Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado " **Teorema de Ramsey para una Clase de Categorías**", presentado por el **Br. Frank R. Prieto M.**, titular de la Cédula de Identidad **18.111.540**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Laura Galindo
Tutor

Dr. Maurico Angel
Jurado

Dr. José Gregorio Mijares
Jurado

Agradecimiento

Colocar aquí el agradecimiento (optativo).

Índice general

Introducción

En este trabajo presentaremos el teorema de Ramsey para ciertas clases de categorías basado en el trabajo de R.L. Graham, K. Leeb y B.L. Rothschild titulado **Ramsey's Theorem for a Class of Categories** publicado en 1972. El teorema de Ramsey que presentaremos en este trabajo es lo suficientemente general para incluir el caso especial al análogo del teorema de Ramsey para espacios vectoriales de dimensión finita, mejor conocido como la **Conjetura de Gian-Carlo Rota**.

La Teoría de Ramsey es una teoría matemática que pretende justificar que "el desorden absoluto es imposible". La Teoría de Ramsey afirma que, en general, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura y orden.

Este trabajo consta de cuatro capítulos, de los cuales los dos primeros capítulos daremos herramientas para la mejor compresión del resultado principal que presentaremos en el capítulo 3.

En el capítulo 1 presentaremos algo breve sobre la **Teoría de Grafos Completos y Finitos**. La Teoría de Grafos juega un papel importante la fundamentación matemática de las Ciencias de la Computación. Los grafos contituyen una herramienta para modelizar fenómenos discretos y son fundamentales para la comprensión de las estructuras de datos y el análisis de algoritmos.

En el capítulo 2 presentaremos unas nociones básicas de **Teoría de Categorías**. Aquí daremos las herramientas matemáticas necesarias que usaremos a lo largo del capítulo tres. La Teoría de Categorías es una moderna manera de considerar la organización de las matemáticas permitiendo reunir en clases de objetos que tienen caractarísticas similares para que de esta forma su estudio sea más organizado y también para relacionar las diferentes clases con un proceso similar a construir funciones entre conjuntos.

En el capítulo 3 presentaremos el resultado principal de este trabajo que plantea cuando vale el **Teorema de Ramsey** en una clase de categorías. En 1930, Frank P. Ramsey demostró el siguiente teorema:

Dados k, l, r enteros positivos existe un número $N = N(k, l, r)$ que depende de k, l, r con la siguiente propiedad: Si A es un conjunto con al menos de N elementos y si todos los subconjuntos de A con k elementos están divididos de cualquier manera en r clases entonces existe algún subconjunto de A con l elementos tal que todos sus subconjuntos de k elementos pertenecen a la misma clase.

En este trabajo basado en la publicación hecha por R.L. Graham, K. Leeb y B.L. Rothschild se presenta una generalización de este teorema a nivel categórico (el resultado principal del trabajo).

Por último, en el capítulo 4 se dan las aplicaciones del resultado principal, probando la Conjetura de Gian-Carlo Rota (el teorema de Ramsey para espacios vectoriales de dimensión finita), la versión del teorema de Ramsey enunciada anteriormente en esta introducción, y el teorema de Ramsey para grafos.

Esperamos que este trabajo anime al lector a indagar por su cuenta la elegante Teoría de Ramsey, ponderar su utilidad y quizás, pensar en alguno de los numerosos problemas que suscrita.

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Nociones Básicas de Grafos Completos y Finitos.

En esta sección daremos unas nociones básicas de grafos completos y finitos con el fin de entender una de las aplicaciones del resultado principal de este trabajo. La bibliografía que hacemos referencia en este capítulo es José Rodriguez, Teoría de Grafos.

DEFINICIÓN 1.1. Sea A un conjunto. Definimos **n-subconjuntos de A** como la colección de todos los subconjuntos de A de cardinal n. Esta colección de objetos se denota por $\mathbb{P}_n(A)$.

DEFINICIÓN 1.2. **Un grafo** G es un par de conjuntos (V,L) donde V es un conjunto no vacío, denominado el conjunto de vértices y L el conjunto de los lados. El conjunto L es un subconjunto de la colección de todos los 2-subconjuntos de V.

OBSERVACIÓN 1.3. Tomemos en cuenta lo siguiente:

- Con cierto abuso de notación de conjuntos, vamos a permitirnos considerar, entre esos posibles 2-subconjuntos al $\{v, v\}$ con $v \in V$.
- Denotaremos los grafos por G(V,L) o simplemente G=(V,L).
- Sean $a, b \in V$, si $\{a, b\} \in L$ entonces decimos que el grafo G tiene un lado $e = \{a, b\}$, y que hay una línea que une a a con b o de b a a.
- Los grafos se representan mediantes diagramas, en los cuales los vértices se denotan por puntos y los lados que unen dos puntos, por segmentos de líneas entre esos puntos.

EJEMPLO 1.4. Consideremos el grafo G=(V,L) donde $V = \{a, b, c\}$ y $L = \{1, 2\}$ donde $1 = \{a, b\}$ y $2 = \{a, c\}$. La representación de este grafo se puede observar en la figura 1.1.

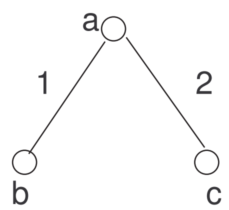

FIGURA 1.1. Grafo con tres vétices y dos lados

DEFINICIÓN 1.5. Un grafo G se dice que es un **Multigrafo** si más de un lado en L tiene los mismos puntos terminales. Estos lados que tienen los mismo puntos terminales suelen denominarse **Lados Paralelos**.

EJEMPLO 1.6. En la figura 1.2 se observa que hay dos lados paralelos, por tanto tenemos un multigrafo.

FIGURA 1.2. Grafo Multigrafo

DEFINICIÓN 1.7. **Un grafo G es trivial**, si V está constituido por un solo elemento, esto es $V = \{x\}$ y $L = \emptyset$ es decir, G no tiene lados.

DEFINICIÓN 1.8. Sea G un grafo. Un lado de G que tiene por puntos terminales un mismo punto, se denomina **Lazo**.

EJEMPLO 1.9. En la figura 1.3 observemos que el grafo G=(V,L) con $V = \{a, b\}$ y $L = \{\{a, a\}, \{b, b\}\}$ tiene dos lazos:

DEFINICIÓN 1.10. **Un grafo G es simple**, si no tiene lazos ni lados paralelos. De tal modo que en un grafo simple cada par de vértices determinan un solo lado (sí estos están conectados).

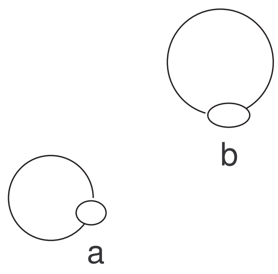

Figura 1.3. Lazos.

Ejemplo 1.11. El grafo del Ejemplo 1.4. es un grafo simple. Más aún, es el único grafo simple de 3 vértices y 2 lados.

Definición 1.12. Sea G=(V,L) un grafo. Definimos **la función de incidencia**, que denotaremos por I, a la función $I : L \longrightarrow \mathbb{P}_2(V)$ que asocia a cada elemento e de L con un par de elementos $\{x_i, x_j\}$ de V; esto es $I(e) = \{x_i, x_j\}$. Diremos que x_i y x_j son los vértices terminales de e, o que el lado e es incidente con los vétices x_i, x_j.

Ejemplo 1.13. Si tenemos la representación de un grafo mediante un dibujo en el plano (ver figura 1.4), podemos determinar fácilmente el par de conjuntos V y L que lo forman.

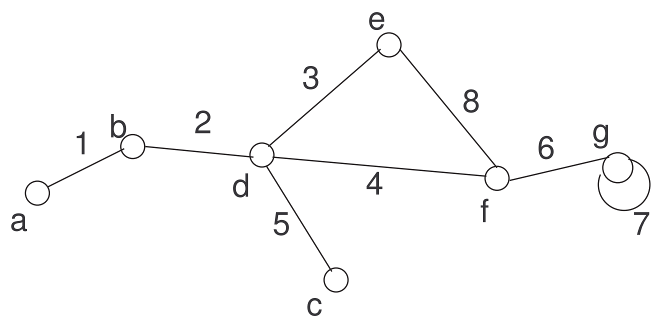

Figura 1.4

La figura 1.4 representa el grafo G=(V,L), donde $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Por tanto la función de incidencia $I : L \longrightarrow \mathbb{P}_2(V)$ viene dada por:

- $I(1) = \{a, b\}$
- $I(2) = \{b, d\}$
- $I(3) = \{e, d\}$
- $I(4) = \{d, f\}$

- $I(5) = \{c, d\}$
- $I(6) = \{g, f\}$
- $I(7) = \{g, g\}$
- $I(8) = \{e, f\}$.

Definición 1.14. Sea G=(V,L) un grafo. se dice que G es un **grafo finito**, si ambos conjuntos V y L son finitos. En caso contrario, se dice que G es un **grafo infinito**.

Definición 1.15. Sea G=(V,L) un grafo simple. Se dice que G es un **grafo completo** (o está completo), si entre cada par de distintos vértices de dicho grafo existe un lado que los une.

Observación 1.16. Un grafo completo con n vértices se denota por K_n.

Ejemplo 1.17. Los grafos completos K_2, K_3, K_4, K_5 se muestran, respectivamente, en la figura 1.5.

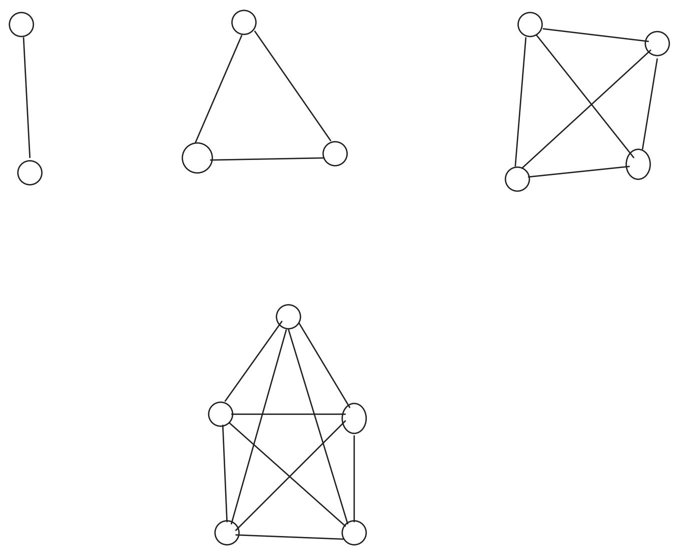

Figura 1.5. Grafos Completo

Definición 1.18. Un grafo G'=(V',L') es un **subgrafo** de un grafo G=(V,L), denotándolo por $G' \preceq G$, si $V' \subseteq V$ y $L' \subseteq L$. De modo que todo vértice del grafo G' es un vértice del grafo G, y cualquier lado de G' lo es de G.

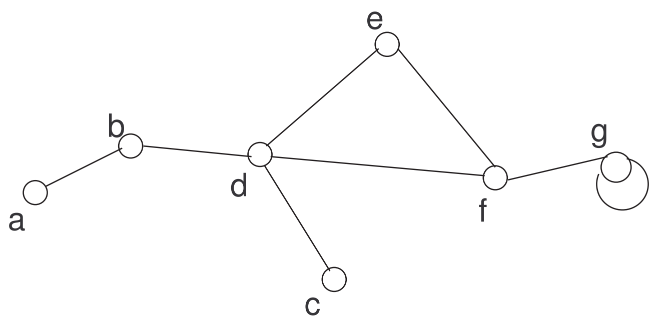

FIGURA 1.6

EJEMPLO 1.19. El grafo G'=(V',L'), donde $V' = \{a, b, d, f\}$ y $L' = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, f\}\}$ es un subgrafo del grafo de la figura 1.6.

Vistas estas definiciones, podemos ahora hablar de lo que son los homomorfismos entre grafos y algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 1.20. **Un homomorfismo de grafos** entre los grafos $G_1 = (V_1, L_1)$ y $G_2 = (V_2, L_2)$, es un par de funciones $\varphi = (f, g)$:

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

$$g : L_1 \longrightarrow L_2$$

que denotaremos por

$$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$$

y cumple con las siguientes propiedades:

- Si $v \in V_1$ entonces $f(v) \in V_2$.
- Si $e \in L_1$ entonces $g(e) \in L_2$.
- Si v_1 y v_2 son incidentes sobre el lado e, en G_1, entonces $f(v_1)$ y $f(v_2)$ son incidentes sobre el lado $g(e)$, en G_2.

OBSERVACIÓN 1.21. Si $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, donde $\varphi = (f, g)$, es un homomorfismo de grafos, denotaremos por $\varphi(G_1) = (f(V_1), g(L_1))$.

DEFINICIÓN 1.22. Sean $\varphi_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ y $\varphi_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ donde $\varphi_1 = (f_1, g_1)$ y $\varphi_2 = (f_2, g_2)$ son homomorfismo de grafos. Entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1 = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$.

Un resultado evidente, que viene de la definición anterior, es la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea $\varphi = (f, g)$ un homomorfismo de grafos, esto es: $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ donde $G_1 = (V_1, L_1)$ y $G_2 = (V_2, L_2)$. Entonces $\varphi(G_1) = (f(V_1), g(L_1))$ es un subgrafo de G_2.*

PROPOSICIÓN 1.24. *Sea $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grafos, si G_1 es completo entonces $\varphi(G_1)$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $v_1', v_2' \in f(V_1)$, entonces existen $v_1, v_2 \in V_1$ tales que $f(v_1) = v_1'$ y $f(v_2) = v_2'$. Como G_1 es completo, existe un lado $e \in L_1$, que une a v_1 con v_2. Luego $g(e) \in g(L_1)$ une a $f(v_1)$ con $f(v_2)$, pues φ es un homomorfismo de grafos. Es decir, $g(e)$ une a v_1' con v_2'. Como v_1' y v_2' son arbitrarios, tenemos que $\varphi(G_1)$ es completo. $\square$

DEFINICIÓN 1.25. Sea $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$, con $\varphi = (f, g)$, un homomorfismo de grafos. Se dice que φ es un **isomorfismo de grafo** entre G_1 y G_2 (y diremos que G_1 y G_2 son isomorfos o isomórficos, la cual denotamos por $G_1 \cong G_2$), si las funciones f y g son biyectivas.

OBSERVACIÓN 1.26. Notemos que:

- Si I_1 es la función de incidencia en G_1 e I_2 es la función de incidencia en G_2, entonces $I_1(e) = \{v, u\}$ si, y solamente si, $I_2(g(e)) = \{f(v), f(u)\}$.
- Si $\varphi = (f, g)$ es un isomorfismo de grafos entre G_1 y G_2, entonces $\varphi^{-1} = (f^{-1}, g^{-1})$ es un isomorfismo de grafos entre G_2 y G_1.
- En caso de que no exista tal φ, entonces se dice que G_1 y G_2 no son isomorfos o no son isomórficos.
- (**Grafos simples e isomorfos**) Para que dos grafos simples sean isomorfos sólo se necesita tener una biyección entre sus vértices. En efecto, si dos grafos $G_1 = (V_1, L_1)$ y $G_2 = (V_2, L_2)$ son simples, una biyección $\lambda : V_1 \longrightarrow V_2$, tal que a, b son adyacentes (es decir, existe un lado cuyos vértices terminales son a y b) en G_1 le asigna $\{\lambda(a), \lambda(b)\}$ en G_2, induce una biyección $\mu : L_1 \longrightarrow L_2$, tal que las funciones de incidencias satisfacen la condición de que:

$$I_1(e) = \{a, b\} \Leftrightarrow I_2(\mu(e)) = \{\lambda(a), \lambda(b)\}.$$

  Así, en el caso de que los grafos sean simples, un isomorfismo no es más que una biyección $\lambda : V_1 \longrightarrow V_2$, tal que a, b son adyacentes en G_1 si, y solamente si, $\lambda(a)$ y $\lambda(b)$ son adyacentes en G_2.

Ejemplo 1.27. Sean $G = (V_1, L_1)$ y $H = (V_2, L_2)$ los grafos que se muestran en la figura 1.7. Veamos si G y H son isomorfos.

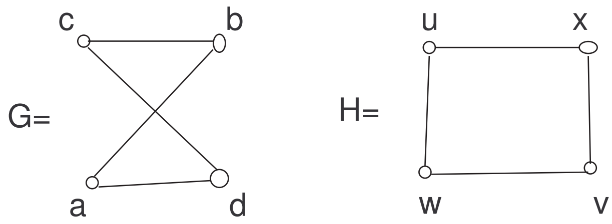

Figura 1.7. Grafos G y H

Para probar esto basta ver una biyección entre $V_1 = a, b, c, d$ y $V_2 = u, v, w, x$ pues son grafos simples. Consideremos entre los conjuntos de vértices V_1 y V_2 la siguiente biyección f:

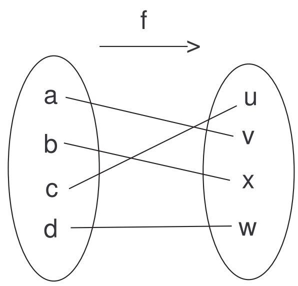

Figura 1.8. Función entre los vértices del grafo G y el grafo H

Esta biyección induce una biyección g entre el conjunto de lados L_1 del grafo G_1 y el conjunto de lados L_2 del grafo G_2 de la siguiente manera:

- Si $e_1 = \{a, b\}$ y $h_3 = \{v, x\}$ entonces $g(e_1) = \{f(a), f(b)\} = \{v, x\} = h_3$.
- Si $e_2 = \{a, d\}$ y $h_4 = \{v, w\}$ entonces $g(e_2) = \{f(a), f(d)\} = \{v, w\} = h_4$.
- Si $e_3 = \{c, d\}$ y $h_2 = \{u, w\}$ entonces $g(e_3) = \{f(c), f(d)\} = \{u, w\} = h_2$.
- Si $e_4 = \{c, b\}$ y $h_1 = \{u, x\}$ entonces $g(e_4) = \{f(c), f(b)\} = \{u, x\} = h_1$.

Así, los grafos G y H son isomorfos.

Ahora haremos un estudio sobre colorear grafos.

Definición 1.28. **Colorear un grafo** es estudiar el problema de la coloración de sus vértices (lados), tal que los vértices adyacentes lleven colores distintos (lados consecutivos con colores distintos). Una coloración no es más que una función que le asigna a cada vértice (lado) un color.

Definición 1.29. El **número cromático** de un grafo G, denotado por $\chi(G)$, es el menor número k de colores que se requieren para colorear un grafo. Si $\chi(G) = k$, se dice que G es **k-colorable** y una **k-coloración** ha sido aplicada a los vértices de G.

Observación 1.30. Para verificar con rigor que ciertamente el número cromático para un grafo G es un número k, nosotros debemos ser capaces de demostrar que G no podrá ser coloreado con k-1 colores.

Ejemplo 1.31. El grafo:

- K_1, puede ser coloreado con un color, y no con menos de uno, así:
$$\chi(K_1) = 1.$$
- K_2, puede ser coloreado con dos colores, y no con menos de dos, así:
$$\chi(K_2) = 2.$$
- K_3, puede ser coloreado con tres colores, y no con menos de tres, así:
$$\chi(K_3) = 3.$$
- K_4, puede ser coloreado con cuatro colores, y no con menos de cuatro, así:
$$\chi(K_4) = 4.$$

Ejemplo 1.32. Fijemos nuestra atención en la figura 1.9 representa un grafo G que contiene como subgrafo a K_4.
Como dijimos arriba, el subgrafo K_4 conformado por los vértices $\{m, n, k, l\}$ puede ser coloreado (como lo vamos a ver inmediatamente) con cuatro colores (y no menos), digamos azul A, rojo R, verde V y marrón M. Por lo tanto, todo G por lo menos es 4-colorable. Efectivamente, si escogemos el color A para el vértice m, entonces sus vecinos (que son los restantes vértices de este subgrafo K_4), deben llevar un color distinto a A, que puede ser: el R, V y el M. Ahora, fuera de este subgrafo K_4, los demás subgrafos de G completos no pasan de ser triángulos, todos los cuales son 3-colorables, y definitivamente, entonces G es 4-colorable (porque si requiriera más de cuatro colores, quiere decir que en G hay un K_5).

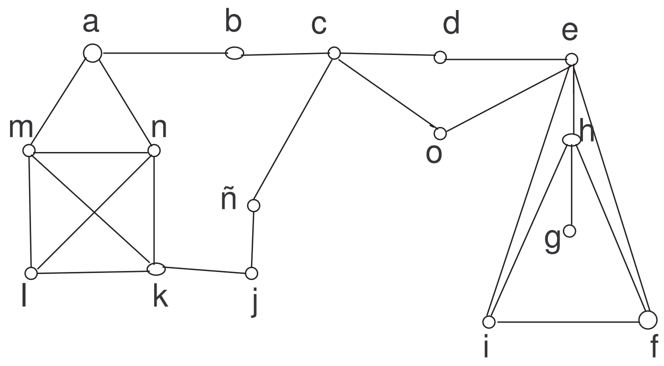

Figura 1.9

CAPíTULO 2

Nociones Básicas de Teoría de Categoría

1. Definición de Categoría y Ejemplos.

La Teoría de Categorías es una teoría matemática de la cual podemos decir en principio que trata en forma abstracta con las estructuras matemáticas y sus relaciones. Decimos "en principio"porque esta teoría ha dado pie a nuevas unificaciones y visiones fundamentales de la matemática que modificarían el propio significado de lo que decimos ser "objetivo".
Aquí se darán los conceptos y resultados básicos de esta teoría para una mejor comprensión de este trabajo. En este capítulo usaremas la bibliografía Thomas W. Hungerford, Algebra, Graduate Text in Mathematics.

DEFINICIÓN 2.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

- Una clase de objetos, la cual denotaremos por Obj $\mathcal{C}$.
- Para cada par de objetos (A,B) de $\mathcal{C}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ cuyos elementos son morfismos con dominio A y codominio B.
- Para cada tripleta ordenada de objetos (A,B,C) en $\mathcal{C}$, una ley de composición, es decir, una aplicación

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

  tal que para cada $(f,g) \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ se tiene $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$.

Todo esto debe satisfacer la siguientes propiedades:

- Si (A,B)$\neq$(C,D) entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D) = \emptyset$.
- La ley de composición es asociativa, es decir, para $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ y $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$ se tiene que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

- Para cualquier objeto A en $\mathcal{C}$ tenemos un elemento $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ (que llamaremos unidad de A) tal que:

$$f \circ 1_A = f \ ; \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

y

$$1_A \circ g = g \ ; \forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A).$$

OBSERVACIÓN 2.2. Llamaremos $Hom(\mathcal{C})$ a la clase de todos los morfismos de $\mathcal{C}$. Cuando no haya ninguna confusión de la categoría que se este trabajando, denotaremos el conjunto de morfismo de un par de objetos A y B por $Hom(A, B)$ en vez de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

DEFINICIÓN 2.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un elemento f de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ se llama isomorfismo si existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que:

$$f \circ g = 1_B$$

y

$$g \circ f = 1_A.$$

Por la definición, se puede probar que g es única y la denotaremos por f^{-1}. Además, si f y h son isomorfismo de $Hom(\mathcal{C})$ tal que $f \circ h$ está bien definida, tenemos que:

$$(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}.$$

EJEMPLO 2.4. **Set**, la categoría de conjuntos. Aqui la clase de objetos de **Set** son la clase de todos los cojuntos. Si A y B son conjuntos, entonces:

$$Hom_{\mathbf{Set}}(A, B) = B^A = \{f : A \longrightarrow B : \text{f es función}\}.$$

La ley de composición es la composición usual de funciones y 1_A es la función identidad de A en A. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras.

EJEMPLO 2.5. **Ring**, la categoría de los anillos conmutativos y unitarios. Aqui la clase de objetos es la clase de todos los anillos conmutativos y unitarios. Si R y R' son objetos de **Ring** entonces $Hom_{\mathbf{Ring}}(G, H)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de anillos de R en R'. La ley de composición es la composición de funciones, pues si f y g son homomorfismos de anillos tal que $f \circ g$ está bien definida, entonces $f \circ g$ es un homomorfismo de anillos. El morfismo 1_R es el homomorfismo identidad de R en R. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras.

Ejemplo 2.6. Sea R un anillo. **R-mod**, la categoría de los R-módulos (a izquierda). Aquí la clase de objetos es la clase de todos los R-módulos. Si A y B son objetos de **R-mod** entonces $Hom_{\textbf{R-mod}}(A, B)$ es el conjunto de todos los R-homomorfismo con domino A y codomino B. La ley de composición es la composición de funciones, pues si f y g son R-homomorfismos tales que $f \circ g$ está bien definida, entonces $f \circ g$ es un R-homomorfismo. El morfismo 1_A es el R-homomorfismo identidad de A en A. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras.

Observación 2.7. Notemos que si R fuese un cuerpo, entonces la categoría descrita en el ejemplo anterior se le denomina $\textbf{Vect}_R$, la categoría de espacios vectoriales sobre el cuerpo R y sus morfismo se denominan transformaciones lineales.

Para dar el siguiente ejemplo, veamos unas definiciones previas:

Definición 2.8. Sea G un grupo abeliano. G se dice que es divisible si dados cualesquiera $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ existe un $h \in G$ tal que $n \cdot h = g$.

Ejemplo 2.9. El grupo ($\mathbb{Q}$,+) es divisible pero ($\mathbb{Z}$,+) no lo es, pues 2 no se escribe como múltiplo de 3.

Proposición 2.10. *G es divisible si y sólo si G es un $\mathbb{Z}$-módulo unitario inyectivo.*

Para ver más acerca de grupos divisible, puede citar el libro Algebra de Thomas Hungerford. Ahora sigamos viendo más ejemplos de categorías.

Ejemplo 2.11. **GrpD**, la categoría de los grupos divisibles. Aqui la clase de objetos es la clase de todos los grupos divisibles. Si G y H son objetos de **GrpD** entonces $Hom_{\textbf{GrpD}}(G, H)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grupos divisibles de G en H, que pueden ser visto como homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos. La ley de composición es la composición de funciones, pues si f y g son homomorfismos de grupos divisibles tal que $f \circ g$ está bien definida, entonces $f \circ g$ es un homomorfismo de grupos divisibles . El morfismo 1_G es el homomorfismo identidad de G en G. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras.

Ejemplo 2.12. **GCF**, la categoría de grafos completos y finitos. Aqui la clase de objetos es la clase de todos los grafos completos y finitos. Si K_n y K_m son objetos de **GCF** entonces $Hom_{\mathbf{GCF}}(K_n, K_m)$ es el conjunto de todos los homomorfismos de grafos inyectivos de dominio K_n y codomino K_m. La ley de composición es la composición de funciones, pues si φ_1 y φ_2 son homomorfismos de grafos (definida en los preliminares) tal que $\varphi_2 \circ \varphi_1$ está bien definida, entonces $\varphi_2 \circ \varphi_1$ es un homomorfismo de grafos. El morfismo 1_{K_n} es el homomorfismo identidad de K_n en K_n. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras. Notemos que K_m posee una cantidad finita de subgrafos isomorfos a K_n para m, n enteros no negativo $(n < m)$. También notemos que $Hom_{\mathbf{GCF}}(K_n, K_m) = \emptyset$ si $m < n$ pues todos los morfismos son inyectivos.

2. Morfismos Mónicos y Épicos.

En esta sección estudiaremos un poco la clase de morfismos de una categoría.

Definición 2.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es mónico si $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$ para todo objeto C de $\mathcal{C}$ y morfismos $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$.

Definición 2.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es épico si $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$ para todo objeto C de $\mathcal{C}$ y morfismos $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Vistas estas definiciones, la pregunta que surge es la siguiente: ¿Si un morfismo es mónico (épico) implica que el morfismo es inyectivo (sobreyectivo)?. La respuesta es: **NO SIEMPRE**. Veamos los siguientes ejemplo que ilustran esto:

Ejemplo 2.15. Un morfismo en **Ring** es mónico entonces dicho morfismo es inyectivo. En efecto, sea $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y supongamos que no es inyectiva. Consideremos el anillo $A \oplus A$, con la suma y producto componente a componente y $1 = (1_A, 1_A)$.
Sea $K = \{(a_1, a_2) \in A \oplus A : f(a_1) = f(a_2)\}$. Veamos que K es un subanillo de $A \oplus A$.

- $K \neq \emptyset$ pues $(0, 0) \in K$ ya que $f(0) = 0$.
- Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K$ entonces
$$f(a_1 - b_1) = f(a_1) - f(b_1) = f(a_2) - f(b_2) = f(a_2 - b_2).$$
Así $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \in K$.
- Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K$ entonces
$$f(a_1 \cdot b_1) = f(a_1) \cdot f(b_1) = f(a_2) \cdot f(b_2) = f(a_2 \cdot b_2).$$
Así $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \in K$.

Por lo tanto K es un subanillo de $A \oplus A$. Ahora consideremos las proyecciones $\pi_i : K \longrightarrow A$, definidas por $\pi_i(a_1, a_2) = a_i$ con $i = 1, 2$. Es claro que π_i son homomorfismo de anillos y que $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$ (Por definición de K). Como f no es inyectiva existen $a_1 \neq a_2$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$. Por lo tanto $(a_1, a_2) \in K$ y así
$$\pi_1(a_1, a_2) = a_1 \neq a_2 = \pi_2(a_1, a_2).$$
De donde $\pi_1 \neq \pi_2$, por lo que f no es mónico. $\square$

Ejemplo 2.16. Existen morfismos épicos en **Ring** que no son sobreyectivos. En efecto, consideremos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la inyección canónica. Si g y h son homomorfismos de anillos de $\mathbb{Q}$ en un anillo R, entonces

$$g \circ f = h \circ f \text{ si y sólo si } g|_{\mathbb{Z}} = h|_{\mathbb{Z}}.$$

Como los homomorfismos de $\mathbb{Q}$ estan determinado por su restricción a $\mathbb{Z}$, tenemos que

$$g \circ f = h \circ f \text{ si y sólo si } g = h.$$

Así f es un morfismo épico pero claramente no es sobreyectivo.

□

Ejemplo 2.17. En la categoría de los grupos divisibles existen morfismos mónicos no inyectivos. En efecto, consideremos los grupos divisibles $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ el homomorfismo canónico que claramente no es inyectivo. Veamos que π es un morfismo mónico. Supongamos g y h son homomorfismo de A en $\mathbb{Q}$ con A un grupo divisible, tales que $\pi \circ g = \pi \circ h$. Si $g \neq h$ entonces existe un $a \in A$, $r, s \in \mathbb{Z}$ $(s \neq \pm 1)$ tal que $g(a) - h(a) = \frac{r}{s} \neq 0$. Como A es divisible, tenemos que $a = r \cdot b$ para algún $b \in A$. Luego

$$r \cdot (g(b) - h(b)) = r \cdot g(b) - r \cdot h(b) = g(r \cdot b) - h(r \cdot b) = g(a) - h(a) = \frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s}.$$

De donde $g(b) - h(b) = \frac{1}{s}$. Por lo tanto

$$0 = \pi(g(b)) - \pi(h(b)) = \pi(g(b) - h(b)) = \pi(\frac{1}{s}).$$

Así $\frac{1}{s} \in \mathrm{Ker}\pi$, lo cual es una contradicción pues $s \neq \pm 1$. Por lo tanto $g = h$ y así π es mónico.

□

Ejemplo 2.18. En **R-mod**, los morfismos épicos son sobreyectivos.

En efecto, sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de R-módulos. Supongamos que f no es sobreyectivo. Sabemos que la $Im(f) \neq B$ es un submódulo de B y podemos formar el módulo $B/Im(f)$ que es distinto de cero pues $Im(f) \neq B$, puesto que f no es sobreyectivo. Sean $g : B \longrightarrow B/Im(f)$ la proyección canónica y $h : B \longrightarrow B/Im(f)$ definida por $h(b) = Im(f)$ $\forall b \in B$. Entonces $g \neq h$ pero $g \circ f = h \circ f$. Por lo tanto f no es épico.

□

3. Funtores.

En esta sección estudiaremos funtores, que son una especie de aplicaciones entre dos categorías.

Definición 2.19. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ consta de:

- Una aplicación de Obj $\mathcal{C}$ en Obj $\mathcal{D}$.
- Para cada par de objetos (A,B) en $\mathcal{C}$ una aplicación de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ en $Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ con las condiciones:
  (1) Si $g \circ_{\mathcal{C}} f$ está bien definida en $\mathcal{C}$ entonces
  $$F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(f).$$
  (2) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Ejemplo 2.20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. El funtor identidad $\mathbf{I}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ asigna a cada objeto y a cada morfismos de $\mathcal{C}$ en si mismos.

Más adelante daremos ejemplos de funtores, pues necesitamos conocer un poco del producto tensorial entre espacios vectoriales para mejor comprensión de los mismos.

4. Producto Tensorial entre Espacios Vectoriales.

En matemática, el producto tensorial, denotado por $\otimes$, puede ser aplicado en diferentes contextos: vectores, matrices, espacios vectoriales dotados con una topología, álgebras, módulos y muchas estructuras más. Se utiliza el símbolo mencionado para referirnos a todos los casos a: **la operación bilineal más general**. Aquí estudiaremos lo necesario del producto tensorial sobre la categoría de espacios vectoriales para entender mejor unas de las aplicaciones de este trabajo.

DEFINICIÓN 2.21. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean V,W y R espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $f : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ es **bilineal**, si para cara $x \in \mathrm{V}$, la aplicación $f(x, \cdot) : \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ es lineal y para cada $y \in \mathrm{W}$, la aplicación $f(\cdot, y) : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{R}$ es lineal.

Vamos a construir un espacio vectorial T llamado producto tensorial de V y W con la propiedad de que exista una correspondencia biyectiva entre las aplicaciones bilineales de $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ en R y las aplicaciones lineales de T en R, para cualquier espacio vectorial R.

PROPOSICIÓN 2.22. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo y sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$. *Entonces existe un par* (T, g) *donde* T *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* $g : \mathrm{V}\times\mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{T}$ *una aplicación bilineal con la siguiente propiedad: Dado cualquier espacio vectorial* R *sobre* $\mathbb{K}$ *y cualquier aplicación bileneal* $f : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ *entonces existe una única aplicación* $f' : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{R}$ *lineal tal que* $f = f' \circ g$*, es decir, toda aplicación bilineal de* $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ *se factoriza a través de* T. *Además* (T, g) *es única salvo isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. (1) **Existencia:** Consideremos el siguiente conjunto

$$C = \{\sum_i \alpha_i(x_i, y_i) : \ x_i \in \mathrm{V}, \ y_i \in \mathrm{W}, \ \alpha_i \in \mathbb{K}, \text{ donde casi todos los } \alpha_i \text{ son cero.}\}.$$

Sea D el subespacio generado por todos los elementos de la forma

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$
$$(\alpha v, w) - \alpha(v, w),$$
$$(v, \alpha w) - \alpha(v, w) \text{ y}$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

con $\alpha \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, v \in \mathrm{V}$ y $w_1, w_2, w \in \mathrm{W}$. Entonces el producto tensorial se obtiene tomando el cociente de C por D, es decir, $\mathrm{T} = C/D$. Claramente T es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Denotemos $\overline{(v,w)} \in \mathrm{T}$ por $v \otimes w$, así

- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$.
- $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.
- $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w) = \alpha(v \otimes w)$.

Ahora bien, definamos $g : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{T}$ por $g(v,w) = v \otimes w$. Está alplicación es bilineal y si $f : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ es cualquier aplicación bilineal entonces extendemos f a C por linealidad y definamos $f' : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{R}$ por $f'(v \otimes w) = f(v,w)$. Esta aplicación esta bien definida pues f se anula en D. Por construcción f' es única y $f = f' \circ g$. Por lo tanto g satisface la propiedad requerida en la proposición.

(2) **Unicidad:** Supongamos que los pares (T, g) y (T', g') cumplen con la propiedad que dice la proposición. Como $g' : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{T}'$ y (T, g) cumple con la propiedad se tiene que existe una única aplicación $j : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}'$ tal que $g' = j \circ g$. Analogamente, como $g : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{T}$ y (T', g') cumple con la propiedad se tiene que existe un única aplicación $j' : \mathrm{T}' \longrightarrow \mathrm{T}$ tal que $g = j' \circ g'$. Consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}' \arrow[d, "j'"] \\ \mathrm{T} \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "I_{\mathrm{T}}"'] & \mathrm{T}' \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T} \arrow[d, "j"] \\ \mathrm{T}' \arrow[ur, "j'"] \arrow[r, "I_{\mathrm{T}'}"'] & \mathrm{T}' \end{tikzcd}$$

Como j y j' son únicas se tiene que: $j \circ j' = I_{\mathrm{T}'}$ y $j' \circ j = I_{\mathrm{T}}$.
Así j es un isomorfismo y por lo tanto (T, g) es único salvo isomorfismos. $\square$

Ahora bien, ¿cómo es una base para el producto tensorial de dos espacios vectoriales?. La respuesta es natural, pues si V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, con bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ respectivamente entonces una base para $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ es $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$.
Antes de demostrar que esto es cierto, debemos recordar que si $\mathfrak{B}$ es una base de un

espacio vectorial V entonces cualquier aplicación de $\mathfrak{B}$ en otro espacio vectorial W se puede extender a aplicación lineal de V en W.

PROPOSICIÓN 2.23. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo y sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$ *con bases* $\mathfrak{B}$ *y* $\mathfrak{B}'$ *respectivamente. Entonces* $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$ *es una base de* $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea R el $\mathbb{K}$-espacio vectorial libremente generado por

$$\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}.$$

Así $\mathrm{R} \cong \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$. En efecto, sea $g : \{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ la inclusión. Como $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$ es una base de R, g se puede extender a una aplicación lineal $g' : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ tal que $g'|_{\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}} = g$. Claramente g' es inyectiva pues g lo es. Por otro lado, sea $\psi : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathrm{R}$ definida por $\psi(v_i, w_j) = v_i \otimes w_j$. Entonces ψ se puede extender a una aplicación lineal $\psi' : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ tal que $\psi|_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'} = \psi$. Luego existe $\hat{\psi} : \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ tal que $\hat{\psi} \circ \pi = \psi'$ donde $\pi : \mathrm{V} \times \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ es la proyección canónica. Como ψ' es inyectiva y π es sobreyectiva tenemos que $\hat{\psi}$ es inyectiva. Por lo tanto $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ está libremente generado por $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$, de donde $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$ es base de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$. □

OBSERVACIÓN 2.24. Observemos que

- Si V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathfrak{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ y $\mathfrak{B}' = \{w_i\}_{j=1}^m$ respectivamente. Entonces todo elemento de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ se puede escribir de forma única como

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i$$

para algunos $u_i \in \mathrm{W}$. En efecto, sea $u \in \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$. Como $\{v_i \otimes w_j : v_i \in \mathfrak{B}, w_j \in \mathfrak{B}'\}$ es una base de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ se tiene que u se puede escribir de forma única como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j).$$

Luego, por la bilinealidad de $\otimes$ se tiene que

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(v_i \otimes w_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (v_i \otimes u_i). \end{aligned}$$

donde para cada i

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j.$$

- Si $f : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{P}$ y $f : \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{R}$ son transformaciones lineales entonces $f \otimes g : \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{P} \otimes \mathrm{R}$ se define como

$$f \otimes g(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

5. Más Ejemplos de Categorías y Funtores.

En esta sección daremos las categorías y funtores que usaremos en el capítulo 4 de este trabajo.

Ejemplo 2.25. Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $GF(q)$ (un cuerpo de q elementos). Si $\{v_1, v_2, ...\}$ es una base de V entonces para cada $k = 0, 1, 2, ...$, definamos V_k como el subespacio generado por los primero k vectores de la base de V, es decir, $V_k = \langle v_1, ..., v_k \rangle$ y $V_0 = GF(q)$. Sea $\mathcal{C}$ la categoría que tiene por objetos número enteros no negativos $0, 1, 2, ...$ y Para cada k, l objetos de $\mathcal{C}$ entonces $Hom_{\mathcal{C}}(k, l) = \{f : V_k \longrightarrow V_l /\text{f es un monomorfismo}\}$. La ley de composición es la composición de funciones usual y el morfismo identidad 1_k es sólo la tranformación lineal identidad de V_k en V_k. La validez de las propiedades mencionadas en la definición 2.1 son claras. Además, observamos que $Hom_{\mathcal{C}}(k, l) = \emptyset$ si $k > l$ ya que todos los morfismos son mónicos y que la cantidad de subespacios de dimensión n es finita para todo $n = 0, 1, 2, ...$

Ejemplo 2.26. Sean V y A espacios vectoriales de dimensión infinita sobre $GF(q)$ con bases $\{v_1, v_2, ...\}$ y $\{a_1, a_2, ...\}$ respectivamente. Para cada $m = 0, 1, 2, ...$, definamos la categoría $\mathcal{C}_m$ como sigue:

- Los objetos de $\mathcal{C}_m$ son los enteros no negativos $0, 1, 2, ...$
- Los morfismos de k a l (k y l objetos de la categoría) son todos los pares (ω, φ) donde $\omega \in A_m \otimes V_l$ y $\varphi : V_k \longrightarrow V_l$ una transformación lineal inyectiva.
- Definamos la ley de composición como sigue:

  Para $(\omega, \varphi) \in Hom_{\mathcal{C}_m}(k, l)$ con
  $$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \omega_i \quad \text{con } \omega_i \in V_l$$
  y $(x, \psi) \in Hom_{\mathcal{C}_m}(l, n)$ entonces $(x, \psi) \circ (\omega, \varphi) = (y, \psi \circ \varphi)$ donde
  $$y = x + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi(\omega_i).$$
  Probemos que esta ley de composición es asociativa.

  Sean $(\omega, \varphi) \in Hom_{\mathcal{C}_m}(k, l)$, $(x, \psi) \in Hom_{\mathcal{C}_m}(l, n)$ y $(z, \sigma) \in Hom_{\mathcal{C}_m}(n, p)$. Si
  $$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \omega_i \quad \text{con } \omega_i \in V_l$$

y
$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes u_i \quad \text{con } u_i \in V_n,$$
entonces
$$(z, \sigma) \circ [(x, \psi) \circ (\omega, \varphi)] = (z, \sigma) \circ (y, \psi \circ \varphi) = (w, \sigma \circ (\psi \circ \varphi)$$
donde
$$y = x + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi(\omega_i),$$
y por tanto
$$w = y + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes [\sigma(\psi(\omega_i) + \sigma(u_i)].$$
Por otro lado
$$[(z, \sigma) \circ (x, \psi)] \circ (\omega, \varphi) = (\varepsilon, \sigma \circ \psi) \circ (\omega, \varphi) = (\delta, (\sigma \circ \psi) \circ \varphi),$$
donde
$$\varepsilon = z + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \sigma(u_i),$$
y por tanto
$$\delta = \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \sigma(\psi(\omega_i)) = z + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes [\sigma(\psi(\omega_i)) + \sigma(u_i)].$$
Como los elementos de $A_m \otimes V_p$ tienen representación única, se tiene que $\delta = w$ y como la ley decomposición de las tranformaciones lineales es asociativa (pues es la composición de funciones usual) tenemos que $(\sigma \circ \psi) \circ \varphi = \sigma \circ (\psi \circ \varphi)$. Luego
$$(z, \sigma) \circ [(x, \psi) \circ (\omega, \varphi)] = [(z, \sigma) \circ (x, \psi)] \circ (\omega, \varphi).$$
Así la compocisión en $\mathcal{C}_m$ es asociativa. Por otro lado, definamos el morfismo identidad de k en k como $(0, 1_k)$. La otra propiedad que falta, según la definición 2.1, es clara y así tenemos que $\mathcal{C}_m$ es en efecto una categoría para todo $m = 0, 1, 2, ...$

$\square$

Ejemplo 2.27. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{m+1}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}_m$ (categorías descritas en el Ejemplo 2.26). Definamos $\mathbf{M} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ de la siguiente manera: Consideremos $(\omega, \varphi) : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}_{m+1}$. Entonces $\omega \in A_{m+1} \otimes V_l$ y $\varphi : V_k \longrightarrow V_l$. Como $\omega \in A_{m+1} \otimes V_l$ entonces se puede escribir de manera única como $\omega = \omega' + a_{m+1} \otimes \omega_{m+1}$ donde $\omega' \in A_m \otimes V_l$. Por otra parte, definamos $\varphi' : V_{k+1} \longrightarrow V_{l+1}$ por

- $\varphi'(v_{k+1}) = v_{l+1} + \omega_{m+1}$
- $\varphi' = \varphi$ en V_k.

Así $\mathbf{M}(\omega, \varphi) = (\omega', \varphi')$. Claramente $(\omega', \varphi') : k+1 \longrightarrow l+1$. Veamos que $\mathbf{M}$ es un funtor.

(1) Sean $(\omega, \varphi) : k \longrightarrow l$ y $(x, \psi) : l \longrightarrow n$ en $\mathcal{C}_{m+1}$. Entonces $\omega = \omega' + a_{m+1} \otimes \omega_{m+1}$ con $\omega' \in A_m \otimes V_l$ y $x = x' + a_{m+1} \otimes u_{m+1}$ con $x' \in A_m \otimes V_n$. Luego $(x, \psi) \circ (\omega, \varphi) = (y, \psi \circ \varphi)$, de donde

$$y = x + \sum_{i=1}^{m+1} a_i \otimes \psi(w_i).$$

Así, $\mathbf{M}(y, \psi \circ \varphi) = (y', (\psi \circ \varphi)')$ con y' es la suma de los primero m términos de y. Por otra parte, $\mathbf{M}(\omega, \varphi) = (\omega', \varphi')$ y $\mathbf{M}(x, \psi) = (x', \psi')$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(x, \psi) \circ \mathbf{M}(\omega, \varphi) &= (x', \psi') \circ (\omega', \varphi') \\ &= (z', \psi' \circ \varphi')\end{aligned}$$

con

$$z' = x' + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi(w_i).$$

Como y' tiene representación única, tenemos que $z' = y'$.
Ahora veamos que $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$.
En efecto, sea $x \in V_k$ entonces

$$(\psi \circ \varphi)' = \psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi'$$

pues $\psi = \psi'$ y $\varphi = \varphi'$ en V_k. Sea $x = k+1$ entonces

$$
\begin{aligned}
(\psi' \circ \varphi')(x) &= \psi'(\varphi'(x)) \\
&= \psi'(v_{l+1} + \omega_{m+1}) \\
&= \psi'(v_{l+1}) + \psi'(w_{m+1}) \\
&= v_{n+1} + u_{m+1} + \psi(w_{m+1}) \\
&= (\psi \circ \varphi)'(x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$ y así $\mathbf{M}((x, \psi) \circ (\omega, \varphi)) = \mathbf{M}(x, \psi) \circ \mathbf{M}(\omega, \varphi)$, es decir, $\mathbf{M}$ preserva la composición.

(2) Sabemos que la identidad en $\mathcal{C}_{m+1}$ es $(0, 1_k)$ donde 1_k denota la transformación lineal identidad de V_k en V_k. Veamos que $1_{\mathbf{M}(0,1_k)}$ es la identidad para el objeto $k+1$ en $\mathcal{C}_m$. En efecto, $\mathbf{M}(0, 1_k) = (0, 1'_k)$ donde $1'_k : V_{k+1} \longrightarrow V_{k+1}$ con $1'_k = 1_k$ en V_k y $1'_k(v_{k+1}) = v_{k+1}$. Claramente $1'_k$ es la transformación lineal identidad de V_{k+1}. Asi $1_{\mathbf{M}(0,1_k)}$ es la identidad para el objeto $k + 1$ en $\mathcal{C}_m$.

Por lo tanto $\mathbf{M}$ es un funtor.

□

Ejemplo 2.28. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{m+1}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}_m$ (categorías descritas en el Ejemplo 2.26). Definamos $\mathbf{P} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ de la siguiente manera: consideremos $(\omega, \varphi) : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}_m$. Definamos $\omega'' = \omega + a_{m+1} \otimes 0$ y $\varphi'' = \varphi$. Entonces $\mathbf{P}(\omega, \varphi) = (\omega'', \varphi'')$. Veamos que $\mathbf{P}$ es un funtor.

(1) Sean $(\omega, \varphi) : k \longrightarrow l$ y $(x, \psi) : l \longrightarrow n$ en $\mathcal{C}_m$. Entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \omega_i$$

con $\omega_i \in V_l$. Luego $(x, \psi) \circ (\omega, \varphi) = (y, \psi \circ \varphi)$, de donde

$$y = x + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi(w_i),$$

así

$$\mathbf{P}((x, \psi) \circ (\omega, \varphi)) = (y'', (\psi \circ \varphi)'').$$

Por otro lado $\mathbf{P}(x, \psi) = (x'', \psi'')$ y $\mathbf{P}(\omega, \varphi) = (\omega'', \varphi'')$, luego

$$\mathbf{P}(x, \psi) \circ \mathbf{P}(\omega, \varphi) = (x'', \psi'') \circ (\omega'', \varphi'') = (z, \psi'' \circ \varphi'')$$

donde

$$\begin{aligned} z &= x'' + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi''(w_i) + a_{m+1} \otimes \psi''(0) \\ &= x + \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \psi(w_i) + a_{m+1} \otimes 0 \end{aligned}$$

Como y'' tiene representación única, tenemos que $y'' = z$. Por otro lado, es claro que $(\psi \circ \varphi)'') = \psi'' \circ \varphi''$. Así

$$\mathbf{P}((x, \psi) \circ (\omega, \varphi)) = \mathbf{P}(x, \psi) \circ \mathbf{P}(\omega, \varphi),$$

es decir, $\mathbf{P}$ respeta la composición.

(2) Claramente $\mathbf{P}$ manda morfismos identidades de $\mathcal{C}_m$ en morfismos identidades de $\mathcal{C}_{m+1}$.

Así $\mathbf{P}$ es un funtor.

$\square$

6. Coproducto.

Otra estructura que usaremos en este trabajo es la del coproducto. Sólo daremos la definición pues no necesitamos más que eso para este trabajo.

Definición 2.29. Sea I un conjunto de índices. Un **copoducto** de una familia $\{A_j : j \in I\}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto, que denotaremos por $\coprod$, en $\mathcal{C}$ y una familia $\{i_j : A_j \longrightarrow \coprod / j \in I\}$ tal que para cada objeto B de $\mathcal{C}$ y una familia $\{\psi_j : A_j \longrightarrow B/j \in I\}$ de morfismos en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\psi : \coprod \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $j \in I$

$$\begin{tikzcd} \coprod \arrow[r, "\psi"'] & B \\ & A_j \arrow[ul, "i_j"] \arrow[u, "\psi_j"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.30. Sea I un conjunto de indices y sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en **Set**. Para cada $i \in I$ definamos

$$\varphi_i : X_i \longrightarrow \Pi_{i\in I}$$

por $\varphi(a) = \{y_j\}_{j\in I}$ donde

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ a & \text{si } j = i \end{cases}$$

Entonces $\Pi_{i\in I}$ junto con $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ es un coproducto en **Set**. En efecto, sea B un objeto de **Set** junto con $\{\psi_i : X_i \longrightarrow B/i \in I\}$. Sea

$$\alpha : \Pi_{i\in I} \longrightarrow B$$

definida por $\alpha(\{x_i\}_{i\in I}) = \{\psi_i(x_i)\}_{i\in I}$. Claramente $\alpha \circ \varphi_i = \psi_i\ \forall i \in I$.

CAPíTULO 3

Teorema de Ramsey para una Clase de Categorías

1. Conceptos Básicos.

Para proponer la propiedad de Ramsey para una categoría $\mathcal{C}$ debemos tener una noción de rango con la cual indexar los objetos y subobjetos de la categoría. Para este fin, es conveninte considerar de ahora en adelante sólo categorías $\mathcal{C}$ con la siguiente propiedad:

(a) Los objetos de $\mathcal{C}$ son enteros no negativos $0, 1, 2, ...$, y si $l > k$ entonces $Hom_{\mathcal{C}}(l, k) = \emptyset$.

Definición 3.1. Sea l un objeto de $\mathcal{C}$ y k subobjeto de l. Diremos que el **rango** de un subobjeto de l es k, y nos referiremos a este como k-subobjeto de l, si existe un isomorfismo de k a ese subobjeto, es decir, si $f : k \to l$ y $f' : k' \to l$ son representantes del mismo subobjeto de l entonces debe existir un isomorfismo $\alpha : k \to k'$.

Observación 3.2. La definición 3.1. es equivalente a: un subobjeto k' de l es de rango k si k=k'. En efecto, supongamos que $k > k'$. Entonces por (a) tenemos que $Hom_{\mathcal{C}}(k, k') = \emptyset$, pero esto no puede ocurrir, ya que existe $\alpha : k \to k'$. Asi $k \leq k'$. Analogamente, supongamos que $k' > k$. Entonces por (a) tenemos que $Hom_{\mathcal{C}}(k', k) = \emptyset$, pero esto no puede ocurrir, ya que existe $\alpha' : k' \to k$. Asi $k' \leq k$. Luego $k = k'$.

Notación: Denotaremos por $\mathcal{C}[{l \atop k}]$ a la clase de subobjetos de l en $\mathcal{C}$ de rango k.
Haremos la convención que para $k < 0$ o $l < 0$ tendremos $\mathcal{C}[{k \atop l}] = \emptyset$.

Para hacer que nuestro argumento inductivo funcione, necesitamos una condición de finitud. Así que supondremos además de (a) que todas las categorías consideradas aqui satisfacen:

(b) Para cada par de enteros, hay un entero $y_{k,l}$ tal que $\mathcal{C}[{l \atop k}]$ es un conjunto finito con $y_{k,l}$ elementos. En particular $y_{0,0} = 1$.

(c) Todos los morfismos de $\mathcal{C}$ son monomorfismos.

DEFINICIÓN 3.3. Sea l un objeto de $\mathcal{C}$ y k un subobjeto de l. Si $f : k \to l$, denotaremos por $\bar{f}$ a la aplicación inducida sobre los subobjetos de l. Es decir, si $g : s \to k$ representa un subobjeto de k, entonces $\bar{f}$ toma este subobjeto y le asigna un subobjeto de l dado por la composición $f \circ g$. Así

$$\bar{f} : \bigcup_{n=0}^{k} \mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}\right] \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{k} \mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} l \\ n \end{smallmatrix}\right].$$

Claramente $\bar{f}$ está bien definida.

DEFINICIÓN 3.4. Sea l un objeto de $\mathcal{C}$ y s un subobjeto de l. Una r-**coloración** de $\mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} l \\ s \end{smallmatrix}\right]$ es una función $c : \mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} l \\ s \end{smallmatrix}\right] \longrightarrow \{1, ..., r\}$. Diremos que un subobjeto tiene color i si su imagen bajo c es i.

Una r-coloración c de $\mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} l \\ s \end{smallmatrix}\right]$ induce una r-coloración sobre $\mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} k \\ s \end{smallmatrix}\right]$ dada por la composición $c \circ \bar{f}$, donde $f : k \to l$ está en $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN 3.5. Sea c una r-coloración de $\mathcal{C}\left[\begin{smallmatrix} l \\ s \end{smallmatrix}\right]$. c tiene un k-subobjeto monocromático (es decir el k-subobjeto representado por $f : k \to l$), si la imagen de $c \circ \bar{f}$ es un conjunto unitario.

La siguiente definición, a simple vista parece no tener nada que ver con las definiciones anteriores, pero es un concepto básico que necesitaremos más adelante:

DEFINICIÓN 3.6. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorias que satisfacen (a), (b) y (c). Para un functor $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ con $\mathcal{M}(x) = y$ para enteros y y x, denotaremos por $\bar{\mathcal{M}}$ a la función inducida que asigna a cada subobjeto de x un subobjeto de y. Esto es, $\bar{\mathcal{M}}$ toma el subobjeto representado por $f : s \longrightarrow x$ en $\mathcal{A}$ y le asigna el subobjeto representado por $\mathcal{M}(f) : s \longrightarrow y$ en $\mathcal{B}$.

2. Propiedad de Ramsey.

Ahora podemos presentar la propiedad de Ramsey para una categoría $\mathcal{C}$ que satisface (a), (b) y (c).

Definición 3.7. La **propiedad de Ramsey** dice: Dados enteros k, l y r, existe un número n que depende de k, l y r tal que para $m \geq n$, cualquier r-coloración de $\mathcal{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m}{k}$ tiene un l-subobjeto monocromático.

Para establecer la propiedad de Ramsey para ciertas categorías $\mathcal{C}$, consideraremos una versión más fuerte de la misma la cual hace el argumento inductivo más fácil: Hay un número $N = N_{\mathcal{C}}(k; r, l_1, ..., l_r)$ que depende de $k, r, l_1, ..., l_r$, tal que para cualquier $m \geq N$ y cualquier r-coloración c de $\mathcal{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m}{k}$, hay un i, $1 \leq i \leq r$, y un morfismo $f : l_i \longrightarrow m$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l_i}{k} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr] & \mathcal{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m}{k} \arrow[r, "c"] & \{1, .., r\} \\ & \{i\} \arrow[ur, "incl"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $incl(i) = i$. A esta versión más fuerte la denotaremos por $\mathcal{C}(k; l_1, ..., l_r)$.

Esta versión siempre vale para $k < 0$, ya que $\mathcal{C}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l_i}{k} = \emptyset$. Si todos los l_i son iguales, esta versión se convierte en la propiedad de Ramsey presentada al principio de esta sección, es decir, si $l_1 = \cdots = l_r$, llamemos l a este número, entonces la coloración c tendrá un l-subobjeto monocrómatico.

3. Condiciones sobre las Categorías.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorias que satisfacen (a),(b) y (c). Para establecer que la propiedad de Ramsey vale para la categoría $\mathcal{B}$ si sabemos que vale para la categoría $\mathcal{A}$, las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ deben estar relacionas de una manera especial. Esta relación esta dada por las condiciones a continuación:

- Hay un functor $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ con $\mathcal{M}(l) = l+1$, $l = 0,1,2,....$
- Hay un functor $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ con $\mathcal{P}(l) = l$, $l = 0,1,2,....$
- Hay un entero $t \geq 0$ tal que para cada $l = 0,1,2,...\ t$ existen morfismos, $\varphi_{lj} : l \longrightarrow l+1$, $1 \leq j \leq t$, que satisfacen lo siguiente:
  - (I) Para cada $k+1 = 0,1,2,...$, la diagonal d en el siguiente diagrama es épico, donde $\coprod$ (junto con las inyecciones indicadas) es el coproducto, y d es la única aplicación determinada por el coproducto que hace el diagrama conmutar para todo j:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\left[{l \atop k+1}\right] \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\overline{\varphi_{lj}}"'] & \coprod \arrow[dl, "d"] \\
\mathcal{B}\left[{l+1 \atop k+1}\right] &
\end{tikzcd}$$

    y también conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\left[{l \atop k}\right] \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\overline{\mathcal{M}}"'] & \coprod \arrow[dl, "d"] \\
\mathcal{B}\left[{l+1 \atop k+1}\right] &
\end{tikzcd}$$

  - (II) Para cada $g : s \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$ y cada $j = 1,...,t$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
l \arrow[r, "\varphi_{lj}"] & l+1 \\
s \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\varphi_{sj}"] & s+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(\mathcal{P}(g))"']
\end{tikzcd}$$

  - (III) Para algún $e : l \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{A}$, el siguiente diagrama conmuta para todo

$j = 0, ..., t$:

$$\begin{tikzcd} l+1 \arrow[r, "\varphi_{l+1,j}"] & l+2 \\ l \arrow[u, "e"] \arrow[r, "\varphi_{lj}"] & l+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(e)"'] \end{tikzcd}$$

Observación 3.8. Sea $h : s+1 \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$. Entonces por (III) hay una cierta $e : s \longrightarrow s+1$ en $\mathcal{A}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} s+1 \arrow[r, "\varphi_{s+1,j}"] & s+2 \\ s \arrow[u, "\varphi_{sj}"] \arrow[r, "\varphi_{sj}"] & s+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(e)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{B}$ para cada j. Por (II), el diagrama

$$\begin{tikzcd} l \arrow[r, "\varphi_{lj}"] & l+1 \\ s+1 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\varphi_{s+1,j}"] & s+2 \arrow[u, "\mathcal{M}(\mathcal{P}(h))"'] \end{tikzcd}$$

conmuta para cada j. Por lo tanto

$$\begin{tikzcd} s+1 \arrow[r, "h"] & l \arrow[d, "\varphi_{lj}"] \\ s \arrow[u, "\varphi_{sj}"] \arrow[d, "\varphi_{sj}"'] & l+1 \\ s+1 \arrow[ur, "\mathcal{M}(\mathcal{P}(h)e)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada j.

4. Lemas.

Para la demostración del resultado principal de este proyecto, necesitaremos el uso de dos lemas. Por eso esta sección esta hecha unicamente para discutir estos lemas.

Eventualmente necesitaremos un lema sobre arreglos n-dimensionales de puntos. Lo propondremos si demostración. La demostración puede ser encontrada en [3] y [2]. También se puede encontrar una demostración de este lema en el libro **Ramsey Theory** de Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild y Joel H. Spencer. Denotemos por A^n el conjunto de todas las n-tuplas $(x_1, ..., x_n)$ de elementos x_i de un conjunto A con $i = 1, ..., n$. Antes de enunciar el lema, daremos una definición previa para mejor comprensión del mismo.

Definición 3.9. Sea A un conjunto con t elementos. Una **Línea** en A^n es un conjunto (ordenado apropiadamente) de puntos x_i, con $x_i = (x_{1i}, ..., x_{ni})$ tal que para cada j, $1 \leq j \leq t$ se tiene que $x_{j1} = \cdots = x_{jt}$ o $x_{js} = s$ para $0 \leq s \leq t$ y lo último debe ocurrir al menos para un j.

Lema 3.10. ***(Teorema de Hales-Jewett)*** *Dados enteros $r > 0$, $t \geq 0$, existe un entero $N = N(r,t)$, dependiendo sólo de r y t, tal que si $n \geq N$, A es un conjunto de t elementos, y A^n está r-coloreado de cualquier manera, entonces existe una línea monocromática.*

Definición 3.11. Sea $m \geq 1$ entero y $f : k+1 \longrightarrow l+h$ un subobjeto de $l+h$ en $\mathcal{B}$, con $f = \mathcal{M}(f')$ para algún $f' : k \longrightarrow l+h-1$ en $\mathcal{A}$ para $1 \leq h \leq m$. Para cualquier elección fija de $j_h, j_{h+1}, ..., j_{m-1}$, $1 \leq j_i \leq t$, sea $\varphi_i = \varphi_{l+i,j_i}$. Entonces el $(k+1)$-subobjeto de $l+m$ representado por la composición

$$k+1 \xrightarrow{f} l+h \xrightarrow{\varphi_h} l+h+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l+m-1 \xrightarrow{\varphi_{m-1}} l+m$$

se dice que tiene firma $(h; j_{m-1}, ..., j_h)$ con respecto a l y m.

Observación 3.12. La firma no necesariamente es única para un subobjeto dado, ni cada subobjeto debe tener una firma.

Definición 3.13. Una r-coloración de $\mathcal{B}[^{l+m}_{k+1}]$ tal que todos los $(k+1)$-subobjetos con la misma firma (con respecto a l y m) tienen el mismo color, se le denomina (l,m)-coloración.

De ahora en adelante la categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ satisfacen todas las condiciones mencionadas en la sección 3 de este capítulo.

Para los enteros $l \geq 0$ y $m \geq 1$, definimos recursivamente algunos números necesarios para probar el lema que enunciaremos más adelante. La existencia de estos números que daremos a continuación esta garantizada pues supondremos que la propiedad de Ramsey vale en $\mathcal{A}$, es decir, $\mathcal{A}(k; l_1, ..., l_r)$ vale.
Estos números son:

$$\begin{aligned} v_1 &= N_{\mathcal{A}}(k; r^{t^{m-1}}; l, ..., l) \\ v_2 &= N_{\mathcal{A}}(k; r^{t^{m-2}}; v_1 + 1, ..., v_1 + 1) \\ &\vdots \\ v_m &= N_{\mathcal{A}}(k; r^{t^{0}}; v_{m-1} + 1, ..., v_{m-1} + 1). \end{aligned}$$

LEMA 3.14. *Supongamos que $\mathcal{A}(k; l_1, ..., l_r)$ vale. Sean $l \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros; $x \geq v_m + 1$; c una r-colaración de $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{x}{k+1}$. Entonces existe $g : l + m \longrightarrow x$ tal que $c \circ \bar{g}$ es una (l, m)-coloración de $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l+m}{k+1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por inducción sobre m. Probemos el lema para $m = 1$. Para este caso, lo que tenemos es $x \geq v_1 + 1$ y una r-coloración c de $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{x}{k+1}$. Tomemos $x = v_1 + 1$. Comencemos a colorear $\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k}$ por la coloración inducida por $\mathcal{M}$, esto es, a un subobjeto de $\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k}$ le asigna el mismo color que a su imagen por medio de $\bar{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1+1}{k+1}$. Así la coloración que usaremos de $\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k}$ es $c\bar{\mathcal{M}}$, la cual denotaremos por c'. Ahora, por la escojencia de v_1 tenemos que hay un i, $1 \leq i \leq r$ y un morfismo $f : l \longrightarrow v_1$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l}{k} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr] & \mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k} \arrow[r, "c'"] & \{1, .., r\} \\ & \{i\} \arrow[ur, "incl"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $g = \mathcal{M}(f)$. Veamos que $c\bar{g}$ es una $(l, 1)$-coloración de $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l+1}{k+1}$. Sea $h : k+1 \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{B}$ con $h = \mathcal{M}(h')$ para algún $h' : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{A}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[{l \atop k}] \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{A}[{v_1 \atop k}] \arrow[d, "\bar{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{B}[{l+1 \atop k+1}] \arrow[r, "\bar{g}"] & \mathcal{B}[{v_1+1 \atop k+1}]
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\bar{\mathcal{M}}\bar{f}(h' : k \longrightarrow l) = \bar{g}\bar{\mathcal{M}}(h' : k \longrightarrow l).$$

Luego

$$c\bar{\mathcal{M}}\bar{f}(h' : k \longrightarrow l) = c\bar{g}(h : k+1 \longrightarrow l+1).$$

Como $\mathcal{A}(k; l_1, ..., l_r)$ vale tenemos que,

$$c\bar{g}(h : k+1 \longrightarrow l+1) = i.$$

Esto ocurre para cualquier $h : k+1 \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{B}$ con $h = \mathcal{M}(h')$ para algún $h' : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $c\bar{g}$ es una $(l,1)$-coloración de $\mathcal{B}[{l+1 \atop k+1}]$.
Supongamos que el lema vale para $m-1$, esto es, para cualquier $l \geq 0$ entero, $x \geq v_{m-1}+1$ y cualquier r-coloración c de $\mathcal{B}[{x \atop k+1}]$, existe $g : l+m-1 \longrightarrow x$ en $\mathcal{B}$ tal que $c\bar{g}$ es una $(l, m-1)$-coloración de $\mathcal{B}[{l+m-1 \atop k+1}]$. Luego, por la escogencia de los v_i, podemos tomar $l = v_1+1$ y asi tenemos que existe algún $g : v_1+m \longrightarrow x$ en $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}[{v_1+m \atop k+1}]$ está $(v_1+1, m-1)$-coloreado por $c\bar{g}$. Ahora bien, comencemos coloreando $\mathcal{B}[{v_1+1 \atop k+1}]$ de la siguiente manera:
Para $f : k+1 \longrightarrow v_1+1$ consideramos, para cualquier escogencia de $j_{m-1}, ..., j_1$, $1 \leq j_i \leq t$, el subobjeto representado por

$$k+1 \xrightarrow{f} v_1+1 \xrightarrow{\varphi_1} v_1+2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_1+m-1 \xrightarrow{\varphi_{m-1}} v_1+m$$

donde $\varphi_i = \varphi_{v_1+i, j_i}$, $1 \leq i \leq m-1$. Luego para cualquier escogencia de $j_{m-1}, ..., j_1$, $1 \leq j_i \leq t$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}[{v_1+1 \atop k+1}] \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "\varphi"'] & \{1, ..., r\} \\
\mathcal{B}[{v_1+m \atop k+1}] \arrow[ur, "c\bar{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi = \overline{\varphi_{m-1}...\varphi_1}$, $j = (j_{m-1}, ..., j_1)$ y $c_j = c\bar{g}\varphi$. Así la coloración que le daremos a $f : k+1 \longrightarrow v_1+1$ es $(c_j(f : k+1 \longrightarrow v_1+1))_{j\in t^{m-1}}$. Por lo que la coloración que le daremos a $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1+1}{k+1}$, denotandola por c' es $(c_j)_{j\in t^{m-1}}$. Claramente c' es una $r^{t^{m-1}}$-coloración de $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1+1}{k+1}$. Ahora coloreemos a $\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k}$ por la coloración inducida por $\mathcal{M}$, esto es, a un subobjeto de $\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k}$ le asignamod el mismo color que a su imagen por medio de $\bar{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1+1}{k+1}$. En otras palabras, la coloración que usaremos es $c'\bar{\mathcal{M}}$. Luego por la escogencia de v_1, hay un i, $1 \leq i \leq r^{t^{m-1}}$ y un morfismo $\omega : l \longrightarrow v_1$ en $\mathcal{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l}{k} \arrow[r, "\overline{\omega}"] \arrow[dr] & \mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k} \arrow[r, "c'\bar{\mathcal{M}}"] & \{1, .., r^{t^{m-1}}\} \\
& \{i\} \arrow[ur, "incl"'] &
\end{tikzcd}$$

Así todos los subobjetos de $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l}{k})$ tienen el mismo color en $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l+1}{k+1}$ coloreado por $c'\overline{\mathcal{M}(\omega)}$. En efecto, para $h : k+1 \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{B}$ y $h = \mathcal{M}(h')$ para algún $h' : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{A}$, tenemos que

$$\bar{\mathcal{M}}\overline{\omega}(h' : k \longrightarrow l) = \overline{\mathcal{M}(\omega)}\bar{\mathcal{M}}(h' : k \longrightarrow l),$$

pues el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l}{k} \arrow[r, "\overline{\omega}"] \arrow[d, "\bar{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1}{k} \arrow[d, "\bar{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l+1}{k+1} \arrow[r, "\overline{\mathcal{M}(\omega)}"'] & \mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{v_1+1}{k+1}
\end{tikzcd}$$

Así

$$c'\bar{\mathcal{M}}\overline{\omega}(h' : k \longrightarrow l) = c'\overline{\mathcal{M}(\omega)}\bar{\mathcal{M}}(h' : k \longrightarrow l),$$

Como $\mathcal{A}(k; l_1, ..., l_r)$ vale, tenemos que

$$c'\overline{\mathcal{M}(\omega)}(h : k+1 \longrightarrow l+1) = i.$$

Por lo tanto todos los subobjetos de $\bar{\mathcal{M}}(\mathcal{A}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l}{k})$ tienen el mismo color en $\mathcal{B}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{l+1}{k+1}$ coloreado por $c'\overline{\mathcal{M}(\omega)}$.

Ahora bien, supongamos que $f : k+1 \longrightarrow l+h$ está en $\mathcal{B}$, $1 \leq h \leq m$, con $f = \mathcal{M}(f')$ para algún $f' : k \longrightarrow l+h-1$ en $\mathcal{A}$. Consideremos el siguiente diagrama (el cual nos referiremos por $(*)$):

$$\begin{tikzcd}
k+1 \arrow[r, "\mathcal{M}(\omega_h f')"] \arrow[d, leftrightarrow] & v_1+h \arrow[r, "\varphi_{v_1+h,j_h}"] & v_1+h+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & v_1+m-1 \arrow[r, "\varphi_{v_1+m-1,j_{m-1}}"] & v_1+m \\
k+1 \arrow[r, "f"'] & l+h \arrow[r, "\varphi_{l+h,j_h}"'] \arrow[u, "u_h"] & l+h+1 \arrow[r] \arrow[u, "u_{h+1}"] & \cdots \arrow[r] & l+m-1 \arrow[r, "\varphi_{l+m-1,j_{m-1}}"'] \arrow[u, "u_{m-1}"] & l+m \arrow[u, "u_m"]
\end{tikzcd}$$

donde $u_1 = \mathcal{M}(\omega)$, $u_i = \mathcal{M}(\mathcal{P}(u_{i-1}))$, $i = 2,3,...,m$; $\omega_1 = \omega$, $\omega_i = \mathcal{P}(\omega_{i-1})$, $i = 2,3,...,m$. Por la condición (II) de la sección anterior de este capítulo, este diagrama conmuta para cada escogencia de $j_h,...,j_{m-1}$. Veamos cual es nuestra (l,m)-coloración de $\mathcal{B}[{l+m \atop k+1}]$. Consideremos cualquier subobjeto de $l+m$ con firma $(1; j_{m-1},...,j_1)$ con respecto a l y m. Supongamos que dicho subobjeto está representado por

$$k+1 \xrightarrow{f} l+1 \xrightarrow{\varphi_{l+1,j_1}} l+2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l+m-1 \xrightarrow{\varphi_{l+m-1,j_{m-1}}} l+m$$

.

Llamemos $e = \varphi_{l+m-1,j_{m-1}}...\varphi_{l+1,j_1}f$, entonces $e : k+1 \longrightarrow l+m$. Luego para cada escogencia $j_{m-1},...,j_1$ se tiene que:

$$\varphi_2\overline{\mathcal{M}(\omega)}(f : k+1 \longrightarrow l+1) = \overline{u_m}\varphi_1(f : k+1 \longrightarrow l+1),$$

donde $\varphi_1 = \overline{\varphi_{l+m-1,j_{m-1}}...\varphi_{l+1,j_1}}$ y $\varphi_2 = \overline{\varphi_{v_1+m-1,j_{m-1}}...\varphi_{v_1+1,j_1}}$.
Esta igualdad se cumple pues el siguiente diagrama conmuta para cada escogencia de $j_{m-1},...,j_1$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}[{l+1 \atop k+1}] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\overline{\mathcal{M}(\omega)}"'] & \mathcal{B}[{l+m \atop k+1}] \arrow[d, "\overline{u_m}"] \\
\mathcal{B}[{v_1+1 \atop k+1}] \arrow[r, "\varphi_2"'] & \mathcal{B}[{v_1+1 \atop k+1}]
\end{tikzcd}$$

Así para cada escogencia de $j_{m-1},...,j_1$ tenemos

$$c\bar{g}\varphi_2\overline{\mathcal{M}(\omega)}(f : k+1 \longrightarrow l+1) = c\bar{g}\overline{u_m}(f : k+1 \longrightarrow l+m),$$

es decir, que para cada escogencia de $j_{m-1},...,j_1$ tenemos

$$c\bar{g}\overline{u_m}(e : k+1 \longrightarrow l+m) = i$$

Por lo tanto todos los subobjeto con la misma firma $(1; j_{m-1}, ..., j_1)$ tienen el mismo color en $\mathcal{B}[^{v_1+m}_{k+1}]$.

Ahora consideremos un subobjeto de $l+m$ con firma $(h; j_{m-1}, ..., j_h)$, $h \geq 2$, representado por $e : k+1 \longrightarrow l+m$ donde e es la última fila del diagrama $(*)$. Por conmutatividad de dicho diagrama, tenemos

$$u_m e = b\mathcal{M}(\omega_h f')$$

donde b es la primera fila del diagrama $(*)$, $b : v_1 + h \longrightarrow v_1 + m$. Esto quiere decir que $u_m e$ tiene firma $(h-1, j_{m-1}, ..., j_h)$ respecto a v_1+1 y $m-1$. Como $c\bar{g}$ es una $(v_1+1, m-1)$-coloración de $\mathcal{B}[^{v_1+m}_{k+1}]$ tenemos que todos los subobjetos que tengan firma $(h-1, j_{m-1}, ..., j_h)$ tienen el mismo color y así el color de todos los subobjetos está determinado por j_i. Por lo tanto el color de cualquier subobjeto con firma $(h, j_{m-1}, ..., j_h)$ con respecto a l y m, $h \geq 1$, tienen su color bajo $c\bar{g}\overline{u_m}$ determinado por los j_i. Así $c\bar{g}\overline{u_m}$ es una (l, m)-coloración de $\mathcal{B}[^{l+m}_{k+1}]$ y el lema queda probado. $\square$

5. El Resultado Principal.

A continuación el resultado principal del trabajo.

TEOREMA 3.15. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías que satisfacen lo mencionado en este capítulo, sección 3. Supongamos que $\mathcal{A}(k; l_1, ..., l_r)$ vale para todo $l_1, ..., l_r$ y $r > 0$ entonces $\mathcal{B}(k + 1; l_1, ..., l_r)$ vale para todo $l_1, ..., l_r$ y $r > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por inducción sobre $L = l_1 + \cdots + l_r$. Podemos suponer que $L > 0$ pues $\mathcal{B}(k+1; l_1, ..., l_r)$ vale por vacuidad si $l_i < k+1$ para cualquier i o si $k+1 < 0$ y trivialmente si $t = 0$. Entonces se puede asumir que $l_i \geq k + 1 \geq 0$ para todo i y $t > 0$. Si cualquier $l_i = 0$ entonces $k + 1 = 0$ y $\mathcal{B}(k + 1; l_1, ..., l_r)$ vale trivialmente ya que $y_{0,0} = 1$. Por lo tanto podemos suponer $l_i > 0$ para todo i y así $L > 0$. Ahora bien, supongamos que $\mathcal{B}(k + 1; l_1, ..., l_r)$ vale para $L - 1$. Sea

$$l = maxN_{\mathcal{B}}(k + 1; r, l_1, ..., l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, ..., l_r)$$

un número que existe por la hipótesis inductiva. Sea $y = r^{y_{l,k+1}}$, donde $y_{l,k+1}$ es el cardinal de $\mathcal{B}[{l \atop k+1}]$. Sea $m = N(y, t)$, donde $N(y, t)$ es el número dado por el Lema 3.10. Sea v_m los número usados en la hipótesis del Lema 3.14 y sea $x \geq v_m + 1$. Finalmente, sea c una r-coloración de $\mathcal{B}[{x \atop k+1}]$. Luego por el Lema 3.14 existe un $g : l + m \longrightarrow x$ en $\mathcal{B}$ tal que $c\overline{g}$ es una (l, m)-coloración de $\mathcal{B}[{l+m \atop k+1}]$. Ahora bien, coloreemos $\{1, ..., t\}^m$ como sigue: $(j_1, ..., j_m)$ y $(k_1, ..., k_m)$ tienen el mismo color si y sólo si para cada $h : k + 1 \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$ los subobjetos representados por las composiciones

$$k + 1 \xrightarrow{h} l \xrightarrow{\varphi_{l,j_1}} l + 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l + m - 1 \xrightarrow{\varphi_{l,j_m}} l + m$$

y

$$k + 1 \xrightarrow{h} l \xrightarrow{\varphi_{l,k_1}} l + 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l + m - 1 \xrightarrow{\varphi_{l,k_m}} l + m$$

ambas tienen el mismo color en $\mathcal{B}[{l+m \atop k+1}]$. Claramente esto es una y-coloración de $\{1, ..., t\}^m$. Luego por el Lema 3.10 y la escogencia de m, podemos encontrar una línea monocromática en $\{1, ..., t\}^m$. Sea $i_1, ..., i_d$ los i's para los cuales $j_{iz} = z$ (debe haber al menos uno por la definición de línea). Para $0 \leq a \leq d$, definamos $h_a : l + i_a \longrightarrow l + i_{a+1} - 1$ en $\mathcal{B}$ por la composición de los morfismos que presenta el siguiente diagrama

$$l+i_a \xrightarrow{\varphi_{l+i_a,j_{i_a+1}}} l+i_a+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l+i_{a+1}-2 \xrightarrow{\varphi_{l+i_{a+1}-2,j_{i_{a+1}-1}}} l+i_{a+1}-1$$

, donde $i_0=0$ y $i_{d+1}=m+1$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
l \arrow[r, "h_0"] & l+i_1-1 \arrow[r, "\varphi_{l+i_1-1,j}"] \arrow[d, "\varphi_{l+i_1-1,j}"] & l+i_1 \arrow[r, "h_1"] & l+i_2-1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{l+i_1-2,j}"] & \cdots \\
& l+i_1 \arrow[rr, "\mathcal{M}(e_1)"] & & l+i_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & l+i_{d-2}-1 \arrow[r, "\varphi_{l+i_{d-2}-1,j}"] \arrow[d, "\varphi_{l+i_{d-2}-1,j}"] & l+i_{d-2} \arrow[r, "h_{d-2}"] & l+i_{d-1}-1 \arrow[r, "\varphi_{l+i_{d-1}-1,j}"] \arrow[d, "\varphi_{l+i_{d-1}-1,j}"] & l+i_{d-1} \arrow[r, "h_{d-1}"] & l+i_d-1 \arrow[r, "\varphi_{l+i_d-1,j}"] & l+i_d \arrow[d, "h_d"] \\
\cdots \arrow[r] & l+i_{d-2} \arrow[rr, "\mathcal{M}(e_{d-2})"] & & l+i_{d-1} \arrow[urrr, "\mathcal{M}(e_{d-1})"'] & & & l+m
\end{tikzcd}$$

donde la existencia $e_{d-s} : l+i_{d-s}-1 \longrightarrow l+i_{d-s+1}-1$ en $\mathcal{A}$ están garantizados por condición (III) y por la Observación 3.8 tenemos que este diagrama conmuta para cada $j=1,...,t$. Así

$$\begin{aligned}
h_d\varphi_{l+i_d-1,j}h_{d-1}\varphi_{l+i_{d-1}-1,j}h_{d-2}\varphi_{l+i_{d-2}-1,j}\cdots h_1\varphi_{l+i_1-1,j}h_0 &= h_d\mathcal{M}(e_{d-1})\mathcal{M}(e_{d-2})\cdots\mathcal{M}(e_1) \\
&= h_d\mathcal{M}(e_{d-1}e_{d-2}\cdots e_1).
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que por la escogencia de los h_a se tiene que para cualquier $h : k+1 \longrightarrow l$, los subobjetos representados por

$$k+1 \xrightarrow{h} l+i_1-1 \xrightarrow{\varphi_{l+i_1-1,j}} l+i_1 \xrightarrow{\mathcal{M}(e_{d-1}e_{d-2}\cdots e_1)} l+i_d \xrightarrow{h_d} l+m \ .$$

tienen el mismo color en $\mathcal{B}\left[\substack{l+m \\ k+1}\right]$ para cada j. Ahora bien, sabemos que por la condición (II), el siguiente diagrama conmuta para cada j

$$\begin{tikzcd}
l+i_1-1 \arrow[r, "\varphi_{l+i_1-1,j}"] & l+i_1 \\
l \arrow[u, "h_0"] \arrow[r, "\varphi_{l,j}"'] & l+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(\mathcal{P}(h_0))"']
\end{tikzcd} .$$

Sea $\alpha = h_d\mathcal{M}(e_{d-1}e_{d-2}\cdots e_1(\mathcal{P}(h_0)))$, entonces para cada $h : k+1 \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$, los subobjetos representados por las t composiciones

$$k+1 \xrightarrow{h} l \xrightarrow{\varphi_{l,j}} l+1 \xrightarrow{\alpha} l+m$$

tiene el mismo color. Por lo tanto $\overline{cg\alpha\varphi_{l,j}}$ son iguales para todo j sobre $\mathcal{B}[{l \atop k+1}]$. Ahora consideremos cualquier subobjeto de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[{l \atop k}])$ en $\mathcal{B}[{l+1 \atop k+1}]$. Sea dicho subobjeto representado por $f : k+1 \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{B}$ donde $f = \mathcal{M}(f')$ con $f' : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{A}$. Entonces los subobjetos representados por αf tienen firma $(i_d; j_{m-1}, ..., j_{i_d+1})$ con respecto a l y m, ya que αf es sólo $h_d\mathcal{M}(e_{d-1}e_{d-2}\cdots e_1\mathcal{P}(h_0)f')$. Como $\mathcal{B}[{l+m \atop k+1}]$ está (l,m)-coloreado por $c\overline{g}$, todos los subobjetos de $l+m$ con esta firma tienen el mismo color. Por lo tanto $c\overline{g}\alpha$ da el mismo color a cualquier subobjeto de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[{l \atop k}])$ ya que la firma es independiente de la escogencia de f, es decir, $c\overline{g}\alpha\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[{l \atop k}]) = \{q\}$ para algún $q \in \{1, ..., r\}$. Consideremos la coloración $\overline{cg\alpha\varphi_{l,1}}$ sobre $\mathcal{B}[{l \atop k+1}]$. Por la escogencia de l existe $p \in \{1, ..., r\}$ y $f_p : l_p \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$ tal que $\overline{cg\alpha\varphi_{l,1}f_p}(\mathcal{B}[{l_p \atop k+1}]) = \{p\}$ con $p \neq q$ o exite $f_q : l_q - 1 \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$ tal que $\overline{cg\alpha\varphi_{l,1}f_q}(\mathcal{B}[{l_q-1 \atop k+1}]) = \{q\}$. En el primer caso tenemos el subobjeto monocromático desiado y el teorema queda probado. Supongamos entonces que $\overline{cg\alpha\varphi_{l,1}f_q}(\mathcal{B}[{l_q-1 \atop k+1}]) = \{q\}$. Como $\varphi_{l,1} = \varphi_{l,j}$ para todo j, tenemos que

$$\overline{cg\alpha\varphi_{l,j}f_q}(\mathcal{B}[{l_q-1 \atop k+1}]) = \{q\}$$

para todo j. Por la condición (II) se tiene que $\varphi_{l,j}f_q = \mathcal{M}(\mathcal{P}(f_q))\varphi_{l_q-1,j}$ con $j = 1, ..., t$. Por lo tanto para $j = 1, ..., t$ se tiene

$$\overline{cg\alpha\mathcal{M}(\mathcal{P}(f_q))\varphi_{l_q-1,j}}(\mathcal{B}[{l_q-1 \atop k+1}]) = \{q\}$$

Ahora consideremos cualquier subobjeto en $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[{l_q-1 \atop k}])$. Sea dicho subobjeto representado por $f : k+1 \longrightarrow l_q$ donde $f = \mathcal{M}(f')$ con $f' : k \longrightarrow l_q - 1$ en $\mathcal{A}$. Claramente los subobjetos representados por $\mathcal{M}(\mathcal{P}(f_p))f$ están en $\mathcal{A}$ pues $\mathcal{M}(\mathcal{P}(f_p))f = \mathcal{M}(\mathcal{P}(f_p)^{f'})$. Así estos subobjetos tiene el mismo color q bajo la coloración $\overline{cg\alpha}$. Así $\overline{cg\alpha\mathcal{M}(\mathcal{P}(f_p))}$ le asigna color q a todos los subobjetos de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[{l_q-1 \atop k}])$ y a todos los subobjetos de $\overline{\varphi_{l_q-1,j}}(\mathcal{B}[{l_q-1 \atop k+1}])$. luego por la condición (I), esto ocurre para todo $\mathcal{B}[{l_q \atop k+1}]$ y por tanto $g\alpha\mathcal{M}(\mathcal{P}(f_p)) : l_q \longrightarrow x$ es el morfismo desiado y el teorema queda probado. □

Ahora daremos la proposición que usaremos para obtener los resultados en las aplicaciones.

Proposición 3.16. *Sea $\mathfrak{D}$ una clase de categorías tal que para cada categoría $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{D}$ existe una categoría $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ satisfacen las condiciones del teorema anterior. Entonces $\mathcal{B}(k; l_1, ..., l_r)$ vale para todo $k; l_1, ..., l_r$ y todo $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{D}$.*

Demostración. Sabemos que para cualquier categoría $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{D}$, $\mathcal{B}(-1; l_1, ..., l_r)$ vale por vacuidad para todo $l_1, ..., l_r$. Luego por hipótesis podemos encontrar una categoría apropiada

$\mathcal{A}$ y aplicar el teorema anterior para obtener que $\mathcal{B}(0; l_1, ..., l_r)$ vale por vacuidad para todo $l_1, ..., l_r$. Haciendo esto sucesivamente obtenemos que $\mathcal{B}(k; l_1, ..., l_r)$ vale para todo $k; l_1, ..., l_r$ y todo $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{D}$. $\square$

CAPíTULO 4

Aplicaciones del Resultado Principal

1. Corolarios.

Acontinuación presentaremos algunas clases de categorías que satisfacen todas las condiciones del resultado principal.

Corolario 4.1. ***(Ramsey)*** *Sea $r \geq 1$ entero y sea $\mathcal{C}$ la categoría que tiene por objetos enteros no negativos (aqui cada entero no negativo k representa el conjunto $[k] = \{1, ..., k\}$) y los morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(k, l)$ son todas las funciones inyectivas de $[k]$ en $[l]$, donde la composición es la composición usual de funciones. Entonces $\mathcal{C}(k; l_1, ..., l_r)$ vale.*

Demostración. Sea $\mathfrak{D}$ la clase de categoría que consta sólo de la categoría $\mathcal{C}$, es decir, $\mathfrak{D} = \{\mathcal{C}\}$. Sea $\mathcal{P}$ el functor identidad de $\mathcal{C}$. Ahora definamos $\mathcal{M}$ de la siguiente manera: Para cualquier $f' : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}$, sea $\mathcal{M}(f')$ la función $f : k+1 \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{C}$ definida por $f(x) = f'(x)\ \forall x \in [k]$ y $f(k+1) = l+1$. Claramente $\mathcal{M}$ es un functor. Sea $t = 1$ y sea $\varphi_l : l \longrightarrow l+1$ definida por $\varphi_l(x) = x\ \forall x \in [l]$. Veamos que con estas escogencias, se satisfacen las condiciones (I),(II) y (III) mencionadas en el capítulo 3 sección 3.

- (I) Consideremos cualquier subobjeto en $\mathcal{C}[^{l+1}_{k+1}]$ representado por $f : k+1 \longrightarrow l+1$. Primero supongamos que $f(s) = l+1$ para algún $s \in [k+1]$. Definamos $\pi_{s,k+1} : [k+1] \longrightarrow [k+1]$ como la permutación que deja fijo a todos los elementos de $[k+1]$, excepto s y $k+1$, que se intercambian. Claramente f y $f\pi_{s,k+1}$ representa el mismo subobjeto. Sea $f' : k \longrightarrow l$ definida por $f' = f\pi_{s,k+1}$ en $[k]$, entonces $\mathcal{M}(f') = f\pi_{s,k+1}$. En efecto, para cada $x \in [k]$ tenemos $\mathcal{M}(f')(x) \in [l]$ pues f es inyectiva y $\mathcal{M}(f')(k+1) = f\pi_{s,k+1}(k+1) = f(\pi_{s,k+1}(k+1)) = f(s) = l+1$. Por lo tanto el subobjeto que escogimos está en $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{C}[^{l}_{k}])$. Ahora supongamos que $f([k+1]) \subseteq [l]$, entonces definamos $f' : k+1 \longrightarrow l$ por $f' = f$ en $[k+1]$. Así, tenemos que $f = \varphi_l f'$ y el subobjeto está en $\overline{\varphi_l}(\mathcal{C}[^{l}_{k+1}])$. Por lo tanto (I) está probado.
- (II) Veamos que para cada $g : s \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} l \arrow[r, "\varphi_l"] & l+1 \\ s \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\varphi_s"'] & s+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(\mathcal{P}(g))"'] \end{tikzcd}$$

Sea $g : s \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}$, entonces para cada $x \in [s]$ tenemos

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}(g))\varphi_s(x) = \mathcal{M}(g)(x) = g(x) = \varphi_l(g(x)) = (\varphi_l g)(x).$$

Así queda (II) queda probado.

- (III) Veamos que para algún $e : l \longrightarrow l+1$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} l+1 \arrow[r, "\varphi_{l+1}"] & l+2 \\ l \arrow[u, "e"] \arrow[r, "\varphi_l"'] & l+1 \arrow[u, "\mathcal{M}(e)"'] \end{tikzcd}$$

Sea $e = \varphi_l$ entonces para cada $x \in [l]$ tenemos

$$\mathcal{M}(e)\varphi_l(x) = \mathcal{M}(e)(x) = e(x) = \varphi_l(x) = x = \varphi_{l+1}(\varphi_l(x)) = (\varphi_{l+1}\varphi_l)(x).$$

Así queda (III) probada.

Luego por la proposición tenemos que todas las categorías en $\mathfrak{D}$ vale la propiedad de Ramsey. De donde, en $\mathcal{C}$ vale la propiedad de Ramsey. □

COROLARIO 4.2. ***(Espacios Vectoriales)*** *Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ descrita en el Ejemplo 2.25. Entonces $\mathcal{C}(k; l_1, ..., l_r)$ vale.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{D}$ la clase de categoría que consta de las categorías $\mathcal{C}_m$ con $m \geq 0$ descritas en el Ejemplo 2.26, es decir, $\mathfrak{D} = \{\mathcal{C}_m\}_{m \in N \cup \{0\}}$. Claramente $\mathfrak{D}$ contiene a la categoría $\mathcal{C}$ pues es exactamente $\mathcal{C}_0$. Entonces para cada m, sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{m+1}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}_m$. Tomemos los functores $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}$ como los descritos en los Ejemplos 2.27 y 2.28 respectivamente. Sea $t = card(A_m) = q^m$. Para cada $a \in A_m$ y l entero no negativo, definamos $\varphi_{la} : l \longrightarrow l+1$ por $\varphi_{la} = (a \otimes v_{l+1}, e_l)$ donde $e_l : V_l \longrightarrow V_{l+1}$ es la transformación lineal que actúa identicamente en V_l. Veamos que con estas escogencias son suficiente para satisfacer las condiciones (I),(II) y (III) mencionadas en el capítulo 3 sección 3.

- (I) Sea $(\omega', \varphi') : k+1 \longrightarrow l+1$. Primero supongamos que $\varphi'(V_{k+1})$ no está contenido en V_l, entonces podemos escoger algún isomorfismo $\psi : V_{k+1} \longrightarrow V_{k+1}$ tal que $\varphi'\psi(V_{k+1}) \subseteq V_l$ y $\varphi'\psi(v_{k+1}) = v_{l+1}+v'$ para algún $v' \in V_l$. En efecto, como $\varphi'(V_{k+1})$ no está contenido en V_l, existe al menos un $v \in \varphi'(V_{k+1})$ tal que v no está en V_l. Como $v \in \varphi'(V_{k+1})$ y φ' es lineal tenemos que existen escalares $\alpha_i \in GF(q)$, $1 \leq i \leq k+1$, no todos nulos, tales que

$$v = \alpha_1\varphi'(v_1) + \cdots + \alpha_{k+1}\varphi'(v_{k+1}).$$

Luego, como v no está en V_l y φ' es inyectiva tenemos que existe un s, $1 \leq s \leq k+1$, tal que

$$\varphi'(v_s) = \beta_1\varphi'(v_1) + \cdots + \beta_l\varphi'(v_l) + \beta_{l+1}\varphi'(v_{l+1})$$

con $\beta_j \in GF(q)$, $1 \leq j \leq l+1$, $\beta_{l+1} \neq 0$. Ahora bien,

  - si $s = k+1$ estamos listo, pues $\psi = I_{V_{k+1}}$ donde $I_{V_{k+1}}$ denota la tanformación identidad de V_{k+1}.
  - si $1 \leq s \leq k$ entonces definamos $\psi : V_{k+1} \longrightarrow V_{k+1}$ (sobre la base de V_{k+1}) como sigue: para i, $1 \leq j \leq l+1$, $i \neq s$, tenemos

    $$\psi(v_i) = v_i$$

    y

    $$\psi(v_s) = v_{k+1}.$$

    Es fácil verificar que ψ definida de esta manera satisface que $\varphi'\psi(V_{k+1}) \subseteq V_l$ y $\varphi'\psi(v_{k+1}) = v_{l+1} + v'$ para algún $v' \in V_l$.

Ahora, sea $(\omega, \varphi) : k \longrightarrow l$ en $\mathcal{C}_{m+1}$, donde $\varphi = \varphi'\psi$ en V_k y $\omega = \omega' + a_{m+1} \otimes v'$. Entonces tenemos que $\mathcal{M}((\omega, \varphi)) = (\omega', \varphi'\psi)$, y como $(\omega', \varphi'\psi)$ representa el mismo subobjeto que (ω', φ') se tiene que el subobjeto representado por $(\omega', \varphi') : k+1 \longrightarrow l+1$ tal que $\varphi'(V_{k+1})$ no este contenido en V_l, está en $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}[^l_k])$. Ahora supongamos que $\varphi'(V_{k+1}) \subseteq V_l$ entonces $(\omega', \varphi') = (\omega'' + a \otimes v_{l+1}, \varphi')$ para algún $a \in A_m$ y algún $\omega'' \in A_m \otimes V_l$. Pero

$$(\omega'' + a \otimes v_{l+1}, \varphi') = (a \otimes v_{l+1}, e_l)(\omega'', \varphi'') = \varphi_{la}(\omega'', \varphi''),$$

donde $\varphi'' = \varphi'$ en V_{k+1}. Por lo tanto el subobjeto representado por $(\omega', \varphi') : k+1 \longrightarrow l+1$ tal que $\varphi'(V_{k+1}) \subseteq V_l$ está en $\overline{\varphi_{la}}(\mathcal{A}[^l_{k+1}])$. Así (I) queda probado.

- (II) Sea $(\omega,\varphi) : s \longrightarrow l$ en $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{M}(\mathcal{P}((\omega,\varphi))) = (\omega',\varphi')$, donde $\omega' = \omega$ y φ' es la aplicación dada por $\varphi' = \varphi$ en V_s y $\varphi'(v_{s+1}) = v_{l+1}$. Luego, para cada $a \in A_m$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(a \otimes v_{l+1}, e_l)(\omega,\varphi) &= (a \otimes v_{l+1} + (1_{V_l} \otimes e_l)(w), \varphi e_l)\\ &= (\omega + a \otimes v_{l+1}, \varphi e_l)\\ &= (\omega' + a \otimes \varphi(v_{s+1}), \varphi' e_s)\\ &= (\omega',\varphi')(a \otimes v_{s+1}, e_s).\end{aligned}$$

  Así (II) queda probado.
- (III) Consideremos en $\mathcal{C}_{m+1}$ el morfismo $(a \otimes v_{l+1}, e_l) : l \longrightarrow l+1$. Entonces $\mathcal{M}((a \otimes v_{l+1}, e_l)) = (0,\psi')$, donde $\psi' : V_{l+1} \longrightarrow V_{l+2}$ está definida por $\psi'(x) = x$ para todo $x \in V_l$ y $\psi'(l+1) = v_{l+2} + v_{l+1}$. Ahora se tiene que para cada $a \in A_m$,

$$\begin{aligned}(a \otimes v_{l+2}, e_{l+1})(a \otimes v_{l+1}, e_l) &= (a \otimes v_{l+2} + a \otimes e_{l+1}(v_{l+1}), e_{l+1}e_l)\\ &= (a \otimes v_{l+2} + a \otimes v_{l+1}, e_l)\\ &= (a \otimes v_{l+2} + v_{l+1}, e_l)\\ &= (a \otimes \psi'(v_{l+1}), \psi' e_l)\\ &= (0,\psi')(a \otimes v_{l+1}, e_l).\end{aligned}$$

  Así (III) queda probado.

Luego por la proposición tenemos que todas las categorías en $\mathfrak{D}$ vale la propiedad de Ramsey. De donde, en $\mathcal{C}_0$ vale la propiedad de Ramsey. □

Corolario 4.3. ***(Grafos)*** *Sea $r \geq 1$ entero y sea $\mathcal{C}$ la categoría descrita en el Ejemplo 2.12. Entonces $\mathcal{C}(n; l_1, ..., l_r)$ vale.*

La demostración de este corolario sólo es escribir en términos de grafo la demostración de Corolario 4.1, pues colorear un grafo no es más que colorear el conjunto de vértices del grafo, así que se colorean conjuntos finitos.

Bibliografía

[1] R. L. Graham, K. Leeb and B. L. Rothschild, Ramsey's Theorem for a Class of Categories, Academic Press, New York and London, Advances in Mathematics, Vol. 8, No. 3, June 1992.

[2] R. L. Graham and B. L. Rothschild, Ramsey's theorem for n-parameter Sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **159** (1971), 257-292.

[3] A. Hales and R. J. Jewett, Regularity and Positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 222-229.

[4] José Rodriguez, Teoría de Grafos, Editorial Venezolana, Primera Edición, 2003.

[5] Thomas W. Hungerford, Algebra, Graduate Text In Mathematics, Editorial Board.

[6] R. L. Graham, J. H. Spencer and B. L. Rothschild, Ramsey Theory, Second Edition