

*Cuerdas Heteróticas en Orbifolds Toroidales
y Simetría Espejo*

Br. Victor A. Díaz De R.

Tutor: Anamaría Font

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 25 de Julio de 2012



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

CUERDAS HETERÓTICAS EN ORBIFOLDS TOROIDALES Y SIMETRÍA ESPEJO

Br. Victor A. Díaz De R.

Anamaría Font, Tutor

Caracas, 25 de Julio de 2012

Cuerdas Heteróticas en Orbifolds Toroidales y Simetría Espejo

Copyright © 2012

Universidad Central de Venezuela

CUERDAS HETERÓTICAS EN ORBIFOLDS TOROIDALES Y SIMETRÍA ESPEJO

Br. Victor A. Díaz De R.

Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la
Universidad Central de Venezuela como
requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Física.

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Victor A. Díaz De R. titulado: “**Cuerdas Heteróticas en Orbifolds Toroidales y Simetría Espejo**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Anamaría Font, Tutor

Fecha

Dr. Salvatore De Vincenzo

Fecha

Dr. Lorenzo Leal

Fecha

Caracas, 25 de Julio de 2012

A ti.

Agradecimientos

Inicialmente quiero agradecer a dios, a mis padres, y a mis hermanos por su gran soporte y amor durante toda mi carrera. Luego quiero agradecer a mi tutora Anamaría Font por ayudarme, por estar pendiente y enseñarme muchas cosas que sé hoy tanto académicamente como personalmente.

Quiero agradecer con gran aprecio y cariño a Francisco Montilla por su apoyo y soporte durante los últimos años de mi carrera, incluyendo la realización de este trabajo. También a mis queridos amigos/hermanos Aurimary, Javier y Manuel por esos momentos juntos y todas las experiencias vividas durante este período compartido de nuestras vidas como lo fue nuestra carrera quiero agradecerles y desearles lo mejor de este mundo para ellos.

A mis amigos Solmar, Francisco, Michael, Lucia, Orlenys, Scarleth, entre otros, por todo su apoyo, soporte y ayuda durante la realización de este trabajo. Además quiero agradecer a mi perrito Ares por animarme y estar a mi lado siempre. Por último quiero agradecer a Souad Tabban y Ling Sequera por su aporte de hojas de reciclaje para la realización de las cuentas en este trabajo.

Resumen

Cuerdas Heteróticas en Orbifolds Toroidales y Simetría Espejo

Victor A. Díaz De R.

Anamaría Font, Tutor

Universidad Central de Venezuela

En este trabajo se extiende el estudio de la simetría espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Inicialmente se clasifican todos los grupos de calibre observables permitidos por invariancia modular para la cuerda heterótica $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. Luego se calcula el espectro de estados de masa nula, con y sin torsión discreta para cada modelo. Se encuentra que al incluir la torsión discreta se intercambia el número de estados en representaciones complejas. Se comprueba entonces que la torsión discreta induce el mapa espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Anamaría Font
Tutor

ÍNDICE GENERAL

Índice General	viii
Lista de Figuras	x
Lista de Tablas	xi
Introducción	1
1. Teoría de Cuerdas	4
1.1. Cuerda Bosónica	4
1.2. Cuerda Fermiónica	17
1.3. Función de Partición	25
1.3.1. Función de Partición Bosónica	26
1.3.2. Invariancia Modular	28
1.3.3. Función de Partición Fermiónica	30
1.4. Cuerda Heterótica	34
1.4.1. Función de Partición Heterótica $SO(32)$	39

1.4.2.	Función de Partición Heterótica $E_8 \times E_8$	42
2.	Compactificación en Orbifolds	45
2.1.	Geometría de Orbifolds	45
2.2.	Propagación de Cuerdas en $\mathcal{M}_4 \times T^6/G_p$	49
2.2.1.	Torsión discreta $\varepsilon(h, g)$	51
2.3.	Cuerda Bosónica en $T^6/\mathbb{Z}_N$	52
2.4.	Cuerda Fermiónica en $T^6/\mathbb{Z}_N$	57
2.5.	Cuerda Heterótica en $T^6/\mathbb{Z}_N$	60
2.6.	Cuerda Heterótica en $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$	64
3.	Cuerdas Heteróticas en $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	69
3.1.	Geometría de $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	69
3.2.	Clasificación de Traslaciones para $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$	70
3.3.	Espectro de Masa Cero: análisis general	74
3.3.1.	Sector no torcido	75
3.3.2.	Sector θ	77
3.3.3.	Sector ω	79
3.3.4.	Sector $\theta\omega$	80
3.4.	Espectro de Masa Cero: ejemplo	82
3.5.	Espectro de Masa Cero: resultados	87
4.	Conclusiones	96
A.	EL GRUPO $SO(8)$	98
	Bibliografía	100

LISTA DE FIGURAS

1.1.	Toro T^2 como red.	28
1.2.	Toro torcido.	29
1.3.	Red de toro T^2 al hacer $\tau \mapsto \tau + 1$	29
2.1.	$T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$	46
2.2.	$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$	47
2.3.	$T^2/\mathbb{Z}_2$	48
A.1.	Diagrama de Dynkin de $SO(8)$	99

LISTA DE TABLAS

1.1.	Espectro cuerda cerrada.	15
1.2.	Espectro cuerda abierta.	17
1.3.	Estados derechos en el sector Neveu-Schwarz.	21
1.4.	Estados derechos en el sector Ramond.	23
1.5.	Espectro de masa nula cuerda tipo IIA.	24
1.6.	Espectro de masa nula cuerda tipo IIB.	25
1.7.	Espectro de masa nula cuerda heterótica $SO(32)$	38
3.1.	Clasificación de traslaciones en la cuerda heterótica $SO(32)$	73
3.2.	Clasificación de traslaciones en cuerda heterótica $E_8 \times E_8$	74
3.3.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(26) \times U(1)^3$	88
3.4.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(10)^3 \times U(1)$	89
3.5.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(18) \times SO(10) \times U(1)^2$	89
3.6.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$	90
3.7.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SU(6) \times SU(10) \times U(1)^2$	90
3.8.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(6)^3 \times SO(14)$	91

3.9.	Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times E_8 \times U(1)^2$	91
3.10.	Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times SO(16) \times U(1)^2$	92
3.11.	Espectro masa nula con grupo de calibre $E_7 \times SU(2) \times SU(8) \times U(1)$	93
3.12.	Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(12) \times SU(2) \times SU(2) \times$ $SU(8) \times U(1)$	94
3.13.	Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times SO(8) \times SO(8) \times U(1)^2$	95

INTRODUCCIÓN

El objeto fundamental a estudiar en teoría de cuerdas son cuerdas cuya extensión es del orden de la longitud de Planck $\ell_p \sim 10^{-33} \text{ cm}$. Estas cuerdas se propagan en un espacio-tiempo 26-dimensional para las cuerdas bosónicas, y 10-dimensional para las cuerdas fermiónicas y las cuerdas heteróticas. Los modos de vibración de estas cuerdas se identifican con partículas. Por ejemplo, se encuentra el gravitón y vectores de calibre. De esta forma se unifican las interacciones de gravedad y de calibre a nivel cuántico [1].

Una de las posibles desventajas de la teoría es la dimensionalidad del espacio-tiempo. Sin embargo, existen mecanismos como el método de compactificación vía Kaluza-Klein [2], en el cual, digamos el espacio 10-dimensional, es de la forma $\mathcal{M}_4 \times K_6$, donde $\mathcal{M}_4$ es un espacio-tiempo 4-dimensional observable y K_6 es un espacio interno compacto cuyo radio típico es del orden de ℓ_p . El uso de este método permite encontrar modelos de teorías de cuerdas a bajas energías que hacen contacto con el Modelo Estándar. Por ejemplo, cuando K_6 es una variedad Calabi-Yau (CY), al compactificar la cuerda heterótica, es posible obtener un modelo de gran unificación con grupo observable E_6 que contiene a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [3]. Esta clase de modelos también se encuentra cuando el espacio interno es un orbifold toroidal, definido como el cociente

de un toro T^6 por un grupo discreto. La compactificación de cuerdas en orbifolds es consistente, y además exactamente soluble [4, 5]. Los orbifolds toroidales se pueden considerar como una variedad CY singular [3].

En la clase de compactificaciones en la cual el grupo de calibre observable es E_6 el espectro está caracterizado por los números de generaciones y antigeneraciones que transforman respectivamente como $\mathbf{27}$ y $\overline{\mathbf{27}}$ de E_6 . Estos números a su vez están dados por los números de Hodge de la variedad CY según $N_{\mathbf{27}} = h_{12}$ y $N_{\overline{\mathbf{27}}} = h_{11}$. Originalmente se observó que la cantidad de modelos con valores dados de h_{12} y h_{11} era aproximadamente igual a la cantidad de modelos con los números intercambiados [3], y se conjeturó que dada una variedad CY X con números de Hodge h_{12} y h_{11} siempre existe una variedad espejo $\hat{X}$ en la cual $\hat{h}_{12} = h_{11}$ y $\hat{h}_{11} = h_{12}$. La conjetura ha sido demostrada y se conocen construcciones explícitas de $\hat{X}$ dada X [6]. Por ejemplo, para la compactificación en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con grupo observable E_6 , se había notado que al incluir torsión discreta (una fase relativa adicional en los términos de la función de partición [7]) se inducía un intercambio en el número de generaciones y antigeneraciones [8]. Luego se demostró en detalle que en efecto, el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con torsión discreta es la variedad espejo del mismo orbifold sin torsión discreta [9]. Por otra parte, se conoce que existen otras compactificaciones consistentes en las cuales el grupo observable es diferente de E_6 . Surge entonces el problema natural de estudiar simetría espejo en estos casos. El propósito de este trabajo es extender el estudio de la simetría espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 1 se presenta un resumen de los conocimientos básicos de las teorías de cuerdas bosónica, fermiónica y heterótica, orientada a la obtención del espectro y la función de partición. En el capítulo 2 se discute la compactificación de cuerdas en orbifolds. Inicialmente se definen los orbifolds y se muestran algunos ejemplos explícitos. Luego se describe la propagación de cuerdas en orbifolds toroidales con el fin de escribir la función de partición en estos espacios y extraer de ella propiedades del espectro. Por último, en el capítulo

3 se estudian las cuerdas heteróticas en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Primero se describe la geometría del orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Luego se clasifican todos los grupos de calibre permitidos por invariancia modular en el orbifold, tanto para la cuerda heterótica $SO(32)$ como $E_8 \times E_8$. Finalmente se calcula el espectro de masa nula para cada grupo con y sin torsión discreta, verificando si para cada modelo el número de estados en representaciones complejas se intercambia incluyendo torsión discreta no trivial.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE CUERDAS

En este capítulo se realiza un breve resumen sobre los conocimientos básicos en teoría de cuerdas, así como los aspectos más importantes de las cuerdas bosónica, fermiónica, y heterótica. Inicialmente se introduce la cuerda bosónica mostrando las simetrías de la teoría, el calibre usado, y las ecuaciones de movimiento. Luego se cuantizan los campos, y se halla el espectro. De igual forma se procede con la cuerda fermiónica. En la cuerda heterótica se describen los grados de libertad y se discute el espectro. El objetivo final es obtener la función de partición de estas teorías.

Los resultados que presentaremos están desarrollados más extensamente en varios libros de texto [1, 10, 11, 12], en los cuales se encuentran las referencias a la literatura original.

1.1. Cuerda Bosónica

Los objetos fundamentales a estudiar en teorías de cuerdas son curvas unidimensionales, llamadas cuerdas, las cuales se propagan en un espacio de Minkowski D -dimensional, con signatura $(-, +, \dots, +)$. Al igual que en la teoría de partículas

la acción que describe la teoría depende de la trayectoria seguida por la cuerda. Inicialmente se revisará, de forma breve, algunos aspectos fundamentales en la teoría de partículas antes de concentrarnos en las cuerdas.

Las partículas al propagarse trazan una línea, llamada línea de mundo. Esta línea se parametriza usando un parámetro t , llamado tiempo propio. El parámetro t debe incrementar desde la posición inicial hasta la posición final de la partícula. La parametrización está descrita por las funciones $X^\mu(t)$. La dinámica de la teoría no depende de la parametrización escogida, por lo que la acción tampoco lo hace. La acción es un invariante de Lorentz y depende de la trayectoria de la partícula. Dicha acción es proporcional a la longitud sobre la línea de mundo y está dada por

$$S = -mc \int_{t_i}^{t_f} ds = mc \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}} \quad (1.1)$$

donde $\dot{X}^\mu$ es la derivada de X^μ respecto a t , m es la masa de la partícula, c es la velocidad de la luz y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski con la signatura antes definida. Aquí $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$.

Una cuerda al propagarse traza una superficie, llamada superficie de mundo. Por ejemplo, una cuerda cerrada trazará un tubo mientras que una cuerda abierta traza una cinta. Las superficies en el espacio son dos dimensionales, por lo que para su parametrización se requieren dos parámetros t y σ . El parámetro $\sigma \in [0, 2\pi]$ es la coordenada a lo largo de la cuerda y el parámetro t se asocia con la evolución temporal. Para describir la superficie de mundo usamos las funciones $X^\mu(t, \sigma)$. En analogía con la partícula, la acción de la cuerda será proporcional al área de la superficie. Se obtiene así la acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -T \int_{t_i}^{t_f} \int_0^{2\pi} dA = -T \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-\dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu} - X'^2 \dot{X}^2} \quad (1.2)$$

donde

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \quad , \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (1.3)$$

La constante T es la tensión de la cuerda y se relaciona con la pendiente de Regge α' a través de

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}. \quad (1.4)$$

En unidades naturales $\hbar = c = 1$, T tiene dimensiones de $[\text{longitud}]^2$ ó $[\text{masa}]^{-2}$.

Definimos la métrica inducida en la superficie de mundo como

$$g_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

donde los índices a y b toman los valores de σ y t . Con esta definición podemos reescribir la acción (1.2) como

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-g}. \quad (1.6)$$

Aquí $g = \det g_{ab}$.

La acción de Nambu-Goto posee una raíz cuadrada. Para realizar la cuantización utilizando integrales de camino es conveniente encontrar una acción invariante bajo reparametrizaciones pero que no posea raíz cuadrada. Para hacer esto, se introduce la métrica en la superficie de mundo $h_{ab}(t, \sigma)$ y se postula la acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int dt \int d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

donde $h = \det h_{ab}$. De la ecuación (1.7) leemos el Lagrangiano de Polyakov

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler- Lagrange se encuentran las ecuaciones de movimiento

$$\partial_a (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_b X_\mu) = 0 \quad (1.9)$$

$$\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \eta_{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

A partir de $\mathcal{L}_P$ también se hallan los momentos conjugados

$$\mathcal{P}^{t\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}_\mu} \quad , \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial X'_\mu}. \quad (1.11)$$

Tomando el determinante de la ecuación (1.10) se obtiene

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{2} h^{ab} g_{ab} \sqrt{-h} \quad (1.12)$$

y sustituyendo en (1.7) se recupera (1.6). De esta manera, se muestra que la acción de Nambu-Goto y la acción de Polyakov son equivalentes clásicamente.

El Lagrangiano de Polyakov posee varias simetrías que se discuten a continuación.

- Invariancia bajo transformaciones de Poincaré en D dimensiones dadas por

$$\tilde{X}^\mu(t, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(t, \sigma) + a^\mu \quad (1.13)$$

$$\tilde{h}_{ab}(t, \sigma) = h_{ab}(t, \sigma) \quad (1.14)$$

donde Λ es una transformación de Lorentz y a es una traslación.

- Invariancia frente a reparametrizaciones dadas por

$$\tilde{X}^\mu(\tilde{t}, \tilde{\sigma}) = X^\mu(t, \sigma) \quad (1.15)$$

$$\tilde{h}_{ab}(\tilde{t}, \tilde{\sigma}) = \frac{\partial \xi^c}{\partial \tilde{\xi}^a} \frac{\partial \xi^d}{\partial \tilde{\xi}^b} h_{cd}(t, \sigma) \quad (1.16)$$

para nuevas coordenadas $\tilde{\xi}^a(t, \sigma)$.

- Invariancia frente a las transformaciones de Weyl

$$\tilde{X}^\mu(t, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) \quad (1.17)$$

$$\tilde{h}_{ab}(t, \sigma) = e^{2\omega(t, \sigma)} h_{ab}(t, \sigma). \quad (1.18)$$

La métrica h_{ab} tiene tres componentes independientes pero las simetrías implican que existe libertad de elegir un calibre en el cual h_{ab} se simplifica. La invariancia bajo reparametrizaciones permite eliminar dos de las tres componentes, mientras que la

invariancia frente a transformaciones de Weyl permite eliminar la última componente. Se concluye que podemos fijar h_{ab} como

$$h_{ab} = e^{2\Omega(t,\sigma)} \eta_{ab} \quad (1.19)$$

donde $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +)$. Esta escogencia es llamada el calibre conforme, ya que tal métrica es conformalmente plana, es decir plana excepto por un factor de escala.

En el calibre conforme las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \quad (1.20)$$

$$(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu)^2 = 0. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.20) es una ecuación de ondas. Mientras que la ecuación (1.21) son los llamados vínculos de Virasoro que deben satisfacer las derivadas de los campos X^μ .

Al variar la acción además de las ecuaciones de movimiento se encuentra el término de borde

$$\delta X^\mu X'^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=2\pi}. \quad (1.22)$$

Una forma de anular el término de borde es imponiendo que los campos X^μ satisfagan condiciones de contorno apropiadas. En este trabajo trataremos principalmente cuerdas cerradas en las cuales la condición de periodicidad de X^μ

$$X^\mu(t, \sigma) = X^\mu(t, \sigma + 2\pi) \quad (1.23)$$

garantiza que (1.22) se anule. También se pueden considerar cuerdas abiertas con condiciones tipo Neumann, por ejemplo $X'^\mu(t, \sigma) = 0$ en $\sigma = 0$, para un conjunto de coordenadas, $\mu = 0, \dots, p$, ó condiciones Dirichlet, $X^\mu(t, \sigma) = \tilde{x}^\mu$ ($\tilde{x}^\mu$ constante), para $\mu = p + 1, \dots, D - 1$. En $\sigma = 2\pi$ se pueden imponer condiciones similares. Estas condiciones significan que la cuerda tiene su extremo $\sigma = 0$ en una Dp -brana que es una superficie p -dimensional cuyo volumen de mundo está justamente definido por

$X^\mu(t, \sigma) = \tilde{x}^\mu$, para $\mu = p + 1, \dots, D - 1$. En este trabajo sólo consideramos cuerdas abiertas con condiciones

$$X'^\mu(t, 0) = X'^\mu(t, 2\pi) = 0 \quad , \quad \mu = 0, \dots, D - 1. \quad (1.24)$$

En este caso se dice que las cuerdas abiertas tienen los extremos en una D -brana que llena todo el espacio.

Al imponer (1.19) los momentos conjugados se reducen a

$$\mathcal{P}^{t\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad , \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \quad (1.25)$$

Además la ecuación de movimiento (1.20) se escribe

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{t\mu}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.26)$$

Esta ecuación y la condición de frontera (1.23) implican que el momento del centro de masa, definido como

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{P}^{t\mu} \quad (1.27)$$

es una constante de movimiento.

Al elegir (1.19) no se fijó completamente el calibre, ya que existen simetrías residuales. Se demuestra que un cambio de variables $\tilde{t} = \tilde{t}(t, \sigma)$ y $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, \sigma)$ deja invariante la forma de h_{ab} siempre que se cumpla

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

A su vez esto nos dice

$$\frac{\partial^2 \tilde{t}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{t}}{\partial \sigma^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (1.29)$$

De la ecuación (1.29) se observa que $\tilde{t}$ satisface una ecuación de ondas al igual que los campos X^μ . Por lo tanto se puede escoger una combinación lineal de los campos X^μ que sea proporcional a $\tilde{t}$, es decir $n_\mu X^\mu \propto \tilde{t}$. En el llamado calibre del cono de luz se

escoge $n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \dots, 1)$. Para describir este calibre es conveniente introducir las coordenadas del cono de luz definidas como

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}) \quad X^\pm = -X_\mp \quad (1.30)$$

$$X^j = X_j \quad j = 1, \dots, D-2. \quad (1.31)$$

En el calibre del cono de luz se elige la coordenada X^+ proporcional a t , es decir

$$X^+(t, \sigma) = \alpha' p^+ t \quad (1.32)$$

donde p^+ es el momento del centro de masa en la dirección de x^+ . Aquí se ha renombrado $\tilde{t} \rightarrow t$, $\tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$.

Usando el valor de X^+ , y los vínculos (1.21), podemos determinar X^- resolviendo

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^j \dot{X}^j + X'^j X'^j) \quad (1.33)$$

$$X'^- = \frac{1}{\alpha' p^+} (\dot{X}^j X'^j). \quad (1.34)$$

Una vez completa la fijación del calibre, las variables independientes son las coordenadas transversas X^j . En ellas está toda la dinámica de la teoría. Con estas variables se escribe una teoría efectiva con un Lagrangiano dado por

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{4\pi\alpha'} [\dot{X}^j \dot{X}^j - X'^j X'^j] \quad , \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.35)$$

donde $d = D - 2$. Los momentos conjugados son

$$\mathcal{P}^{tj} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^j \quad , \quad \mathcal{P}^{\sigma j} = \frac{1}{2\pi\alpha'} X'^j. \quad (1.36)$$

El Hamiltoniano es

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\mathcal{P}^{tj} \dot{X}^j - \mathcal{L}_{eff} \right) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\dot{X}^j \dot{X}^j + X'^j X'^j \right). \quad (1.37)$$

Usando (1.33) se observa que

$$H = \alpha' p^+ p^- \quad (1.38)$$

donde p^- es el momento del centro de masa en la dirección x^- .

Las coordenadas transversas X^j , $j = 1, \dots, d$, satisfacen la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 X^j}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (1.39)$$

La solución general de (1.39) es la superposición de modos normales de oscilación que se propagan a lo largo de la cuerda, es decir

$$X^j(t, \sigma) = X_L^j(t + \sigma) + X_R^j(t - \sigma) \quad (1.40)$$

donde L y R denotan propagación en la dirección $-\sigma$ y $+\sigma$, respectivamente. Resolviendo las ecuaciones de movimiento con condiciones de frontera de periodicidad (1.23) se encuentra que X_R y X_L están dados por

$$X_R^j(t - \sigma) = \frac{1}{2}X_0^j + \frac{\alpha'}{2}p^j(t - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^j}{n} e^{-in(t - \sigma)} \quad (1.41)$$

$$X_L^j(t + \sigma) = \frac{1}{2}X_0^j + \frac{\alpha'}{2}p^j(t + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^j}{n} e^{-in(t + \sigma)} \quad (1.42)$$

donde X_0^j es la posición del centro de masa, p^j es el momento del centro de masa en la dirección x^j , y los α_n^j , $\tilde{\alpha}_n^j$ son constantes. Como $X^j(t, \sigma)$ es real se debe cumplir

$$\alpha_n^{*j} = \alpha_{-n}^j, \quad \tilde{\alpha}_n^{*j} = \tilde{\alpha}_{-n}^j. \quad (1.43)$$

La solución (1.40) también se puede aplicar a cuerdas abiertas pero al imponer las condiciones de frontera se encuentra que α_n^j y $\tilde{\alpha}_n^j$ no son independientes.

A continuación nos concentraremos en cuerdas cerradas. La solución general de la ecuación de movimiento está dada por

$$X^j(t, \sigma) = X_0^j + \alpha' p^j t + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[\sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^j}{n} e^{-in(t - \sigma)} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^j}{n} e^{-in(t + \sigma)} \right]. \quad (1.44)$$

Sustituyendo en (1.36) hallamos los momentos conjugados

$$\mathcal{P}^{tj} = \frac{p^j}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \left[\sum_{n \neq 0} \alpha_n^j e^{-in(t-\sigma)} + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^j e^{-in(t+\sigma)} \right] \quad (1.45)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma j} = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \left[\sum_{n \neq 0} \alpha_n^j e^{-in(t-\sigma)} - \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^j e^{-in(t+\sigma)} \right]. \quad (1.46)$$

Similarmente se encuentra el Hamiltoniano

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^j p^j + \sum_{n \neq 0} (\alpha_n^j \alpha_{-n}^j + \tilde{\alpha}_n^j \tilde{\alpha}_{-n}^j). \quad (1.47)$$

Nótese que H es constante.

Ahora pasamos al proceso de cuantización canónica en el cual los campos se promueven a operadores. Las variables conjugadas son X^j con $\mathcal{P}^{tj}$ y X_0^- con p^+ . A estos operadores se les imponen las reglas de conmutación

$$[X^i(t, \sigma), \mathcal{P}^{tj}(t, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma') \eta^{ij} \quad (1.48)$$

$$[X_0^-, p^+] = -i. \quad (1.49)$$

Sustituyendo (1.44) y (1.45), se obtienen los siguientes conmutadores distintos de cero

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m \delta_{n+m,0} \eta^{ij}, \quad [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m \delta_{n+m,0} \eta^{ij} \quad (1.50)$$

$$[X_0^i, p^j] = i\eta^{ij}. \quad (1.51)$$

Los α_n^j y $\tilde{\alpha}_n^j$ son ahora operadores y la condición de realidad (1.43) se traduce en

$$\alpha_n^{\dagger j} = \alpha_{-n}^j, \quad \tilde{\alpha}_n^{\dagger j} = \tilde{\alpha}_{-n}^j. \quad (1.52)$$

Las relaciones de conmutación (1.50) significan entonces que los $\alpha_n^j, \tilde{\alpha}_n^j$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ son operadores de aniquilación y los $\alpha_{-n}^j, \tilde{\alpha}_{-n}^j$ son operadores de creación.

En analogía con el oscilador armónico definimos el estado base $|0, p\rangle$ de la teoría como

$$\alpha_n^j |0, p\rangle = 0, \quad \tilde{\alpha}_n^j |0, p\rangle = 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.53)$$

El espacio de estados se construye haciendo actuar a los operadores de creación sobre el estado base. Como los operadores de creación y aniquilación no conmutan, es necesario establecer un orden en los productos. Convencionalmente se emplea el ordenamiento normal, denotado $::$, en el cual todos los operadores de aniquilación se mueven a la derecha utilizando las relaciones de conmutación. Por ejemplo, para el Hamiltoniano (1.47) se encuentra

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^j p^j + N_L + N_R + a \quad (1.54)$$

donde se han definido los operadores de número

$$N_R = \sum_{n=1}^{\infty} : \alpha_{-n}^j \alpha_n^j : \quad , \quad N_L = \sum_{n=1}^{\infty} : \tilde{\alpha}_{-n}^j \tilde{\alpha}_n^j : . \quad (1.55)$$

La constante a se obtiene al hacer el ordenamiento normal. De esta manera se encuentra

$$a = (D - 2) \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (1.56)$$

Este término corresponde a la suma de la energía de vacío de los osciladores y debe ser regularizado como discutiremos más adelante.

Convencionalmente se escribe el Hamiltoniano como

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 \quad (1.57)$$

donde L_0 y $\tilde{L}_0$ son los operadores de Virasoro de orden cero. De acuerdo a (1.54) están dados por

$$L_0 \equiv \frac{\alpha'}{4} p^j p^j + N_R + \frac{a}{2} \quad , \quad \tilde{L}_0 \equiv \frac{\alpha'}{4} p^j p^j + N_L + \frac{a}{2}. \quad (1.58)$$

En la teoría de cuerdas cerradas es también importante el operador de traslaciones en σ , denotado por P_σ . En analogía con $[H, X^j(t, \sigma)] = -i\partial_t X^j(t, \sigma)$, se define

$$[P_\sigma, X^j(t, \sigma)] = -i\partial_\sigma X^j(t, \sigma). \quad (1.59)$$

Se encuentra que

$$P_\sigma = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{P}^{tj} X'^j = L_0 - \tilde{L}_0 = N_R - N_L. \quad (1.60)$$

Ahora, la teoría de cuerdas cerradas debe ser invariante bajo traslaciones en σ . Para obtener un espacio de estados físicos donde se cumpla esta condición se requiere que P_σ aniquile a los estados físicos. De (1.60) se observa entonces que sólo los estados que satisfacen la condición de igualdad de nivel

$$N_R = N_L \quad (1.61)$$

permanecen en el espectro físico.

Para obtener la masa de los estados físicos se utiliza la relación

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p^j p^j. \quad (1.62)$$

Usando (1.38) y (1.54) en (1.62), se obtiene

$$\frac{\alpha'}{2} M^2 = N_L + N_R + a. \quad (1.63)$$

Como los modos derechos e izquierdos son independientes podemos escribir

$$\frac{\alpha'}{2} M^2 = \frac{\alpha'}{2} M_L^2 + \frac{\alpha'}{2} M_R^2 \quad (1.64)$$

donde M_L^2 y M_R^2 están definidos por

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + \frac{a}{2} \quad , \quad \frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{a}{2}. \quad (1.65)$$

Nótese que la condición de igualdad de nivel (1.61) se traduce en $M_L^2 = M_R^2$.

La constante de ordenamiento normal a se puede regularizar usando la función ζ de Riemann dada por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad , \quad \text{Re } z < 1. \quad (1.66)$$

Nos interesa el valor $\zeta(-1)$ que se obtiene haciendo la continuación analítica de (1.66).

Se encuentra $\zeta(-1) = -1/12$. Sustituyendo en (1.56) se deduce

$$a = -\frac{(D-2)}{12}. \quad (1.67)$$

Nivel ($N_L = N_R$)	$\frac{\alpha'}{2}M^2$	Estados	Degeneración
0	-2	$ 0, p\rangle$	1
1	0	$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j 0, p\rangle$	576
2	2	$\alpha_{-2}^i \tilde{\alpha}_{-2}^j 0, p\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-2}^k 0, p\rangle$ $\alpha_{-2}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k 0, p\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l 0, p\rangle$	104976

Tabla 1.1: Espectro cuerda cerrada.

Este valor de a también se comprueba verificando el álgebra de los generadores del grupo de Lorentz en el calibre del cono de luz. De hecho se encuentra $a = -2$ y $D = 26$ [1].

Una forma alternativa de verificar invariancia bajo transformaciones de Lorentz en D dimensiones es hallar el espectro de estados físicos y comprobar que los estados en cada nivel de masa se reorganizan en representaciones del grupo de Lorentz. En efecto, invariancia bajo transformaciones de Lorentz requiere que los estados formen representaciones del pequeño grupo que deja invariante al momento lineal característico. Para partículas masivas el pequeño grupo es $SO(D - 1)$ que deja fijo $p_\mu = (m, 0, \dots, 0)$. Para partículas de masa nula el pequeño grupo es $SO(D - 2)$ que deja invariante a $p_\mu = (E, 0, \dots, 0, E)$.

Consideremos los estados en primer nivel de excitación, $N_L = N_R = 1$, dados por

$$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, p\rangle. \quad (1.68)$$

Estos estados poseen masa $\frac{\alpha'}{2}M^2 = 2 + a$ y $(D - 2)^2$ componentes independientes. Estas componentes independiente forman una representación de $SO(D - 2)$ sólo si $M = 0$. Esto nos dice que

$$a = -2 \quad , \quad D = 26. \quad (1.69)$$

En la tabla 1.1 se muestran los primeros estados del espectro. El estado base $|0, p\rangle$ tiene $M^2 < 0$ y corresponde a un taquión. En el primer nivel de excitación hay $(D-2)^2$ componentes independientes que corresponden a los grados de libertad de un tensor de rango dos de $SO(D-2)$. Estos grados de libertad se descomponen en representaciones irreducibles según el producto tensorial

$$(D-2) \otimes (D-2) = 1 \oplus \left(\frac{D(D-3)}{2} \right) \oplus \left[\frac{(D-2)(D-3)}{2} \right] \quad (1.70)$$

donde el 1 corresponde al grado de libertad de un campo escalar ϕ llamado dilatón, los $\left(\frac{D(D-3)}{2} \right)$ corresponden a los grados de libertad on-shell de un tensor de rango 2 completamente simétrico de traza cero $g_{\mu\nu}$ llamado gravitón y los $\left[\frac{(D-2)(D-3)}{2} \right]$ corresponden a los grados de libertad on-shell de un tensor de rango 2 completamente antisimétrico $B_{\mu\nu}$ llamado la 2-forma de Kalb-Ramond.

Para finalizar esta sección discutiremos brevemente la cuerda bosónica abierta con condiciones de frontera (1.24). Estas condiciones de frontera implican que sólo los operadores α_n^j son independientes. En consecuencia sólo hay un operador de número $N = \sum_{n=1}^{\infty} : \alpha_{-n}^j \alpha_n^j :$. Se encuentra que el operador Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^j p^j + N - 1 \quad (1.71)$$

donde la constante -1 surge al ordenar normalmente los operadores α_n^j . Además, la masa de los estados físicos viene dada por

$$\alpha' M^2 = N - 1. \quad (1.72)$$

En la tabla 1.2 se muestran algunos estados. El estado base $|0, p\rangle$ tiene masa $M^2 < 0$ y es un taquión. En el primer nivel de excitación $N = 1$ sólo hay $(D-2)$ componentes independientes correspondientes al estado $\alpha_{-1}^j |0, p\rangle$, el cual es un vector de $SO(D-2)$. El campo asociado al estado $\alpha_{-1}^j |0, p\rangle$ es un vector de masa nula A_μ .

Nivel N	$\alpha' M^2$	Estados	Degeneración
0	-1	$ 0, p\rangle$	1
1	0	$\alpha_{-1}^j 0, p\rangle$	24
2	1	$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0, p\rangle$ $\alpha_{-2}^i 0, p\rangle$	324
3	2	$\alpha_{-3}^j 0, p\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k 0, p\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-2}^j 0, p\rangle$	3200

Tabla 1.2: Espectro cuerda abierta.

1.2. Cuerda Fermiónica

Hasta ahora se han discutido cuerdas bosónicas, cuyos grados de libertad están descritos por variables bosónicas $X^\mu(t, \sigma)$. En el espectro se encontró un estado de masa negativa debido a las energías de vacío de los infinitos osciladores. Además, en el espectro no hay candidatos a partículas fermiónicas, ya que sólo aparecen estados bosónicos correspondientes a tensores en D -dimensiones. Estos problemas se pueden resolver introduciendo grados de libertad fermiónicos $\Psi^\mu(t, \sigma)$. De este modo se logra elevar la energía del punto cero, y también obtener en el espectro tanto bosones como fermiones. Los grados de libertad fermiónicos se pueden introducir siguiendo el formalismo de Neveu-Schwarz-Ramond (NSR) en el cual los campos $\Psi^\mu(t, \sigma)$ son espinores Majorana en las dos dimensiones de la superficie de mundo. La acción de la cuerda fermiónica en el cono de luz resulta ser [10]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \iint dt d\sigma \left[\partial^a X^j \partial_a X_j - i \bar{\Psi}^j \rho^a \partial_a \Psi^j \right] \quad , \quad j = 1, \dots, D-2 \quad (1.73)$$

donde $\Psi^j(t, \sigma) = \begin{pmatrix} \psi^j \\ \tilde{\psi}^j \end{pmatrix}$, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \rho^0$, y ρ^a son matrices de Dirac en dos dimensiones dadas por

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

La parte dependiente de $X^j(t, \sigma)$ en S es idéntica a la acción de la cuerda bosónica, por lo que nos concentraremos en el desarrollo de la parte fermiónica.

Al variar la acción, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$(\partial_\sigma - \partial_t) \tilde{\psi}^j = 0, \quad (\partial_\sigma + \partial_t) \psi^j. \quad (1.75)$$

Nótese que entonces $\tilde{\psi}^j = \tilde{\psi}^j(t + \sigma)$ y por lo tanto los $\tilde{\psi}^j$ son modos izquierdos (L) que se propagan en la dirección $-\sigma$. Similarmente, $\psi^j = \psi^j(t - \sigma)$ por lo que los ψ^j son modos derechos (R) que se propagan en la dirección σ . Al variar S también se encuentra un término de borde asociado a las variables espinoriales, dado por

$$(\psi^j \delta \psi^j - \tilde{\psi}^j \delta \tilde{\psi}^j) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=2\pi}. \quad (1.76)$$

Para cancelar este término de superficie es necesario imponer condiciones de contorno. En el caso de campos fermiónicos en principio es posible considerar condiciones periódicas ó antiperiódicas, es decir

$$\psi^j(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\alpha} \psi^j(t, \sigma), \quad \tilde{\psi}^j(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\alpha} \tilde{\psi}^j(t, \sigma) \quad (1.77)$$

donde $\alpha = 0, 1/2$. Veremos que para obtener estados bosónicos y fermiónicos en el espectro hay que incluir ambos valores de α . La condición antiperiódica ($\alpha = 0$) da lugar al sector Neveu-Schwarz (NS) mientras que la condición periódica ($\alpha = 1/2$) origina el sector Ramond (R) [13, 14]. En cuerdas cerradas se imponen las condiciones a los modos L y R independientemente.

Las soluciones de las ecuaciones en (1.75) con las condiciones de contorno (1.77) son

$$\psi^j(t, \sigma) = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \alpha} b_r^j e^{-is(t-\sigma)}, \quad \tilde{\psi}^j(t, \sigma) = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \alpha} \tilde{b}_r^j e^{-is(t+\sigma)}. \quad (1.78)$$

Como Ψ^j es un espinor Majorana las componentes ψ^j y $\tilde{\psi}^j$ deben ser reales por lo que se debe cumplir que

$$b_r^{j*} = b_{-r}^j \quad , \quad \tilde{b}_r^{j*} = \tilde{b}_{-r}^j. \quad (1.79)$$

Al cuantizar, los coeficientes b_r^j y $\tilde{b}_r^j$ en (1.78) pasan a ser operadores que satisfacen las relaciones de anticonmutación dadas por [10]

$$\{b_r^i, b_s^j\} = \delta^{ij} \delta_{r+s,0} \quad , \quad \{\tilde{b}_r^i, \tilde{b}_s^j\} = \delta^{ij} \delta_{r+s,0} \quad , \quad r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \alpha. \quad (1.80)$$

Las condiciones de realidad (1.79) se traducen en

$$b_r^{j\dagger} = b_{-r}^j \quad , \quad \tilde{b}_r^{j\dagger} = \tilde{b}_{-r}^j. \quad (1.81)$$

Las relaciones de anticonmutación (1.80) significan entonces que los $b_r^j, \tilde{b}_r^j$ para $r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2} - \alpha$ son operadores de aniquilación y los $b_{-r}^j, \tilde{b}_{-r}^j$ para $r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2} - \alpha$ son operadores de creación.

Para construir el espectro de la teoría es conveniente considerar separadamente los estados provenientes de los modos derechos (R) e izquierdos (L). El tratamiento de los estados L es similar al de los estados R . Discutiremos los modos R correspondientes a $\psi^j(t - \sigma)$, y también a $X_R^j(t - \sigma)$. En este caso los operadores relevantes son b_r^j y α_n^j , que conmutan entre sí.

A continuación discutiremos el sector Neveu-Schwarz y el sector Ramond de los modos R .

- Sector Neveu-Schwarz ($\alpha = 0$).

Ahora se define el estado base $|0\rangle_{NS}$ como

$$\alpha_n^j |0\rangle_{NS} = 0 \quad , \quad b_r^j |0\rangle_{NS} = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad , \quad \forall r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2}. \quad (1.82)$$

los estados excitados se obtienen actuando sobre $|0\rangle_{NS}$ con operadores de creación. La masa de estos estados está dada por

$$\frac{\alpha'}{2}M_R^2 = N_R^{(0)} + N_R + a_0 \quad (1.83)$$

donde se ha definido el operador de número de los osciladores b_r^j como

$$N_R^{(0)} = \sum_{r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2}} : r b_{-r}^j b_r^j : \quad (1.84)$$

$N_R^{(0)}$ toma los valores $N_R^{(0)} = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$. El operador N_R es el operador de número para los osciladores bosónicos α_n^j definido en (1.55). La constante a_0 surge al realizar el ordenamiento normal y está dada por

$$a_0 = \frac{(D-2)}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (1.85)$$

donde la primera suma es la contribución de los osciladores bosónicos y la segunda suma es la contribución de los osciladores fermiónicos. Utilizando la regularización

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+v) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}v(1-v) \quad , \quad 0 < v < 1 \quad (1.86)$$

se obtiene

$$a_0 = -\frac{(D-2)}{16}. \quad (1.87)$$

Invariancia bajo transformaciones de Lorentz requiere que los estados formen representaciones del pequeño grupo. Por ejemplo, el estado $b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}$ posee masa $\frac{\alpha'}{2}M_R^2 = \frac{1}{2} + a_0$ y $(D-2)$ componentes independientes. Estos estados forman una representación irreducible del pequeño grupo sólo si $M = 0$, lo que implica

$$a_0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad D = 10. \quad (1.88)$$

Al fijar la dimensión como $D = 10$ el pequeño grupo resulta ser $SO(8)$. Algunos estados se muestran en la tabla 1.3. El primer estado es el base $|0\rangle_{NS}$ y tiene $M_R^2 < 0$.

$\frac{\alpha'}{2} M_R^2$	Estados	Degeneración	$(-1)^{F_R}$
$-\frac{1}{2}$	$ 0\rangle_{NS}$	1	-1
0	$b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS}$	8	1
$\frac{1}{2}$	$\alpha_{-1}^j 0\rangle_{NS}$	8	-1
	$b_{-\frac{1}{2}}^i b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS}$	28	-1
1	$b_{-\frac{3}{2}}^j 0\rangle_{NS}$	8	1
	$\alpha_{-1}^i b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS}$	64	1
	$b_{-\frac{1}{2}}^i b_{-\frac{1}{2}}^j b_{-\frac{1}{2}}^k 0\rangle_{NS}$	56	1

Tabla 1.3: Estados derechos en el sector Neveu-Schwarz.

El primer nivel de excitación tiene 8 componentes independientes que corresponde al estado $b_{-\frac{1}{2}}^j |0\rangle_{NS}$.

Definimos el operador $(-1)^{F_R}$ cuyo valor es +1 si el estado es bosónico y -1 si es fermiónico. El operador F_R es el número fermiónico y cuenta el número de osciladores fermiónicos actuando sobre el estado base, para osciladores bosónicos su valor es cero. Para calcular $(-1)^{F_R}$ es necesario especificar su acción sobre el estado base. Se define

$$(-1)^{F_R} |0\rangle_{NS} \equiv -|0\rangle_{NS}. \quad (1.89)$$

Este operador nos será útil cuando se realice la proyección GSO.

- Sector Ramond ($\alpha = 1/2$).

En este sector las frecuencias de los osciladores son números enteros. El operador número $N_R^{(\frac{1}{2})}$ se define como

$$N_R^{(\frac{1}{2})} = \sum_{r=0}^{\infty} : r b_{-r}^j b_r^j : \quad (1.90)$$

y toma los valores $N_R^{(\frac{1}{2})} = 0, 1, 2, \dots$. La masa de los estados viene dada por

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R^{(\frac{1}{2})} + N_R + a_{\frac{1}{2}}. \quad (1.91)$$

La constante de ordenamiento normal $a_{\frac{1}{2}}$ en este sector es

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{(D-2)}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n - \sum_{n=0}^{\infty} n \right\} = 0. \quad (1.92)$$

El estado de menor masa, que ocurre cuando $N_R = 0$ y $N_R^{(\frac{1}{2})} = 0$, es degenerado ya que los operadores b_0^j satisfacen la relación de anticonmutación

$$\{b_0^i, b_0^j\} = \delta^{ij}. \quad (1.93)$$

El oscilador b_0^j es como una matriz de Dirac en 8-dimensiones y actúa sobre espinores de Dirac 16-dimensionales. Se concluye que el estado de menor masa en este sector transforma como un espinor de Dirac de $SO(8)$. Este espinor posee 16 componentes y es la suma directa de dos espinores Weyl de $SO(8)$ ¹, es decir

$$\mathbf{16_D} = \mathbf{8_s} \oplus \mathbf{8_c}. \quad (1.94)$$

En este sector hay entonces dos estados base $|\mathbf{S}\rangle$ y $|\mathbf{C}\rangle$. El estado $|\mathbf{S}\rangle$ transforma en la representación $\mathbf{8_s}$ y el estado $|\mathbf{C}\rangle$ transforma en la representación $\mathbf{8_c}$ de $SO(8)$.

Algunos estados excitados se muestran en la tabla 1.4. En todos los niveles de excitación los estados transforman en representaciones de $SO(8)$. Por ejemplo, el estado $\alpha_{-1}^j |\mathbf{S}\rangle$, considerando que α_{-1}^j transforma en la representación vectorial $\mathbf{8_v}$, transforma en la representación

$$\mathbf{8_v} \otimes \mathbf{8_s} = \mathbf{8_c} \oplus \mathbf{56_c} \quad (1.95)$$

donde $\mathbf{56_s}$ es un espinor-vector de $SO(8)$. Al igual que en el sector NS queremos especificar la acción de $(-1)^{F_R}$ sobre los estados base. Se define

$$(-1)^{F_R} |\mathbf{S}\rangle \equiv |\mathbf{S}\rangle \quad , \quad (-1)^{F_R} |\mathbf{C}\rangle \equiv -|\mathbf{C}\rangle. \quad (1.96)$$

¹Algunas propiedades de representaciones de $SO(8)$ se discuten en el apéndice A

$\frac{\alpha'}{2} M_R^2$	Estados	Degeneración	$(-1)^{F_R}$
0	$ \mathbf{S}\rangle$	8	1
	$ \mathbf{C}\rangle$	8	-1
1	$\alpha_{-1}^j \mathbf{S}\rangle$	64	1
	$b_{-1}^j \mathbf{C}\rangle$	64	1
	$b_{-1}^j \mathbf{S}\rangle$	64	-1
	$\alpha_{-1}^j \mathbf{C}\rangle$	64	-1

Tabla 1.4: Estados derechos en el sector Ramond.

Gliozzi, Scherk, y Olive sugirieron truncar el espectro, de forma tal que se eliminaran los estados de masa negativa y se garantizara igual número de estados en el sector NS como en el sector R [15]. A este truncamiento se le conoce como la proyección GSO. La proyección GSO en el sector NS es tal que los estados físicos son aquellos con $(-1)^{F_R} = 1$. Por ejemplo, de esta manera se elimina al estado $|0\rangle_{NS}$ que tiene $(-1)^{F_R} = -1$. En el sector R se elige a los estados con $(-1)^{F_R} = 1$. En este caso, como se observa en la tabla 1.4, se elimina al estado $|\mathbf{C}\rangle$, y a los 128 estados $b_{-1}^j |\mathbf{S}\rangle$ y $\alpha_{-1}^j |\mathbf{C}\rangle$. Se demuestra que al hacer la proyección GSO hay igual número de estados por nivel de masa en el sector NS y en el sector R.

El desarrollo anterior es completamente análogo para los modos L . En particular en el sector L se define el operador $(-1)^{F_L}$ y los resultados son similares a los mostrados en las tablas 1.3 y 1.4. Para obtener los estados en el espectro se hace el producto tensorial $R \otimes L$, y se impone la condición de igualdad de nivel

$$M_L^2 = M_R^2. \quad (1.97)$$

En el producto $R \otimes L$ se generan cuatro sectores, combinando los sectores (NS ó R) de

Sector	Estados	Representación de $SO(8)$	Campos
(NS+, NS+)	$b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS} \otimes \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS}$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{28}_a \oplus \mathbf{35}_v$	$\phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus g_{\mu\nu}$
(R+, R-)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{\mathbf{C}}\rangle$	$\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{56}_v$	$A_\mu \oplus A_{[\mu\nu\rho]}$
(R+, NS+)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS}$	$\mathbf{8}_c \oplus \mathbf{56}_c$	$\psi^- \oplus \psi_\mu^-$
(NS+, R-)	$b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS} \otimes \tilde{\mathbf{C}}\rangle$	$\mathbf{8}_s \oplus \mathbf{56}_s$	$\psi^+ \oplus \psi_\mu^+$

Tabla 1.5: Espectro de masa nula cuerda tipo IIA.

los modos derechos R con los sectores (NS ó R) de los modos izquierdos L , resultando

$$\text{sector } (R, L) : (\text{NS}, \text{NS}), (\text{NS}, \text{R}), (\text{R}, \text{NS}), (\text{R}, \text{R}). \quad (1.98)$$

Los estados bosónicos surgen de los sectores (NS, NS) y (R, R). Los estados fermiónicos surgen de los sectores (NS, R) y (R, NS). Con el fin de obtener una teoría de cuerdas cerradas libre de taquiones y con espectro supersimétrico se debe realizar la proyección GSO en ambos sectores L y R . En el sector (NS, NS) se eligen a los estados $(-1)^{F_L} = (-1)^{F_R} = 1$, garantizando así la ausencia de taquiones. Para los sectores R existen dos posibles elecciones para garantizar supersimetría. En la cuerda tipo IIA se escoge $(-1)^{F_R} = 1$ y $(-1)^{F_L} = -1$. En este caso se tienen los sectores

$$\text{Tipo IIA} : (\text{NS+}, \text{NS+}), (\text{R+}, \text{NS+}), (\text{NS+}, \text{R-}), (\text{R+}, \text{R-}) \quad (1.99)$$

donde los signos indican los autovalores de $(-1)^{F_L}$ y $(-1)^{F_R}$. En la cuerda tipo IIB se eligen $(-1)^{F_L} = (-1)^{F_R} = 1$, y se tienen los sectores

$$\text{Tipo IIB} : (\text{NS+}, \text{NS+}), (\text{NS+}, \text{R+}), (\text{R+}, \text{NS+}), (\text{R+}, \text{R+}). \quad (1.100)$$

En las tablas 1.5 y 1.6 se muestran el espectro de masa nula de la cuerda tipo IIA y tipo IIB, respectivamente. Los estados fermiónicos en cada tipo aparecen en los sectores (NS, R) y (R, NS). Para la cuerda tipo IIA los campos fermiónicos incluyen dos espinores Weyl de quiralidades opuestas ψ^+ y ψ^- , los cuales transforman en las

Sector	Estados	Representación de $SO(8)$	Campos
(NS+, NS+)	$b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS} \otimes \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS}$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{28}_a \oplus \mathbf{35}_v$	$\phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus g_{\mu\nu}$
(R+, R+)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{\mathbf{S}}\rangle$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{28}_a \oplus \mathbf{35}_s$	$A \oplus A_{\mu\nu} \oplus \tilde{A}_{[\mu\nu\rho\sigma]}$
(R+, NS+)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS}$	$\mathbf{8}_c \oplus \mathbf{56}_c$	$\psi^- \oplus \psi_\mu^-$
(NS+, R+)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS}$	$\mathbf{8}_c \oplus \mathbf{56}_c$	$\tilde{\psi}^- \oplus \tilde{\psi}_\mu^-$

Tabla 1.6: Espectro de masa nula cuerda tipo IIB.

representaciones $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$ de $SO(8)$ respectivamente, y dos espinores-vectores Rarita-Schwinger de quiralidades opuestas ψ_μ^+ y ψ_μ^- , que transforman en las representaciones de $\mathbf{56}_s$ y $\mathbf{56}_c$ de $SO(8)$. Para la cuerda tipo IIB aparecen únicamente dos espinores Weyl ψ^- y $\tilde{\psi}^-$, y dos espinores-vectores ψ_μ^- y $\tilde{\psi}_\mu^-$. El gravitón $g_{\mu\nu}$, la 2-forma de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ y el dilatón ϕ aparecen en el sector (NS,NS). El resto de los campos bosónicos surge del sector (R,R). Para la cuerda tipo IIA estos son un vector A_μ que transforma en la representación $\mathbf{8}_v$ de $SO(8)$ y un tensor de rango tres completamente antisimétrico $A_{[\mu\nu\rho]}$ que transforma en la representación $\mathbf{56}_v$ de $SO(8)$. Para la cuerda tipo IIB son un campo escalar A , un tensor de rango 2 completamente antisimétrico $A_{\mu\nu}$ que transforma en la representación $\mathbf{28}_a$ de $SO(8)$, y un tensor de rango 4 completamente antisimétrico auto-dual $\tilde{A}_{[\mu\nu\rho\sigma]}$ que transforma en la representación $\mathbf{35}_s$. Se concluye entonces que a bajas energías se tiene una teoría de supergravedad $\mathcal{N} = 2$ quirál para la cuerda tipo IIB, y no quirál para la cuerda tipo IIA.

1.3. Función de Partición

El espectro de una teoría cuerdas se puede determinar a partir de la función de partición $\mathcal{Z}$ de la teoría. Recordemos que $\mathcal{Z}$ contiene la degeneración por nivel de energía E , es decir contiene toda la información sobre el espectro. Inicialmente

revisaremos brevemente las definiciones básicas de la función de partición en mecánica estadística [16].

En mecánica estadística la función de partición se define como

$$\mathcal{Z} = \sum_{E_s} d(E_s) e^{-\frac{E_s}{K_B T}} \quad (1.101)$$

donde E_s es la energía del estado s , K_B es la constante de Boltzman, T es la temperatura y $d(E_s)$ es la degeneración por nivel de energía E_s . Formalmente en mecánica cuántica la función de partición es

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\frac{H}{K_B T}} \quad (1.102)$$

donde H es el operador Hamiltoniano y la traza es tomada sobre todo el espacio de estados. Este formalismo será usado para hallar la función de partición de la cuerda bosónica y de la cuerda fermiónica.

1.3.1. Función de Partición Bosónica

La función de partición de la cuerda bosónica abierta es

$$\mathcal{Z}(q) = \text{Tr} q^{L_0} \quad (1.103)$$

donde q es un parámetro usado para contar ($q \longleftrightarrow e^{-\frac{1}{K_B T}}$), la traza es tomada sobre el espacio de estados creado por la acción de los operadores de creación α_{-n}^j en el estado base. En la cuerda abierta el operador de Virasoro L_0 coincide con el Hamiltoniano y está dado por

$$L_0 = H = \frac{\alpha'}{2} p^j p^j + N - 1. \quad (1.104)$$

Sustituyendo L_0 en (1.103) obtenemos

$$\mathcal{Z}(q) = \text{Tr} q^{\frac{\alpha'}{2} p^j p^j} q^{N-1}. \quad (1.105)$$

Consideremos $\text{Tr } q^{N-1}$. Esta traza es llamada la función generadora y viene dada por

$$\tilde{\mathcal{Z}}(q) = \text{Tr } q^{N-1} = \text{Tr } q^{\alpha' M^2} = q^{-1} (1 + 24q + 324q^2 + \dots). \quad (1.106)$$

El primer término en la suma proviene del estado $|0, p\rangle$, el siguiente proviene de los 24 estados $\alpha_{-1}^j |0, p\rangle$, y así sucesivamente. La degeneración de los estados se muestra en la tabla 1.2. El resultado (1.106) se puede escribir como

$$\tilde{\mathcal{Z}}(q) = q^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-24} = \frac{1}{\eta^{24}(q)}. \quad (1.107)$$

La función $\eta(q)$ es llamada la función eta de Dedekind y se define como

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \quad (1.108)$$

Para la cuerda cerrada la función de partición es

$$\mathcal{Z} = \text{Tr } q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0} \quad (1.109)$$

donde los operadores L_0 y $\tilde{L}_0$ son los operadores de Virasoro de orden cero definidos en (1.58). El parámetro q se define como $q = e^{2i\pi\tau}$ con $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, y $\bar{q} = e^{-2i\pi\bar{\tau}}$. Sustituyendo los valores de L_0 , $\tilde{L}_0$, q , y $\bar{q}$, se obtiene

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \left(\text{Tr } e^{-2i\pi\alpha'\tau_2 p^2} \right) \text{Tr } q^{N_R-1} \bar{q}^{N_L-1} \quad (1.110)$$

donde hemos definido $p^j p^j \equiv p^2$, $j = 1, \dots, d$. La traza sobre los momentos libres está dada por

$$\text{Tr } e^{-2i\pi\alpha'\tau_2 p^2} = V_d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-2i\pi\alpha'\tau_2 p^2} = \frac{V_d}{(4\pi^2\alpha'\tau_2)^{\frac{d}{2}}}. \quad (1.111)$$

donde el factor de volumen V_d aparece al pasar de una suma a la integral en la traza. En la cuerda bosónica, $d = 24$. El término restante en la función de partición es la función generadora de los modos R y L , respectivamente. Usando el resultado obtenido en (1.107) se encuentra

$$\text{Tr } q^{N_R-1} \bar{q}^{N_L-1} = \frac{1}{\eta^{24}(\tau)} \frac{1}{\bar{\eta}^{24}(\bar{\tau})} = (q\bar{q})^{-1} (1 + 24q + 24\bar{q} + 576q\bar{q} + \dots). \quad (1.112)$$

Finalmente la función de partición para la cuerda bosónica cerrada está dada por [11, 17]

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{V_{24}}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{12}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^{48}}. \quad (1.113)$$

1.3.2. Invariancia Modular

La función de partición (1.113) tiene la propiedad de ser invariante bajo transformaciones modulares

$$\tau \mapsto \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad ; \quad ad - cb = 1. \quad (1.114)$$

Estas transformaciones forman el grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ generado por las transformaciones $\mathcal{T} : \tau \mapsto \tau + 1$, y $\mathcal{S} : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$. La invariancia modular de (1.113) puede ser verificada usando las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad \eta(\tau) &\mapsto e^{\frac{i\pi}{12}} \eta(\tau) \\ \mathcal{S} : \quad \eta(\tau) &\mapsto (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau) \quad , \quad \tau_2 \mapsto \frac{\tau_2}{|\tau|^2}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Físicamente, la función de partición $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ corresponde a la amplitud vacío-vacío de la cuerda a 1-lazo. En este caso la superficie de mundo es un toro T^2 que tiene precisamente a τ como su parámetro modular. Brevemente, un toro T^2 con parámetro modular $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ puede ser definido por identificaciones en una red con base $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (\tau_1, \tau_2)$, como se muestra en la figura 1.1.

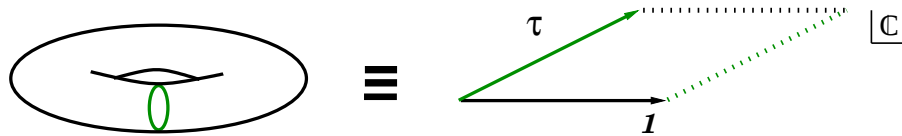


Figura 1.1: Toro T^2 como red.

El toro T^2 se ve como un cilindro de longitud τ_2 en el cual se identifica la cuerda en el extremo inicial con la cuerda en el extremo final luego de una traslación por τ_1 , como se muestra en la figura 1.2.

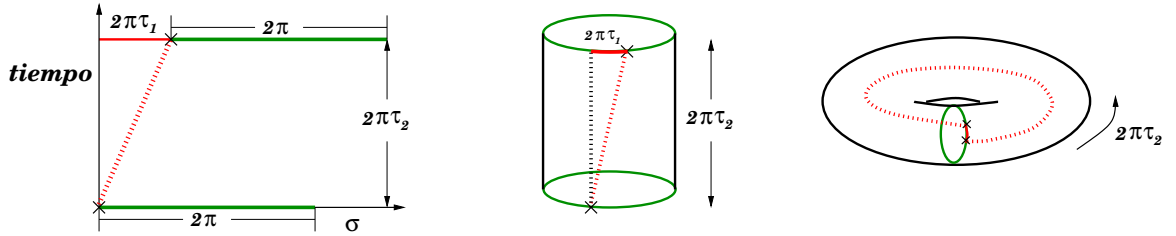


Figura 1.2: Toro torcido.

En efecto, usando (1.60) y (1.57) en (1.109) se encuentra

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{-2\pi\tau_2 H} e^{2i\pi\tau_1 P_\sigma}. \quad (1.116)$$

El primer término en la traza es precisamente lo que se espera de una función de partición para un sistema que se propaga en un tiempo Euclídeo $2\pi\tau_2$. El segundo término es la traslación por $2\pi\tau_1$ a lo largo de la dirección σ en la cuerda. Ahora, las transformaciones modulares (1.114) corresponden a un cambio en la base del toro T^2 . Por ejemplo, en la figura 1.3, se muestra un toro equivalente al hacer $\tau \mapsto \tau + 1$. Todos los toros con τ 's relacionados por transformaciones modulares son conformalmente equivalentes y la función de partición debe permanecer invariante.

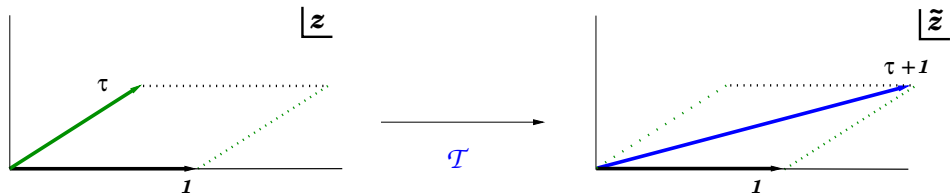


Figura 1.3: Red de toro T^2 al hacer $\tau \mapsto \tau + 1$.

1.3.3. Función de Partición Fermiónica

La función de partición de la supercuerda cerrada se puede escribir como

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{V_8}{(4\pi^2\alpha'\tau_2)^4} \mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau) \mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}). \quad (1.117)$$

El primer factor es la contribución del término (1.111) pero en $d = 8$ dimensiones transversas. Por otra parte, $\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau)$ y $\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau})$ son las contribuciones de los modos de oscilación derechos e izquierdos respectivamente. Para la cuerda tipo IIB las contribuciones de los modos R y L son análogas, y por lo tanto

$$\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau) \mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = |\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau)|^2. \quad (1.118)$$

Nos concentraremos en describir la estructura de $\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau)$, la cual se define como

$$\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau) = \text{Tr}_{(\text{NS} \oplus \text{R})} P_{\text{GSO}} q^{\frac{\alpha'}{2} M_R^2} \quad (1.119)$$

donde $q = e^{2i\pi\tau}$. La traza es tomada sobre los estados que se encuentran en los sectores NS y R. El operador P_{GSO} es el operador que realiza la proyección GSO en ambos sectores y está dado por

$$P_{\text{GSO}} = \frac{1 + (-1)^{F_R}}{2}. \quad (1.120)$$

Además, el operador $\frac{\alpha'}{2} M_R^2$ es el operador de masa de los sectores NS y R definido en (1.83) y (1.91) respectivamente.

Estamos interesados en calcular $\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau)$ para deducir propiedades del espectro de estados. Se encuentra que $\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau)$ está dada por

$$\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^8} \sum_{\alpha, \beta=0, \frac{1}{2}} S_{\alpha\beta} \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}{\eta^4}. \quad (1.121)$$

El factor $1/\eta^8$, que proviene de los estados creados por los osciladores bosónicos α_n^j , $j = 1, \dots, 8$, se obtiene como se explicó en la sección 1.3.1. Se demuestra que la

contribución de los estados creados por los osciladores fermiónicos b_r^j en efecto se puede expresar en términos de la función $\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ de Jacobi definida por

$$\frac{\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}(\tau)}{\eta(\tau)} = e^{2i\pi\alpha\beta} q^{\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n+\alpha-\frac{1}{2}} e^{2i\pi\beta}\right) \left(1 + q^{n-\alpha-\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\beta}\right) \quad (1.122)$$

donde $q = e^{2i\pi\tau}$, y η es nuevamente la función de Dedekind (1.108). La suma sobre α es una suma sobre los sectores NS y R. Como veremos la suma sobre β implementa la proyección GSO. Los coeficientes $S_{\alpha\beta}$ son constantes llamadas coeficientes de estructura de espin.

La invariancia modular de (1.117) requiere incluir la suma sobre α y β en (1.121). Esto puede ser verificado usando (1.115) y las transformaciones modulares

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad \tau &\longrightarrow \tau + 1 \quad ; \quad \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \longrightarrow e^{-i\pi(\alpha^2 - \alpha)} \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \mathcal{S} : \quad \tau &\longrightarrow -\frac{1}{\tau} \quad ; \quad \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \longrightarrow (-i\tau)^{1/2} e^{2i\pi\alpha\beta} \vartheta \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Además se encuentra que la invariancia modular implica que $-S_{00} = S_{0\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}0}$. Se escoge $S_{00} = 1$ y $S_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1$ para los coeficientes libres. De esta manera resulta

$$\mathcal{Z}^{\text{right}}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^8} \left\{ \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} - \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\eta^4} - \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} + \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\eta^4} \right\}. \quad (1.124)$$

A partir de (1.124) se pueden describir los sectores NS y R, y la proyección GSO.

El sector NS corresponde a los términos con $\alpha = 0$. Incluyendo la suma en β se encuentra

$$\mathcal{Z}_{\text{NS}}^{\text{right}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^8} \left\{ \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} - \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\eta^4} \right\}. \quad (1.125)$$

Usando (1.122) el primer término en $\mathcal{Z}_{\text{NS}}^{\text{right}}$ resulta ser

$$\frac{1}{\eta^8} \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} = \frac{q^{-\frac{1}{6}}}{\eta^8} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n+\frac{1}{2}}\right)^8 = \left(1 q^{-\frac{1}{2}} + 8 + 36 q^{\frac{1}{2}} + 128 q + \dots\right). \quad (1.126)$$

El primer término en la suma corresponde a $|0\rangle_{NS}$, el segundo corresponde a los 8 estados en $b_{-\frac{1}{2}}^j|0\rangle_{NS}$, y así sucesivamente. La degeneración de los estados se muestra en la tabla 1.3. Al incluir el segundo término en (1.125) se realiza efectivamente la proyección GSO. Se encuentra

$$\mathcal{Z}_{NS}^{\text{right}} = (8 + 128q + \dots). \quad (1.127)$$

Se observa que el estado $|0\rangle_{NS}$ es eliminado.

La función ϑ de Jacobi tiene la representación equivalente

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(n+\alpha)^2} e^{2i\pi(n+\alpha)\beta} \quad , \quad q = e^{2i\pi\tau}. \quad (1.128)$$

Usando (1.128) la función de partición en el sector NS se expresa como

$$\mathcal{Z}_{NS}^{\text{right}} = \frac{1}{\eta^{12}} \sum_{r_a \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}r^2} \left(\frac{1 - e^{i\pi(r_0+r_1+r_2+r_3)}}{2} \right). \quad (1.129)$$

Esto muestra que los grados de libertad fermiónicos derechos en el sector NS se pueden describir en términos de un vector $r = (r_0, r_1, r_2, r_3)$, $r_a \in \mathbb{Z}$. El vector r es un peso de $SO(8)$ en la clase vectorial o escalar. Nótese que (1.129) implica

$$\sum_a r_a = \text{impar}. \quad (1.130)$$

Esto es la proyección GSO. Por ejemplo, el estado con $M^2 < 0$, que posee $r = 0$ en el sector NS, es eliminado.

El sector R corresponde a los términos con $\alpha = 1/2$ en (1.124). Incluyendo la suma en β se obtiene

$$\mathcal{Z}_R^{\text{right}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^8} \left\{ \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} - \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\eta^4} \right\}. \quad (1.131)$$

Según (1.122) el primer término en $\mathcal{Z}_R^{\text{right}}$ está dado por

$$\frac{1}{\eta^8} \frac{\vartheta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta^4} = \frac{16}{\eta^8} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^8 = (16 + 256q + 2304q^2 + \dots). \quad (1.132)$$

El primer término en la suma refleja los 16 estados correspondientes a $|\mathbf{S}\rangle$ y $|\mathbf{C}\rangle$, y así sucesivamente. Los estados y su degeneración se muestran en la tabla 1.4. Al implementar la proyección GSO incluyendo la suma sobre β hallamos

$$\mathcal{Z}_R^{\text{right}} = (8 + 128q + \dots). \quad (1.133)$$

Ahora los primeros 8 estados corresponden a $|\mathbf{S}\rangle \equiv \mathbf{8}_s$ que tiene $(-1)^{F_R} = 1$.

Usando (1.128) la función de partición en el sector R se reescribe como

$$\mathcal{Z}_R^{\text{right}} = \frac{1}{\eta^{12}} \sum_{r_a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}r^2} \left(\frac{1 - e^{i\pi(r_0 + r_1 + r_2 + r_3)}}{2} \right). \quad (1.134)$$

En este caso el vector r tiene componentes semi-enteras, por lo que corresponde a un peso espinorial de $SO(8)$. Nuevamente se encuentra que la proyección GSO está dada por (1.130). En particular se elimina el estado base $\mathbf{8}_c$ cuyo peso espinorial es tal que $\sum_a r_a = \text{par}$.

Al utilizar la realización de la función $\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ como una suma efectivamente se pasa a describir los fermiones la superficie de mundo en el cono de luz por cuatro bosones H_a que tienen momentum r en la red de pesos de $SO(8)$. A este proceso de intercambio de fermiones por bosones se le llama bosonización. La bosonización de los modos fermiónicos izquierdos es análoga y conduce a un peso de $SO(8)$ denotado por p .

Como vemos en (1.119) a partir de las potencias de q se deduce la fórmula de masa $\frac{\alpha'}{2} M_R^2$, observando (1.129) y (1.134) se encuentra

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad r = \begin{cases} r_a \in \mathbb{Z} & \text{NS} \\ r_a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{R} \end{cases} \quad (1.135)$$

Además r debe satisfacer la proyección GSO dada en (1.130), tanto en el sector NS como en el R. Para los modos izquierdos se tiene

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \quad ; \quad p = \begin{cases} p_a \in \mathbb{Z} & \text{NS} \\ p_a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{R} \end{cases} \quad (1.136)$$

La proyección GSO en el sector NS es

$$\sum_a p_a = \text{impar}. \quad (1.137)$$

En la cuerda tipo IIB que estamos discutiendo la proyección GSO en el sector R es también (1.137). Los operadores de número N_R y N_L ahora incluyen la contribución de los bosones obtenidos al bosonizar ψ^j y $\tilde{\psi}^j$.

El tratamiento de la cuerda tipo IIA es similar. La única diferencia consiste en la proyección $\sum_a p_a = \text{par}$ en el sector R izquierdo.

1.4. Cuerda Heterótica

La cuerda heterótica es una teoría de cuerdas cerradas en $D = 10$ en la cual se combinan grados de libertad derechos e izquierdos de distinta naturaleza [18]. Los grados de libertad derechos son los de la cuerda fermiónica y están dados por $X_R^j(t - \sigma)$ y $\psi^j(t - \sigma)$, $j = 1, \dots, 8$, en el cono de luz. Los grados de libertad izquierdos son básicamente los de la cuerda bosónica y en el cono de luz están dados por los 24 campos $X_L^j(t + \sigma)$ y $F_L^I(t + \sigma)$, $I = 1, \dots, 16$. Veremos que invariancia modular requiere la compactificación de los campos F_L^I en un toro 16-dimensional $T^{16} = \mathbb{R}^{16}/\Gamma$, en el cual la red Γ debe ser par y auto-dual. Los F_L^I son bosones en la superficie de mundo que se pueden intercambiar por 32 fermiones Majorana λ^A , $A = 1, \dots, 32$, en la superficie de mundo. Como explicaremos, la bosonización se puede deducir a partir de la función de partición de la teoría.

Nuestro objetivo final en esta sección es escribir la función de partición de la cuerda heterótica. Para este fin discutiremos brevemente el espectro de estados de la teoría. En particular queremos demostrar que el espectro incluye estados de masa nula correspondientes a vectores de calibre de un grupo no-Abeliano.

Recordemos que el espectro de la teoría se construye tomando el producto tensorial de los estados derechos e izquierdos. Consideremos primero los modos derechos que coinciden con los de la cuerda fermiónica. Como se discutió en la sección 1.2, los estados pertenecen ya sea al sector NS ó al sector R. Las fórmulas de masa en cada sector están dadas por (1.83) y (1.91). Los primeros estados excitados se muestran en las tablas 1.3 y 1.4. Nuevamente se impone la proyección GSO $(-1)^{F_R} = 1$ tanto en el sector NS como en el sector R.

Para estudiar los estados izquierdos usaremos la formulación fermiónica con campos X_L^j y λ^A . El tratamiento de los espinores λ^A es similar a los espinores $\tilde{\psi}^j$ de la cuerda fermiónica. En particular las condiciones de frontera pueden ser periódicas o antiperiódicas. Veremos que para obtener una función de partición invariante modular es posible aplicar las condiciones de frontera simultáneamente a los 32 fermiones λ^A . De esta manera se construye la cuerda heterótica $SO(32)$. También es posible dividir a los 32 fermiones en dos grupos λ^B y λ'^B , con $B = 1, \dots, 16$, y aplicar las condiciones de frontera independientemente a cada grupo. Esta segunda posibilidad lleva a la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$.

A continuación nos enfocaremos en la cuerda heterótica $SO(32)$. En este caso las condiciones de frontera son

$$\lambda^A(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\gamma} \lambda^A(t, \sigma) \quad (1.138)$$

donde $\gamma = 0, 1/2$, para $A = 1, \dots, 32$. Invariancia modular requiere incluir ambos valores de γ , es decir incluir sectores NS ($\gamma = 0$) y R ($\gamma = 1/2$) izquierdos. Los campos λ^A tienen asociados unos osciladores λ_r^A , $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \gamma$. Como λ^A es un espinor Majorana sus componentes deben ser reales lo que implica

$$\lambda_r^{A*} = \lambda_{-r}^A. \quad (1.139)$$

Al cuantizar los λ_r^A pasan a ser operadores que satisfacen la relación de anticonmutación

$$\{\lambda_r^A, \lambda_s^B\} = \delta^{AB} \delta_{r+s,0} \quad (1.140)$$

con $A, B = 1, \dots, 32$, y $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} - \gamma$. La condición de realidad (1.139) se traduce en $\lambda_r^{A\dagger} = \lambda_{-r}^A$. Las relaciones de anticonmutación junto con la condición de realidad nos indica que los λ_r^A con $r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2} - \gamma$ son operadores de aniquilación y los λ_{-r}^A para $r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2} - \gamma$ son operadores de creación. Trataremos los sectores NS y R para los modos de oscilación izquierdos siguiendo la discusión de la cuerda fermiónica en la sección 1.2.

De igual forma que en la cuerda fermiónica en el sector NS se define un estado base $|\tilde{0}\rangle_{NS}$. Los estados excitados se construyen haciendo actuar los operadores de creación bosónicos $\tilde{\alpha}_{-n}^j$ y fermiónicos λ_{-r}^A sobre el estado base $|\tilde{0}\rangle_{NS}$. La masa de los estados viene dada por

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_\lambda^{(0)} + N_L + \tilde{a}_0. \quad (1.141)$$

El operador $N_\lambda^{(0)}$ es el operador de número de los osciladores λ_r^A y se define como

$$N_\lambda^{(0)} = \sum_{r \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2}} : r \lambda_{-r}^A \lambda_r^A :. \quad (1.142)$$

$N_\lambda^{(0)}$ toma valores semi-enteros. El operador N_L es el operador de número para los osciladores bosónicos $\tilde{\alpha}_n^j$ definido en (1.55). La constante $\tilde{a}_0$ surge al realizar el ordenamiento normal y resulta ser

$$\tilde{a}_0 = \frac{8}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n - \frac{32}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2}). \quad (1.143)$$

La primera suma es la contribución de los osciladores bosónicos $\tilde{\alpha}_n^j$, $j = 1, \dots, 8$ y la segunda suma es la contribución de los osciladores fermiónicos λ_r^A , $A = 1, \dots, 32$. Usando la regularización (1.86) se encuentra

$$\tilde{a}_0 = -1. \quad (1.144)$$

En el sector izquierdo de la cuerda heterótica también se realiza la proyección GSO y para este fin se introduce al operador $(-1)^{F_L}$ como en la cuerda fermiónica. Para la acción sobre el estado base $|\tilde{0}\rangle_{NS}$ se escoge

$$(-1)^{F_L} |\tilde{0}\rangle_{NS} = |\tilde{0}\rangle_{NS}. \quad (1.145)$$

La proyección GSO consiste en mantener sólo los estados con $(-1)^{F_L} = 1$. De esta forma se elimina al estado de $M_L^2 < 0$, $\lambda_{-\frac{1}{2}}^A |\tilde{0}\rangle_{NS}$, el cual tiene $(-1)^{F_L} = -1$. El estado base $|\tilde{0}\rangle_{NS}$ también tiene $M_L^2 < 0$ pero se elimina por la condición de igualdad de nivel como explicaremos luego. La proyección GSO permite los estados de masa nula y $(-1)^{F_L} = 1$ dados por

$$\lambda_{-\frac{1}{2}}^A \lambda_{-\frac{1}{2}}^B |\tilde{0}\rangle_{NS} \quad , \quad A, B = 1, \dots, 32. \quad (1.146)$$

Como los $\lambda_{-\frac{1}{2}}^A$ anticonmutan entre sí, existe un total de 496 estados. Esta es precisamente la dimensión de la representación adjunta de $SO(32)$. En efecto, los λ_r^A transforman como vectores de $SO(32)$ y el producto antisimétrico da un tensor antisimétrico de dos índices. Finalmente, la proyección GSO también permite los estados de masa nula

$$\tilde{\alpha}_{-1}^j |\tilde{0}\rangle_{NS}. \quad (1.147)$$

Estos estados son neutros bajo $SO(32)$ pero transforman como $\mathbf{8}_v$ bajo el pequeño grupo de Lorentz $SO(8)$.

En el sector R la masa de los estados viene dada por

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_\lambda^{(\frac{1}{2})} + N_L + \tilde{a}_{\frac{1}{2}}. \quad (1.148)$$

El operador $N_\lambda^{(\frac{1}{2})}$ es el operador de número de los λ_r^A el cual se define como

$$N_\lambda^{(\frac{1}{2})} = \sum_{r=0}^{\infty} : r \lambda_{-r}^A \lambda_r^A :. \quad (1.149)$$

$N_\lambda^{(\frac{1}{2})}$ toma valores enteros. Al realizar el ordenamiento normal se encuentra

$$\tilde{a}_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n - \frac{32}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n = -\frac{8}{24} + \frac{32}{24} = 1. \quad (1.150)$$

Concluimos que en el sector R todos los estados tienen $M_L^2 > 0$. En particular no hay estados de masa nula.

Sector	Estados	Rep. de $SO(8) \times SO(32)$	Campos
(NS+, NS+)	$b_{-\frac{1}{2}}^i 0\rangle_{NS} \otimes \lambda_{-\frac{1}{2}}^A \lambda_{-\frac{1}{2}}^B \tilde{0}\rangle_{NS}$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{496})$	A_b^μ
	$b_{-\frac{1}{2}}^j 0\rangle_{NS} \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{0}\rangle_{NS}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{28}_a, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{35}_v, \mathbf{1})$	$\phi \oplus B_{\mu\nu} \oplus g_{\mu\nu}$
(R+, NS+)	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \lambda_{-\frac{1}{2}}^A \lambda_{-\frac{1}{2}}^B \tilde{0}\rangle_{NS}$	$(\mathbf{8}_s, \mathbf{496})$	ψ_b
	$ \mathbf{S}\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{0}\rangle_{NS}$	$(\mathbf{8}_c, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56}_c, \mathbf{1})$	$\psi^- \oplus \psi_\mu^-$

 Tabla 1.7: Espectro de masa nula cuerda heterótica $SO(32)$.

Para construir el espectro se hace el producto tensorial $R \otimes L$ y se impone la condición de igualdad de nivel $M_L^2 = M_R^2$. La proyección GSO en los modos derechos elimina el taquión. Como no hay estados con $M_R^2 = -2/\alpha'$, por igualdad de nivel se elimina al estado $|\tilde{0}\rangle_{NS}$ con $M_L^2 = -2/\alpha'$. Igualdad de nivel si permite estados de masa nula. Concretamente, combinando estados derechos NS+ con estados izquierdos NS+ se obtienen los estados indicados en la primera columna de la tabla 1.7. El signo representa el valor de $(-1)^{F_L}$ y $(-1)^{F_R}$ respectivamente. Por ejemplo, el estado

$$b_{-\frac{1}{2}}^i |0\rangle_{NS} \otimes \lambda_{-\frac{1}{2}}^A \lambda_{-\frac{1}{2}}^B |\tilde{0}\rangle_{NS} \quad (1.151)$$

en el sector (NS+,NS+) transforma frente a $SO(8)$ como un vector, mientras que bajo $SO(32)$ transforma en la representación adjunta **496**. En conclusión, este estado transforma como lo hace un vector de calibre A_b^μ , $b = 1, \dots, 496$, de $SO(32)$.

Los estados de masa cero en la segunda fila en la tabla 1.7 se encuentran combinando estados derechos R+ con estados izquierdos NS+. En el sector (NS+,NS+) también se encuentran el dilatón ϕ , la 2-forma de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$, y el gravitón $g_{\mu\nu}$. En el sector (R+,NS+) aparecen campos fermiónicos dados por un espinor Weyl de calibre ψ_b^+ en la representación adjunta de $SO(32)$, un espinor Weyl ψ^- y un espinor-vector ψ_μ^- . Los signos denotan la quiralidad de los espinores.

Como se observa en la tabla 1.7 existe igual número de estados fermiónicos y bosónicos de masa nula. El espectro es supersimétrico. En particular los vectores A_b^μ y los espinores ψ_b^+ forman un multiplete de calibre. Se concluye que a bajas energías la teoría resultante es supergravedad $\mathcal{N} = 1$ acoplada con super Yang-Mills con grupo $SO(32)$.

1.4.1. Función de Partición Heterótica $SO(32)$

La función de partición de la cuerda heterótica, por ser una cuerda cerrada, posee la misma forma que la función de partición fermiónica (1.117). La diferencia radica en la contribución de los grados de libertad izquierdos $\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau})$. En la formulación fermiónica de la cuerda heterótica se encuentra

$$\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{\eta}^8} \sum_{\gamma, \rho=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma\rho} \frac{\bar{\vartheta}^{16} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}^{16}}. \quad (1.152)$$

El factor $1/\bar{\eta}^8$, que proviene de los estados creados por los osciladores bosónicos $\tilde{\alpha}_n^j$, $j = 1, \dots, 8$, se halla como se explicó en la sección 1.3.1 con $d = 8$ dimensiones transversas. Como en la cuerda fermiónica la contribución de los estados creados por los osciladores fermiónicos λ_r^A viene dada en términos de la función $\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix} \right]$ de Jacobi. En este caso como tenemos 32 fermiones λ^A la potencia del factor $\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix} \right] / \bar{\eta}$ es 16. La suma sobre γ nos indica el sector, ya sea NS ($\gamma = 0$) ó R ($\gamma = 1/2$). De igual forma que en la cuerda fermiónica la suma sobre el índice ρ equivale a la proyección GSO. Los $\bar{S}_{\gamma\rho}$ son los coeficientes de estructura de espin izquierdos.

La invariancia modular de la función de partición $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ requiere incluir ambos valores de γ y ρ . Además requiere que $\bar{S}_{00} = \bar{S}_{\frac{1}{2}0} = \bar{S}_{0\frac{1}{2}}$. Esto puede ser comprobado usando las relaciones (1.115), y las transformaciones (1.123). Para los coeficientes libres se elige $\bar{S}_{00} = 1$ y $\bar{S}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1$. Usando la realización de la función $\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix} \right](\bar{\tau})$ como suma

(1.128), la ecuación (1.152) se reescribe

$$\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\eta}^8} \frac{1}{\bar{\eta}^{16}} \sum_{\gamma=0, \frac{1}{2}} \sum_{P_I \in \mathbb{Z}} \bar{q}^{\frac{1}{2}(P_I + \gamma)^2} \left(\frac{1 + e^{-i\pi S_p}}{2} \right) \quad , \quad I = 1, \dots, 16 \quad (1.153)$$

donde $S_p = \sum_{I=1}^{16} P_I$. Definimos la red Γ_{16} como

$$\Gamma_{16} = \left\{ (n_1, \dots, n_{16}) \quad , \quad (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2}) \mid n_I \in \mathbb{Z}, \sum_{I=1}^{16} n_I = \text{par} \right\} . \quad (1.154)$$

En términos de esta red la función de partición es simplemente

$$\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\eta}^8} \frac{1}{\bar{\eta}^{16}} \sum_{P \in \Gamma_{16}} \bar{q}^{\frac{1}{2}P^2} . \quad (1.155)$$

La ecuación (1.155) corresponde a la función de partición de los modos izquierdos de una cuerda bosónica en la que 16 de sus 24 coordenadas transversas están compactificadas en un toro 16-dimensional $T^{16} = \mathbb{R}^{16}/\Gamma_{16}$. Al pasar de la ecuación (1.152) a la (1.155) se realiza una bosonización, es decir se intercambian 32 fermiones izquierdos λ^A por 16 bosones F_L^I que satisfacen la condición

$$F_L^I(t, \sigma + 2\pi) = F_L^I(t, \sigma) + W^I \quad , \quad W \in \Gamma_{16} \quad , \quad I = 1, \dots, 16. \quad (1.156)$$

Al estudiar la invariancia modular de la función de partición $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ usando (1.155) como contribución de los grados de libertad izquierdos se encuentra que la red Γ_{16} debe ser par y auto-dual. Esto quiere decir que los vectores $P \in \Gamma_{16}$ deben satisfacer $P^2 = \text{par}$, y $P \cdot W = \text{entero}$ para todo $W \in \Gamma_{16}$, lo que nos garantiza que $\Gamma_{16} = \Gamma_{16}^*$, donde Γ_{16}^* es la red dual a Γ_{16} . Estos resultados pueden ser verificados usando las relaciones en (1.115), (1.123) y la fórmula de resumación de Poisson [1]

$$\sum_{W \in \Lambda} e^{-\pi a(W+U)^2} e^{2i\pi Y \cdot (W+U)} = \frac{1}{\text{Vol}(\Lambda) a^{D/2}} \sum_{P \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi}{a}(P+Y)^2} e^{-2i\pi P \cdot U} \quad (1.157)$$

donde U y Y son vectores arbitrarios, a es una constante positiva y D es la dimensión de la red Λ . La red definida en (1.154) satisface estas condiciones.

De igual forma que en la sección 1.3.3, a partir de las potencias de q y $\bar{q}$ en la función de partición $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ se obtienen las fórmulas de masa. Para los grados de libertad derechos la fórmula de masa es la mostrada en (1.135). Para los grados de libertad izquierdos se encuentra

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2} P^2 - 1 \quad , \quad P \in \Gamma_{16} \quad (1.158)$$

donde N_F es el operador de número de los osciladores F_{-n}^I asociados a los campos F_L^I . Estos osciladores, y los $\tilde{\alpha}_{-n}^j$, actúan sobre un estado de vacío denotado $|\tilde{0}\rangle$.

Podemos usar las fórmulas de masa (1.135) y (1.158) para hallar el espectro, tomando en cuenta la condición de igualdad de nivel $M_L^2 = M_R^2$. Como ejemplo hallaremos el espectro de masa nula. Para esto hacemos $M_L^2 = M_R^2 = 0$. Para los estados derechos se encuentra que $N_R = 0$ lo que implica que $r^2 = 1$. Los pesos r de $SO(8)$ con $r^2 = 1$ y que además satisfacen la proyección GSO, $\sum_a r_a = \text{impar}$, corresponden a representaciones $\mathbf{8}_v$ y $\mathbf{8}_s$. Concretamente,

Peso r	Representación de $SO(8)$
$(\pm 1, 0, 0, 0)$	$\mathbf{8}_v$
$\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ # impar de +'s	$\mathbf{8}_s$

(1.159)

Para los estados izquierdos con $N_L = 0$, $N_F = 0$, debe ser $P^2 = 2$. Los vectores $P \in \Gamma_{16}$ que satisfacen $P^2 = 2$ son

$$P = (\pm 1, \pm 1, \underline{0^{14}}) \quad (1.160)$$

donde el 0^{14} nos indica que hay un 0 en las 14 componentes restantes de P , y el subrayado significa permutación de las componentes. Estos vectores con $P^2 = 2$ son precisamente las 480 raíces no nulas de $SO(32)$. Se demuestra que los estados correspondientes están dados por $e^{iP \cdot F} |\tilde{0}\rangle$. Las raíces triviales necesarias para completar la representación adjunta vienen de los 16 estados $F_{-1}^I |\tilde{0}\rangle$ que tienen $N_L = 0$, $N_F = 1$, $P = 0$, y por lo tanto $M_L^2 = 0$. Por último con $N_L = 1$, $N_F = 0$, y $P = 0$, están los 8

estados $\tilde{\alpha}_{-1}^j|\tilde{0}\rangle$ que transforman como $\mathbf{8}_v$ de $SO(8)$ y son neutros bajo $SO(32)$. Podemos escribir los estados izquierdos en términos de representaciones de $SO(8) \times SO(32)$ como

$$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{496}). \quad (1.161)$$

Para contruir el espectro de la teoría se hace el producto tensorial $R \otimes L$. Los estados derechos son singletes de $SO(32)$. Entonces, los estados de masa nula son

$$\begin{aligned} [(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_s, \mathbf{1})]_R \otimes [(\mathbf{1}, \mathbf{496}) \oplus (\mathbf{8}_v, \mathbf{1})]_L = & [(\mathbf{8}_v, \mathbf{496}) \oplus (\mathbf{8}_s, \mathbf{496})] \\ & \oplus [(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{28}_a, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{35}_v, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_c, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56}_c, \mathbf{1})]. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Como es de esperarse se recupera el resultado de la tabla 1.7. Los estados se organizan en multipletes de super Yang-Mills y supergravedad $\mathcal{N} = 1$ en $D = 10$.

1.4.2. Función de Partición Heterótica $E_8 \times E_8$

La cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ se construye dividiendo los 32 fermiones λ^A en dos conjuntos λ^B y λ'^B con $B = 1, \dots, 16$, cada uno con condiciones de contorno independientes. La diferencia entre la función de partición de esta teoría y la teoría de la cuerda heteótica $SO(32)$ reside en la contribución fermiónica de los modos de oscilación izquierdos. Se tiene

$$\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{\eta}^8} \sum_{\gamma, \rho=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma\rho} \frac{\bar{\vartheta}^8 \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}^8} \sum_{\gamma', \rho'=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma'\rho'} \frac{\bar{\vartheta}^8 \left[\begin{smallmatrix} \gamma' \\ \rho' \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}^8}. \quad (1.163)$$

La primera suma viene del primer conjunto de osciladores fermiónicos λ^B y la segunda suma surge del segundo conjunto de osciladores λ'^B con $B = 1, \dots, 16$. Al sumar sobre γ y γ' se incluyen sectores NS y R para los dos grupos de fermiones. La suma sobre ρ y ρ' implementa la proyección GSO en cada grupo.

La invariancia modular de la función de partición $\mathcal{Z}$ requiere incluir todos los valores de γ , γ' , ρ y ρ' . Además requiere que los coeficientes de estructura de espín

$\bar{S}_{\gamma\rho}$ y $\bar{S}_{\gamma'\rho'}$ satisfagan $\bar{S}_{00} = \bar{S}_{\frac{1}{2}0} = \bar{S}_{0\frac{1}{2}}$ y $\bar{S}_{0'0'} = \bar{S}_{\frac{1}{2}'0'} = \bar{S}_{0'\frac{1}{2}'}$. Elegimos $\bar{S}_{00} = 1$, $\bar{S}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1$, $\bar{S}_{0'0'} = 1$, y $\bar{S}_{\frac{1}{2}'\frac{1}{2}'} = 1$ para los coeficientes libres. De forma similar que en la cuerda heterótica $SO(32)$, se usa la representación de $\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \rho \end{smallmatrix}\right](\bar{\tau})$ como suma (1.128) para reescribir $\mathcal{Z}^{\text{left}}$, obteniendo

$$\mathcal{Z}^{\text{left}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\eta}^8} \frac{1}{\bar{\eta}^{16}} \sum_{P \in \Gamma_8 \times \Gamma_8} \bar{q}^{\frac{1}{2}P^2}. \quad (1.164)$$

Ahora la red es el producto de dos redes 8-dimensionales. Cada red Γ_8 es una red de raíces del grupo E_8 con vectores

$$\Gamma_8 = \left\{ (n_1, \dots, n_8), (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2}) \mid n_J \in \mathbb{Z}, \sum_{J=1}^8 n_J = \text{par} \right\}. \quad (1.165)$$

La red $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ también es una red par y auto-dual, por lo que satisface la condición de invariancia modular. En 16 dimensiones sólo existen dos redes pares y autoduales: Γ_{16} y $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ [18].

Al igual que en la sección 1.4.1 podemos usar las fórmulas de masa (1.135) y (1.158) para hallar el espectro de masa nula, tomando en consideración que $P \in \Gamma_8 \times \Gamma_8$ en (1.158). Los estados de masa nula deben satisfacer $M_L^2 = M_R^2 = 0$. Para los estados derechos se encuentra el mismo resultado (1.159). Para los estados izquierdos se obtienen nuevamente a los 8 estados $\tilde{\alpha}_{-1}^j |\tilde{0}\rangle$ con $N_L = 1$, $N_F = 0$, y $P = 0$, los cuales transforman como vector de $SO(8)$ y son neutros de calibre. Además de estos estados también se encuentran a estados con $N_L = 0$, $N_F = 0$, y $P^2 = 2$. Los vectores $P \in \Gamma_8 \times \Gamma_8$ con $P^2 = 2$ son

$$\begin{aligned} P_1 &= (\pm 1, \pm 1, 0^6) \times (0^8), \quad P_2 = \frac{1}{2}(\pm 1^6) \times (0^8) \quad \# \text{ par de } +\text{'s} \\ P'_1 &= (0^8) \times (\pm 1, \pm 1, 0^6), \quad P'_2 = (0^8) \times \frac{1}{2}(\pm 1^8) \quad \# \text{ par de } +\text{'s}. \end{aligned} \quad (1.166)$$

Aquí 0^m y $\pm 1^m$ indica que hay m componentes iguales a 0 y ± 1 respectivamente. Los vectores P_1 y P_2 son precisamente las 240 raíces no nulas del grupo E_8 , mientras que P'_1 y P'_2 corresponden a otras 240 raíces no nulas de un segundo E_8 . Concluimos entonces que el grupo de calibre es $E_8 \times E_8$. Las raíces triviales necesarias para completar la

representación adjunta de $E_8 \times E_8$ están dadas por los 16 estados $F_{-1}^J|\tilde{0}\rangle$ y $F_{-1}'^J|\tilde{0}\rangle$, $J = 1, \dots, 8$, que tienen $N_L = 0$, $N_F = 1$, y $P = 0$. Podemos escribir los estados izquierdos en términos de representaciones de $SO(8) \times E_8 \times E_8$ como

$$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{248}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{248}). \quad (1.167)$$

Tomando el producto tensorial de los estados derechos con los izquierdos se obtienen nuevamente un multiplete de supergravedad $\mathcal{N} = 1$, y un multiplete de super Yang-Mills con grupo de calibre $E_8 \times E_8$, dados por

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{28}_a, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{35}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_c, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56}_c, \mathbf{1}, \mathbf{1})] \oplus \\ &[(\mathbf{8}_v, \mathbf{248}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{248})] \oplus [(\mathbf{8}_s, \mathbf{248}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_s, \mathbf{1}, \mathbf{248})]. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Nótese que los vectores y espinores de calibre no transforman simultáneamente bajo los dos E_8 .

CAPÍTULO 2

COMPACTIFICACIÓN EN ORBIFOLDS

En este capítulo se discutirá la compactificación de cuerdas en orbifolds. Primero se definirán los orbifolds y se explicarán algunas propiedades. Luego se estudiará la propagación de cuerdas en distintos orbifolds toroidales [4, 5]. También mostraremos la función de partición en cada caso [19, 20]. El objetivo final es mostrar la función de partición de la cuerda heterótica en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ [8].

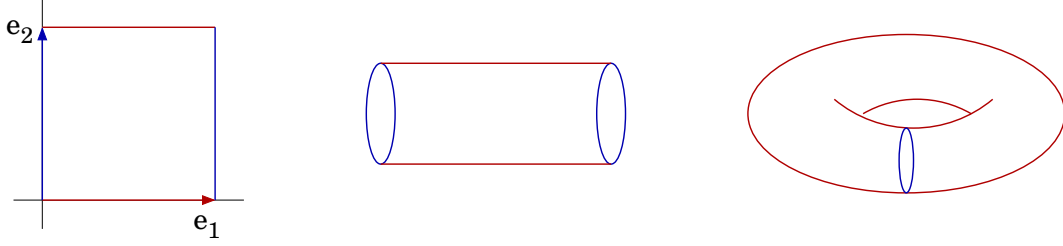
2.1. Geometría de Orbifolds

Geométricamente, un orbifold $\mathcal{O}$ es el espacio cociente obtenido al identificar los puntos de una variedad $\mathcal{M}$ bajo la acción de un grupo discreto G , esto es,

$$\mathcal{O} = \mathcal{M}/G. \quad (2.1)$$

El espacio cociente se define como el espacio de las clases de equivalencia bajo la relación

$$x \simeq gx \quad , \quad \forall g \in G \quad , \quad x \in \mathcal{M}. \quad (2.2)$$


 Figura 2.1: $T^2 = \mathbb{R}^2 / \Gamma$.

Decimos que G actúa libremente si para $g \in G$ y $x \in \mathcal{M}$, la única solución de la ecuación $gx = x$ es $g = 1$. Existen orbifolds singulares en los que $gx = x$ con $g \neq 1$. A estos puntos x se les llama puntos fijos. Los orbifolds con puntos fijos fallan en ser una variedad.

Un ejemplo simple de un orbifold $\mathcal{O}$ es el toro T^2 definido como $T^2 = \mathbb{R}^2 / \Gamma$, donde Γ es una red descrita por

$$\Gamma = \{e_a \in \mathbb{R}^2 \mid V = n_a e_a, n_a \in \mathbb{Z}, a = 1, 2\}. \quad (2.3)$$

En este orbifold los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ satisfacen la relación

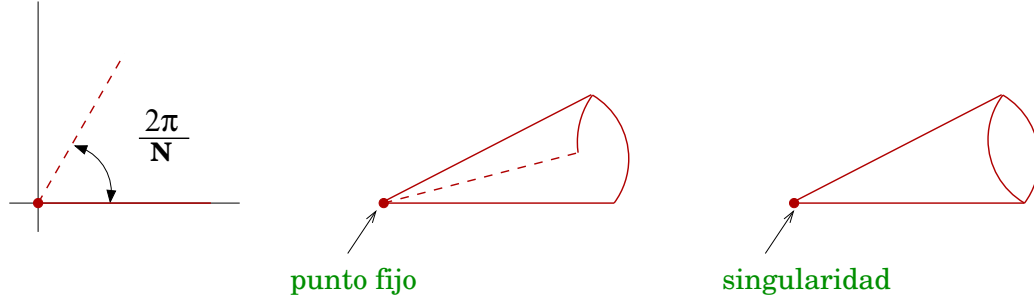
$$x \simeq x + V, \quad V \in \Gamma. \quad (2.4)$$

El grupo G en este caso es el grupo de traslaciones sobre la red, el cual actúa libremente. El espacio resultante al realizar la identificación (2.4) se muestra en la figura 2.1.

Un ejemplo de un orbifold con puntos fijos es el cono definido como $\mathbb{C} / \mathbb{Z}_N$, donde $\mathbb{Z}_N$ es una rotación por un ángulo $2\pi/N$. En el orbifold los puntos $z \in \mathbb{C}$ cumplen con

$$z \simeq e^{2i\pi/N} z. \quad (2.5)$$

Al realizar la identificación se encuentra que el origen $z = 0$ no cambia con la rotación, convirtiéndolo en un punto fijo de $\mathbb{C} / \mathbb{Z}_N$. En la figura 2.2 se muestra la construcción del cono vía la identificación (2.5).


 Figura 2.2: $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_N$.

Existen también los llamados orbifolds toroidales definidos como T^D/G_p , donde T^D es un toro D -dimensional y G_p es un grupo de simetría puntual tal que $G_p \subset SO(D)$. Los elementos g de G_p son rotaciones y están restringidas a actuar cristalográficamente sobre la red del toro, es decir $\forall g \in G_p, V \in \Gamma, gV \in \Gamma$. Como $T^D = \mathbb{R}^D/\Gamma$, el orbifold T^D/G_p puede verse como $\mathbb{R}^D/S$, donde S es el grupo espacial, el cual contiene a las rotaciones y traslaciones en la red Γ .

Para el caso en que $G_p = \mathbb{Z}_N$. Los elementos θ de $\mathbb{Z}_N$ poseen los autovalores $e^{\pm 2i\pi v_i}$, $i = 1, \dots, D/2$, sobre una complejificación de las coordenadas de $\mathbb{R}^D$ con D par, es decir

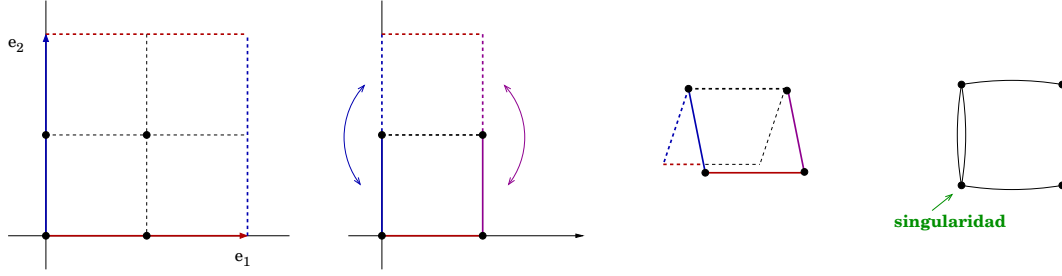
$$\theta(x_{2i-1} \pm ix_{2i}) = e^{\pm 2i\pi v_i}(x_{2i-1} \pm ix_{2i}). \quad (2.6)$$

Además, estas rotaciones deben satisfacer $\theta^N = \mathbb{I}$, lo que nos dice que $v_i = k_i/N$, con k_i entero. Estos orbifolds en general admiten puntos fijos. El número de puntos fijos, $\chi(\theta)$, de θ está dado por [5]

$$\chi(\theta) = \det(1 - \theta) = \prod_{i=1}^{D/2} 4\sin^2(\pi v_i). \quad (2.7)$$

Este número debe ser entero y por lo tanto los valores de v_i están restringidos.

Un ejemplo de orbifold toroidal es $T^2/\mathbb{Z}_2$. Consideremos T^2 parametrizado por las coordenadas $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $X_i \simeq X_i + 1$, $i = 1, 2$. La base de la red del


 Figura 2.3: $T^2/\mathbb{Z}_2$.

toro es $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. El grupo $\mathbb{Z}_2$ contiene dos elementos, la identidad $\mathbb{I}$ y una rotación θ por un ángulo π . La acción de θ sobre las coordenadas X_i es $\theta : (X_1, X_2) \rightarrow (-X_1, -X_2)$. Esta acción deja cuatro puntos fijos

$$f_0 = (0, 0) \ , \ f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \ , \ f_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \ , \ f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.8)$$

En la figura 2.3 se muestran los pasos para construir $T^2/\mathbb{Z}_2$, identificando los puntos de T^2 bajo la acción θ .

Estamos interesados en obtener una teoría supersimétrica al compactificar. Supersimetría requiere la existencia de espinores ψ invariantes, es decir $\theta\psi = \psi$. En particular discutiremos el caso $D = 6$. En este caso θ es una rotación de $SO(6)$ y posee autovalores $e^{\pm 2i\pi v_i}$, $i = 1, 2, 3$, sobre la representación vectorial de $SO(6)$ que posee pesos $(\pm 1, 0, 0)$. La rotación θ se puede escribir como

$$\theta = e^{2i\pi(v_1 J_{12} + v_2 J_{34} + v_3 J_{56})} \quad (2.9)$$

donde $J_{2i-1, 2i}$ son los generadores de la sub-álgebra de Cartan de $SO(6)$. Para el caso de espinores, θ actúa sobre una representación espinorial de $SO(6)$ con pesos $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. En esta representación los autovalores de θ son $e^{i\pi(\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3)}$. Entonces, para tener una teoría supersimétrica al compactificar necesitamos que se cumpla

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = 0 \mod 2 \quad (2.10)$$

para alguna escogencia de signo. Como veremos más adelante, en teoría de cuerdas además se deberá satisfacer la condición

$$N(v_1 + v_2 + v_3) = 0 \pmod{2} \quad (2.11)$$

para obtener una teoría invariante modular al compactificar en estos orbifolds.

2.2. Propagación de Cuerdas en $\mathcal{M}_4 \times T^6/G_p$

En esta sección nos interesa estudiar la propagación de cuerdas cerradas en el espacio $\mathcal{M}_4 \times T^6/G_p$, donde $\mathcal{M}_4$ es un espacio-tiempo de Minkowski 4-dimensional y T^6/G_p es un orbifold toroidal 6-dimensional. Como el orbifold es plano, en este espacio las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes, y sólo cambian las condiciones de contorno.

Las teorías en $\mathcal{M}_4$ son idénticas a las discutidas en el capítulo 1. Nos concentraremos en describir las cuerdas en el orbifold T^6/G_p . El espacio T^6/G_p es un orbifold que admite puntos fijos, por lo tanto es un orbifold singular. Sin embargo, la propagación de cuerdas en estos espacios no es singular [4, 5]. Esto se debe a la adición de los llamados sectores torcidos. Estos sectores son aquellos en los cuales los campos satisfacen la condición

$$X(t, \sigma + 2\pi) = gX(t, \sigma) \quad , \quad g \in G. \quad (2.12)$$

El sector con $g = 1$ es llamado el sector no torcido. Como veremos más adelante necesitamos incluir estos sectores para obtener una teoría invariante modular.

Consideramos a los estados en el espectro físico como a los estados que son invariantes frente a la acción del orbifold. El operador que realiza la proyección sobre estos estados viene dado por

$$\mathcal{P} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \bar{h} \quad (2.13)$$

donde $\bar{h}$ es una representación del elemento h del grupo sobre los estados de la cuerda, y $|G|$ es el número de elementos del grupo. Por ejemplo, para el caso en que $G_p = \mathbb{Z}_N$ el proyector $\mathcal{P}$ toma la forma

$$\mathcal{P} = \frac{1}{N}(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1}). \quad (2.14)$$

Hemos visto como a partir de la función de partición podemos obtener el espectro de la teoría. Por esta razón estamos interesados en hallar la función de partición en el orbifold. Para esto escribiremos la función de partición en el sector no torcido y realizaremos transformaciones modulares para determinar la función de partición en otros sectores. La función de partición en el sector no torcido es

$$\mathcal{Z}_1(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr } \mathcal{P} q^{L_0(1)} \bar{q}^{\tilde{L}_0(1)} \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{P}$ es el operador definido en (2.13). Los operadores $L_0(1)$ y $\tilde{L}_0(1)$ son los operadores de Virasoro de orden cero hallados con $g = 1$. Al sustituir $\mathcal{P}$ en la función de partición (2.15) se obtiene

$$\mathcal{Z}_1(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \text{Tr } \bar{h} q^{L_0(1)} \bar{q}^{\tilde{L}_0(1)}. \quad (2.16)$$

Incluir $\bar{h}$ en la traza implica que también debemos considerar a los estados con las condiciones

$$X(t + 2\pi\tau_2, \sigma + 2\pi\tau_1) = hX(t, \sigma). \quad (2.17)$$

Las cantidades τ_1 y τ_2 son respectivamente la parte real y la parte imaginaria del parámetro modular del toro τ . La ecuación (2.16) se puede escribir como

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \mathcal{Z}(1, h) \quad (2.18)$$

donde la función $\mathcal{Z}(g, h)$ es la función de partición hallada con la condición de contorno (2.12) en σ y la condición (2.17) en t .

La función de partición total debe ser invariante frente a las transformaciones modulares $\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Sin embargo al aplicar estas transformaciones cambiamos

h y g , es decir modificamos las condiciones de contorno. Bajo las transformaciones modulares los elementos h y g cambian como

$$(g, h) \rightarrow (g', h') = (g^d h^c, h^a g^b). \quad (2.19)$$

Por ejemplo, vemos que al aplicar $\mathcal{S} : \tau \rightarrow -1/\tau$ cambiamos $(g, h) \rightarrow (h, g^{-1})$. En particular observamos que si $g = 1$ la transformación $\mathcal{S}$ cambia el sector no torcido $(1, h)$ por el sector torcido $(h, 1)$. La transformación $\mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau + 1$ sólo afecta a la condición de contorno en t , por lo que $(g, h) \rightarrow (g, hg)$. Al aplicar esta transformación, las condiciones $(h, 1)$ cambian a (h, h) , si la aplicamos nuevamente obtenemos (h, h^2) . Si realizamos este proceso repetidas veces observamos que para tener una función de partición invariante frente a transformaciones modulares debemos incluir a todos los sectores torcidos.

Finalmente podemos escribir la función de partición total como [4, 5, 11]

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \mathcal{Z}(g, h) = \sum_{g \in G} \left[\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \text{Tr } \bar{h} q^{L_0(g)} \bar{q}^{\tilde{L}_0(g)} \right] \quad (2.20)$$

donde $L_0(g)$ y $\tilde{L}_0(g)$ son los operadores de Virasoro de orden cero hallados con la condición de contorno (2.12). La función de partición (2.20) es válida únicamente para grupos Abelianos. Para el caso en que G es no Abeliano se debe realizar las sumas sobre $[g, h] = 0$, sino las condiciones (2.12) y (2.17) son incompatibles. Usaremos estos resultados para escribir la función de partición para las cuerdas bosónica, fermiónica, y heterótica en distintos orbifolds.

2.2.1. Torsión discreta $\varepsilon(h, g)$

Es posible generalizar la función de partición $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ (2.20) en la forma

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \varepsilon(g, h) \mathcal{Z}(g, h) \quad (2.21)$$

donde $\varepsilon(g, h)$ es una fase relativa, llamada torsión discreta [7]. $\varepsilon(g, h)$ está restringida por invariancia modular que impone las condiciones

$$\begin{aligned}\varepsilon(gf, h) &= \varepsilon(g, h) \varepsilon(f, h) \\ \varepsilon(g, hf) &= \varepsilon(g, h) \varepsilon(g, f) \\ \varepsilon(g, h) &= \varepsilon(h, g)^{-1} \\ \varepsilon(g, h) \varepsilon(h, g) &= \varepsilon(g, g) = \varepsilon(g, 1) = \varepsilon(1, g) = 1\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde $f, g, h \in G$. Para el caso de una compactificación en el orbifold toroidal $T^D/\mathbb{Z}_N$ con generadores $h = \theta^k$, $k = 0, \dots, N-1$, las condiciones (2.22) implican que $\varepsilon(\theta^k, \theta^\ell) = 1$.

Otro ejemplo, es el orbifold $T^D/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, con G_p generado por $\theta \in \mathbb{Z}_N$ ($\theta^N = \mathbb{I}$) y $\omega \in \mathbb{Z}_M$ ($\omega^M = \mathbb{I}$) con M divisible por N , y $M \geq N$. Las condiciones (2.22) implican que $\varepsilon(\theta, \omega) = \varepsilon$, donde ε es la una raíz enésima de la unidad ($\varepsilon^N = 1$). Se encuentra que para cualquier sector torcido $\theta^k \omega^\ell$ la torsión discreta viene dada por

$$\varepsilon(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) = \varepsilon^{ks - t\ell}.\tag{2.23}$$

Por ejemplo, para el orbifold $T^D/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ la torsión discreta toma los valores de $\varepsilon = \pm 1$.

2.3. Cuerda Bosónica en $T^6/\mathbb{Z}_N$

Nos interesa hallar la función de partición de la cuerda cerrada bosónica en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N$, donde $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$. Supondremos que el orbifold es simétrico, es decir G_p actúa de igual forma sobre los modos de oscilación derechos e izquierdos. Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas transversas $X^j(t, \sigma)$, $j = 1, \dots, 6$, siguen siendo las ecuaciones de ondas (1.20). En este orbifold hay $N-1$ sectores torcidos por θ^k , $k = 0, \dots, N-1$, con las condiciones de contorno

$$X^j(t, \sigma + 2\pi) = \theta^k X^j(t, \sigma) + 2\pi W^j\tag{2.24}$$

donde W es un vector que pertenece a la red Γ del toro T^6 . El sector con $k = 0$ es el sector no torcido y corresponde a una compactificación en un toro T^6 .

Para proceder es útil definir una complejificación de las coordenadas X^j como

$$z^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2j-1} + iX^{2j}) \quad , \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

junto con su complejo conjugado $\bar{z}^j$. La acción de los generadores θ^k sobre las coordenadas z^j y $\bar{z}^j$ está dada por

$$\theta^k z^j = e^{2i\pi k v_j} z^j \quad , \quad \theta^k \bar{z}^j = e^{-2i\pi k v_j} \bar{z}^j. \quad (2.26)$$

La solución de la ecuación de ondas se puede escribir como

$$z^j(t, \sigma) = z_0^j + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[\sum_s \frac{\alpha_s^j}{s} e^{-is(t-\sigma)} + \sum_r \frac{\tilde{\alpha}_r^j}{r} e^{-ir(t+\sigma)} \right] \quad (2.27)$$

$$\bar{z}^j(t, \sigma) = \bar{z}_0^j + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[\sum_u \frac{\bar{\alpha}_u^j}{u} e^{-iu(t-\sigma)} + \sum_v \frac{\tilde{\bar{\alpha}}_v^j}{v} e^{-iv(t+\sigma)} \right]. \quad (2.28)$$

Aquí hemos asumido que θ^k no deja direcciones invariantes y por lo tanto los posibles términos lineales en t y σ son incompatibles con las condiciones de frontera (2.24). Al aplicar las condiciones de contorno (2.24) se encuentra además que z_0^j es un punto fijo bajo la acción de θ^k . Los valores de r , s , u , y v , también se determinan aplicando las condiciones de contorno (2.24). Por ejemplo, al aplicar (2.24) sobre z^j encontramos que $e^{2i\pi s} = e^{2i\pi k v_j}$ para los α 's y $e^{-2i\pi r} = e^{2i\pi k v_j}$ para los $\tilde{\alpha}$'s, lo que nos dice que $s = n + k v_j$ y $r = n - k v_j$ con $n \in \mathbb{Z}$. De igual forma se procede para $\bar{z}^j$ encontrando que $u = n - k v_j$ para los $\bar{\alpha}$'s, y $v = n + k v_j$ para los $\tilde{\bar{\alpha}}$'s, donde n es entero.

Al cuantizar se encuentra que los únicos conmutadores distintos de cero son

$$\left[\alpha_{n+k v_j}^i, \bar{\alpha}_{m-k v_j}^j \right] = (n + k v_j) \delta_{m+n,0} \eta^{ij} \quad , \quad \left[\tilde{\alpha}_{m+k v_j}^j, \tilde{\bar{\alpha}}_{n-k v_j}^i \right] = (m + k v_j) \delta_{m+n,0} \eta^{ij} \quad (2.29)$$

Las relaciones de conmutación (2.29) nos indican que tenemos unos operadores de creación derechos $\alpha_{-1+k v_j}^j, \alpha_{-2+k v_j}^j, \dots, \bar{\alpha}_{-k v_j}^j, \bar{\alpha}_{-1-k v_j}^j, \dots$ con $k v_j \in (0, 1)$, y también

unos operadores de aniquilación $\alpha_{kv_j}^j, \alpha_{1+kv_j}^j, \dots, \bar{\alpha}_{1-kv_j}^j, \bar{\alpha}_{2-kv_j}^j, \dots$ con $kv_j \in (0, 1)$. El operador número N_R asociado a estos osciladores está dado por

$$N_R = \sum_{n=0}^{\infty} : \alpha_{-n-kv_j}^j \bar{\alpha}_{n+kv_j}^j : + \sum_{n=0}^{\infty} : \bar{\alpha}_{-n+kv_j}^j \alpha_{n-kv_j}^j : . \quad (2.30)$$

Existe una expresión análoga para el operador número N_L de los osciladores izquierdos.

Para construir el espectro se define un estado base $|0, f\rangle_k$, el cual es destruido por todos los operadores de aniquilación. Este estado base depende del sector torcido θ^k y de la cantidad de puntos fijos $f = 1, \dots, \chi(\theta^k)$ de θ^k . El número de puntos fijos, $\chi(\theta^k)$, de θ^k está dado por

$$\chi(\theta^k) = \prod_{j=1}^3 4 \operatorname{sen}^2(\pi kv_j). \quad (2.31)$$

Más adelante obviaremos el índice de punto fijo f , y hablaremos del estado base $|0\rangle_k$ con una degeneración a ser especificada.

Los estados excitados se construyen haciendo actuar a los operadores de creación sobre el estado base $|0, f\rangle_k$, satisfaciendo la condición de igualdad de nivel $N_L = N_R$. Estos estados están caracterizados por transformar bajo la acción de los elementos de $\mathbb{Z}_N$. En particular en el espectro nos interesan los estados que son invariantes bajo θ^ℓ , $\ell = 0, \dots, N-1$. Bajo la acción de θ^ℓ los estados tienen el autovalor $e^{2i\pi\ell(\rho_R + \rho_L)}$. El valor de ρ_R se halla añadiendo las autovalores de cada oscilador derecho bajo la acción de θ^ℓ y similarmente para ρ_L . Por ejemplo, los osciladores $\alpha_{-1+kv_j}^j, \alpha_{-2+kv_j}^j, \dots$ bajo θ^ℓ añaden v_j a ρ_R y los osciladores $\bar{\alpha}_{-kv_j}^j, \bar{\alpha}_{-1-kv_j}^j, \dots$ contribuyen con $-v_j$. Para los osciladores izquierdos los $\tilde{\alpha}$'s contribuyen con $-v_j$ al valor de ρ_L y los $\tilde{\bar{\alpha}}$'s con v_j .

Nuestro interés fundamental es hallar la función de partición que según la ecuación (2.20) está dada por

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \left[\operatorname{Tr} \theta^\ell q^{L_0(\theta^k)} \bar{q}^{\tilde{L}_0(\theta^k)} \right] \quad (2.32)$$

donde hemos usado el proyector $\mathcal{P}$ definido en (2.14) como proyector del orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N$. Usando el método mostrado en la sección 2.2, se determina $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$. Inicialmente se halla la función de partición en el sector no torcido ($k = 0$), y luego usando las transformaciones modulares $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ se determina la función $\mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell)$. De esta manera se encuentra [19]

$$\mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell) = \chi(\theta^k, \theta^\ell) \left| \prod_{j=1}^3 \frac{\eta}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} + k v_j \\ \frac{1}{2} + \ell v_j \end{smallmatrix} \right]} \right|^2 \quad (2.33)$$

donde η es la función de Dedekind definida en (1.108), y la función $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right]$ es la función ϑ de Jacobi dada en (1.122). La constante $\chi(\theta^k, \theta^\ell)$ es el número de puntos fijos simultáneos de θ^k y θ^ℓ en la red rotada por θ^k . Por definición $\chi(1, \theta^k) = \chi(\theta^k, 1) = \chi(\theta^k)$, donde $\chi(\theta^k)$ está definido en (2.31).

Usando la representación de $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right]$ como productorias (1.122) la ecuación (2.33) se reescribe como

$$\mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell) = \chi(\theta^k, \theta^\ell) (q\bar{q})^{-\frac{1}{4} + E_k} \left| \prod_{j=1}^3 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n+kv_j} e^{2i\pi\ell v_j})^{-1} (1 - q^{n-1-kv_j} e^{-2i\pi\ell v_j})^{-1} \right|^2 \quad (2.34)$$

La constante E_k es parte de la energía de vacío de los infinitos osciladores y está dada por

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 k |v_j| (1 - k |v_j|). \quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.34) en (2.32) y agrupando las potencias de q y $\bar{q}$ se obtiene

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m_R^2, m_L^2} d_k(m_R^2, m_L^2) q^{\frac{\alpha'}{2} m_R^2} \bar{q}^{\frac{\alpha'}{2} m_L^2} \right). \quad (2.36)$$

A partir de las potencias de q y $\bar{q}$ se deducen las fórmulas de masa

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + E_k - \frac{1}{4}, \quad \frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + E_k - \frac{1}{4}. \quad (2.37)$$

donde la energía de vacío E_k está definida en (2.35).

La cantidad $d_k(m_R^2, m_L^2)$, es la degeneración que cuenta el número de estados por nivel de masa m_R^2 y m_L^2 . A partir de la función de partición se obtiene

$$d_k(m_R^2, m_L^2) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell) e^{2i\pi\ell(\rho_L + \rho_R)} \quad (2.38)$$

donde $e^{2i\pi\ell(\rho_L + \rho_R)}$ es el autovalor de θ^ℓ sobre los estados con productos de osciladores explicado anteriormente. La constante $\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ es el número de puntos fijos de θ^k y θ^ℓ en la sub-red rotada por θ^k . Para los sectores torcidos el valor de $\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ puede diferir de $\chi(\theta^k, \theta^\ell)$. Concretamente, el valor de $\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ está dado por [19]

$$\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell) = \begin{cases} \chi(\theta^k, \theta^\ell) & , \quad kv_j \neq \mathbb{Z} \\ \frac{\chi(\theta^k, \theta^\ell)}{\prod_{j, kv_j \in \mathbb{Z}} 4 \operatorname{sen}^2(\pi \ell v_j)} & , \quad kv_j = \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.39)$$

Este resultado se deduce usando (2.33).

La degeneración d_k se interpreta como un proyector, ya que determina los estados que permanecen en el espectro, y sabemos que sólo los estados invariantes bajo la proyección del orbifold están permitidos. Por ejemplo, para el sector no torcido, donde los $\tilde{\chi}(1, \theta^\ell) = 1$, d_0 se escribe como

$$d_0(m_R^2, m_L^2) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{2i\pi\ell\rho} = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1 - e^{2i\pi\rho N}}{1 - e^{2i\pi\rho}} \right\} \quad (2.40)$$

donde $\rho = \rho_R + \rho_L$. En general ρ es un múltiplo de $1/N$ y por lo tanto d_0 se anula a menos que ρ sea un entero. En este caso al tomar el límite se encuentra que $d_0 = 1$. En particular, el estado de vacío es invariante y no degenerado. Al actuar con operadores de creación se obtiene un estado invariante sólo cuando $\rho =$ entero, como es lógico porque la acción de θ^ℓ sobre el estado es precisamente $e^{2i\pi\ell\rho}$.

Para finalizar discutiremos brevemente la función de partición de la teoría propagándose en el espacio $\mathcal{M}_4 \times T^6/\mathbb{Z}_N$. La función de partición en este espacio es el

producto de la función de partición en el espacio-tiempo $\mathcal{M}_4$ por la función de partición en $T^6/\mathbb{Z}_N$. En los sectores torcidos se encuentra

$$\mathcal{Z}_B(\theta^k, \theta^\ell) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^4} \chi(\theta^k, \theta^\ell) \left| \prod_{j=1}^3 \frac{\eta}{\vartheta \left[\frac{1}{2} + k v_j \right]} \right|^2. \quad (2.41)$$

El primer factor en (2.41), que proviene de la función de partición en el calibre del cono de luz de la cuerda bosónica en $\mathcal{M}_4$, surge como se explicó en la sección 1.3.1 con $d = 2$. El resto es la función de partición (2.33) del orbifold.

2.4. Cuerda Fermiónica en $T^6/\mathbb{Z}_N$

En esta sección queremos hallar la función de partición de las cuerdas cerradas fermiónicas en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N$. En la teoría de cuerda fermiónica en el cono de luz los campos son los bosones $X^i(t, \sigma)$ y los fermiones $\Psi^i(t, \sigma)$, $i = 1, \dots, 8$. La contribución de los grados de libertad bosónicos a la función de partición ha sido explicada en la sección anterior y se resume en la fórmula (2.41). En esta sección nos dedicaremos a describir la contribución de los grados de libertad fermiónicos denotada por $\mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell)$. Para ser concretos trataremos la cuerda fermiónica tipo IIB.

Para empezar recordemos que el campo $\Psi^i(t, \sigma)$, el cual es un espinor Majorana en las dos dimensiones de la superficie de mundo, tiene componentes $\psi^i(t - \sigma)$ y $\tilde{\psi}^i(t + \sigma)$, las cuales son modos de oscilación derechos e izquierdos respectivamente. En el orbifold, los campos ψ^j y $\tilde{\psi}^j$, $j = 1, \dots, 6$, también satisfacen las ecuaciones de movimiento mostradas en (1.75). Para discutir el efecto de las condiciones de contorno en el orbifold consideraremos los modos derechos ψ^j . En un sector torcido por θ^k , $k = 0, \dots, N - 1$, se tiene

$$\psi^j(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\alpha} \theta^k \psi^j(t, \sigma) \quad , \quad j = 1, \dots, 6. \quad (2.42)$$

donde $\alpha = 0, 1/2$, indica el sector NS ó R. Además también se deben tomar en cuenta las condiciones de contorno

$$\psi^j(t + 2\pi\tau_2, \sigma + 2\pi\tau_1) = -e^{2i\pi\beta}\theta^\ell\psi^j(t, \sigma) \quad (2.43)$$

donde $\beta = 0, 1/2$. Definimos una complejificación de ψ^j como

$$\Omega^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2j-1} + i\psi^{2j}) \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.44)$$

junto con su complejo conjugado $\bar{\Omega}^j$. Las condiciones de contorno que satisfacen Ω^j y $\bar{\Omega}^j$ en el sector θ^k son

$$\Omega^j(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\alpha} e^{2i\pi kv_j} \Omega^j(t, \sigma) \quad (2.45)$$

$$\bar{\Omega}^j(t, \sigma + 2\pi) = -e^{2i\pi\alpha} e^{-2i\pi kv_j} \bar{\Omega}^j(t, \sigma). \quad (2.46)$$

Se encuentra que Ω^j y $\bar{\Omega}^j$ tienen asociados unos osciladores fermiónicos $b_{n+\alpha-\frac{1}{2}+kv_j}^j$ con $n \in \mathbb{Z}$, y $\bar{b}_{n+\alpha-\frac{1}{2}-kv_j}^j$ con n entero, respectivamente.

Para hallar la parte fermiónica de la función de partición se procede como en el caso bosónico. Se empieza con la función de partición en el sector no torcido, $k = 0$, la cual está dada en (1.118) y (1.121) para $\ell = 0$. Luego se determina $\mathcal{Z}_F(1, \theta^\ell)$ incluyendo la acción de θ^ℓ sobre los ψ^j y $\tilde{\psi}^j$. Para obtener $\mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell)$, $k \neq 0$, se realizan transformaciones modulares. De esta manera se encuentra que la contribución fermiónica en el espacio $\mathcal{M}_4 \times T^6/\mathbb{Z}_N$ es [19, 20]

$$\mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell) = \frac{1}{4} \left| \sum_{\alpha, \beta=0, \frac{1}{2}} S_{\alpha\beta}(k, \ell) \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]}{\eta} \prod_{j=1}^3 \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \alpha + k v_j \\ \beta + \ell v_j \end{smallmatrix}\right]}{\eta} \right|^2 \quad (2.47)$$

El factor $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]/\eta$ es la contribución de los fermiones ψ^i , $i = 7, 8$, en el cono de luz, mientras que cada factor $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \alpha + k v_j \\ \beta + \ell v_j \end{smallmatrix}\right]/\eta$ se debe a los ψ^j , $j = 1, \dots, 6$, compactificados en $T^6/\mathbb{Z}_N$. Como ya hemos visto la suma en α indica, ya sea el sector NS ($\alpha = 0$) ó el sector R ($\alpha = 1/2$). La suma sobre β realiza la proyección GSO. Los $S_{\alpha\beta}(k, \ell)$ son los coeficientes de estructura de spin, los cuales dependen de los sectores torcidos.

La función de partición completa se escribe como

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathcal{Z}_B(\theta^k, \theta^\ell) \mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell) \quad (2.48)$$

donde $\mathcal{Z}_B(\theta^k, \theta^\ell)$ es la función de partición bosónica definida en (2.41) y $\mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell)$ es la contribución fermiónica (2.47). Al estudiar la invariancia modular de $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ se encuentra que los coeficientes $S_{\alpha\beta}(k, \ell)$ deben satisfacer las relaciones

$$S_{00}(k, \ell) = -S_{\frac{1}{2}0}(k, \ell) = 1 \quad , \quad -S_{0\frac{1}{2}}(k, \ell) = S_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(k, \ell) = e^{-i\pi k(v_1+v_2+v_3)}. \quad (2.49)$$

Para compactificaciones de cuerdas tipo IIB se encuentra que los coeficientes $\bar{S}_{\alpha\beta}(k, \ell)$ asociados a los modos de oscilación izquierdos satisfacen las mismas relaciones en (2.49). Como $S_{0\frac{1}{2}}(0, 0) = -1$, y $\theta^N = \mathbb{I}$, al sustituir $k = N$ en (2.49) se encuentra que los v_j deben satisfacer la condición (2.11), $N(v_1 + v_2 + v_3) = 0 \pmod{2}$. En forma consistente con supersimetría es conveniente escoger $(v_1 + v_2 + v_3) = 0$.

Utilizando la representación de $\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ como suma (1.128) se demuestra que

$$\frac{\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}{\eta} \prod_{j=1}^3 \frac{\vartheta \begin{bmatrix} \alpha + k v_j \\ \beta + \ell v_j \end{bmatrix}}{\eta} = \frac{1}{\eta^4} \sum_{r_a \in \mathbb{Z} + \alpha} q^{\frac{1}{2}(r+kv)^2} e^{2i\pi\ell(r+kv) \cdot v} e^{2i\pi\beta(r_0+r_1+r_2+r_3)} \quad (2.50)$$

donde se ha asumido $(v_1 + v_2 + v_3) = 0$, y se ha definido el vector

$$v = (0, v_1, v_2, v_3). \quad (2.51)$$

Nuevamente se ha realizado una bosonización, intercambiando los fermiones ψ^i , $i = 1, \dots, 8$, por 4 bosones H_a con momentum $(r + kv)$. En forma similar los fermiones $\tilde{\psi}^i$ se intercambian con 4 bosones $\tilde{H}_a$ con momentum $(p + kv)$. Los vectores r y p son pesos de $SO(8)$ y al hacer la suma sobre β se encuentra que se debe satisfacer la proyección GSO, $\sum_a r_a = \text{impar}$, tanto en el sector NS como en el R.

La función de partición completa (2.48) a su vez se expresa en la forma (2.36).

Expandiendo $\mathcal{Z}_B$ y $\mathcal{Z}_F$ en potencias de q y $\bar{q}$ se determinan las fórmulas de masa

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{1}{2}(r + kv)^2 + E_k - \frac{1}{2} \quad (2.52)$$

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + \frac{1}{2}(p + kv)^2 + E_k - \frac{1}{2} \quad (2.53)$$

donde E_k es la energía de vacío dada en (2.35). EL operador número N_R incluye la contribución de los osciladores α 's dada en (2.30), que en general tiene valores fraccionarios, y también la contribución de los osciladores H_{-n} asociados a los bosones H_a , la cual es entera. El operador N_L es similar.

La degeneración de estados también se determina a partir de (2.48). Se encuentra [19]

$$d_k(m_R^2, m_L^2) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell) \Delta_k^\ell(N_R, \rho_R, r; N_L, \rho_L, p) \quad (2.54)$$

donde la fase $\Delta_k(N_R, \rho_R, r; N_L, \rho_L, p)$ está dada por

$$\Delta_k(N_R, \rho_R, r; N_L, \rho_L, p) = \exp\{2i\pi [(r + kv) \cdot v - (p + kv) \cdot v + (\rho_R + \rho_L)]\}. \quad (2.55)$$

El factor $\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ es el número de puntos fijos simultáneos de θ^k y θ^ℓ en la sub-red rotada por θ^k definido en (2.39). La degeneración d_k se interpreta como un proyector, ya que se anula cuando el estado caracterizado por r, p, ρ_R , y ρ_L , no es invariante bajo la acción del orbifold. Por esta razón a d_k se le llama proyector $\mathbb{Z}_N$.

2.5. Cuerda Heterótica en $T^6/\mathbb{Z}_N$

En esta sección estudiaremos la función de partición de la cuerda heterótica al compactificar en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N$. Como vimos, la cuerda heterótica es una teoría de cuerdas cerradas en la que los grados de libertad derechos son los de la cuerda fermiónica dado por $X_R^i(t - \sigma)$ y $\psi^i(t - \sigma)$, $i = 1, \dots, 8$, en el cono de luz. Los grados de libertad izquierdos están dados por los campos $X_L^i(t + \sigma)$, $i = 1, \dots, 8$, y 32 fermiones Majorana λ^A , $A = 1, \dots, 32$. Para empezar discutiremos la cuerda heterótica $SO(32)$, en la que las condiciones de contorno sobre los 32 fermiones λ^A se aplican simultáneamente.

La acción de θ^k sobre los campos X_R^j , ψ^j , y X_L^j , $j = 1, \dots, 6$, fue explicada en las secciones 2.2.1 y 2.2.2. Invariancia modular requiere que exista una acción sobre los

32 fermiones λ^A . Definimos una complejificación de los λ^A como

$$\xi^I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^{2I-1} + i\lambda^{2I}) \quad , \quad I = 1, \dots, 16, \quad (2.56)$$

junto con su complejo conjugado $\bar{\xi}^I$. Por ser fermiones asumimos que la acción de θ^k sobre los ξ^I tiene la misma forma que sobre los Ω^j . Para esto introducimos el vector V , con componentes $V^I = K^I/N$, $I = 1, \dots, 16$, con $K^I \in \mathbb{Z}$, que realiza la acción de θ sobre los ξ^I , esto es

$$\theta^k \xi^I = e^{2i\pi k V_I} \xi^I. \quad (2.57)$$

Como $\theta^N = \mathbb{I}$, veremos que el vector V debe satisfacer $NV \in \Gamma_{16}$, donde Γ_{16} es la red definida en (1.154) en la sección 1.4.1.

La función de partición total tiene la misma forma (2.48). La contribución de los grados de libertad bosónicos X^i , $i = 1, \dots, 8$, es la explicada en la sección 2.4, y se resume en la ecuación (2.41). Para determinar la contribución de los grados de libertad fermiónicos se procede como en la sección anterior. Se comienza con la función de partición en el sector no torcido, $k = 0$, dada en (1.118), (1.121), y (1.152), para $\ell = 0$. Luego se halla $\mathcal{Z}_F(1, \theta^\ell)$ incluyendo la acción de θ^ℓ sobre ψ^j y λ^A . Para obtener $\mathcal{Z}(\theta^k, \theta^\ell)$ con $k \neq 0$ se usan las transformaciones modulares. De esta forma se encuentra

$$\mathcal{Z}_F(\theta^k, \theta^\ell) = \frac{1}{4} e^{i\pi\delta(k,\ell)} \sum_{\alpha, \beta=0, \frac{1}{2}} S_{\alpha\beta}(k, \ell) \prod_{j=0}^3 \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha + k v_j \\ \beta + \ell v_j \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \sum_{\gamma, \rho=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell) \prod_{I=1}^{16} \frac{\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma + k V_I \\ \rho + \ell V_I \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}} \quad (2.58)$$

El factor con $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha + k v_j \\ \beta + \ell v_j \end{smallmatrix} \right] / \eta$ corresponde a la contribución de los ψ^i , $i = 1, \dots, 8$, en $\mathcal{M}_4 \times T^6/\mathbb{Z}_N$, donde consideramos $v_0 = 0$. El factor con los $\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma + k V_I \\ \rho + \ell V_I \end{smallmatrix} \right] / \bar{\eta}$ se debe a los λ^A , $A = 1, \dots, 32$, compactificados en $T^6/\mathbb{Z}_N$. $\delta(k, \ell)$ es una fase fijada por invariancia modular. Para $k = 0$, se elige $\delta(0, \ell) = \delta(0, 0) = 0$ y para determinar δ en los otros sectores se realizan transformaciones modulares. Se encuentra que la fase está dada por

$$\delta(k, \ell) = k\ell(V^2 - v^2). \quad (2.59)$$

La suma sobre los índices α y γ , indican los sectores ya sea el sector NS ($\alpha = 0$) o el sector R ($\alpha = 1$), de igual forma para γ . La suma sobre β y ρ implementa la proyección GSO. Los coeficientes $S_{\alpha\beta}(k, \ell)$ y $\bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell)$ son los coeficientes de estructura de espín.

Al estudiar la invariancia modular de la función de partición total $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$, los coeficientes $S_{\alpha\beta}(k, \ell)$ satisfacen las condiciones (2.49), y los coeficientes $\bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell)$ deben satisfacer

$$\bar{S}_{00}(k, \ell) = \bar{S}_{\frac{1}{2}0}(k, \ell) = 1 \quad , \quad \bar{S}_{0\frac{1}{2}}(k, \ell) = \bar{S}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(k, \ell) = e^{i\pi k \sum_I V_I}. \quad (2.60)$$

Como $S_{0\frac{1}{2}}(0, 0) = -1$, $\bar{S}_{0\frac{1}{2}}(0, 0) = 1$, y $\theta^N = \mathbb{I}$, al hacer $k = N$ en (2.49) y (2.60) se encuentra la condición (2.11), que restringe los v_j . Como antes es conveniente elegir $(v_1 + v_2 + v_3) = 0$, para garantizar supersimetría e invariancia modular. Además se encuentran las relaciones

$$N \sum_{I=1}^{16} V_I = 0 \pmod{2} \quad (2.61)$$

$$N(V^2 - v^2) = 0 \pmod{2} \quad (2.62)$$

A partir de (2.61) se demuestra que $NV \in \Gamma_{16}$. La condición (2.62) es necesaria para garantizar la igualdad de nivel $M_L^2 = M_R^2$. Con las condiciones (2.61), (2.62), y $NV \in \Gamma_{16}$, se determinan los vectores V permitidos por invariancia modular. Siempre hay una solución de estas condiciones dada por

$$V = (v_1, v_2, v_3, 0^{13}). \quad (2.63)$$

Esta solución se denomina acción estándar.

Utilizando la representación de $\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ como suma (1.128) se encuentra que

$$\prod_{I=1}^{16} \frac{\vartheta \begin{bmatrix} \gamma + k V_I \\ \rho + \ell V_I \end{bmatrix}}{\bar{\eta}} = \frac{1}{\eta^{16}} \sum_{P \in \mathbb{Z} + \gamma} \bar{q}^{\frac{1}{2}(P+kV)^2} e^{-2i\pi\ell(P+kV) \cdot V} e^{-2i\pi\rho \sum_I (P_I + kV_I)}. \quad (2.64)$$

En terminos de la red Γ_{16} la contribución de los λ^A se escribe como

$$\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \rho=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell) \prod_{I=1}^{16} \frac{\vartheta \begin{bmatrix} \gamma + k V_I \\ \rho + \ell V_I \end{bmatrix}}{\bar{\eta}} = \frac{1}{\eta^{16}} \sum_{P \in \Gamma_{16}} \bar{q}^{\frac{1}{2}(P+kV)^2} e^{-2i\pi\ell(P+kV) \cdot V}. \quad (2.65)$$

Usando esta representación hemos realizado nuevamente una bozonización. Hemos cambiado los 32 fermiones λ^A por 16 bosones F_L^I , $I = 1, \dots, 16$, con momento $(P+kV)$, $P \in \Gamma_{16}$, que satisfacen la condición

$$F_L^I(t, \sigma + 2\pi) = F_L^I(t, \sigma) + kV^I + W^I \quad (2.66)$$

donde $W \in \Gamma_{16}$, y $k \neq 0$. Al hacer $k = N$ necesariamente el vector $NV \in \Gamma_{16}$, ya que este sector corresponde al sector no torcido con la condición mostrada en (3.47). Vemos nuevamente que el vector V es una traslación de la red Γ_{16} .

La función de partición completa $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ también se expresa como (2.36). Expandiendo $\mathcal{Z}_B$ y $\mathcal{Z}_F$ en potencias de q y $\bar{q}$ se encuentran las fórmulas de masa. La fórmula de masa para los modos de oscilación derechos es igual a la mostrada en (2.52). La fórmula de masa para los modos de oscilación izquierdos es

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2}(P + kV)^2 + E_k - 1. \quad (2.67)$$

El operador N_L es el operador número de los osciladores bosónicos α 's, y en general toma valores fraccionarios. El operador N_F es el operador de número asociados a los osciladores F_{-n}^I de los campos F_L^I , y toma sólo valores enteros. Estos osciladores bosónicos actúan sobre un estado fundamental denotado por $|\tilde{0}\rangle$. El vector P debe pertenecer a la red Γ_{16} . La energía E_k está definida en (2.35).

Al reescribir la función de partición según (2.36) también se encuentra el factor de degeneración, ó proyector,

$$d_k(m_R^2, m_L^2) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell) \Delta_k^\ell(N_R, \rho_R, r; N_L, N_F, \rho_L, P). \quad (2.68)$$

La fase $\Delta_k(N_R, \rho_R, r; N_L, N_F, \rho_L, P)$ es

$$\Delta_k = \exp\{2i\pi [(r + kv) \cdot v - (P + kV) \cdot V + k/2(V^2 - v^2) + (\rho_R + \rho_L)]\}. \quad (2.69)$$

Esta fase satisface la relación $\Delta_k^N = 1$. El factor $\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ es el número de puntos fijos simultáneos de θ^k y θ^ℓ en la sub-red rotada por θ^k definido en (2.39).

Este análisis es completamente análogo para la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$, la diferencia está en que $P, NV \in \Gamma_8 \times \Gamma_8$, donde Γ_8 es la red definida (1.165).

2.6. Cuerda Heterótica en $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$

En esta sección queremos estudiar la cuerda heterótica en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, donde $M \geq N$, y M es divisible por N . El grupo $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ está generado por las rotaciones θ y ω pertenecientes a $SO(6)$. Estas rotaciones deben actuar cristalográficamente sobre la red del toro T^6 . Además deben satisfacer las relaciones $\theta^N = \mathbb{I}$ y $\omega^M = \mathbb{I}$.

En este orbifold tenemos los sectores torcidos por $\theta^k \omega^\ell$, $k = 0, \dots, N-1$, y $\ell = 0, \dots, M-1$. Los elementos $\theta^k \in \mathbb{Z}_N$ tienen los autovalores $e^{\pm 2i\pi k a_j}$, $j = 1, 2, 3$, sobre los campos z^j y Ω^j . También poseen los autovalores $e^{2i\pi k A_I}$, $I = 1, \dots, 16$, sobre los ξ^I . En cuanto a los rotaciones $\omega^\ell \in \mathbb{Z}_M$, tienen los autovalores $e^{2i\pi \ell b_j}$, $j = 1, 2, 3$, sobre los z^j y Ω^j , y los autovalores $e^{2i\pi \ell B_I}$, $I = 1, \dots, 16$, sobre los ξ^I . La acción de θ sobre los grados de libertad bosónicos X^i y fermiónicos ψ^i , $i = 1, \dots, 8$, en la cuerda heterótica se puede expresar en términos del vector

$$a = (0, a_1, a_2, a_3). \quad (2.70)$$

De forma similar la acción de ω sobre los grados de libertad bosónicos X^i y fermiónicos ψ^i , $i = 1, \dots, 8$, se puede expresar en términos del vector

$$b = (0, b_1, b_2, b_3). \quad (2.71)$$

En cuanto a los 32 fermiones λ^A la acción de estas rotaciones está dada por las transformaciones A y B .

La función de partición en este orbifold está dada según (2.21) por [8]

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{NM} \sum_{k,t=0}^{N-1} \sum_{\ell,s=0}^{M-1} \varepsilon(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) \mathcal{Z}_B(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) \mathcal{Z}_F(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s). \quad (2.72)$$

El factor $\varepsilon(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ es la torsión discreta que cumple con (2.23). La contribución bosónica $\mathcal{Z}_B(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ es la generalización de (2.41), es decir

$$\mathcal{Z}_B(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^4} \chi(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) \left| \prod_{j=1}^3 \frac{\eta}{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} + k a_j + \ell b_j \\ \frac{1}{2} + t a_j + s b_j \end{smallmatrix} \right]} \right|^2 \quad (2.73)$$

donde $\chi(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ es el número de puntos fijos simultáneos de $\theta^k \omega^\ell$ y $\theta^t \omega^s$, y el factor $1/|\eta(\tau)|^4$ proviene de la contribución del espacio $\mathcal{M}_4$ en el cono de luz. Esta expresión se determina haciendo $kv_j \rightarrow (ka_j + \ell b_j)$ y $\ell v_j \rightarrow (ta_j + sb_j)$ en la ecuación (2.41) de la sección 2.2.1.

A su vez la contribución fermiónica $\mathcal{Z}_F(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ es la generalización de (2.58) y resulta ser

$$\mathcal{Z}_F = \frac{e^{i\pi\delta(k,\ell,t,s)}}{4} \sum_{\alpha, \beta=0, \frac{1}{2}} S_{\alpha\beta}(k, \ell, t, s) \prod_{j=0}^3 \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha + k a_j + \ell b_j \\ \beta + t a_j + s b_j \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \sum_{\gamma, \rho=0, \frac{1}{2}} \bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell, t, s) \prod_{I=1}^{16} \frac{\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma + k A_I + \ell B_I \\ \rho + t A_I + s B_I \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}}. \quad (2.74)$$

El factor con $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha + k a_j + \ell b_j \\ \beta + t a_j + s b_j \end{smallmatrix} \right] / \eta$ se debe a la contribución de los fermiones ψ^i . Este factor se halla haciendo el cambio $kv_j \rightarrow (ka_j + \ell b_j)$, y $\ell v_j \rightarrow (ta_j + sb_j)$ en la primera suma de la ecuación (2.58). El factor con $\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma + k A_I + \ell B_I \\ \rho + t A_I + s B_I \end{smallmatrix} \right] / \eta$ corresponde a la contribución de los 32 fermiones λ^A compactificados en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. Este factor se determina realizando el renombramiento $kV_I \rightarrow (kA_I + \ell B_I)$, y $\ell V_I \rightarrow (tA_I + sB_I)$ en la contribución de los λ^A en (2.58). La fase $\delta(k, \ell, t, s)$ es la generalización de la fase $\delta(k, \ell)$ vista en la sección anterior. Se encuentra que $\delta(k, \ell, t, s)$ está dada por

$$\delta(k, \ell, t, s) = (kA + \ell B) \cdot (tA + sB) - (ka + \ell b) \cdot (ta + sb). \quad (2.75)$$

La suma sobre los índices α y γ nos indican los sectores, ya sea el sector NS ($\alpha = 0$) ó el sector R ($\alpha = 1$), de forma similar para γ . La suma sobre β y ρ implementa la proyección GSO. Los coeficientes $S_{\alpha\beta}(k, \ell, t, s)$ y $\bar{S}_{\gamma\rho}(k, \ell, t, s)$ son los coeficientes de estructura de espín en este orbifold.

Al realizar la bosonización de la ecuación (2.74) usando la representación de $\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right]$ como suma, se encuentra que la contribución de los fermiones ψ^i se intercambia por 4

bosones H_a con momentun $(r + ka + \ell b)$. El vector r es un peso de $SO(8)$ que satisface la proyección GSO, $\sum_a r_a = \text{impar}$, tanto en el sector NS como en el R. También se intercambian los 32 fermiones λ^A por 16 bosones F_L^I con momentun $(P + kA + \ell B)$, con $P \in \Gamma_{16}$, que satisfacen la condición de contorno

$$F_L^I(t, \sigma + 2\pi) = F_L^I(t, \sigma) + kA^I + \ell B^I + W^I \quad (2.76)$$

donde $W \in \Gamma_{16}$, $k \neq 0$, y $\ell \neq 0$.

Ahora la función de partición es la doble suma sobre los sectores torcidos

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{M-1} \left(\sum_{m_R^2, m_L^2} d_{k\ell}(m_R^2, m_L^2) q^{\frac{\alpha'}{2} m_R^2} \bar{q}^{\frac{\alpha'}{2} m_L^2} \right). \quad (2.77)$$

A partir de las potencias de q y $\bar{q}$ en (2.77) se obtienen las fórmulas de masa

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{1}{2}(r + ka + \ell b)^2 + E_{k\ell} - \frac{1}{2} \quad (2.78)$$

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2}(P + kA + \ell B)^2 + E_{k\ell} - 1 \quad (2.79)$$

donde $P \in \Gamma_{16}$. Los operadores N_R y N_L son los operadores de los osciladores derechos α 's, y toman valores fraccionarios. El operador N_R también toma valores enteros debido la contribución de los osciladores H_{-n}^a . El operador N_F es el operador de número de los osciladores F_{-n}^I , $I = 1, \dots, 16$, correspondientes a los campos F_L^I bosonizados, y únicamente toma valores enteros. Estos osciladores bosónicos α 's y F 's actúan sobre un estado base $|\tilde{0}\rangle$. La energía $E_{k\ell}$ es parte de la energía de vacío de los osciladores bosónicos α 's y está dada por

$$E_{k\ell} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (k|a_j| + \ell|b_j|)(1 - k|a_j| - \ell|b_j|). \quad (2.80)$$

Al estudiar la invariancia modular de $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ se encuentran unas condiciones equivalentes a (2.11), dadas por

$$N(a_1 + a_2 + a_3) = 0 \pmod{2} \quad , \quad M(b_1 + b_2 + b_3) = 0 \pmod{2} \quad (2.81)$$

En forma consistente con supersimetría e invariancia modular elegimos $(a_1 + a_2 + a_3) = 0$, y $(b_1 + b_2 + b_3) = 0$. También se encuentra la generalización de las condiciones (2.61), y (2.62), las cuales son [8]

$$N' \sum_{I=1}^{16} (kA_I + \ell B_I) = 0 \pmod{2} \quad (2.82)$$

$$N' [(kA + \ell B)^2 - (ka + \ell b)^2] = 0 \pmod{2} \quad (2.83)$$

donde N' es el orden de la acción $(ka + \ell b)$, con $k = 0, \dots, N-1$ y $\ell = 0, \dots, M-1$. A partir de (2.82) se demuestra que $NA \in \Gamma_{16}$ y $MB \in \Gamma_{16}$. Con las condiciones (2.82), (2.83), $NA \in \Gamma_{16}$ y $MB \in \Gamma_{16}$, se determinan las traslaciones A y B permitidas por invariancia modular. Siempre hay una solución de estas condiciones dada por

$$A = (a_1, a_2, a_3, 0^{13}) \quad , \quad B = (b_1, b_2, b_3, 0^{13}) \quad (2.84)$$

donde 0^m indica que hay m componentes iguales a 0. Esta solución es la acción estándar.

Para la degeneración $d_{k\ell}(m_R^2, m_L^2)$, ó proyector sobre estados invariantes, se encuentra

$$d_{k\ell}(m_R^2, m_L^2) = \frac{1}{NM} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{M-1} \tilde{\chi}(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) \varepsilon^{ks-t\ell} \Delta(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) \quad (2.85)$$

donde ε es la torsión discreta. La fase $\Delta(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ es

$$\begin{aligned} \Delta(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) = & \exp \{ 2i\pi \{ (r + ka + \ell b) \cdot (ta + sb) - (P + kA + \ell B) \cdot (tA + sB) \\ & + 1/2[(kA + \ell B) \cdot (tA + sB) - (ka + \ell b) \cdot (ta + sb)] + t\rho_a + s\rho_b \} \} . \end{aligned} \quad (2.86)$$

El término $e^{2i\pi(t\rho_a + s\rho_b)}$ es el autovalor de $\theta^t \omega^s$ sobre los estados con productos de osciladores α 's. La fase ρ_a es la fase de los osciladores que transforman bajo θ y ρ_b es la fase bajo los que transforman con ω . El factor $\tilde{\chi}(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ el número de puntos fijos de $\theta^k \omega^\ell$ y $\theta^t \omega^s$ en la sub-red rotada por $\theta^k \omega^\ell$. Este factor es la generalización de

$\tilde{\chi}(\theta^k, \theta^\ell)$ y está dado por

$$\tilde{\chi}(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) = \begin{cases} \chi(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s) & , \quad (ka_j + \ell b_j) \neq \mathbb{Z} \\ \frac{\chi(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)}{\prod_{j, (ka_j + \ell b_j) \in \mathbb{Z}} 4 \operatorname{sen}^2[\pi(ta_j + sb_j)]} & , \quad (ka_j + \ell b_j) = \mathbb{Z} \quad . \end{cases} \quad (2.87)$$

Usando las fórmulas de masa y el proyector podemos determinar el espectro completamente.

Este desarrollo es completamente análogo para la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$. Las fórmulas de masa y el proyector no cambian sólo hay que considerar que P , NA , y MB , deben pertenecer a la red $\Gamma_8 \times \Gamma_8$.

CAPÍTULO 3

CUERDAS HETERÓTICAS EN $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

En este capítulo aplicaremos los resultados del capítulo anterior al estudio de cuerdas heteróticas en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Inicialmente se describirá la geometría de $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Luego se clasificarán todas las traslaciones, consistentes con invariancia modular, en las redes Γ_{16} y $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ de las cuerdas heteróticas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. Para cada una de estas traslaciones se determinará el espectro de masa nula, con y sin torsión discreta. El objetivo es comprobar que al incluir torsión discreta se intercambian las representaciones complejas en el espectro, demostrando así que la torsión discreta implementa el mapa espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3.1. Geometría de $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Consideremos el caso en el cual el toro T^6 está factorizado en tres sub-toros T^2 , es decir $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$. Cada sub-toro T^2 está parametrizado por coordenadas $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $X_j \simeq X_j + 1$, $j = 1, 2$. En cada sub-toro la red está dada por los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. El grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ contiene cuatro elementos denotados

por $\mathbb{I}$, θ , ω , y $\theta\omega$. Las acciones de estos elementos están dadas por los vectores 0 , a , b , y $a + b$. Concretamente,

Elementos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	vectores
$\mathbb{I}$	$(0, 0, 0, 0)$
θ	$a = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$
ω	$b = (0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$\theta\omega$	$a + b = (0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

(3.1)

Notemos que los vectores a , b , y $a + b$ satisfacen las condiciones (2.10) y (2.11) con $N = 2$, y por tanto son consistentes con supersimetría e invariancia modular. Cada componente de estos vectores indica como las rotaciones actúan sobre las sub-redes T^2 del toro T^6 . Por ejemplo, θ rota la primera y segunda sub-redes, pero deja la tercera invariante. Por otra parte, ω rota la segunda y la tercera dejando la primera sub-red invariante.

En cada sub-red rotada por los elementos θ , ω , y $\theta\omega$ hay 4 puntos fijos. Entonces, de acuerdo a (2.87) se encuentra que los números de puntos fijos $\tilde{\chi}(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ son

$$\tilde{\chi}(\theta, \theta^t \omega^s) = 16 \quad , \quad \tilde{\chi}(\omega, \theta^t \omega^s) = 16 \quad (3.2)$$

$$\tilde{\chi}(\theta\omega, \theta^t \omega^s) = 16 \quad , \quad \tilde{\chi}(1, \theta^t \omega^s) = 1 \quad (3.3)$$

para todo $t = 0, 1$ y $s = 0, 1$. Estos valores nos serán de utilidad para hallar la degeneración en cada sector torcido $\theta^k \omega^\ell$.

3.2. Clasificación de Traslaciones para $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$

En el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ hay tres sectores torcidos θ , ω , y $\theta\omega$, de orden 2, en los cuales las traslaciones son A , B , y $A + B$, respectivamente. En esta sección estamos interesados en hallar todas las posibles traslaciones A y B permitidas por invariancia modular para las cuerdas heteróticas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. Para uniformizar

la presentación denotaremos por Γ a la red 16-dimensional que puede ser la red Γ_{16} de la cuerda $SO(32)$, ó la red $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ de la cuerda $E_8 \times E_8$. Las traslaciones A y B deben cumplir las condiciones (2.82), (2.83), $NA \in \Gamma$, y $MB \in \Gamma$, vistas en el capítulo anterior. Concretamente, A y B deben satisfacer $2A, 2B \in \Gamma$ y las relaciones

$$A^2 = \frac{1}{2} \pmod{1} \quad (3.4)$$

$$B^2 = \frac{1}{2} \pmod{1} \quad (3.5)$$

$$(A + B)^2 = \frac{1}{2} \pmod{1}. \quad (3.6)$$

Nótese que la condición (3.6) implica $A \cdot B = -1/4 \pmod{1/2}$. Es suficiente tomar $A \cdot B = -1/4$, ya que si $A \cdot B \neq -1/4$, siempre podemos realizar transformaciones en la red del tipo $\tilde{A} \rightarrow A + S$, donde $S \in \Gamma$ y $B \cdot S = k/2$ con k entero, tal que $\tilde{A} \cdot B = -1/4$. Por ejemplo, si $A \cdot B = 1/4$ se elige $k = -1$, lo cual garantiza que $\tilde{A} \cdot B = -1/4$.

Como A y B satisfacen las mismas condiciones es suficiente encontrar todos los vectores A . Una vez obtenidos los vectores A , y por ende los B , se combinan de tal forma que $A \cdot B = -1/4$. Como ejemplo mostraremos el procedimiento para hallar los vectores A en $\Gamma = \Gamma_{16}$. Los vectores $2A$ pueden ser de la forma $(n_1, n_2, \dots, n_{16})$ con n_I entero, por lo que se propone

$$A = \frac{1}{2}(\underline{1^m, 0^{16-m}}) \quad , \quad m = 0, \dots, 15. \quad (3.7)$$

Las condiciones $2A \in \Gamma_{16}$ y (3.4) implican que los únicos valores de m posibles son $m = 2, 6, 10, 14$. Sin embargo, los vectores con $m = 10, 14$ son equivalentes a los vectores con $m = 2, 6$. De esta manera se concluye que los únicos vectores A inequivalentes son $A = \frac{1}{2}(\underline{1^2, 0^{14}})$, y $A = \frac{1}{2}(\underline{1^6, 0^{10}})$. También es posible escribir $2A$ como $(n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2})$ con n_I entero. Entonces,

$$A = \frac{1}{4}(\underline{-3^m, 1^{16-m}}) \quad , \quad m = 0, \dots, 15. \quad (3.8)$$

Las condiciones en este caso implican que hay un único vector A inequivalente, el cual es $A = \frac{1}{4}(\underline{-3, 1^{15}})$. Se demuestra que no hay más vectores inequivalentes que

satisfagan las condiciones impuestas por invariancia modular. En resumen, los vectores A inequivalentes son

$$A = \frac{1}{2}(1^2, 0^{14}) , \quad \frac{1}{2}(1^6, 0^{10}) , \quad \frac{1}{4}(-3, 1^{15}). \quad (3.9)$$

Las traslaciones B tienen forma similar. Escogiendo A y B tales que $A \cdot B = -1/4$ se determinan los casos mostrados en la tabla 3.1.

Las traslaciones A y B rompen el grupo de calibre asociado a la red Γ . El nuevo grupo de calibre se determina identificando los pesos $P \in \Gamma$ con $P^2 = 2$, $P \cdot A = 0 \bmod 1$, y $P \cdot B = 0 \bmod 1$. En la tabla 3.1 se muestran todas las traslaciones A y B en la red Γ_{16} con sus respectivos grupos de calibre inequivalentes. Por ejemplo, en la primera columna de la tabla 3.1 se muestra la acción estándar, cuyo grupo de calibre es $SO(26) \times U(1)^3$.

De forma similar es posible encontrar todas las traslaciones permitidas por invariancia modular en la red $\Gamma_8 \times \Gamma_8$, las cuales se muestran en la tabla 3.2. Usaremos los resultados en las tablas 3.1 y 3.2, para hallar el espectro de masa nula para cada conjunto de traslaciones A y B .

Traslaciones en Γ_{16}	Grupo de calibre
$A = \frac{1}{2}(1, -1, 0^{14})$ $B = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0^{13})$	$SO(26) \times U(1)^3$
$A = \frac{1}{2}(1^5, -1, 0^{10})$ $B = \frac{1}{2}(0^5, 1^6, 0^5)$	$SO(10)^3 \times U(1)$
$A = \frac{1}{2}(1^3, -1^3, 0^{10})$ $B = \frac{1}{2}(0^5, 1^6, 0^5)$	$SO(18) \times SO(10) \times U(1)^2$
$A = \frac{1}{2}(1^2, 0^{14})$ $B = \frac{1}{4}(-3, 1^{15})$	$SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$
$A = \frac{1}{2}(1^6, 0^{10})$ $B = \frac{1}{4}(3, -1^5, 1^{10})$	$SU(6) \times SU(10) \times U(1)^2$
$A = \frac{1}{2}(1^4, -1^2, 0^{10})$ $B = \frac{1}{2}(0^3, 1^6, 0^7)$	$SO(6)^3 \times SO(14)$

Tabla 3.1: Clasificación de traslaciones en la cuerda heterótica $SO(32)$.

Traslaciones en $\Gamma_8 \times \Gamma_8$	Grupo de calibre
$A = \frac{1}{2}(1, -1, 0^6) \times (0^8)$ $B = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0^5) \times (0^8)$	$E_6 \times E_8 \times U(1)^2$
$A = \frac{1}{2}(1, -1, 0^6) \times (0^8)$ $B = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0^5) \times (1, 0^7)$	$E_6 \times SO(16) \times U(1)^2$
$A = \frac{1}{4}(1^8) \times \frac{1}{4}(-1^7, 3)$ $B = (0^8) \times \frac{1}{4}(1^8)$	$E_7 \times SU(2) \times SU(8) \times U(1)$
$A = \frac{1}{2}(1, -1, 0^6) \times \frac{1}{2}(1^4, 0^4)$ $B = \frac{1}{2}(0^2, 1, -1, 0^4) \times \frac{1}{2}(0^3, -1, 1^3, 0)$	$SO(12) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(8) \times U(1)$
$A = \frac{1}{2}(1, -1, 0^6) \times \frac{1}{2}(1^4, 0^4)$ $B = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0^5) \times (0^7, 1)$	$E_6 \times SO(8) \times SO(8) \times U(1)^2$

 Tabla 3.2: Clasificación de traslaciones en cuerda heterótica $E_8 \times E_8$.

3.3. Espectro de Masa Cero: análisis general

En esta sección se describirá el espectro de masa nula de las cuerdas heteróticas en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. En este orbifold tenemos 4 sectores, el sector no torcido, el sector θ , el sector ω , y el sector $\theta\omega$. Para hallar el espectro de masa nula se utilizan las fórmulas de masa (2.78) y (2.79), y se impone la condición de igualdad de nivel $M_L^2 = M_R^2 = 0$. Además, es necesario el proyector (2.85) para calcular la degeneración de los estados. A continuación hallaremos el espectro de masa nula por sector.

3.3.1. Sector no torcido

En este sector se tiene que $k = 0$ y $\ell = 0$, y por lo tanto al sustituir en (2.80) se encuentra $E_{00} = 0$. Las fórmulas de masa son

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2} P^2 - 1. \quad (3.11)$$

Los operadores de número N_L , N_R , y N_F toman sólo valores enteros. Además el vector r es un peso de $SO(8)$ que satisface la proyección GSO, $\sum_a r_a = \text{impar}$, tanto en el sector NS como en el sector R. También tenemos que $P \in \Gamma$.

Para determinar la degeneración de los estados en este sector, se utiliza el proyector

$$d_{00} = \frac{1}{4} [1 + \Delta(1, \theta) + \Delta(1, \omega) + \Delta(1, \theta) \Delta(1, \omega)] \quad (3.12)$$

donde la fase $\Delta(\theta^k \omega^\ell, \theta^t \omega^s)$ está definida en (2.86). Podemos reescribir esta ecuación como

$$d_{00} = \frac{1}{4} [1 + \Delta(1, \theta)] [1 + \Delta(1, \omega)]. \quad (3.13)$$

En este sector se tiene que d_{00} es distinto de cero sólo cuando $\Delta(1, \theta) = \Delta(1, \omega) = 1$, y en ese caso $d_{00} = 1$. A partir de (2.86) se deduce que los estados sobrevivientes en el espectro deben satisfacer

$$r \cdot a + \rho_a - P \cdot A = 0 \pmod{1} \quad (3.14)$$

$$r \cdot b - P \cdot B + \rho_b = 0 \pmod{1}. \quad (3.15)$$

Para hallar el espectro de masa nula hacemos $M_L^2 = M_R^2 = 0$. Los estados derechos en este sector tienen $r^2 = 1$, y por tanto se encuentran los pesos (1.159). Como se han compactificado 6 dimensiones se tiene una ruptura del grupo $SO(8)$ a $SO(2) \times SO(6)$,

donde $SO(2)$ es la parte del espacio-tiempo en el cono de luz. Bajo el grupo $SO(2) \times SO(6)$ las representaciones $\mathbf{8}_v$ y $\mathbf{8}_s$ se descomponen como

$$\mathbf{8}_v = (\mathbf{2}_v, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{6}_v) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{8}_s = (\mathbf{1}_s, \mathbf{4}_c) \oplus (\mathbf{1}_c, \mathbf{4}_s). \quad (3.17)$$

En términos de pesos esto quiere decir, que los pesos $r = (\pm 1, 0, 0, 0)$ correspondientes al $\mathbf{8}_v$, se separan en un vector $r = (\pm 1, 0, 0, 0)$ de $SO(2)$ y 6 escalares $r = (0, \pm 1, 0, 0)$ de $SO(2)$. Además, los pesos $r = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ con número impar de +’s de la representación $\mathbf{8}_s$, se separan en $r = \frac{1}{2}(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ con número par de +’s originando 4 espinores de $SO(2)$ y 4 espinores más de $SO(2)$ con quiralidades opuestas $r = \frac{1}{2}(-1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ con número impar de +’s. Por convención los estados con los pesos $r = (0, 1, 0, 0)$ y $r = \frac{1}{2}(-1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, denotan a las partículas, y cambiando el signo de los r se tienen las antipartículas.

Las soluciones de $M_L^2 = 0$ en este sector son las que existen antes de compactificar. Se tienen los estados con $P^2 = 2$, $N_L = 0$, y $N_F = 0$. Además están los 16 estados con $N_L = 0$, $N_F = 1$, y $P = 0$. Por último se encuentran los 8 estados $\alpha_{-1}^i |\tilde{0}\rangle$, $i = 7, 8$, $\tilde{\alpha}_{-1}^j |\tilde{0}\rangle$, y $\tilde{\alpha}_{-1}^j |\tilde{0}\rangle$, $j = 1, 2, 3$, con $N_L = 1$, $N_F = 0$, y $P = 0$.

Los estados están caracterizados por los productos $r \cdot a$, $r \cdot b$, $P \cdot A$, y $P \cdot B$, que aparecen en el proyector. Los $r = (\pm 1, 0, 0, 0)$ y $r = \pm \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)$ poseen $r \cdot a = 0$, $r \cdot b = 0$, $\rho_a = 0$, y $\rho_b = 0$, y según las condiciones (3.14) y (3.15), se combinan con los estados izquierdos $\alpha_{-1}^i |\tilde{0}\rangle$ que tienen $P \cdot A = 0 \mod 1$ y $P \cdot B = 0 \mod 1$. De esta forma se generan el dilatón ϕ , el gravitón $g_{\mu\nu}$, la 2-forma $B_{\mu\nu}$, un espinor Majorana ψ^- , y un espinor-vector ψ_μ^- , todos en 4-dimensiones. Además tenemos la combinación de los pesos r con los estados izquierdos con $P^2 = 2$, $N_L = 0$, y $N_F = 0$ que posean $P \cdot A = 0 \mod 1$ y $P \cdot B = 0 \mod 1$, y con los 16 estados $F_{-1}^I |\tilde{0}\rangle$, $I = 1, \dots, 16$, con $N_L = 0$, $N_F = 1$, y $P = 0$. De esta manera se generan los vectores y espinores de calibre en 4 dimensiones.

En este sector también aparecen escalares y espinores cargados, denominados materia cargada bajo el grupo de calibre. Estos surgen al combinar los pesos $r = (0, \underline{1}, 0, 0)$ y $r = \frac{1}{2}(-1, \underline{1}, -1, -1)$ con los estados izquierdos $P^2 = 2$, $N_L = 0$, y $N_F = 0$, tal que satisfagan las condiciones impuestas por el proyector. También es posible combinar estos pesos con los osciladores $\tilde{\alpha}_{-1}^j|\tilde{0}\rangle$ y $\tilde{\alpha}_{-1}^j|\tilde{0}\rangle$, $j = 1, 2, 3$, generando los estados llamados moduli.

Mediante los pesos P se determinan las representaciones de los grupos de calibre. En general los grupos pueden tener algún factor $U(1)$. En el caso de que esto ocurra el generador Q de este factor se determina definiendo un vector q , tal que $Q = q \cdot F_{-1}$. Si se tiene más de un factor $U(1)$ se define un vector q para cada uno de ellos, tales que sean ortogonales. Los vectores q deben estar normalizados de acuerdo a la normalización de los generadores de Cartan del grupo no Abelian, dada por $q^2 = 1/2$. Sin embargo, en los espectros que mostraremos usaremos vectores q sin normalizar. El valor de Q sobre una representación con pesos $(P + kA + \ell B)$ se determina proyectando q sobre $(P + kA + \ell B)$, es decir realizando $q \cdot (P + kA + \ell B)$.

3.3.2. Sector θ

En este sector tenemos que $k = 1$ y $\ell = 0$, y al sustituir estos valores junto con las componentes del vector a en (2.80) se encuentra que $E_{10} = 1/4$. Usando este resultado las fórmulas de masa resultan ser

$$\frac{\alpha'}{2}M_R^2 = N_R + \frac{1}{2}(r + a)^2 - \frac{1}{4} \quad (3.18)$$

$$\frac{\alpha'}{2}M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2}(P + A)^2 - \frac{3}{4}. \quad (3.19)$$

En este caso los operadores N_R y N_L toman valores enteros y semienteros, y el operador N_F sólo toma valores enteros.

La degeneración en este sector está dada por el proyector

$$d_{10} = 4[1 + \Delta(\theta, \theta) + \varepsilon\Delta(\theta, \omega) + \varepsilon\Delta(\theta, \theta)\Delta(\theta, \omega)] \quad (3.20)$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ es la torsión discreta. Este resultado se halla sustituyendo el valor de $\tilde{\chi}(\theta, \theta^t \omega^s) = 16$, en la ecuación (2.85). Podemos escribir d_{01} como

$$d_{10} = 4[1 + \Delta(\theta, \theta)][1 + \varepsilon \Delta(\theta, \omega)]. \quad (3.21)$$

Vemos que d_{10} es distinto de cero si $\Delta(\theta, \theta) = 1$, y $\Delta(\theta, \omega) = 1$ para $\varepsilon = 1$. Para el caso con $\varepsilon = -1$ se tiene que $\Delta(\theta, \omega) = -1$. Entonces se deduce que para cualquier valor de ε la degeneración es $d_{10} = 16$. A partir la fase (2.86) se encuentra que los estados sobrevivientes son aquellos que satisfacen

$$r \cdot a - P \cdot A + \rho_a - \frac{1}{2}(A^2 - a^2) = 0 \pmod{1} \quad (3.22)$$

$$\varepsilon = 1 : \quad r \cdot b - P \cdot B + \rho_b - \frac{1}{2}(A \cdot B - a \cdot b) = 0 \pmod{1} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon = -1 : \quad r \cdot b - P \cdot B + \rho_b - \frac{1}{2}(A \cdot B - a \cdot b) = \frac{1}{2} \pmod{1}. \quad (3.24)$$

Los estados derechos de masa cero se determinan haciendo $M_R^2 = 0$ en (3.18), lo cual nos dice que $r = (0, 0, 1, 0)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, -1)$, con $r \cdot a = -1/2$ y $r \cdot b = 1/2$. La condición de igualdad de nivel $M_L^2 = 0$, implica que $N_L = 0, 1/2$ y $N_F = 0$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de masa izquierda (3.19) se encuentra que para $N_L = 0$ se tiene que resolver la ecuación

$$(P + A)^2 = \frac{3}{2}. \quad (3.25)$$

Para $N_L = 1/2$ se encuentra la ecuación

$$(P + A)^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

En estas ecuaciones hay que tomar en cuenta que los vectores P deben satisfacer la desigualdad

$$|P \cdot A| \leq |P||A| \quad (3.27)$$

la cual restringe los posibles valores de P^2 . Los estados en este sector se construyen combinando los pesos $r = (0, 0, 1, 0)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, -1)$ con los pesos $(P + A)$

provenientes de las soluciones de las ecuaciones (3.25) y (3.26). Para $N_L = 1/2$ puede darse la posibilidad que existan estados con osciladores $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j|\tilde{0}\rangle$ y $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j|\tilde{0}\rangle$, $j = 1, 2$, generando un factor extra de degeneración.

3.3.3. Sector ω

Este sector posee $k = 0$ y $\ell = 1$, sustituyendo estos valores junto con las componentes de b en (2.80) se encuentra que $E_{01} = 1/4$. Usando el valor de la energía E_{01} las fórmulas de masa resultan ser

$$\frac{\alpha'}{2}M_R^2 = N_R + \frac{1}{2}(r+b)^2 - \frac{1}{4} \quad (3.28)$$

$$\frac{\alpha'}{2}M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2}(P+B)^2 - \frac{3}{4}. \quad (3.29)$$

Al igual que en el sector anterior, los operadores N_R y N_L toman valores enteros y semienteros, y el operador N_F sólo toma valores enteros.

La degeneración viene dada por el proyector

$$d_{01} = 4[1 + \varepsilon\Delta(\omega, \theta) + \Delta(\omega, \omega) + \varepsilon\Delta(\omega, \theta)\Delta(\omega, \omega)]. \quad (3.30)$$

Podemos reescribir d_{01} como

$$d_{10} = 4[1 + \Delta(\omega, \omega)][1 + \varepsilon\Delta(\omega, \theta)]. \quad (3.31)$$

La degeneración d_{01} es distinta de cero si $\Delta(\omega, \omega) = 1$, y $\Delta(\omega, \theta) = \pm 1$ para $\varepsilon = \pm 1$. Entonces, $d_{01} = 16$ para cualquier valor de ε . A partir de la fase (2.86) se encuentra que los estados que permanecen en el espectro son aquellos que satisfacen

$$r \cdot b - P \cdot B + \rho_b - \frac{1}{2}(B^2 - b^2) = 0 \mod 1 \quad (3.32)$$

$$\varepsilon = 1 : \quad r \cdot a - P \cdot A + \rho_a - \frac{1}{2}(A \cdot B - a \cdot b) = 0 \mod 1 \quad (3.33)$$

$$\varepsilon = -1 : \quad r \cdot a - P \cdot A + \rho_a - \frac{1}{2}(A \cdot B - a \cdot b) = \frac{1}{2} \mod 1. \quad (3.34)$$

Hacer $M_R^2 = 0$ en (3.28) implica que $r = (0, 0, 0, 1)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, -1, 1)$, con $r \cdot a = 0$ y $r \cdot b = -1/2$. La condición de igualdad de nivel $M_L^2 = 0$, nos dice que $N_L = 0, 1/2$ y $N_F = 0$. De forma análoga al sector anterior se encuentra que para $N_L = 0$ se tiene que resolver la ecuación

$$(P + B)^2 = \frac{3}{2}. \quad (3.35)$$

Para $N_L = 1/2$ se encuentra la ecuación

$$(P + B)^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.36)$$

En este caso, la desigualdad

$$|P \cdot B| \leq |P||B| \quad (3.37)$$

restringe los posibles valores de P^2 . Los estados en este sector se construyen combinando los pesos $r = (0, 0, 0, 1)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, -1, 1)$ con los pesos P provenientes de las soluciones de las ecuaciones (3.35) y (3.36). Para $N_L = 1/2$ pueden existir estados con osciladores $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j |\tilde{0}\rangle$ y $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j |\tilde{0}\rangle$, $j = 2, 3$.

3.3.4. Sector $\theta\omega$

Para este sector tenemos que $k = 1$ y $\ell = 1$, y al reemplazar estos valores junto con los valores de las componentes de a y b en (2.80) se encuentra que $E_{11} = 1/4$. Con este valor de energía las fórmulas de masa son

$$\frac{\alpha'}{2} M_R^2 = N_R + \frac{1}{2}(r + a + b)^2 - \frac{1}{4} \quad (3.38)$$

$$\frac{\alpha'}{2} M_L^2 = N_L + N_F + \frac{1}{2}(P + A + B)^2 - \frac{3}{4}. \quad (3.39)$$

Los operadores de número N_R y N_L toman valores enteros y semienteros, y el operador N_F sólo toma valores enteros.

La degeneración está dada por el proyector

$$d_{11} = 4 \left[1 + \varepsilon \Delta(\theta\omega, \theta) + \varepsilon \Delta(\theta\omega, \omega) + \varepsilon^2 \Delta(\theta\omega, \theta) \Delta(\theta\omega, \omega) \right]. \quad (3.40)$$

Este proyector se determina sustituyendo el valor de $\tilde{\chi}(\theta\omega, \theta^t\omega^s) = 16$ en la ecuación (2.85). Escribimos d_{11} como

$$d_{11} = 4[1 + \varepsilon\Delta(\theta\omega, \omega)][1 + \varepsilon\Delta(\theta\omega, \theta)] \quad (3.41)$$

el cual es distinto de cero si $\Delta(\theta\omega, \omega) = \Delta(\theta\omega, \theta) = 1$ para $\varepsilon = 1$. Para $\varepsilon = -1$ se tiene que $\Delta(\theta\omega, \omega) = \Delta(\theta\omega, \theta) = -1$. Se obtiene que la degeneración $d_{11} = 16$ para cualquier valor de ε . En este caso a partir de la fase (2.86) se encuentran las condiciones

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \quad & r \cdot a - P \cdot A + \rho_a - \frac{1}{2}[A \cdot (A + B) - a \cdot (a + b)] = 0 \pmod{1} \\ & r \cdot b - P \cdot B + \rho_b - \frac{1}{2}[B \cdot (A + B) - b \cdot (a + b)] = 0 \pmod{1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = -1 : \quad & r \cdot a - P \cdot A + \rho_a - \frac{1}{2}[A \cdot (A + B) - a \cdot (a + b)] = \frac{1}{2} \pmod{1} \\ & r \cdot b - P \cdot B + \rho_b - \frac{1}{2}[B \cdot (A + B) - b \cdot (a + b)] = \frac{1}{2} \pmod{1}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para hallar el espectro de masa nula se impone $M_R^2 = 0$ en (3.38), lo cual nos dice que $r = (0, 0, 0, 1)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, -1, 1)$. Al imponer nuevamente la condición de igualdad de nivel se encuentra que $N_L = 0, 1/2$ y $N_F = 0$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de masa izquierda (3.39) obtenemos para $N_L = 0$ la ecuación

$$(P + A + B)^2 = \frac{3}{2}. \quad (3.44)$$

Para $N_L = 1/2$ la ecuación es

$$(P + A + B)^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.45)$$

Los estados en este sector se construyen combinando los pesos $r = (0, 0, 0, 1)$, y $r = \frac{1}{2}(-1, -1, -1, 1)$ con los pesos P provenientes de las soluciones de las ecuaciones (3.44) y (3.45). Para $N_L = 1/2$ pueden existir estados con osciladores $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j |\tilde{0}\rangle$ y $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^j |\tilde{0}\rangle$, $j = 2, 3$.

3.4. Espectro de Masa Cero: ejemplo

Como ejemplo explícito hallaremos el espectro de masa nula considerando la red Γ_{16} , y las traslaciones

$$A = \frac{1}{2}(1^2, 0^{14}) \quad , \quad B = \frac{1}{4}(-3, 1^{15}). \quad (3.46)$$

Los vectores y espinores de calibre en el sector no torcido tienen los pesos P tal que $P^2 = 2$, $N_L = 0$, y $N_F = 0$, con $P \cdot A = 0$ y $P \cdot B = 0$. Los vectores $P \in \Gamma_{16}$ que satisfacen estas condiciones son

Peso P	$P \cdot A$	$P \cdot B$
$(0^2, 1, -1, 0^{12})$	0	0
$(1, -1, 0^{14})$	0	0

(3.47)

Los pesos P en la primera columna de (3.47) son precisamente las 182 raíces no nulas del grupo $SU(14)$. Los pesos en la segunda columna son las 2 raíces no nulas de $SU(2)$. Estos pesos junto con las 16 raíces triviales $F_{-1}^I |\tilde{0}\rangle$, $I = 1, \dots, 16$, con $P = 0$, $N_L = 0$ y $N_F = 1$, forman la representación adjunta del grupo $SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$. De esta forma se concluye que el grupo de calibre para estas traslaciones es $SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$. En este caso como hay dos factores $U(1)$, se eligen

$$q_1 = (1^2, 0^{14}) \quad , \quad q_2 = (0^2, 1^{14}). \quad (3.48)$$

La carga $Q(P)$ de las pesos P en este sector se determina haciendo $Q(P) = q \cdot P$.

La materia cargada en este sector corresponde a los estados que tienen $P^2 = 2$, $N_L = 0$, y $N_F = 0$ con $P \cdot A = 0 \pmod{1}$ y $P \cdot B = \pm 1/2$. También se consideran los estados con $P \cdot A = \pm 1/2$ y $P \cdot B = 0 \pmod{1}$, así como los que tienen $P \cdot A = \pm 1/2$ y

$P \cdot B = \pm 1/2$. Los vectores $P \in \Gamma_{16}$ que satisfacen estas condiciones son

Peso P	$P \cdot A$	$P \cdot B$
$(\underline{-1}, 0, \underline{1}, 0^{13})$	$-\frac{1}{2}$	$0 \bmod 1$
$(\underline{1}, 0, \underline{-1}, 0^{13})$		
$(\underline{1}, 0, \underline{1}, 0^{13})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bmod 1$
$(\underline{-1}, 0, \underline{-1}, 0^{13})$		
$(0^2, \underline{1^2}, 0^{12})$	$0 \bmod 1$	$\frac{1}{2} \bmod 1$
$(0^2, \underline{-1^2}, 0^{12})$		
$(1^2, 0^{14})$		
$(-1^2, 0^{14})$		

(3.49)

Identificaremos las representaciones de $SU(14)$ y $SU(2)$ a través de sus pesos. Los vectores $P = (\underline{-1}, 0, \underline{1}, 0^{13})$ en la primera fila de (3.49) corresponden a los pesos de la representación $(\mathbf{14}, \mathbf{2}, -1, 1)$ de $SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$. Las primeras componentes subrayadas corresponden a los pesos de la representación $\mathbf{2}$ de $SU(2)$ y las 14 componentes subrayadas restantes corresponden a los pesos de la representación fundamental $\mathbf{14}$ de $SU(14)$. Los valores de las cargas $U(1)$ se determinan tomando el producto $q_1 \cdot P$ y $q_2 \cdot P$, como se explicó anteriormente. El otro vector de la primera fila corresponde con la representación $(\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, 1, -1)$, donde $\overline{\mathbf{14}}$ es a la representación fundamental conjugada de $SU(14)$. De igual forma se procede con todos los pesos P en (3.49). Se encuentra que las representaciones en la segunda fila son

$$(\mathbf{14}, \mathbf{2}, 1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, -1, -1) \quad (3.50)$$

donde la primera representación corresponde a los pesos $P = (\underline{1}, 0, \underline{1}, 0^{13})$ y la segunda representación a los pesos $P = (\underline{-1}, 0, \underline{-1}, 0^{13})$. En la tercera fila se encuentran las representaciones

$$(\mathbf{91}, \mathbf{1}, 0, 2) \oplus (\overline{\mathbf{91}}, \mathbf{1}, 0, -2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2, 0). \quad (3.51)$$

Los pesos $P = (0^2, \underline{1^2}, 0^{12})$ en (3.49) son los pesos correspondientes a la representación **91** de $SU(4)$, un cambio de signo de estos pesos corresponden a la representación conjugada $\overline{\mathbf{91}}$. Los últimos dos pesos en (3.49) son singletes, tanto de $SU(2)$ como de $SU(4)$. Cada uno de estos estados tiene una multiplicidad $d_{00} = 1$.

En el sector θ la materia cargada se halla resolviendo las ecuaciones (3.25) y (3.26). Los pesos P que satisfacen estas ecuaciones son

N_L	Peso P	$P + A$	$P \cdot A$	$P \cdot B$
0	$(\underline{-1}, 0, \underline{1}, 0^{13})$	$(\underline{-\frac{1}{2}}, \underline{\frac{1}{2}}, \underline{1}, 0^{13})$	$-\frac{1}{2}$	$0 \bmod 1$
	$(\underline{-1}, 0, \underline{-1}, 0^{13})$	$(\underline{-\frac{1}{2}}, \underline{\frac{1}{2}}, \underline{-1}, 0^{13})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bmod 1$
$\frac{1}{2}$	(0^{16})	$\frac{1}{2}(1^2, 0^{14})$	0	0
	$(-1^2, 0^{14})$	$\frac{1}{2}(-1^2, 0^{14})$	-1	$\frac{1}{2}$

(3.52)

Las dos primeras componentes de los $(P+A)$ en la primera fila de (3.52) corresponden a los pesos de la representación **2** de $SU(2)$. Por otra parte, las últimas 14 componentes corresponden a los pesos de la representación fundamental **14** de $SU(4)$, para los primeros vectores, y $\overline{\mathbf{14}}$ para los segundos. Entonces, la representación de los estados con $N_L = 0$ es

$$(\mathbf{14}, \mathbf{2}, 0, 1) \oplus (\mathbf{14}, \mathbf{2}, 0, -1). \quad (3.53)$$

En la segunda fila los vectores $(P+A)$ representan a dos singletes de $SU(2)$ y $SU(14)$ cargados bajos los $U(1)$, estos son

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0). \quad (3.54)$$

El valor de las cargas de los $U(1)$ para todos los $(P+A)$ se determina tomando el producto $q_1 \cdot (P+A)$ y $q_2 \cdot (P+A)$, respectivamente.

De acuerdo a las condiciones (3.22), (3.23), y (3.24), impuestas por el proyector

se encuentra el espectro

$$\begin{array}{c|cc}
 & \varepsilon = 1 & \varepsilon = -1 \\
 \hline
 \text{sector } \theta & 16 [(\mathbf{14}, \mathbf{2}, 0, 1) \oplus \\
 & \{2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)\}] & 16 [(\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, 0, -1) \oplus \\
 & \{2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)\}] &
 \end{array} \quad (3.55)$$

El factor 2 en las representaciones $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)$, $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)$ corresponde a la adición de osciladores internos $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^1$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_{-\frac{1}{2}}^1$ para la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)$, y $\tilde{\alpha}_{-\frac{1}{2}}^2$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_{-\frac{1}{2}}^2$ para la representación $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)$ con $\varepsilon = 1$. Para el caso de $\varepsilon = -1$ se intercambia el orden de los osciladores.

En el sector ω la materia cargada se halla resolviendo las ecuaciones (3.35) y (3.36). Encontramos que no hay ninguna solución de la ecuación (3.36). Los pesos P que satisfacen la ecuación (3.35) son

$$\begin{array}{c|ccccc}
 N_L & \text{Peso } P & P + B & P \cdot A & P \cdot B \\
 \hline
 & (0^{16}) & & & \\
 & (1, -1, 0^{14}) & \frac{1}{4}(\underline{-3}, 1, 1^{14}) & 0 & 0 \bmod 1 \\
 0 & (1, 0, \underline{-1}, 0^{13}) & \frac{1}{4}(1^2, \underline{-3}, 1^{13}) & \frac{1}{2} & 0 \bmod 1 \\
 & \frac{1}{2}(1^2, -1^{14}) & & & \\
 & \frac{1}{2}(3, -1^{15}) & \frac{1}{4}(\underline{3}, -1, -1^{14}) & \frac{1}{2} & 0 \bmod 1 \\
 & \frac{1}{2}(1, -1, \underline{1}, -1^{13}) & \frac{1}{4}(-1^2, \underline{3}, -1^{13}) & 0 & 0 \bmod 1
 \end{array} \quad (3.56)$$

Las dos primeras componentes de los vectores $(P + B)$ en la primera y tercera fila de (3.56) corresponden a los pesos de la representación $\mathbf{2}$ de $SU(2)$. Las últimas 14 componentes de los vectores $(P + B)$ en la segunda y la cuarta fila de (3.56) corresponden a los pesos de la representación $\overline{\mathbf{14}}$ y $\mathbf{14}$ de $SU(4)$, respectivamente. Entonces, podemos escribir la representación de los estados como

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \oplus (\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \oplus (\mathbf{14}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}). \quad (3.57)$$

Los valores de las cargas $U(1)$ para los vectores $(P + B)$ se determinan tomando el producto $q_1 \cdot (P + A)$ y $q_2 \cdot (P + B)$.

De acuerdo a las condiciones (3.32), (3.33), y (3.34), impuestas por el proyector se obtiene el espectro del sector ω

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$	
sector ω	$16 [(\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})]$	$16 [(\mathbf{14}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2})]$	(3.58)

En el sector $\theta\omega$ la materia cargada se halla resolviendo las ecuaciones (3.44) y (3.45), pero no hay ninguna solución de (3.45). Los pesos P que satisfacen la ecuación (3.44) son

N_L	Peso P	$P + A + B$	$P \cdot A$	$P \cdot B$	
0	(0^{16}) $(1, -1, 0^{14})$	$\frac{1}{4}(\underline{3}, -1, 1^{14})$	0	0 mod 1	(3.59)
	$(0, -1, \underline{-1}, 0^{13})$	$\frac{1}{4}(-1^2, \underline{-3}, 1^{13})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{2}(-1^{16})$ $\frac{1}{2}(1, -3, -1^{14})$	$\frac{1}{4}(\underline{-3}, 1, -1^{14})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ mod 1	
	$\frac{1}{2}(1, -1, \underline{1}, -1^{13})$	$\frac{1}{4}(1^2, \underline{3}, -1^{13})$	0	$\frac{1}{2}$	

Las dos primeras componentes de los vectores $(P + A + B)$ en la primera y tercera fila de (3.59) corresponden a los pesos de la representación $\mathbf{2}$ de $SU(2)$. Las últimas 14 componentes de los vectores $(P + A + B)$ en la segunda y la cuarta fila de (3.59) corresponden a los pesos de la representación $\overline{\mathbf{14}}$ y $\mathbf{14}$ de $SU(4)$, respectivamente. Entonces, podemos escribir la representación de los estados como

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \oplus (\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \oplus (\mathbf{14}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}). \quad (3.60)$$

Mediante las condiciones (3.42), y (3.43), impuestas por el proyector se encuentra

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$	
sector $\theta\omega$	$16 \left[(\overline{\mathbf{14}}, -\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus \right.$ $\left. (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \right]$	$16 \left[(\mathbf{14}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \oplus \right.$ $\left. (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \right]$	(3.61)

De forma similar se determina el espectro de masa nula usando las traslaciones de la red $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ mostradas en la tabla (3.2) para la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$.

3.5. Espectro de Masa Cero: resultados

A continuación se presentan los estados cargados de masa nula para todas las traslaciones clasificadas en la sección 3.2, obtenidos siguiendo el procedimiento explicado en la sección 3.4. En las tablas 3.3-3.8 se muestran los espectros para la cuerda heterótica $SO(32)$. En las tablas 3.9-3.13 se muestran los espectros para la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$.

Como se observa en las tablas, los espectros con $\varepsilon = -1$ y $\varepsilon = 1$ se relacionan sustituyendo las representaciones por sus conjugadas complejas, y cambiando el signo de las cargas. Estos resultados demuestran que para todas las acciones de calibre, realizadas por traslaciones invariantes modulares, el mapa espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se implementa introduciendo la torsión discreta.

Sector no torcido		
$(\mathbf{26}, 1, 1, 1) \oplus (\mathbf{26}, -1, -1, -1) \oplus (\mathbf{1}, 1, 1, -2) \oplus (\mathbf{1}, -1, -1, 2) \oplus (\mathbf{1}, -1, 3, 0) \oplus (\mathbf{1}, 1, -3, 0)$ $(\mathbf{26}, -1, 1, 1) \oplus (\mathbf{26}, 1, -1, -1) \oplus (\mathbf{1}, 1, -1, 2) \oplus (\mathbf{1}, -1, 1, -2) \oplus (\mathbf{1}, 1, 3, 0) \oplus (\mathbf{1}, -1, -3, 0)$ $(\mathbf{26}, 0, -2, 1) \oplus (\mathbf{26}, 0, 2, -1) \oplus (\mathbf{1}, 0, 2, 2) \oplus (\mathbf{1}, 0, -2, -2) \oplus (\mathbf{1}, 2, 0, 0) \oplus (\mathbf{1}, -2, 0, 0)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{26}, 0, 1, 1) \oplus (\mathbf{1}, 0, 1, -2) \oplus$ $(\mathbf{1}, 0, -3, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, 1, 0, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, -1, 0, 0)]$	$[(\mathbf{26}, 0, -1, -1) \oplus (\mathbf{1}, 0, -1, 2) \oplus$ $(\mathbf{1}, 0, 3, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, 1, 0, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, -1, 0, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{26}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \oplus (\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2) \oplus$ $(\mathbf{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0)]$	$16 [(\mathbf{26}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2) \oplus$ $(\mathbf{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0)]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{26}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \oplus (\mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2) \oplus$ $(\mathbf{1}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0)]$	$16 [(\mathbf{26}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \oplus (\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2) \oplus$ $(\mathbf{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)]$

 Tabla 3.3: Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(26) \times U(1)^3$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{10}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{10}, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{10}, -1) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, 0)$ $\oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{10}, 0) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{16}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{2})]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16}, -\frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \frac{1}{2})]$

 Tabla 3.4: Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(10)^3 \times U(1)$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{18}, \mathbf{1}, -1, 1) \oplus (\mathbf{18}, \mathbf{1}, 1, 1) \oplus (\mathbf{18}, \mathbf{1}, 1, -1) \oplus (\mathbf{18}, \mathbf{1}, -1, -1) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{10}, -1, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, 1, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, 1, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, -1, -1) \oplus$ $(\mathbf{18}, \mathbf{10}, 0, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, -2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{18}, \mathbf{1}, 0, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, 0, -1) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)]$	$16 [(\mathbf{18}, \mathbf{1}, 0, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, 0, 1) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$

 Tabla 3.5: Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(18) \times SO(10) \times U(1)^2$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{14}, \mathbf{2}, 1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, -1, -1) \oplus$ $(\mathbf{91}, \mathbf{1}, 0, 2) \oplus (\overline{\mathbf{91}}, \mathbf{1}, 0, -2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2, 0) \oplus$ $(\mathbf{14}, \mathbf{2}, -1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, 1, -1)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{14}, \mathbf{2}, 0, 1) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)]$	$16 [(\overline{\mathbf{14}}, \mathbf{2}, 0, -1) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$

 Tabla 3.6: Espectro masa nula con grupo de calibre $SU(14) \times SU(2) \times U(1)^2$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{6}, \mathbf{10}, 1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{6}}, \overline{\mathbf{10}}, -1, -1) \oplus (\mathbf{6}, \overline{\mathbf{10}}, 1, -1) \oplus (\overline{\mathbf{6}}, \mathbf{10}, -1, 1)$ $\oplus (\mathbf{1}, \mathbf{45}, 0, 2) \oplus (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{45}}, 0, -2) \oplus (\overline{\mathbf{15}}, \mathbf{1}, -2, 0) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{1}, 2, 0)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\overline{\mathbf{15}}, \mathbf{1}, 1, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -3, 0)]$	$16 [(\mathbf{15}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 3, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{6}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})]$	$16 [(\overline{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{10}}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{6}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})]$	$16 [(\overline{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{10}}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})]$

 Tabla 3.7: Espectro masa nula con grupo de calibre $SU(6) \times SU(10) \times U(1)^2$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{14}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{14}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{14}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{1})]$	$16 [(\overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1})]$
$\theta\omega$	$16 [(\overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{1})]$	$16 [(\mathbf{4}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{4}}, \mathbf{1})]$

 Tabla 3.8: Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(6)^3 \times SO(14)$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, -1, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 3) \oplus$ $(\mathbf{27}, \mathbf{1}, -1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 1, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, -3) \oplus$ $(\mathbf{27}, \mathbf{1}, 0, -2) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 0, 2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2, 0)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{27}, \mathbf{1}, 0, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, -3) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)]$	$16 [(\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 0, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 3) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{27}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})]$	$16 [(\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$	$16 [(\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$

 Tabla 3.9: Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times E_8 \times U(1)^2$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{27}, \mathbf{1}, 1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, -1, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, -3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 3) \oplus$ $(\mathbf{27}, \mathbf{1}, -1, 1) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 1, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, -3) \oplus$ $(\mathbf{27}, \mathbf{1}, 0, -2) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 0, 2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 0) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{128}, 0, 0)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{27}, \mathbf{1}, 0, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, -3) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)]$	$16 [(\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, 0, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 3) \oplus$ $2 (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 0)]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{16}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})]$

 Tabla 3.10: Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times SO(16) \times U(1)^2$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{70}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 4) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -4) \oplus$ $(\mathbf{56}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{28}, 2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{28}}, -2) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{28}, -2) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{28}}, 2)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \overline{\mathbf{8}}, 1)]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8}, -1)]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{28}}, 0) \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 2) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -2)]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{28}, 0 \oplus 2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 2) \oplus$ $2(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -2)]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \overline{\mathbf{8}}, -1)]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8}, 1)]$

Tabla 3.11: Espectro masa nula con grupo de calibre $E_7 \times SU(2) \times SU(8) \times U(1)$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{12}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{70}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -2) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 2) \oplus (\mathbf{32}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\overline{\mathbf{32}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{28}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{28}}, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{28}}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{28}, 1)$		
Sector	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \overline{\mathbf{8}}, -\frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8}, \frac{1}{2})]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8}, -\frac{1}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \overline{\mathbf{8}}, \frac{1}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{12}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 1)]$	$16 [(\mathbf{12}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, -1)]$

Tabla 3.12: Espectro masa nula con grupo de calibre $SO(12) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(8) \times U(1)$.

Sector no torcido		
$(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{3}) \oplus$ $(\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}_v, \mathbf{8}_v, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{3}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \oplus$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{0}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0}) + (\mathbf{1}, \mathbf{8}_c, \mathbf{8}_c, \mathbf{0}, \mathbf{0})$		
Sector torcido	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$
θ	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_c, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_c, \mathbf{1}, \mathbf{0})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_c, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_c, -\mathbf{1}, \mathbf{0})]$
ω	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_v, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_v, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_v, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})]$
$\theta\omega$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_s, \mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_s, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})]$	$16 [(\mathbf{1}, \mathbf{8}_s, \mathbf{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_s, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$

 Tabla 3.13: Espectro masa nula con grupo de calibre $E_6 \times SO(8) \times SO(8) \times U(1)^2$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En esta tesis se hizo un estudio de la simetría espejo en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. El procedimiento consistió en analizar compactificaciones de las cuerdas heteróticas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ en este orbifold, ya que en estos casos el mapa espejo debe tener un efecto específico sobre el espectro de masa nula. Concretamente, en el espectro el mapa espejo debe intercambiar las representaciones complejas por sus conjugadas. Los resultados presentados en el capítulo 3 demuestran que el mapa espejo se implementa incluyendo torsión discreta.

El primer paso del procedimiento consistió en hallar todas las acciones de calibre realizadas por traslaciones invariantes modulares. En cada caso se obtuvo el grupo de calibre resultante. Luego se encontraron los estados de masa nula y se identificaron sus propiedades de transformación bajo el grupo de calibre. Todos los espectros obtenidos satisfacen la cancelación de anomalías de calibre por el mecanismo de Green-Schwarz [1]. Además los espectros fueron comprobados con el programa Orbifolder [21]. Es importante señalar que tanto la clasificación de las traslaciones, como los espectros mostrados en las tablas 3.3-3.8 para la cuerda heterótica $SO(32)$ y en las tablas 3.9-3.13 para la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ son resultados originales que no han sido

publicados.

El trabajo se puede extender en varias direcciones. Por ejemplo, se puede estudiar el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, pero con un T^6 genérico que no sea producto de tres toros T^2 . También se puede considerar una acción adicional sobre los grados de libertad de calibre a través de las llamadas líneas de Wilson [22]. Es de esperarse que en estos casos más generales se siga cumpliendo que al incluir torsión discreta se realiza el mapa espejo.

Para finalizar resaltamos que en esta tesis se revisaron varios aspectos de la teoría de cuerdas, y de la compactificación en orbifolds toroidales. En particular se hizo un estudio completo de la función de partición de las cuerdas heteróticas compactificadas en un orbifold $T^6/\mathbb{Z}_N$, haciendo énfasis en las condiciones impuestas por invariancia modular. Además se demostró como la función de partición permite extraer el espectro de estados de la teoría. El estudio se generalizó a orbifolds $T^6/\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ para mostrar el efecto de incluir torsión discreta. Los resultados obtenidos se aplicaron al desarrollo del objetivo de esta tesis que era estudiar compactificaciones de la cuerda heterótica en el orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

APÉNDICE A

EL GRUPO $SO(8)$

El grupo $SO(8)$ es el grupo de rotaciones de dimensión 8, el cual tiene rango 4 y posee el diagrama de Dynkin mostrado en la figura (A.1). Las raíces simples del grupo son:

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 0) \quad , \quad \alpha_2 = (0, 1, -1, 0) \quad (A.1)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 1, -1) \quad , \quad \alpha_4 = (0, 0, 1, 1). \quad (A.2)$$

La representación fundamental de $SO(8)$ es la representación vectorial de dimensión 8 denotada por $\mathbf{8}_v$. Además, $SO(8)$ tiene representaciones espinoriales de dimensión 8 denotadas por $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$. Los pesos de la representación vectorial son

$$\mathbf{8}_v = (\pm 1, 0, 0, 0) \quad (A.3)$$

donde el subrayado significa permutación en las componentes. Los pesos de las representaciones espinoriales $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$ son

$$\mathbf{8}_s = \frac{1}{2}(\pm, \pm, \pm, \pm) \quad \# \text{ impar de } +\text{'s} \quad (A.4)$$

$$\mathbf{8}_c = \frac{1}{2}(\pm, \pm, \pm, \pm) \quad \# \text{ par de } +\text{'s}. \quad (A.5)$$

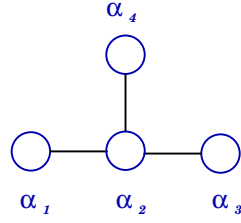


Figura A.1: Diagrama de Dynkin de $SO(8)$.

A partir de los pesos se deducen los productos tensoriales

$$\mathbf{8}_i \otimes \mathbf{8}_i = \mathbf{1} \oplus \mathbf{28}_a \oplus \mathbf{35}_i \quad , \quad i = v, s, c$$

$$\mathbf{8}_i \otimes \mathbf{8}_j = \mathbf{8}_k \oplus \mathbf{56}_k \quad , \quad i, j, k \text{ cíclicos} , i \neq j \neq k. \quad (\text{A.6})$$

Las representaciones $\mathbf{28}_a$ y $\mathbf{35}_v$ corresponden respectivamente a un tensor antisimétrico de dos índices, y a un tensor simétrico de dos índices de traza nula. La representación $\mathbf{56}_v$ corresponde a un tensor antisimétrico de 3 índices, mientras que $\mathbf{35}_s$ y $\mathbf{35}_c$ se asocian a tensores antisimétricos de 4 índices autoduales ó anti-autoduales. Las representaciones $\mathbf{56}_s$ y $\mathbf{56}_c$ corresponden a espinores-vectores de quiralidades opuestas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M.B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory: Vols. 1 y 2*, Cambridge University Press, (1988).
- [2] M. Duff, B.E.W. Nilsson y C. Pope, *Kaluza-Klein Supergravity* Phys. Rept. 130 (1986) 1-142.
- [3] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger y E. Witten, *Vacuum Configurations for Superstrings*, Nucl. Phys. B256 (1985) 46-74.
- [4] L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa y E. Witten, *Strings on Orbifolds*, Nucl. Phys. B **261**, 678 (1985).
- [5] L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa y E. Witten, *Strings on Orbifolds 2*, Nucl. Phys. B **274**, 285 (1986).
- [6] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa y R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, Vol. 1, AMS 2003.
- [7] C. Vafa, *Modular Invariance and Discrete Torsion on Orbifolds*, Nucl. Phys. **B273** (1986) 592.

- [8] A. Font, L. E. Ibáñez y F. Quevedo, $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ orbifolds and discrete torsion, Phys. Lett. **B217** (1989) 272.
- [9] C. Vafa y E. Witten, *On orbifolds with discrete torsion*, J. Geom. Phys. **15** (1995) 189, [arXiv: hep-th/9409188].
- [10] D. Lüst y S. Theisen, *Lectures Notes in Physics, Lectures on String Theory*, Springer-Verlag, 1989.
- [11] J. Polchinski, *String Theory, Vols. 1 y 2*, Cambridge University Press, 2005.
- [12] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2009.
- [13] A. Neveu y J. H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys. B31, 86 (1971).
- [14] P. Ramond, *Dual theory for free fermions*, Phys. Rev. D3, 2415 (1971).
- [15] F. Gliozzi, J. Scherck y D. Olive, *Supergravity and the spinor dual model*, Phys. Lett. 65B, 282 (1976); *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*, Nucl. Phys. B122,253 (1977).
- [16] C. Kittel y H. Kroemer, *Thermal Physics*, W. H. Freeman & Co, 1980.
- [17] J. Polchinski, *Evaluation of the one loop string path integral*, Comm. Math. Phys 104, 37 (1986).
- [18] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec y R. Rhom, *Heterotic string*, Phys. Rev. Lett. 54, 502 (1985); *Heterotic string (I). The free heterotic string*, Nucl. Phys. B256, 253 (1985); *Heterotic string (II). The interacting heterotic string*, Nucl. Phys. B267, 75 (1986).
- [19] L.E. Ibáñez, J. Mas, H.P. Nilles y F. Quevedo, *Heterotic Strings in Symmetric and Asymmetric Orbifold Backgrounds*, Nucl. Phys. **B301** (1988) 157.

- [20] A. Font y S. Theisen, *Introduction to string compactification*, Lect. Notes Phys. **668** 101-181 (2005), Springer-Verlag.
- [21] H. P. Nilles, S. Ramos-Sanchez, P. K. S. Vaudrevange y A. Wingerter, *The Orbifold: A Tool to study the Low Energy Effective Theory of Heterotic Orbifolds*, Comput. Phys. Commun. **183**, 1363 (2012) [arXiv:1110.5229 [hep-th]].
- [22] L.E. Ibáñez, J. Mas, H.P. Nilles y F. Quevedo, *Orbifolds and Wilson lines*, Phys. Lett. B187, 25 (1987).