

*Cuantización a la Dirac de una teoría
topológica Abelian*

Br. Adalberto Antonio Diaz Rodriguez

Tutor: Dr Lorenzo Leal Brizuela

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 30 de mayo del año 2011



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

CUANTIZACIÓN A LA DIRAC DE UNA TEORÍA TOPOLÓGICA ABELIANA

Br. Adalberto Antonio Diaz Rodriguez

Dr Lorenzo Leal Brizuela, Tutor

Caracas, 30 de mayo del año 2011

Cuantización a la Dirac de una teoría topológica Abelian

Copyright © 2011

Universidad Central de Venezuela, Adalberto Antonio Diaz Rodriguez

CUANTIZACIÓN A LA DIRAC DE UNA TEORÍA TOPOLÓGICA ABELIANA

Br. Adalberto Antonio Diaz Rodriguez

*Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Física.*

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Adalberto Antonio Diaz Rodriguez, titulado: “**Cuantización a la Dirac de una teoría topológica Abelian**a” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dr Lorenzo Leal Brizuela, Tutor

Fecha

Dr Ernesto Fuenmayor

Fecha

Dr Abraham Lozada

Fecha

Caracas, 30 de mayo del año 2011

Ogn'ira, ogni miseria e ogni forza, chi d'Amor s'arma, vince ogni fortuna

Michalengelo Buonarotti

Agradecimientos

Después de un intenso y largo período de trabajo debo agradecer a Dios ya que ha permitido superar momentos difíciles durante la realización de este trabajo.

Agradezco el apoyo incondicional de mi tutor el Dr Lorenzo Leal por su gran sabiduría , su forma de manejar los problemas presentados durante el Trabajo Especial de Grado además y más importante aún darme apoyo moral y tener paciencia cuando estaba decaído.

A mis padres les doy gracias por haberme educado y enseñado los caminos que debía tomar desde pequeño y también por su enorme preocupación hacia mi .

A mis Amigos que siempre estuvieron pendientes de como iba el desarrollo de mi trabajo, en especial a Jesus Acosta, Jose Nuñez, Solmar Varela, Francisco Ysalgues y a la gran maestra Orlenys Troconis.

Agradezco a los Profesores Ernestos (Contreras y Fuenmayor respectivamente)y a Pio Arias ya que dispusieron de su tiempo para asesorarme en mi tesis

Resumen

Cuantización a la Dirac de una teoría topológica Abelianiana

Adalberto Antonio Diaz Rodriguez

Dr Lorenzo Leal Brizuela, Tutor

Universidad Central de Venezuela

Partiendo de una teoría topológica Abelianiana se estudia sus propiedades (ecuaciones de movimiento, invariancia de calibre, invariantes de nudos generados). Se introduce una acción de tipo B-F para eliminar la no-localidad existente en la acción inicial y se realiza la cuantización canónica siguiendo el método de Dirac para la cuantización de lagrangianos singulares.

Se procede a cuantizar la teoría B-F. Se introducen ciertas corrientes geométricas asociadas a los campos y se calcula el Hamiltoniano on-shell de manera de obtener ciertos invariantes de curvas que son interpretados geométricamente.

Dr Lorenzo Leal Brizuela
Tutor

ÍNDICE GENERAL

Índice General	viii
1. INTRODUCCIÓN	1
2. Nociones básicas de la teoría clásica de campos	3
2.1. Principio de mínima acción	4
2.2. Teorema de Noether.	5
2.3. Ecuaciones de Maxwell	8
2.3.1. Tensor electromagnético	10
3. Cuantización de Dirac	12
3.1. Formulación Hamiltoniana y Cuantización Canónica	12
3.2. Corchetes de Poisson	14
3.3. Cuantización a la Dirac	16
3.4. Ligaduras Secundarias	17

3.5.	Ecuaciones Débiles y Fuertes	18
3.6.	Funciones de Primera y Segunda Clase.	19
3.6.1.	Cuantización	19
3.7.	Ejemplo. Cuantización del campo de Maxwell.	22
4.	Cuantización de una Teoría Topológica Abelianas	28
4.1.	Acción Topológica Abelianas Intermedia	29
4.2.	Cuantización canónica de la teoría topológica intermedia. Dificultades	34
4.3.	Cuantización de una teoría Tipo B-F	39
5.	Un invariante de Curvas Cerradas y Puntos,y Hamiltoniano on-shell de la Teoría B-F	47
5.1.	“Invariante de Milnor” en el Plano	48
5.2.	Hamiltoniano On-Shell	53
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	60
	Bibliografía	62

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En el transcurrir de los años se ha evidenciado la estrecha conexión que existe entre los resultados matemáticos y la física. Un ejemplo relativamente moderno de esto lo constituyen las teorías topológicas. En este trabajo consideraremos teorías relacionadas con la de Chern-Simon, que son interesantes por ser de carácter topológico, es decir, independientes de la métrica [1] lo que permite describir propiedades topológicas de las variedades sobre las cuales son definidas. Por otro lado las teorías de Chern-Simon permiten desarrollar ciertos Invariantes de nudo.

Uno de los aportes más relevantes al estudio de teorías topológicas fue dado por Edward Witten [2], que demostró la relación existente entre la teoría cuántica de campos y los invariantes de nudo presentes en teorías de Chern-Simon. A consecuencia de esto surgieron múltiples trabajos que permitieron el fortalecimiento en distintas áreas, como por ejemplo: Efecto Hall Cuántico, teorías de cuerdas y Superconductividad a temperaturas altas. Se puede ver que el estudio de nudos va mas allá de la física, ya que también es de gran utilidad en Biología debido a que se ha estudiado la “topología” del ARN, las estructuras de enredo de los polímeros, síntesis

molecular y moléculas anudadas [3]

En este trabajo aplicamos el método de cuantización de Dirac para lagrangianos singulares de primer orden [4], específicamente el método propuesto por Fadeev-Jackiw [5] al estudio de teorías de tipo Chern-Simon, ya que, aparte de ser topológicas como se mencionó anteriormente, poseen invariancia de calibre [7], lo que las hace singulares.

La estructura de este trabajo será la siguiente :

En el segundo capítulo se hace un esbozo de conceptos básicos de la teoría clásica de campos. Se estudia el campo de Maxwell y se revisa la formulación canónica.

En el tercer capítulo se resume el método de cuantización de Dirac, con una breve referencia al método alternativo de cuantización de Fadeev-Jackiw. Se estudia el importante ejemplo del campo de Maxwell sin fuentes.

En el cuarto capítulo procederemos a estudiar propiedades de una teoría topológica Abelianas tales como sus ecuaciones de movimiento, invariancia de calibre e invariantes de nudo generados. Posteriormente se realizará el estudio de su cuantización; para ello se introduce una acción de tipo B-F, estos modelos B-F son teorías cuántica de campos topológicas, que para nuestro caso estarán acompañados de corrientes asociadas a cada campo. Este modelo nos será de gran utilidad a la hora de simplificar los resultados.

En el quinto capítulo se introducen unas corrientes geométricas que al acoplarse con la teoría B-F, permiten explorar ciertos invariantes asociados al espacio 2-dimensional. Estos invariantes se obtienen al calcular el Hamiltoniano on-shell de la teoría B-F. Los invariantes pueden verse como una “proyección” en el plano del invariante asociado al 3-espacio que detecta el anudamiento de los anillos Borromeos [8, 9] .

Para finalizar se presentan las conclusiones de nuestro trabajo y las referencias bibliográficas.

CAPÍTULO 2

NOCIONES BÁSICAS DE LA TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

La teoría clásica de campos se encarga de estudiar la dinámica y la interacción de uno o varios campos físicos. A diferencia de la Mecánica Clásica, ésta teoría describe infinitos grados de libertad. El principal objetivo de este capítulo es recordar conceptos básicos de la teoría clásica de campos. Para ello postulamos la existencia de una función Lagrangiana, y a partir de ella se obtendrán las ecuaciones de movimiento mediante un principio variacional. Más adelante veremos la relación existente entre las leyes de conservación y las simetrías mediante el teorema de Noether. Luego se introducirán conceptos de Electrodinámica. El campo de Maxwell nos será de gran utilidad a la hora de explicar el método de cuantización que se va a emplear en este Trabajo Especial de Grado, por lo que le dedicaremos especial atención.

2.1. Principio de mínima acción

El principio de mínima acción describe la evolución a lo largo del tiempo de un campo [11],[10]. Denotamos los campos del modo $\phi^\alpha(x)$ con $(\alpha = 1, \dots, N)$. El índice α indica el número de componentes de un campo; cabe destacar que la dimensión del espacio-tiempo será $d + 1 \equiv D$, y $x = (t, \vec{x})$ es el D-vector Lorentziano. Postulamos la existencia de una densidad Lagrangiana.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha) \quad (2.1)$$

Esta densidad depende de los campos y sus primeras derivadas. Teniendo esto podemos definir la Acción para una región Ω de espacio-tiempo D -dimensional

$$S = \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha) \quad (2.2)$$

A partir de la acción se puede obtener las ecuaciones de movimiento valiéndose de un principio variacional. Si en cualquier región arbitraria Ω los campos del sistema dinámico son variados de la forma $\phi_\alpha(x) \rightarrow \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x)$ de tal modo que la variación se anula sobre una superficie Γ que delimita la región Ω , entonces la acción es estacionaria cuando los campos obedecen las ecuaciones dinámicas. La estacionariedad establece que :

$$\delta S = 0 \quad (2.3)$$

Desarrollando δS , a partir de la ecuación (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\alpha})} \delta (\partial_{\mu} \phi_{\alpha}) \right\} \\ \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\alpha})} \right) \right\} \delta \phi_{\alpha} + \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\alpha})} \delta \phi_{\alpha} \right),\end{aligned}$$

donde la última ecuación es obtenida integrando por partes. El segundo término de la expresión anterior se puede convertir en una integral de superficie que se anula debido a que $\delta \phi_{\alpha} = 0$ sobre Γ . En resumen, para que se satisfaga (2.3) debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\alpha})} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Esta última expresión es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange para campos.

2.2. Teorema de Noether.

El teorema de Noether se ha convertido en una herramienta vital de la física teórica y un resultado importante del cálculo variacional. Este teorema permite entender el vínculo existente entre las leyes de conservación y las propiedades de simetría. Recordemos que las leyes de conservación indican que existen ciertas cantidades en la naturaleza que no cambian en el tiempo, independientemente de la evolución dinámica del sistema que se haya fijado. Consideremos transformaciones continuas de las coordenadas.

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu}, \quad (2.5)$$

y las transformaciones de los campos.

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta \phi_r(x). \quad (2.6)$$

Con esto se puede definir el cambio en la densidad Lagrangiana propuesta en la ecuación (2.1) del modo

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x). \quad (2.7)$$

Una vez definidas las variaciones tanto en los campos como en las coordenadas (2.6), (2.5) procedemos a definir una variación total.

$$\tilde{\delta}\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x). \quad (2.8)$$

Al maniobrar algebraicamente la ecuación anterior y usando la expansión de Taylor se puede reescribir la variación total de manera más conveniente

$$\tilde{\delta}\phi_r(x) = \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu, \quad (2.9)$$

donde hemos usado que la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ conmuta con $\tilde{\delta}$, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\tilde{\delta}\phi_r(x) = \tilde{\delta}\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right). \quad (2.10)$$

El teorema de Noether establece que si la acción de una teoría es invariante bajo ciertas transformaciones δx^μ y $\tilde{\delta}\phi$, expresables infinitesimalmente, entonces, sobre las ecuaciones de movimiento, existen unas corrientes conservadas asociadas a dicha invariancia.

Para probar el teorema de Noether, supongamos que :

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) = 0, \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \delta\mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x), \quad (2.12)$$

donde Ω' representa el mismo volumen de integración de Ω expresado en términos de las nuevas coordenadas x' . Se tiene que :

$$d^4x' = \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) d^4x. \quad (2.13)$$

Al usar la variación total (2.9) en (2.11) vemos que:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x (\tilde{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L}(x) \delta x^\mu)). \quad (2.14)$$

Expresemos la variación total $\tilde{\delta} \mathcal{L}(x)$ en función de los campos y sus derivadas, obteniendo:

$$\tilde{\delta} \mathcal{L}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \right] \delta \phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \delta \phi_r \right]. \quad (2.15)$$

Cabe destacar que usamos la ecuación (2.10) que posee la propiedad de intercambiar la variación de los campos por su diferenciación. Sustituyendo (2.15) en la ecuación (2.14) y además teniendo en cuenta que es arbitrario el volumen de integración Ω , tenemos que:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \right] \delta \phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \delta \phi_r + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] = 0. \quad (2.16)$$

El primer término de (2.16) se anula en virtud de la ecuación de movimiento. En consecuencia (2.16) queda como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} (\delta \phi_r(x) - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\nu} \delta x_\nu) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] = 0. \quad (2.17)$$

Esta última expresión la podemos identificar como la ecuación de continuidad para campos vectoriales.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} f^\mu(x) = 0, \quad (2.18)$$

convirtiéndose $f^\mu(x)$ en una densidad de corriente conservada. Esto puede demostrarse si (2.18) se integra sobre el espacio 3-dimensional y con la ayuda del teorema de Gauss.

$$0 = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_\mu} f^\mu(x) = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_0} f_0(x) + \int_V d^3x \nabla \cdot f(x) \quad (2.19)$$

$$0 = \frac{d}{dx_0} \int_V d^3x f_0(x) + \oint_{\partial V} d_0 \cdot f(x). \quad (2.20)$$

Por definición el término de superficie de (2.20) se anula con condiciones de borde apropiados en el infinito, por tanto :

$$G = \int_V d^3x f_x, \quad (2.21)$$

es una cantidad conservada. A partir de esto se pueden mencionar ciertas aplicaciones del teorema de Noether:

1. Invariancia bajo traslaciones:

La invariancia con respecto a traslaciones espacio-temporales origina la ley de conservación del cuadrimomento.

2. Invariancia bajo rotaciones:

La invariancia con respecto a rotaciones está asociado a la conservación del momento angular

3. Simetrías internas:

La conservación de la carga eléctrica puede verse como consecuencia de la invariancia de una teoría de campos complejos bajo rotaciones en el plano complejo.

2.3. Ecuaciones de Maxwell

En la física lo que para la mecánica clásica significan las leyes de Newton lo son las ecuaciones de Maxwell para el Electromagnetismo. Como se sabe, las leyes del Electromagnetismo fueron enunciadas por Gauss, Coulomb, Ampere y Faraday; dichas leyes fueron recopiladas por James Clerk Maxwell quien elaboró una completa teoría electromagnética basándose en sus ecuaciones que se verán a continuación.[6]. Comencemos con la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \quad (2.22)$$

siendo ρ la densidad de carga . Esta ecuación indica que el flujo de campo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie. Seguimos con:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.23)$$

Esta ecuación establece que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero, es decir , el número de líneas de campo magnético que entran a la superficie es igual al número de las que salen, por lo cual se puede afirmar que en la naturaleza no existen monopolos magnéticos. La ley de Faraday se expresa como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Lo que indica esta ecuación es que un campo magnético que depende del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico, del que su circulación por un camino arbitrario es igual a menos la derivada temporal del flujo magnético en cualquier superficie limitada por el camino cerrado. Finalmente, se tiene la ley de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Esta ley aclara la relación entre los campos eléctricos y magnéticos con corrientes eléctricas, además establece la relación simétrica de la inducción, es decir , la forma como un campo eléctrico variable puede generar un campo magnético y como consecuencia una corriente eléctrica en un circuito.

Las ecuaciones de Maxwell (2.23) y (2.24), conducen a [24]:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

donde $\vec{A}(x)$ es el potencial vector y $\phi(x)$ es el potencial escalar.

Veamos ahora como expresar las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de tensores , ya que de esta manera se hace explícita la covariancia bajo transformaciones de Lorentz.

2.3.1. Tensor electromagnético

Definamos el potencial cuadvivector

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right), \quad (2.26)$$

y el tensor de Maxwell:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.27)$$

$F^{\mu\nu}$ es un tensor anti-simétrico contravariante de rango 2 llamado tensor del campo electromagnético. Puede ser escrito en forma matricial del modo :

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_x & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

(se están empleando unidades naturales $c = \hbar = 1$). Si queremos el tensor del campo electromagnético en forma covariante obtenemos lo siguiente:

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda}F^{\kappa\lambda} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Donde $\eta_{\mu\kappa}$ es la métrica de Minkowsky $diag(1, -1, -1, -1)$. A continuación la representación matricial de manera covariante:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_x & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

La homogeneidad de las ecuaciones (2.23),(2.24) y la inhomogeneidad de (2.22) ,(2.25) pueden ser expresadas en el par de ecuaciones

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.28)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (2.29)$$

Aquí j^ν es un cuadvivector con las siguientes componentes:

$$j^\nu = (\rho, \vec{j})$$

El tensor de Maxwell, y por tanto las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de calibre:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (2.30)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse a partir de la acción:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x A_\mu J^\mu. \quad (2.31)$$

siguiendo el principio variacional ya discutido. La acción S es también invariante de calibre si la corriente J^μ es conservada.

CAPÍTULO 3

CUANTIZACIÓN DE DIRAC

3.1. Formulación Hamiltoniana y Cuantización Canónica

En un sistema lagrangiano descrito por m coordenadas generalizadas independientes $q_1 \dots q_m$, el movimiento viene determinado por las m ecuaciones [12].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \{1, \dots, m\} \quad (3.1)$$

Es posible reformular la dinámica de otra manera. En lugar de las m ecuaciones de 2do orden (3.1), se puede trabajar con $2m$ ecuaciones de 1^{er} orden independientes expresadas en términos de $2m$ variables independientes. Las $2m$ coordenadas evolucionan en el tiempo satisfaciendo las ecuaciones dinámicas correspondientes, trazando una familia de curvas que llenan el espacio de fases sin cortarse unas a otras. En este espacio de fases se pueden utilizar diferentes sistemas de coordenadas. Si se elige el sistema de coordenadas $q_1 \dots q_m$ y $p_1 \dots p_m$ donde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.2)$$

se llega a una formulación de la mecánica conocida como la formulación Hamiltoniana. A partir de las transformaciones de Legendre se puede definir el Hamiltoniano mediante la siguiente relación:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, p_i, t). \quad (3.3)$$

Tomando el diferencial de la expresión anterior

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, p_i, t)\right) \\ dH &= \sum_{i=1}^n dp_i \cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n p_i \cdot d\dot{q}_i - dL(q_i, \dot{q}_i, t) \\ dH &= \sum_{i=1}^n dp_i \cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n p_i \cdot d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Lagrange y la definición de los momentos (3.2), se tiene :

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.4)$$

comparando con (3.5)

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.5)$$

se obtienen un conjunto de ecuaciones que se conocen como ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i; \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.6)$$

y que equivalen a las ecuaciones de Lagrange.

3.2. Corchetes de Poisson

Se definen de la forma:

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \right), \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(q_i, p_i, t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(q_i, p_i, t)$ son funciones del espacio de fases que dependen del tiempo. El corchete de Poisson satisface las siguientes propiedades:

- i $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\} = 0$
- ii $\{\mathbf{u}, k\}$, siendo k una constante.
- iii $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = -\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ (anti-simétrica).
- iv $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} + \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ (linealidad en cada entrada)
- v $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\mathbf{w}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\mathbf{w} + \{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}\mathbf{w}$ (Regla del producto).
- vi $\{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \mathbf{w}\} + \{\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}, \mathbf{u}\} + \{\{\mathbf{w}, \mathbf{u}\}, \mathbf{v}\}$ (Identidad de Jacobi)

Los corchetes fundamentales son:

$$\{q^\alpha, q^\beta\} = 0$$

$$\{p^\alpha, p^\beta\} = 0$$

$$\{q^\alpha, p_\beta\} = \delta_\beta^\alpha,$$

como se, desprende fácilmente de la definición. En términos de los corchetes de Poisson, la dinámica se expresa

$$\dot{A}(q, p) = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.8)$$

Esto se prueba fácilmente con el uso de las ecuaciones de Hamilton.

A nivel de teorías clásicas de campos los corchetes de Poisson (a tiempos iguales) serán:

$$\{\mathbf{u}[Q, \pi], \mathbf{v}[Q, \pi]\} = \int d^D x \left(\frac{\delta \mathbf{u}}{\delta Q_a(x)} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \pi^a(x)} - \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \pi^a(x)} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta Q_a(x)} \right), \quad (3.9)$$

y los corchetes fundamentales son:

$$\{Q_a(x), Q_b(y)\} = \{\pi^a, \pi^b\} = 0$$

$$\{Q_a(x), \pi^b(y)\} = \delta_b^a \delta^D(x - y)$$

donde δ_b^a es la delta de Kronecker y $\delta^D(x - y)$ es la delta de Dirac. En la expresión (3.9) se ha hecho uso de la derivada funcional, el cual es explicada como la diferenciación de un funcional con respecto a su argumento.

$$\delta F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad (3.10)$$

En particular el objeto $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)}$ permite aclarar cómo se transforma el funcional si la función $\phi(x)$ es cambiada en el punto (x) .

3.3. Cuantización a la Dirac

Paul Dirac propuso una formulación canónica para el caso de sistemas singulares [4, 13], esto es, sistemas que cumplen

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Si un sistema es singular, los momentos conjugados

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}, \quad (3.12)$$

y las coordenadas están ligadas, por lo cual no pueden despejarse las velocidades, requisito para la formulación canónica usual. En este caso se tendrá una serie de ligaduras primarias, que nos dice que no todos los q_i y p^i son independientes.

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1 \dots M. \quad (3.13)$$

Estas Ligaduras definen una Sub-variedad sobre el espacio de fase. En este caso, siguiendo a Dirac redefinimos el Hamiltoniano como

$$H \rightarrow H + U^m \phi_m(q, p), \quad (3.14)$$

donde U^m son los multiplicadores de Lagrange para las ligaduras. Como los q 's y p 's no son independientes, la dinámica se extrae de un principio variacional de primer orden con el Hamiltoniano (3.14). Se varía entonces el Lagrangeano

$$L = p_i \dot{q}_i - H(q, p) - U^m \phi_m(q, p) \quad (3.15)$$

3.4. Ligaduras Secundarias

Las ecuaciones de movimiento en el formalismo de Poisson se escriben:

$$\dot{F} = \{F, H\} + U^m \{F, \phi_m\} \quad , \quad (3.16)$$

donde F es cualquier objeto dependiente de los p 's y q 's. Es importante destacar que H es el Hamiltoniano total del sistema, U^m son los multiplicadores de Lagrange y ϕ_m las ligaduras primarias. Estas ecuaciones deben complementarse con las ligaduras primarias, es decir, a partir de (3.16) estudiamos la preservación en el tiempo calculando los corchetes de Poisson entre las ligaduras y el Hamiltoniano Canónico. Puede suceder que aparezcan nuevas relaciones de los p 's y los q 's independientes de las ligaduras primarias, estas relaciones se conocen como ligaduras secundarias.

$$\sigma_i(q, p) = 0 \quad i = 1 \cdots I. \quad (3.17)$$

donde i es el número total de ligaduras secundarias.

Las ligaduras secundarias surgen del requerimiento de que las ligaduras primarias sean consistentes con las ecuaciones de movimiento. Para propósitos de la cuantización es indiferente la distinción entre primarias y secundarias. Por ello escribimos de manera general las ligaduras en su totalidad de modo.

$$\phi_j = 0(q, p) \quad , j = 1 \cdots J \quad (3.18)$$

Una vez que estén preservadas las ligaduras en el tiempo (ya sean primarias o secundarias), al obtener una igualdad de tipo $0 = 0$ implicaría que terminaríamos el proceso de obtención de nuevas ligaduras.

3.5. Ecuaciones Débiles y Fuertes

Es importante introducir una nueva notación al momento de trabajar con ligaduras y sus corchetes de Poisson. El símbolo “ $\approx$ ”, se “lee débilmente igual” e indica que no podemos sustituir las ligaduras antes de ejecutar el corchete de Poisson ya que obtendremos resultados erróneos.

Con esta notación las ligaduras se escriben

$$\phi_j \approx 0 \tag{3.19}$$

Resaltemos que dadas 2 funciones F , G que cumplan

$$F \approx G$$

se puede decir entonces que sobre la sub-variedad de la superficie de ligaduras (3.19) las funciones F, G son débilmente iguales.

Si por el contrario 2 funciones F, G son iguales sobre el espacio de fases y además sobre la sub-variedad decimos entonces que son fuertemente iguales, para ello utilizamos la notación usual “ $=$ ”

$$F = G$$

3.6. Funciones de Primera y Segunda Clase.

Definimos una función $F(q, p)$ de primera clase si:

$$\boxed{\{F, \phi_j\} \approx 0 \quad j = 1, \dots, J.} \quad (3.20)$$

Si ocurre lo contrario $\{F, \phi_j\} \not\approx 0$ entonces se dice que son objetos de 2da clase. Es de vital importancia la diferencia entre ligaduras de primera clase y ligaduras de segunda clase a la hora de su implementación a nivel cuántico.

3.6.1. Cuantización

Si todas las ligaduras existentes en la teoría son de primera clase entonces la cuantización vendrá dada por los siguientes items:

- Las variables canónicas con las que se trabajan pasan a operadores en el espacio de Hilbert y los corchetes de Poisson pasan a ser conmutadores.

$$q_i \rightarrow \hat{q}_i \quad (3.21)$$

$$p^i \rightarrow \hat{p}^i \quad (3.22)$$

$$\{, \} \rightarrow -i[,] \quad (3.23)$$

- La ecuación de *Schrödinger* estará dada por la siguiente expresión.

$$i\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H^*|\Psi\rangle \quad (3.24)$$

- Por último se considerarán kets físicos aquellos que cumplen con:

$$\phi_j(q, p)|\Psi\rangle = 0 \quad \forall_j \quad (3.25)$$

Nos ocuparemos ahora de las ligaduras de segunda clase .

El primer paso es construir una matriz que llamaremos $C_{kk'}$, cuyas componentes están conformadas por los corchetes de Poisson de las ligaduras de segunda clase que denotaremos por χ_i :

$$C_{kk'} = \begin{pmatrix} 0 & \{\chi_1, \chi_2\} & \{\chi_1, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_1, \chi_k\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & 0 & \{\chi_2, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_2, \chi_k\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \{\chi_{k'}, \chi_1\} & \{\chi_{k'}, \chi_2\} & \{\chi_{k'}, \chi_3\} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Se definen los corchetes de Dirac :

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_k\}(C_{kk'})^{-1}\{\chi_{k'}, G\}, \quad (3.27)$$

donde la matriz $(C_{kk'})^{-1}$ es la inversa de $C_{kk'}$. Estos corchetes poseen las siguientes propiedades comunes a los corchetes de Poisson

1. $\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*$
2. $\{FG, H\}^* = F\{G, H\}^* + \{F, H\}^*G$
3. $\{F, G + H\}^* = \{F, G\}^* + \{F, H\}^*G$
4. $\{F, \{G, H\}^*\}^* + \{G, \{H, F\}^*\}^* + \{H, \{F, G\}^*\}^* = 0$

Para fines de nuestro trabajo utilizaremos los corchetes de Dirac para infinitos grados de libertad.

$$\{F(x'), G(y')\}^* = \{F(x'), G(y')\}_{pb} - \int d^3x \int d^3y \{F(x'), \chi_k(x)\} (C_{kk'}(x, y')^{-1}) \{\chi_{k'}(y), G(y')\} \quad (3.28)$$

donde

$$\int d^3y' (C_{kk'}(y, y')) (C_{k'k''}(y', y''))^{-1} = \delta_{kk''} \delta^3(y - y'') \quad (3.29)$$

Una vez establecidos los corchetes de Dirac, las ligaduras de segunda clase se pueden hacer fuertemente cero, pues de (3.27) es claro que:

$$\{\chi_k, F\}^* = 0$$

Con todo esto la cuantización queda de la siguiente manera:

- Las variables canónicas serán operadores del espacio de Hilbert y los corchetes de Dirac serán conmutadores.

$$\{q_i, p^i\}^* \rightarrow -i[\hat{q}_i, \hat{p}^i] \quad (3.30)$$

- La ecuación de *Schrödinger* describe la evolución de los estados de esta forma

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H^* |\Psi\rangle \quad (3.31)$$

- Por último se considera kets físicos aquellos que cumplen con:

$$\phi_i(q, p) |\Psi\rangle = 0 \quad (3.32)$$

donde los ϕ_i son sólamante las ligaduras de primera clase.

3.7. Ejemplo. Cuantización del campo de Maxwell.

A continuación consideramos la acción de Maxwell:

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.34)$$

Al calcular los momentos conjugados se tiene que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad (3.35)$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) inmediatamente será nuestra ligadura primaria. Con esto escribimos el Hamiltoniano de la forma :

$$H = \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L})|_{\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}} \quad (3.37)$$

Al hacer la descomposición espacio-tiempo y reagrupando términos se obtiene que:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) - \int d^3x A_0 \partial_i \pi^i \quad (3.38)$$

El Hamiltoniano canónico será:

$$\begin{aligned} H^* &= H + \int d^3x u(x) \pi^0(x) \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) - \int d^3x A_0 \partial_i \pi^i + \int d^3x u(x) \pi^0(x) \end{aligned}$$

Calculemos entonces la preservación en el tiempo de nuestra ligadura primaria:

$$\dot{\phi} = \{\pi^0(x), H^*(x)\} \approx 0 \quad (3.39)$$

lo cual genera otra ligadura

$$\partial_i \pi^i \approx 0. \quad (3.40)$$

Al preservar esta ligadura se obtiene una igualdad del tipo $0=0$, finalizando así el proceso. Veamos ahora el álgebra de estas ligaduras para saber si son funciones de primera o segunda clase.

Para ello calculamos

$$\{\pi^0(x), \partial_{y^i} E^i(y)\} = 0,$$

con lo cual nos damos cuenta de que ambas ligaduras son objetos de primera clase. Por último aplicamos los requisitos que se necesitan para la postulación de la Mecánica Cuántica.

- Los Campos serán operadores y los corchetes de Poisson pasarán a ser conmutadores.

$$A \rightarrow \hat{A}, \quad \pi \rightarrow \hat{\pi} \quad \{, \} \rightarrow -i[,] \quad (3.41)$$

- Se considera kets físicos aquellos que cumplen con:

$$\hat{\pi}^0(x)|\Psi\rangle = 0 \quad \partial_i \hat{E}^i(x)|\Psi\rangle = 0 \quad (3.42)$$

- La ecuación de *Schrödinger* estará dada por la siguiente expresión.

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H^* |\Psi\rangle \quad (3.43)$$

Al sustituir (3.42) en (3.38) se tiene

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \int d^3x \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) |\Psi\rangle$$

Ahora bien teniendo una teoría invariante de calibre tenemos la libertad de fijar calibre a través de tantas expresiones como ligaduras de primera clase existan. Imponemos las condiciones

$$\partial_i A_i \approx 0 \quad (3.44)$$

$$A_0 \approx 0 \quad (3.45)$$

(3.44) es el calibre de Coulomb. La preservación en el tiempo de esta condición exige (3.45), por lo cual ambas son consistentes.

En resumen tenemos las siguientes ligaduras:

$$\phi_1 = \pi^0(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.46)$$

$$\phi_2 = \partial_i E^i(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.47)$$

$$\phi_3 = A_0(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.48)$$

$$\phi_4 = \partial_i A_i(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.49)$$

Calculamos los corchetes entre sí, para verificar que sean de segunda clase.

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{\phi_1, \phi_4\} = \{\phi_2, \phi_3\} = 0 \quad (3.50)$$

$$\{\phi_2, \phi_4\} = -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \delta^3(x - y) \quad (3.51)$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = -\delta^3(x - y). \quad (3.52)$$

Según (3.26) construimos la matriz $C_{kk'}$ y su inversa resultando:

$$C_{kk'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta^3(x - y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \delta^3(x - y) \\ \delta^3(x - y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \delta^3(x - y) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

y:

$$C_{kk'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^3(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4\pi|x-y|} \\ -\delta^3(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi|x-y|} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

donde se aplicó la inversa de la función de Green en los elementos C_{24} y C_{42} . Con esto calculamos los corchetes de Dirac.

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}^* = (\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu) \delta^3(x-y) + \delta_\mu^i \delta_j^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} \right) \quad (3.55)$$

Es trivial ver que los siguientes corchetes son nulos:

$$\{A^\mu(x), A^\nu(y)\}^* = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}^* = 0 \quad (3.56)$$

De la misma forma en el caso anterior aplicamos los postulados de la Mécanica cuántica

1. Finalmente procedemos a fijar las igualdades de las ligaduras como fuertemente cero

$$\phi_1 = \pi^0(\vec{x}) = 0 \quad , \phi_2 = \partial_i E^i(\vec{x}) = 0 \quad , \phi_3 = A_0(\vec{x}) = 0 \quad , \phi_4 = \partial_i A_i(\vec{x}) = 0 \quad . \quad (3.57)$$

2. Nuevamente los Campos pasan a operadores

$$A \rightarrow \hat{A} \quad \pi \rightarrow \hat{\pi} \quad (3.58)$$

3. Los corchetes de Dirac son ahora conmutadores

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)]^* = i \left[(\delta_\mu^\nu - \delta_\mu^0 \delta_0^\nu) \delta^3(x - y) + \delta_\mu^i \delta_j^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \left(\frac{1}{4\pi|x - y|} \right) \right] \quad (3.59)$$

4. La dinámica se propone como:

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H^* |\Psi\rangle \quad (3.60)$$

$$i \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \int d^3x \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) |\Psi\rangle \quad (3.61)$$

La realización concreta del espacio de ket físicos y de estos operadores es bien conocida en la Literatura. Esto concluye el ejemplo del campo de Maxwell, que será de gran utilidad para el estudio de las teorías que consideraremos en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 4

CUANTIZACIÓN DE UNA TEORÍA TOPOLÓGICA ABELIANA

A lo largo de los últimos años las teorías de Chern-Simons han cobrado interés en el área de la teoría de campos (tanto clásica como cuanticamente) [1]. Se sabe que tienen una importante conexión con invariantes de nudo que fué puesto de relieve por Edward Witten (1988). Así mismo, términos de Chern-Simons permiten un mecanismo de generación de masa invariante de calibre, tanto en teorías Abelianas como no-Abelianas.[2]

Estudiaremos una teoría de calibre Abeliana, invariante bajo difeomorfismos, que corresponde a la segunda contribución de la expansión perturbativa de la teoría de Chern-Simon no-Abeliana [7]. A partir de la acción que se estudiará citaremos sus propiedades y campos que la conforman, estudiaremos los distintos invariantes de nudo que genera dicha teoría topológica Abeliana y luego consideraremos la cuantización canónica de esta teoría. Esta acción fué estudiada en [7, 17] desde el punto de vista clásico y de su cuantización a la Feynman.

4.1. Acción Topológica Abeliana Intermedia

La acción que procederemos a estudiar estará dada por:

$$S = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \{ 4A_\mu^i \partial a_{i\rho}(x) + \frac{2}{3} \epsilon^{ijk} a_{i\mu}(x) a_{j\nu}(x) a_{k\rho}(x) \} - 2 \int d^3x T_i^{\mu x} A_\mu^i(x) + \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{\mu x, \nu y} a_{j\mu}(x) a_{k\nu}(y) \quad (4.1)$$

Vease los distintos objetos que conforman la expresión anterior. Los campos $A_\mu^i(x)$ y $a_\mu^i(x)$ son dos campos de calibre Abelianos; los índices ijk van de 1 a 3, y usamos la convención de Einstein para índices repetidos.

El objeto $T_i^{\mu y}$ es el factor de forma de una curva γ ; este objeto extrae el vector tangente $\vec{x}$ a la curva. Dadas 2 curvas γ y γ' , se puede definir que son equivalentes si sus factores de forma son idénticos. Cabe destacar que dicha distribución no depende de como la parametrizamos. Viene dada por

$$T_i^{\mu y} = \oint_{\gamma_i} dx^\mu \delta^3(x - y) \quad (4.2)$$

Por último se tiene un objeto bi-local asociado a una curva γ_i que se comporta como densidad contravariante independiente de la métrica.

$$T_i^{\mu x, \nu y} = \oint_{\gamma_i} dz^\mu \int_0^z dz'^\nu \delta^3(x - z) \delta^3(y - z') \quad (4.3)$$

Estos objetos cumplen ciertas ligaduras que veremos a continuación.

$$\partial_\mu T_{\gamma_i}^{\mu y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\gamma^{\mu x, \nu y} = (-\delta^3(x - x_0) + \delta^3(x - y)) T_\gamma^{\nu y} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_\gamma^{\mu x, \nu y} = (\delta^3(y - x_0) - \delta^3(y - x)) T_\gamma^{\mu x} \quad (4.6)$$

$$T_\gamma^{(\mu x, \nu y)} \equiv \frac{1}{2} (T_\gamma^{\mu x, \nu y} + T_\gamma^{(\nu y, \mu x)}) = T_\gamma^{\mu x} T_\gamma^{\nu y} \quad (4.7)$$

Es importante resaltar que en estas expresiones x_0 es el punto marcado donde comienza la curva a estudiar. Obsérvese que debido a la última propiedad, en la Acción intermedia sólo contribuye la parte antisimétrica del objeto bilocal $T_i^{\mu x, \nu y}$. Ahora veamos las ecuaciones de movimiento. Haciendo la variación de los respectivos campos se tiene

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_{i\rho} = \frac{1}{2} T_i^{\mu x} \quad (4.8)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho^i(x) = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{ijk} a_{j\nu}(x) a_{k\rho}(x) + \frac{1}{2} \int d^3y \epsilon^{ijk} T_j^{[\mu x, \nu y]} a_{k\nu}(y) \quad (4.9)$$

La solución de la primera ecuación de movimiento se puede obtener a partir de su analogía con la ley de Ampere, cuya solución es la ley de Biot-Savart,

$$a_{i\mu}(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4\pi}\right) \oint_{\gamma_i} dz^\rho \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x - z)^\nu}{|x - z|^3} \quad (4.10)$$

Ahora tomemos la divergencia de ambas ecuaciones de movimiento para estudiar su consistencia. Es trivial ver que para la ecuación (4.8) se cumple

$$\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a_{i\rho})(x) = \partial_\mu(\frac{1}{2}T_i^{\mu x}(x)) = 0,$$

pues la divergencia de un rotor es cero y además, se cumple la ligadura diferencial (4.4).

Para la ecuación (4.9) se obtiene lo siguiente:

$$\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho^i(x)) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{ijk}\partial_\mu(a_{j\nu}(x)a_{k\rho}(x)) + \frac{1}{2}\int d^3y\epsilon^{ijk}\partial_\mu(T_j^{[\mu x, \nu y]})a_{k\nu}(y)$$

Al igual que en el paso anterior el lado izquierdo de la ecuación es igual a cero; ahora veamos término a término la parte derecha de la ecuación. Para ello definimos

$$T_1 = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{ijk}\partial_\mu(a_{j\nu}(x)a_{k\rho}(x))$$

Desarrollando esta derivada del producto y usando la ecuación (4.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{4}\epsilon^{ijk}T_j^{\rho x}a_{k\rho}(x) - \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}T_k^{\nu x}a_{j\nu}(x) \\ &= -(\frac{1}{2})\epsilon^{ijk}T_i^{\mu x}a_{j\mu}(x) \end{aligned}$$

Definimos ahora:

$$T_2 = \frac{1}{2}\int d^3y\epsilon^{ijk}\partial_\mu(T_j^{[\mu x, \nu y]})a_{k\nu}(y)$$

Haciendo uso de la ligadura diferencial (4.5), y agrupando términos obtenemos:

$$T_2 = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\int d^3y a_{k\nu}(y)\delta^3(x-x_0)T_\gamma^{\nu y} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\int d^3y a_{k\nu}(y)\delta^3(x-y)T_\gamma^{\nu y}$$

Al resolver la segunda integral de T_2 vemos que se cancela con T_1 . Así pues :

$$\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho^i(x)) = \epsilon^{ijk}\delta^3(x-x_0)\int d^3y a_{k\nu}(y)T_\gamma^{\nu y}$$

Usando la solución del campo de calibre Abelianas (4.10) y sustituyendo el factor de forma para una curva cerrada, se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho^i(x)) &= \epsilon^{ijk}\delta^3(x-x_0)\int d^3y \oint_{\gamma_j} dx^\nu \delta^3(x-y) \oint_{\gamma_k} dz^\rho \epsilon_{\nu\lambda\rho} \frac{(y-z)^\lambda}{|y-z|^3} \\ &= \epsilon^{ijk}\delta^3(x-x_0) \underbrace{\oint_{\gamma_j} dx^\nu \oint_{\gamma_k} dz^\rho \epsilon_{\nu\lambda\rho} \frac{(x-z)^\lambda}{|x-z|^3}}_{L(j,k)} \end{aligned}$$

$$= \epsilon^{ijk} \delta^3(x - x_0) L(j, k) \quad (4.11)$$

La cantidad $L(j, k) = \oint_{\gamma_j} dx^\nu \oint_{\gamma_k} dz^\rho \epsilon_{\nu\lambda\rho} \frac{(x - z)^\lambda}{|x - z|^3}$ es el número de anudamiento de Gauss, y es el primer invariante de nudo no trivial. Se tiene que las ecuaciones (4.9) son consistentes entonces cuando las curvas tienen números de Gauss nulos entre sí

Se procederá a calcular la Acción on-shell, es decir la acción evaluada sobre las ecuaciones de movimiento. Se obtiene que:

$$S_{os} = \frac{2}{3} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{ijk} a_{i\mu}(x) a_{j\nu}(x) a_{k\rho}(x) + \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{\mu x, \nu y} a_{j\mu}(x) a_{k\nu}(y)$$

Descomponemos ϵ^{ijk} en ambos términos de manera que:

$$\begin{aligned} S_{os}(1) &= \frac{2}{3} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{ijk} a_{i\mu}(x) a_{j\nu}(x) a_{k\rho}(x) \\ &= \frac{2}{3} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon^{123} a_{1\mu} a_{2\nu} a_{3\rho} & + \epsilon^{132} a_{1\mu} a_{3\nu} a_{2\rho} & + \epsilon^{213} a_{2\mu} a_{1\nu} a_{3\rho} \\ + \epsilon^{231} a_{2\mu} a_{3\nu} a_{1\rho} & + \epsilon^{312} a_{3\mu} a_{1\nu} a_{2\rho} & + \epsilon^{321} a_{3\mu} a_{2\nu} a_{1\rho} \end{array} \right\} \\ &= 4 \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(x) a_{3\rho}(x). \end{aligned}$$

Veamos el segundo término:

$$\begin{aligned} S_{os}(2) &= \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{\mu x, \nu y} a_{j\mu}(x) a_{k\nu}(y) \\ &= \int d^3x \int d^3y \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon^{123} T_1^{\mu x, \nu y} a_{2\mu} a_{3\nu} & + \epsilon^{132} T_1^{\mu x, \nu y} a_{3\mu} a_{2\nu} & + \epsilon^{213} T_2^{\mu x, \nu y} a_{1\mu} a_{3\nu} \\ + \epsilon^{231} T_2^{\mu x, \nu y} a_{3\mu} a_{1\nu} & + \epsilon^{312} T_3^{\mu x, \nu y} a_{1\mu} a_{2\nu} & + \epsilon^{321} T_3^{\mu x, \nu y} a_{2\mu} a_{1\nu} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

$$= 2 \int d^3x \int d^3y \left\{ T_1^{[\mu x, \nu y]} a_{2\mu}(x) a_{3\nu}(y) + T_2^{[\mu x, \nu y]} a_{3\mu}(x) a_{1\nu}(y) + T_3^{[\mu x, \nu y]} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(y) \right\}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} S_{os} = & 4 \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(x) a_{3\rho}(x) + 2 \int d^3x \int d^3y T_1^{[\mu x, \nu y]} a_{2\mu}(x) a_{3\nu}(y) \\ & + 2 \int d^3x \int d^3y T_2^{[\mu x, \nu y]} a_{3\mu}(x) a_{1\nu}(y) + 2 \int d^3x \int d^3y T_3^{[\mu x, \nu y]} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(y) \quad (4.12) \end{aligned}$$

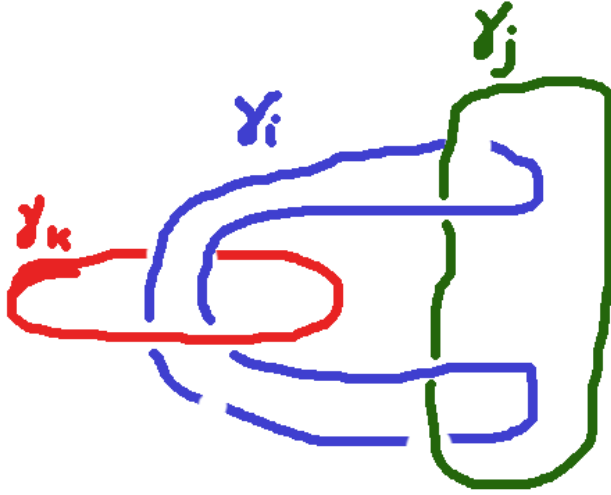


Figura 4.1: interpretación geométrica Acción on-shell

Esta expresión se puede interpretar de la siguiente manera: el primer término de (4.12) nos indica las veces que se intersectan en un mismo punto 3 superficies arbitrarias cuyos bordes son tres curvas. El segundo término cuenta el número de veces que una de las curvas orientadas cruza la superficie bordeada por la segunda curva y luego atraviesa la superficie delimitada por la última curva [7, 19]. En la figura (4.1) se muestra un “nudo” conocido como los anillos

Borromeanos. Puede verse en este caso que $S_{os} = 1$ (con una orientación adecuada de las curvas). En cambio, $S_{os} = 0$ para tres curvas “disjuntas” (no enlazadas). El invariante S_{os} es un invariante no trivial que va “más allá” del número de Gauss, se conoce como el invariante de Milnor $\bar{\mu}(1, 2, 3)$

4.2. Cuantización canónica de la teoría topológica intermedia. Dificultades

A partir de la acción (4.1), haciendo la descomposición espacio-tiempo queda

$$\begin{aligned}
 S = & \int d^3x 4\epsilon^{cd} A_0^i \partial_c a_{id}(x) - \int d^3x 4\epsilon^{cd} A_c^i \dot{a}_{id}(x) - \int d^3x 4\epsilon^{cd} a_0^i \partial_d A_{ic}(x) \\
 & + 2 \int d^3x \epsilon^{ijk} \epsilon^{cd} [a_{i0}(x) a_{jc}(x) a_{kd}(x)] - 2 \int d^3x T_i^{0x} A_0^i(x) - 2 \int d^3x T_i^{cx} A_c^i \\
 & + \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} \left\{ \begin{array}{cc} T_i^{0x,0y} a_{j0}(x) a_{k0}(y) & T_i^{cx,0y} a_{jc}(x) a_{k0}(y) \\ T_i^{0x,dy} a_{j0}(x) a_{kd}(y) & T_i^{cx,dy} a_{jc}(x) a_{kd}(y) \end{array} \right\} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Aquí, empleamos letras de comienzo del alfabeto (c, d) para indicar componentes espaciales. Se definió también $\epsilon^{cd} = \epsilon^{0cd}$. Inmediatamente vemos que la densidad Lagrangiana es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & 4\epsilon^{cd} A_0^i \partial_c a_{id}(x) - 4\epsilon^{cd} A_c^i \dot{a}_{id}(x) - 4\epsilon^{cd} a_0^i \partial_d A_{ic}(x) \\
 & + 2\epsilon^{ijk} \epsilon^{cd} [a_{i0}(x) a_{jc}(x) a_{kd}(x)] - 2T_i^{0x} A_0^i(x) - 2T_i^{cx} A_c^i \\
 & + \int d^3y \epsilon^{ijk} \left\{ \begin{array}{cc} T_i^{0x,0y} a_{j0}(x) a_{k0}(y) & + T_i^{cx,0y} a_{jc}(x) a_{k0}(y) \\ + T_i^{0x,dy} a_{j0}(x) a_{kd}(y) & + T_i^{cx,dy} a_{jc}(x) a_{kd}(y) \end{array} \right\} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

es no-local en el tiempo. Esto, aunado al hecho de que la teoría es singular (en el sentido de Dirac) , son malas noticias a la hora de encarar la cuantización canónica. Por ello, adoptaremos la siguiente estrategia : emplearemos la ecuación de movimiento (4.8), para despejar los $a_{i\mu}$ en

términos de los T' s de un índice de manera parcial, en la acción. Esto es, en el segundo y cuarto término de la acción sustituimos dos “ $a's$ ” y un “ a ” respectivamente, de manera de obtener una teoría ”efectiva“, en el sentido de que reproduzca las ecuaciones de movimiento de la acción original, pero evite la no-localidad (y de paso la no-linealidad) de ello.

Esto se puede hacer de la manera siguiente; integrando(4.8) se tiene

.

$$a_{i\mu}(T_i^{\mu x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int d^3x' \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} T_i^{\nu x}(x-x')^\rho}{|x-x'|^3} \quad (4.15)$$

El cuarto término de la acción lo reescribimos como:

$$\begin{aligned} S_4 &= \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{[\mu x, \nu y]} a_{j\mu}(x) a_{k\nu}(y) \\ &= \int d^3x \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{[\mu x, \nu y]} a_{j\mu}(x) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4\pi}\right) \left[\int d^3y' \frac{\epsilon_{\nu\gamma\lambda} T_k^{\gamma y'}(y-y')^\lambda}{|y-y'|^3} \right]. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\mathcal{J}_{(a_j)}^\mu(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int d^3y \epsilon^{ijk} T_i^{[\mu x, \nu y]} \left[\int d^3y' \frac{\epsilon_{\nu\gamma\lambda} T_k^{\gamma y'}(y-y')^\lambda}{|y-y'|^3} \right], \quad (4.16)$$

proponemos entonces sustituir S_4 por

$$\boxed{\tilde{S}_4 = C_2 \int d^3x a_{j\mu}(x) \mathcal{J}_{(a_j)}^\mu(x)} \quad (4.17)$$

Para el segundo término se tiene S_2

$$S_2 = \frac{2}{3} \int d^3x \epsilon^{ijk} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{i\mu}(x) a_{j\nu}(x) a_{k\rho}(x).$$

Reescribimos los campos $a_{j\nu}(x)$ y $a_{k\rho}(x)$ según lo anterior, es decir, $a_{j\nu}(T_j^{\theta x})$, $a_{k\rho}(T_k^{\beta x})$, y formamos la corriente

$$\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu = \left(\frac{2}{3}\right) \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{ijk} a_{j\nu}(T_j^{\theta x}) a_{k\rho}(T_k^{\beta x}) \quad (4.18)$$

Con esto el segundo término de la acción lo sustituimos por:

$$\boxed{\tilde{S}_2 = C_1 \int d^3x a_{i\mu}(x) \hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu} \quad (4.19)$$

Asociando términos se tiene que:

$$S = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} 4A_\mu^i(x) \partial_\nu a_{i\rho}(x) - 2 \int d^3x T_i^{\mu x} A_\mu^i(x) + \int d^3x a_{i\mu}(x) \hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x) \quad (4.20)$$

donde hemos definido :

$$\boxed{\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x) = C_2 \mathcal{J}_{(a_i)}^\mu(x) + C_1 \hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x).}$$

Las cantidades C_1 y C_2 son coeficientes a determinar de manera que exista concordancia con la Acción anterior, en cuanto a que reproduzca las mismas ecuaciones de movimiento.

Calculemos por tanto las ecuaciones de movimiento con la nueva acción:

Ecuaciones de movimiento variando $A_\mu^i(x)$

$$\frac{\delta S}{\delta A_\beta^l(x')} = 4\epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu a_{l\rho}(x') - 2T_l^{\beta x}(x') = 0$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_{i\rho} = \frac{1}{2} T_i^{\mu x}$$

Nos damos cuenta de que es el mismo resultado que el de la Acción anterior.

Ecuaciones de movimiento variando $a_{i\mu}(x)$

$$4\epsilon^{\mu\nu\gamma} \partial_\nu A_\mu^m(x') + \hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x') = 0$$

$$\epsilon^{\rho\nu\mu}\partial_\nu A_\rho^m(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x).$$

Sustituyamos el valor de $\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x')$ para obtener:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\rho\nu\mu}\partial_\nu A_\rho^m(x) &= -\left(\frac{1}{4}\right)\left[C_2\mathcal{J}_{(a_i)}^\mu(x) + C_1\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x)\right] \\ &= -C_2\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\int d^3y\epsilon^{ijk}T^{\mu x,\nu y}a_{k\nu}\left(T_k^{\gamma y'}\right)\right\} - C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon^{ijk}\epsilon^{\mu\nu\rho}a_{j\nu}\left(T_j^{\theta x'}\right)a_{k\rho}\left(T_k^{\beta x''}\right)\right\} \end{aligned}$$

Esta ecuación la comparamos con (4.9), obteniendo que el valor de los coeficientes debe ser:

$$C_1 = 3, C_2 = -2 \quad (4.21)$$

Por tanto finalmente la acción a la que llegamos será:

$$\boxed{\tilde{S} = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} 4A_\mu^i(x)\partial_\nu a_{i\rho}(x) - 2 \int d^3x T_i^{\mu x} A_\mu^i(x) + \int d^3x a_{i\mu}(x)\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x)} \quad (4.22)$$

donde:

$$\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x) = -2\mathcal{J}_{(a_i)}^\mu(x) + 3\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x) \quad (4.23)$$

Como se observa, se ha obtenido una acción de tipo B-F con 2 densidades de corrientes asociadas a los campos $A_\mu^i(x)$ y $a_{i\mu}(x)$; dichas corrientes son : $T_i^{\mu x}$ (asociada al campo $A_\mu^i(x)$) que como bien sabemos es el factor de forma de un índice , y la otra es $\hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x)$ (asociada al campo $a_{i\mu}(x)$) , que es una expresión que posee combinaciones de factores de forma de uno y de dos índices y que es muy difícil a la hora de interpretar geométricamente, más aún cuando se trabaja en el plano. Es importante añadir que cumple con la invariancia de las transformaciones de calibre .

Sin embargo, la nueva acción on-shell no reproduce el invariante topológico anterior. En efecto a partir de

$$\begin{aligned}\tilde{S} = & \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} 4A_\mu^i(x) \partial_\nu a_{i\rho}(x) - 2 \int d^3x T_i^{\mu x} A_\mu^i(x) \\ & - 2 \int d^3x a_{i\mu}(x) \mathcal{J}_{(a_i)}^\mu(x) + 3 \int d^3x a_{i\mu}(x) \hat{\mathcal{J}}_{(a_i)}^\mu(x)\end{aligned}\quad (4.24)$$

Se obtiene la siguiente acción on shell:

$$\begin{aligned}S_{os} = & 12 \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(x) a_{3\rho}(x) + 4 \int d^3x \int d^3y T_1^{\mu x, \nu y} a_{2\mu}(x) a_{3\nu}(y) \\ & + 4 \int d^3x \int d^3y T_2^{\mu x, \nu y} a_{3\mu}(x) a_{1\nu}(y) + 4 \int d^3x \int d^3y T_3^{\mu x, \nu y} a_{1\mu}(x) a_{2\nu}(y)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Esto difiere de (4.12). Pero este estudio nos sugiere una ruta a seguir para obtener invariantes a partir de una formulación Hamiltoniana: tomando una teoría B-F con corrientes "inspiradas" en las corrientes anteriores, veremos en el capítulo (5) cómo obtener unos invariantes en el plano que representan una especie de "proyección" del invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1, 2, 3)$. Antes, consideraremos la cuantización canónica de una teoría B-F

4.3. Cuantización de una teoría Tipo B-F

Propondremos en esta parte del capítulo una acción de tipo B-F con corrientes generales asociadas a sus campos. Esto nos facilitará generar los resultados que deseamos obtener. Partimos entonces de:

$$S_{(B-F)} = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu \quad (4.26)$$

Primero desglosaremos en espacio-tiempo la acción $S_{(B-F)}$, hallaremos las ligaduras e implementaremos los postulados de la mecánica cuántica.

Hallamos las ecuaciones de movimiento Variando A_μ

$$\epsilon^{\beta\nu\rho}\partial_\nu B_\rho(x') = -\mathcal{J}_{(A)}^\beta(x') \quad (4.27)$$

y además, variando B_μ

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\mu(x') = -\mathcal{J}_{(B)}^\alpha(x') \quad (4.28)$$

La acción propuesta es de primer orden en las derivadas temporales. Además es una teoría topológica, en el sentido de que para construir la acción no existe dependencia de la métrica, lo cual nos hace concluir que los resultados que se obtendrán valen para el caso de variedades distintas a la de Minkowsky $(2+1)$.

Al descomponer en espacio-tiempo la ecuación (4.26) y agrupando términos se obtiene:

$$S_{(B-F)} = \underbrace{\int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho}_{S_{(B-F)1}} + \underbrace{\int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu}_{S_{(B-F)2}} + \underbrace{\int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu}_{S_{(B-F)3}} \quad (4.29)$$

$$S_{(B-F)1} = \int d^3x \epsilon^{cd} A_0 \partial_c B_d - \int d^3x \epsilon^{cd} A_c \dot{B}_d - \int d^3x \epsilon^{cd} \partial_d (A_c) B_0$$

$$S_{(B-F)2} = \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu = \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^0 A_0 + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c \quad (4.30)$$

$$S_{(B-F)3} = \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu = \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^0 B_0 + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c \quad (4.31)$$

$$S_{(B-F)} = (4.29) + (4.30) + (4.31)$$

$$S_{(B-F)} = \int d^3x \epsilon^{cd} A_0 \partial_c B_d - \int d^3x \epsilon^{cd} A_c \dot{B}_d - \int d^3x \epsilon^{cd} \partial_d (A_c) B_0 + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^0 A_0 + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^0 B_0 + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c$$

Escribamos la densidad lagrangeana ($\mathcal{L}$), recordando que $S = \int d^3x \mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \epsilon^{cd} A_0 \partial_c B_d - \epsilon^{cd} A_c \dot{B}_d - \epsilon^{cd} \partial_d (A_c) B_0 + \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu + \mathcal{J}_{(A)}^0 A_0 + \mathcal{J}_{(A)}^c A_c + \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu + \mathcal{J}_{(B)}^0 B_0 + \mathcal{J}_{(B)}^c B_c$$

Calculamos los momentos conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 = \pi_{(A)}^0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_0} = 0 = \pi_{(B)}^0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_d} = -\epsilon^{cd} A_c = \pi_{(B)}^d \quad (4.34)$$

Esta última ecuación no se considera como ligadura según Fadeev-Jackiw [5] ya que el segundo término de la ecuación corresponde a la parte $p\dot{q}$, en los campos A_c y $\dot{B}_d$ respectivamente. Con esto construimos la densidad Hamiltoniana del sistema.

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = -\epsilon^{cd} A_0 \partial_c B_d + \epsilon^{cd} \partial_d (A_c) B_0 - \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu - \mathcal{J}_{(A)}^0 A_0 - \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu - \mathcal{J}_{(B)}^0 B_0 - \mathcal{J}_{(B)}^c B_c$$

Luego se escribe el Hamiltoniano con sus campos agrupados como:

$$\mathcal{H} = - \int d^2x A_0 (\epsilon^{cd} \partial_c B_d + \mathcal{J}_{(A)}^0) + \int d^2x B_0 (\epsilon^{cd} \partial_d (A_c) - \mathcal{J}_{(B)}^0) - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c \quad (4.35)$$

Siguiendo el procedimiento canónico se procede a construir el Hamiltoniano. Debido a la existencia de ligaduras primarias se tiene:

$$\mathcal{H}^*(q_i, p_i) = H(q_i, p_i) + \int d^2x U_m(x) \pi^m(x) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(q_i, p_i) = & - \int d^2x A_0(\epsilon^{cd} \partial_c B_d + \mathcal{J}_{(A)}^0) + \int d^2x B_0(\epsilon^{cd} \partial_d(A_c) - \mathcal{J}_{(B)}^0) - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c \\ & - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c + \int d^2x U_m(x) \pi^m(x). \end{aligned}$$

A continuación se preservan las ligaduras primarias en el tiempo, para eso calculamos el corchete de las ligaduras con el Hamiltoniano canónico.

$$\begin{aligned} \{\pi_{(A)}^0(x), \mathcal{H}^*(x')\} = & \int d^2x \quad \left\{ \pi_{(A)}^0(y), -A_0(\epsilon^{cd} \partial_c B_d + \mathcal{J}_{(A)}^0) + B_0(\epsilon^{cd} \partial_d(A_c) - \mathcal{J}_{(B)}^0) \right. \\ & \left. - \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \mathcal{J}_{(B)}^c B_c + U_{(A)}(x) \pi_{(A)}^0 + U_{(B)}(x) \pi_{(B)}^0 \right\} \end{aligned}$$

Fijémonos que $\pi_{(A)}^0$ no conmuta con el primer término; desarrollando obtenemos una ligadura secundaria que será etiquetada como ϕ_3

$$\boxed{\phi_3 = \epsilon^{cd} \partial_c B_d(y) - \mathcal{J}_{(A)}^0(y) = 0} \quad (4.37)$$

Ahora preservamos ϕ_2

$$\begin{aligned} \int d^2x \quad & \left\{ \pi_{(B)}^0(y), -A_0(\epsilon^{cd} \partial_c B_d + \mathcal{J}_{(A)}^0) + B_0(\epsilon^{cd} \partial_d(A_c) - \mathcal{J}_{(B)}^0) \right. \\ & \left. - \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \mathcal{J}_{(B)}^c B_c + U_{(A)}(x) \pi_{(A)}^0 + U_{(B)}(x) \pi_{(B)}^0 \right\} \end{aligned}$$

Al igual que al preservar ϕ_1 surge una nueva ligadura secundaria que etiquetamos como ϕ_4

$$\boxed{\phi_4 = \epsilon^{cd} \partial_d A_c(y) - \mathcal{J}_{(B)}^0(y) = 0} \quad (4.38)$$

Para continuar con la cuantización debemos seguir preservando las ligaduras en el tiempo, para ello disponemos de ϕ_3 y ϕ_4 . Es fácil verificar que :

$$\int d^2x \{ \epsilon^{cd} \partial_c B_d(y) - \mathcal{J}_{(A)}^0(y), H^*(x) \} = 0. \quad (4.39)$$

$$\int d^2x \{ \epsilon^{cd} \partial_d A_c(y) - \mathcal{J}_{(B)}^0(y), H^*(x) \} = 0. \quad (4.40)$$

En resumen hemos obtenido lo siguiente:

LIGADURAS PRIMARIAS	$\phi_1 = \pi_{(A)}^0 \approx 0$
	$\phi_2 = \pi_{(B)}^0 \approx 0$
LIGADURAS SECUNDARIAS	$\phi_3 = \epsilon^{cd} \partial_c B_d(x) - \mathcal{J}_{(A)}^0 \approx 0$
	$\phi_4 = \epsilon^{cd} \partial_d A_c(x) - \mathcal{J}_{(B)}^0 \approx 0$

Como no se obtuvieron mas ligaduras, ya que se llegó a igualdades del tipo $0=0$, el proceso culmina aquí. Verifiquemos de qué tipo son nuestras 4 ligaduras. Se tiene que:

1. $\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0$
2. $\{\phi_1, \phi_3\} \approx 0$
3. $\{\phi_1, \phi_4\} \approx 0$
4. $\{\phi_2, \phi_3\} \approx 0$
5. $\{\phi_2, \phi_4\} \approx 0$
6. $\{\phi_3, \phi_4\} \approx 0$

Es trivial verificar que los primeros 5 corchetes sean igual a cero, sin embargo el corchete número 6 no es tan obvio demostrar que es igual a cero. Veamos:

$$\{\phi_3, \phi_4\} = \left\{ \epsilon^{cd} \partial_c B_d(x) - \mathcal{J}_{(A)}^0, \epsilon^{cd} \partial_d A_c(x) - \mathcal{J}_{(B)}^0 \right\}$$

$$\{\phi_3, \phi_4\} = -\epsilon^{cd} \frac{\partial^2}{\partial y^c \partial x^d} \left\{ B_d(y), \pi_{(B)}^j \right\}$$

$$\{\phi_3, \phi_4\} = -\frac{\partial^2}{\partial y^c \partial x^d} \epsilon^{cd} \delta^2(x - y) = 0$$

Es importante resaltar que para resolver el corchete de Poisson nos basamos en el hecho de que $\epsilon^{ij} A_i(x)$ es el momento conjugado del campo B_j , a consecuencia de esto nos damos cuenta de que el resultado anterior es la contracción de un objeto simétrico (derivada segunda) con uno anti-simétrico (Tensor de Levi-Civita), y esto es igual a cero.

Al obtener estos resultados se concluye que nuestras ligaduras son objetos de Primera Clase. A continuación establecemos los postulados de la mecánica cuántica para el caso de ligaduras de primera clase, teniendo lo siguiente: un Hamiltoniano canónico que posee 2 multiplicadores de Lagrange, 2 ligaduras primarias y 2 secundarias. Ahora aplicaremos los postulados de la Mecánica cuántica..

1. Los campos pasan a ser operadores

$$A_\mu, B_\mu, \pi_{(A)}^\mu, \pi_{(B)}^\mu \longrightarrow \hat{A}_\mu, \hat{B}_\mu, \hat{\pi}_{(A)}^\mu, \hat{\pi}_{(B)}^\mu$$

2. Los corchetes de Poisson pasan a conmutadores

$$\{, \} \longrightarrow -i[,]$$

en donde se ve que:

$$[\hat{A}_0(x), \hat{\pi}^0(x')] = i\delta^2(x - x') \quad (4.41)$$

$$[\hat{A}_k(x), \hat{\pi}^j(x')] = i\delta^2(x - x')\delta_j^k \quad (4.42)$$

$$[\hat{B}_0(x), \hat{\pi}^0(x')] = i\delta^2(x - x') \quad (4.43)$$

$$[\hat{B}_g(x), \hat{\pi}^j(x')] = i\delta^2(x - x')\delta_j^g \quad (4.44)$$

3. Los kets físicos cumplen lo siguiente

$$\hat{\pi}_{(A)}^0(x)|\Psi\rangle = 0 \quad (4.45)$$

$$\hat{\pi}_{(B)}^0(x)|\Psi\rangle = 0 \quad (4.46)$$

$$\left(\epsilon^{cd}\partial_c\hat{B}_d(x) - \mathcal{J}_{(A)}^0(x)\right)|\Psi\rangle = 0 \quad (4.47)$$

$$\left(\epsilon^{cd}\partial_d\hat{A}_c(x) - \mathcal{J}_{(B)}^0(x)\right)|\Psi\rangle = 0 \quad (4.48)$$

4. La dinámica estará dada por:

$$i\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H^*|\Psi\rangle \quad (4.49)$$

Usando (4.47) y (4.48) en (4.35) obtenemos que:

$$i\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = (-\int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c)|\Psi\rangle \quad (4.50)$$

Teniendo estos 4 postulados el proceso de cuantización de la teoría topológica Abeliana está formulado finalmente, donde es de importancia resaltar la existencia de cuatro restricciones en el espacio de Hilbert.

La construcción explícita del espacio de Hilbert junto con los operadores que representan a la teoría finalizaría completamente el proceso de cuantización. Sin embargo esto último esta fuera de nuestros objetivos iniciales.

En resumen, se ha estudiado la acción topológica Abeliana intermedia S , dicha teoría presenta términos no-locales que impiden realizar la cuantización de Dirac . Se propuso entonces una nueva acción que suprimiera el hecho de que fuese conformada por términos no -locales, para ello se estudió con cuidado las soluciones de una de las ecuaciones de movimiento (4.10) de manera de eliminar el problema antes mencionado. Esta teoría sin embargo, no reproduce el invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1,2,3)$ de la teoría original. En este punto nuestra investigación se orientará a considerar entonces una teoría nueva, basada en la B-F, pero con corrientes que proporcionan una “proyección” del invariante de Milnor en plano espacial.

CAPÍTULO 5

UN INVARIANTE DE CURVAS CERRADAS Y PUNTOS, Y HAMILTONIANO ON-SHELL DE LA TEORÍA B-F

La teoría intermedia produce el invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1, 2, 3)$ cuando se calcula la acción on-shell. Dicho invariante está bien definido cuando los números de Gauss de cada par de curvas son nulos [15, 16, 19].

Este capítulo consta de dos partes. En la primera, presentamos un invariante de puntos y curvas en el plano, que imita el invariante de Milnor en el espacio en el sentido siguiente. El análogo del número de Gauss en el plano, es un objeto asociado a una curva y un punto, que detecta si el punto está dentro o fuera de la curva.

Entonces, siendo que el número de Milnor detecte un anudamiento de tres curvas sin que estén anudadas dos a dos, nos preguntamos si es posible, en el plano, un objeto que detecte cuándo una curva cerrada se “anuda” con 2 puntos, sin que esté “anudada” con cada uno individualmente. En la primera parte de este capítulo se presenta entonces este defecto.

En la segunda parte estudiamos cómo se puede obtener este invariante por métodos físicos, a partir de la formulación Hamiltoniana, de una teoría B-F con corrientes topológicas apropiadas.

5.1. “Invariante de Milnor” en el Plano

A una superficie Σ en $\mathbb{R}^2$ podemos asociarle la 0-forma siguiente [15]:

$$\mathcal{F}(x, \Sigma) = \int_{\Sigma^3} dx' \delta^2(x' - x) \quad (5.1)$$

Recordemos que bajo transformaciones de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ $y^\mu \longrightarrow y'^\mu(y)$ se cumple que:

$$\delta^2(y) \longrightarrow \delta^2(y') = \frac{1}{J(y)} \delta^2(y) \quad (5.2)$$

$$d^2y \longrightarrow d^2y' = J(y) d^2y, \quad (5.3)$$

donde el J es el jacobiano de la transformación:

$$J(y) = \det \left| \frac{\partial y'^\mu}{\partial y^\nu} \right|. \quad (5.4)$$

El jacobiano que aporta el elemento de superficie compensa el inverso del Jacobiano asociado a la delta de Dirac, por tanto este objeto es invariante bajo difeomorfismos. Además es claro que no es necesario utilizar la métrica para su construcción.

Ahora introduciremos el objeto $\mathcal{G}_\mu$ asociado a curvas. Esta cantidad surge a partir de la derivada exterior del objeto $\mathcal{F}(y, \Sigma)$, [15].

$$\mathcal{G}_\mu(y, \partial_\Sigma) = -\frac{\partial}{\partial y^\mu} \mathcal{F}(y, \Sigma)$$

$$\mathcal{G}_\mu(y, \partial_\Sigma) = \epsilon_{\mu\nu} \int_{\partial\Sigma} \delta^2(x - x') dx'^\nu \quad (5.5)$$

Este objeto también es independiente de la métrica. el dx^ν es el elemento de línea correspondiente al borde $\partial\Sigma$ de Σ . La expresión 5.5 se puede extender al caso de curvas abiertas. Puede

verse que $\mathcal{G}_\mu$ es una 1-forma independiente de la métrica.[15]

Ahora se trabajará con los ya mencionados factores de forma $T_i^{\mu x}$ y sus extensiones bi-locales $T_i^{\mu x, \nu y}$

$$T_{(\gamma)}^\nu(x) = \int_\gamma dx'^\nu \delta^n(x - x') \quad (5.6)$$

$$T_{(\gamma)}^{\mu x, \nu y}(x) = \int_\gamma dx'^\mu \int_0^{x'} dy'^\nu \delta^2(x - x') \delta^2(y - y') \quad (5.7)$$

Con estos objetos construimos un invariante de curvas y puntos similar a la expresión del invariante de Milnor $\bar{\mu}(1, 2, 3)$ (4.12), vease la figura (5.1):

$$I(\mathcal{G}_\mu^{(1)}(x)\mathcal{G}_\nu^{(2)}(x)\mathcal{F}(\Sigma^{(3)})) = \underbrace{\int d^2x (\epsilon^{\mu\nu} \mathcal{G}_\mu^{(1)}(x)\mathcal{G}_\nu^{(2)}(x)\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}))}_{I_{(i)}} + \lambda \underbrace{\int d^2x \int d^2y T_{(3)}^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_\mu^{(1)}(x)\mathcal{G}_\nu^{(2)}(y)}_{I_{(ii)}} \quad (5.8)$$

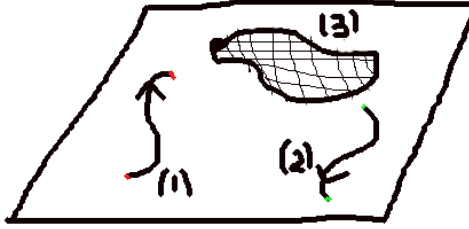


Figura 5.1: Representación de caminos

donde $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$ están asociados a las curvas abiertas, $\mathcal{F}^{(3)}$ a una superficie arbitraria cerrada bordeada por una curva; además se empleó la densidad local antisimetrizada $T_i^{[\mu x, \nu y]}$ y λ es una constante a determinar, exigiendo que I sea independiente de las curvas γ_1 y γ_2 , y sólo depende de sus extremos. Para probar esto, consideremos la variación ΔI de I , cuando se toman 2 caminos γ_1 y γ_1' que tienen los mismos punto inicial y final. Se tiene:

$$\Delta I = \Delta I_{(I)} + \Delta I_{(II)} \quad (5.9)$$

Empecemos con $\Delta I_{(II)} =$

$$\Delta I_{(II)} = \lambda \int d^2x \int d^2y T_{(3)}^{[\mu x, \nu y]} \Delta \mathcal{G}_\mu^{(1)}(x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(y) \quad (5.10)$$

Veamos la variación $\Delta \mathcal{G}_\mu^{(1)}$

$$\Delta \mathcal{G}_\mu^{(1)} = \mathcal{G}_\mu^{(1)'} - \mathcal{G}_\mu^{(1)} \quad (5.11)$$

$$= \mathcal{G}_\mu^{(1)}(\partial \Sigma^{(1)}) = -\partial_\mu \mathcal{F}^{(1)}(\Sigma^{(1)}), \quad (5.12)$$

Esto cumple ya que si:

$$\mathcal{F}^{(n)}(x, \gamma) \equiv \int_{\Sigma^3} d^3x' \delta^2(x' - x)$$

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{(n)}(x, \gamma) \equiv \int_{\Sigma^3} d^3x' \delta^2(x' - x)$$

donde aparece $\epsilon_{\mu\nu}$ debido a que es una derivada exterior que se cumple gracias al teorema de la divergencia por lo tanto

$$-\partial_\mu \mathcal{F}^{(n)}(x, \gamma) \equiv \oint_{\gamma^3 = \partial \Sigma^3} \epsilon_{\mu\nu} dx'^\nu \delta^2(x' - x) = \mathcal{G}_\mu(\partial \Sigma, x)$$

vemos entonces que $\Sigma_{(1)}$ es la superficie definida por la composición $\gamma'_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}$ de las curvas $\gamma'_{(1)}$ y $\gamma_{(1)}$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \Delta I_{(II)} &= \lambda \int d^2x \int d^2y T_{(3)}^{[\mu x, \nu y]} (-\partial_\mu \mathcal{F}^{(1)}(x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(y)) \\ &= \lambda \int d^2x \int d^2y \partial_\mu (T_{(3)}^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{F}^{(1)}(x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(y)) \end{aligned}$$



Figura 5.2: Curva con variación de extremos

Sustituyendo (5.12) en (5.10) e integrando por partes y utilizando las ligaduras diferenciales del objeto bi-local se obtiene que:

$$\Delta I_{(II)} = \lambda \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)}) \mathcal{F}(\partial \Sigma^{(3)}, y_f^{(2)}) - \lambda \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)}) \mathcal{F}(\partial \Sigma^{(3)}, y_i^{(2)}) + \lambda \int d^2 y T_{(3)}^{\nu y} \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, y) \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} \quad (5.13)$$

Ahora me enfoco en la Variación de $\Delta I_{(I)}$ recordemos:

$$I_{(I)} = \int d^2 x (\epsilon^{\mu\nu} \mathcal{G}_\mu^{(1)}(x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(x) \mathcal{F} \Sigma^{(3)}) \quad (5.14)$$

$$\Delta I_{(I)} = \int d^2 x (\epsilon^{\mu\nu} \Delta \mathcal{G}_\mu^{(1)}(x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(x) \mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x)) \quad (5.15)$$

$$= \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} (-\partial_\mu \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(x) \mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x)),$$

donde hemos usado (5.5). Nuevamente integrando por partes y usando las ligaduras diferenciales mencionadas anteriormente luego de ciertos pasos que omitimos se obtiene :

$$\Delta I_{(I)} = -\mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_f^{(2)}) \mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_f^{(2)}) + \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_i^{(2)}) \mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_i^{(2)}) - \int d^2 x \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}) \mathcal{G}_\nu^{(2)}(x) T_{(3)}^\nu(x) \quad (5.16)$$

Así :

$$\Delta I = -\mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_f^{(2)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_f^{(2)}) + \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_i^{(2)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_i^{(2)}) - \int d^2x \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}) \mathcal{G}_{\nu}^{(2)}(x) T_{(3)}^{\nu}(x) \\ - \lambda \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)})\mathcal{F}(\partial\Sigma^{(3)}, y_f^{(2)}) + \lambda \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)})\mathcal{F}(\partial\Sigma^{(3)}, y_i^{(2)}) + \lambda \int d^2y T_{(3)}^{\nu y} \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, y) \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)}$$

El 3er término y 6to término se cancelan solo si se ajusta la constante $\lambda = 1$, quedando así:

$$\boxed{\Delta I = -\mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_f^{(2)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_f^{(2)}) + \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_i^{(2)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, x_i^{(2)}) - \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, y_f^{(2)}) + \mathcal{F}(\Sigma^{(1)}, x_0^{(3)})\mathcal{F}(\Sigma^{(3)}, y_i^{(2)})} \quad (5.17)$$

Si prescribimos que la superficie $\Sigma^{(3)}$ no puede contener a ninguno de los puntos inicial o final de ninguna de las curvas $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$, vemos que ΔI es cero. Como mencionamos antes esta restricción es la extensión natural de la restricción en dimensión $D = 3$, que establece que el invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1, 2, 3)$ esté definido, cuando los números de Gauss de las curvas $\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma_{(3)}$ son cero.

Como una aplicación del invariante obtenido consideremos la configuración de la siguiente figura (5.3)

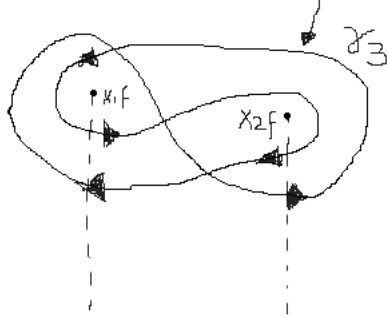


Figura 5.3: Interpretación del Invariante de curvas total

Las curvas (punteadas) $\gamma_{(1)}$ y $\gamma_{(2)}$ comienzan en el infinito espacial. La curva cerrada $\gamma_{(3)}$ no encierra a ninguno de los dos puntos (debido a que los “rodea” dos veces a cada uno, pero con sentidos opuestos). Sin embargo, la curva $\gamma_{(3)}$ está “anudada” con los puntos. Al quitar cualquiera de ellos, la estructura se “desanuda” trivialmente. Es este entonces un caso de “proyección” en el plano de los anillos Borromeanos. Puede verse que el invariante obtenido en esta sección detecta el anudamiento de esta estructura

5.2. Hamiltoniano On-Shell

Una vez demostrada la consistencia del Invariante de curvas y puntos propuesto en la sección anterior podemos entonces proceder al siguiente paso. En esta sección partiremos de una teoría B-F con dos corrientes asociadas a sus respectivos campos de manera de obtener el Hamiltoniano On-Shell, (el Hamiltoniano evaluado sobre las ecuaciones de movimiento) y obtendremos, bajo ciertas condiciones el invariante de la sección anterior.

Recordemos del capítulo 4 la acción.

$$S = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + \int d^3x \mathcal{J}_{(A)}^\mu A_\mu + \int d^3x \mathcal{J}_{(B)}^\mu B_\mu, \quad (5.18)$$

las ecuaciones de movimiento

$$\epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu B_\rho(x') = -\mathcal{J}_{(A)}^\beta(x') \quad (5.19)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\mu(x') = -\mathcal{J}_{(B)}^\alpha(x'), \quad (5.20)$$

y el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\int d^2x A_0 (\epsilon^{cd} \partial_c B_d + J_{(A)}^0)}_{\mathcal{H}_1} + \underbrace{\int d^2x B_0 (\epsilon^{cd} \partial_d A_c - J_{(B)}^0)}_{\mathcal{H}_2} - \underbrace{\int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c}_{\mathcal{H}_3}. \quad (5.21)$$

Utilizando las ecuaciones de movimiento en cada término del Hamiltoniano anterior de manera de generar el Hamiltoniano on-shell, se tiene

$$\mathcal{H}_1 = - \int d^2x A_0 (\epsilon^{cd} \partial_c B_d + J_{(A)}^0) = 0$$

$$\mathcal{H}_2 = \int d^2x B_0 (\epsilon^{cd} \partial_d A_c - J_{(B)}^0) = 0$$

Por lo tanto sólo permanecen $\mathcal{H}_3$ y $\mathcal{H}_4$

$$H_{os} = - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c \quad (5.22)$$

Ahora proponemos las siguientes corrientes conservadas de manera de ver que la teoría a nivel Hamiltoniano produce un invariante de "nudo" en el plano:.

$$\mathcal{J}_{(A)}^\mu = \begin{cases} \mathcal{J}^0 = \sum_{a=1}^N q_N \delta^2(x - x_a) \\ \mathcal{J}^i = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}_{(B)}^\mu = \begin{cases} \mathcal{J}^0 = 0 \\ \mathcal{J}^i = T_{\gamma}^{ix} = \int_{\gamma_i} dy^i \delta^2(x - y) \end{cases}$$

Descompongamos en espacio-tiempo las ecuaciones de movimiento

$$\epsilon^{\beta\nu\rho} \partial_\nu B_\rho(x) = -\mathcal{J}_{(A)}^\beta(x) \quad (5.23)$$

$$\boxed{\epsilon^{ij} \partial_i B_j(x) = -\mathcal{J}_{(A)}^0(x)} \quad (5.24)$$

$$\boxed{\epsilon^{i0j} \partial_0 B_j(x) + \epsilon^{ij0} \partial_j B_0(x) = -\mathcal{J}_{(A)}^i(x) = 0} \quad (5.25)$$

$$\epsilon^{\alpha\nu\mu} \partial_\nu B_\rho(x) = \mathcal{J}_{(A)}^\alpha(x) \quad (5.26)$$

$$\boxed{\epsilon^{ij} \partial_i A_j(x) = \mathcal{J}_{(B)}^0(x) = 0} \quad (5.27)$$

$$\boxed{\epsilon^{i0j} \partial_i A_j(x) + \epsilon^{ij0} \partial_j A_0(x) = \mathcal{J}_{(B)}^i(x)} \quad (5.28)$$

Entonces (5.24) queda

$$\epsilon^{ij} \partial_i B_j(x) = -q_N \delta^2(x - x_a) \quad (5.29)$$

La ecuación de Poisson en el plano admite una función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta^2(x - y) \quad (5.30)$$

Comparando con nuestra ecuación de movimiento (5.24) se puede afirmar que :

$$\partial_i G(x, y) = (\epsilon^{ij} B_j), \quad (5.31)$$

por tanto

$$(\epsilon^{ij} B_j) = \partial_i \ln |x - y|$$

$$\Rightarrow B_j = \epsilon_{ij} \frac{(x - y)^i}{|x - y|^2} \quad (5.32)$$

De los términos que sobrevivieron del Hamiltoniano on-shell (5.22), el primer término se cancela debido a que la corriente espacial del Campo A se fijó como cero. Por lo tanto nuestro Hamiltoniano on shell queda:

$$H_{os} = - \int d^2 x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c$$

Sustituimos el valor de la corriente espacial del campo B obteniendo:

$$\begin{aligned} H_{os} &= - \int d^2 x \mathcal{J}_{(B)}^i B_i \\ &= - \int d^2 x \mathcal{T}_{(B)}^{ix} B_i \\ &= - \int d^2 x \oint dy^i \delta^2(x - y) B_i \\ &= - \int dy^i B_i \end{aligned}$$

Así pues

$$\boxed{H_{os} = - \oint_{\gamma_i} dy^i \epsilon_{ij} \frac{(x - y)^j}{|x - y|^2}} \quad (5.33)$$

Para nuestros propósitos la ecuación (5.33) se ve de la misma manera que la ley de Gauss. Haciendo un pequeño esbozo esta ley nos proporciona información para detectar si una carga se encuentra en una superficie arbitraria , es decir,

Si integramos la componente normal $\hat{n}$ de $\vec{E}$ sobre toda la superficie [6], es fácil ver que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot da = \begin{cases} 4\pi q & \text{si } q \text{ se encuentra dentro de } S \\ 0 & \text{si } q \text{ se encuentra fuera de } S \end{cases}$$

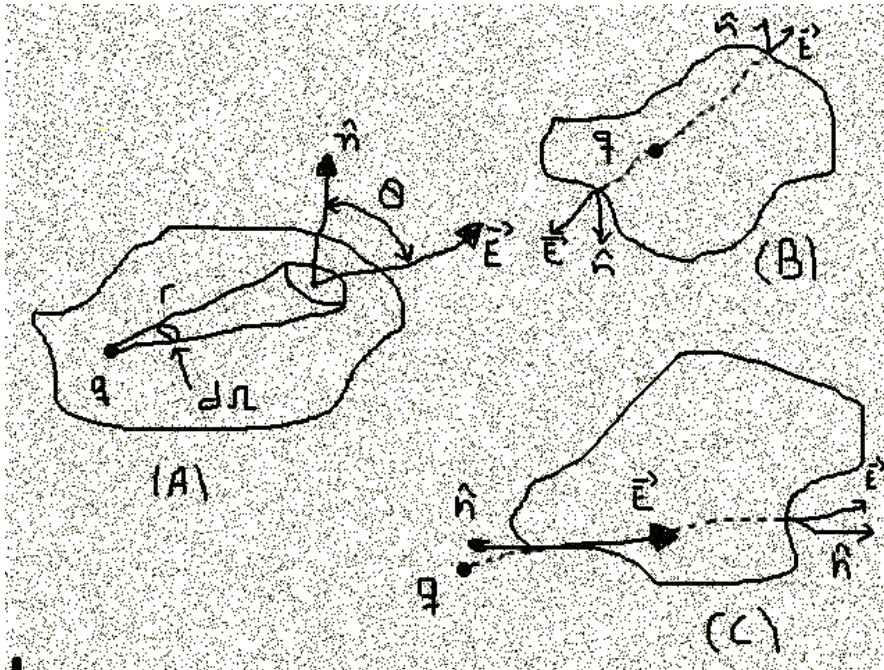


Figura 5.4: Ley de Gauss

, es decir , el invariante será no nulo si el punto (x) se encuentra dentro de la curva cerrada γ_i , si sucede lo contrario (punto afuera de la curva γ_i) su valor sería nulo.

Estudiemos la conservación de corrientes topológicas un poco mas complicadas que nos darán como resultado el invariante estudiado al comienzo del capítulo. Tomemos

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \underbrace{\epsilon^{\mu\nu} \mathcal{G}_\nu^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)}(x)}_{\mathcal{J}_{(1)}^\mu} + \lambda \underbrace{\int d^2y T_{(3)}^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_\nu^{(2)}(y)}_{\mathcal{J}_{(2)}^\mu}$$

Se puede probar que dicha corriente es conservada.

$$\partial_\mu J_{(T)}^\mu = 0$$

Consideremos entonces:

$$\mathcal{J}_{(A)}^\mu = \begin{cases} \mathcal{J}^0 = 0 \\ \mathcal{J}^i = \epsilon^{ij} \mathcal{G}_j^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)}(x) + \lambda \int d^2y T^{[ix, jy]} \mathcal{G}_j^{(2)}(y) \end{cases}$$

$$\mathcal{J}_{(B)}^\mu = \begin{cases} \mathcal{J}^0 = \delta^2(x - x_f^{(1)}) - \delta^2(x - x_i^{(1)}) \\ \mathcal{J}^i = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento (5.27) y resolviendola se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij} \partial_i A_j(x) &= \mathcal{J}_{(B)}^0(x) \\ &= \delta^2(x - x_f^{(1)}) - \delta^2(x - x_i^{(1)}) \\ &= \partial_i T_{(1)}^i(x) \\ &= \partial_i T_{(1)}^i(x), \end{aligned}$$

$$(\epsilon^{ij} A_j(x)) = T_{(1)}^i(x) + \epsilon^{ij} \partial_j Z \Rightarrow A_j(x) = \mathcal{G}_j^{(1)} + \partial_j Z, \quad (5.34)$$

donde Z es una función arbitraria.

Reescribiendo el Hamiltoniano on-shell , fijando la condición de corriente impuesta en el campo B y además usando la ecuación (5.34) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 H_{os} &= - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c - \int d^2x \mathcal{J}_{(B)}^c B_c \\
 &= - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^c A_c \\
 &= - \int d^2x \mathcal{J}_{(A)}^i \mathcal{G}_j^{(1)} + \partial_i Z \\
 &= - \int d^2x \left[\epsilon^{ij} \mathcal{G}_j^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)}(x) + \lambda \int d^2y T^{[ix,jy]} \mathcal{G}_j^{(2)}(y) \right] \left[\mathcal{G}_j^{(1)}(x) + \partial_i Z \right] \\
 &= - \left[\int d^2x \epsilon^{ij} \mathcal{G}_j^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)}(x) \mathcal{G}_i^{(1)} \right] + \left[\int d^2x \epsilon^{ij} \mathcal{G}_j^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)} \partial_j Z \right] + \left[\lambda \int d^2y T^{[ix,jy]} \mathcal{G}_j^{(2)}(y) \mathcal{G}_i^{(1)}(x) \right] + \\
 &\quad \left[\lambda \int d^2y T^{[ix,jy]} \mathcal{G}_j^{(2)}(y) \partial_j Z \right] \\
 H_{os} &= - \int d^2x \epsilon^{ij} \mathcal{G}_j^{(2)}(x) \mathcal{F}^{(3)}(x) \mathcal{G}_i^{(1)} + \lambda \int d^2y T^{[ix,jy]} \mathcal{G}_j^{(2)}(y) \mathcal{G}_i^{(1)}(x) \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Este resultado para el Hamiltoniano on-shell es el mismo Invariante de nudo con el que se trabajo al principio de este capítulo. En resumen, hemos obtenido, mediante el estudio canónico de una teoría de tipo B-F en $D = 3$, un invariante de curvas y superficies que puede interpretarse como una "proyección "del invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1, 2, 3)$ en el plano.

Una vez obtenido la ecuación (5.17) se discute 2 casos con distintas configuraciones de corrientes asociadas a los campos con la cual mediante el uso del Hamiltoniano on-shell se obtuvieron 2 invariantes, en el primer caso se discute el resultado usando la similitud con la ley de Gauss y para el segundo se obtuvo el mismo invariante que se dispuso al principio del capítulo. Existe la interrogante de que pasaría si en dicha configuraciones se estudia la corriente descrita por la ecuación (4.23), la respuesta es que no existe la manera de plasmarla para un espacio plano donde gobiernan las curvas y los puntos debido a su composición de objetos bi-locales y factores de forma.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente Trabajo Especial de Grado se ha aplicado la Cuantización a la Dirac para lagrangianos singulares a primer orden [4, 5, 13] de una teoría topológica Abeliana intermedia que fué propuesta recientemente[7]. Para ello se formuló una nueva teoría $\tilde{S}$ que, a diferencia de la original, fuese local en el tiempo. Esta teoría de tipo B-F ,si bien reproduce las mismas ecuaciones de movimiento, no conduce a la misma acción on-shell, ni por tanto, al mismo invariante de nudo. Por otra parte, la corriente (en cualquiera de las dos) no admite una interpretación geométrica sencilla cuando se proyecta al 2-espacio en la formulación canónica. Por ello, se propuso una tercera acción, también de tipo B-F, pero con corrientes susceptibles de interpretación geométrica en el plano. Se estudiaron dos casos. El primero , se probó que el Hamiltoniano on-shell conduce a una proyección del número de anudamiento de Gauss. En el segundo , más interesante y complejo, el Hamiltoniano on-shell produce un invariante de puntos y curvas, aún no reportado en la literatura (hasta donde sabemos), y que debe interpretarse como una proyección en el plano del invariante de Milnor $\tilde{\mu}(1, 2, 3)$ que es un invariante altamente no trivial asociado a ciertas estructuras anudadas de complejidad.

Estos resultados podrían ser extendidos para obtener proyecciones de invariante de nudo aún más complejos . Por otra parte, resulta de interés el explorar bajo qué condiciones el Hamiltoniano on-shell, en general, conduce a invariantes topológicas , del mismo modo que lo hace la acción on-shell. Finalmente podría ser interesante el hecho de poder implementar fijaciones de calibres con el fin de obtener nuevas ligaduras de segunda clase, con la clara observación que se debe tener el más mínimo cuidado debido a que pueden aparecer problemas de inconsistencias en las ecuaciones de movimiento generadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A.Polychronakos. *Abelian Chern-Simons Theories in $(2+1)$ Dimensions*. *Ann phys* 203 231 (1990)
- [2] E.Witten *Topological Quantum Fields Theory*, *common Math.Phys* 112,353 386(1988)
- [3] L.H.Kauffman *knots and applications*
- [4] P.Dirac *Lectures on Quantum Mechanics*. (Yeshiva University, New York, 1964)
- [5] L.Fadeev, R.Jackiw *Hamiltonian Reduction of unconstrained and constrained system*, *Phys.Rev.Lett.* 60, 1692 (1988)
- [6]
- [7] L.Leal, J.Pineda *The Topological Theory Of The Milnor Invariant $\bar{\mu}(1, 2, 3)$* (2008)
- [8] J.M.F. Labastida *Knot Invariant And Chern-Simons Theory*, *Universidad De Santiago De Compostela* (2000)
- [9] E.Fuenmayor *Tesis De Doctorado, Estudios De Representaciones Geométricas E Invariantes De Nudos Een Teorías Topológicas De Calibre Acopladas Con Materia*

- [10] V.Barger,M.Olson *Classical Mechanics: A Modern Perspective,2nd edition,(1971)*
- [11] L.D.Landau,E.M.Lifshitz *Teoría Clásica De Los Campos,vol 2,curso de física teórica*
J.D.Jackson. *Classical Electrodynamics.Jhon Willey and Sons*
- [12] H.Goldstein *Mecánica Clásica,(1987)*
- [13] M.Hennaux,C.Teitelboim *Quantizations of Gauge System (1992)*
- [14] J.Camacharo *T.E.G Algunas Aplicaciones Del Método De Cuantización de Dirac(1994)*
- [15] L.Leal *Ecuaciones Clásicas De La Teoría De Chern-Simons e Invariantes De Nudos.Trabajo De Ascenso a la Categoría De Profesor Titular ,Universidad Central de Venezuela,Caracas,(2002)*
- [16] L.Leal,E.Fuenmayor *Invariantes De Nudos En Teorías Topológicas No Abelianas Acopladas Con Materia.Centro De Física Teórica Computacional*
- [17] J.Pineda *Invariantes De Nudos En Desarrollos Perturbativos De Teorías De Chern-Simon,Universidad Simón Bolívar*
- [18] W.Greiner. *Fields Quantization.Springer-Verlog.Berlín(1996)*
- [19] B.Mellor,P.Melvin. *A Geometric Interpretation Of Milnor's Triple Linking Numbers.Volume 3 (2003)*
- [20] E.Guadagnini,M.Martellini,M.Mintchev *Wilson Lines In Chern-Simons Theory And Link Invariant,Dipartimento Di Física Dell'Università Di Pisa ,Istituto Nazionale Física Nucleare,Sezioni Di Pisa(1989)*
- [21] S.I Kruglov *Dirac Quantization Of Maxwell Theory On Non Commutative Spaces*
- [22] S.Weinberg *The Quantum Theory Of Fields Vol(1-2)(1996)*
- [23] R. D'inverno *Introducing Einstein's Relativity,(1992)*

- [24] B.Thidé *Electromagnetic Fields Theory, 2nd Edition, (2006)*