

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

INVERSION DE AMPLITUDES SÍSMICAS A OFFSET VARIABLE MEDIANTE TÉCNICAS DE MONTE CARLO

Tutor Académico: Dr. Miguel Bosch

Trabajo Especial de Grado
Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela para
Optar al título de Ingeniero Geofísico
Por el Br. Luis Cara.

Caracas, octubre 2005

DEDICATORIA

*A mis Hermanos: **Carmelo, José Luis, David,**
Santiago y muy especialmente a **Maryori.***

*A todas aquellas personas
Que de cualquier forma
Colaboraron
Con este trabajo
Gracias.*

AGRADECIMIENTOS

Infinitas gracias a la Universidad Central de Venezuela por ser mi Alma Mater y por ser fuente inagotable tanto de conocimientos como de experiencias, ya que en sus espacios físicos, tuve la oportunidad de convertirme en una persona profesional y útil para esta sociedad.

Con un agradecimiento muy especial quiero mencionar al profesor Miguel Bosch, mi tutor Académico, quien depositó en mi, toda su confianza y paciencia a la vez de transmitirme mucho de sus conocimientos teóricos-prácticos y de su experiencia como investigador internacional. Guardo un profundo respeto y admiración por todo lo que el representa para esta universidad, actualmente es investigador, profesor, jefe de departamento y tutor académico de otros compañeros.

A la escuela de Geología Minas y Geofísica, y especialmente al departamento de Geofísica y su personal administrativo, a los profesores: Inírida Rodríguez, Franklin Ruiz, Andrey Ortega, Michael Schmitt y Ronny Meza con quienes tuve la oportunidad de ver los mejores cursos de la carrera.

Deseo extender también palabras de agradecimiento a la compañía Petrobras por haber suministrado algunos datos de registros de pozos utilizados en una parte del proyecto.

Deseo agradecer muy especialmente a Rosa Jiménez por ser en el laboratorio mi apoyo en todo momento, y por ser esa batería que me lleno de energía para terminar este proyecto. En fases tempranas en la elaboración de este trabajo, pude contar con la valiosa colaboración y asesoramiento del Ing. Alfredo Honig quien con su paciencia y buena voluntad supo enseñarme muchas cosas acerca de cómo se debe programar.

Cara M. Luis H.

INVERSION DE AMPLITUDES SISMICAS A OFFSET VARIABLE MEDIANTE TECNICAS DE MONTE CARLO

Tutor Académico: Miguel Bosch.

Tesis de Ingeniería Geofísica, Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería.

Escuela de Geología, Minas y Geofísica. 2005, n° de Pág. 87.

Palabras Claves:

Ecuaciones de Zoeppritz, Sísmica 2D, Método Monte Carlo.

RESUMEN

Se presenta una metodología de inversión a partir de grupos de trazas sísmicas a apertura fuente-receptor variable para estimar las propiedades elásticas del medio: lentitud P, lentitud S y densidad, utilizando la técnica de Monte Carlo. Los datos observados son las amplitudes de ondas sísmicas de reflexión en el dominio del tiempo como función de la separación emisor-receptor. El problema directo se resuelve en este trabajo con el objetivo de obtener sismogramas sintéticos multicomponentes pre-stack, utilizando el método de trazado de rayos, y las amplitudes de las ondas como función del offset son calculadas usando las ecuaciones de Zoeppritz de forma exacta. La inversión se realiza a través de la exploración pseudo-aleatoria sobre el espacio de modelos usando el algoritmo de metrópolis y generando largas cadenas de realizaciones del modelo todas probables en términos de la información geofísica y estadística previa. De esta forma se obtiene la convergencia a una muestra estadística de la densidad de probabilidad posterior que se desea muestrear. La técnica desarrollada se valida mediante pruebas sintéticas, utilizando modelos simulados en laboratorio en base a estadísticas reales sobre los parámetros elásticos obtenidas a partir de registros de pozos, la cual incluye valores medios, desviación tipo y correlación para la lentitud P, lentitud S y densidad. Los resultados muestran que la metodología implementada produce la descripción completa de la incertidumbre en la inferencia sobre los parámetros esperada.

INDICE

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
RESUMEN.....	iv
LISTA DE FIGURAS Y TABLAS	vii
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
EL PROBLEMA	3
1.1 planteamiento del problema	3
1.2 Objetivos.	5
1.2.1 Objetivo general	5
1.2.2 Objetivos específicos	5
CAPITULO II	
MARCO TEORICO.....	6
2.1 Esfuerzo y Deformación	6
2.2 Ondas Sísmicas	9
2.3 Velocidades de Ondas Compresivas de las Rocas	11
2.4 Atenuación de la Energía Sísmica a lo largo de la trayectoria de los rayos.....	11
2.5 Ley de Snell	13
2.6 Trayectorias de los rayos sísmicos en medios estratificados	15
2.7 Ecuaciones de Zoeppritz.	16
2.8 Convolución Discreta.....	21
2.9 Métodos de Inferencia Probabilística.....	21
2.10 Método de Monte Carlo	25
CAPITULO III	
MARCO METODOLOGICO.....	27
3.1. Problema Directo:	27
3.1.1 Cálculo de Ángulos de Despegue o de Salida.....	28
3.1.2 Cálculo de los ángulos de capas más profundas.	30
3.1.3 Calculo de los coeficientes de Zoeppritz.	30
3.1.4. Tiempos de viaje.	30
3.1.5 Ondícula.	32
3.1.6 Serie de Reflectividad	32
3.1.7 Receptores multicomponentes.	33
3.1.8 Convolución y Sismograma Sintético.....	33
3.2 Simulación estadística de los parámetros elásticos.....	34
3.2.1 Modelo a priori.....	35
3.2.2 Matriz de Covarianzas y Simulación.	36

3.3 Inversión.....	38
CAPITULO IV	
RESULTADOS.....	42
4.1 Problema Directo	42
4.1.1 tiempos de viaje.....	42
4.1.2 Coeficientes de reflexion.....	44
4.1.3 Sismogramas Sintéticos.	47
4.2 Simulación estadística de los parámetros elásticos	49
4.3 Inversión.....	58
4.3.1 Modelo elástico sintético.....	59
4.3.2 Perfil real de parámetros elásticos	71
CONCLUSIONES	79
RECOMENDACIONES	81
BIBLIOGRAFIA	82
APENDICES.....	85
Apéndice A: Cálculos de ángulos de despegue.....	85
Apéndice B: Cálculo de tiempos de viaje por el método de interpolación	86
Apéndice C: Algunas relaciones útiles para el calculo de tiempos de viaje por ecuación de Dix y Schmitt	87

LISTA DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 2.1: Típica Curva de Esfuerzo Deformación para un cuerpo sólido.....	7
Figura 2.2: Representación grafica de los módulos elásticos. a) Uniaxial ; b) Módulo de Young ; c) Modulo de Cizalla y d) Módulo Compresibilidad.	9
Figura 2.3: Cambio de forma progresivo de un pico de un pulso durante su propagación a través del interior de la tierra debido a los efectos de la absorción.	13
Figura 2.4: Representación gráfica de medios físicos y frente de ondas	14
Figura 2.5: Rayos Reflejados y transmitidos en conversión de modos generados por un rayo P que incide oblicuamente sobre una interfase con contraste de impedancia acústica.	17
Figura 2.6: (a): Diferentes conversiones de modos con onda P incidente desde arriba	18
Figura 2.6: (b): Diferentes conversiones de modos con onda P incidente desde abajo	18
Figura 3.1: Diagrama de Flujo que contiene las tres partes principales del programa.	27
Figura 3.2: Diagrama de Flujo para el Problema Directo desarrollado en este trabajo.	28
Figura 3.3: Gráfica que muestra el seno del Angulo de salida vs. offsett.....	29
Figura 3.4: Gráfica de la Ondícula utilizada en este trabajo.	32
Figura 3.5: Descomposición vectorial del Rayo que llega al receptor.....	33
Figura 3.6: Sismograma sintético de componente vertical de 10Canales y separación de 300 m.	34
Figura 3.7: Diagrama que muestra los pasos principales de la Simulación	35
Figura 3.8: Histogramas de frecuencias de los tres modelos considerados luego de 500000 iteraciones de un modelo a priori sintético.	37
Figura 3.9: Diagrama de flujo del algoritmo o muestreador de metrópolis.	39

Figura 4.1: Grafica de los diferentes tiempos de viajes que se ensayaron en este trabajo: línea azul es ecuación de Schmitt, línea roja es ecuación de Dix y Línea verde es el método de disparo o interpolación.....	43
Tabla 4.1: Parámetros elásticos de la primera capa para 6 modelos de Castagna (1993). Estos modelos corresponden a las curvas de coeficiente de reflexión mostradas en la Figura 4.2. Cuando la segunda capa tiene los parámetros: $V_p=6096\text{m/s}$, $V_s=3048\text{m/s}$, y $\rho=2650\text{Kg/m}^3$. Note que $V_p/V_s=2$ para todas las capas.....	46
Figura 4.2: Coeficiente de reflexión graficado contra el ángulo de incidencia para 6 modelos dados en la tabla 4.1.	46
Figura 4.3: (a) Sismograma sintético de componente vertical para un número de cinco canales de 800 metros de separación para 100 capas de 10 ms de espesor. Para un modelo sintético de prueba.	47
Figura 4.3: (b) Sismograma sintético de componente horizontal para un número de cinco canales de 800 metros de separación para 100 capas de 10 ms de espesor. Para un modelo sintético de prueba.	48
Tabla 4.2: Modelo a priori tomado como prueba para validar la fase de simulación del programa.	49
Figura 4.4: (a) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro lentitud P para una capa al azar en la fase de simulación estadística.	51
Figura 4.4: (b) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro lentitud S para una capa al azar en la fase de simulación estadística.	52
Figura 4.4: (c) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro de densidad para una capa al azar en la fase de Simulación estadística.	52
Figura 4.5: (a) Gráfico cruzado de lentitud P contra lentitud S generado para una capa al azar.	53
Figura 4.5: (b) Gráfico cruzado de lentitud P contra densidad generado para una capa al azar.	54
Figura 4.5: (c) Gráfico cruzado de lentitud S contra densidad generado para una capa al azar.	54

Figura 4.6: Representación Gráfica de 5 modelos (en colores) para los parámetros elásticos, realizados por el programa en simulación estadística. La línea de color negro es el modelo a priori.....	55
Figura 4.7: Datos correspondientes (en colores) para cada uno de los modelos de la figura 4.6.	56
Figura 4.8: Histogramas de frecuencias de 2 millones de realizaciones para cada uno de los parámetros. El cálculo se efectúa a partir de la densidad de probabilidad marginal a priori. Los modelos de la figura 4.6 se vuelven a graficar nuevamente. La línea de color negro es el modelo a priori.	57
Figura 4.9: Modelo usado como “verdadero” y el cual es producto de la simulación estadística a partir del modelo a priori sintético de la tabla 4.2.	59
Figura 4.10: Datos “observados” calculados a partir del modelo de la figura 4.9 hasta un offset de 4 Km.	60
Figura 4.11: Gráficos del progreso en la disminución del residuo para las dos componentes: vertical y horizontal.	62
Figura 4.12: Muestra de (líneas de colores) cinco modelos generados por la cadena de Markov que toma muestras según la densidad de probabilidad posterior. En negro el modelo “verdadero”.	63
Figura 4.13: Datos correspondientes a las realizaciones de la figura 4.12. En gris se representa la barra de error.....	64
Figura 4.14: Detalle ampliado de las trazas 2 y 3 del sismograma de componente vertical más la barra de error en gris de valor 0.05.....	65
Figura 4.15: Histograma de frecuencias de los 2 millones de realizaciones calculadas con la cadena convergente a la densidad de probabilidad posterior. La línea negra representa el modelo “verdadero”, la línea roja el promedio calculado a partir de la muestra.....	67
Figura 4.16: (a) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.01 en componente vertical y 0.01 en horizontal.....	68
Figura 4.16: (b) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.03 en componente vertical y 0.04 en horizontal.....	69

Figura 4.16: (c) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.05 en componente vertical y 0.1 en horizontal.....	70
Figura 4.17: Modelo usado como “verdadero” y el cual es producto de la simulación estadística a partir de datos reales de un pozo.....	71
Figura 4.18: Datos “observados” calculados a partir del modelo de la figura 4.17 hasta un offset de 4 Km.....	72
Figura 4.19: Gráficos del progreso en la disminución del residuo para las dos componentes: vertical y horizontal.	73
Figura 4.20: Muestra de (líneas de colores) cinco modelos generados por la cadena de Markov que toma muestras según la densidad de probabilidad posterior. En negro el modelo verdadero.....	74
Figura 4.21: Datos correspondientes a las realizaciones de la figura 4.20. En gris se representa la barra de error.....	75
Figura 4.22: Detalle ampliado de las trazas 2 y 3 del sismograma de componente vertical más la barra de error en gris.	76
Figura 4.23: Histograma de frecuencias de los 2 millones de realizaciones calculadas con la cadena convergente a la densidad de probabilidad posterior. La línea negra representa el modelo verdadero, la línea roja el promedio calculado a partir de la muestra.....	77
Figura 4.24: Ilustración de la trayectoria de uno de los rayos obtenida en un modelo de capas horizontales y espesor constante.	85
Figura 4.25: Coseno del ángulo para cualquier capa	86

INTRODUCCION

Las ondas sísmicas proveen información del interior del subsuelo. A través del estudio de estas, es posible construir modelos de alta resolución de algunas propiedades del interior. Un modelo es una representación simplificada de las variaciones de las propiedades de los materiales del subsuelo, y a través de las amplitudes de las ondas y de su tiempo de arribo, relacionadas con la distancia de la fuente, es posible inferir modelos que describen adecuadamente estas propiedades y además proporcionan información geológica sobre el subsuelo.

La inferencia de modelos a partir de datos observados es lo que se conoce como un proceso de inversión (Tarantola 1987), en el cual se deben conocer primeramente el conjunto de relaciones y leyes físicas que reproducen las observaciones. Esto es lo que se conoce como modelado directo o problema directo. En el caso de sismica el modelado directo es implementado a través de un algoritmo que produce un sismograma sintético (Treitel y Lines 2001), este sismograma depende del cambio en las propiedades elásticas de las rocas y del ángulo de incidencia con que las ondas penetran el subsuelo. Las ecuaciones matemáticas de dichas propiedades y el ángulo de incidencia, están contenidas en las ecuaciones de Zoeppritz y de Aki y Richards (1980) y son las que definen por completo el modelado directo. Comúnmente se suelen usar aproximaciones para estas ecuaciones como las de Shuey (1985) las cuales son empleadas con precisión para offsets cortos hasta 25 grados, las de Hilterman (2001) con rango de uso de hasta 30 grados, y las de (Gray, Chen y Goodway 1999) hasta 60 grados. En este trabajo se propone trabajar con las ecuaciones exactas y que son válidas para todos los ángulos.

Para poder realizar adecuadamente el proceso de inversión de amplitudes sísmicas es necesario hacer uso de técnicas o métodos, a los efectos de relacionar las observaciones con determinadas configuraciones de un modelo del subsuelo,

explicando las observaciones del punto de vista teórico (Bosch 1998; Bosch 2003). Una de estas técnicas es la de muestreo, o Monte Carlo utilizadas por Mosegaard y Tarantola (1995) las cuales son un camino aleatorio sobre el espacio de parámetros, que tiene como finalidad conseguir muestrear adecuadamente el espacio de parámetros del modelo, este procedimiento implica la reiteración en el cálculo del problema directo un gran número de iteraciones. Otra de las técnicas es la de optimización (Bosch 2004) en la cual se actualiza iterativamente un modelo inicial para que los datos calculados a partir de este ajusten a los observados y a una estadística previa de los parámetros del medio. En este trabajo se realiza la inversión de amplitudes sísmicas a cualquier offset mediante el método de muestreo, y en el desarrollo de los códigos se hace énfasis en la eficiencia del cálculo para hacer viable la técnica de exploración de Monte Carlo.

La información sísmica es una de las fuentes principales de información en el área de la Geofísica. Si bien el tratamiento de los datos para crear imágenes de reflectividades ha sido la técnica mas utilizada, existe creciente interés y utilización industrial de técnicas que producen como resultado una descripción directa de las propiedades físicas del medio terrestre como los parámetros elásticos, a través de métodos de inversión. Técnicas similares, y que tienen el mismo objetivo de estimar los parámetros elásticos del medio a partir de sísmica a offset variable, se pueden encontrar en los trabajos de Torres-Verdín (1999; 2004), en los cuales se emplea optimización.

CAPITULO I

EL PROBLEMA

1.1 planteamiento del problema

Geofísicos han estado trabajando en soluciones a problemas inversos en sismica desde el comienzo de esta profesión. Tal es el caso de los primeros intérpretes que inferían propiedades del subsuelo sobre la base de grabaciones sísmicas, ellos se apoyaban en las variaciones de los tiempos de viaje, amplitudes y forma de onda para así crear a través de un proceso usualmente de ensayo y error, modelos que fueran capaces de producir los datos observados. En la moderna jerga científica, la inferencia de propiedades del subsuelo a partir de datos observados es conocida como la solución de un problema inverso. En contraste, la solución del problema directo consiste en la determinación de los datos que podrían ser grabados para una configuración del modelo dada y que cumplen con las leyes de la física.

Desde principios de los años 60, la inversión en geofísica se ha estado desarrollando como un proceso cuantitativo a la par del creciente conocimiento de la teoría de inversión y del incremento del poder de las computadoras, que hacen posible pasar de la teoría a la práctica con relativa facilidad.

Hoy en día se disponen de diversas técnicas que hacen posible relacionar las observaciones con diferentes configuraciones del subsuelo, una de ellas es la técnica de optimización, la cual está dirigida a mejorar iterativamente una configuración particular del modelo, buscando una configuración que maximice la densidad de probabilidad. Otra técnica de gran importancia es la de muestreo o Monte Carlo en donde se tiene como objetivo producir una gran colección de realizaciones del modelo a partir de las cuales es posible calcular la probabilidad de cualquier rango de un parámetro o un conjunto de parámetros del modelo del subsuelo. Esta técnica está orientada a obtener una descripción completa de la incertidumbre sobre los parámetros del modelo. Sin embargo el método de Monte Carlo requiere de un

esfuerzo de cálculo considerable, ya que es necesaria la solución del problema directo una enorme cantidad de veces para explorar correctamente el espacio de parámetros del modelo, es por ello que cuando el problema directo implica un significativo tiempo de cálculo, el método de Monte Carlo se hace prohibitivo. Por esta causa se propone en este trabajo utilizar una metodología para desarrollar el problema directo de forma eficiente, el cual incluye todo el proceso para calcular los sismogramas sintéticos tanto de componente vertical y horizontal de un modelo de capas horizontales homogéneas usando las ecuaciones de Zoeppritz en el menor tiempo de cálculo posible.

Con el desarrollo de este trabajo se pretende no sólo alcanzar los objetivos propuestos inicialmente y que se exponen en el siguiente punto sino también sentar las bases para desarrollar nuevos objetivos en el corto y mediano plazo y que ya se tienen previstos. retos de mayor complejidad que permitan extender y desarrollar esta técnica en base a nuevas experiencias, y así contribuir con un aporte metodológico que sea muy útil en la solución de problemas inversos en geofísica, además de servir de referencia para todos aquellos que deseen trabajar en esta área.

1.2 Objetivos.

1.2.1 Objetivo general

Desarrollar un método de inversión por la técnica de Monte Carlo para predecir los parámetros elásticos del medio a partir de grupos de trazas sísmicas de disparo común.

1.2.2 Objetivos específicos

Se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar e implementar un algoritmo en lenguaje Fortran 90 capaz de simular sismogramas sintéticos multicomponentes pre-stack de forma eficiente a partir de un modelo de capas horizontales homogéneas de parámetros elásticos (V_p , V_s y densidad).
- Simular modelos unidimensionales de parámetros elásticos (V_p , V_s y densidad) que cumplan con una estadística previa para estas propiedades: valores medios, desviación tipo y correlación entre los parámetros elásticos.
- Utilizar la técnica de Monte Carlo para explorar de manera pseudo-aleatoria el espacio de modelos usando el algoritmo de Metrópolis. De esta manera se obtienen probabilidades para los parámetros elásticos mencionados, las cuales serán presentadas en histogramas de frecuencias acumuladas.

CAPITULO II MARCO TEORICO

2.1 Esfuerzo y Deformación

Cuando se aplican fuerzas externas a un cuerpo, se establecen dentro de este, unas fuerzas internas. El **esfuerzo** es una medida de la intensidad de estas fuerzas internas. El esfuerzo, que actúa sobre cualquier área de cualquier superficie dentro del cuerpo, se puede describir en una componente **normal** de esfuerzo perpendicular a la superficie, y una componente **tangencial o de cizalla** en el plano de la superficie.

En cualquier punto en un cuerpo sometido a esfuerzos, se pueden definir tres planos ortogonales, en los cuales las componentes del esfuerzo son principalmente esfuerzos normales, es decir, sin esfuerzos de cizalla actuando sobre ellos. Estos planos definen tres ejes ortogonales conocidos como los **ejes principales de esfuerzo**, y los esfuerzos normales que actúan en esas direcciones se conocen como **esfuerzos principales**. Cada uno de los esfuerzos principales representa un equilibrio de las componentes de la fuerza de igual magnitud, pero de sentido contrario. Se denomina esfuerzo compresivo cuando las fuerzas están dirigidas cada una hacia la otra (hacia el interior), y esfuerzo extensivo si se dirigen en contra (hacia fuera).

Si los esfuerzos principales son de igual magnitud en un cuerpo, este estado de esfuerzos se denomina **hidrostático**, debido a que es el estado de esfuerzo a través de un fluido en reposo. No existen esfuerzos de cizalla en un campo de esfuerzos hidrostático, debido a que éstos no pueden ser sostenidos por un cuerpo fluido. Si los esfuerzos principales son diferentes, aparecen esfuerzos de cizalla a lo largo de todas superficies del interior del cuerpo, excepto en aquellas perpendiculares a los ejes principales.

Un cuerpo sujeto a esfuerzo sufre un cambio de forma y/o tamaño denominado **deformación**. Hasta un cierto límite de esfuerzo, conocido como

resistencia elástica de un material (*yield strength*), la deformación se relaciona de un modo lineal con el esfuerzo aplicado y se denomina **elástica** (Ley de Hooke). Esta deformación elástica es reversible, por lo que cuando se deja de aplicar el esfuerzo la deformación desaparece. Si la resistencia elástica de un cuerpo es superada, la deformación comienza a ser no lineal, y parcialmente irreversible (produce deformación permanente), y pasa a ser conocido como deformación plástica o dúctil. Si el esfuerzo aumenta aún mas, se produce la fractura del cuerpo. Un ejemplo de una curva esfuerzo/ deformación aparece mostrado en la figura 2.1.

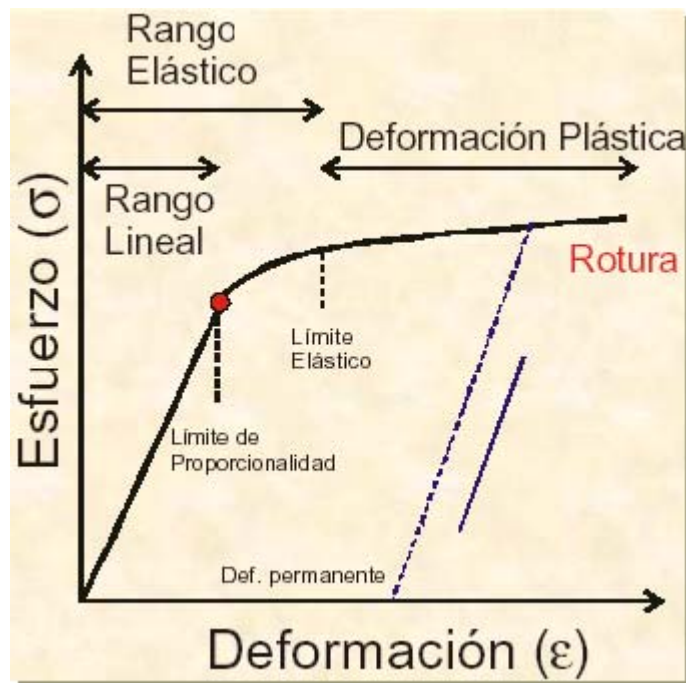


Figura 2.1: Típica Curva de Esfuerzo Deformación para un cuerpo sólido.

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación en el campo elástico es específica para cada material por medio de su módulo de elasticidad, que expresa la razón entre un tipo de esfuerzo particular con la deformación resultante.

Consideremos una varilla, de longitud original l y sección A , que se extiende un incremento de longitud (Δl) debido a la aplicación de una fuerza tensional (F) en ambas caras (figura 2.2b). El módulo de elasticidad relevante es el denominado **Módulo de Young** (E), definido por,

$$E = \frac{\text{Esfuerzo}_{\text{longitudinal}}}{\text{Deformacion}_{\text{longitudinal}}} = \frac{F/A}{\Delta l/l} \quad (2.1)$$

Nótese que la extensión de esta varilla se acompañará de una reducción de su diámetro (la varilla sufre deformación tanto longitudinal como lateral). La razón entre la deformación lateral y longitudinal es conocida como el **coeficiente de Poisson** (ν), y suele tener valores próximos a 0.25.

El **módulo de compresibilidad** (K) expresa la razón entre el esfuerzo y la deformación para el caso de una presión hidrostática simple (P) aplicada a un elemento cúbico (figura 2.2d), y se define como,

$$K = \frac{\text{Esfuerzo}_{\text{hidrostatico}}}{\text{Deformacion}_{\text{de}_{\text{volumen}}}} = \frac{P}{\Delta v/v} \quad (2.2)$$

De un modo similar el **módulo de cizalla** (μ) se define como la razón entre el esfuerzo de cizalla (τ) y la deformación de cizalla resultante ($\tan \theta$) y es representado en la figura 2.2c,

$$\mu = \frac{\tau}{\tan \theta} \quad (2.3)$$

Finalmente, el módulo axial (ψ) define la razón del esfuerzo longitudinal y la deformación longitudinal para el caso de que no hay deformación lateral (el material está constreñido a deformarse de un modo uní axial) (figura 2.2a),

$$\psi = \frac{\text{Esfuerzo_longitudinal}}{\text{Deformacion_longitudinal_uniaxial}} = \frac{F/A}{\Delta l/l} \quad (2.4)$$

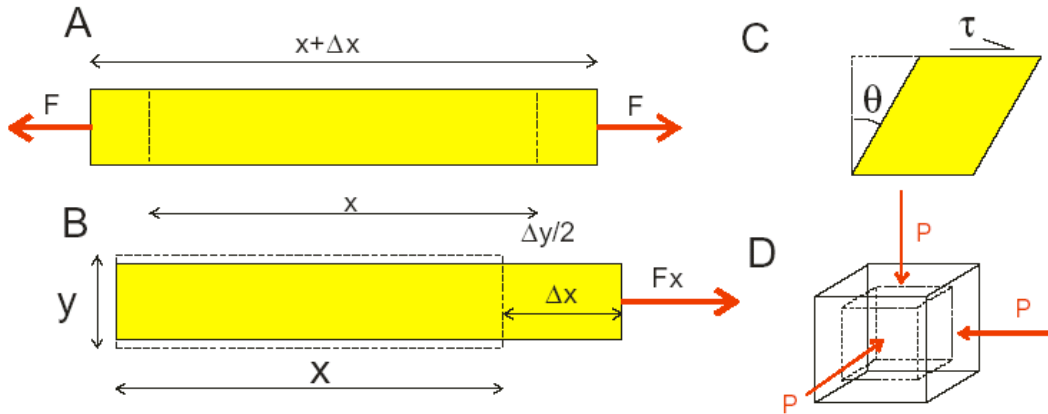


Figura 2.2: Representación grafica de los módulos elásticos. a) Uniaxial ; b) Módulo de Young ; c) Modulo de Cizalla y d) Módulo Compresibilidad.

2.2 Ondas Sísmicas

Las ondas sísmicas son perturbaciones al estado de equilibrio de deformación en un medio elástico que se propagan desde una fuente sísmica (como un terremoto o una explosión) hacia fuera, irradiando energía mecánica. Las fuentes sísmicas apropiadas para la prospección sísmica son aquellas que generan trenes de onda de corta vida conocidos como **pulsos**, que típicamente contienen un amplio rango de frecuencias. Las deformaciones asociadas con el paso de un pulso sísmico se pueden considerar elásticas, excepto en la zona inmediata a la fuente. Con esta asunción, las velocidades de propagación de los pulsos sísmicos están determinados por los módulos elásticos y las densidades de los materiales a través de los que pasan. Existen dos tipos fundamentales de ondas sísmicas: **ondas internas o de volumen** (*body waves*) y **ondas de superficie** (*surface waves*).

La velocidad de propagación de una onda interna o de volumen de cualquier material viene dado por,

$$V = \sqrt{\frac{\text{Módulo_Elástico_apropiado_del_Material}}{\text{Densidad_del_Material}}} . \quad (2.5)$$

De este modo, la **velocidad de las ondas P** (V_p) de las ondas internas compresivas, que involucran deformación compresiva, viene dada por,

$$V_p = \sqrt{\frac{K + 4/3\mu}{\rho}} . \quad (2.6)$$

Y la velocidad de las **ondas S (ondas de cizalla)**, que involucran deformación de cizalla pura es,

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} . \quad (2.7)$$

Puede deducirse de estas ecuaciones que las ondas compresivas siempre viajan más rápido que las ondas S en el mismo medio. La relación entre V_p y V_s en cualquier material es función únicamente por el valor del coeficiente de Poisson (σ) para ese material,

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} . \quad (2.8)$$

Y como el coeficiente de Poisson para las rocas consolidadas es típicamente 0.25, $V_p \approx 1.7V_s$.

2.3 Velocidades de Ondas Compresivas de las Rocas

Debido a su variada composición, texturas (forma del grano y grado de empaquetamiento), porosidades y contenido de fluidos en los poros, las rocas varían en su módulo elástico y densidades ρ , incluso, en sus velocidades sísmicas. La información sobre la velocidad de las ondas compresivas (V_p) de las capas de rocas que proporciona la prospección sísmica es importante por dos razones:

- 1) Es necesaria para la conversión de los tiempos de viaje de las ondas sísmicas en profundidades.
- 2) Proporciona información sobre la litología, o, incluso, la naturaleza del fluido contenido en el interior de los poros.

2.4 Atenuación de la Energía Sísmica a lo largo de la trayectoria de los rayos.

Cuando se propaga un impulso sísmico, la energía original E , que se transmite hacia el exterior de la fuente, comienza a distribuirse sobre una esfera cuyo radio va aumentando. Si el radio de la esfera es r , la cantidad de energía contenida dentro de una unidad de área de dicha esfera es,

$$\frac{E}{4\pi r^2} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, la energía contenida en el rayo va disminuyendo a lo largo del mismo en función de r^{-2} , debido al efecto de la expansión geométrica. Dado que la amplitud de la onda dentro de un material homogéneo es proporcional a la raíz cuadrada de la energía de la onda, la amplitud disminuye en función de r^{-1} .

Otra causa de pérdida de energía a lo largo de la trayectoria del rayo se debe a que el medio no es perfectamente elástico en su respuesta de paso de las ondas

sísmicas. La energía elástica va siendo gradualmente absorbida por el medio por pérdidas friccionales internas, lo que conduce eventualmente a la total desaparición de la perturbación sísmica. El **coeficiente de absorción** (α) expresa la proporción de pérdida de energía durante la transmisión a través de una distancia equivalente una longitud de onda completa (λ). Los valores de α para los materiales comunes en la tierra varían de 0.25 a 0.75 dB· λ^{-1} .

Finalmente si el medio no es homogéneo, las heterogeneidades de talla mayor o comparable con la longitud de onda producirán reflexiones o difracciones de las ondas, con lo cual hay una disminución adicional de la energía del frente de ondas transmitido

Dentro del rango de frecuencias utilizadas en prospección sísmica, se asume que el coeficiente de absorción es independiente de la frecuencia. Si la cantidad de absorción por longitud de onda es constante, se deduce que las frecuencias más altas se atenúan más rápidamente que las bajas frecuencias en función del tiempo o la distancia.

Para ilustrar este hecho consideremos dos ondas con frecuencias de 10 Hz y 100 Hz que se propagan por una roca con una $V_p = 2 \text{ Km. /s}$ y un $\alpha = 0.5 \text{ dB}/\lambda$. La onda de 100 Hz ($\lambda=20 \text{ m}$) se atenuará debido a la absorción por 5 dB sobre una distancia de 200 m, mientras que la onda de 10 Hz ($\lambda=200 \text{ m}$) se atenuará sólo 0.5 dB sobre la misma distancia. La forma de un pulso sísmico con un contenido de frecuencias amplio cambia continuamente durante su propagación debido a la progresiva pérdida de las frecuencias más altas. En general, el efecto de la absorción es producir un alargamiento progresivo del pulso sísmico. En la figura 2.3 se puede apreciar este alargamiento.

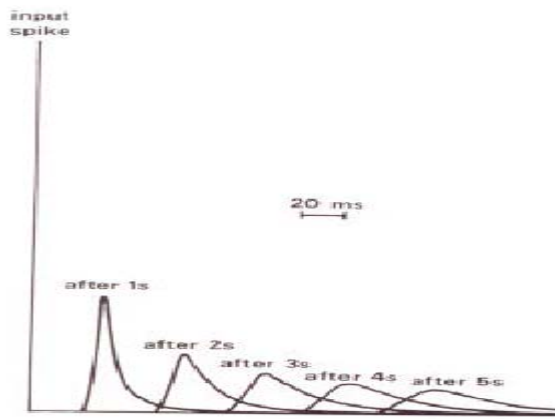


Figura 2.3: Cambio de forma progresivo de un pico de un pulso durante su propagación a través del interior de la tierra debido a los efectos de la absorción.

2.5 Ley de Snell

Se tienen dos medios físicos elásticos semi-infinitos isotrópicos y homogéneos en contacto por una interfase plana, uno está representado en color amarillo y otro en color verde, ver figura 2.4. Un frente de ondas plano representado por el segmento AB incide desde arriba con una velocidad V_1 y un ángulo de incidencia oblicua i con respecto a la normal de la interfase, este ángulo es la dirección del rayo el cual es también perpendicular al frente de ondas y tiene la dirección PO.

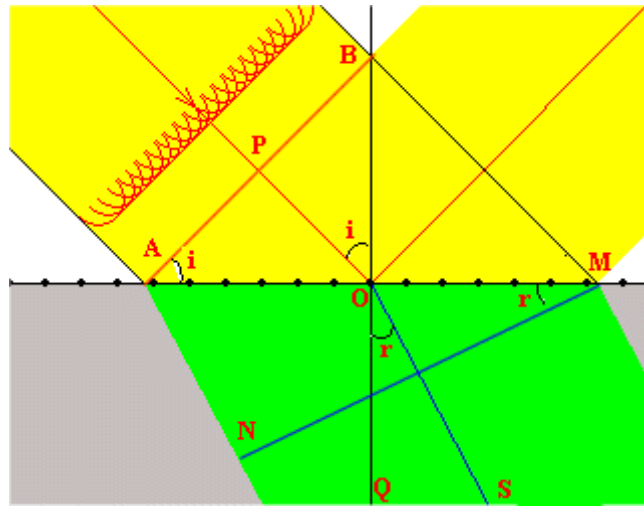


Figura 2.4: Representación gráfica de medios físicos y frente de ondas

La figura representa el instante justo cuando el frente de ondas AB que avanza en el medio amarillo empieza a tocar el medio verde en el punto A en la propia interfase. El frente de ondas al pasar la interfase comienza a desplazarse en el medio verde con una velocidad V_2 la cual es menor que V_1 .

Entonces se pueden apreciar tres aspectos importantes: primero que el frente de ondas avanza en el medio amarillo en un tiempo "t" la distancia BM, mientras que en el medio verde avanza la distancia AN.

Segundo que el ángulo "i" (ángulo de incidencia) es igual al ángulo BMA, por tener los ángulos BMA y POB los lados perpendiculares.

Tercero que el ángulo de refracción "r" es igual al ángulo AMN por tener los ángulos QOS y AMN los lados perpendiculares.

Por la definición de seno,

$$\begin{aligned} \text{sen}(i) &= \frac{BM}{MA} \\ \text{sen}(r) &= \frac{AN}{MA} \end{aligned} \quad . \quad (2.10)$$

Dividiendo $\text{Sen}(i)$ entre $\text{Sen}(r)$ se obtiene,

$$\frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} = \frac{\frac{BM}{MA}}{\frac{AN}{MA}} = \frac{BM}{AN} = \frac{V_1 t}{V_2 t} \quad . \quad (2.11)$$

Donde finalmente queda demostrado que,

$$V_2 \text{sen}(i) = V_1 \text{sen}(r) \quad . \quad (2.12)$$

La forma generalizada de la Ley de Snell establece que para cualquier rayo, la cantidad $\text{Sen}(i)/V$ permanece constante, y es conocida como el parámetro de rayo (p),

$$p = \frac{\text{sen}(\theta_1)}{\alpha_1} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{\alpha_2} = \frac{\text{sen}(\phi_1)}{\beta_1} = \frac{\text{sen}(\phi_2)}{\beta_2} \quad . \quad (2.13)$$

2.6 Trayectorias de los rayos sísmicos en medios estratificados

En una superficie situada entre dos capas de roca, generalmente se produce un cambio de la velocidad de propagación debido a las diferencias en las propiedades físicas de las dos capas. En esta superficie la energía contenida en un pulso sísmico incidente se divide en un pulso transmitido y otro reflejado. Las amplitudes relativas

de los pulsos transmitidos y reflejados, en términos de las velocidades y densidades de los dos medios, vienen dadas por las ecuaciones de Zoeppritz. (Telford, Geldart y Sheriff 1990).

2.7 Ecuaciones de Zoeppritz.

Aki y Richards (1980) utilizaron la continuidad de desplazamientos y continuidad de los esfuerzos en la interfaz de reflexión como condiciones de borde para resolver las ecuaciones de coeficientes de reflexión y transmisión como función del ángulo de incidencia, apoyándose en los parámetros de los medios elásticos (densidades, tipos de módulos y relación de poisson), obteniendo como resultado ecuaciones notoriamente complejas (Castagna 1993).

Cuando un rayo de ondas P incide oblicuamente sobre una interfase con contraste de impedancia acústica, se generan rayos de ondas P reflejados y transmitidos ver figura 2.5. Además, se puede observar que parte de la energía compresiva incidente se transforma en rayos S reflejados y transmitidos que se encuentran polarizados en un plano vertical.

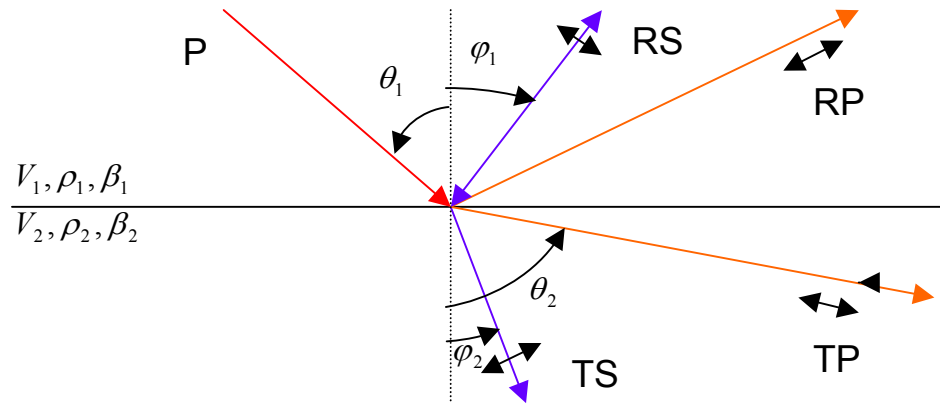


Figura 2.5: Rayos Reflejados y transmitidos en conversión de modos generados por un rayo P que incide oblicuamente sobre una interfase con contraste de impedancia acústica.

Los coeficientes **RP**, **RS**, **TP**, y **TS** para cualquier ángulo de incidencia θ_1 pueden ser completamente determinados por las densidades y velocidades de las ondas P y S de los dos medios, estos parámetros a su vez dependen de las propiedades físicas del medio terrestre como la litología, la porosidad y el tipo de fluido contenido en los poros.

Tomando en cuenta sólo la incidencia de ondas P, existen dos casos de interés en los cuales este tipo de onda puede incidir. Un caso es cuando la onda P incide desde arriba y otro caso en la que incide desde abajo, generalmente el coeficiente de reflexión no es igual en estos dos casos ya que este coeficiente no es simétrico, obteniéndose combinaciones de resultados diferentes para las ondas P y S transmitidas y reflejadas que deben considerarse, a continuación se muestran las combinaciones posibles que las ondas P pueden realizar al incidir sobre una interfase ver figura 2.6.

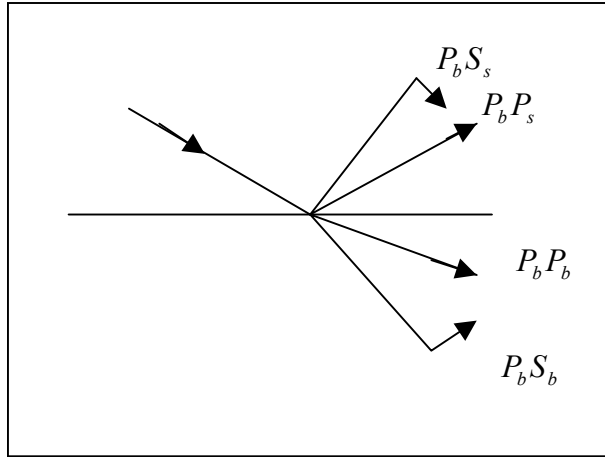


Figura 2.6: (a): Diferentes conversiones de modos con onda P incidente desde arriba

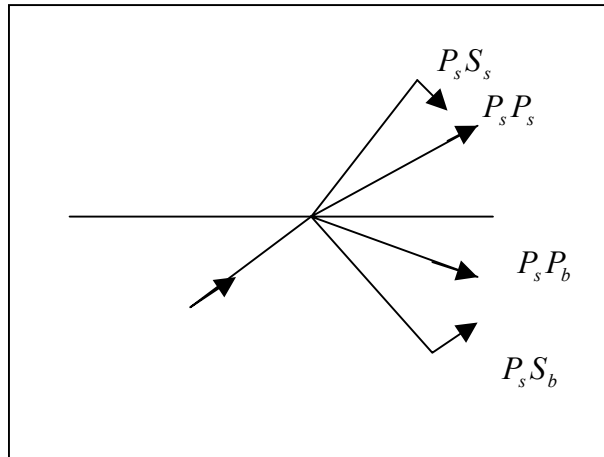


Figura 2.6: (b): Diferentes conversiones de modos con onda P incidente desde abajo

P_bP_s : Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde arriba y onda P reflejada hacia arriba.

P_bS_s : Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde arriba y onda S reflejada hacia arriba.

$P_b P_b$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde arriba y onda P transmitida hacia abajo.

$P_b S_b$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde arriba y onda S transmitida hacia abajo.

$P_s P_s$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde abajo y onda P transmitida hacia arriba.

$P_s S_s$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde abajo y onda S transmitida hacia arriba.

$P_s P_b$: Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde abajo y onda P reflejada hacia abajo.

$P_s S_b$: Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde abajo y onda S reflejada hacia abajo.

Según Aki y Richards los diferentes coeficientes reflexión y transmisión se calculan como,

$$P_b P_s = \left[\left(b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \right) F - \left(a + d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) H p^2 \right] / D \quad (2.14)$$

$$P_b S_s = -2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \left(ab + cd \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) p \alpha_1 / \beta_1 D \quad (2.15)$$

$$P_b P_b = 2 \rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} F \alpha_1 / \alpha_2 D \quad (2.16)$$

$$P_b S_b = 2 \rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} H p \alpha_1 / \beta_2 D \quad (2.17)$$

$$P_s P_s = 2 \rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} F \alpha_2 / \alpha_1 D \quad (2.18)$$

$$P_s S_s = -2 \rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} G p \alpha_2 / \beta_1 D \quad (2.19)$$

$$P_s P_b = - \left[\left(b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \right) F + \left(a + d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) G p^2 \right] / D \quad . \quad (2.20)$$

$$P_s S_b = 2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \left(ac + bd \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) p \alpha_2 / \beta_2 D \quad , \quad (2.21)$$

donde,

$$a = \rho_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) \quad . \quad (2.22)$$

$$b = \rho_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1 \beta_1^2 p^2 \quad . \quad (2.23)$$

$$c = \rho_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2 \beta_2^2 p^2 \quad . \quad (2.24)$$

$$d = 2(\rho_2 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2) \quad . \quad (2.25)$$

$$E = b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} + c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \quad . \quad (2.26) \quad , \quad F = b \frac{\cos j_1}{\beta_1} + c \frac{\cos j_2}{\beta_2} \quad . \quad (2.27)$$

$$G = a - d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \quad . \quad (2.28) \quad , \quad H = a - d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \quad . \quad (2.29)$$

$$D = EF + GH p^2 \quad . \quad (2.30)$$

Finalmente algunas consideraciones importantes acerca de las ecuaciones de Zoeppritz son que: primero, la conversión de onda S, ambas reflejada y transmitida son generalmente más fuertes entre el primer ángulo crítico y 90 grados. Tal es el caso que conversiones fuertes de este tipo han sido encontradas para offsets con los que comúnmente se trabaja en prospección sísmica. Segundo, el coeficiente de reflexion se convierte en un número complejo luego del ángulo crítico con su correspondiente fase. Tercero, los coeficientes de transmisión y reflexion son independientes de la frecuencia.

2.8 Convolución Discreta.

Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido de hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que sólo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesaria una aproximación numérica basada en la discretización de la señal.

Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función $x(\lambda)h(t-\lambda)$. Para ello se muestrean ambas señales en instantes de tiempo nt_s , que se llamarán $x_s[k]$ y $h_s[n-k]$ (donde n y k son enteros). El área es por tanto,

$$y_s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s \cdot x_s[k] h_s[n-k] = t_s \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k] . \quad (2.31)$$

Finalmente la convolución discreta se define para un intervalo de muestreo $t_s = 1$,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k] . \quad (2.32)$$

Un aspecto importante de resaltar acerca de la convolución discreta es que el índice de comienzo de la convolución es la suma de los índices de comienzo de las respectivas señales. Si las dos señales comienzan en $n = n_0$ y $n = n_1$, la convolución comienza en $n = n_0 + n_1$. También para dos secuencias de duración N y M , su convolución se extiende durante $M + N - 1$ muestreos.

2.9 Métodos de Inferencia Probabilística

También llamados métodos bayesianos, consisten en describir el medio material, que se explora con la propagación de ondas sísmicas a través de un modelo paramétrico, este modelo paramétrico es tal que si se fijan todos los valores de los

parámetros que lo conforman se fija la configuración del modelo del subsuelo. Al conjunto de todas las posibles combinaciones de parámetros del modelo se le llama **espacio de parámetros** del modelo. Se puede hacer una descripción del subsuelo a través del cálculo de probabilidades en este espacio de parámetros, mediante la definición **de funciones de densidades de probabilidad**.

Supongamos que está dada una densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{m})$, la cual está definida en un espacio de parámetros M , siendo $\mathbf{m}$ un punto en dicho espacio, entonces la probabilidad de que la configuración verdadera del medio se encuentre en un subconjunto cualquiera del espacio de modelos, $\Omega \subset M$, se calcula integrando la densidad de probabilidad sobre Ω ,

$$P = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{m}) d\mathbf{m} \quad . \quad (2.33)$$

Es importante mencionar que en los problemas de inferencia estadística existen dos tipos de conocimiento acerca del estado del medio, el primero se refiere al conocimiento que se tiene del medio antes de la realización e implementación de las observaciones físicas y el segundo después de dichas observaciones. Es por ello que suele asignarse una densidad de probabilidad **previa** sobre el espacio de parámetros para el conocimiento que se tiene del medio antes de las observaciones físicas, y una densidad de probabilidad **posterior** sobre el espacio de parámetros luego de la implementación de las observaciones físicas y la cual viene siendo una actualización del conocimiento previo, a continuación se muestra la forma de calcular la densidad de probabilidad posterior según Tarantola (1987),

$$\sigma(\mathbf{m}) = c L(\mathbf{m}) \rho(\mathbf{m}) \quad , \quad (2.34)$$

donde $\sigma(\mathbf{m})$ es la densidad de probabilidad posterior, $\rho(\mathbf{m})$ la densidad previa, $L(\mathbf{m})$ la función de verosimilitud, c es una constante de normalización y $\mathbf{m}$ es el arreglo de

parámetros del modelo. Como se puede apreciar la densidad de probabilidad posterior combina la información previa y las observaciones físicas, ya que la función de verosimilitud mide la probabilidad del modelo con respecto a las observaciones realizadas. Esta función de verosimilitud depende única y exclusivamente de los parámetros físicos del medio los cuales están relacionados de manera directa con las observaciones físicas.

A continuación se definen los modelos estadísticos para los dos componentes principales que conforman la densidad de probabilidad posterior.

Para la función de verosimilitud la cual esta basada entre el desajuste de los datos calculados a partir del modelo y los datos observados, donde las observaciones de los experimentos (sondeos geofísicos en este caso) se representan mediante una colección de parámetros, números reales, que se denominan datos. Según Bosch (2003) el conjunto de todos los valores posibles de los datos conforman el *espacio de los datos*, y se denota con $\mathbf{d}$ un punto en este espacio. Así mismo se considera que a partir de las leyes de la física, se dispone de una función que permite calcular, dada una particular configuración del modelo del subsuelo, la respuesta física esperada, $\mathbf{g}: m_{phys} \rightarrow \mathbf{d}$. Esta es la función que resuelve el llamado problema directo en geofísica. Entonces se define la función de verosimilitud para una configuración del modelo del subsuelo, considerando que los errores asociados a la medición y cálculo de los datos son gaussianos como,

$$L(\mathbf{m}) = \exp(-1/2 \|\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}\|^2) \quad , \quad (2.35)$$

donde $\mathbf{d}_{obs}$ son los datos observados y la distancia representada por la norma cuadrática de la expresión anterior se define como,

$$\|g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}\|^2 = (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs})^t C_d^{-1} (g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}) \quad , \quad (2.36)$$

con C_d matriz de covarianzas de los datos y describe la variabilidad (tamaño y correlación) de los errores.

Para la densidad previa en el espacio de parámetros materiales se utiliza un modelo gaussiano multivariado definiendo una distancia mediante la norma cuadrática similar a la expresión anterior como,

$$\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}\|^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^t C_{mod}^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}) \quad , \quad (2.37)$$

donde C_{mod} es la matriz de covarianzas que describe la variabilidad y correlación entre los parámetros materiales del medio, los elementos de la diagonal principal de esta matriz son las varianzas de cada parámetro e indican la variabilidad de las desviaciones del valor central del parámetro, los elementos que no pertenecen a esta diagonal son las covarianzas las cuales indican como se correlacionan cada par de parámetros en el modelo previo. $\mathbf{m}_{prior}$ Es la configuración central, o más probable de la información previa. Utilizando esta norma la densidad de probabilidad previa queda de la siguiente forma en atención al modelo gaussiano multivariado como,

$$\rho(\mathbf{m}) = c_1 \exp(-1/2 \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}\|^2) \quad . \quad (2.38)$$

Finalmente la densidad de probabilidad posterior para este trabajo queda definida como,

$$\sigma(\mathbf{m}) = c \exp(-S) \quad , \quad (2.39)$$

donde S es la semisuma de las normas cuadráticas,

$$S = 1/2 \|g(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}\|^2 + 1/2 \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}\|^2, \quad (2.40)$$

es decir cada uno de los términos de la semisuma de normas cuadráticas proporciona una medida del ajuste o proximidad del modelo a la información Geofísica y geoestadística disponible (Bosch 2003).

2.10 Método de Monte Carlo

Mediante este método se genera una colección grande de configuraciones del modelo, para así resolver el problema de inferencia descrito anteriormente. Para ello se hace uso de técnicas y algoritmos de las **cadenas de Markov** desarrollados en el campo de la estadística, y que es ampliamente conocida con la finalidad de que al hacerse suficientemente larga la cadena se garantiza la convergencia a una densidad de probabilidad objetivo que se desee muestrear.

Una técnica que comúnmente se utiliza de muestreo es el **algoritmo de metrópolis** que consiste en la producción de una configuración candidata a partir de una distribución de muestreo fuente, que no es la distribución objetivo. Según Bosch (2003) la distribución de muestreo fuente puede ser cualquiera, pero es deseable para eficiencia del algoritmo que sea cercana de alguna manera a la distribución objetivo, que se desea muestrear. Entonces el algoritmo se basa en comparar la configuración candidata y la configuración corriente, para decidir si la candidata se acepta como el siguiente paso de la cadena o si se rechaza repitiéndose la configuración corriente como nuevo eslabón. A continuación se muestran los pasos detallados del algoritmo de metrópolis:

1. Se genera una configuración candidata x_{n+1}^{can} a partir de la regla de transición de la cadena convergente a la densidad de probabilidad fuente.

2. Se calcula $\rho(x_{n+1}^{can})$ y $\sigma(x_{n+1}^{can})$.

3. Se acepta el candidato $x_{n+1} = x_{n+1}^{can}$ asignándole la probabilidad,

$$p = \text{Min} \left[1, \sigma(x_{n+1}^{can}) \rho(x_n) / \sigma(x_n) \rho(x_{n+1}^{can}) \right], \quad (2.41)$$

la cual se simplifica en este trabajo a, $p = \text{Min} \left[1, L(x_{n+1}^{can}) / L(x_n) \right]$, (2.42) cuando la densidad fuente es la densidad previa. Esta ecuación se obtiene si se sustituye la densidad de probabilidad posterior mostrada anteriormente en la ecuación (2.34). Por lo tanto al evaluar el cociente de las funciones de verosimilitud para la configuración candidata y corriente se decide si la primera se acepta o no como próximo paso de la cadena posterior.

4. Si el candidato es rechazado hacer $x_{n+1} = x_n$.

5. regresar a 1.

Al repetir de manera iterativa la regla de Metrópolis un gran número de veces se genera una cadena que converge a una muestra de la densidad de probabilidad objetivo.

CAPITULO III

MARCO METODOLOGICO

Se desarrolló el código de programación en lenguaje FORTRAN 90 empleando las correctas normas de uso que este actualizado lenguaje requiere. Para ello se siguieron las instrucciones de uso y sugerencias del manual de Stephen J. Chapman de 1998. A continuación se muestra el diagrama de flujo en la figura 3.1, el cual contiene todas las partes en que se dividió el código:

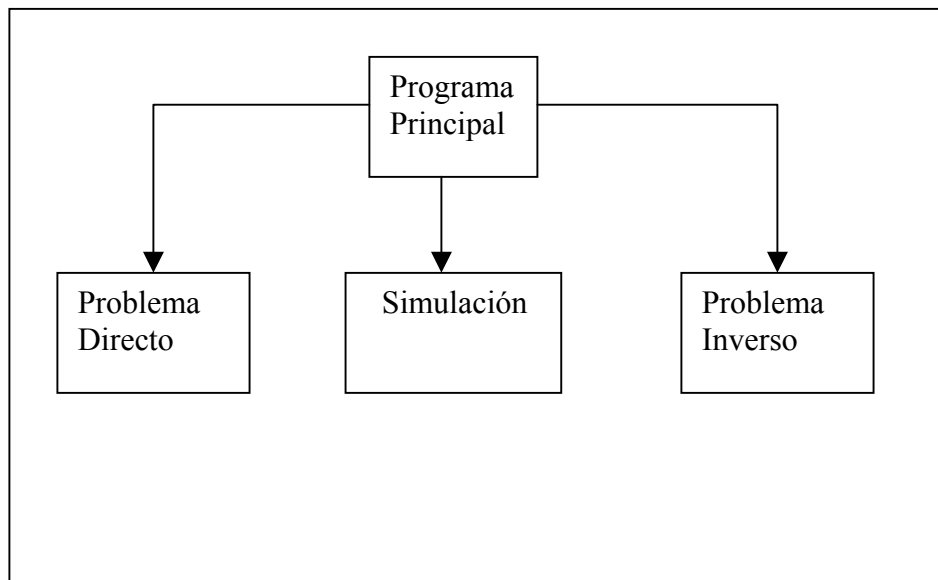


Figura 3.1: Diagrama de Flujo que contiene las tres partes principales del programa.

3.1. Problema Directo:

Se elaboró toda la metodología del problema directo con el objetivo de obtener el sismograma sintético de componente horizontal y vertical para offset variable representado por cualquier número de canales, para ello se realizaron los siguientes pasos detallados, los cuales se muestran en el diagrama de la Figura 3.2.

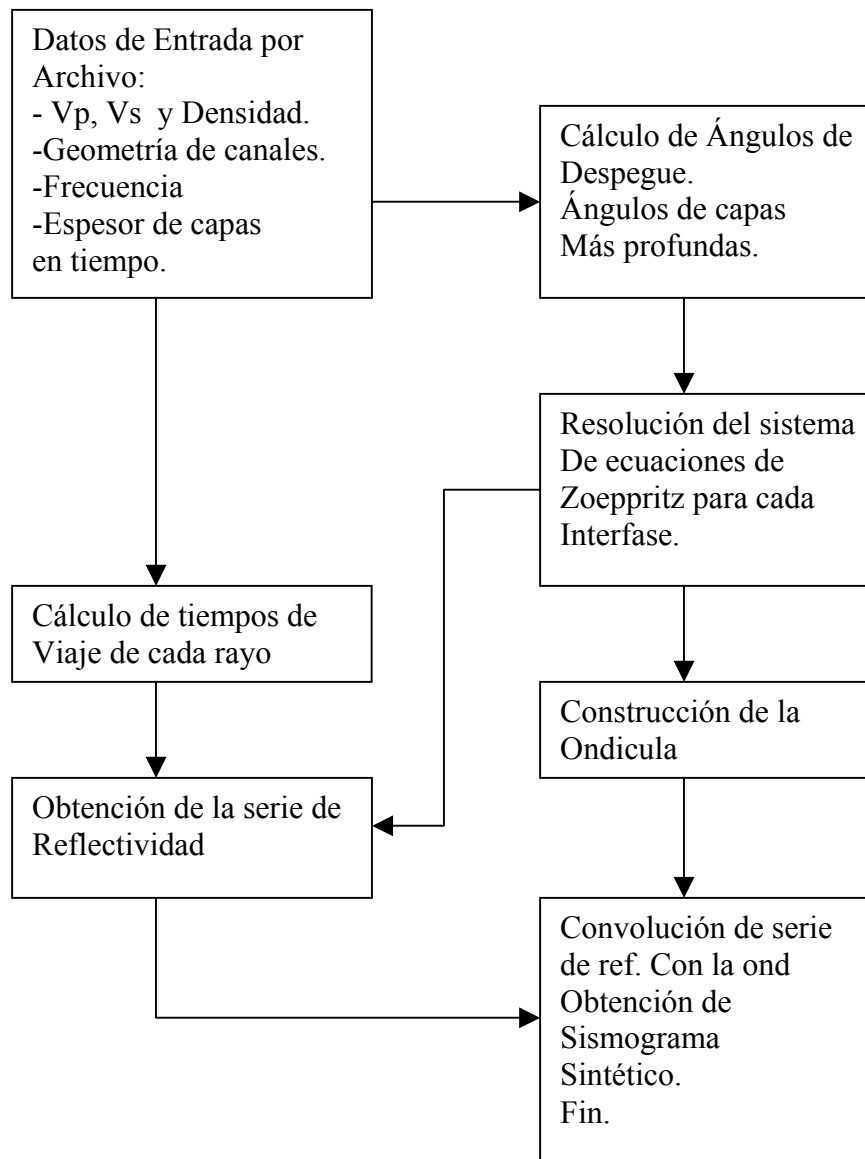


Figura 3.2: Diagrama de Flujo para el Problema Directo desarrollado en este trabajo.

3.1.1 Cálculo de Ángulos de Despegue o de Salida.

Usando la fórmula (A.5) deducida en el apéndice A,

$$d = 2\Delta Z \text{Sen}\theta_{sal} \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{\sqrt{V_1^2 - \text{Sen}^2\theta_{sal} V_n^2}}, \quad (\text{A.5})$$

la cual relaciona el ángulo de salida o despegue con el offset o separación fuente receptor, donde d es la separación en distancia del receptor con respecto a la fuente, ΔZ es la separación constante entre las capas, V_1 la velocidad de la primera capa y $\text{Sen}\theta_{sal}$ es el seno del ángulo de salida o despegue. Se procedió a construir una curva de posición de llegada u offset d versus $\text{Sen}\theta_{sal}$ esta curva es monótonamente creciente y se puede observar en la gráfica 3.3.

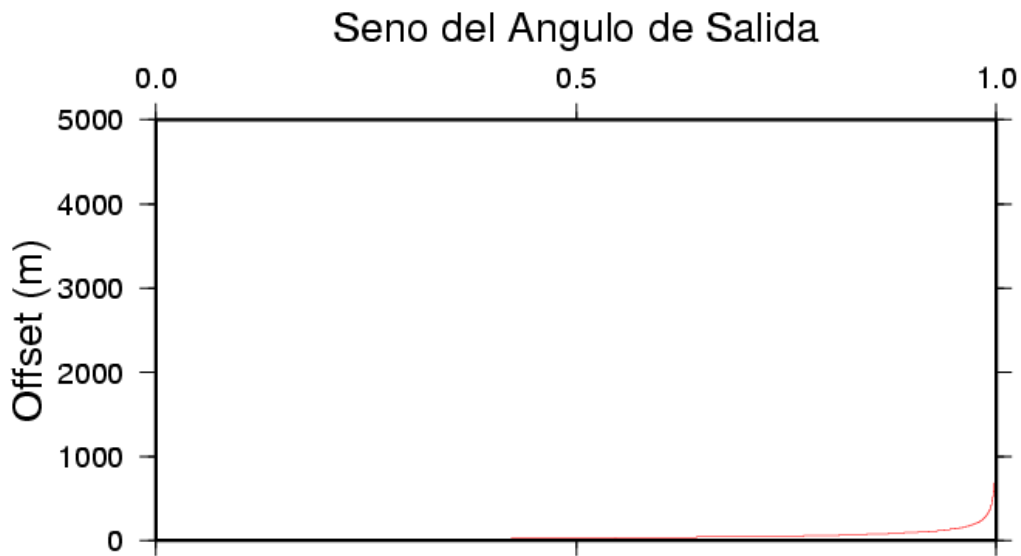


Figura 3.3: Gráfica que muestra el seno del Angulo de salida vs. offset

Finalmente, por interpolación se obtienen los ángulos de despegue requeridos para los diferentes canales o receptores.

Otra fórmula que se usó para determinar los ángulos de salida y que sirvió para comparar con la anterior es la que aparece deducida por Shah y Levin (1975) usando el parámetro de rayo,

$$\text{Sen}\theta_{sal} = \frac{dV_1}{\overline{V_n^2}t}, \quad (3.1)$$

con $\overline{V_n^2}$ velocidad rms y t el tiempo de viaje, estas dos magnitudes se muestran mas adelante en el apéndice C.

3.1.2 Cálculo de los ángulos de capas más profundas.

Una vez conocidos todos los ángulos de despegues, calcular los siguientes de las capas mas profundas se hace sumamente sencillo y rápido gracias al parámetro de rayo,

$$\text{Sen}\theta_n = \frac{V_n \text{Sen}\theta_1}{V_1}, \quad (3.2)$$

esta fórmula también se puede aplicar para las ondas S sustituyendo las respectivas velocidades.

3.1.3 Calculo de los coeficientes de Zoeppritz.

Los cuatro coeficientes se calcularon a través de las ecuaciones de Aki y Richards (1980). Obteniéndose cuatro coeficientes por cada capa y por cada canal de forma exacta, estas ecuaciones se muestran de la (2.14) a la (2.30) y son todo el conjunto, por su forma se empleó el uso de números complejos.

3.1.4. Tiempos de viaje.

Para el cálculo de los tiempos de viaje emplearon tres métodos: Método de Disparo, Ecuación de Dix y Ecuación De Schmitt.

3.1.4.1 Método de Disparo.

Para obtener los tiempos de viaje por este método es necesario utilizar la siguiente fórmula (B.4) y que aparece deducida en el apéndice B,

$$t = 2\Delta Z V_1 \sum_{n=1}^N \frac{1}{V_n^2 \sqrt{\frac{V_1^2}{V_n^2} - \text{Sen}^2 \theta}} , \quad (\text{B.4})$$

es decir, que conocidos los ángulos de salida y las velocidades de las capas se pueden obtener todos los tiempos de viaje.

3.1.4.2 Ecuación de Dix

Usando la ecuación (C.1) del apéndice c,

$$t^2 = t_0^2 + \frac{d^2}{\bar{V}_n^2} , \quad (\text{C.1})$$

donde como se sabe t_0 es el tiempo de viaje de ida y vuelta a cero offset, d es la distancia emisor receptor y $\bar{V}_n^2$ es la velocidad rms del apéndice C.

3.1.4.3 Ecuación de Schmitt.

Haciendo uso de la ecuación (C.4) del apéndice c,

$$t_n^2 = t_{0n}^2 + \frac{d^2}{\bar{V}_n^2} + d^4 \left[1 - \frac{\bar{V}_n^4}{(\bar{V}_n^2)^2} \right] (4t_{0n}^2 (\bar{V}_n^2)^2)^{-1} , \quad (\text{C.4})$$

se obtuvieron tiempos de viaje más precisos.

3.1.5 Ondícula.

Para construir la ondícula se hizo uso de la función Gausiana, la cual se le calculó la primera derivada cambiada de signo obteniéndose,

$$f(t) = +\frac{2(t+3\sigma)}{\sigma^2} e^{-\frac{(t+3\sigma)^2}{\sigma^2}}, \quad (3.3)$$

donde σ tiene un valor de $\frac{1}{4 \text{ frecuencia}}$, en la siguiente gráfica se puede apreciar en su forma normalizada a 1 (ver figura 3.4):

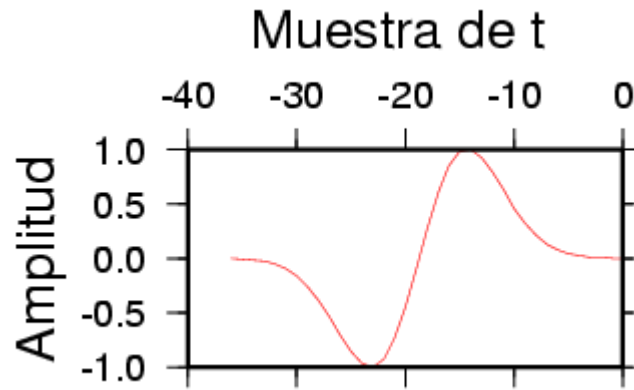


Figura 3.4: Gráfica de la Ondícula utilizada en este trabajo.

3.1.6 Serie de Reflectividad

Para obtener la serie de reflectividad se calculó la productoria de todos los coeficientes de transmisión de las ondas P de todas las capas bajando y subiendo, los cuales como se sabe del capítulo II son diferentes, y luego a este resultado se le multiplica por el respectivo coeficiente de reflexión de ondas P de la capa en cuestión. El valor de la productoria se inicia con un valor de 1.

Finalmente para cada una de las trayectorias de los rayos se le asignan los valores de productoria y tiempos de viaje redondeado a milisegundos, de esta forma se obtienen las series de reflectividad en tiempo para cada canal.

3.1.7 Receptores multicomponentes.

Con la finalidad de poder adecuarse al tipo de mediciones que los geófonos hoy en día son capaces de medir. En este trabajo se consideró la llegada de los rayos sísmicos con un carácter vectorial lo cual permite tener por separado la componente vertical y la componente horizontal de las ondas que arriban a los receptores, este enfoque es mostrado en la figura 3.5

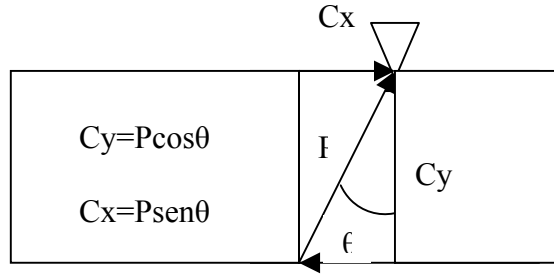


Figura 3.5: Descomposición vectorial del Rayo que llega al receptor

3.1.8 Convolución y Sismograma Sintético.

Una vez obtenida la ondícula y la serie de reflectividades se procedió a la convolución de estas,

$$\begin{aligned} G_x(t) &= [S(t) * O(t)] \text{Sen}(\theta) \\ G_y(t) &= [S(t) * O(t)] \text{Cos}(\theta) \end{aligned} , \quad (3.4)$$

donde S representa la serie de reflectividad y O la ondícula las cuales están muestreadas en milisegundos. La función G representa el sismograma sintético adaptado tanto para la componente horizontal como para la vertical y además por

cada canal, en la figura 3.6 se puede apreciar un ejemplo de un sismograma de componente vertical de 10 canales.

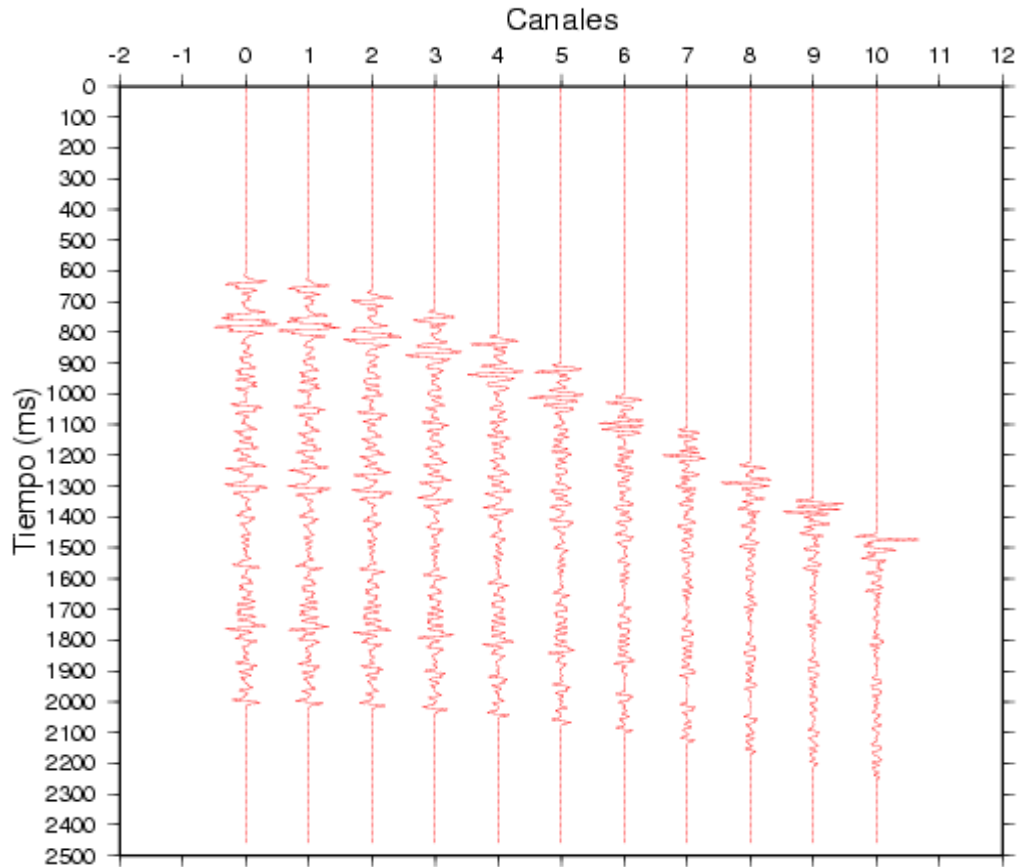


Figura 3.6: Sismograma sintético de componente vertical de 10 canales y separación de 300 m.

3.2 Simulación estadística de los parámetros elásticos

En esta fase se empleó la siguiente metodología mostrada en la figura 3.7

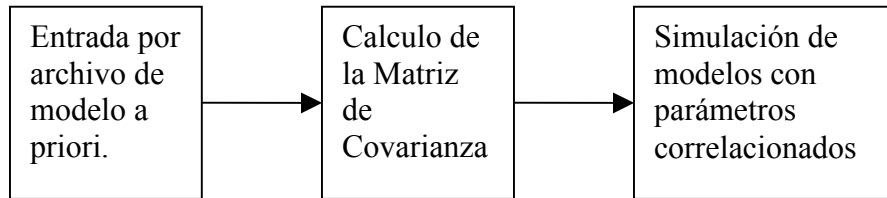


Figura 3.7: Diagrama que muestra los pasos principales de la Simulación

3.2.1 Modelo a priori

El programa realizado permite el ingreso del modelo a priori por archivo en el cual se deben introducir las medias aritméticas, las desviaciones estándar y las correlaciones de la lentitud de ondas P y S así como de la densidad. Estas tres magnitudes físicas son los parámetros del modelo considerados en este trabajo, a continuación se listan todos los valores que deben ser introducidos:

Lp	Media aritmética de la lentitud P
Ls	Media aritmética de la lentitud S
Rho	Media aritmética para la densidad
σ_{Lp}	Desviación Standard de la lentitud P
σ_{Ls}	Desviación Standard de la lentitud S
σ_{Rho}	Desviación Standard de la densidad
σ_{Lp}^2	Varianza de la lentitud P
σ_{Ls}^2	Varianza de la lentitud S
σ_{Rho}^2	Varianza de la densidad
CorrLpLs	Correlación de la lentitud P y Lentitud S
CorrLpRho	Correlación de la lentitud P y la densidad
CorrLsRho	Correlación de la lentitud S y la densidad

En este trabajo se realizó la simulación tanto con datos sintéticos como con datos reales de pozos. En este último caso se elaboró un programa auxiliar para procesar dichos datos, donde se realiza la lectura de las lentitudes P y S así como de densidad con sus respectivas profundidades del registro de pozos, y hace la conversión de profundidad a una ventana de tiempo escogida y así finalmente poder calcular los valores estadísticos mencionados anteriormente.

3.2.2 Matriz de Covarianzas y Simulación.

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{Lp}^2 & \sigma_{Lp}\sigma_{Ls}CorrLpLs & \sigma_{Lp}\sigma_{Rho}CorrLpRho \\ \sigma_{Ls}\sigma_{Lp}CorrLsLp & \sigma_{Ls}^2 & \sigma_{Ls}\sigma_{Rho}CorrLsRho \\ \sigma_{Rho}\sigma_{Lp}CorrRhoLp & \sigma_{Rho}\sigma_{Ls}CorrRhoLs & \sigma_{Rho}^2 \end{bmatrix}, (3.5)$$

se calcula esta matriz por cada capa dentro de un número de iteraciones previamente definido. Haciendo uso de la siguiente propiedad de las matrices simétricas,

$$C = C^{1/2T} \cdot C^{1/2}, \quad (3.6)$$

se calcula $C^{1/2}$ que es una matriz que lleva el nombre de matriz de Cholesky la cual es por definición triangular, esta se calcula con el objetivo de poder resolver el siguiente sistema,

$$Y = C^{1/2} * X, \quad (3.7)$$

donde X es un vector de tres componentes de números gaussianos que cumplen las siguientes condiciones: son independientes de media cero y desviación tipo 1.0.

Finalmente se pueden obtener tres números aleatorios que siguen una distribución gaussiana con media cero y matriz de covarianza C representados por el vector Y , este último representa los cambios que se sumaran al modelo a priori para obtener nuevos modelos de parámetros en un numero de iteraciones predefinida, alrededor de una media caracterizada por la información a priori. Es importante resaltar que los parámetros simulados están correlacionados según las correlaciones preestablecidas en el modelo estadístico. A continuación se muestran en la figura 3.8 los tres modelos de lentitud P, S y Densidad luego de un numero de 500000 iteraciones y siguiendo la estadística de un modelo a priori de tipo sintético. Estas graficas reciben el nombre de histogramas de frecuencias del modelo previo:

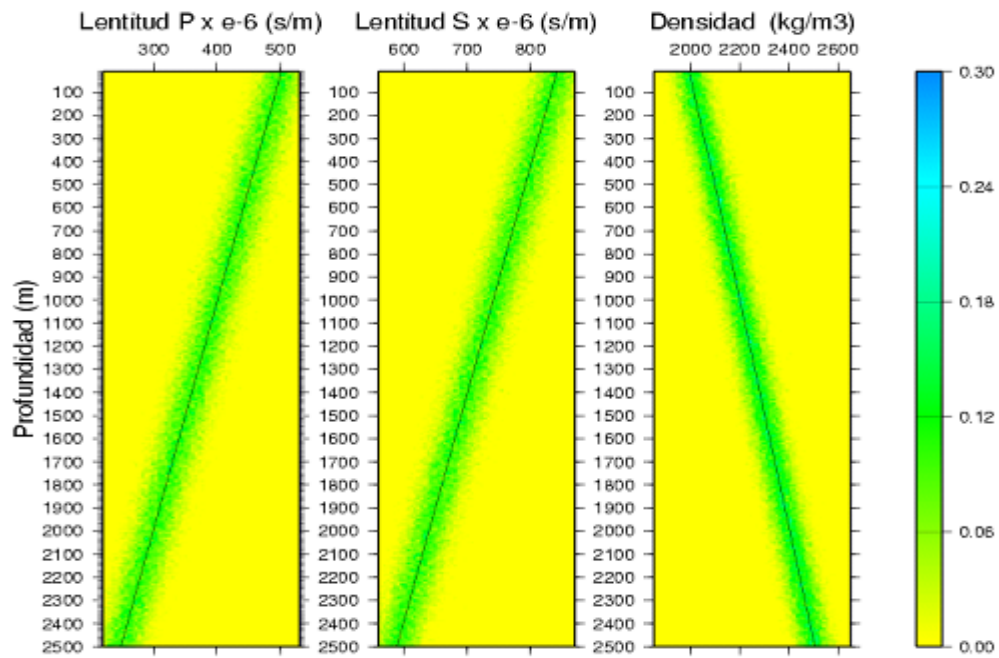


Figura 3.8: Histogramas de frecuencias de los tres modelos considerados luego de 500000 iteraciones de un modelo a priori sintético.

En las gráficas se pueden apreciar zonas de color verde que representan densidades de probabilidad alrededor de la media aritmética de cada parámetro.

3.3 Inversión.

Como se sabe el objetivo central de este trabajo es poder generar una exploración de manera pseudo-aleatoria el espacio de modelos usando el algoritmo de Metrópolis, el cual es mostrado en el diagrama de la figura 3.9.

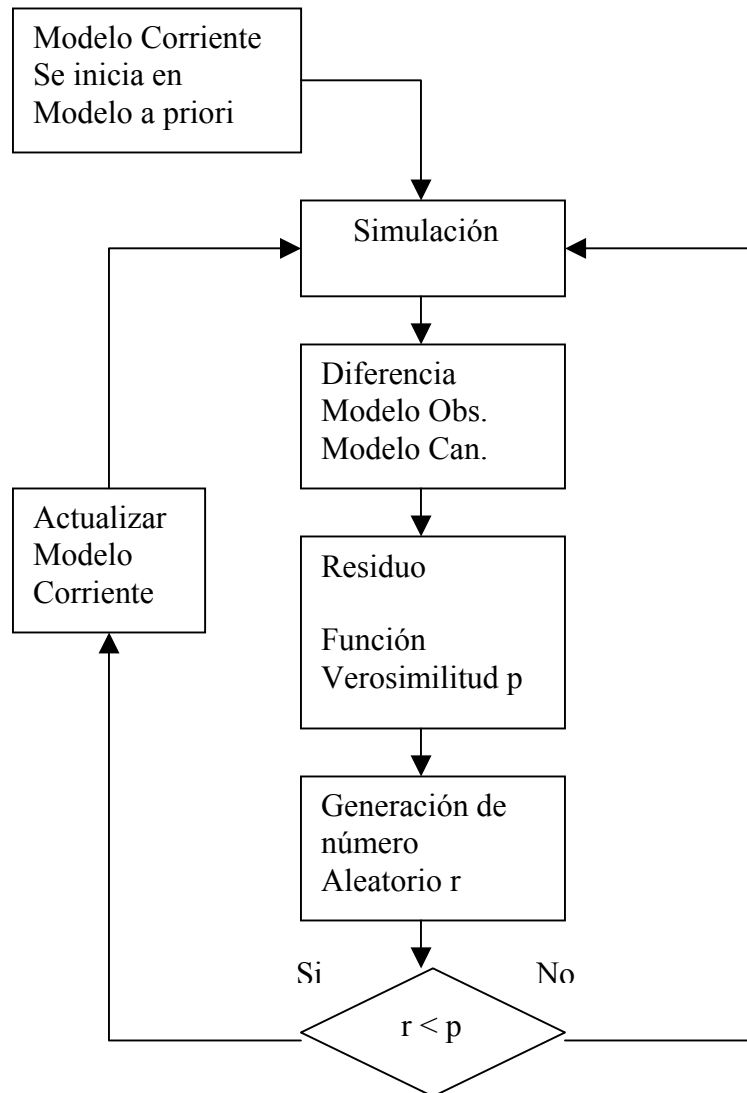


Figura 3.9: Diagrama de flujo del algoritmo o muestreador de metrópolis.

Se toma como primer modelo corriente o inicial el modelo a priori, que como existen 2 componentes una vertical y una horizontal para los sismogramas generados del modelo se tienen notaciones separadas: S_{corY} y S_{corX} y a continuación se entra en la fase de proceso iterativo, que se inicia en la simulación que como se explico previamente en el punto respectivo, se inicia con el cálculo de la matriz de covarianzas del modelo.

Seguidamente se calcula la diferencia del modelo observado y el candidato a través del modelo en forma de sismogramas: horizontal y vertical, tomando en cuenta el número de capas y número de canales a través de las siguientes fórmulas,

$$S_{canX} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\substack{\text{canales} \\ \text{capas}}} \frac{Datos_{obsX,J} - Datos_{calX,J}}{2\sigma_x^2} , \quad (3.8)$$

$$S_{canY} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\substack{\text{canales} \\ \text{capas}}} \frac{Datos_{obsY,J} - Datos_{calY,J}}{2\sigma_y^2} , \quad (3.9)$$

para entonces poder calcular el residuo,

$$Sx = -S_{canX} + S_{corX} , \quad (3.10)$$

$$Sy = -S_{canY} + S_{corY} , \quad (3.11)$$

$$S = Sx + Sy , \quad (3.12)$$

una vez calculado el residuo S se procede a calcular la función de verosimilitud p:

Si $S \geq 0$ entonces $p=1$.

Si $S < 0$ entonces $p = \exp^S$.

Finalmente se construye la probabilidad de metrópolis, para ello es necesario al llegar a este punto generar un nuevo número aleatorio r con desviación plana entre 0 y 1, este número se compara con la verosimilitud p :

Si $p \geq r$ se actualiza el modelo corriente.

Si $p < r$ se calcula otro modelo candidato.

Este flujo de instrucciones se repite un número grande de iteraciones. En la fase de prueba del código se llegaron a ensayar hasta 10 millones de iteraciones, todo esto con el objetivo de muestrear bien el espacio de soluciones.

CAPITULO IV RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados más relevantes que se obtuvieron en la fase de pruebas, así como todas las pruebas que se hicieron para validar las diferentes partes que componen el programa. Adicionalmente se harán los respectivos análisis y comentarios acerca de los resultados obtenidos, todo ejemplificado en lo posible con descripciones gráficas que incluyen sismogramas, histogramas y gráficos que contienen toda la información con la que se trabajó.

4.1 Problema Directo

A continuación se presentan los resultados más importantes acerca de esta parte del programa en donde se incluyen pruebas de validación como las curvas de los diferentes tipos de tiempo de viaje que se utilizaron, coeficientes de reflexión y sismogramas multicomponentes.

4.1.1 tiempos de viaje

Como se mencionó en el capítulo sobre el método el programa emplea los diferentes tiempos de viaje: Disparo, ecuación de Dix y ecuación de Schmitt. En la grafica 4.1 se muestran las diferentes curvas de tiempos de viaje Vs. Seno del ángulo de salida, para capas cada vez a mayor profundidad. La curva de color verde corresponde al método de disparo o interpolación, la de color rojo a la ecuación de Dix y la azul la ecuación de Schmitt. En esta gráfica se pueden apreciar tres aspectos importantes: el primero es que sólo existen ángulos de incidencia altos para las primeras capas y luego a medida que se profundiza disminuye el rango de dichos ángulos de incidencia, hasta obtener aproximadamente una décima parte del valor inicial. Segundo, los tres métodos tienden a reportar con bastante precisión los mismos tiempos de viaje, para pequeños e intermedios ángulos. En el caso de grandes ángulos los métodos difieren significativamente. Tercero, los tiempos calculados por la ecuación de Schmitt son siempre menores o iguales a los tiempos calculados por la

ecuación de Dix. Esta afirmación aparece demostrada en el trabajo de Shah y Levin (1975).

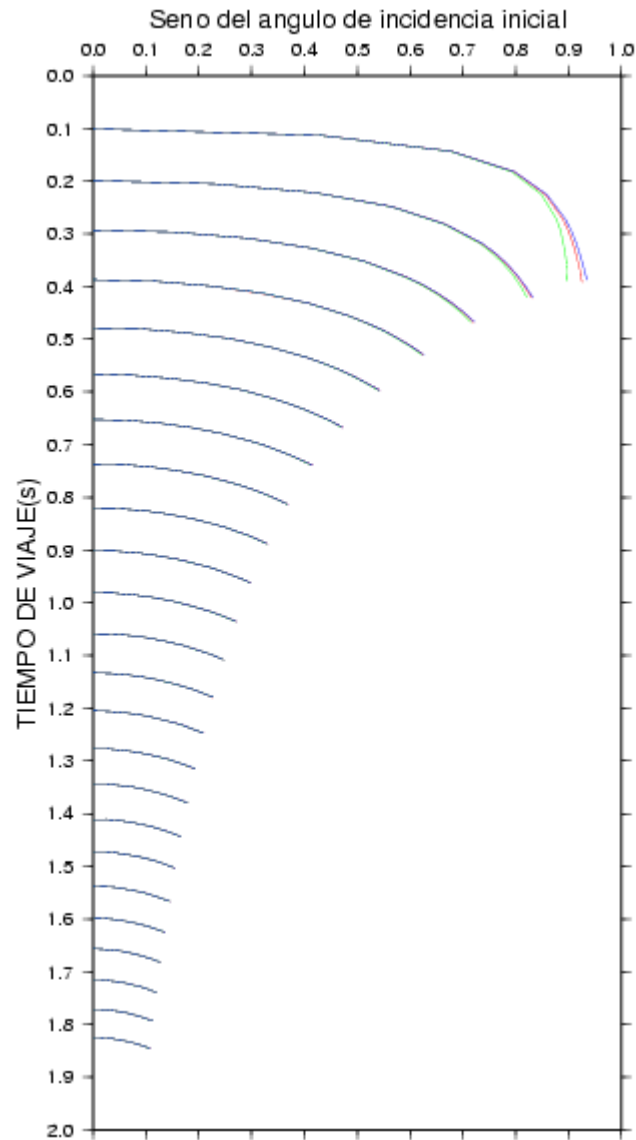


Figura 4.1: Grafica de los diferentes tiempos de viajes que se ensayaron en este trabajo: línea azul es ecuación de Schmitt, línea roja es ecuación de Dix y Línea verde es el método de disparo o interpolación..

Con el método de disparo se aplica de forma precisa la ley de Snell, aunque es más costoso en cálculo ya que se requiere interpolar y refinar.

El método de la ecuación de Schmitt no tiene problemas de tiempo de cálculo por cuanto la ecuación es sencilla. Presenta un mejor resultado que el de Dix puesto que es una aproximación de cuarto orden en la serie de Taylor, mientras que la ecuación de Dix es una aproximación de segundo orden. Los tiempos predichos por la ecuación de Schmitt son más precisos para offsets intermedios que la de Dix. Sin embargo, la aproximación es inadecuada para ángulos de incidencia particularmente altos y arroja tiempos negativos para algunos reflectores los cuales no tienen ningún significado físico por esta razón no se aplica esta ecuación en la fase de Inversión.

Finalmente la ecuación de Dix fue la que se usó en las pruebas de Inversión que se muestran en este trabajo por tener una buena precisión hasta ángulos intermedios, y el segundo mejor ajuste para ángulos mayores, y da lugar a un cálculo mucho más rápido que el método de disparo.

4.1.2 Coeficientes de reflexion

Debido al grado de complejidad que muestran las ecuaciones de Zoeppritz en esta sección se procederá a ilustrar el comportamiento del coeficiente de reflexión para todos los ángulos de incidencia, utilizando el código y así poder comprender los sismogramas sintéticos que posteriormente se mostrarán. Para ello se utilizará un modelo de dos capas, el cual tiene como valores de impedancia los mostrados en la tabla 4.1. Esta tabla fue tomada como ejemplo de Castagna (1993). En la figura 4.2 se pueden observar las diferentes curvas en colores, que representan el coeficiente de reflexión de onda compresional incidente y compresional reflejada, para cada uno de los casos mostrados en la tabla. Estas curvas obtenidas con el programa fueron comparadas con las correspondientes publicadas en el trabajo de Castagna (1993) a manera de validación, mostrando los mismos resultados.

En esta grafica se deben precisar cuatro características principales del coeficiente de reflexión. Primero la amplitud local máxima de la onda P reflejada se alcanza a incidencia normal, en el primer ángulo crítico o ángulo critico para la onda

P, y posiblemente cerca del segundo ángulo crítico o ángulo crítico para ondas S. a partir del segundo ángulo crítico ocurre la reflexión total interna. Segundo, la variación del coeficiente de reflexión con respecto a ángulos de incidencia bajos es pequeña. Tercero, el primer ángulo crítico θ_{c1} está dado por,

$$\text{Sen}\theta_{c1} = \frac{V_{P1}}{V_{P2}} , \quad (4.1)$$

luego de este ángulo la energía de onda P decrece y gradualmente se incrementa la conversión a reflexión y transmisión de ondas S. si se sigue incrementando el ángulo de incidencia se alcanza el segundo ángulo crítico θ_{c2} que está definido como,

$$\text{Sen}\theta_{c2} = \frac{V_{P1}}{V_{S2}} , \quad (4.2)$$

después de este ángulo crítico no hay onda S ni P transmitida. Nótese que cuando $V_{P1} > V_{S2}$ no existe segundo ángulo crítico y la conversión a onda S será transmitida para todos los ángulos cercanos a 90 grados. Similarmente cuando $V_{P1} > V_{P2}$ no hay primer ángulo crítico y la onda P siempre es transmitida, este caso no aparece graficado. Cuarto, cerca de incidencia normal el coeficiente de reflexión de onda P inicialmente decrece muy suavemente con el incremento del ángulo.

Tabla 4.1: Parámetros elásticos de la primera capa para 6 modelos de Castagna (1993). Estos modelos corresponden a las curvas de coeficiente de reflexión mostradas en la Figura 4.2. Cuando la segunda capa tiene los parámetros: $V_p=6096\text{m/s}$, $V_s=3048\text{m/s}$, y $\rho=2650\text{Kg/m}^3$. Note que $V_p/V_s=2$ para todas las capas.

MODELO	VP(M/S)	VS(M/S)	P(KG/M3)	COLOR
A	1829	914	2020	Red
B	2521	1260	2120	Green
C	3048	1524	2200	Blue
E	4267	2133	2380	Grey
F	4877	2438	2470	Dark Blue
G	5486	2743	2560	Light Green

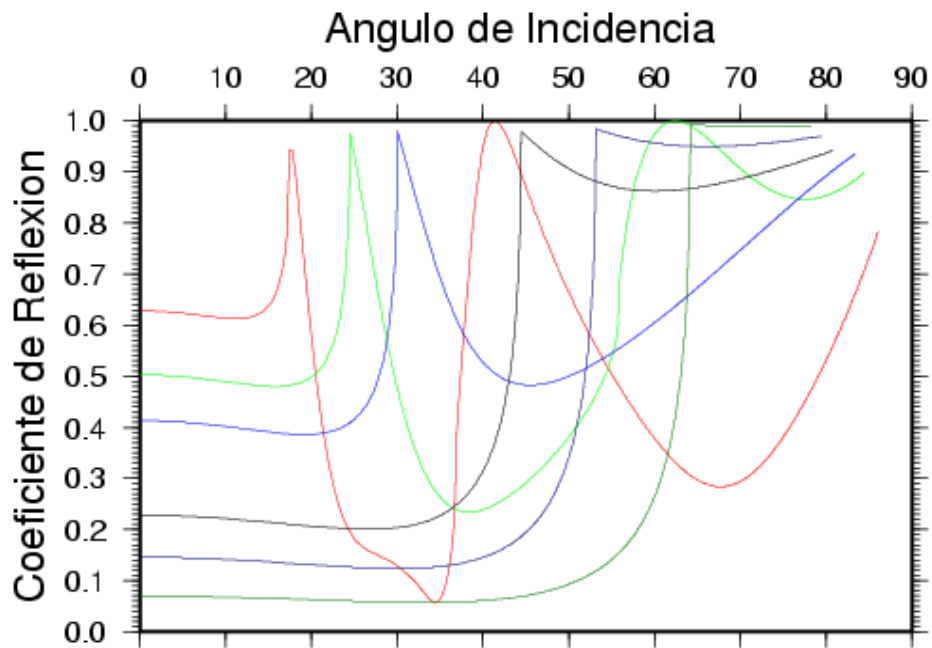


Figura 4.2: Coeficiente de reflexión graficado contra el ángulo de incidencia para 6 modelos dados en la tabla 4.1.

4.1.3 Sismogramas Sintéticos.

Una vez realizados todos los pasos contemplados en la metodología del problema directo se obtuvieron los sismogramas sintéticos tanto de componente vertical como horizontal los cuales el programa puede calcular para cualquier número de canales y cualquier número de capas, en particular se muestran en las figuras 4.3 (a) y 4.3 (b) sismogramas calculados para cinco canales con una separación entre ellos de 800 metros, para 100 capas de 10ms de espesor para un modelo del subsuelo sintético.

Se puede observar claramente como es el cambio en la forma de onda a medida que se cambia de canal en cualquiera de los dos sismogramas.

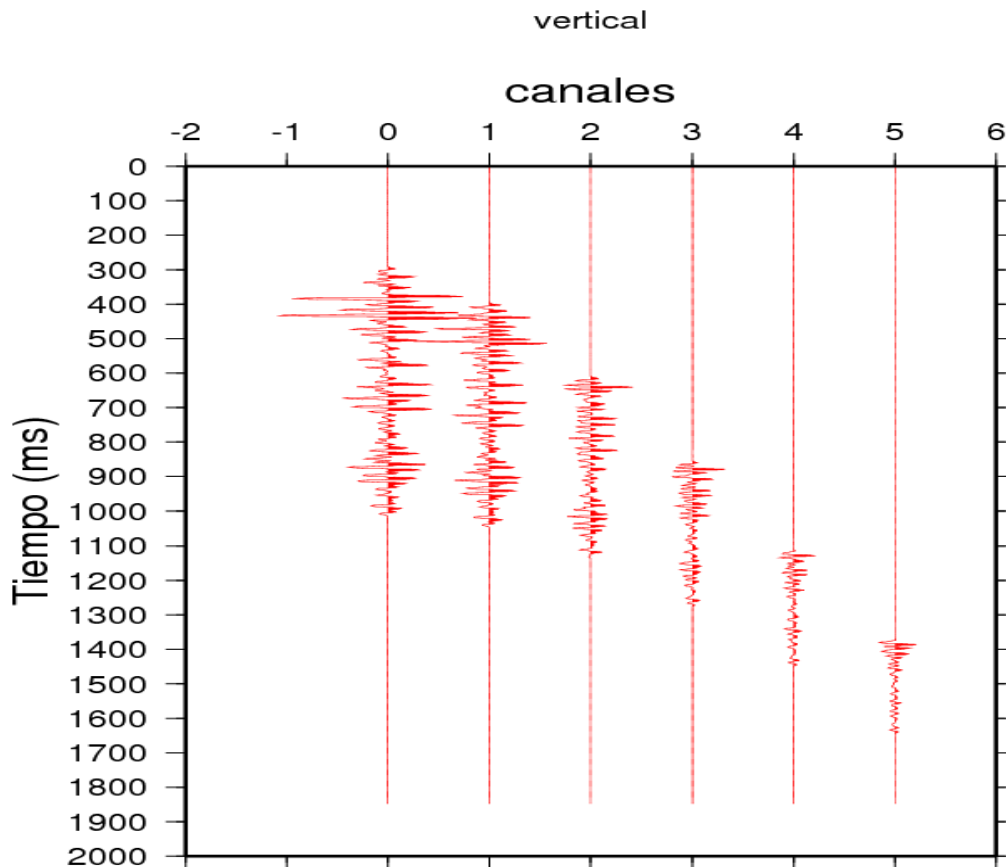


Figura 4.3: (a) Sismograma sintético de componente vertical para un número de cinco canales de 800 metros de separación para 100 capas de 10 ms de espesor. Para un modelo sintético de prueba.

En el Sismograma de componente horizontal obsérvese el detalle de que para incidencia normal no existe componente horizontal de la señal debido a que no hay onda S transmitida, y a medida que aumenta el offset se observa el aumento en la amplitud en la primera capa hasta llegar a un máximo en el cuarto canal, luego hay una leve disminución, esto se debe a que ese canal esta cerca del ángulo crítico para onda S comentado en el punto anterior, debido a que se incrementa la conversión a onda S.

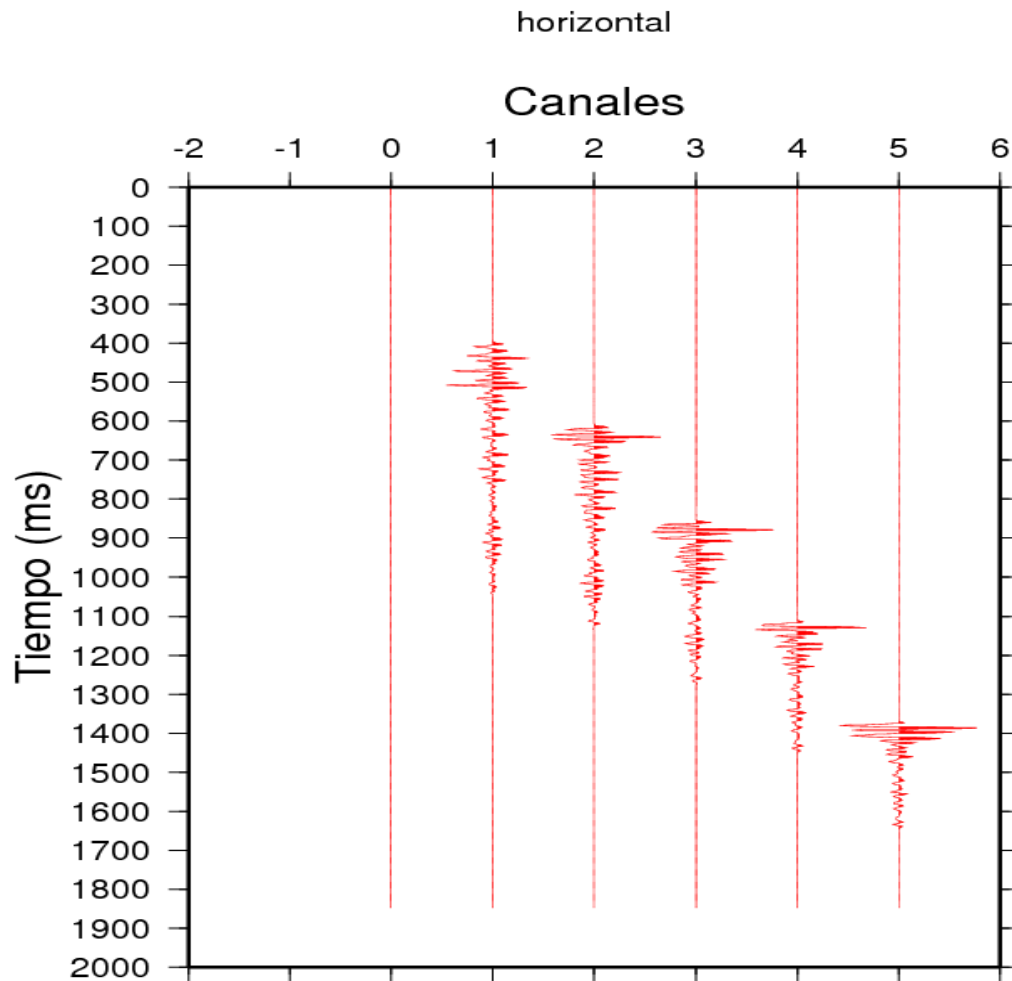


Figura 4.3: (b) Sismograma sintético de componente horizontal para un número de cinco canales de 800 metros de separación para 100 capas de 10 ms de espesor. Para un modelo sintético de prueba.

4.2 Simulación estadística de los parámetros elásticos

Para esta fase se propone generar configuraciones de los parámetros elásticos del subsuelo que sean acordes con los genuinos rangos y estadísticas del medio. Distintos tipos de información son disponibles a fin de conformar la información previa sobre las propiedades del medio. En particular, cuando se dispone de registros de pozos descriptivos de los parámetros elásticos estos pueden caracterizarse estadísticamente. Para así obtener las medias aritméticas, desviaciones estándar, varianzas y correlaciones de los parámetros involucrados. Como se mencionó anteriormente los parámetros del modelo son las lentitudes P y S así como la densidad. De esta manera se crea el modelo a priori que se utilizará de arranque para iniciar la Simulación o construcción de modelos que tengan como valor central este y que cumplan con la información estadística.

Supongamos el siguiente modelo a priori, mostrado en la tabla 4.2, con este modelo se ejemplificará toda esta sección.

Tabla 4.2: Modelo a priori tomado como prueba para validar la fase de simulación del programa.

Lentitud P x 10-6 (s/m)	Lentitud S x 10-6 (s/m)	Dens. (Kg./m3)	desv. Lp x10- 6	desv. Ls x10- 6	desv. densidad	Corr LpLs	Corr LpD	Corr LsD
321.41	570.81	2297.8	44.25	55.36	112.23	0.720	Neg. 0.12	Neg. 0.369

Como se sabe la función de densidad de probabilidad previa $\rho(\mathbf{m})$ describe la información disponible o previa de los parámetros del modelo, en particular en este trabajo se considera como una gaussiana multivariada, que contiene correlaciones entre lentitud P, lentitud S y densidad y las desviaciones de cada una de estas tres

propiedades, en torno a un modelo central denominado modelo a priori $\mathbf{m}_{prior}$. Las correlaciones espaciales no son tomadas en cuenta en este desarrollo

Esta función de densidad de probabilidad previa indica la probabilidad de que el modelo $\mathbf{m}$ este cerca del modelo a priori $\mathbf{m}_{prior}$ en el sentido del operador de covarianza C_{mod} , para así obtener modelos los cuales la diferencia $\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}$ es pequeña en cada punto (con respecto a las desviaciones estándar en C_{mod}) y suave (con respecto a las correlaciones en C_{mod}).

Primeramente se procederá a demostrar que los parámetros del modelo cumplen con el comportamiento gaussiano multivariado. Para ello luego de que el programa haya hecho la corrida en modo de simulación estadística de los parámetros elásticos, se selecciona una capa al azar y se acumula la historia de cambios que los parámetros sufrieron durante el número de iteraciones que se asignó para la simulación. Luego se grafican los resultados de este archivo de historia en forma de histograma de frecuencias para cada parámetro, figuras 4.4 (a, b y c). En estos histogramas se muestran la media aritmética o valor central y la desviación Standard del modelo a priori considerado para esta simulación (tabla 4.2). Además se muestra el numero N, el cual representa la cantidad de veces que la capa fue visitada.

Se observa entonces como es obtenido el modelo gaussiano multivariado para cada uno de los parámetros del modelo del subsuelo. Es importante mencionar que cada capa refleja este mismo comportamiento.

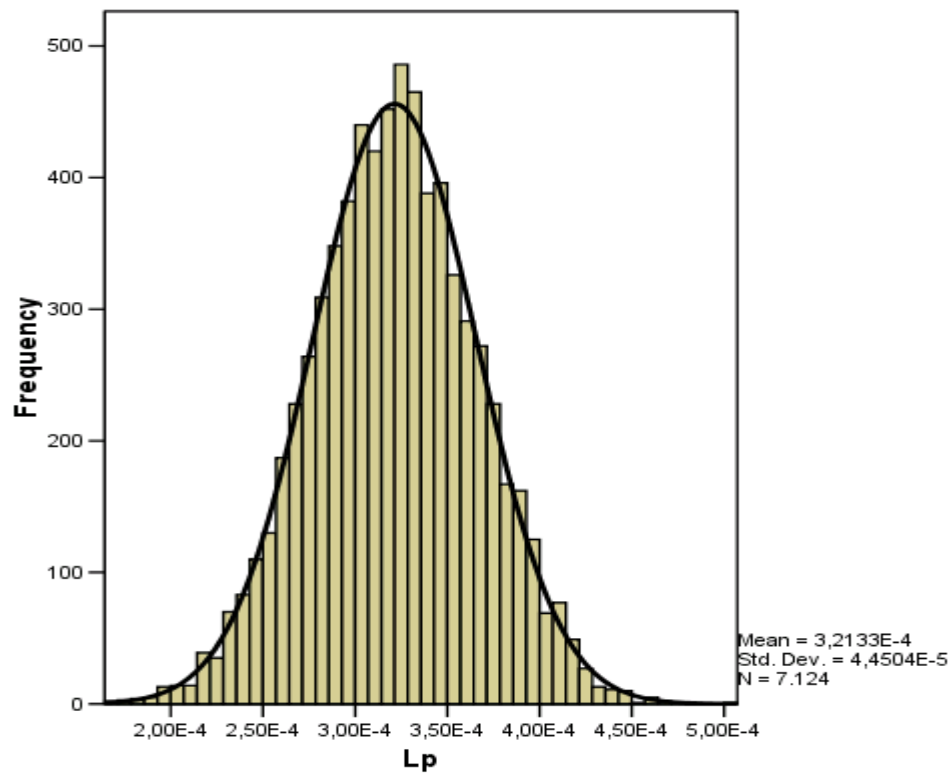


Figura 4.4: (a) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro lentitud P para una capa al azar en la fase de simulación estadística.

En la pasada figura 4.4 (a) y en las siguientes (b) y (c) se muestra claramente el comportamiento en forma de distribución gaussiana de las frecuencias sobre cada parámetro, alrededor del modelo a priori central y con una desviación estándar asignada previamente. Estas gráficas son importantes porque demuestran que el programa hace uso de modelos gaussianos multivariados en la fase de simulación. Obsérvese la correspondencia que existe entre los valores de la pasada gráfica y la tabla 4.2.

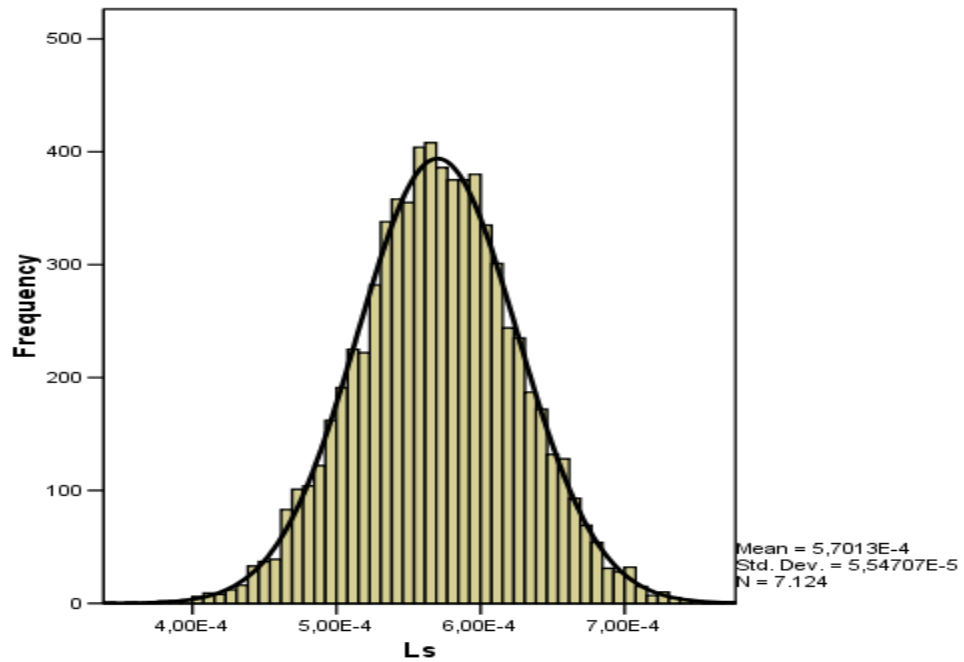


Figura 4.4: (b) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro lentitud S para una capa al azar en la fase de simulación estadística.

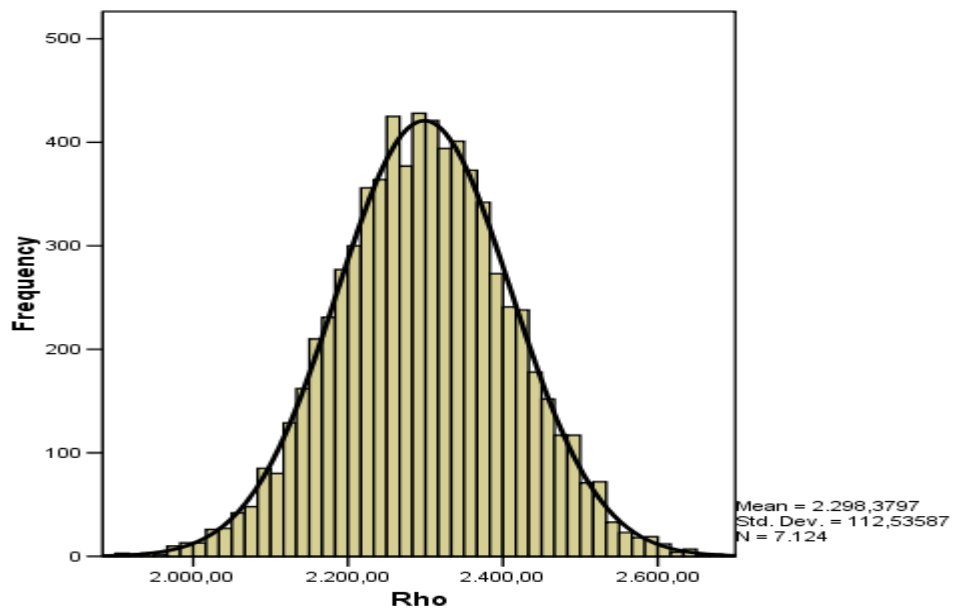


Figura 4.4: (c) Histograma de frecuencias correspondiente al parámetro de densidad para una capa al azar en la fase de Simulación estadística.

Ahora se procederá a mostrar la correlación entre los parámetros, para ello se selecciona una capa al azar y se grafican los parámetros obtenidos en forma cruzada, obteniéndose las siguientes combinaciones: L_p vs. L_s , L_p vs. Densidad y L_s vs. Densidad, estos gráficos se muestran en la figuras 4.5 (a, b y c).

En la gráfica de la figura 4.5 (a) se obtuvo la correlación positiva esperada de valor 0.720 de la tabla anterior 4.2. Una correlación positiva significa que si aumenta una variable entonces aumentará también la otra, el cual es el caso para los parámetros correspondientes a la lentitud P y lentitud S. obsérvese que los puntos caen dentro de una elipse, esta elipse se hace mas pronunciada cuanto mas se acerque el valor de correlación a 1.

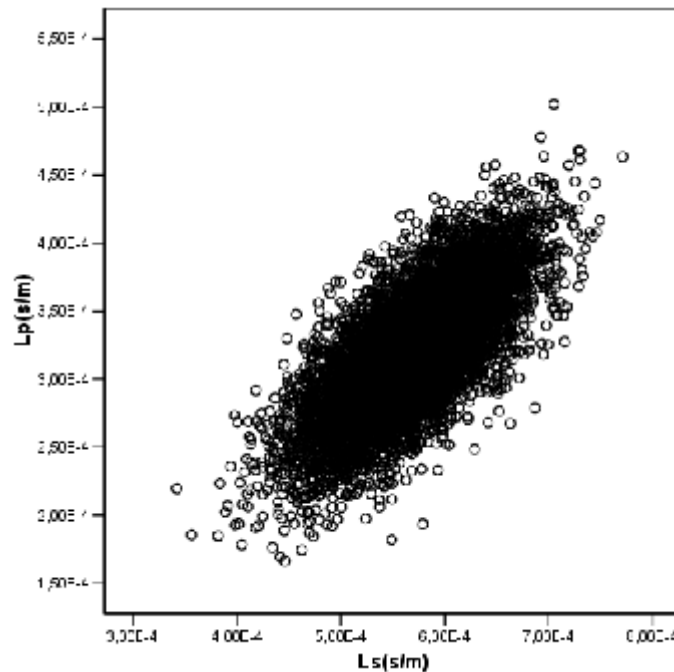


Figura 4.5: (a) Gráfico cruzado de lentitud P contra lentitud S generado para una capa al azar.

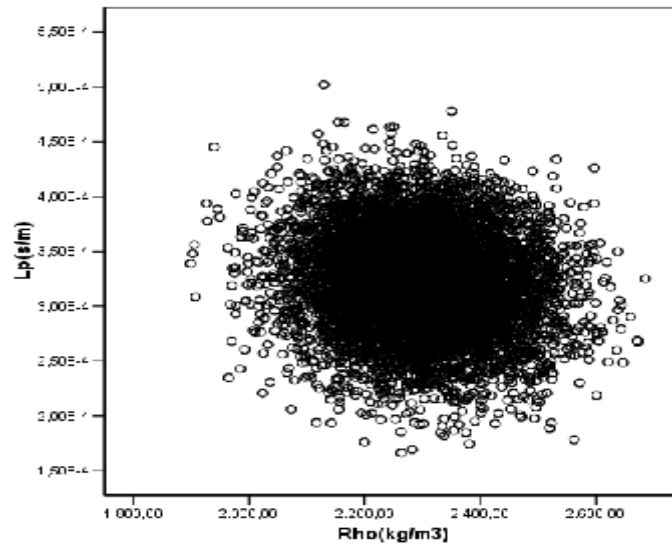


Figura 4.5: (b) Gráfico cruzado de lentitud P contra densidad generado para una capa al azar.

En la figura 4.5 (b) la correlación es negativa -0.120. Ahora obsérvese que los puntos están sobre una pendiente negativa, además de que están más dispersos sobre el espacio lo cual quiere decir que la correlación es baja. En el caso de la figura 4.5(c) la correlación es de -0.369.

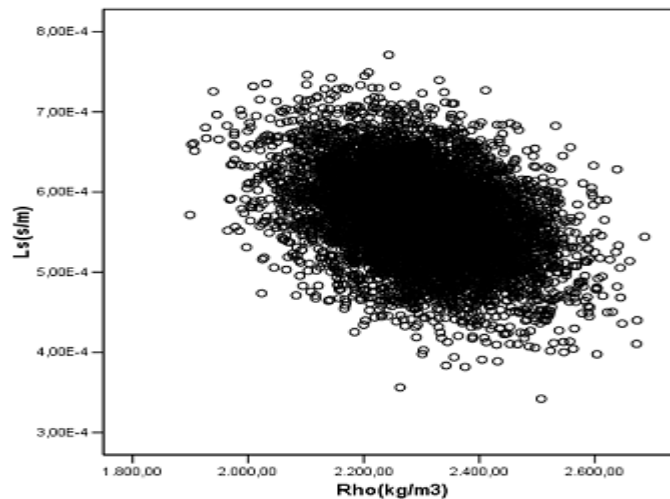


Figura 4.5: (c) Gráfico cruzado de lentitud S contra densidad generado para una capa al azar.

En la figura 4.6 se muestran cinco modelos tomados al azar de dos millones calculados para los parámetros elásticos a partir de la estadística de la tabla 4.2. Cada modelo esta representado por un color. Las líneas en color negro son los modelos a priori en cada caso.

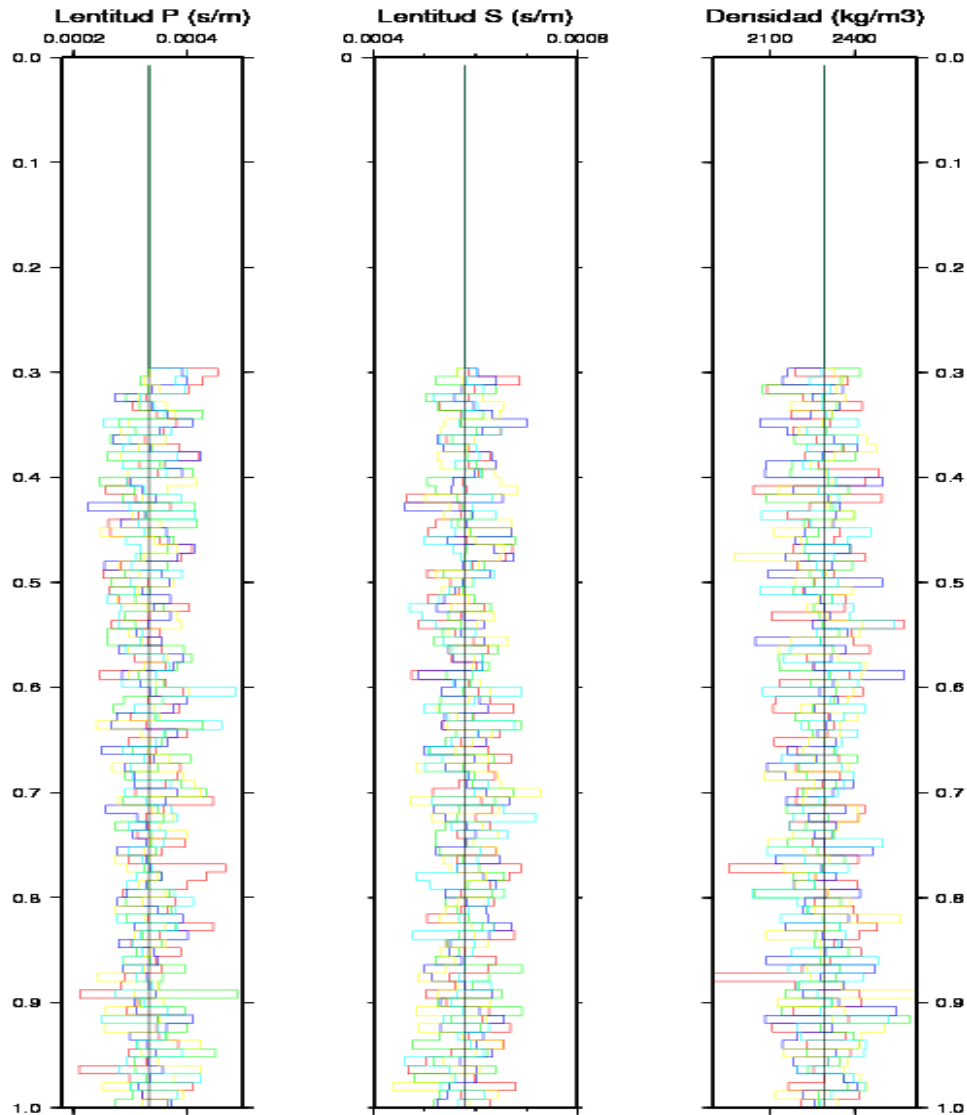


Figura 4.6: Representación Gráfica de 5 modelos (en colores) para los parámetros elásticos, realizados por el programa en simulación estadística. La línea de color negro es el modelo a priori.

La figura 4.7 muestra los datos correspondientes a los cinco modelos anteriores.

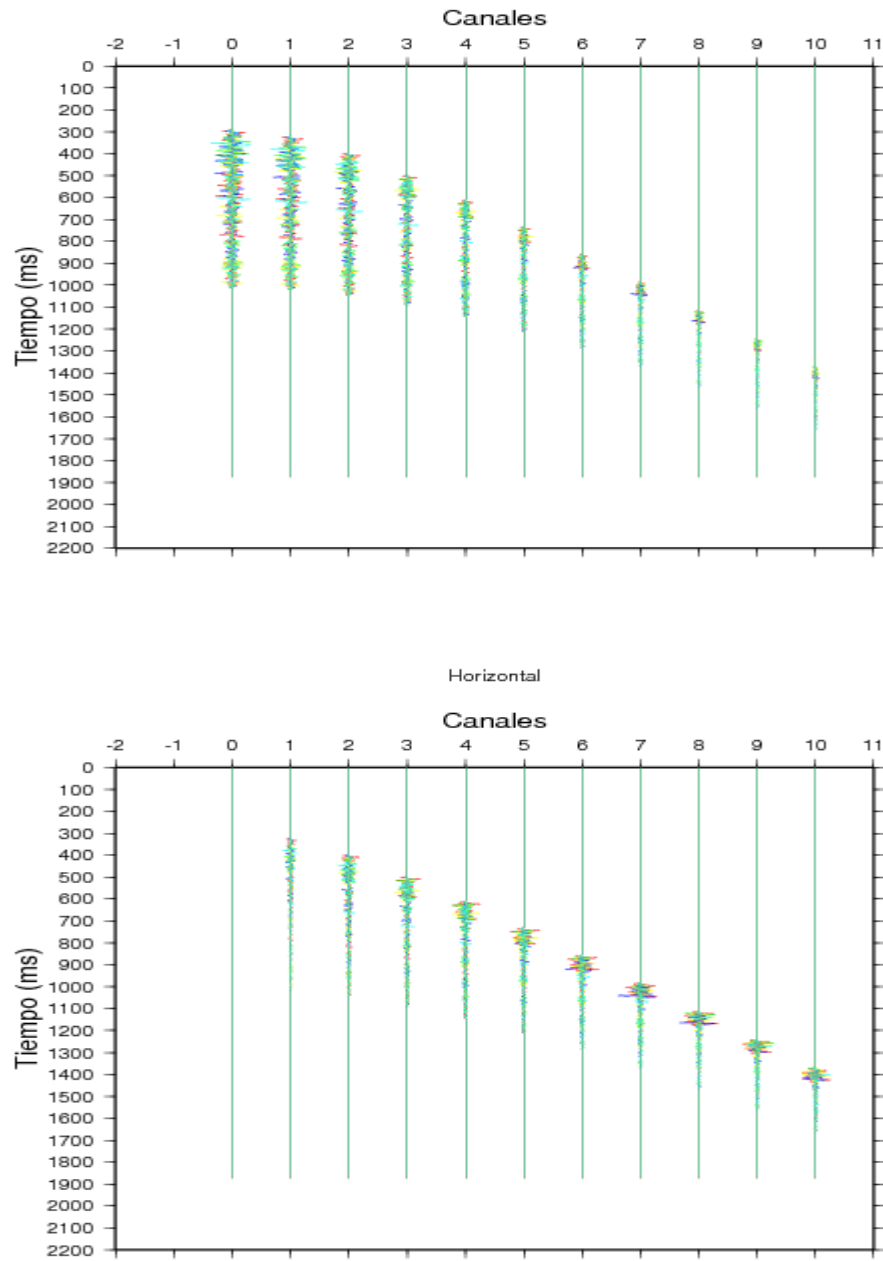


Figura 4.7: Datos correspondientes (en colores) para cada uno de los modelos de la figura 4.6.

Ahora se presentan en la figura 4.8 los histogramas de frecuencias para cada parámetro y cada capa luego de dos millones de realizaciones, tomando en cuenta sólo la densidad de probabilidad marginal a priori, adicionalmente se grafican los mismos modelos de la figura 4.6. Todos estos modelos cumplen con la información estadística del modelo a priori de la tabla 4.2.

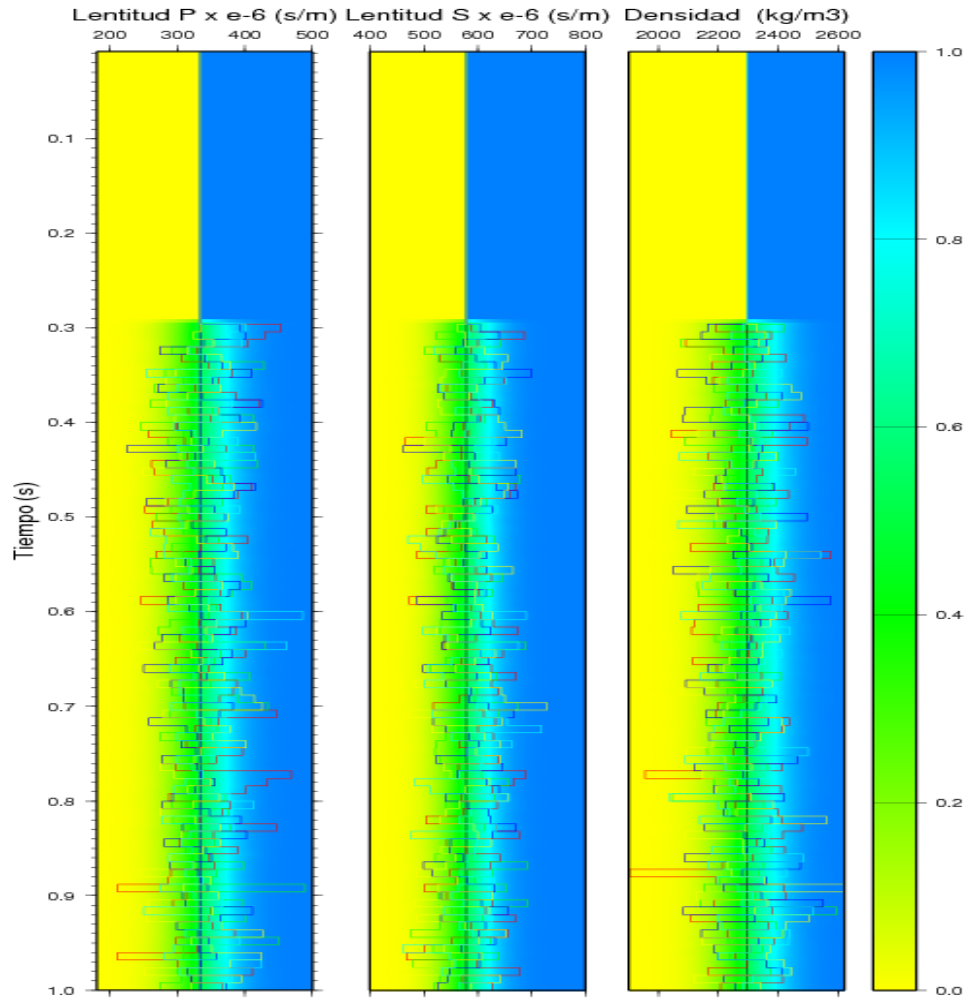


Figura 4.8: Histogramas de frecuencias de 2 millones de realizaciones para cada uno de los parámetros. El cálculo se efectúa a partir de la densidad de probabilidad marginal a priori. Los modelos de la figura 4.6 se vuelven a graficar nuevamente. La línea de color negro es el modelo a priori.

4.3 Inversión.

A continuación se valida la técnica de Monte Carlo que se ha propuesto para la inversión de amplitudes sísmicas, con la realización de dos tipos de modelos del subsuelo: sintéticos, los cuales son el producto de simulación en el computador, y usando datos reales de registros de pozos en un área del oriente del país, y correspondiente a la formación oficina, disponibles gracias a la colaboración de la empresa Petrobras Venezuela con esta investigación.

En el primer caso, se obtienen primeramente un modelo del subsuelo mediante la simulación geoestadística, al cual se le calculó la correspondiente respuesta sísmica en reflexión a offset variable, siguiendo para ello las técnicas descritas en secciones anteriores. El conjunto de parámetros que conforman este modelo se le considera como una configuración verdadera, y los datos sísmicos calculados a partir de ella como los datos observados. Es así que utilizando estas observaciones sintéticas se procede hacer la Inversión.

En el caso de datos de pozos, se elaboró un programa auxiliar que leyera dichos datos y los pasara de una escala de profundidad a tiempo, para posteriormente analizarlos estadísticamente y con estos resultados obtenidos proceder a utilizarlos como un modelo previo, al cual se le calcula por simulación una respuesta sísmica que es la que se usará como datos observados. De esta forma se comienza el ciclo de inversión.

Una manera de mostrar la información representada por la muestra completa obtenida del algoritmo de inversión es realizando gráficos de probabilidad posterior. Estos se construyen a partir de la acumulación de las variaciones que tuvieron los parámetros durante el número de iteraciones en la cual se realiza la inversión, estas variaciones acumuladas se pueden graficar en un histograma de frecuencias o en un histograma de frecuencias acumuladas.

4.3.1 Modelo elástico sintético

En la figura 4.9 se muestran los perfiles de lentitud P, lentitud S y densidad que se usaran como prueba en esta sección estos son una realización tomada al azar del modelo estadístico descrito en la tabla 4.2.

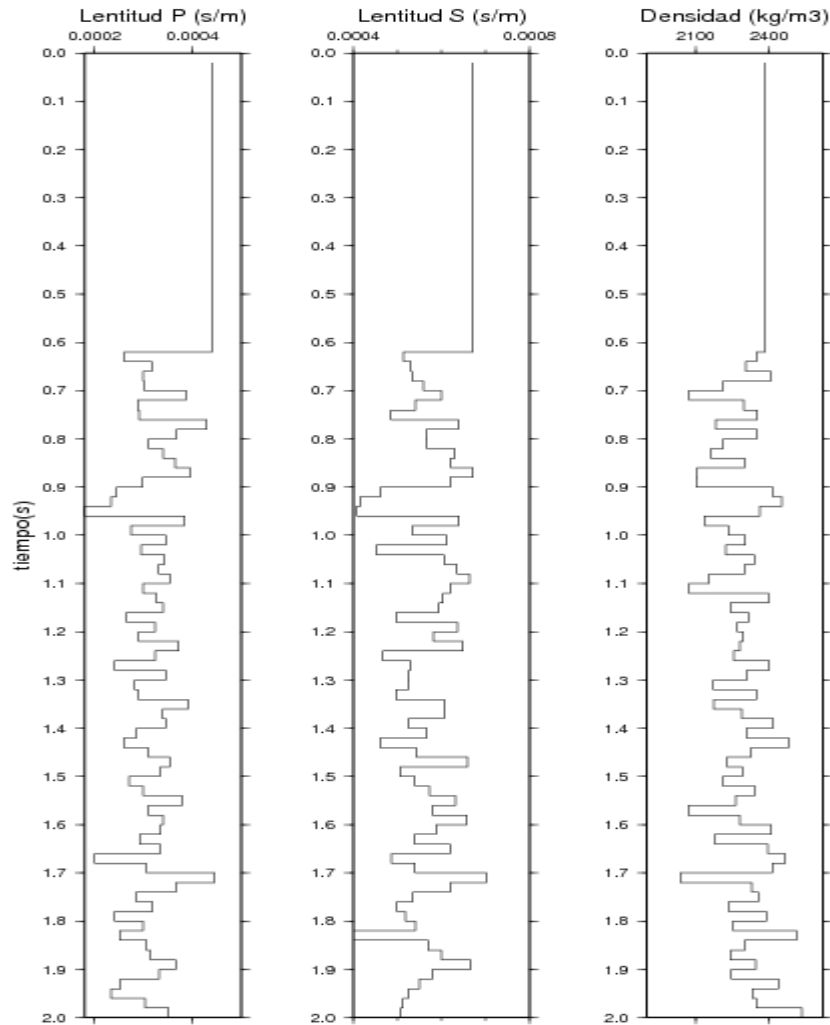


Figura 4.9: Modelo usado como “verdadero” y el cual es producto de la simulación estadística a partir del modelo a priori sintético de la tabla 4.2.

Ahora se presentan en la figura 4.10 los datos calculados correspondientes al modelo de la figura 4.9, y que a los efectos de la prueba de inversión se tomaran como datos “observados”.

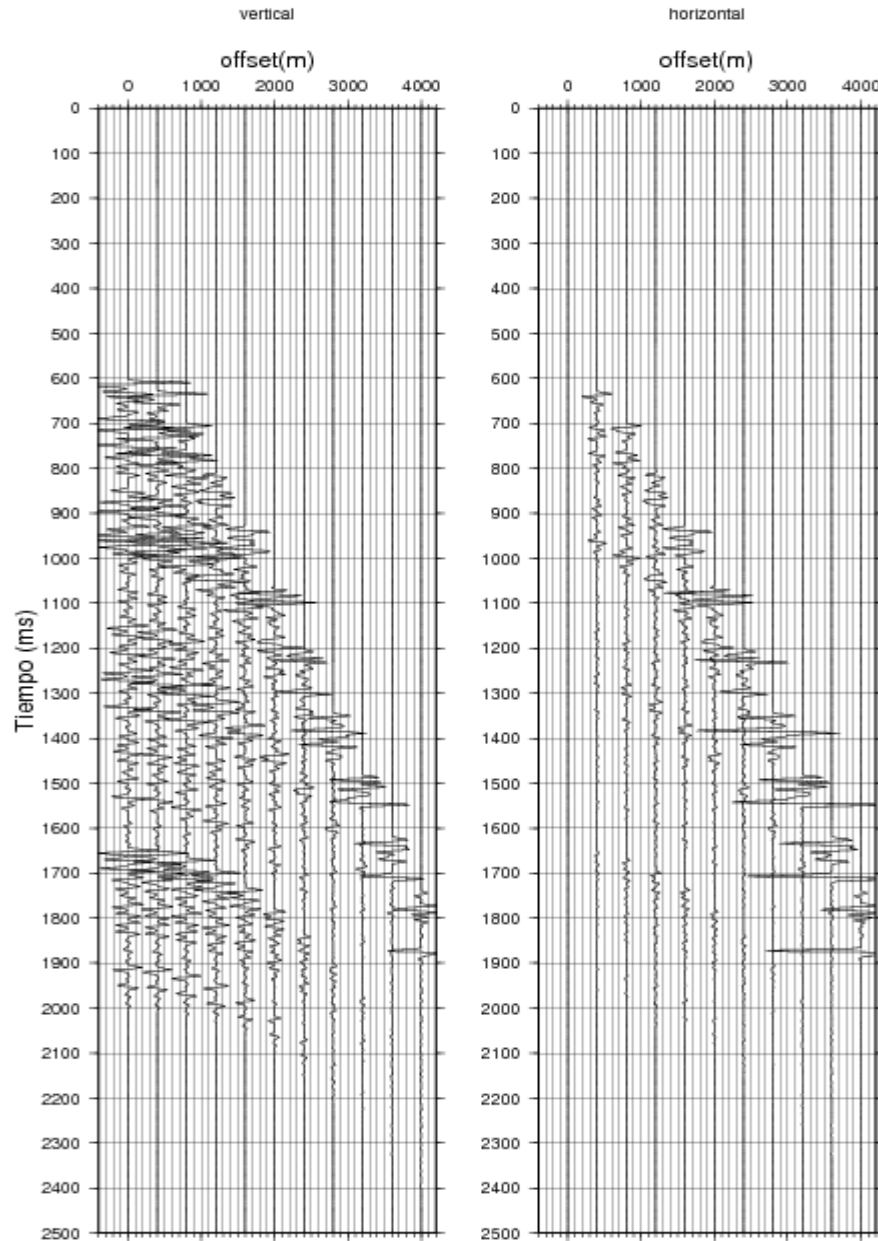


Figura 4.10: Datos “observados” calculados a partir del modelo de la figura 4.9 hasta un offset de 4 Km.

En cuanto a la convergencia de los datos, similarmente se puede graficar la curva del ajuste de los datos que como se recordará es la diferencia de los datos observados y los datos calculados, esta diferencia forma el residuo. Para ello se usa el criterio de Chi-cuadrado, donde el residuo se divide entre la desviación Standard y luego entre el numero de observaciones, el resultado se grafica contra el número de iteraciones, obteniéndose una curva con tendencia a disminuir, empieza con el valor más alto para el Sismograma del modelo inicial que es el sismograma del modelo a priori. De aquí en adelante la curva decrece en dos etapas: una primera, donde la curva decrece rápidamente, esta etapa se llama **fase de encendido** o burnin y esta caracterizada por la influencia de mayor peso del modelo a priori sobre todos los modelos que se calculan en esta fase. Luego esta curva comienza a decrecer lentamente y tiende a estabilizarse. Esta etapa es la **fase de muestreo**, y es la que es de mayor interés por cuanto en ella se explora suficientemente el espacio de soluciones. Esta gráfica es muy importante por cuanto es necesario saber el punto que separa estas fases para así construir adecuadamente los histogramas de frecuencia, estos sólo deben contener modelos de la fase de muestreo En la figura 4.11 se muestra dos típicas gráficas de este tipo, para las dos componentes de los sismogramas

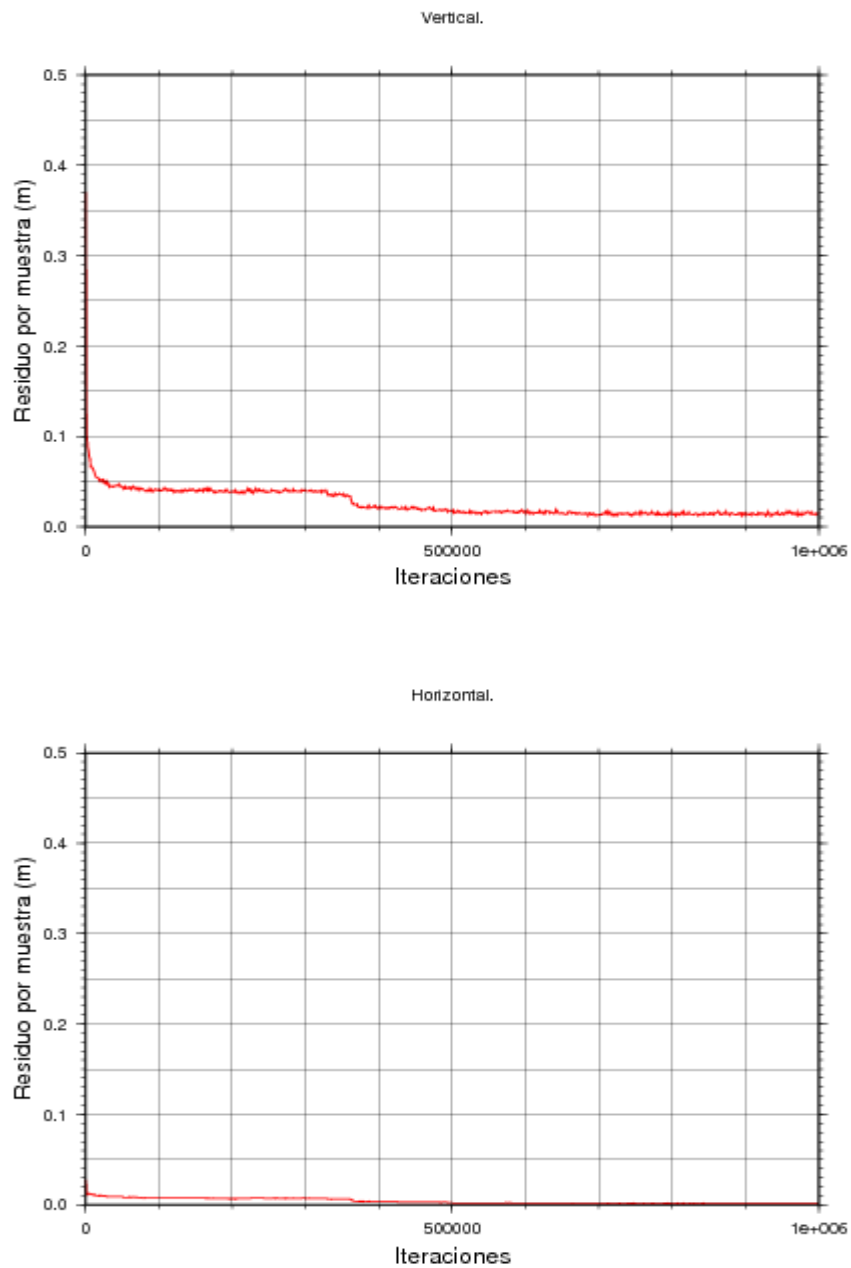


Figura 4.11: Gráficos del progreso en la disminución del residuo para las dos componentes: vertical y horizontal.

En la pasada gráfica se puede observar que la fase de encendido se alcanza hasta un valor de unas 400 mil iteraciones, luego de este valor se obtiene la fase de muestreo

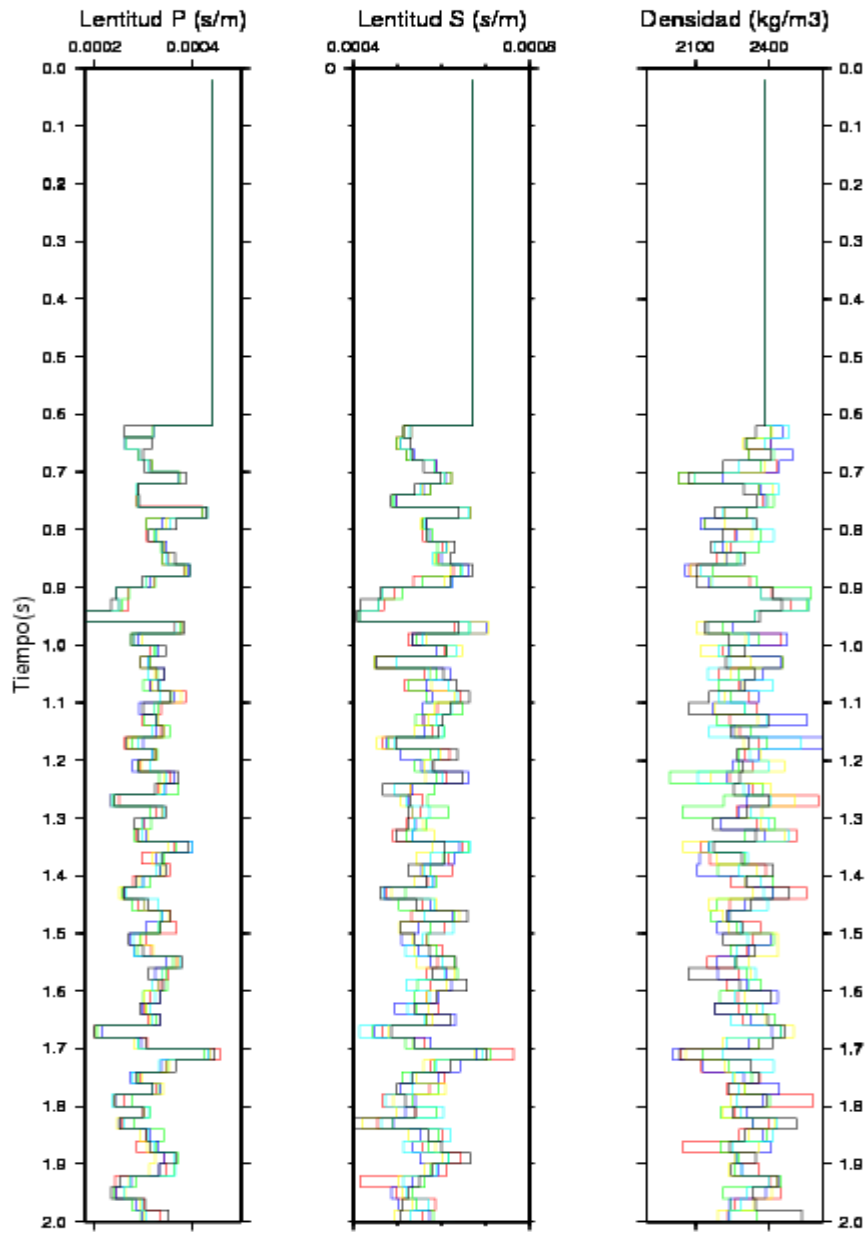


Figura 4.12: Muestra de (líneas de colores) cinco modelos generados por la cadena de Markov que toma muestras según la densidad de probabilidad posterior. En negro el modelo "verdadero".

A continuación se muestra que todos los sismogramas calculados están contenidos dentro del error de los datos asignado. Para ello se grafican los cinco sismogramas correspondientes a los modelos de la figura 4.12, y adicionalmente se le superpone la banda de error que se utilizó para esta prueba la tiene un valor de 0.1 para la componente X y 0.05 para la componente Y. En la figura 4.13 se muestra esto, pero para poder observar en detalle los sismogramas mencionados antes y la banda de error, es necesario aplicar un zoom, este es centrado en el recuadro negro que aparece en esta figura.

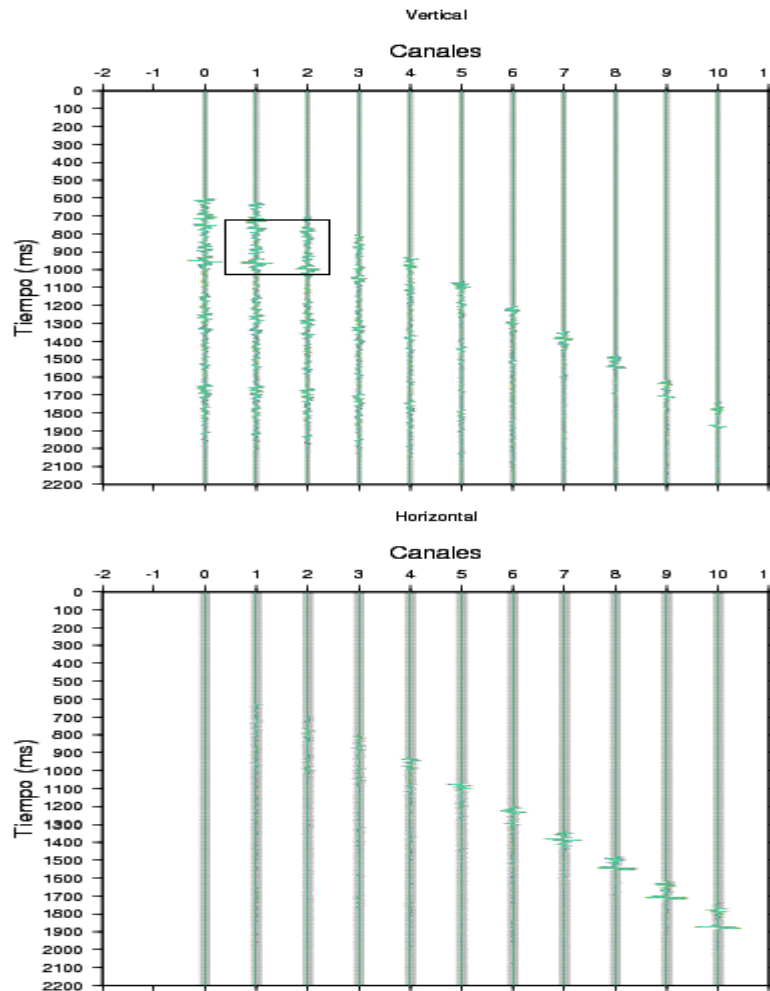


Figura 4.13: Datos correspondientes a las realizaciones de la figura 4.12. En gris se representa la barra de error.

El zoom correspondiente a este recuadro es mostrado en la figura 4.14. Donde se aprecian en los mismos colores de la figura 4.12 los datos calculados y en color gris esta representada la banda de error que para esta prueba tiene un valor de 0.05 para la componente vertical. Ahora se aprecia con mejor resolución como los sismogramas calculados están contenidos por el error asignado previamente para los datos.

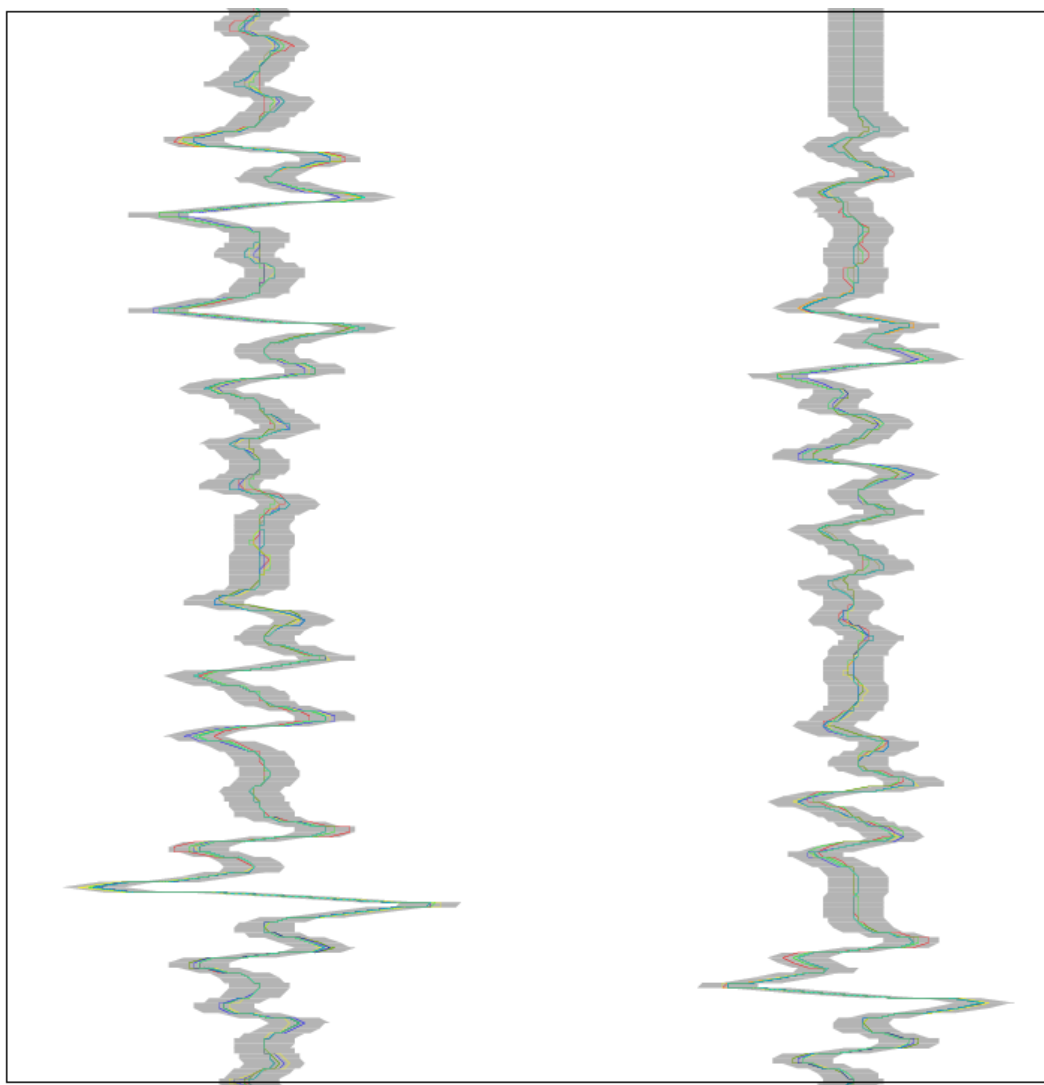


Figura 4.14: Detalle ampliado de las trazas 2 y 3 del sismograma de componente vertical más la barra de error en gris de valor 0.05.

A continuación se muestran en la grafica 4.15 el histograma de frecuencias que se obtiene con todos los modelos obtenidos para la lentitud P, lentitud S y densidad de la prueba sintética. En la superposición de todos estos modelos se puede apreciar la descripción completa de la incertidumbre de la inversión de amplitudes sísmicas y se interpreta de la siguiente manera: por ejemplo, el intervalo que excluye el amarillo puro y azul puro representa aproximadamente un intervalo de confiabilidad del 90% de encontrar el valor verdadero dentro de este intervalo. El color verde en todos sus tonos define aproximadamente un intervalo de 50% de confiabilidad. En la misma figura se superpone el modelo verdadero utilizado en la prueba y el modelo promedio de todas las realizaciones, obsérvese como el modelo verdadero se ubica satisfactoriamente hacia la mitad del gráfico de probabilidad acumulada indicando una buena inversión

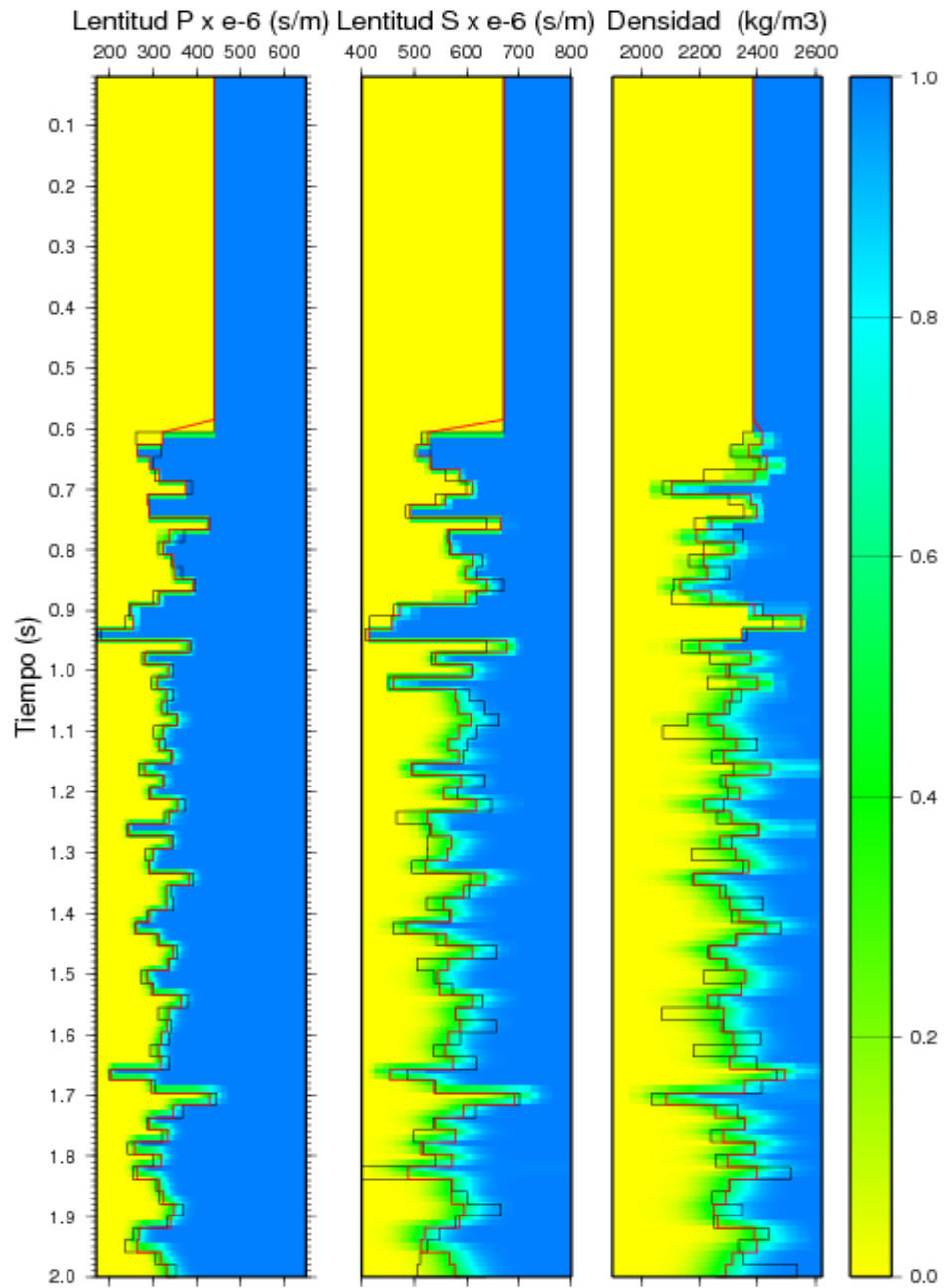


Figura 4.15: Histograma de frecuencias de los 2 millones de realizaciones calculadas con la cadena convergente a la densidad de probabilidad posterior. La línea negra representa el modelo “verdadero”, la línea roja el promedio calculado a partir de la muestra.

En general los modelos obtenidos a partir de la cadena como realizaciones de la densidad de probabilidad a posteriori son ejemplos de modelos que cumplen con la información geofísica y geoestadística que se ha dado. El conjunto formado por un millón de modelos es una muestra significativa de la densidad, y los aspectos variables entre estos modelos están indicando la incertidumbre en la inversión de amplitudes sísmicas.

En la fase de pruebas del programa se pudo observar como variaba la calidad de la inversión al variar las desviaciones de error asignadas previamente para cada sismograma tanto de componente vertical como horizontal. Para pequeñas desviaciones de error asignadas no se obtiene una buena exploración del espacio de modelos, a pesar de tener un número de iteraciones considerable de 2 millones. Se obtiene un mejor muestreo a medida que se aumenta esta desviación. Esto se muestra en las figuras 4.16(a, b y c).

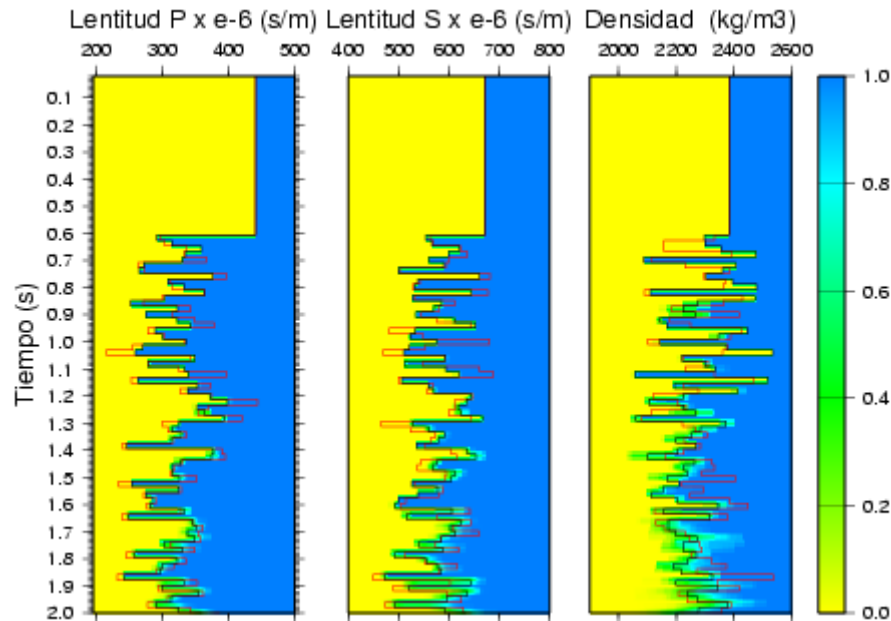


Figura 4.16: (a) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.01 en componente vertical y 0.01 en horizontal.

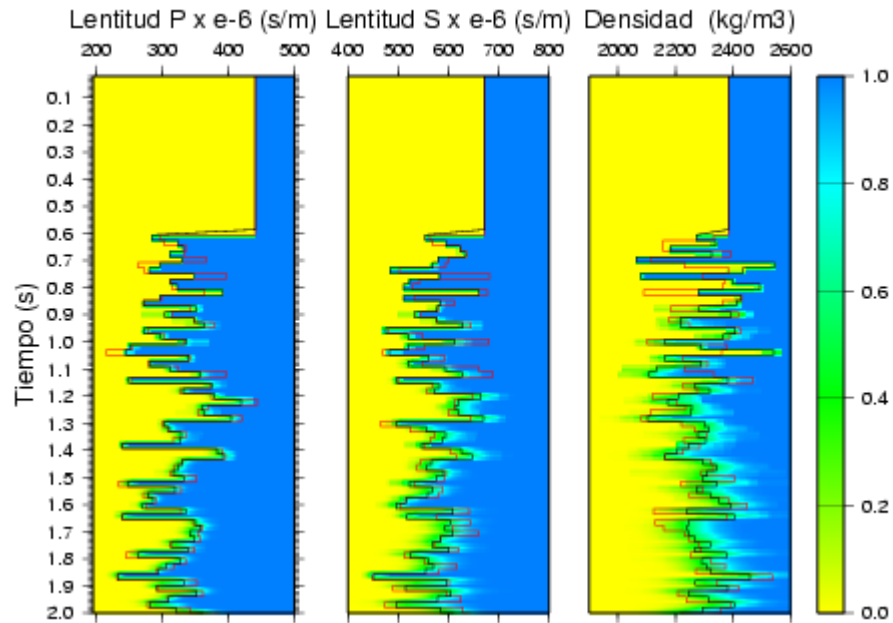


Figura 4.16: (b) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.03 en componente vertical y 0.04 en horizontal

Obsérvese como se incrementa la degradación de colores al pasar de las figuras 4.16(a) hasta la figura 4.16(c), el muestreo es bueno cuando la degradación contiene a el modelo observado casi o en su totalidad en toda la escala de tiempo. Nuevamente en todas estas figuras se presentan el modelo observado en línea de color rojo y el promedio de las realizaciones en línea de color negro.

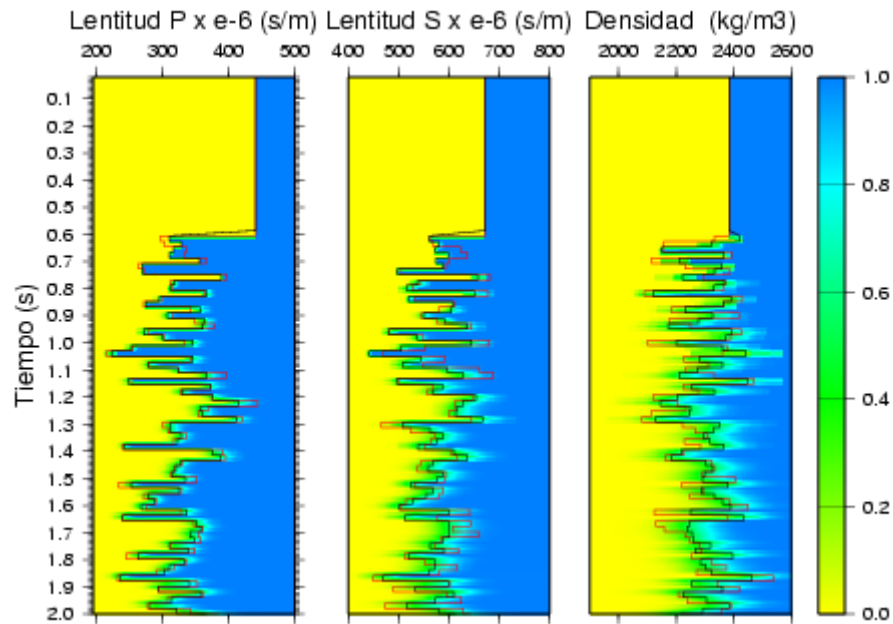


Figura 4.16: (c) resultados de la inversión para una desviación de error en los sismogramas de 0.05 en componente vertical y 0.1 en horizontal.

Es importante asignar un adecuado error a los datos puesto que los sismogramas tienen variaciones importantes de amplitud, sobre todo en las primeras capas que es donde existen ángulos de incidencia altos, generando amplitudes muy altas y luego muy pequeñas en profundidad. Otro efecto que comúnmente se ve en los sismogramas es el de un aumento en la amplitud para las primeras capas del sismograma de componente horizontal. Una recomendación sería utilizar un error proporcional a la amplitud de esta forma se obtendría una mejor inversión en toda la escala de tiempo.

4.3.2 Perfil real de parámetros elásticos

Ahora se procede a mostrar los resultados obtenidos para otra inversión, esta vez el modelo “verdadero” es seleccionado a partir de la simulación de un modelo a priori, que es construido con la estadística de un pozo real. En la figura 4.17 se muestra el modelo de los parámetros escogido como modelo verdadero de la prueba.

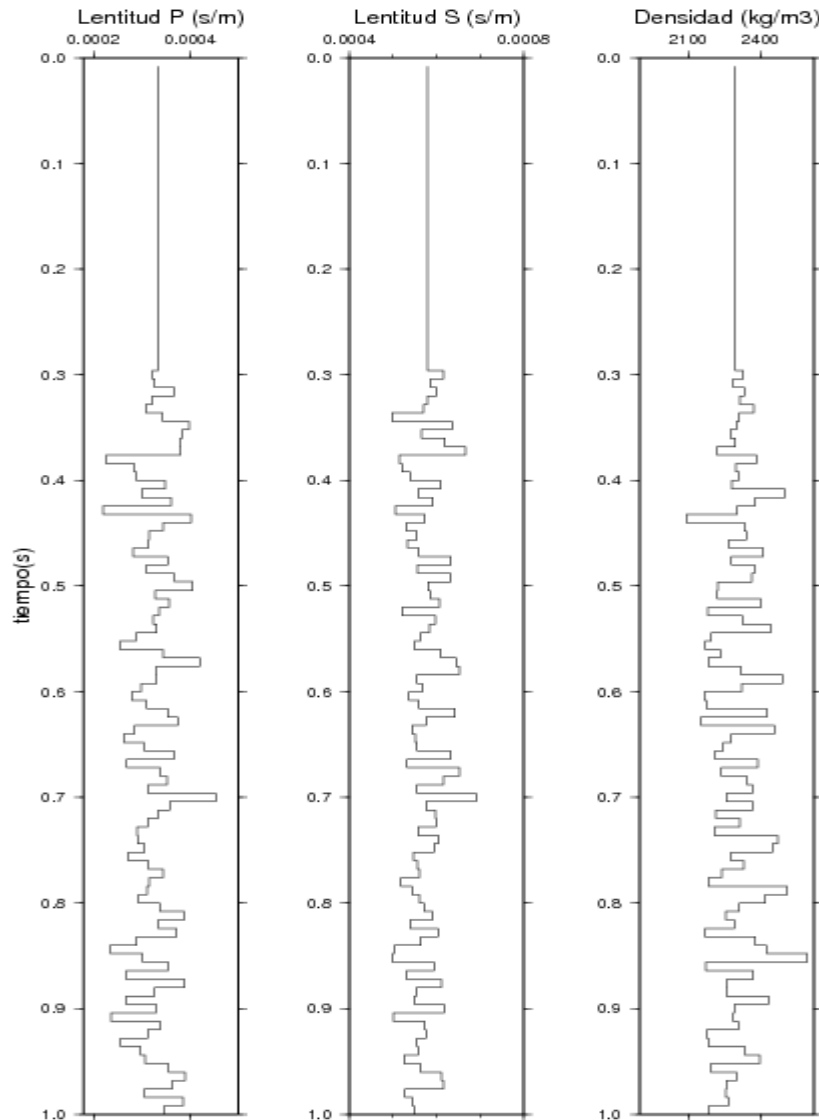


Figura 4.17: Modelo usado como “verdadero” y el cual es producto de la simulación estadística a partir de datos reales de un pozo.

En la figura 4.18 están representados los datos “observados” correspondientes al modelo de la figura 4.17.

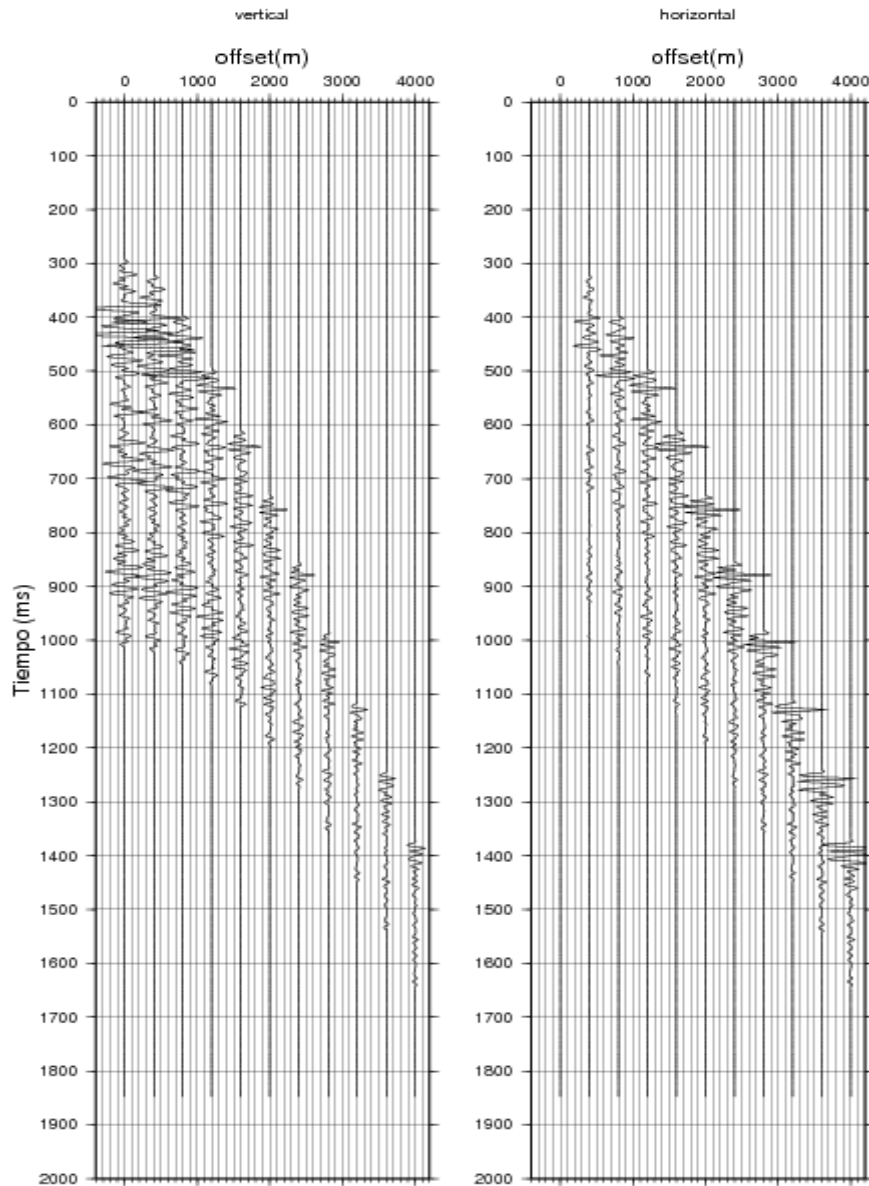


Figura 4.18: Datos “observados” calculados a partir del modelo de la figura 4.17 hasta un offset de 4 Km.

En la figura 4.19 se muestran dos gráficos de la evolución del residuo con el número de iteraciones.

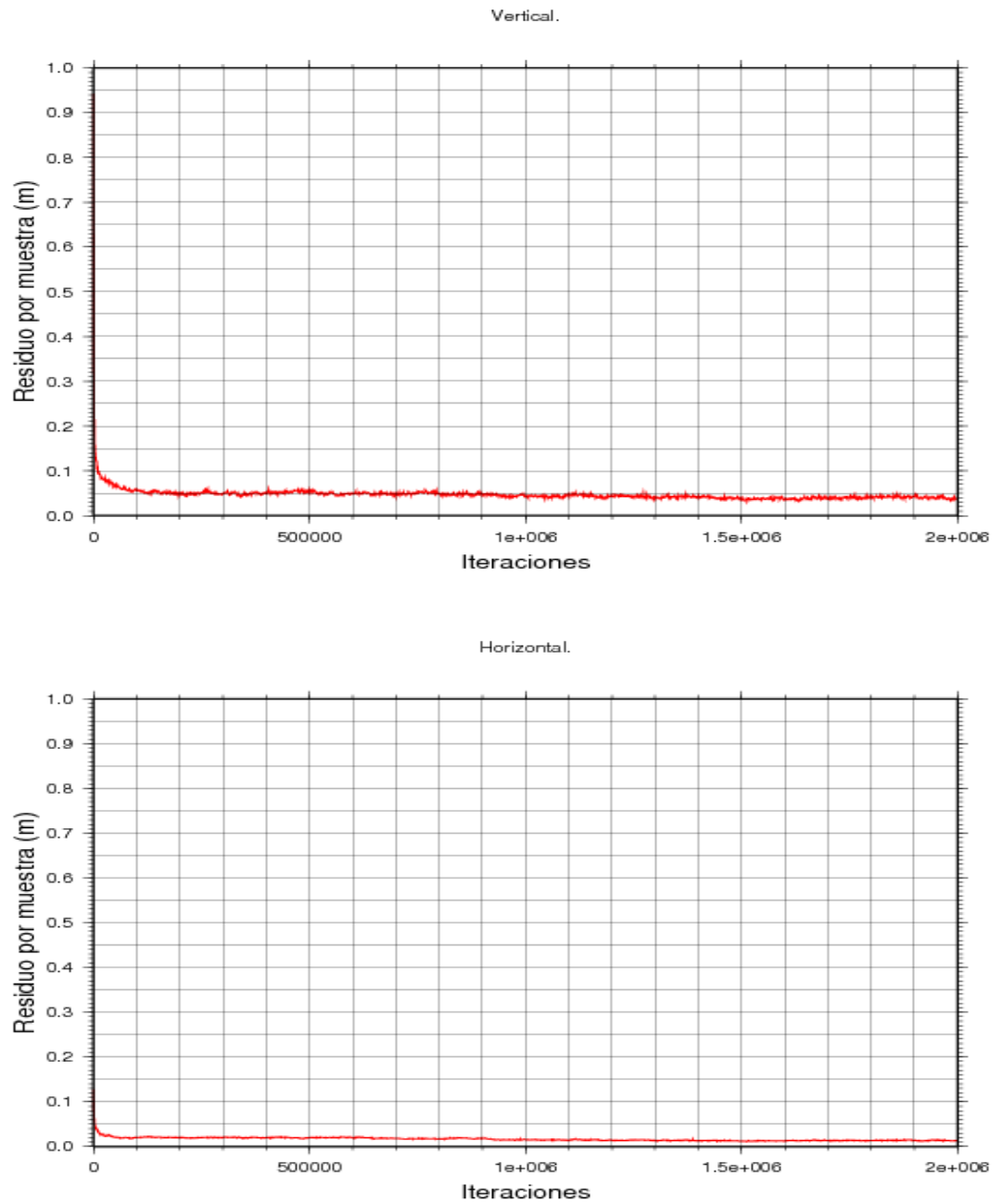


Figura 4.19: Gráficos del progreso en la disminución del residuo para las dos componentes: vertical y horizontal.

En la figura 4.20 se presentan en diversos colores, 5 modelos seleccionados al azar de los 2 millones que conforman la cadena de realizaciones, adicionalmente se presenta en color negro el modelo observado.

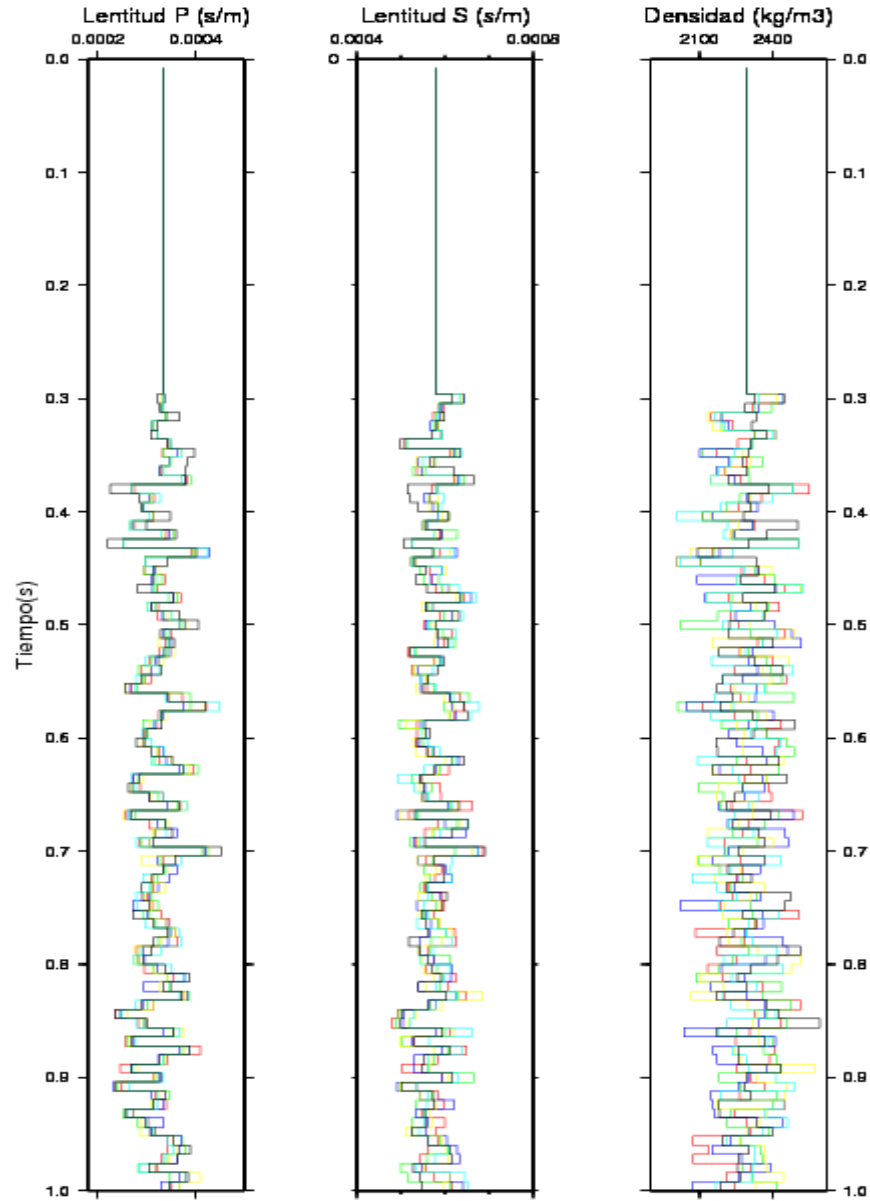


Figura 4.20: Muestra de (líneas de colores) cinco modelos generados por la cadena de Markov que toma muestras según la densidad de probabilidad posterior. En negro el modelo verdadero.

A continuación se muestran en la figura 4.21 los datos calculados para cada una de los modelos mostrados en la figura 4.20. Obsérvese que todos los datos son muy parecidos a los “datos verdaderos” u observados.

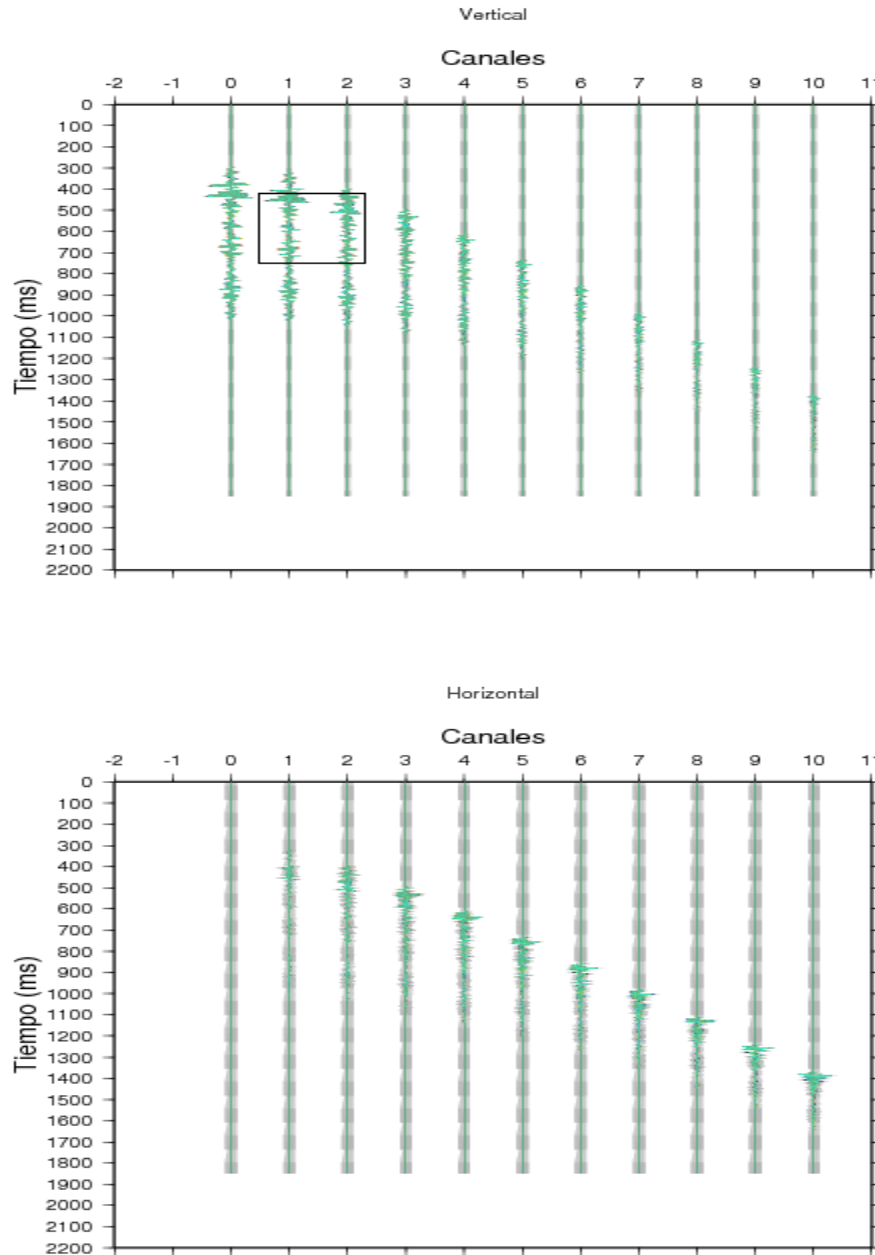


Figura 4.21: Datos correspondientes a las realizaciones de la figura 4.20. En gris se representa la barra de error.

En la figura 4.22 se muestra el detalle del recuadro de la figura 4.21 de las trazas 2 y 3 del sismograma vertical. De esta forma se pueden diferenciar un poco mejor los cinco distintos tipos de datos calculados que se consideraron como ejemplo a partir de los modelos correspondientes de la figura 4.20.

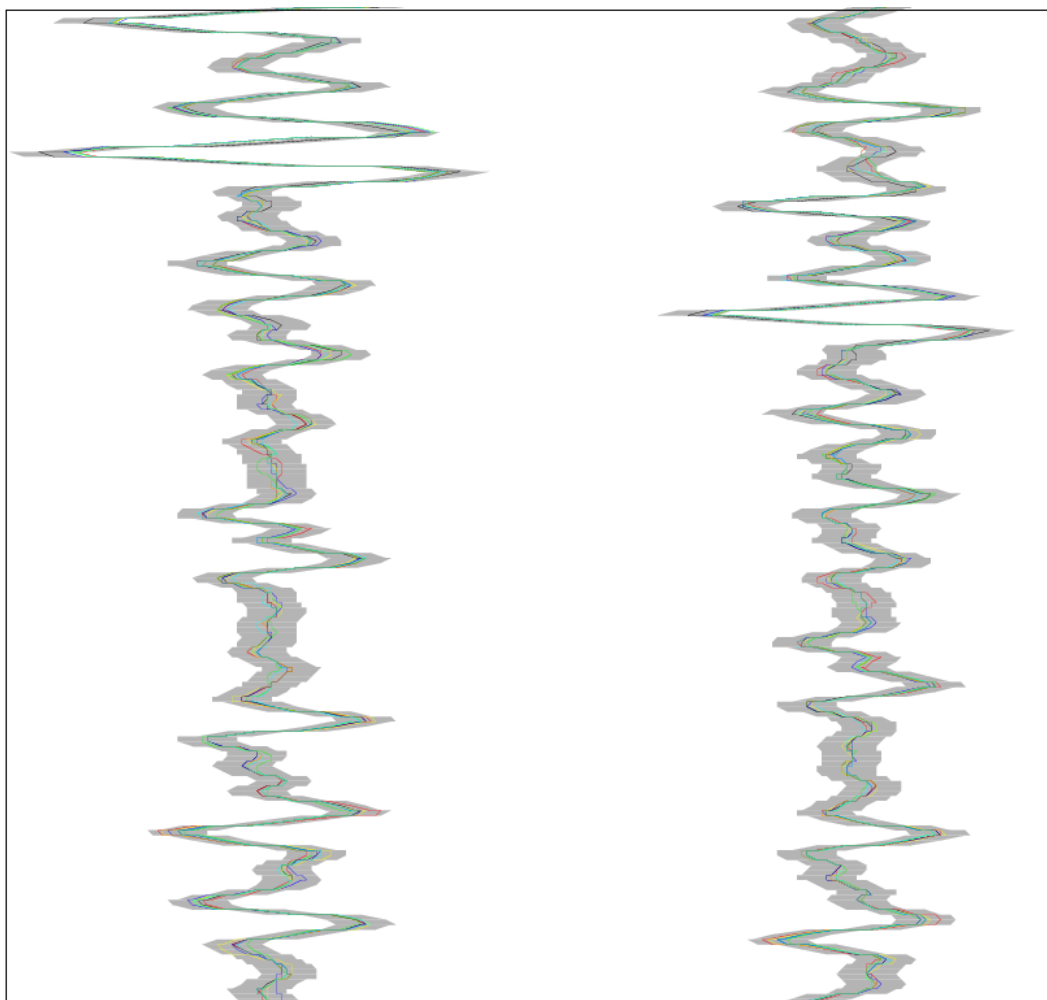


Figura 4.22: Detalle ampliado de las trazas 2 y 3 del sismograma de componente vertical más la barra de error en gris.

Finalmente se presentan los histogramas de frecuencias correspondientes a la inversión realizada a partir de la estadística de datos reales de pozos (figura 4.23)

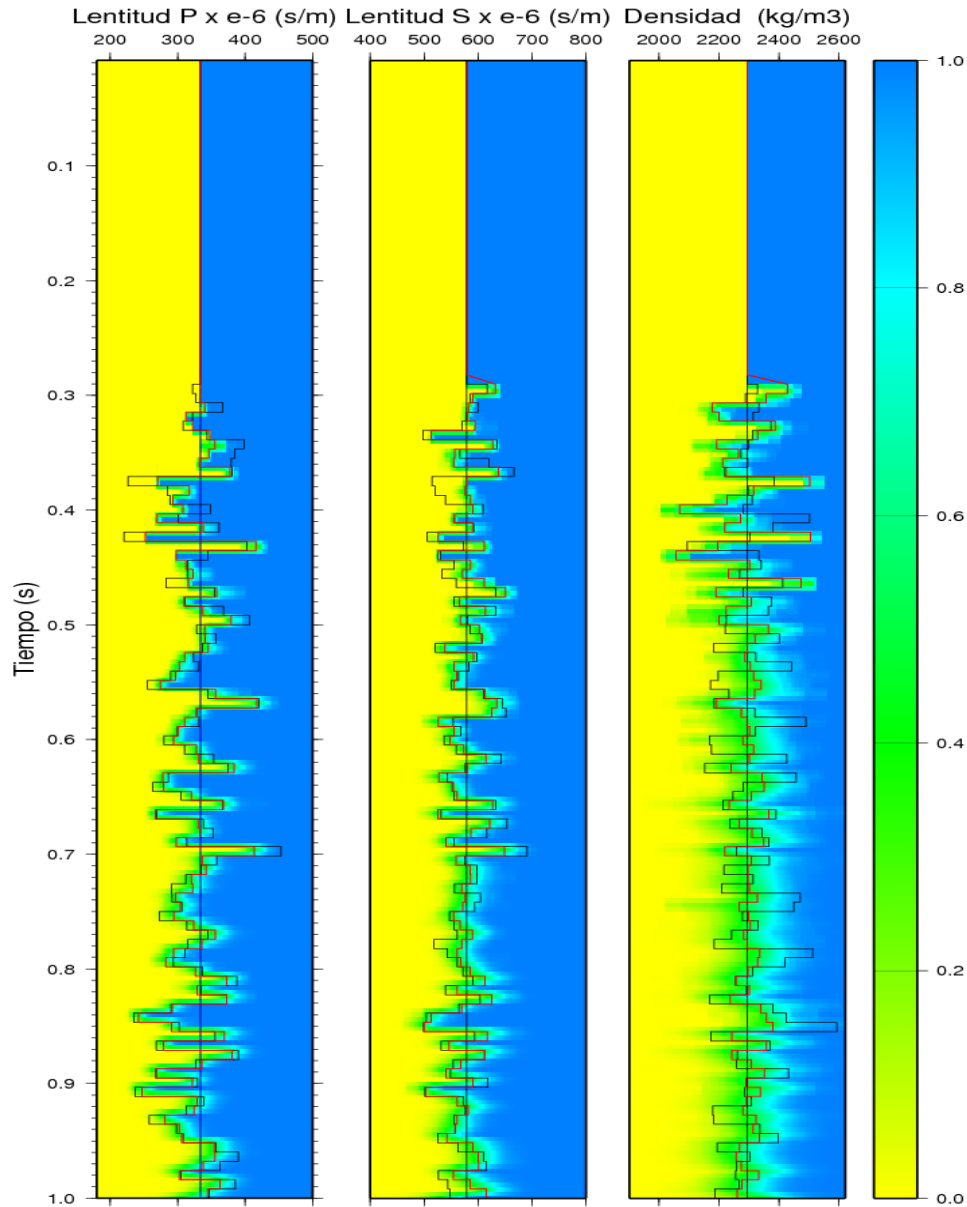


Figura 4.23: Histograma de frecuencias de los 2 millones de realizaciones calculadas con la cadena convergente a la densidad de probabilidad posterior. La línea negra representa el modelo verdadero, la línea roja el promedio calculado a partir de la muestra.

El análisis de la figura 4.23 sugiere que los modelos de lentitud P y lentitud S, tienen un buen ajuste con respecto a sus correspondientes observados en toda la escala de tiempo, y menor incertidumbre en su estimación. El modelo de densidad presenta mayor incertidumbre y menor ajuste al modelo “verdadero”, esto coincide con resultados de otros trabajos en el área de inversión elástica. La densidad generalmente esta menos restringida por la información contenida en la forma de onda que las impedancias y velocidades (Debski y Tarantola 1995), sin embargo para las señales de offsets largos, las pruebas mostraron que si hay suficiente energía en la señal, la inversión para el modelo de densidad mejora notablemente.

Las frecuencias utilizadas en este trabajo, variaron desde 30 hasta 60 Hertz, y el espesor de las capas mínimo 4 ms y máximo 20 ms. Se pueden usar frecuencias más altas o más pequeñas, pero se recomienda en cada caso no utilizar tiempos más pequeños que $\frac{1}{4}$ del periodo dominante de la onda. En este rango las pruebas realizadas de las inversiones demostraron ser independientes de la frecuencia utilizada.

Finalmente en cuanto al tiempo de cálculo empleado por el programa en modo de inversión para 10 canales y 100 capas, se obtuvo un aproximado de 6 horas por cada millón de iteraciones. Es por ello que se recomienda en el caso de usar muchas más trazas, el apilamiento de éstas a un número de 10 y que contengan todas las separaciones emisor receptor, en zonas diferenciadas según el offset.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una metodología de inversión de amplitudes sísmicas para apertura emisor-receptor variable, mediante la cual se genera un número grande de configuraciones de modelos del subsuelo, que resultaron probables en términos de su ajuste con las observaciones y con la geoestadística previa disponible. Dicha metodología esta resumida en lo que se conoce como técnicas de muestreo o Monte Carlo utilizando cadenas de Markov. Estas garantizan la convergencia a una muestra de la densidad de probabilidad posterior.

La metodología empleada para el cálculo del problema directo es suficientemente eficiente para aplicar el método de Monte Carlo, ya que permite calcular un sismograma multicomponente de 10 canales y 100 capas en un poco menos de un segundo

El modelo espacial del subsuelo que se consideró corresponde con un modelo de capas horizontales homogéneas de espesor en tiempo constante, cada capa esta definida por sus parámetros elásticos (velocidades de onda P y S así como la densidad) que son los que definen por completo los parámetros del modelo. Para realizar la inversión se empleo información previa acerca de estos parámetros del modelo a partir de la caracterización estadística

La técnica se validó en sus diversas componentes: la simulación de los tiempos de viaje y coeficientes de reflexión, la simulación estadística de las propiedades elásticas, y pruebas sintéticas de inversión.

Las pruebas realizadas demuestran que para rangos reales de propiedades elásticas y aperturas emisor-receptor, la señal sísmica contiene información sobre la lentitud P, lentitud S y densidad. De esta manera es posible estimar estos parámetros elásticos a partir de la sísmica mediante las técnicas de inversión. Las pruebas

efectuadas, en particular la correspondiente a los datos de parámetros elásticos de la formación Oficina, mostraron que la certidumbre en la estimación de estos parámetros es mayor para la lentitud P, seguida de la lentitud S y la densidad, esta última reflejando mayor incertidumbre.

Uno de los aspectos a destacar de esta técnica de inversión, que utiliza métodos de Monte Carlo, es que la misma permite una descripción completa de la incertidumbre del resultado, como resultado de la combinación de los errores de los datos y la relación no lineal entre los datos y los parámetros elásticos del medio.

RECOMENDACIONES

Debido a la importancia que tiene en estos últimos tiempos la integración de información, en el campo de la geofísica las valiosas mediciones que se realizan requieren combinarse con información de la geología, petrofísica y otras especialidades de ciencias de la tierra para dar lugar a una interpretación coherente. La integración de información y conocimientos a través de múltiples disciplinas es un factor clave para la confiabilidad y éxito de un proyecto exploratorio. Es por ello que este trabajo obtendría una mayor relevancia si se combinara no sólo la información de datos observados con la geoestadística sino también con la información petrofísica. Donde las relaciones entre las propiedades materiales de las rocas, y los parámetros elásticos son un tema ampliamente conocido en petrofísica. También la extracción de la ondícula adecuada de la sísmica sería otro paso importante en la mejora de este programa, para el caso de usar datos reales.

Otra recomendación que se sugiere es la de realizar la inversión de amplitudes sísmicas, pero para medios anisotrópicos, debido a los grandes avances y conocimientos que se disponen hoy acerca de este tema, donde ya se conocen con bastante precisión las ecuaciones para los tiempos de viaje (inclusive para largos offsets) por diferentes métodos. Esto daría como resultado una inversión de medios más complejos y más parecidos al subsuelo.

Finalmente y en atención a los diversos tamaños que las amplitudes sísmicas suelen alcanzar en los sismogramas sintéticos se puede recomendar la implementación de desviaciones de error de los datos proporcionales al tamaño de dichas amplitudes con lo cual se tendría una convergencia mas rápida hacia la muestra de densidad de probabilidad posterior obtenida en este trabajo y una mejor exploración del espacio de modelos.

BIBLIOGRAFIA

Aki, K., and Richards, P.G. (1980) Quantitative seismology: Theory and methods, V.I: W.H. Freeman and Co.

Bosch, M. (1999). Lithologic Tomography: From plural geophysical data to lithology estimation: Journal of Geophysical Research, v.104, p. 749-766

Bosch, M. (2003). Inferencia Estadística de Porosidad e Impedancia a partir de ondas Sísmicas Vía Métodos de Monte Carlo. Trabajo de Ascenso. Caracas: U.C.V. 68 pp.

Bosch, M. (2004). The optimization approach to lithological tomography: Combining seismic data and petrophysics for porosity prediction: Geophysics, v. 69, p. 1272

Castagna, J.P., and Backus, M.M., eds., (1993). Offset-dependent reflectivity – Theory and practice of AVO anomalies, Society of Exploration Geophysics. Investigations in Geophysics no. 8.

Chapman, S.J. (1998). FORTRAN 90/95 for Scientists and Engineers. . New York: Mc Graw-Hill. 876pp.

Dix, C. H., (1955). Seismic velocities from surface measurements: Geophysics, v. 20, p. 688-86.

Gray, D., Chen, T., and Goodway, W., (1999). Bridging the gap: Using AVO to detect changes in fundamental elastic constants, SEG Expanded Abstracts, 852-855.

Hilterman, F. J. (2001). Seismic Amplitude Interpretation. SEG-EAGE Distinguished Instructor Series, N.4, Geophysical Development Corporation, Houston.

Indrajit, G. R., Mrinal K. S., Torres-Verdin, C., and Varela, O., (2004). Prestack inversion of a Gulf of Thailand ocean-bottom cable (OBC) data set: Geophysics, v. 69, p. 1470-1477

Merletti, G., Pendrel, J., Torres-Verdin, C., and Victoria, M., (1999). Trace-based and geostatistical inversion of 3-D seismic data for thin-sand delineation; an application in San Jorge Basin, Argentina, The Leading Edge 18: 1070-1077.

Mosegaard, K. y A. Tarantola (2000). Probabilistic Approach to Inverse Problems, Chapter for the International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology, IASPEI, 82pp.

Mosegaard, K. y A. Tarantola (1995). Monte Carlo Sampling of Solutions to Inverse Problems: Journal of Geophysical Research, 100, NO. B7. 12.431-12.447.

Shah, P. M., and F.K. Levin. (1975). Gross Properties of Time-Distance Curves: Geophysics, 38, NO. 4, 643-656.

Shuey, R.T. (1985). A simplification of the Zoeppritz equations: Geophysics, 50, NO. 4, 609-614.

Tarantola, A. (1987). Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation. New York: Elsevier. 613 pp.

Telford, W. M., L. P. Geldart y R. E. Sheriff (1990). Applied Geophysics, 2nd ed. Cambridge. England: Cambridge University Press. 770 p.

Treitel, S., and L. Lines. (2001). Past, present and future of geophysical inversion- A new millennium analysis: Geophysics, 66, NO. 1, 21-24.

APENDICES

Apéndice A: Cálculos de ángulos de despegue.

Para calcular dichos ángulos observe la figura 4.24

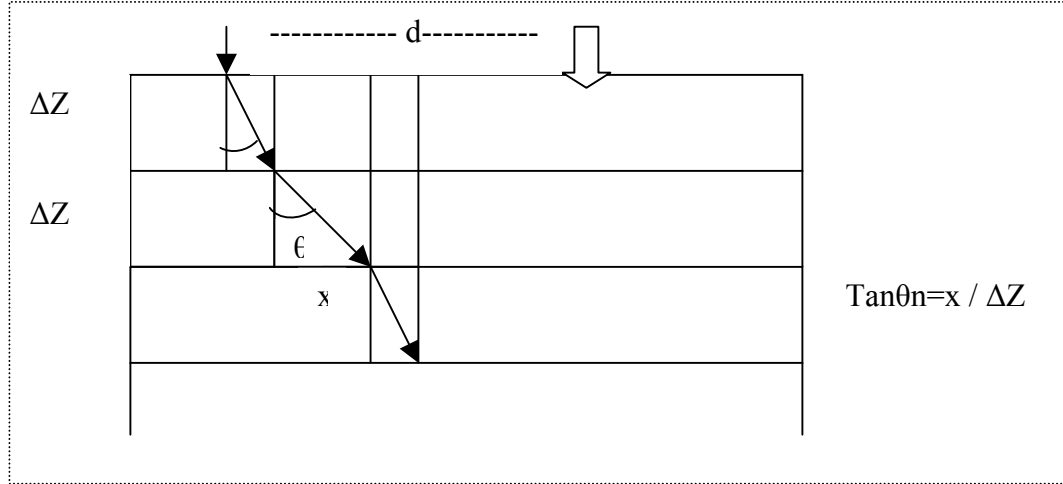


Figura 4.24: Ilustración de la trayectoria de uno de los rayos obtenida en un modelo de capas horizontales y espesor constante.

$$d/2 = \sum_{k=1}^N x_k = \sum_{n=1}^N \Delta z \tan \theta_n, \quad (\text{A.1}) \text{ y usando la igualdad trigonométrica que}$$

relaciona el seno con la tangente, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$, (A.2) queda,

$$d = 2\Delta Z \sum_{n=1}^N \frac{\sin \theta_n}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_n}}, \quad (\text{A.3}) \text{ y utilizando la ecuación (3.3) que se convierte}$$

$$\text{en este caso en, } \sin \theta_n = \frac{\sin \theta_{sal} V_n}{V_1}, \quad (\text{A.4})$$

así se obtiene finalmente la expresión que relaciona el offset y el ángulo de salida,

$$d = 2\Delta Z \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}_{sal} V_n}{V_1 \sqrt{1 - \frac{\text{sen}_{sal}^2 V_n}{V_1^2}}} = 2\Delta Z \text{sen} \theta_{sal} \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{\sqrt{V_1^2 - \text{sen}^2 \theta_{sal} V_n^2}} . \quad (\text{A.5})$$

Apéndice B: Cálculo de tiempos de viaje por el método de interpolación

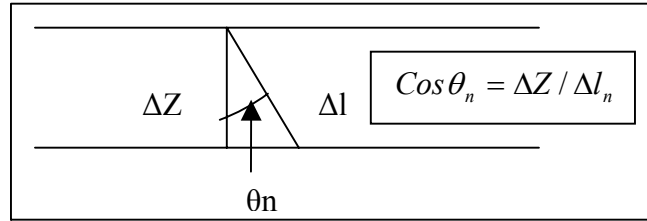


Figura 4.25: Coseno del ángulo para cualquier capa

$$t = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\Delta l_n}{V_n} = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\Delta Z}{V_n \text{Cos} \theta_n} , \quad (\text{B.1}) \quad \text{donde } \Delta l_n \text{ es la longitud del rayo en la}$$

capa n (ver figura 4.25).

$$t = 2\Delta Z \sum_{n=1}^N \frac{1}{V_n \sqrt{1 - \text{Sen}^2 \theta_n}} , \quad (\text{B.2}) \quad \text{y haciendo uso del parámetro de rayo se}$$

obtiene,

$$t = 2\Delta Z \sum_{n=1}^N \frac{1}{V_n \sqrt{1 - \frac{V_n^2 \text{Sen}^2 \theta_{sal}}{V_1^2}}} , \quad (\text{B.3})$$

$$t = 2\Delta Z \sum_{n=1}^N \frac{1}{V_n^2 \sqrt{\frac{V_1^2}{V_n^2} - \text{Sen}\theta^2}}. \text{(B.4)}$$

Apéndice C: Algunas relaciones útiles para el calculo de tiempos de viaje por ecuación de Dix y Schmitt

La ecuación de Dix es, $t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{\bar{V}_n^2}$, (C.1) donde, $\bar{V}_n^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^N v_i^2 \Delta t_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N \Delta t_i\right)}$, (C.2)

$$p = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sum_{i=1}^N v_i^2 \Delta t_i} = \frac{x}{\bar{V}_n^2(x)t}, \text{(C.3)}$$

la ecuación de Schmitt es, $t_n^2 = t_{0n}^2 + \frac{d^2}{\bar{V}_n^2} + d^4 \left[1 - \frac{\bar{V}_n^4}{(\bar{V}_n^2)^2} \right] \left(4t_{0n}^2 (\bar{V}_n^2)^2 \right)^{-1}$, (C.4)

$$\text{con, } \bar{V}_n^4 = \frac{\left(\sum_{i=1}^N v_i^4 \Delta t_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N \Delta t_i\right)}. \text{(C.5)}$$