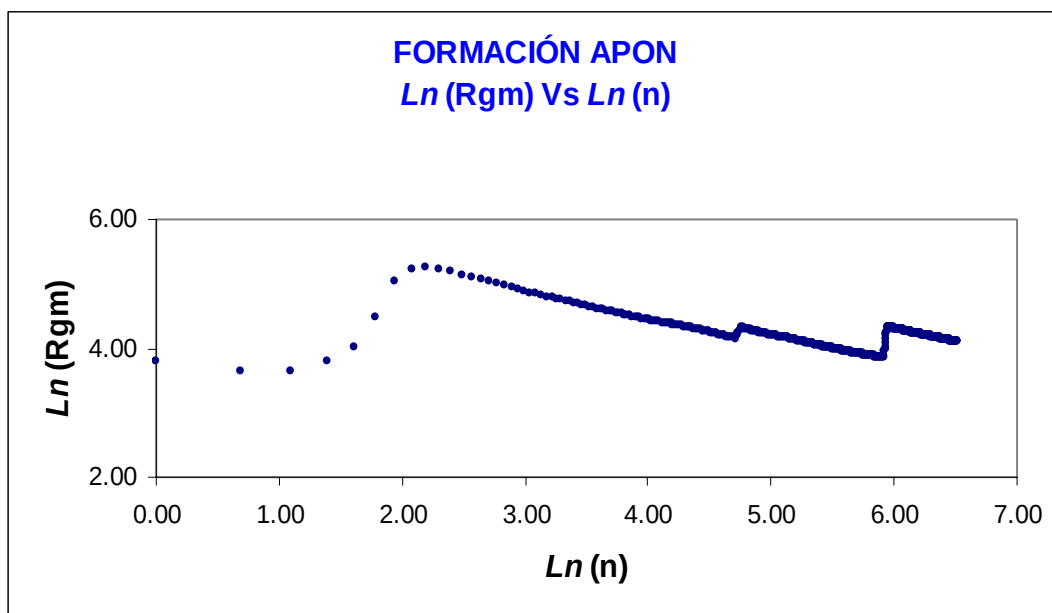
Para finalizar de presentar los resultados de los cálculos de la dimensión fractal a través del uso del Radio de giro, en las gráficas V-32 y V-33 se muestran las representaciones del logaritmo neperiano del radio de giro R_{gm} Vs el logaritmo neperiano del número de pasos n y el ajuste de la mejor recta respectivamente, correspondiente a la formación Apón.

Al observar la gráfica V-32 se evidencia 3 pendientes prácticamente paralelas, lo cual lleva a pensar que es suficiente tomar en cuenta la pendiente ubicada en el intervalo $[2.10, 5.30]$ gráfica V-33.

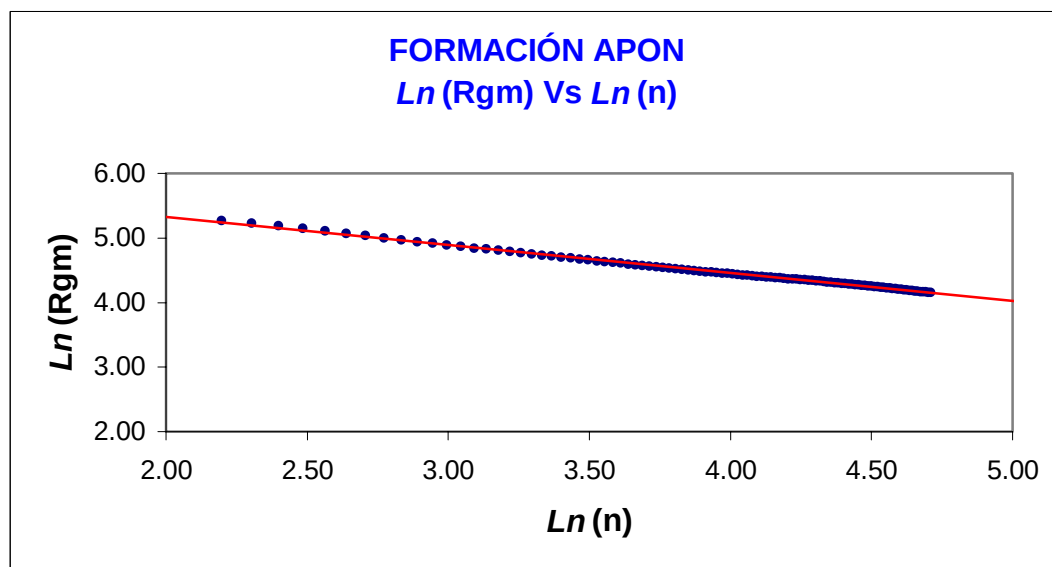
Ajuste de la mejor recta de los puntos utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\text{I } y = -0.4337x + 6.1903$$

$$\text{Dimensión} = \frac{1}{0.4337} = 2.3057$$



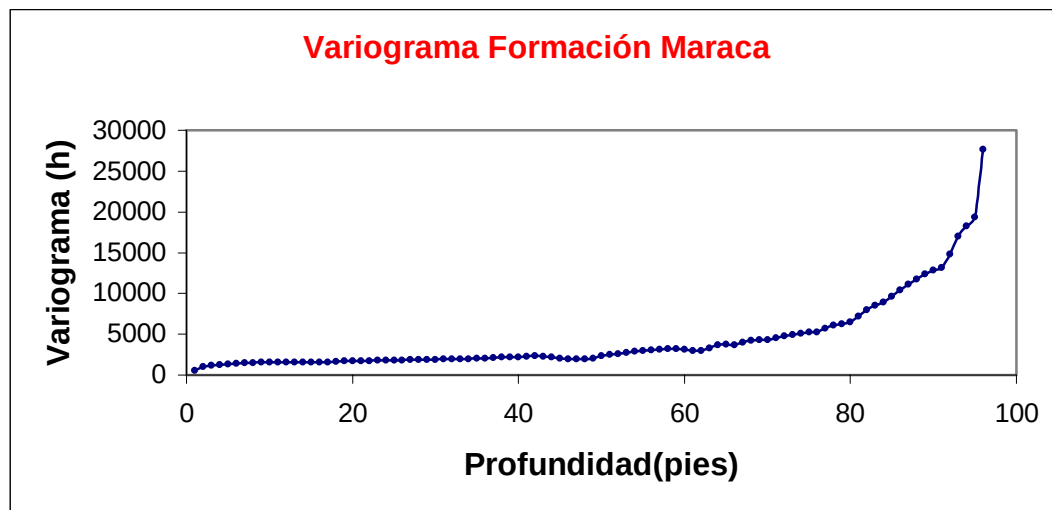
Gráfica V-32: Intervalo del logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , valido para la determinación de la dimensión fractal, de la formación Apón



Gráfica V-33: Ajuste de la mejor recta al logaritmo neperiano del radio de giro Vs logaritmo neperiano del número de pasos n , de la formación Apón

5.4._ CÁLCULO DE DIMENSIÓN FRACTAL UTILIZANDO EL VARIOGRAMA

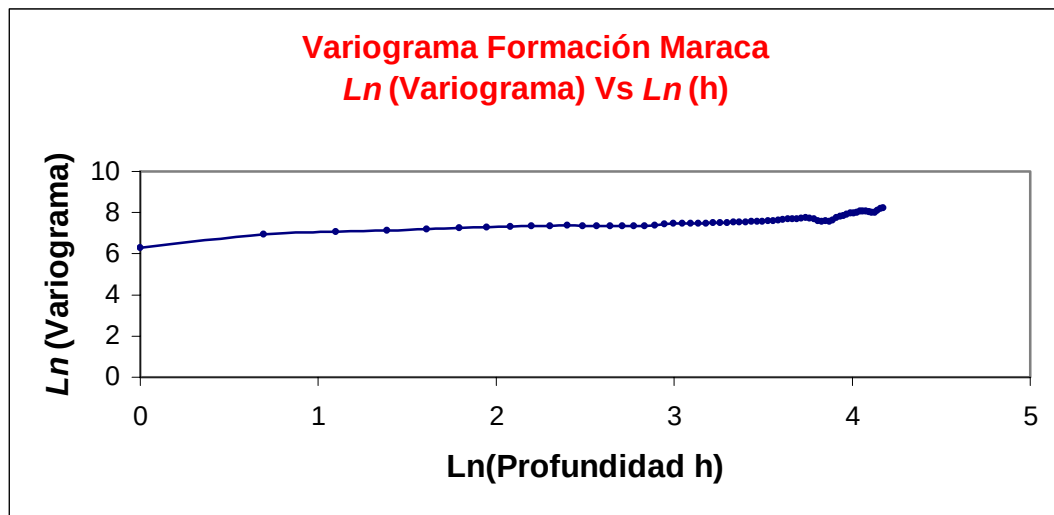
En la gráfica V-34 se muestra el variograma correspondiente a la formación Maraca. El variograma correspondiente a esta formación tiene un comportamiento casi cuadrático o parabólico. Este comportamiento indica que la variable “regionalizada interpolada” tiene un comportamiento continuo. Esta característica implica que la variable gama, tiene un variograma con un comportamiento cuadrático parabólico. Esto quiere decir que varía poco con pequeñas variaciones de la distancia (en este caso profundidad).



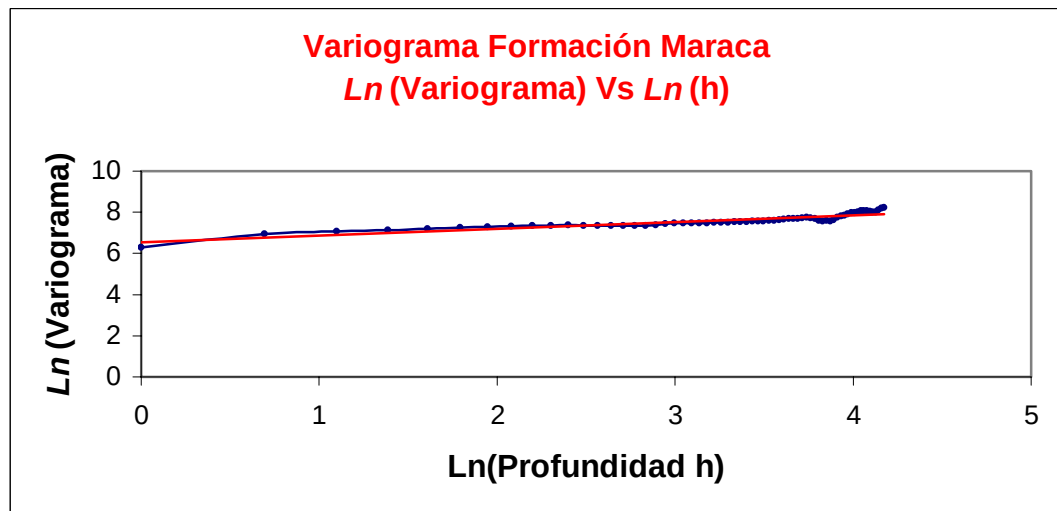
Gráfica V-34: Variograma correspondiente a la formación Maraca

En la gráfica V-35 se muestra el logaritmo neperiano del variograma de la formación Maraca, el cual presenta, prácticamente, un comportamiento lineal.

En la gráfica V-36 se muestra el ajuste de la mejor recta del $\ln V(h)$ Vs $\ln(h)$, la cual se utilizará para el cálculo de la dimensión fractal.



Gráfica V-35: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Maraca



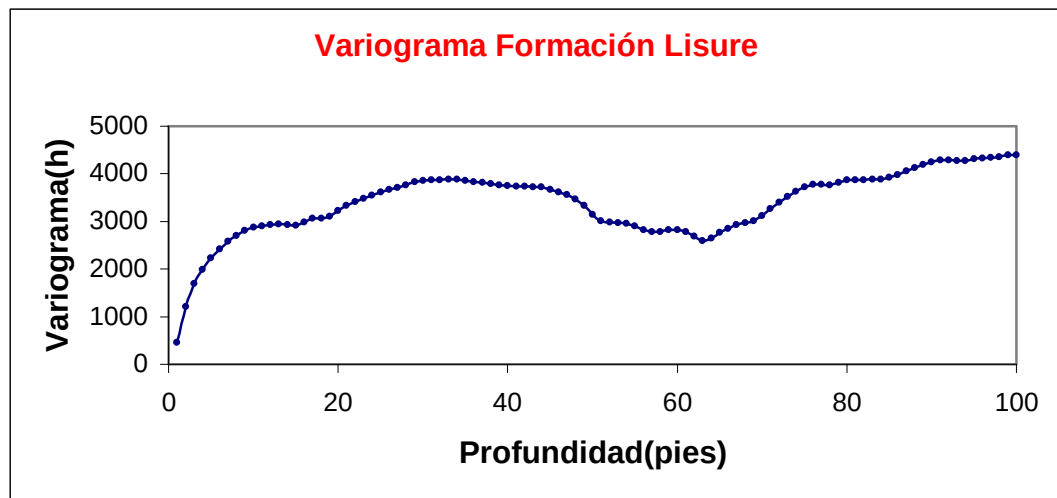
Gráfica V-36: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Maraca

Ajuste de la mejor recta de los puntos utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$y = 0.327 + 6.537$$

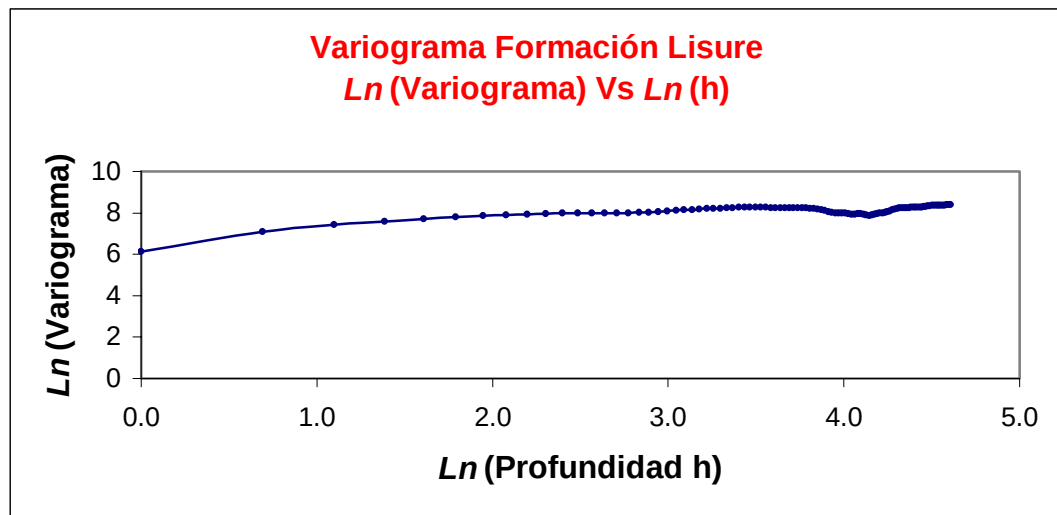
$$Dimensión = \frac{4 - 0.327}{2} = 1.8365, \text{ Dimensión} = 1.8365$$

En la gráfica V-37 se muestra el variograma correspondiente a la formación Lisure. El variograma de esta formación, tiene un comportamiento típico al de teoría de Filtros, (de un tipo “paso alto”). Este comportamiento se da cuando el valor del rango aparente de la variable “regionalizada” tiende a estabilizarse, esto ocurre cuando los valores de gama están separados a una profundidad mayor de 40 pies, lo cual se evidencia en la gráfica V-37.

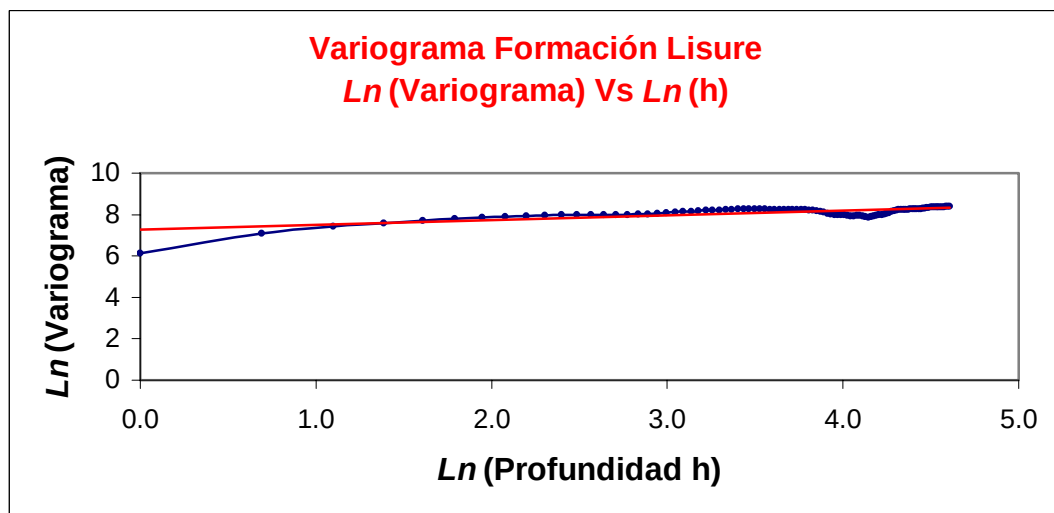


Gráfica V-37: Variograma correspondiente a la formación Lisure

En la gráfica V-38 se muestra el logaritmo neperiano del variograma de la formación Lisure, también aquí se puede apreciar un comportamiento lineal, lo cual hace muy fácil ajustar una recta lineal. En la gráfica V-39 se muestra el ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma, el cual se utilizará para el cálculo de la dimensión fractal.



Gráfica V-38: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Lisure



Gráfica V-39: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Lisure

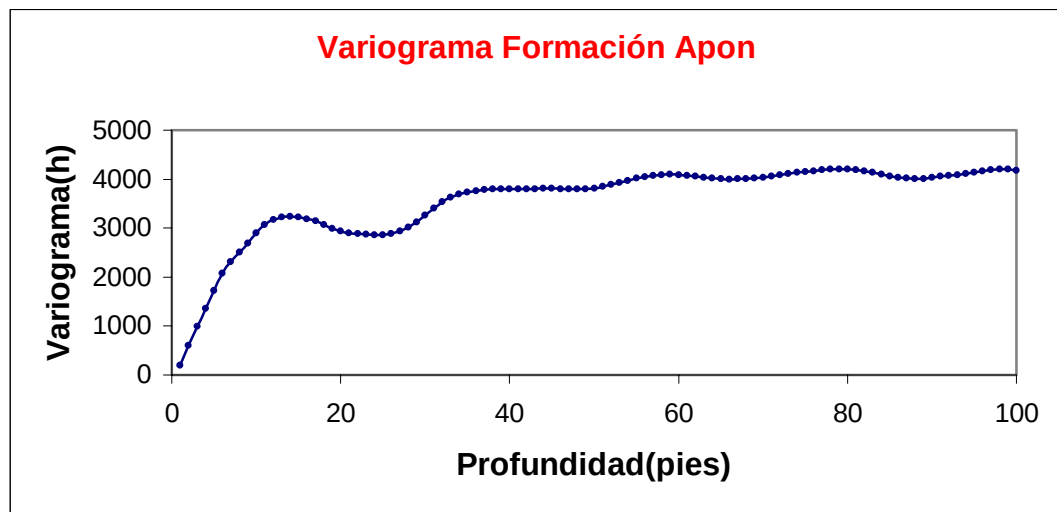
Ajuste de la mejor recta de los puntos utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\backslash \quad y = 0.2289 + 7.263$$

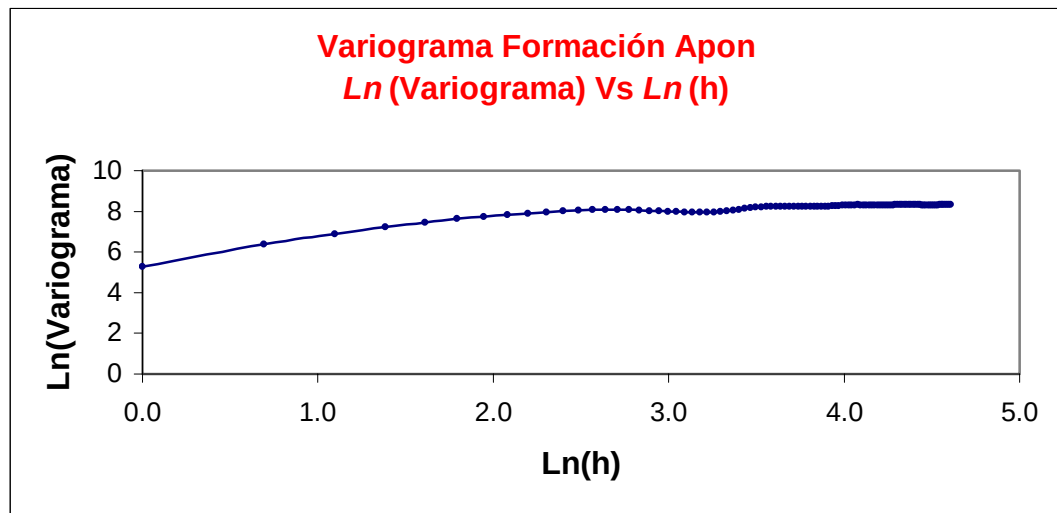
$$Dimensión = \frac{4 - 0.2289}{2} = 1.8855, \text{ Dimensión} = 1.8855$$

En la gráfica V-40 se muestra el variograma correspondiente a la formación Apón. Al igual que en el variograma de la formación Lisure, este tiene también un comportamiento tipo “paso alto”.

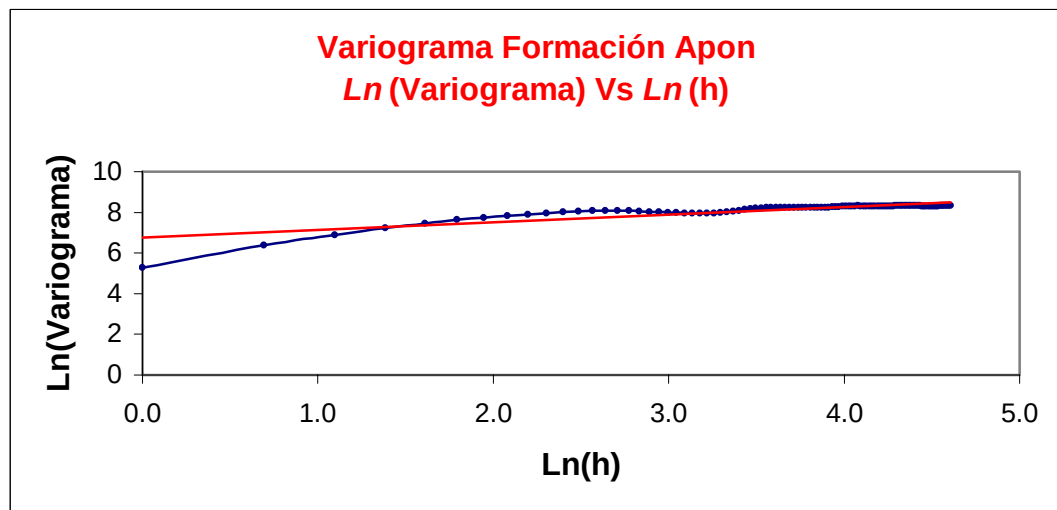
En la gráfica V-41 se muestra el logaritmo neperiano del variograma de la formación Apón, nuevamente se puede apreciar un comportamiento lineal, lo cual hace muy fácil ajustar una recta lineal. En la gráfica V-42 se muestra el ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma, el cual se utilizará para el cálculo de la dimensión fractal.



Gráfica V-40: Variograma correspondiente a la formación Apón



Gráfica V-41: Logaritmo neperiano del variograma de la formación Apón



Gráfica V-42: Ajuste de la mejor recta del logaritmo neperiano del variograma de la formación Apón

Ajuste de la mejor recta de los puntos, usando mínimos cuadrados:

$$y = 0.3789x + 6.7514$$

$$Dimensión = \frac{4 - 0.3789}{2} = 1.8105, \text{ Dimensión} = 1.8105$$

5.5._ CALCULO DE LA DIMENSIÓN DE CAPACIDAD (D_0), INFORMACIÓN (D_1) Y CUADRÁTICA (D_2), POR EL MÉTODO POR CONTEO DE CAJA, UTILIZANDO EL HISTOGRAMA NORMALIZADO

5.5.1._ CALCULO D_0 , D_1 , D_2 PARA LA FORMACIÓN MARACA

Total de datos usados: 99

D_0 calculada por Espectro de Potencia: 2,1667

Ley de potencia: $99 = 2^n$

$$D'_0 = \frac{\ln(N_n)}{\ln(2^n)} \quad (5-1)$$

$$\therefore n = \frac{\ln(99)}{\ln(2)} \Rightarrow n = 6,629 \Rightarrow n \approx 7 \Rightarrow 2^7 = 128$$

Usando cuadrados de longitud $1/128$ se cubrirían 99 puntos.

$$\therefore \square \frac{1}{128} = 0,00781$$

¿Cuántos cuadrados se necesitaría para cubrir todo?

$$\therefore N_n^* = \frac{\Delta Amplitud}{\frac{1}{2^n}} = \frac{496,6784 - 26,2598}{\frac{1}{128}} = \frac{470,4186}{\frac{1}{128}} \Rightarrow N_7^* = 60213,5808$$

Usando (5-1),

$$\therefore D'_0 = \frac{\ln(60213,5808)}{\ln(2^7)} = \frac{11,0056}{4,8520} \Rightarrow D'_0 = 2,2682$$

Esta es la dimensión para un espacio métrico-cuadrático. Ahora bien ¿Cómo pasamos de un espacio cuadrático a uno lineal? Se procede de la siguiente manera: Dado que por definición se tiene,

$$D_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}; \text{ entonces al adoptar: } D'_0 = D_0$$

$$\Rightarrow D'_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon'))}{\ln(1/\varepsilon')} = 2,2682$$

De aquí se despeja el tamaño de ε' para determinar las nuevas cantidades de cajas necesarias que cubren el conjunto de datos.

$$\ln(1/\varepsilon') = \frac{\ln(99)}{2,2682} = \frac{4,5951}{2,2682} = 2,0258$$

$$\text{Elevando a una exponencial: } \frac{1}{\varepsilon'} = e^{2,0258} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon'} = 7,5821$$

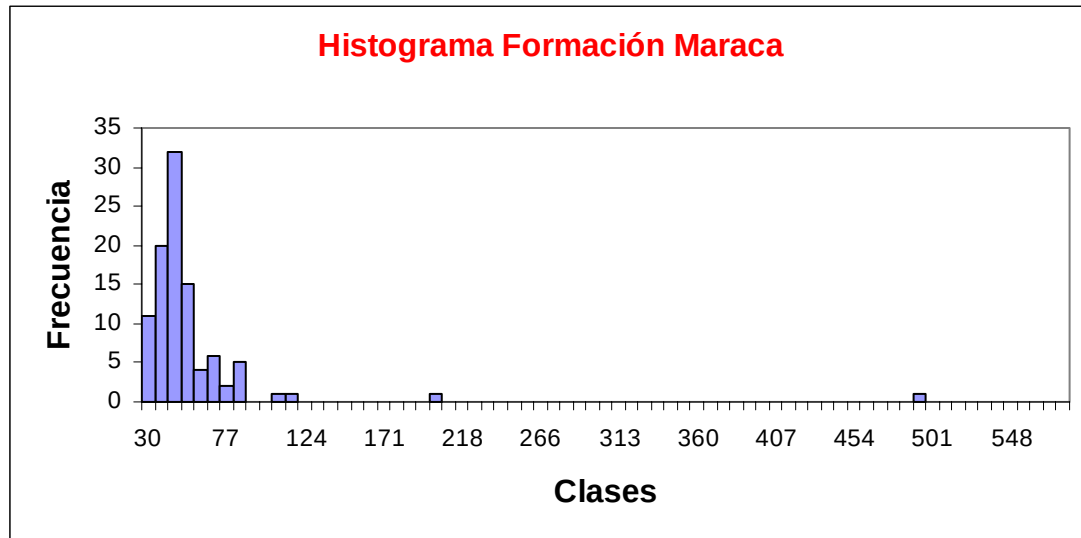
$$\Rightarrow \varepsilon' = 0,1318 \quad \text{¿Cuántas clases } k \text{ al cuadrado se tiene con este } \varepsilon'?$$

$$\vee \quad k^2 = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{\varepsilon'} = \frac{470,4186}{0,1318} \Rightarrow k^2 = 3569,1851 \Rightarrow k = 59,74 \Rightarrow k \cong 60$$

Se necesitan 60 clases con un ancho de $1/0,1318$ para cubrir todos los datos. Para el cálculo del ancho de clase de cajitas Lineales (Segmentos), se usa:

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{k} = \frac{470,4186}{60} \Rightarrow \varepsilon'' = 7,840$$

El histograma correspondiente a este ancho y números de clases es el mostrado en la gráfica V-43.



Gráfica V-43: Histograma formación Maraca, utilizando 60 clases y un ancho $\varepsilon = 7,840$

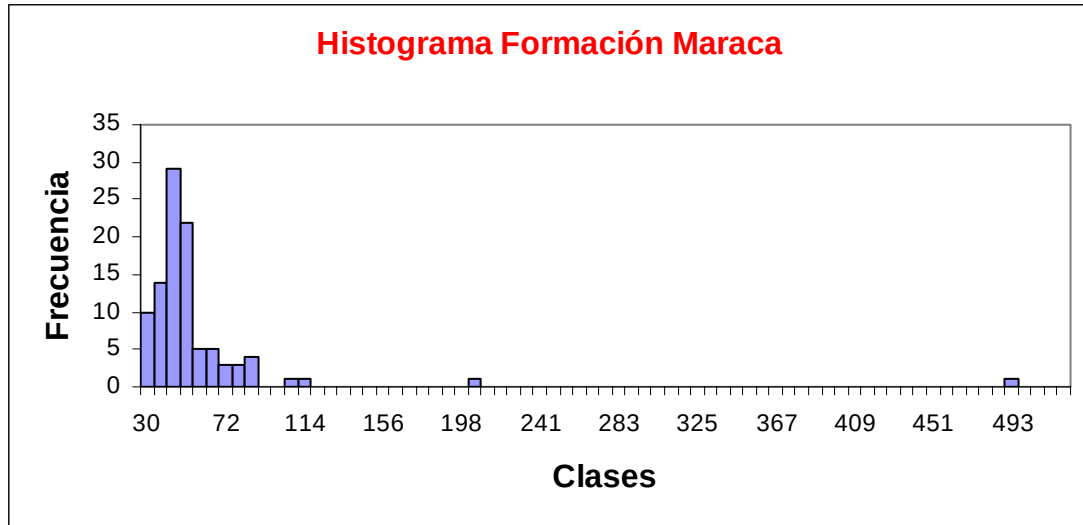
Con este ancho de caja tendríamos una D_0'' :

$$D_0'' = \frac{\ln(60)}{\ln\left(\frac{1}{7,840}\right)} = \frac{4,0943}{-2,0592} \Rightarrow D_0'' = -1,9882$$

Como se esta proponiendo como D_0 referencial, la calculada por el método de Espectro de potencia, $D_0 = 2,1667$ se tendrá que jugar un poco con las clases para poder obtener un valor de D_0'' cercano a D_0 .

Luego de realizar varios histogramas con diferentes cantidades de clases se obtuvo el histograma presentado en la gráfica V-44, el cual nos permitió determinar una D_0'' muy cercana a la calculado por el método del espectro de potencia.

Este histograma se construyo con 67 clases y un ancho de clases $\varepsilon = 7,0259$.



Gráfica V-44: Histograma formación Maraca, utilizando 67 clases y un ancho $\varepsilon = 7,0259$

Utilizando las definiciones dadas en el capítulo IV, obtenemos los valores de dimensión de información y capacidad respectivamente:

$$D_0'' = \frac{\ln(67)}{\ln(\frac{1}{7,0259})} = \frac{4,2046}{-1,9496} \Rightarrow D_0'' = -2,1566 \Rightarrow D_0 = 2,1566$$

Recordemos que $D_0'' = D_0$ y que una medida siempre es positiva, por lo tanto solo siempre se tiene que tomar el valor absoluto.

$$D_1 = \frac{\ln(\sum p_i^2)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{-2,0309}{-1,9496} = 1,0416 \Rightarrow D_1 = 1,0416$$

$$D_2 = \frac{\sum (p_i \cdot \ln(p_i))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{-1,7465}{-1,9496} = 0,8958 \Rightarrow D_2 = 0,8958$$

5.5.2._ CALCULO D_0 , D_1 , D_2 PARA LA FORMACIÓN LISURE

Total de datos usados: 441

D_0 calculada por Espectro de Potencia: 2,4466

Ley de potencia: $441 = 2^n$

$$D'_0 = \frac{\ln(N_n)}{\ln(2^n)} \quad (5-1)$$

$$\therefore n = \frac{\ln(441)}{\ln(2)} \Rightarrow n = 8,7851 \Rightarrow n \approx 7 \Rightarrow 2^9 = 512$$

Usando cuadrados de longitud $1/512$ se cubrirían 441 puntos.

$$\therefore \square \frac{1}{512} = 0,001953$$

¿Cuántos cuadrados se necesitaría para cubrir todo?

$$\therefore N_n^* = \frac{\Delta Amplitud}{\frac{1}{2^n}} = \frac{656,9606 - 21,7506}{\frac{1}{512}} = \frac{635,21}{\frac{1}{512}} \Rightarrow N_9^* = 325227,52$$

Usando (1),

$$\therefore D'_0 = \frac{\ln(325227,52)}{\ln(2^9)} = \frac{12,6922}{6,2383} \Rightarrow D'_0 = 2,0345$$

Nuevamente esta es la dimensión para un espacio métrico-cuadrático. Ahora bien ¿Cómo pasamos de un espacio cuadrático a uno lineal? Se procede de la siguiente manera: Dado que por definición se tiene,

$$D_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}; \text{ entonces al adoptar: } D'_0 = D_0$$

$$\Rightarrow D'_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon'))}{\ln(1/\varepsilon')} = 2,0345$$

De aquí se despeja el tamaño de ε' para determinar las nuevas cantidades de cajas necesarias que cubren el conjunto de datos.

$$\ln(1/\varepsilon') = \frac{\ln(441)}{2,0345} = \frac{6,0890}{2,0345} = 2,9928$$

$$\text{Elevando a una exponencial: } \frac{1}{\varepsilon'} = e^{2,9928} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon'} = 19,941$$

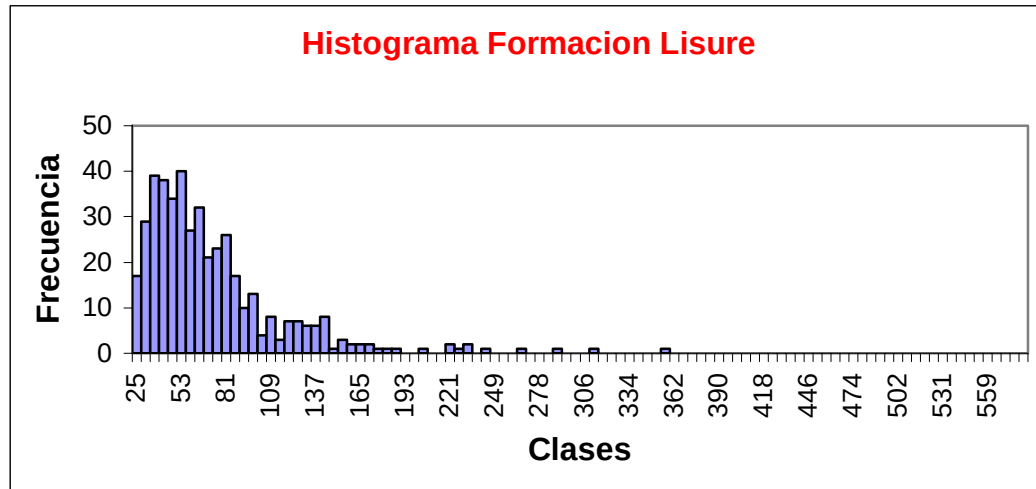
$$\Rightarrow \varepsilon' = 0,05014 \quad \text{¿Cuántas clases } k \text{ al cuadrado se tiene con este } \varepsilon'?$$

$$k^2 = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{\varepsilon'} = \frac{635,21}{0,05014} \Rightarrow k^2 = 12668,7275 \Rightarrow k = 112,55 \Rightarrow k \cong 113$$

Se necesitan 113 clases con un ancho de $1/0,05014$ para cubrir todos los datos. Para el cálculo del ancho de clase de cajitas Lineales (Segmentos), se usa:

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{k} = \frac{635,21}{113} \Rightarrow \varepsilon'' = 5,6213$$

El histograma correspondiente a este ancho y números de clases es el mostrado en la gráfica V-45.



Gráfica V-45: Histograma formación Lisure, utilizando 113 clases y un ancho $\varepsilon = 7,840$

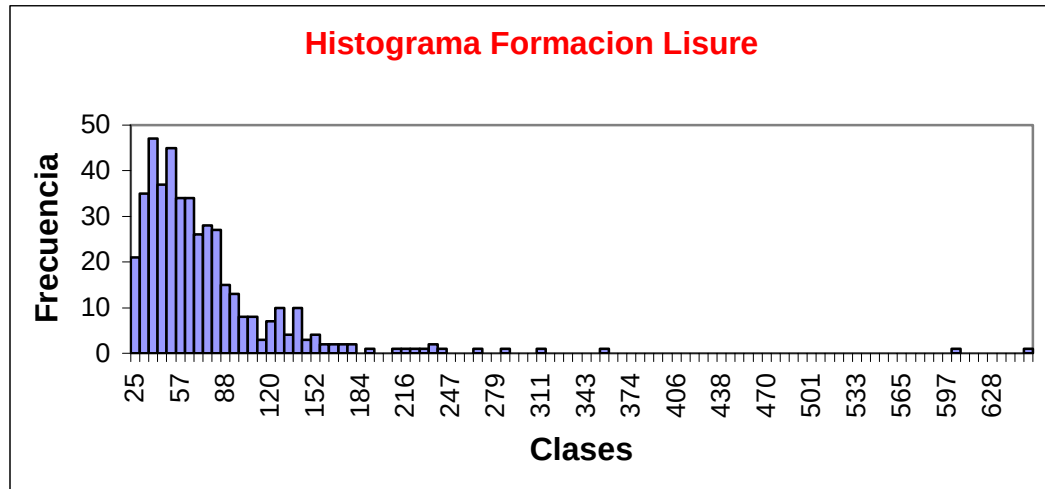
Con este ancho de caja tendríamos una D_0'' :

$$D_0'' = \frac{\ln(60)}{\ln(\frac{1}{\sqrt[7]{7,840}})} = \frac{4,0943}{-2,0592} \Rightarrow D_0'' = -1,9882$$

Como se esta proponiendo como D_0 referencial, la calculada por el método de Espectro de potencia, $D_0 = 2,4466$ se tendrá que jugar un poco con las clases para poder obtener un valor de D_0'' cercano a D_0 .

Luego de realizar varios histogramas con diferentes cantidades de clases se obtuvo el histograma presentado en la gráfica V-46, el cual nos permitió determinar una D_0'' muy cercana a la calculada por el método del espectro de potencia.

Este histograma se construyo con 100 clases y un ancho de clases $\varepsilon = 6,3524$.



Gráfica V-46: Histograma formación Lisure, utilizando 100 clases y un ancho $\varepsilon = 6,3524$

$$D_0'' = \frac{\ln(100)}{\ln(1/6,3524)} = \frac{4,6051}{-1,8488} \Rightarrow D_0'' = -2,4908 \Rightarrow D_0 = 2,4908$$

Recordemos que $D_0'' = D_0$ y que una medida siempre es positiva, por lo tanto solo siempre se tiene que tomar el valor absoluto.

Utilizando las definiciones dadas en el capítulo IV, obtenemos los valores de dimensión de información y capacidad respectivamente:

$$D_1 = \frac{\ln(\sum p_i^2)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{-2,9766}{-1,8488} = 1,6100 \Rightarrow D_1 = 1,6100$$

$$D_2 = \frac{\sum (p_i \cdot \ln(p_i))}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{-2,7348}{-1,8488} = 1,4791 \Rightarrow D_2 = 1,4791$$

5.5.3._ CALCULO D_0 , D_1 , D_2 PARA LA FORMACIÓN APÓN

Total de datos usados: 679

D_0 calculada por Espectro de Potencia: 2,1676

Ley de potencia: $679 = 2^n$

$$D'_0 = \frac{\ln(N_n)}{\ln(2^n)} \quad (5-1)$$

$$\therefore n = \frac{\ln(679)}{\ln(2)} \Rightarrow n = 9,4078 \Rightarrow n \approx 10 \Rightarrow 2^{10} = 1024$$

Usando cuadrados de longitud $1/1024$ se cubrirían 679 puntos.

$$\therefore \square \frac{1}{1024} = 0,0009765$$

¿Cuántos cuadrados se necesitaría para cubrir todo?

$$\therefore N_n^* = \frac{\Delta Amplitud}{\frac{1}{2^n}} = \frac{510,3088 - 16,5816}{\frac{1}{1024}} = \frac{493,7272}{\frac{1}{1024}} \Rightarrow N_{10}^* = 505576,6528$$

Usando (5-1),

$$\therefore D'_0 = \frac{\ln(505576,6528)}{\ln(2^{10})} = \frac{13,1334}{6,9314} \Rightarrow D'_0 = 1,8947$$

Al igual que antes, esta es la dimensión para un espacio métrico-cuadrático. Ahora bien ¿Cómo pasamos de un espacio cuadrático a uno lineal? Se procede de la siguiente manera: Dado que por definición se tiene,

$$D_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}; \text{ entonces adoptando: } D'_0 = D_0$$

$$\Rightarrow D'_0 = \frac{\ln(N(S, \varepsilon'))}{\ln(1/\varepsilon')} = 1,8947$$

De aquí se despeja el tamaño de ε' para determinar las nuevas cantidades de cajas necesarias que cubren el conjunto de datos.

$$\ln(1/\varepsilon') = \frac{\ln(679)}{1,8947} = \frac{6,5206}{1,8947} = 3,4414$$

$$\text{Aplicando la exponencial: } \frac{1}{\varepsilon'} = e^{3,4414} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon'} = 31,2306$$

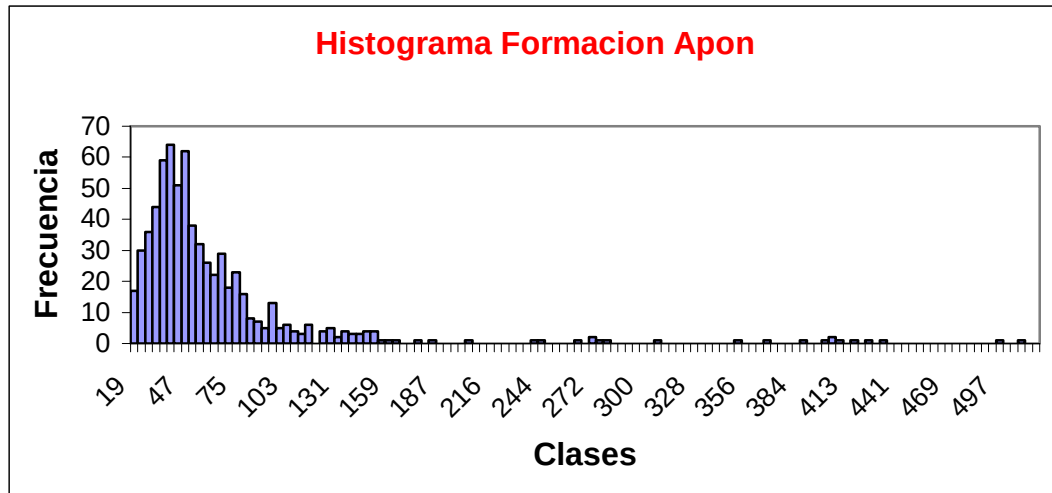
$$\Rightarrow \varepsilon' = 0,0320 \quad \text{¿Cuántas clases } k \text{ al cuadrado se tiene con este } \varepsilon'?$$

$$k^2 = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{\varepsilon'} = \frac{493,7272}{0,0320} \Rightarrow k^2 = 15428,975 \Rightarrow k = 124,213 \Rightarrow k \cong 123$$

Se necesitan 123 clases con un ancho de $1/0,0320$ para cubrir todos los datos. Para el cálculo del ancho de clase de cajitas Lineales (Segmentos), se usa:

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta \text{Amplitud}}{k} = \frac{493,7272}{123} \Rightarrow \varepsilon'' = 4,0140$$

El histograma correspondiente a este ancho y números de clases es el mostrado en la gráfica V-47.



Gráfica V-47: Histograma formación Apón, utilizando 123 clases y un ancho $\varepsilon = 4,0140$

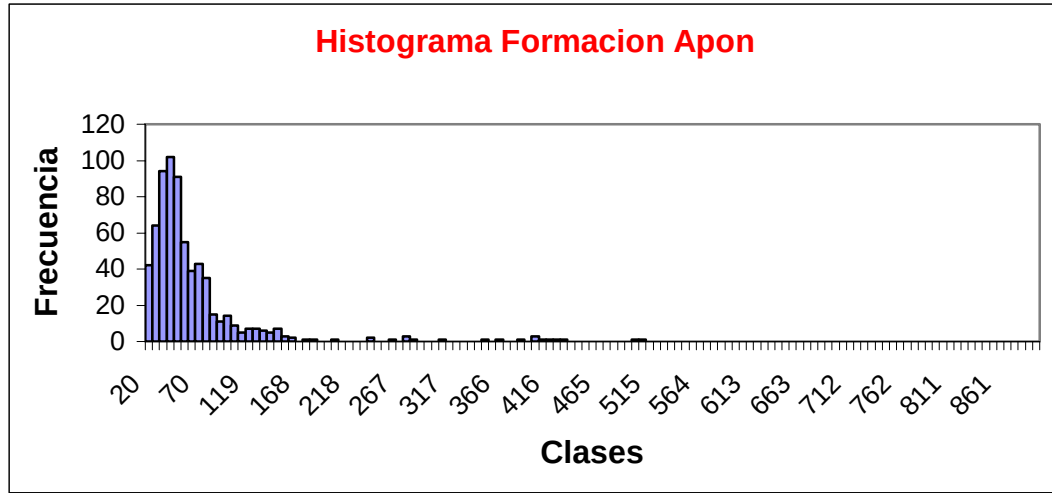
Con este ancho de caja tendríamos una D_0'' :

$$D_0'' = \frac{\ln(123)}{\ln\left(\frac{1}{4,0140}\right)} = \frac{4,8121}{-1,3897} \Rightarrow D_0'' = -3,4626$$

Como se esta proponiendo como D_0 referencial, la calculada por el método de Espectro de potencia, $D_0 = 2,1676$ se tendrá que jugar un poco con las clases para poder obtener un valor de D_0'' cercano a D_0 .

Luego de realizar varios histogramas con diferentes cantidades de clases se obtuvo el histograma presentado en la gráfica V-48, el cual nos permitió determinar una D_0'' muy cercana a la calculada por el método del espectro de potencia.

Este histograma se construyo con 70 clases y un ancho de clases $\varepsilon = 7,06312$.



Gráfica V-48: Histograma formación Apón, utilizando 70 clases y un ancho $\varepsilon = 7,06312$

$$D_0'' = \frac{\ln(70)}{\ln(\frac{1}{7,06312})} = \frac{4,2484}{-1,9548} \Rightarrow D_0'' = -2,1733 \Rightarrow D_0 = 2,1733$$

Recordemos que $D_0'' = D_0$ y que una medida siempre es positiva, por lo tanto solo siempre se tiene que tomar el valor absoluto.

Utilizando las definiciones dadas en el capítulo IV, obtenemos los valores de dimensión de información y capacidad respectivamente:

$$D_1 = \frac{\ln(\sum p_i^2)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{-2,7121}{-1,9549} = 1,3873 \Rightarrow D_1 = 1,3873$$

$$D_2 = \frac{\sum (p_i \cdot \ln(p_i))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{-2,3980}{-1,9549} = 1,2267 \Rightarrow D_2 = 1,2267$$

Finalmente se puede observar en la tabla V-1 los valores de D_0 , D_1 y D_2 para cada formación (Maraca, Lisure y Apón), dependiendo del método desarrollado en este trabajo de grado.

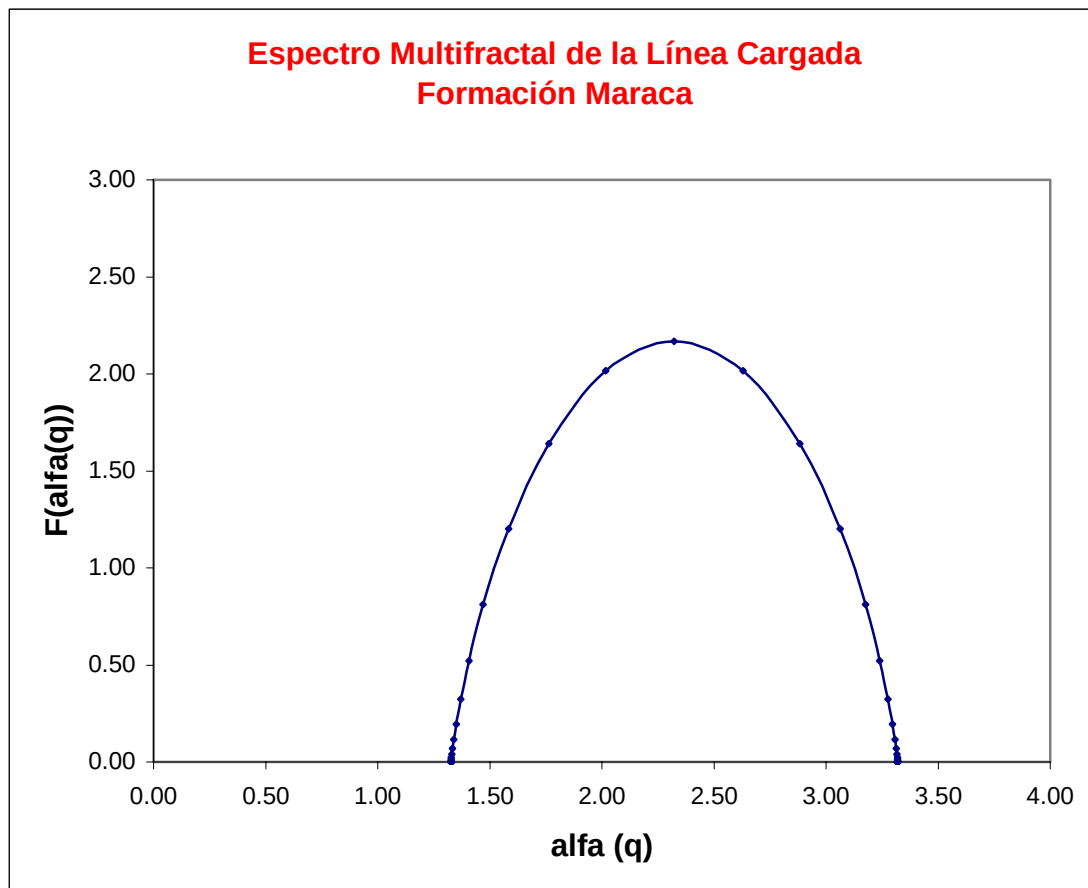
Tabla V-1: Valores correspondiente a la dimensión fractal
(Según el método utilizado), para cada formación

Formación	Método	D_0	D_1	D_2
MARACA	Espectro de Potencia	2.1667		
	Radio de Giro	2.2266		
	Variograma	1.8365		
	Histograma de Frecuencia	2.1566	1.0416	0.8958
LISURE	Espectro de Potencia	2.4466		
	Radio de Giro	2.2266		
	Variograma	1.8855		
	Histograma de Frecuencia	2.4908	1.6100	1.4791
APÓN	Espectro de Potencia	2.1676		
	Radio de Giro	2.3057		
	Variograma	1.8105		
	Histograma de Frecuencia	2.1733	1.3873	1.2267

5.6._ DETERMINACIÓN DEL ESPECTRO MULTIFRACTAL

En esta sección se presentan los gráficos correspondientes a las dimensiones de orden superior para las 3 formaciones (Maraca, Lisure y Apón), obteniéndose así el espectro multifractal para cada una de ellas. Los modelos teórico utilizados fueron: de la Línea Cargada y el de el Conjunto Triádico de Cantor, los cuales se mencionaron en el capítulo IV.

5.6.1._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA LÍNEA CARGADA, FORMACIÓN MARACA

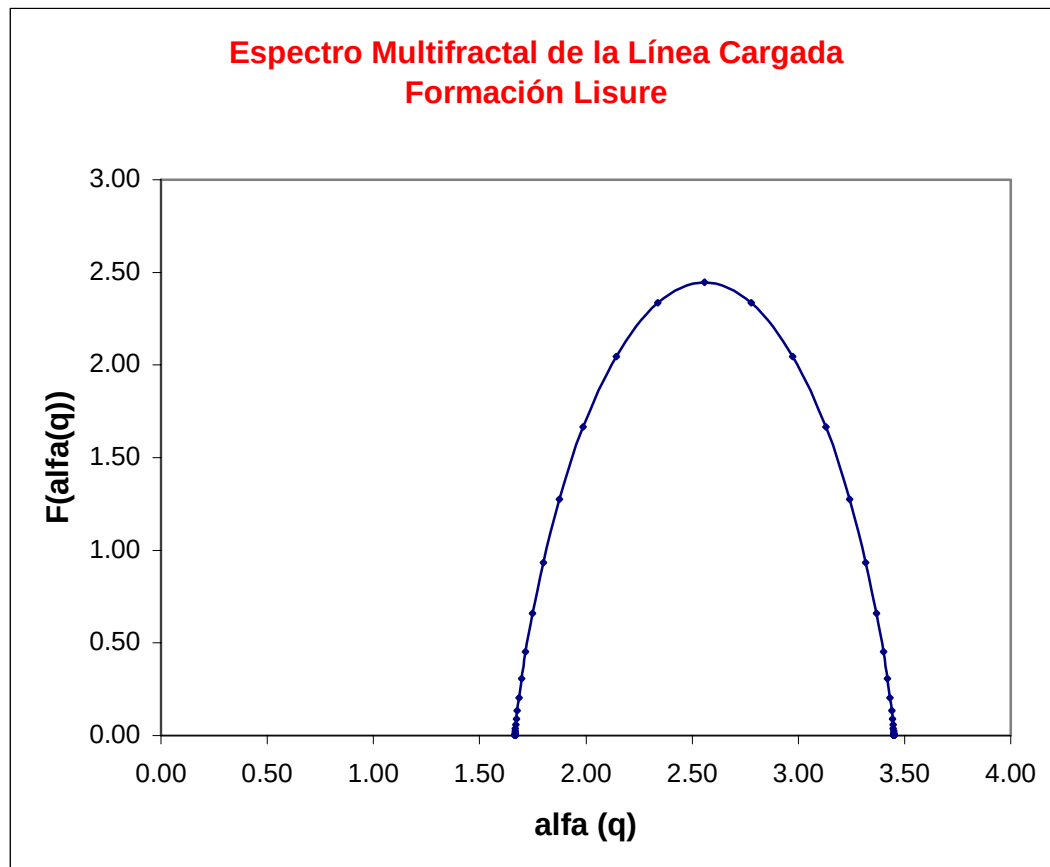


Gráfica V-49: Espectro multifractal formación Maraca, utilizando el modelo teórico de la Línea Cargada

En la gráfica V-49 se mostró el espectro multifractal de la formación Maraca, tomando como referencia la dimensión D_0 calculada por el método del Espectro de Potencia.

5.6.2._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA LÍNEA CARGADA, FORMACIÓN LISURE

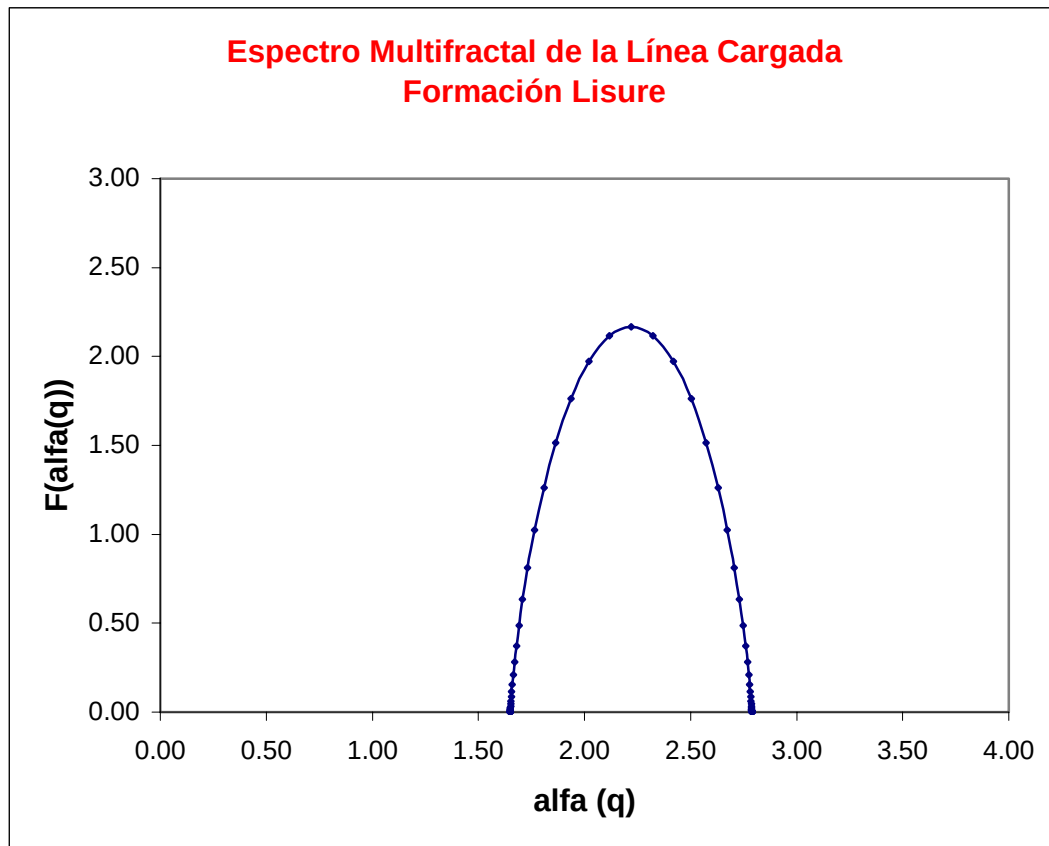
Nuevamente en la gráfica V-50 se muestra el espectro multifractal, esta vez para la formación Lisure, tomando como referencia la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.



Gráfica V-50: Espectro multifractal formación Lisure, utilizando el modelo teórico de la Línea Cargada

5.6.3._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA LÍNEA CARGADA, FORMACIÓN APÓN

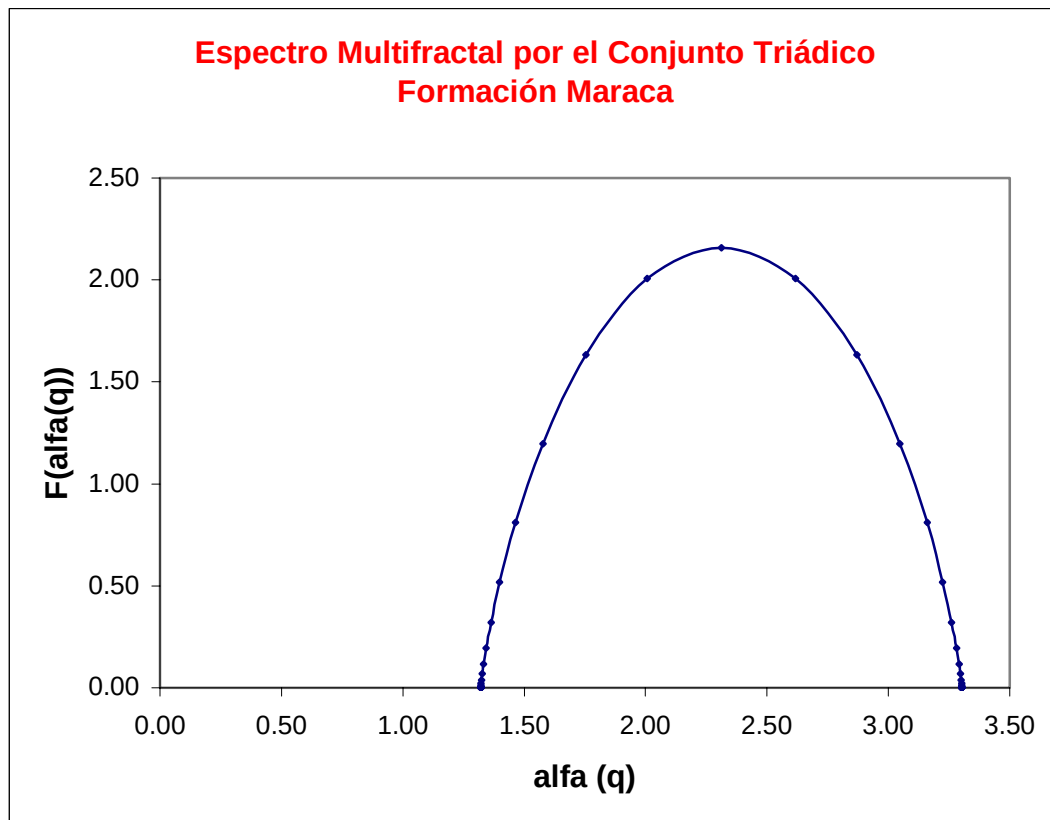
En la gráfica V-51 se muestra el espectro multifractal, para la formación Apón, tomando como referencia de igual manera como se hizo para las formaciones Maraca y Lisure, la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.



Gráfica V-51: Espectro multifractal formación Apón, utilizando el modelo teórico de la Línea Cargada

5.6.4._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO POR EL MÉTODO DEL CONJUNTO TRIÁDICO DE CANTOR, FORMACIÓN MARACA

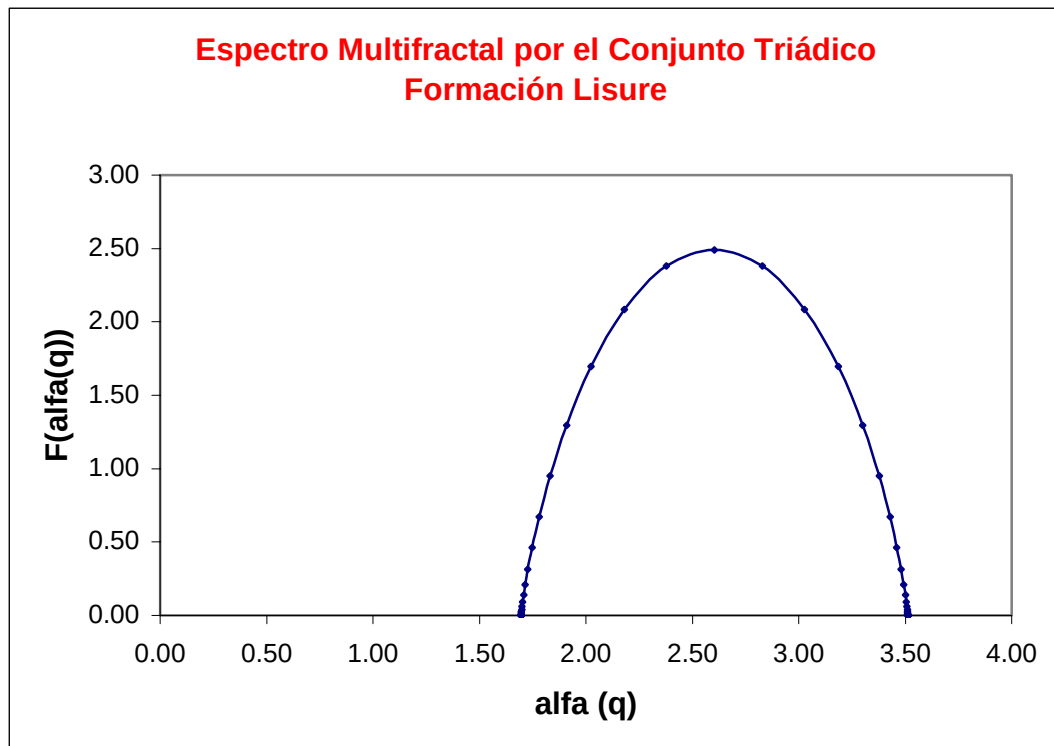
En la gráfica V-52 se muestra el espectro multifractal, para la formación Maraca, tomando como referencia el valor de la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.



Gráfica V-52: Espectro multifractal, formación Maraca, utilizando el modelo teórico del Conjunto Triádico de Cantor

5.6.5._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO POR EL MÉTODO DEL CONJUNTO TRIÁDICO DE CANTOR, FORMACIÓN LISURE

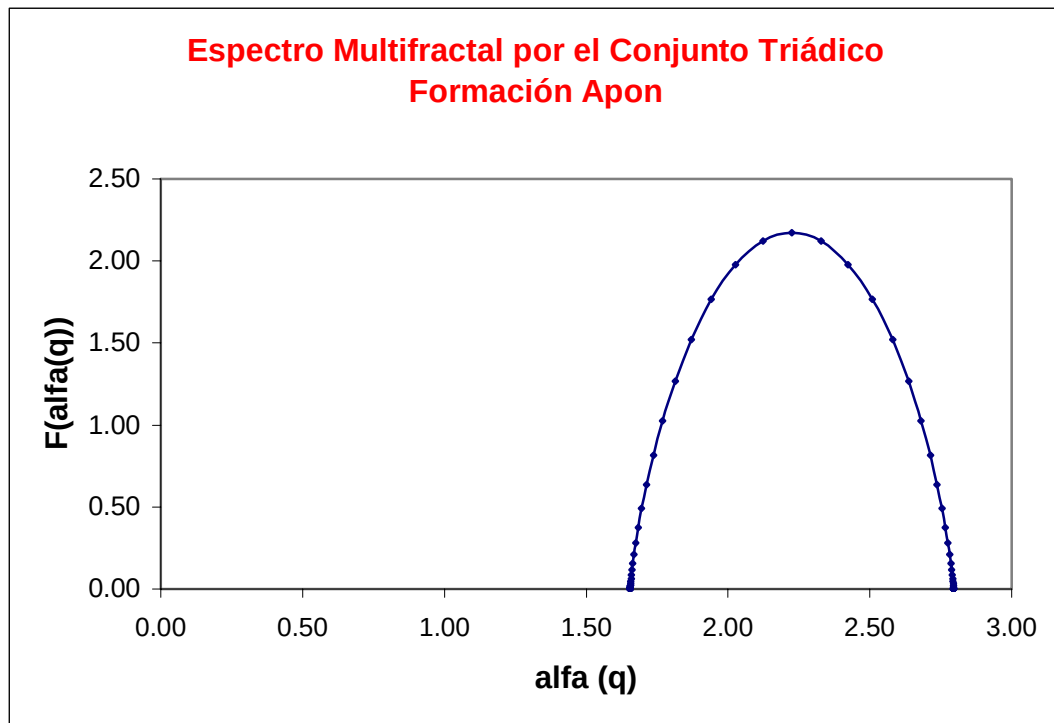
En la gráfica V-53 se muestra el espectro multifractal, para la formación Lisure, tomando como referencia nuevamente el valor de la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.



Gráfica V-53: Espectro multifractal, formación Lisure, utilizando el modelo teórico del Conjunto Triádico de Cantor

5.6.6._ ESPECTRO MULTIFRACTAL TEÓRICO POR EL MÉTODO DEL CONJUNTO TRIÁDICO DE CANTOR, FORMACIÓN APÓN

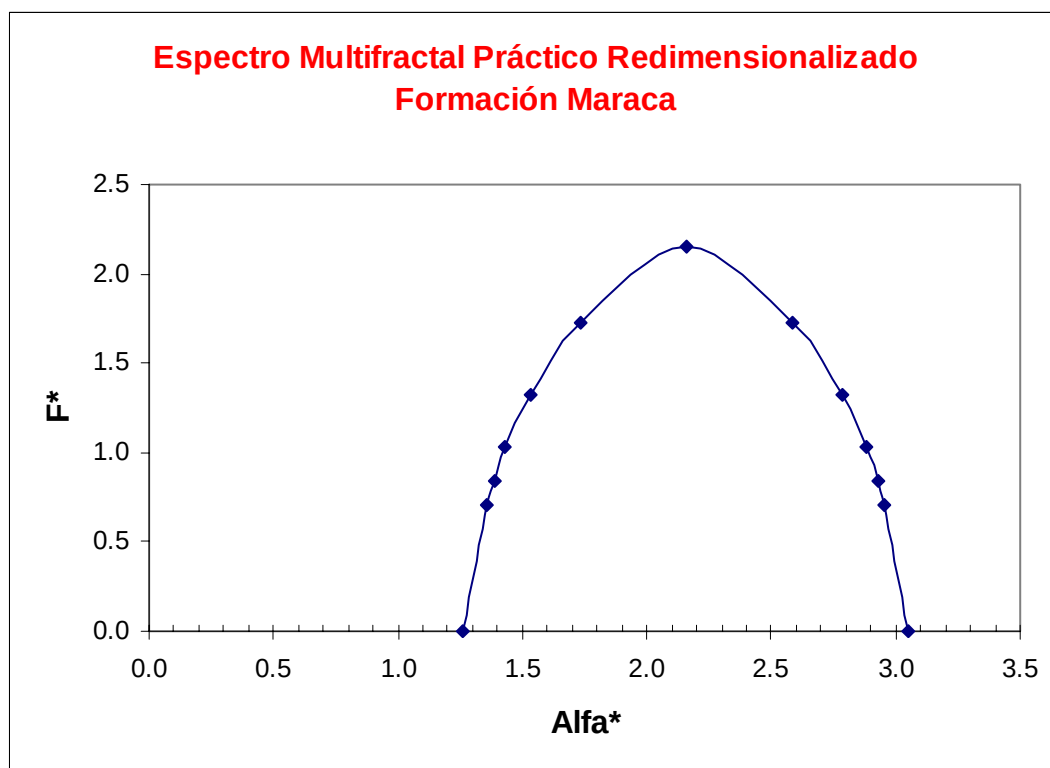
Por último en la gráfica V-54 se muestra el espectro multifractal, para la formación Apón, tomando como referencia al igual que en las formaciones Maraca y Lisure, el valor de la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.



Gráfica V-54: Espectro multifractal, formación Apón, utilizando el modelo teórico del Conjunto Triádico de Cantor

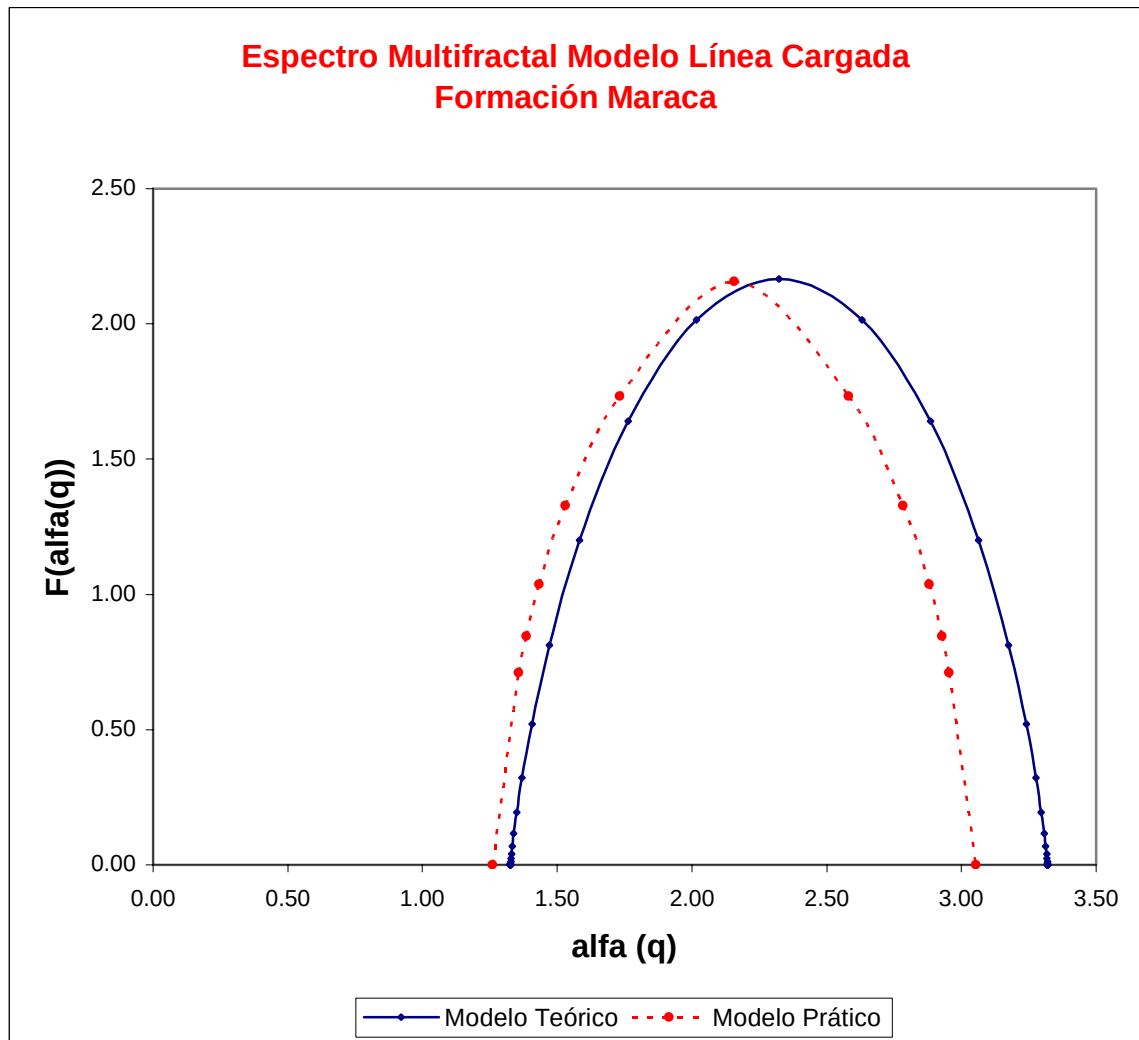
5.7._ ESPECTRO MULTIFRACTAL PRÁCTICO FORMACIÓN MARACA

En la gráfica V-55 se muestra el espectro multifractal práctico, para la formación Maraca, tomando como referencia el valor de la dimensión D_0 dada por el método del Espectro de Potencia.

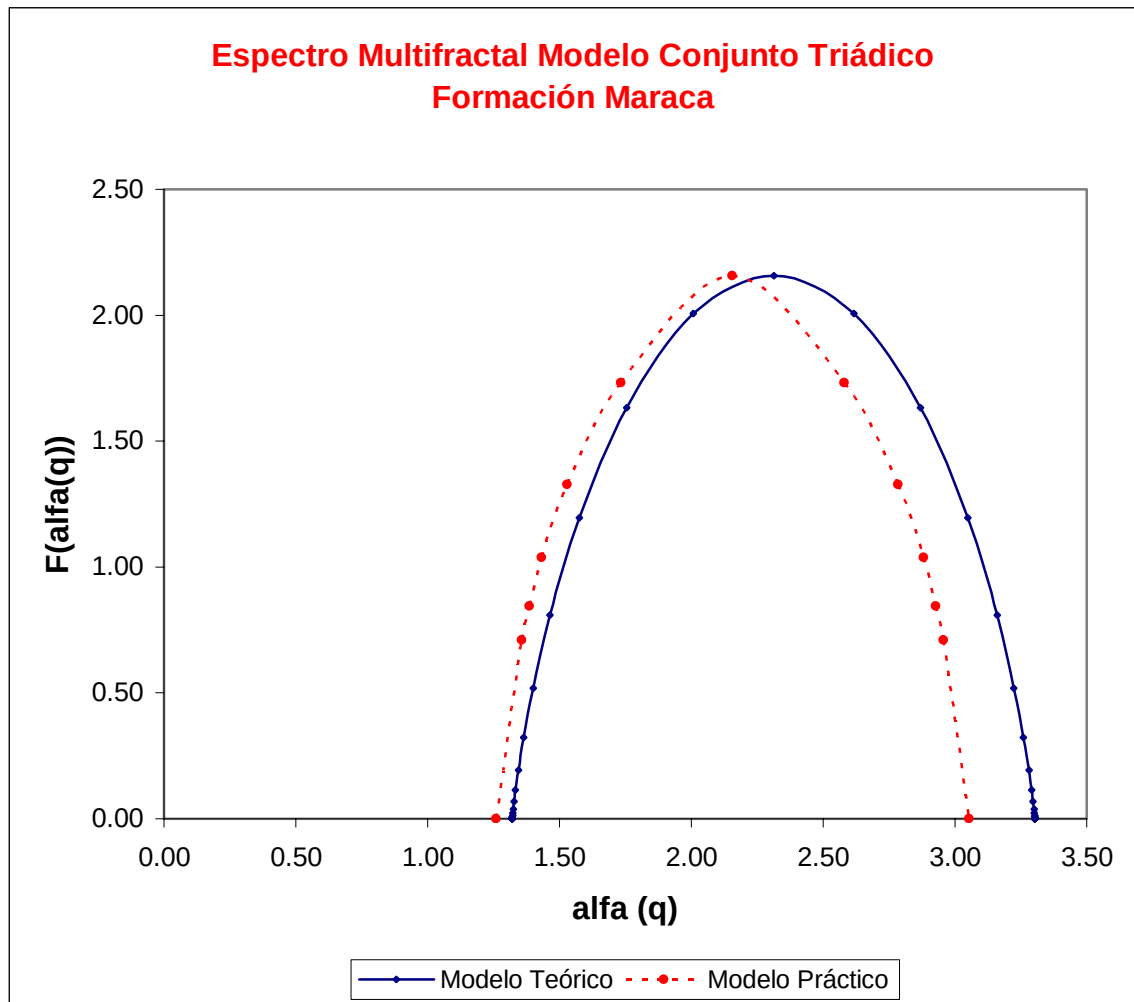


Gráfica V-55: Espectro multifractal Práctico, formación Maraca

En las gráficas V-56 y V-57 se muestran que tanto difiere el espectro multifractal práctico con los modelos teóricos, para la formación maraca.



Gráfica V-56: Espectro multifractal Práctico Vs Modelo Teórico de la Línea Cargada, formación Maraca



Gráfica V-57: Espectro multifractal Práctico Vs Modelo Teórico del Conjunto Triádico de Cantor, formación Maraca

CAPÍTULO VI

6.0._ CONCLUSIONES

Como expusimos al comienzo de nuestro trabajo, la intención de realizarlo estaba encaminado para evidenciar hasta que punto la información que hemos logrado obtener acerca del fenómeno aquí estudiado, está dominada por el azar o por una regla determinista. Inmediatamente se procedió a implementar una metodología para medir, tanto las dimensiones fractales, como el calculo del espectro Multifractal, de registros Geofísicos de pozo, en las secciones de interés del Occidente de Venezuela.

Nuestro trabajo resume información elaborada por diversos autores sobre el tema: Dimensión Fractal y Multifractalidad. Luego se ensayaron diferentes técnicas recomendadas, para determinar las dimensiones fractales, de Capacidad (D_0), de Información (D_1) y la Cuadrática (D_2).

Luego de analizar los resultados arrojados por las diferentes técnicas planteadas en el capítulo IV, (metodología), hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- i) Tanto el espectro de Potencia como el Radio de Giro, son técnicas confiables e independientes entre si.
- ii) Tanto el Variograma como el Conteo de Cajas, no son apropiadas para la determinación de las dimensiones mencionadas.
- iii) El Variograma es en si, un interpolador universal, y como tal SUAVIZA la data original; la Dimensión de Caja, implementada a través de Histogramas, la hace dependiente del método Espectral.

- iv) El Espectro de Potencia, se torna muy adecuado para nuestros objetivos, por cuanto pondera “globalmente” todos los elementos del conjunto de datos disponibles; el Radio de Giro, también es apropiados en la consecución de nuestras metas, por cuanto es estadística de segundo orden, cuyo significado es el de desviación estándar de la distribución de datos inhomogéneos.
- v) De lo anterior, se desprende que adoptaremos las siguientes medidas fractales, para caracterizar las formaciones geológicas involucradas:

<i>Formación</i>	<i>Método</i>	<i>D_0</i>
MARACA	Espectro de Potencia	2.1667
	Radio de Giro	2.2266
LISURE	Espectro de Potencia	2.4466
	Radio de Giro	2.2266
APÓN	Espectro de Potencia	2.1676
	Radio de Giro	2.3057

- vi) Sin embargo, se debe puntualizar que las determinaciones de D_1 y D_2 , a través de “Histogramas normalizados”, descansan sobre la condición global de que el número de datos debe ser una constante en cada formación. Por ende, la condición de normalización (de Probabilidad), igual a la unidad, se respetó en todo momento. En consecuencia, se listan a continuación los valores de estas para cada formación:

<i>Formación</i>	<i>Método</i>	<i>D_1</i>	<i>D_2</i>
MARACA	Histograma de Frecuencia	1.0416	0.8958
LISURE		1.6100	1.4791
APÓN		1.3873	1.2267

Finalmente, la obtención del espectro multifractal, se tornó en una serie de cálculos paramétricos, extremadamente largos y tediosos, los cuales descansan sobre “diferenciación numérica”, en última instancia. Por tal motivo, el método de su determinación, hereda las incertidumbres propias de tal tipo de diferenciación. Además, si no se dispone de un paquete de programas para dicho cálculo, sólo se puede determinar el correspondiente $f(\alpha)$ Vs (α) , de tan solo una formación: Maraca.

Para verificar lo acertado del cálculo en cuestión, nuestros resultados fueron contrastados con 2 modelos teóricamente elaborados por especialistas en la materia. En tal sentido se debe puntualizar, que con respecto a estos patrones su discrepancia se estimo como

$$\sigma_{YY'}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2, \quad \sigma_{XX'}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \quad \therefore \quad \sigma_{Total}^2 = \sigma_{YY'}^2 + \sigma_{XX'}^2$$

donde y_i representa las ordenadas del patrón de referencia, e y'_i las correspondientes del resultados experimental. En consecuencia se obtuvieron las dos varianzas siguientes:

Para el caso de la Línea Cargada:

$$\sigma_{YY'}^2 = 0.0577, \quad \sigma_{XX'}^2 = 0.0816 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Total}^2 = 0.1393$$

Para el caso del Conjunto Triádico de Cantor:

$$\sigma_{YY'}^2 = 0.0558, \quad \sigma_{XX'}^2 = 0.0748 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Total}^2 = 0.1306$$

6.1.1_ RECOMENDACIONES

Como ya se mencionó en el primer capítulo, dado el carácter original del tema, sólo nos interesaba explorar la aplicación de medidas fractales en el campo de los registros de rayos gama. Hasta el momento, la aplicación del Formalismo Multifractal sobre los registros de pozos, sigue siendo un “problemas abierto”.

Para tal motivo, creemos que nuestro estudio no agota el tema, sino que apenas toca parte de él, por lo que invitamos al lector a que penetre en la búsqueda de solución al mismo, desde otro ángulo y con otras estrategias de análisis.

Recomendamos al lector a que extienda el estudio en cuestión, en los siguientes tópicos:

- i) Determinar el flujo de Migración de acuerdo a una ecuación parabólica, no-lineal, del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(z, t) = D(z_o, t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Gamma(z, t)$$

donde $D(z_o, t) \equiv D_o e^{-\lambda t}$; $\lambda = \lambda(t)$ es el coeficiente de Difusión de las medidas $\Gamma(z, t)$.

- ii) Determinar el atractor extraño con un mejor volumen de datos, en el espacio de fase.
- iii) Enmarcar el problema (i) dentro de la teoría fractal, denominada Movimiento Browniano fraccional, (i.e. fraccional Brownian Motion).

- iv)** Recalcular la dimensión fractal D_0 , por la metodología (iii) y por ende, re-estimar la rugosidad de la superficie entre los poros del medio.

BIBLIOGRAFÍA

ANDREWS, H. (1972). **Introduction to mathematical techniques in pattern recognition**. Wiley – Interscience, New York, cap. II, p. 22.

APOSTOL, T. M. (1974). **Mathematical Analysis**. Addison-Wesley, 2° edición, secciones 2.6, 3.2, 3.3.

ARCHIE, G. (1950). **Introduction to Petrophysics of Reservoir**. AAPG Bulletin, v. 34.

ARCHIE G. **The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics**. Petroleum Technology, v. 146.

ARIKUMA, Tsuyoshi. (2000). **Análisis de los Registros Sónico Bipolar en las Secciones de Interés del Occidente de Venezuela**. Trabajo Especial de Grado, departamento de Geofísica U.C.V., Caracas-Venezuela.

BASSIOUNI Zaki. (1994). **Theory, Measurement, and Interpretation of Well logs**. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, Richardson, Texas, p. 32, 33, 34, 111, 147-155.

BURRIE C. y KNUDSEN J. (1969). **Real variables**. Holt, Rinehart and Winston, INC. cap. 5, p. 383-390.

BURROUGHS, P.A.; WILEY and; JOHN and SONS Ltd. (1989). **The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry**. Edited by D. Avnir, cap. III.

CENTRO DE INFORMACIÓN Y ADIESTRAMIENTO DE PETRÓLEOS DE VENEZUELA Y SUS FILIARES. (1989). **La Industria Venezolana de los Hidrocarburos**. CEPET, Tomo I, p. 85-92.

CUSTODIO, E. & LLAMAS, M. R. (1983).- **Hidrología Subterránea**. (2 tomos). Omega, 2350 pp.

DRESSER ATLAS. (1974). **Introducción al Perfilaje**. Sección 7, p. 7-2; Sección 8, p. 1-5.

FETTER, C. W. (2001).- **Applied Hydrogeology**. Prentice-Hall, 4ª ed., 598 pp.

FREEZE, R. A.& CHERRY, J. A. (1979).- **Groundwater**. Prentice-Hall, 604 pp.

FRIEDMAN, B. (1969), **Lectures on Applications – Oriented Mathematics**, Holden – Day San Francisco, cap. II, p. 43-44; 50-52.

GOLTZ, C. (1997). **Fractal and chaotic properties of earthquakes**. Springer – Verlag, Berlin, Hulderberg, New York, cap. II.

GONZÁLEZ DE JUANA, Clemente; Iturralde, J., Picard Cepillat, X. (1980). **Geología de Venezuela y de sus Cuencas Petrolíferas**. Editorial Foninves. Caracas -Venezuela. Tomo I. 407pp.

DRISSON, J. T., Koehle, D. R. (1967). **Introduction to resolution distortion**, Am. J. Phys. 35, 8, p. 753.

HALSEY, T. C., et al. (1986). **Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets**. Phys. Rev. A33, 1141.

HERRMANN, F. J. (1997). **A scaling médium representation, a discusión on well logs and wanes.** Tesis doctoral, Delft University of Technology Delft, The Netherlands.

HOUGH, S.E. (1989). **Geophys.** Res. Lett. 16-673.

JIMÉNEZ, J., (1996), **Determinismo y Azar, II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica.** Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes.

KLIMOV, G. (1986). **Probability theory and mathematical statistics.** Mirpublishers, Moscow, cap. I.

KORSHUNOV, Yu M. (1976). **Fundamentos Matemáticos de la Cibernética.** Editorial Mir, cap. V.

KOLMOGOROV, y Formin. (1972). **Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.** Editorial Mir, Moscú.

MATHERON, G. (1971). **Le Cahiers de Centre de Maorphologie Mathematique de Fontainbleu.** Ecole Nationale Superieur des Mines de Paris.

MC Cauley, J. (1994). **Chaos, Dynamics and Fractals.** Cambridge University Press, cap. IV, p. 142.

NEWMAN, J. R.; **The World of Mathematics, the Mathematical way of thinking.** Simon and Schuster, New York, vol. III, p. 1956.

PACKARD, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. y Sharv, R. S. (1980), Phys. Rev. Lett. 45, 712.

PDVSA – CIED. (2001). **Curso de Evaluación de Formaciones.**

RIDER, M H. (1986). **The Geological Interpretation of Well Logs.** Hales Press, New York, p. 57-70.

ROYDEN, H. L. (1965). **Real analysis**, Macmillan Company, N. Y., cap. I, p. 6.

ROBINSON, Clark. (1995). **Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos.** CRC Press, Boca Raton, London, Tokyo, p. 361.

RUELLE, David. (1990). **Azar y caos**, Editorial Alianza, cap. III.

RUELLE, David. **Chaotic evolution and strange attractor; statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems**, Cambridge University Press, sec. 1, 6, 12, 13.

SCHLUMBERGER (1970), **Fundamentos de la Interpretación de Perfiles**, Schlumberger Limited, New York, USA.

SCHLUMBERGER (1997), **“WEC 1997 Evaluación de Pozos”** Schlumberger Sureco, C.A. Caracas, Venezuela.

SCHEIDEGGER, A. E., y F. T. Johnson, (1961). **Can. J. Phys.** p. 39-326.

SHANNON, C.E. y WEANER, W. (1949). **The mathematical Theory of Communication.** University of Illinois Press.

TAKASU. (1990). **Fractals in physical science. Nonlinear science: The theory and application.** Manchester University Press, Manchester.

TAKENS, F. (1981). **Detecting strange attractors in turbulence**. Lecture notes in mathematics 898 Springer – Verlag, p. 366-381.

TIPLER, A. Paul. **Física**. Editorial Reverté, tomo II, segunda edición, cap. 37, p. 1226-1228.

TURCOTTE, D. C. (1997). **Fractals and chaos in geology and geophysics**. Cambridge University Press, cap. II.

VLADIMIROV, V.S. (1979). **Generalized functions in mathematical physics**. Mir publishers, Moscow, cap. I.

VOEVODIN, V. V. (1982). **Algebra Lineal**, Editorial Mir, Moscu, cap. II, p. 59.

VOSS, R. F. (1985). **Fundamental Algoritmo for Computer Graphics**. R.A. Earnshaw, NATO ASI Series, Springer, Berlin, vol. F17, p. 805.

WIENER, Norbert. (1933). **The Fourier Integral and Certain of its Applications**. Dover publications, INC, New York, p. 5 - 6.

ZARKOV. (1985). **Estructura Interior de la Tierra y de los Planetas**. Editorial Mir.

ZVÉREV, V.A., **Radio Óptica: Transformación de Señales de Radio y Óptica**. Mir, Moscu.

PDVSA. (1999). **Código Estratigráfico de Venezuela**: www.pdvsa.com/lexico