Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

MECÁNICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO ESFÉRICO

Erick Castro M.

Caracas, Febrero 2012

MECÁNICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO ESFÉRICO

Erick Castro M.

Trabajo especial de grado presentado
ante la ilustre Facultad de Ciencias de la
Universidad Central de Venezuela como
requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Física.

Dr. Abraham Lozada, Tutor Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. **Erick Castro M.** titulado: **Mecánica Cuántica en el Espacio Esférico**, para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dr. Abraham Lozada, Tutor — Fecha

Dr. Ernesto Fuenmayor — Fecha

Dr. Lorenzo Leal — Fecha

Resumen

MECÁNICA CUÁNTICA EN EL ESPACIO ESFÉRICO

Erick Castro M.

Escuela de Física, Universidad Central de Venezuela

Dr. Abraham Lozada, Tutor

En este trabajo se estudian las consecuencias para la mecánica cuántica de suponer que el espacio de configuraciones no es euclídeo, sino esférico. Este cambio, en comparación con el espacio euclídeo, tiene efectos en mecánica cuántica debido a la curvatura y a la topología del espacio esférico. Consideraremos la circunferencia $\mathbb{S}^1$ (esfera unidimensional), la esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$ y la esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ (el triespacio esférico). El procedimiento de construcción de los observables básicos para una partícula libre en estos espacios, el cual es nuestro objetivo principal, se realiza de manera geométrica (esto es, independiente de coordenadas). En este caso, como en el euclídeo (el cual discutimos brevemente), los observables se obtienen de propiedades fundamentales de la geometría. El modelo de espacio esférico, para $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^3$, es el de una superficie esférica en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Se considerarán, por completitud y para chequear resultados previos, el péndulo cuántico en $\mathbb{S}^1$ y el átomo de hidrógeno en $\mathbb{S}^3$.

Dr. Abraham Lozada
Tutor

Agradecimientos

- A mis padres Luisa y Ramón por su completa abnegación y apoyo. Este trabajo es el mérito por su absoluta entrega.
- A mis hermanas Yely y Yurima, ejemplos de búsqueda y del cumplimiento de las metas propuestas, gracias por su apoyo incondicional.
- A mis sobrinos Michelle, Anabella y Naim, por proveer la inspiración necesaria, este trabajo está dedicado a ustedes.
- A los amigos y compañeros, fuente de gratas experiencias y aprendizajes (especialmente quiero agradecer a Grecia, Yirsie, Ángel, Iskya y Materano, por su hospitalidad, confianza, y total correspondencia; muchas gracias muchachos).
- A Anaís por su gran e invaluable amistad. No hay palabras que expresen mi gratitud, estos ocho años representan un tesoro que dudosamente el tiempo corroerá. Gracias Anita...
- A la licenciada Margarita Serizier y al centro CETEL; por su apoyo, y por darme las herramientas que enseñan la propia aceptación, y las ganas de superación que ello implica.
- A la Universidad Central de Venezuela y a la Facultad de Ciencias, a la gama de excelente profesores y especialmente a mi tutor Abraham Lozada por la enseñanza impartida.
- A la vida y a su arquitecto, y haciendo nuevamente eco de las palabras del maestro Jorge Luis Borges: “Gracias quiero dar al divino laberinto de los efectos y de las causas, por la diversidad de las criaturas que forman este singular universo, por la razón, que no cesará de soñar con un plano del laberinto”.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Geometría Esférica **4**

2.1. Geometría Euclídea 5

2.2. El espacio Esférico n-dimensional 7

2.2.1. El grupo de Isometrías de $\mathbb{S}^n$ 8

2.2.2. Geodésicas Esféricas 9

2.2.3. Geometría esférica y elíptica 10

2.3. $\mathbb{S}^n$ como variedad riemanniana 12

2.3.1. El espacio vectorial tangente 13

2.3.2. El tensor métrico g de $\mathbb{S}^n$ 14

2.3.3. Coordenadas esféricas y cartesianas 16

2.3.4. Campo vectorial de killing 20

3. Cuantización **26**

3.1. Mecánica clásica 27

3.2. El problema de la cuantización 31

3.2.1. Cuantización canónica 31

3.2.2. Cuantización geométrica de la partícula libre en $\mathbb{R}^n$ 35

4. Cuantización en el espacio esférico **41**

4.1. Partícula libre en el espacio esférico 42

4.1.1. Mecánica clásica 42

4.1.2. Cuantización de la partícula libre en espacio esférico 43

4.2. El Observable posición 50

4.2.1. Reglas canónicas de conmutación en la esfera 53

5. El problema de Kepler en $\mathbb{S}^3$ **55**
5.1. Mecánica clásica 56
5.2. El átomo de hidrógeno en $\mathbb{S}^3$ 57

6. El péndulo cuántico en $\mathbb{S}^1$ **64**
6.1. El péndulo clásico 64
6.2. El péndulo cuántico 66

7. Discusión **71**

Capítulo 1

Introducción

Como es bien conocido, la llegada de la relatividad general cambió nuestra noción del espacio-tiempo. En la formulación usual de la mecánica cuántica, el tiempo es un parámetro y el espacio es euclídeo. En ese caso, estamos despreciando los efectos gravitacionales sobre el espacio-tiempo, en particular su curvatura. Uno de los problemas que mas ha captado la atención de la investigación en física es el estudio de la mecánica cuántica en conjunción con la relatividad general. Esto se expresa, particularmente, con el problema de la cuantización del campo gravitatorio. (ver [1], [2] y [3]).

Este trabajo trata con esta probleḿatica desde un punto de vista mas simple. En efecto, así como en la gran mayoría de las aplicaciones de la mecánica cuántica la interacción electromagnética es estimada como un campo clásico, una primera aproximación de los efectos de la gravedad seria considerar el campo gravitatorio como clásico (en el sentido de que debe obedecer las ecuaciones de Einstein). Más aun, dicho tratamiento se justifica en mayor medida en el caso gravitatorio que en el electromagnético (donde funciona excelentemente) ya que la interacción gravitatoria es mas débil en varios ordenes de magnitud que la electromagnética. Por esta razón uno esperaría primero ver los efectos cuánticos debido al campo clásico (que es la aproximación que tomaremos) que los efectos del campo gravitacional cuántico.

De estas afirmaciones puede considerarse el problema de como conjugar la gravedad con la teoría cuántica, en un primer esbozo, como el de la formulación de la mecánica cuántica en un espacio-tiempo curvo dado. El tiempo, como usualmente es tratado en física, no se cuantiza (es un parámetro). Por lo tanto la curvatura del espacio-tiempo, al final, resulta en una curvatura del espacio.

En este trabajo se estudian las principales consecuencias sobre la mecánica cuántica que resultan al suponer el espacio de configuraciones de una partícula como esférico (a diferencia de la consideración usual, la cual supone que es euclídeo). Históricamente se ha tratado con esta cuestión en la resolución del problema del átomo de hidrógeno. En particular, el átomo de hidrógeno en espacio esférico (el cual es una representación de una geometría no euclideana) fue estudiado primeramente por Schrödinger y Stevenson (ver [24] y [26]). También se ha considerado esta problemática en un espacio de curvatura constante negativa (espacio hiperbólico) (ver [25]). En espacio esférico otros trabajos que han tratado con esta cuestión son p.e [27], [28] y [21]. A diferencia de estos tratamientos, nuestro objetivo es la construcción de manera geométrica (independiente de coordenadas) de los observables fundamentales asociados a la mecánica de una partícula en espacio esférico unidimensional, bidimensional y tridimensional. Lineamentos similares a los nuestros fueron seguidos en la referencia [10] donde se consideró la mecánica cuántica en espacio de Lobachevski $\mathbb{H}^3$ (espacio hiperbólico).

Es importante señalar que el espacio esférico, aparte de poseer curvatura positiva, tiene una topología que introduce importantes efectos en la formulación de la mecánica cuántica en este espacio. En efecto, mientras que $\mathbb{H}^3$ y $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{R}^2$) son homeomorfos y difieren solo en su curvatura, vemos que no existe un homeomorfismo global entre $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2, 3$; por lo que que son espacios topológicamente inequivalentes. Esto, como veremos, tiene importantes consecuencias en la mecánica cuántica, lo cual acentúa mas la diferencia entre los espacios esférico y euclídeo.

Procederemos ahora a describir la organización del trabajo. En el capitulo 2 se analizan las propiedades fundamentales del espacio esférico. Como dicho espacio es una representación de una geometría no euclidiana; expondremos algunos conceptos útiles para el cálculo en este espacio, centrándonos ante todo en los que repercuten directamente con las propiedades de simetría del espacio esférico. En el capitulo 3, describiremos los principales tópicos en la teoría de la mecánica cuántica, haciendo énfasis esencialmente en lo que se refiere al discutido problema de la cuantización. Consideraremos brevemente la mecánica clásica y la “analogía” entre la teoría clásica y la cuántica; discutiremos el conocido método de cuantización denominado cuantización canónica, el cual se centra en esta supuesta analogía y veremos sus fallas inherentes. Al final propondremos otra forma de construir los observables fundamentales del sistema físico, que al aplicarla a una partícula libre en espacio euclideo nos da los resultados usuales de manera geométrica. En el capitulo 4, aplicaremos específicamente las ideas planteadas en el capitulo 3 en los espacios esféricos $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^3$. También se considerará la cuestión de como establecer la forma del observable posición es este espacio, problemática que ha sido, en nuestra opinión, mal discutida en la literatura. En el capitulo 5, por completitud, estudiaremos el problema análogo al átomo de hidrógeno en espacio euclideo pero en $\mathbb{S}^3$, se obtiene todo el espectro de energías de este sistema, y se encuentran las correspondientes autofunciones que representan a los estados físicos. En el capitulo 6, se expone una manera para resolver el problema del péndulo cuántico en $\mathbb{S}^1$. En el capitulo 7, se discuten los principales resultados del trabajo y se elaboran las respectivas conclusiones.

Capítulo 2

Geometría Esférica

Referirse a la historia de la geometría esférica es remontarse al saber (no sólo matemático) de civilizaciones tan antiguas como la Griega, la Egipcia ó las culturas del Valle del Indo; ya que si bien no hay ningún indicio de que en la antigüedad existiese la noción matemática de espacio esférico, las cavilaciones de celebres pensadores tomaban en cuenta un objeto en particular: la esfera. Por ejemplo, la esfera era considerada por Platón como el sólido más perfecto en la naturaleza. En el dialogo *El Timeo* afirma: "Allí el Demiurgo (especie de principio motor del universo) hace al mundo esférico, porque la esfera es aquella figura que contiene a todas las otras, la mas perfecta y semejante a sí misma". Antes que Platón, Parmenides tenía similares opiniones. Es interesante observar como las propiedades de la esfera han inquietado a los filósofos (véase por ejemplo el ensayo de Jorge Luis Borges: La Esfera de Pascal).

La Geometría de Euclides abrió nuevos horizontes ya que estableció las propiedades fundamentales del espacio; y la esfera paso a ser parte de los objetos definidos en esta Geometría (como la recta, el plano, y el círculo). Arquímedes hizo importantes contribuciones, entre ellas el cálculo del volumen de la esfera. El matemático y astrónomo Menelaus de Alejandría ya en el siglo primero trabajó de manera rigurosa (similar a como lo hace Euclides en sus *Elementos*) los triángulos esféricos; increíblemente algunas nociones de trigonometría esférica eran conocidas por los astrónomos hindúes muchos siglos antes. Los árabes fueron herederos de la tradición griega y aparte de transmitir el conocimiento a occidente hicieron aportes en trigonometría esférica. En astronomía un importante instrumento usado durante milenios como modelo para el movimiento de la bóveda celeste era el astrolabio esférico, entre otras aplicaciones la cartografía considera la posibilidad de representar porciones de la superficie terrestre a partir de mapas bidimensionales. Genios matematicós modernos como Euler y Gauss hicieron descubrimientos que directa ó indirectamente recayeron en la esfera, por ejemplo la teoría de superficies de Gauss explica una multitud de propiedades de la superficie esférica. Un mayor compendio de referencias históricas sobre la esfera esta por ejemplo en [4].

El geómetra Suizo Ludwig Schläfli fue el primero en dar la definición de espacio esférico n-dimensional; sin embargo no es sino hasta la publicación del trabajo de Riemann, *On the Hypotheses which lie at the Foundation of Geometry*, donde se considera al espacio esférico n-dimensional independientemente del encajamiento en un espacio Euclideo de mayor dimensión. La Geometría Esférica ó elíptica plana fue establecida por Cayley y Klein a partir de la identificación de los puntos antipodales de la esfera y observando que tal modelo es equivalente al espacio bidimensional real proyectivo; Tales modelos representan una **Geometría no Euclideana** absolutamente consistente.

En este capitulo estudiaremos el Espacio Esférico n-dimensional, sus propiedades y mencionaremos las condiciones que hacen de este espacio una representación de una geometría no euclídea. Además tomaremos algunas definiciones de la teoría de variedades, importantes para el cálculo en este espacio.

2.1. Geometría Euclídea

Según los registros históricos (Véase [4]) el matemático Euclides de Alejandría redactó alrededor del año 300 A.C su famoso tratado, conformado por 13 libros, denominado *Los Elementos.* Aunque la identidad y vida de tal personaje está envuelta en un casi absoluto misterio, no puede decirse lo mismo de su obra; y es que quizá es el compendio en geometría mas influyente jamas escrito en toda la historia de la matemática. De hecho esta obra representa el punto álgido de todo el pensamiento matemático y lógico legado por los griegos y concuerda con el despegue formal del quehacer matemático que tenemos en nuestros días; ya que esencialmente su formulación encaja perfectamente aún en el presente, siendo una obra de validez y valor imperecedero. El tratado se centra principalmente en el desarrollo de la geometría plana, aunque también abarca la teoría de números y las propiedades de los sólidos o geometría tridimensional. Todo el cuerpo teórico es introducido en el libro I donde se dan 23 definiciones esenciales, 5 nociones comunes ó intuitivas, y las cinco verdades absolutas ó axiomas las cuales solo son postuladas y son indemostrables. Estos axiomas son:

1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.

2. Dado un segmento rectilíneo puede ser extendido a una única línea recta.

3. Existe una circunferencia para centro y radio arbitrarios.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una recta corta a otras dos, de tal forma que hace de la suma de los ángulos interiores a un lado de la recta original menores a dos ángulos rectos, entonces las dos rectas al ser extendidas se encontrarán en ese lado.

Los cuatro primeros axiomas son validados por nuestra intuición, sin embargo del quinto siempre se tuvo sospecha, en parte porque la mayoría de las proposiciones hechas en los elementos pueden ser demostradas sin recurrir al quinto axioma. Y aunque es también intuitivo (lo enrevesado es quizás la forma en que esta escrito) a primera vista no parece tan fundamental. En efecto, la figura formada por los tres segmentos rectilíneos definidos por los puntos de corte de las rectas mencionadas es un triángulo y Euclides trata la trigonometría en toda su obra. Sin embargo todos los intentos realizados en los siguientes 2000 años por demostrar el quinto axioma a partir de los primeros cuatros fueron fallidos. Posteriormente se dio otra formulación del quinto axioma la cual establece lo siguiente:

> *Dada una recta y un punto exterior, existe una y solo una recta paralela que pasa por dicho punto exterior.*

El gran matemático alemán Carl Frederich Gauss en el siglo IXX, no fue inmune ante la tentativa de deducir el quinto axioma a partir de los otros cuatro y en gran parte de su juventud se dedicó a buscar una solución a tal problema sin ningún éxito aparente. Sin embargo, se tiene registro de que Gauss, algunos años despues, convencido de la consistencia del quinto axioma no trato de invalidarlo sino supuso un espacio plano donde el quinto axioma no se cumplía. Estaba convencido de haber encontrado otra geometría totalmente coherente donde el quinto axioma es sustituido por otra afirmación. Sin embargo Gauss no publica sus descubrimientos, quizá por temor a contradecir los axiomas de euclides. No es sino hasta los trabajos de los matemáticos Lobachevski y Bolyai, que la nueva geometría de Gauss es totalmente desarrollada. Por ejemplo en esta nueva geometría la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es menor a dos ángulos rectos (Dicha geometría se conoce como Hiperbólica, Ver [5] y [6]). Posteriormente surgió la inquietud de si existiría otra geometría donde no se satisface el quinto axioma. La respuesta es sí e incluso fue trabajada muchos siglos antes: es la conocida geometría esférica (la cual estrictamente no es una geometría) donde la suma de los ángulos interiores a un triángulo es mayor que dos ángulos rectos. También existe la geometría elíptica (la cual si es una geometría) que tampoco satisface el quinto axioma euclídeo. A continuación introducimos el espacio esférico y veremos en que sentido se entiende como una geometría.

2.2. El espacio Esférico n-dimensional

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ el modelo estándar del espacio Euclídeo de dimensión $n+1$ (existen otros modelos), se define al *espacio Esférico n-dimensiomal* $\mathbb{S}^n$ como el subconjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$ con norma igual a uno, es decir:

$$\mathbb{S}^n = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{X}\| = 1\}$$

Para el caso $n = 2$, $\mathbb{S}^2$ es el cascarón esférico centrado en el origen.

Los elementos de $\mathbb{S}^n$ serán sus puntos; vemos que dados dos puntos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ en $\mathbb{S}^n$ su suma definida en $\mathbb{R}^{n+1}$ es, en general, otro vector que *no* pertenece a $\mathbb{S}^n$. Entonces no es evidente asociar a primera vista una estructura vectorial a $\mathbb{S}^n$. Sin embargo $\mathbb{S}^n$ hereda las propiedades métricas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Recordemos la definición de espacio métrico:

Un espacio métrico es un conjunto S con una función (denominada *métrica*) $d(x, y)$ $\forall\, x, y \in S$ a valores reales, tal que:
1) $d(x, y) \geq 0$ (positiva)
2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (no degenerada)
3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simétrica)
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ con $z \in S$ (desigualdad triangular)

Obviamente $\mathbb{R}^{n+1}$ es un espacio métrico con la distancia entre puntos como la métrica:

$$d_E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \tag{2.1}$$

Se observa que todos los puntos de $\mathbb{S}^n$ pertenecen a $\mathbb{R}^{n+1}$ por lo tanto $d_E(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es también una métrica en $\mathbb{S}^n$, por lo que $\mathbb{S}^n$ es un espacio métrico. No obstante, conviene definir una métrica intrínseca a $\mathbb{S}^n$ la cual se denomina *distancia esférica* entre puntos:

$$d_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{Donde} \quad \mathbf{X}.\mathbf{Y} = \|\mathbf{X}\|\|\mathbf{Y}\| \cos\theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tag{2.2}$$

Aquí $\mathbf{X}.\mathbf{Y}$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es el ángulo entre los dos vectores (la cual satisface todas las propiedades de una métrica); con $0 \leq \theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq \pi$. Ya que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ pertenecen a $\mathbb{S}^n$ entonces $\|\mathbf{X}\| = 1, \|\mathbf{Y}\| = 1$ y es posible encontrar una relación entre ambas métricas:

$$\mathbf{X}.\mathbf{Y} = \cos\theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1 - \frac{1}{2}\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \tag{2.3}$$

Aunque no es claro de (2.2) que esta métrica no dependa del encajamiento, mas adelante veremos que esto es cierto. En el límite de pequeños desplazamientos $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \to 0$ ambas distancias coinciden $d_E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cong d_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ además de esto la ecuación (2.3) caracteriza las isometrías de $\mathbb{S}^n$. De aquí en adelante la métrica en $\mathbb{S}^n$ será la métrica esférica.

2.2.1. El grupo de Isometrías de $\mathbb{S}^n$

Dado un espacio métrico S una *isometría* de S en si mismo es una función biyectiva $\phi\colon S \to S$ que preserva la métrica en S. En el caso de $\mathbb{S}^n$ esto significa que:

$$d_S(\phi(\mathbf{X}), \phi(\mathbf{Y})) = d_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tag{2.4}$$

Toda isometría de $\mathbb{S}^n$ (denominada isometría esférica) será una isometría restringida de $\mathbb{R}^{n+1}$, ver (2.3). De la definición de distancia esférica (2.2) se observa que toda transformación biyectiva de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ que preserve el producto escalar será una isometría esférica. Dichas transformaciones son las conocidas transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$ las cuales forman un grupo que (dada una base ortonormal) es representado por el grupo $O(n+1)$ de matrices ortogonales $(n+1)\times(n+1)$. Puede demostrarse (Ver [5]) que la correspondencia isometría esférica con cada transformación ortogonal es una biyección. Así el grupo $O(n+1)$ es una *representación* del grupo de isometrías esféricas.

De la teoría del álgebra lineal las matrices de $O(n+1)$ tienen $DetA = \pm 1$. El conjunto de matrices de $O(n+1)$ con $DetA = 1$ forman el subgrupo propio $SO(n+1)$, este subgrupo representa al grupo de rotaciones en el espacio euclídeo. Las matrices de $O(n+1)$ con $DetA = -1$ representan un subconjunto desconectado con $SO(n+1)$ entre sus elementos está la inversión. En física, las teorías normalmente suponen que el espacio donde ocurren las interacciones de los entes físicos es euclídeo y de sus propiedades (tales como homogeneidad e isotropía) se deducen teoremas generales de conservación. Así, si se pretende formular una teoría física en un espacio no euclídeo, es importante conocer sus propiedades (en particular sus isometrías).

2.2.2. Geodésicas Esféricas

$\mathbb{S}^n$ como subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto conexo. Esto implica que dados dos puntos de $\mathbb{S}^n$ existe al menos una curva $\boldsymbol{\varphi}(t)$ con una parametrización dada

$$\boldsymbol{\varphi}\colon [a,b] \to \mathbb{S}^n$$

tal que $\boldsymbol{\varphi}(a)$ y $\boldsymbol{\varphi}(b)$ corresponden con los dos puntos de $\mathbb{S}^n$ inicialmente tomados. En realidad entre dos puntos cualesquiera de $\mathbb{S}^n$ existe una infinidad de curvas que satisfacen la afirmación anterior.

Una curva $\boldsymbol{\varphi}(t)$ en $\mathbb{S}^n$ también tiene su imagen en $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto se puede calcular su longitud $\|\boldsymbol{\varphi}\|_E$. Formalmente este número se obtiene tomando una partición del intervalo $[a,b]$ (tomamos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$) y la longitud de la curva viene dada por el siguiente límite:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_E = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_E(\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1}), \boldsymbol{\varphi}(t_i))$$

Sin embargo en $\mathbb{S}^n$ al usar la distancia esférica puede demostrarse que el límite anterior tiende al mismo número (para pequeños desplazamientos ambas métricas coinciden) lo que significa que $\|\boldsymbol{\varphi}\|_E = \|\boldsymbol{\varphi}\|_S = \|\boldsymbol{\varphi}\|$ y por lo tanto de acuerdo al cálculo vectorial en $\mathbb{R}^{n+1}$ tendremos:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|\, dt \tag{2.5}$$

¿Existirá alguna curva entre dos puntos de $\mathbb{S}^n$ cuya longitud coincida con la distancia esférica entre ambos puntos? si exigimos además que dicha curva venga parametrizada por longitud de arco $\|\dot{\varphi}(t)\| = 1$ para todo t, la respuesta es sí y se denomina *Arco geodésico esférico* $\boldsymbol{\alpha}(t)$ el cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos(t-a))\mathbf{X} + (\sin(t-a))\mathbf{Y} \tag{2.6}$$

Con $\mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}(a)$ y $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\alpha}'(a)$ “ortonormales”, esta elección de los vectores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ no es única. Dicha curva puede ser extendida de tal manera que su imagen corresponda a un círculo de radio unitario en $\mathbb{R}^{n+1}$ con centro en el origen, el cual puede venir dado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \cos(t)\mathbf{X} + \sin(t)\mathbf{Y} \tag{2.7}$$

La curva tiene dominio toda la recta real $\mathbb{R}$ y longitud infinita; la imagen de $\boldsymbol{\lambda}(t)$ se denomina *Geodésica esférica.* Para el caso de $\mathbb{S}^2$ sus geodésicas tienen la siguiente interpretación geométrica: los dos vectores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ de $\boldsymbol{\lambda}(t)$ forman un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen (subespacio vectorial bidimensional) y cuya intersección con $\mathbb{S}^2$ es una geodésica denominada también *círculo máximo.*

2.2.3. Geometría esférica y elíptica

$\mathbb{S}^n$ es un espacio totalmente geodésico o lo que es lo mismo, para cada par de puntos hay una geodésica que los contiene. Es mas, si dichos puntos son *no antipodales* la geodésica que los contiene es única. Ademas todo segmento geodésico (imagen de la curva $\boldsymbol{\alpha}(t)$ definida en (2.6)) se extiende a una única geodésica. En el caso de $\mathbb{S}^2$ estas afirmaciones son equivalentes a los dos primeros axiomas de la geometría plana de Euclides (salvo los puntos antipodales) con sus puntos los puntos de $\mathbb{S}^2$ y sus rectas los círculos máximos. En particular, en $\mathbb{S}^2$ se consiguen resultados análogos a los de la geometría plana. Sin embargo, el quinto axioma, para el caso esférico, se modifica de la siguiente forma:

> *Por un punto exterior a una recta (círculo máximo)* **no existe** *ninguna recta paralela que contenga al punto.*

En realidad para que el equivalente sea total hay que identificar los puntos antipodales de $\mathbb{S}^2$. El nuevo espacio así formado es el denominado espacio elíptico bidimensional $\mathbb{P}^2$ (la generalización a $\mathbb{P}^n$ se realiza de la misma manera). Por lo tanto a los puntos $\{\mathbf{X}, -\mathbf{X}\} \in \mathbb{S}^2$ le corresponden un único punto en $\mathbb{P}^2$ el cual se denota como: $\{\pm\mathbf{X}\} \in \mathbb{P}^2$. La distancia ó la métrica en $\mathbb{P}^2$ se define como:

$$d_P(\{\pm\mathbf{X}\}, \{\pm\mathbf{Y}\}) = min\{d_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}); d_S(\mathbf{X}, -\mathbf{Y})\}$$

A la geometría que este modelo representa se le conoce como geometría elíptica y el caso bidimensional es el análogo de la geometría plana euclídea (en el sentido de que satisface los 4 primeros axiomas de Euclides y la correspondiente versión esférica del quinto axioma; siendo las rectas los círculos máximos en su forma elíptica). Esta es una posible geometría **no euclídea**, otra posibilidad es la conocida geometría hiperbólica la cual difiere de la elíptica en la formulación del quinto axioma para el caso bidimensional: por un punto exterior a una recta pasa mas de una recta paralela (un tratamiento de estas geometrías no euclídeas se encuentra, por ejemplo, en [6], incluidas referencias historicas).

Notemos que el tercer axioma de Euclides se satisface en nuestro modelo de la geometría esférica ya que las distancias posibles en este modelo estan acotadas y los radios de los circulos pueden tomar cualquier valor dentro del rango permitido. Por lo tanto, de los primeros 4 axiomas euclidianos, la geometría esférica satisface todos menos el primero. En realidad, se llama geometría cuando se satisfacen los cuatro primeros axiomas de la geometría euclidea. Entonces, el modelo elíptico y el hiperbólico representan geometrías no asi el esférico. Por abuso del lenguaje seguiremos la costumbre de hablar de la geometría esférica.

Luego, es posible formular teorías físicas y considerar que el espacio tenga la estructura de estas geometrías no euclídeas. Esto último es claro ya que el quinto axioma no se puede comprobar directamente y su verificación solo es local. Con la concepción galileana de tiempo absoluto surge otro modelo de espacio-tiempo, donde en lugar del espacio euclideo tenemos uno no euclideo, sobre el cual los entes físicos interactúan bajo un principio de mínima acción (mecánica clásica) o bajo los postulados de la mecánica cuántica.

2.3. $\mathbb{S}^n$ como variedad riemanniana

La métrica esférica de $\mathbb{S}^n$ "coincide" con la métrica euclídea para pequeños desplazamientos. Esto sugiere que *localmente* $\mathbb{S}^n$ es "aproximadamente" un $\mathbb{R}^n$ (la tierra es prácticamente plana en pequeñas porciones de su superficie como pensaban los contrarios a las ideas de Colón). Mas aún, se puede hacer esta afirmación independientemente de las propiedades métricas de ambos espacios. En efecto, existen conjuntos abiertos A de $\mathbb{S}^n$ que vienen dados por *Homeomorfismos* a algún abierto de $\mathbb{R}^n$ (existe una función continua $f : A \to \mathbb{R}^n$ la cual es uno a uno ó inyectiva; además la inversa de f es continua). No se pretende introducir aquí el lenguaje de la topología, solo mencionaremos que $\mathbb{S}^n$ es un espacio topológico de Hausdorff, segundo contable (Ver [7]). Así, $\mathbb{S}^n$ es lo que se denomina una *variedad topológica*. Si todos los abiertos de una variedad topológica que son homeomorfos a un $\mathbb{R}^n$, son tales que n es constante, entonces la variedad es n-dimensional. Cabe destacar que todo el conjunto $\mathbb{S}^n$ **no** es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto no son espacios topológicamente equivalentes. Tenemos por ejemplo que $\mathbb{S}^n$ (a diferencia de $\mathbb{R}^n$), entre otra cosas, es compacto. Sin embargo, $\mathbb{S}^n$ es una variedad topológica n-dimensional.

Además $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferencial, esto es, existe un conjunto abiertos $\{U_\alpha\}$ en $\mathbb{S}^n$ cuya unión cubre la variedad, es decir $\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathbb{S}^n$; dicho conjunto de abiertos se denomina *atlas*. Por cada abierto U_α existe un homeomorfismo $\Psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo par de abiertos U_α y U_β en el atlas, las funciones:

$$\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

y su inversa

$$\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

son infinitamente diferenciables C^∞ en los abiertos donde están definidas, en particular son difeomorfismos. Esta propiedad permite hablar de diferenciabilidad de funciones entre variedades, vía composición con los homeomorfismos Ψ_α. Suele denominarse al par $(U_\alpha; \Psi_\alpha) = (U_\alpha; x^1, x^2, ..., x^n)$ carta ó sistema de coordenadas en $\mathbb{S}^n$ con la función $x^i \circ \Psi_\alpha : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la i-ésima componente de Ψ_α, cuando aparezca solamente x^i se denomina la i-ésima coordenada. Entre los sistemas coordenados de $\mathbb{S}^n$ se encuentra las coordenadas esféricas y unas coordenadas "cartesianas" heredadas de las usuales de $\mathbb{R}^{n+1}$ que mas adelante introduciremos.

2.3.1. El espacio vectorial tangente

Como se dijo anteriormente no es trivial asociar una estructura vectorial a $\mathbb{S}^n$, no obstante, el hecho de que $\mathbb{S}^n$ sea una variedad diferenciable permite construir en cada punto $\mathbf{p}$ de $\mathbb{S}^n$ un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$ llamado *espacio vectorial tangente en* $\mathbf{p}$ denotado como $T_p\mathbb{S}^n$. En el cálculo vectorial de $\mathbb{R}^n$ la derivada direccional en un punto define un único vector, de igual manera cada vector define una única derivada direccional en un punto; puede demostrarse que esta relación es un isomorfismo entre espacios vectoriales (el conjunto de derivadas direccionales en un punto es un espacio vectorial) a su vez las derivadas direccionales son operadores lineales aplicados sobre funciones vectoriales a valores reales; tomando todo esto en cuenta se define $T_p\mathbb{S}^n$ de la siguiente manera:

> Sea $\mathcal{F}$ el espacio de funciones $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ infinito diferenciables al menos en un punto $\mathbf{p}$ (para cualquier carta que contenga a $\mathbf{p}$ esto equivale a afirmar que $f \circ \Psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es C^∞ en $\Psi_\alpha(\mathbf{p})$) se define $T_p\mathbb{S}^n$ como el espacio vectorial formado por las transformaciones lineales $\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que cumplen la regla de Leibniz, es decir $\forall\ f, g \in \mathcal{F}$ se cumple:
>
> $$\vec{\mathbf{V}}(fg) = f(\mathbf{p})\vec{\mathbf{V}}(g) + g(\mathbf{p})\vec{\mathbf{V}}(f)$$

La definición de $T_p\mathbb{S}^n$ es independiente de los sistemas de coordenadas que contienen a $\mathbf{p}$, sin embargo dada una carta $(U_\alpha; x^1, x^2 ..., x^n)$ que contenga a $\mathbf{p}$ se puede demostrar que la acción de $\vec{\mathbf{V}} \in T_p\mathbb{S}^n$ sobre $f \in \mathcal{F}$ vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{\mathbf{V}}(f) = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \Psi_\alpha^{-1})\bigg|_{\Psi_\alpha(\mathbf{p})}$$

Donde las $V^\mu = \vec{\mathbf{V}}(x^i \circ \Psi_\alpha)$ son las componentes del vector $\vec{\mathbf{V}}$ y son números reales. Prescindiendo de la acción explicita sobre funciones y sobrentendiendo que la derivada parcial se evalúa en $\Psi_\alpha(\mathbf{p})$, podemos expresar cualquier vector en $T_p\mathbb{S}^n$ como:

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.8}$$

El conjunto de vectores $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ en $T_p\mathbb{S}^n$ forma una base linealmente independiente, así el espacio $T_p\mathbb{S}^n$ tendrá dimensión n. Es importante señalar que la estructura vectorial de $T_p\mathbb{S}^n$ no implica que este sea un espacio normado ó dotado con un producto escalar, a menos que $\mathbb{S}^n$ sea un espacio métrico. De ser este el caso tienen sentido expresiones como base ortonormal en $T_p\mathbb{S}^n$.

Un campo vectorial es la asignación de un vector a cada punto $\mathbf{p}$ en $\mathbb{S}^n$ (en particular en cada espacio tangente $T_p\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{S}^n$), dada una carta o sistema de coordenadas la expresión para dicho campo en la carta será:

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu_{(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.9}$$

Donde las componentes $V^\mu_{(\mathbf{p})}$ son ahora funciones $V^\mu : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, si dichas funciones son infinitamente diferenciables entonces el campo vectorial se denomina suave; se observa que para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ la expresión (2.9) es realmente un vector en $T_p\mathbb{S}^n$. Mas adelante introduciremos el campo vectorial de Killing el cual está íntimamente relacionado con las isometrías en $\mathbb{S}^n$.

2.3.2. El tensor métrico g de $\mathbb{S}^n$

$\mathbb{S}^n$ es un conjunto de nivel para la función $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida así:

$$f(x_1, ..., x_{n+1}) = \|\mathbf{X}\|^2 - 1$$

tal función tiene gradiente no nulo en todos los puntos de $\mathbb{S}^n$. Al satisfacer estas propiedades $\mathbb{S}^n$ es una *subvariedad regular* de $\mathbb{R}^{n+1}$ (ver [7]) y tales variedades *heredan* las propiedades métricas de $\mathbb{R}^{n+1}$. En particular en $\mathbb{R}^{n+1}$ el cálculo de longitudes de curvas, áreas, volúmenes, integración de funciones etc; se llevan a cabo vía el tensor métrico. Entonces $\mathbb{S}^n$ tendrá su propio tensor métrico g, el cual es una transformación multilineal $\mathsf{g} : T_p\mathbb{S}^n \otimes T_p\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ en cada punto $\mathbf{p}$ de $\mathbb{S}^n$. Dicho tensor induce de forma natural un producto interno en $T_p\mathbb{S}^n$ simétrico, no degenerado y positivo. Dada una carta que contenga a $\mathbf{p}$, la acción de g sobre los vectores de $T_p\mathbb{S}^n$ viene dada por una matriz (representación del tensor g en la base coordenada) simétrica $g_{\mu\nu}$ con cada una de sus componentes una función suave en la carta.

El cálculo de $g_{\mu\nu}$ se lleva acabo de la siguiente manera (ver [9]):
Dada la carta $(U_\alpha; \Psi_\alpha) = (U_\alpha; x^1, x^2, ..., x^n)$ la función $F = \Psi_\alpha^{-1}$ con dominio $\Psi_\alpha(U_\alpha)$ definida en $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ sera infinitamente diferenciable en $\Psi_\alpha(U_\alpha)$. Entonces las componentes del tensor métrico en $\mathbf{p}$ vienen dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^\mu}, \frac{\partial F}{\partial x^\nu} \right\rangle \Bigg|_{\Psi_\alpha(\mathbf{p})} \tag{2.10}$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Así al igual que en $\mathbb{R}^{n+1}$ podemos usar el tensor métrico en $\mathbb{S}^n$ para calcular magnitudes importantes como longitudes de curvas (2.5) con:

$$\|\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

Aquí $\dot{x}^i$ es la componente i-esima del vector velocidad de la curva en t el cual vive en $T_p\mathbb{S}^n$.
Elementos diferenciales de volumen:

$$dV = \sqrt{Det(g_{\mu\nu})}\, dx^1 dx^2 ... dx^n \tag{2.11}$$

El cuadrado del elemento de longitud:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.12}$$

El conjunto de vectores $\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{\Psi(p)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genera un subespacio vectorial n-dimensional *isomorfo* a $T_p\mathbb{S}^n$ y la correspondiente matriz jacobiana de F es la respectiva transformación entre ambos espacios. Debido a este isomorfismo y a la métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ es que es posible definir el tensor métrico de $\mathbb{S}^n$.

Naturalmente el tensor métrico en $\mathbb{S}^n$ esta definido independientemente del encajamiento en $\mathbb{R}^{n+1}$ aunque $\mathbb{S}^n$ *herede* sus propiedades métricas. El tensor así definido es un objeto geométrico que vive en $\mathbb{S}^n$ y permite el cálculo de longitudes de curvas en este espacio de manera *intrínseca*. Mediante el cálculo variacional es posible determinar cual es la curva en $\mathbb{S}^n$ entre dos puntos cuya longitud sea un mínimo, dado el tensor métrico en $\mathbb{S}^n$. Si además exigimos que venga parametrizada por longitud de arco, dicha curva resulta ser el arco geodésico definido en (2.6) y su longitud (la cual es independiente de la parametrización) coincide exactamente con la métrica esférica entre ambos puntos definida en (2.2). Así esta métrica puede ser definida intrínsecamente dado el tensor métrico como se afirmó en la sección **2.2**.

2.3.3. Coordenadas esféricas y cartesianas

Coordenadas esféricas

Sea $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ con sus componentes cartesianas x_n y x_{n+1} cualquier número real salvo la restricción simultánea $x_{n+1} = 0$ y $x_n \geq 0$; se definen las coordenadas esféricas de $\mathbf{X}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ como el conjunto de números $(\rho, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ donde $\rho \in (0, \infty)$; $\theta_\mu \in (0, \pi)$ con $\mu = 1, 2, ..., n-1$; $\theta_n \in (0, 2\pi)$ tal que:

1. $\rho = \|\mathbf{X}\|$

2. θ_i es el ángulo entre $\mathbf{e}_i$ y la proyección de $\mathbf{X}$ en el subespacio vectorial generado por $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, ..., \mathbf{e}_{n+1})$ con $i = 1, 2, ..., n-1$; aquí $\mathbf{e}_\mu$ es un elemento de la base cartesiana usual en $\mathbb{R}^{n+1}$ así:
$$\theta_i = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{e}_i, x_i\mathbf{e}_i + x_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + \cdots + x_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}\rangle}{\sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2}}\right) \tag{2.13}$$

3. θ_n es el conocido ángulo polar el cual viene dado por:
$$\theta_n = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{e}_n, x_n\mathbf{e}_n + x_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}\rangle}{\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}^2}}\right) \tag{2.14}$$

Estas coordenadas "cubren" a $\mathbb{R}^{n+1}$ salvo el subconjunto:

$$A = \{\, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \text{ } y \text{ } x_n \geq 0 \,\}$$

la cual representa la mitad del hiperplano $x_{n+1} = 0$, se necesita de otra carta para cubrir a todo $\mathbb{R}^{n+1}$. Si restringimos a la coordenada ρ al valor $\rho = 1$ obtenemos una carta que cubre a $\mathbb{S}^n$ salvo la intersección $\mathbb{S}^n \cap A$. De esta forma denotamos la carta o sistema de coordenadas esféricas como:

$$(\{\, \mathbb{S}^n - \mathbb{S}^n \cap A \,\}; \Psi_S) = (\{\, \mathbb{S}^n - \mathbb{S}^n \cap A \,\}; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$$

Si queremos obtener nuevamente las coordenadas de $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ a partir de Ψ_S^{-1} tendremos:

$$x_1 = \cos\theta_1 \tag{2.15}$$

$$x_2 = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \tag{2.16}$$

$$x_3 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_3 \tag{2.17}$$

$$\vdots \tag{2.18}$$

$$x_n = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \dots \operatorname{sen}\theta_{n-1} \cos\theta_n \tag{2.19}$$

$$x_{n+1} = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \dots \operatorname{sen}\theta_{n-1} \operatorname{sen}\theta_n \tag{2.20}$$

Consideremos los ejemplos de interés: $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^3$. Para el caso de $\mathbb{S}^2$ tendremos, según la notación usual: $x_1 = z$; $x_2 = x$; $x_3 = y$, como las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^3$, y las coordenadas esféricas serán: $\theta_1 = \theta$ y $\theta_2 = \phi$ la cual pueden calcularse con:

$$\theta = \arccos(z) = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{2.21}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.22}$$

Estas coordenadas cubren $\mathbb{S}^2$ salvo el semicírculo generado al interceptar $\mathbb{S}^2$ con el semiplano $y = 0$; $x \geq 0$. Calculemos las componentes del tensor métrico en estas coordenadas. La función F será:

$$F(\theta, \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}$$

Entonces según (2.10) tenemos:

$$g_{\theta\theta} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = 1 \tag{2.23}$$

$$g_{\phi\theta} = g_{\theta\phi} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \phi} \right\rangle = 0 \tag{2.24}$$

$$g_{\phi\phi} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial \phi} \right\rangle = \operatorname{sen}^2 \theta \tag{2.25}$$

El cual se expresa en forma matricial como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$

Así el elemento de volumen (área) de $\mathbb{S}^2$ en coordenadas esféricas será según (2.11):

$$dA = \operatorname{sen} \theta \, d\theta d\phi \tag{2.26}$$

Y el respectivo elemento cuadrado de longitud:

$$ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2 \tag{2.27}$$

Vemos como las componentes del tensor métrico en coordenadas esféricas son funciones suaves en $\mathbb{S}^2$. Para finalizar se calculará las mismas magnitudes en $\mathbb{S}^3$ usando coordenadas esféricas $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Para ver las expresiones explicitas de estas coordenadas véase el conjunto de ecuaciones (2.13-2.20) con $n = 3$. La función F en este caso será:

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos \theta_1 \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{e}_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \mathbf{e}_3 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \mathbf{e}_4$$

Al calcular las componentes del tensor métrico en estas coordenadas usaremos la siguiente notación:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta_i}, \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \right\rangle$$

para $i, j = 1, 2, 3$. Las cuales en forma matricial se expresan como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Por lo tanto el elemento de volumen de $\mathbb{S}^3$ en coordenadas esféricas será:

$$dV = \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \tag{2.29}$$

Y el elemento cuadrado de longitud será:

$$ds^2 = d\theta_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2\, d\theta_3^2 \tag{2.30}$$

El hecho de que en coordenadas esféricas la matriz del tensor métrico sea diagonal implica que la base de vectores $\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}\}$ en $T_p\mathbb{S}^n$ es ortogonal para todo $\mathbf{p}$. (Los vectores en $T_p\mathbb{S}^n$ en coordenadas esféricas se pueden escribir en notación matricial y efectuar el producto escalar como una multiplicación de matrices de igual forma como se hace en $\mathbb{R}^{n+1}$).

Coordenadas cartesianas

Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$, y sea $P_{x_i}\mathbf{X}$ la proyección de $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ en el hiperplano $x_i = 0$ con $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$; si tomamos la restricción

$$x_i = \sqrt{1 - \|P_{x_i}\mathbf{X}\|^2} \tag{2.31}$$

con la componente x_i de $\mathbf{X}$ cumpliendo:

$$x_i > 0 \tag{2.32}$$

entonces el conjunto de n coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$ a excepción de x_i forman una carta para los $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ que cumplen (2.32). Si tomamos la restricción (2.31) como

$$x_i = -\sqrt{1 - \|P_{x_i}\mathbf{X}\|^2}$$

con $x_i < 0$ entonces el mismo conjunto de coordenadas forman otra carta para los $\mathbf{X} \in \mathbb{S}^n$ que cumplen $x_i < 0$.

Repitiendo el proceso anterior para todas las coordenadas x_i obtenemos un conjunto de $2(n+1)$ cartas que cubren completamente $\mathbb{S}^n$. En particular dada una de estas cartas, por ejemplo la correspondiente a $x_{n+1} > 0$, tenemos la función F y el conjunto de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para las cuales las componentes del tensor métrico serán:

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1 + x_i^2 - \|P_{x_{n+1}}\mathbf{X}\|^2}{1 - \|P_{x_{n+1}}\mathbf{X}\|^2} & \text{si } i = j \\ \frac{x_i x_j}{1 - \|P_{x_{n+1}}\mathbf{X}\|^2} & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{2.33}$$

A manera de ejemplo consideremos $\mathbb{S}^2$, sean (x, y, z) las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^3$, entonces considérese la carta correspondiente a $z > 0$ la cual impone la restricción: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ donde $P_z\mathbf{X} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es la proyección de $\mathbf{X}$ en el plano $z = 0$, así para este caso las coordenadas cartesianas (x, y) cubren la mitad superior del cascaron esférico $\mathbb{S}^2$. La función F se escribe como:

$$F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathbf{k}$$

Entonces el tensor métrico en estas coordenadas será:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{yx}{1-x^2-y^2} & \frac{1-x^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Véase como esta matriz no es diagonal, esto implica que el conjunto de vectores $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ es una base no ortogonal en $T_p\mathbb{S}^n$(en los únicos puntos donde la base es ortogonal es en $z = 1$ y cuando x ó y se hagan cero).

Puede demostrarse que las componentes del tensor métrico transforman ante un cambio de coordenadas como las componentes de un tensor. Así por ejemplo si consideramos g_{ij} como las componentes de la métrica en coordenadas cartesianas, y $g_{\mu\nu}$ las componentes en coordenadas esféricas, la respectiva transformación se escribe como:

$$g_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\theta_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial\theta_\nu}{\partial x_j} g_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

2.3.4. Campo vectorial de killing

Como se vio anteriormente, un campo vectorial es la asignación de un vector en cada espacio tangente $T_p\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{S}^n$, y dado un sistema de coordenadas

$$(U_\alpha; \Psi_\alpha) = (U_\alpha; x^1, x^2, ..., x^n)$$

la expresión del campo localmente será (puede suceder que la carta no cubra toda la variedad y por tanto sólo describa localmente al campo):

$$\vec{\mathbf{V}} = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu_{(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

con las componentes $V^{\mu}_{(\mathbf{p})}$ (con $V^{\mu} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$) funciones suaves en $\mathbb{S}^n$. Esto implica que las funciones

$$V^{\mu} \circ \Psi_{\alpha}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

son C^{∞} y las denotaremos como $V^{\mu}(x^1, x^2, ..., x^n)$, es decir son las componentes del campo expresadas en la carta. Puede pensarse las componentes del campo en la carta como las componentes de un campo de velocidades en $\mathbb{R}^n$ y es usual calcular las curvas de ese "flujo" mediante la resolución de las siguientes n ecuaciones (siempre y cuando el campo vectorial, o lo que es lo mismo todas sus componentes, no se anulen en puntos de $\mathbb{S}^n$. En $\mathbb{S}^n$ siempre puede escogerse campos que satisfagan esta condición localmente. Globalmente la situación es mas delicada , ver p.e [12]):

$$V^{\mu}(x^1, x^2, ..., x^n) = \frac{dx^{\mu}}{dt} \tag{2.35}$$

Con $\mu = 1, 2, \ldots, n$. En particular siempre se impone una condición inicial para que la solución sea única, en nuestro caso:

$$\left.\frac{dx^{\mu}}{dt}\right|_{t=0} = V^{\mu}_{(\mathbf{p})}$$

La soluciónes $x^{\mu}(t)$ de cada ecuación formarán una curva $\mathbf{x}(t)$ que vive en el abierto $\Psi(U_{\alpha}) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a U_{α} con $\mathbf{x}(0) = \Psi_{\alpha}(\mathbf{p})$. Sin embargo podemos transformar $\mathbf{x}(t)$ a la variedad, obteniendo así una curva $\phi_t(\mathbf{p})$ en $\mathbb{S}^n$:

$$\phi_{t(\mathbf{p})} = \Psi_{\alpha}^{-1}(\mathbf{x}(t)) \tag{2.36}$$

En particular para otro punto $\mathbf{s}$ de $\mathbb{S}^n$ por el cual pase $\phi_t(\mathbf{p})$ es posible repetir el proceso anterior, no obstante esto solo implica un cambio de parametrización. En cambio si repetimos el procedimiento para puntos de $\mathbb{S}^n$ por los cuales **no** pasa $\phi_{t(\mathbf{p})}$ entonces obtenemos una curva con imagen diferente. Así para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^n$ obtenemos una familia de curvas asociadas al campo vectorial $\vec{\mathbf{V}}$, y podemos considerar $\mathbf{p}$ como parametro variable de $\phi_t(\mathbf{p})$.

Si fijamos el parámetro t de $\phi_t(\mathbf{p})$ entonces esta transformación actuará como:

$$\phi_t : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$

Puede demostrarse que para cierto tipo de campos vectoriales suaves denominados *completos* la transformación $\phi_{t(\mathbf{p})}$ con t fijo será un difeomorfismo. Para este caso si también dejamos libre el paramétro t la transformación:

$$\phi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$$

se denomina *grupo monoparamétrico de difeomorfismos* y a $\vec{\mathbf{V}}$ su *campo vectorial generador*, puede verse que para $t = 0$ la transformación ϕ_t es la identidad. Para un desarrollo completo de las ideas aquí expuestas véase [12].

Los elementos del subgrupo de isometrías $SO(n+1)$ en $\mathbb{S}^n$ (Véase la sección 2.1.1) son difeomorfismos (las isometrías preservan la estructura diferencial de $\mathbb{S}^n$). Podemos considerar *subgrupos* monoparamétricos del grupo $SO(n+1)$, de isometrías. (Por ejemplo el grupo de rotaciones alrededor de un eje dado en $\mathbb{R}^{n+1}$, el parámetro en tal caso viene representado por el ángulo de rotación). Cada subgrupo monoparamétrico tendrá su respectivo campo vectorial generador completo denominado *campo vectorial de killing*. Daremos un método para el cálculo de este campo; téngase en cuenta que las expresiones obtenidas serán locales y generan al grupo de isometrías solo localmente; sin embargo esta condición es suficiente para nuestros intereses. El procedimiento anterior no es valido en general para las isometrías que no pertenecen a $SO(n+1)$, aunque estas también son difeomorfismos no se les puede asociar una familia de curvas continuas como en el caso de las rotaciones ya que no están continuamente conectadas entre si.

Derivada de lie

Sea $\phi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un elemento cualquiera del subgrupo isometrías representadas por $SO(n+1)$, dicho elemento induce una transformación $\phi^* : T_p\mathbb{S}^n \to T_{\phi(p)}\mathbb{S}^n$ llamada *diferencial* de ϕ, dicha transformación incluso actúa sobre campos tensoriales (como por ejemplo g) y dado un sistema de coordenadas, como por ejemplo el sistema esférico, la matriz jacobiana de la transformación:

$$\Psi_S \circ \phi \circ \Psi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

representará la acción de ϕ^* sobre los elementos de $T_p\mathbb{S}^n$, en particular si ϕ^* actúa sobre un tensor, debe hacerlo en cada entrada del mismo. Así en $\mathbb{S}^n$ tendremos:

$$\Psi_S \circ \phi \circ \Psi_S^{-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$$

y la correspondiente acción de ϕ^* sobre el tensor métrico g en coordenadas esféricas puede expresarse como:

$$(\phi^*\mathsf{g})_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\frac{\partial\theta'_\mu}{\partial\theta_i}\frac{\partial\theta'_\nu}{\partial\theta_j} \tag{2.37}$$

donde la relación anterior podría haberse expresado como una multiplicación de matrices. Si ϕ es una isometría se tiene que:

$$(\phi^*\mathsf{g})_{ij} = g_{ij} \tag{2.38}$$

Entonces, dada un subgrupo monoparamétrico de isometrías ϕ_t en $\mathbb{S}^n$ y su respectivo campo vectorial de killing generador $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ se puede calcular la derivada de Lie del tensor métrico g de $\mathbb{S}^n$ respecto de $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ en **cualquier** sistema de coordenadas usando la definición:

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}g_{ab} = \lim_{t\to 0}\frac{(\phi^*_{-t}\mathsf{g})_{ab} - g_{ab}}{t}$$

sin embargo al usar (2.38) tenemos que:

$$\mathcal{L}_{\vec{\boldsymbol{\xi}}}g_{ab} = 0 \tag{2.39}$$

No es el objetivo de este trabajo desarrollar la ecuación anterior (ver por ejemplo [8]), sin embargo puede demostrarse que, en un sistema de coordenadas dado, ella implica el siguiente grupo de relaciones:

$$\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu} - 2\sum_{\lambda=1}^{n}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi_\lambda = 0 \tag{2.40}$$

Donde $\{\mu = 1, 2, \dots, n\}$ y $\{\nu = 1, 2, \dots, n\}$ toman todas las posibles combinaciones, $\xi_a = \sum_{b=1}^{n} g_{ab}\xi^b$ con ξ^b la b-esima componente del campo en la carta; y $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ los conocidos símbolos de Christoffel, los cuales se calculan mediante:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{n} g^{\lambda\sigma}\left\{\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right\}$$

Donde $g^{\mu\nu}$ son las componentes del tensor g^{-1}. Así dado el tensor métrico en la variedad (y por lo tanto sus componentes en algún sistema de coordenadas) es posible encontrar la solución al conjunto de $n(n+1)/2$ ecuaciones (2.40) en dichas coordenadas (este número se debe a que los símbolos de christoffel satisfacen $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$), dicha solución da a lo sumo $n(n+1)/2$ campos de killing localmente independientes, si este es el caso se dice que la variedad es maximalmente simétrica ($\mathbb{R}^n$ cumplen esta propiedad al igual que $\mathbb{S}^n$).

Es importante remarcar que aunque todas estas definiciones y resultados estén expresadas en algún sistema de coordenadas (las cuales pueden expresar solo localmente al campo), los campos vectoriales viven en el espacio formado por la unión de todos los espacios tangentes de $\mathbb{S}^n$, la cual se denomina *fibrado tangente* y cada espacio tangente es definido independientemente de coordenadas.

La parte conectada del grupo de matrices $O(n+1)$ (es decir aquellas matrices con determinante igual a 1) que es una representación del subgrupo $SO(n+1)$ de isometrías en $\mathbb{S}^n$ (rotaciones en $\mathbb{R}^{n+1}$), es un grupo de lie conectado con el cual siempre viene asociada un *álgebra de lie*, en nuestro caso el álgebra de lie es el espacio vectorial $\chi(\mathbb{S}^n)$ generado por el conjunto de campos vectoriales suaves de killing linealmente independientes que son soluciones de (2.40) en una carta. En esta álgebra la operación de multiplicación (la cual debe ser bilineal, anticonmutativa, y satisfacer la identidad de Jacobi) viene dada por el conmutador usual de campos vectoriales:

$$[\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}] = \vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{A}} \tag{2.41}$$

para el cual se cumple:

$$[\vec{\boldsymbol{\xi}}_1, \vec{\boldsymbol{\xi}}_2] \in \chi(\mathbb{S}^n) \quad \forall \quad \vec{\boldsymbol{\xi}}_1, \vec{\boldsymbol{\xi}}_2 \in \chi(\mathbb{S}^n)$$

Generalmente es útil conocer los conmutadores de los elementos de una base que genera a $\chi(\mathbb{S}^n)$ ya que de esta manera es posible determinar algunas sub-álgebras del álgebra de lie principal. Además, si no se tienen todos los elementos de una base en $\chi(\mathbb{S}^n)$ es posible encontrarlos de esta forma. Mas adelante se verá como los campos vectoriales de killing se relacionan con el proceso de cuantización de sistemas físicos que constan de una partícula y alguna interacción en $\mathbb{S}^n$.

El corchete de lie ó el conmutador es una operación que puede extenderse a cualquier campo vectorial suave en $\mathbb{S}^n$ y también puede verificarse que el conjunto de todos los campos vectoriales suaves es un álgebra de lie. En realidad el subconjunto $\chi(\mathbb{S}^n)$ es una sub-álgebra del álgebra de lie formada por todos los campos vectoriales suaves. Los campos vectoriales suaves pueden verse también como *transformaciones lineales* $\vec{\mathbf{V}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ y que ademas cumplen con la regla de Leibniz al actuar sobre los elementos de $\mathcal{F}$ (Ver sección **2.3.1**). El dominio de los elementos de $\chi(\mathbb{S}^n)$ pueden *extenderse* a otros dominios, por ejemplo a algún subconjunto del espacio de funciones complejas de cuadrado integrable, con el elemento de volumen dado por (2.11) en $\mathbb{S}^n$, este último es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, ya que $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{H}$. Así el espacio $\chi(\mathbb{S}^n)$, con un dominio adecuado, es un subconjunto del espacio $O(\mathcal{H})$ de operadores lineales en el espacio de Hilbert.

Capítulo 3

Cuantización

La mecánica cuántica es la teoría de la dinámica de los sistemas físicos, suele pensarse que su dominio es exclusivo del micromundo, pero esta afirmación esta impregnada de la concepción clásica que generalmente se tiene del mundo. En realidad un rasgo característico de la naturaleza es el "ser cuántica", prácticamente no hay rama del saber científico, ya sea directa ó indirectamente, en mayor ó menor grado, cuya descripción no esté dentro del dominio cuántico. Y la teoría que podría pensarse como su contraparte: la mecánica clásica; es en realidad un caso límite de la mecánica cuántica.

La mecánica cuántica no relativista (la cual es la teoría que se considerará en este trabajo) es un cuerpo teórico bien desarrollado y establecido de forma rigurosa: ha sido una de las teorías físicas axiomatizadas matemáticamente. Y en su formulación usual, es presentada mediante una serie de postulados, señalaremos los dos primeros:

1. Los sistemas físicos son descritos en términos de elementos de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ complejo separable y cada *estado puro* del sistema al tiempo t es representado por un vector normalizado de $\mathcal{H}$.

2. Cada observable del sistema físico (magnitud física del sistema que puede ser medida) viene representado por su correspondiente operador autoadjunto el cual actúa sobre el espacio $\mathcal{H}$ del sistema.

Los otros postulados son igualmente importantes y tratan sobre el proceso de medición en mecánica cuántica y la dinamica temporal de los estados físicos mediante el operador de Hámilton, (ver p.e [13] y [14]) . La construcción de los operadores autoadjuntos que representan los observables del sistema físico no es de ningún modo trivial;

sin embargo es común expresar al conjunto de estos operadores como funciones de un conjunto básico de ciertos operadores *irreducibles*. Si todos estos observables tienen un análogo clásico (es decir son cantidades que están presentes en mecánica clásica como por ejemplo el momento angular, momento lineal, posición, etc) la representación irreducible se lleva a cabo mediante los observables momento y posición suponiendo que el espacio que subtiende al fenómeno es euclídeo. Esto recuerda la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica en función de las variables canónicas.

Así dado un sistema clásico siempre es posible *cuantizarlo* (bien o mal) y el método usado generalmente en física es la *cuantización canónica*. En este capítulo analizaremos este método y veremos que es dependiente del sistema de coordenadas, algo que no es deseable (ya que si es que funciona para unas coordenadas no funcionará para otras).

3.1. Mecánica clásica

Dado un sistema físico de n puntos materiales en el espacio Euclídeo tridimensional que pueden interactuar entre si (prácticamente todos los sistemas físicos en mecánica clásica son de este tipo, el cuerpo rígido no es mas que una generalización de este concepto con la condición de que todos sus puntos conserven entre si la misma distancia) su dinámica en todo instante puede determinarse en principio conociendo sus posiciones y velocidades en algún instante. En el formalismo lagrangiano esto se lleva a cabo mediante el conocimiento de la función de Lagrange $L(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t)$ la cual es una función a valores reales, donde las q_i's y las $\dot{q}_i$'s son las coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente, no necesariamente las coordenadas cartesianas de las n partículas con $s \leq 3n$. Dicha función determina el estado del sistema físico, y su dinámica vendrá dada al exigir que la integral

$$\int_{ti}^{t2} L(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t)\, dt$$

sea un extremal. Mediante el cálculo variacional se demuestra que esto es equivalente a afirmar que se satisfacen las s ecuaciones de euler-lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{3.1}$$

Esta son ecuaciones de segundo grado, las cuales tienen soluciones únicas, conocidas las posiciones y velocidades iniciales. En general lo dicho anteriormente vale en cualquier sistema de coordenadas.

Si el sistema físico no es aislado, es decir interacciona con otros entes que no forman parte del sistema físico, la función de lagrange debe contener esa interacción externa; en general cuando el lagrangiano es explicitamente dependiente del tiempo resulta ser el caso. En algunos problemas no es posible tomar estas interacciones explícitamente dentro del lagrangiano, con lo cual la ecuación (2.1) debe reescribirse así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

Las Q_j representan esa interacción, la experiencia dice que ellas son de carácter fenomenológico, es decir se deben en realidad a que son algún tipo de interacción macroscópica, en algunos casos pueden ser incluso consideradas como una ecuacíon tipo vinculo y actúan simplemente como una restricción en (3.1). Sin embargo no son interacciones fundamentales, por ejemplo las fuerzas disipativas son de este tipo; y interacciones como estas no suelen tener una contraparte *cuántica*. Como nuestro interés radica en los sistemas clasicos "cuantizables" nos centraremos en ecuaciones tipo (3.1) con "interacciones fundamentales" las cuales si están presentes en cuántica, generalmente los sistemas de este tipo y que ademas son aislados se les puede asociar la siguiente función lagrangiana:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{3.2}$$

Con T la energía cinética y U la energía potencial. En los problemas mas usuales, tales como el problema de kepler ó el oscilador armónico, dado un sistema de referencia adecuado (inercial), la función U solo depende de las coordenadas, así:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \tag{3.3}$$

aquí $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ y $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$. Entonces $\mathbf{q}(t)$ esta en principio determinada (para mayores detalles sobre esta formulación véase [15]).

Existe otra formulación de la mecánica clasica aún mas general denominada formulación hamiltoniana. Esta expresa la dinámica del sistema por medio de la función de hámilton H la cual, en el caso de que el sistema sea descrito por un lagrangiano, se puede encontrar por medio de la función de lagrange vía una transformación de legendre:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i q_i - L \tag{3.4}$$

Donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{s)}$ son los momentos generalizados y se definen según:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.5}$$

Al conjunto de coordenadas $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ se les denomina variables canónicas las cuales son un sistema de coordenadas o carta *local* en el espacio de fase, dicho espacio es una variedad $2s$ dimensional y su estudio detallado revela las propiedades fundamentales del sistema físico en cuestión. Tal estudio comúnmente es el medio para tratar con problemas complejos donde los métodos usuales son incompletos(ver [17]). Como los ejemplos considerados en esta sección no son de este tipo, usaremos la formulación usual (ver [15] y [16]).

Entonces dada la función de hámilton puede demostrarse que el problema se reduce a resolver el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden denominadas ecuaciones de hámilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.6}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3.7}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, s$ estas son un total de $2s$ ecuaciones.

Dado el espacio de funciones $\mathfrak{F}$ a valores reales sobre el espacio de fase, las cuales pueden expresarse en coordenadas canónicas como $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y que ademas son infinito diferenciables respecto a estas coordenadas, (H es una función de este tipo y para sistemas aislados no depende explicitamente del tiempo) la derivada total respecto al tiempo de cualquier función $f \in \mathfrak{F}$ será:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right)$$

Sin embargo si tomamos las ecuaciones (3.6) y (3.7) obtenemos:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \tag{3.8}$$

En realidad la operación $\{f, g\}$ esta bien definida para toda f y $g \in \mathfrak{F}$ y se denomina corhetes de Poisson. Puede demostrarse que el espacio $\mathfrak{F}$ forma un álgebra de lie con el producto el corchete de Poisson.

Teniendo esto en cuenta podemos expresar las ecuaciones (3.6) y (3.7) de la siguiente manera:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \tag{3.9}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \tag{3.10}$$

Toda constante de movimiento (a veces denominada también integral de movimiento) debe cumplir con la condición de mantener el mismo valor durante todo la evolución temporal del sistema, o lo que es lo mismo que su derivada total respecto al tiempo sea cero en todo instante. Si dicha constante de movimiento es además una de las funciones que pertenecen a $\mathfrak{F}$ entonces esto se expresa como:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} = 0 \tag{3.11}$$

O lo que es lo mismo el corchete de Poisson de la función f con H debe anularse. En general para sistemas aislados puede demostrarse que en espacio euclídeo las cantidades físicas como el momento lineal total y el momento angular total del sistema se conservan (es decir son constantes de movimiento y las funciones a evaluar en el corchete de poisson son sus componentes), en realidad la conservación de esta dos cantidades se deben a las propiedades fundamentales ó simetrías del espacio euclídeo: homogeneidad e isotropía respectivamente (ver [16]). Para sistemas complicados (de muchas partículas que interaccionan, generalmente, estas son las únicas constantes o invariantes ya que se derivan de las propiedades del espacio euclídeo. Si se buscan otras, el estudio de las simetrías debe realizarse en el espacio de configuraciones el cual es una subvariedad contenida en un espacio $\mathbb{R}^{3n}$ y en el espacio de fase. Estas constantes de movimiento no dependen explicitamente del tiempo, y si se expresan en función de las variables canónicas su corchete de Poisson $\{f, H\}$ debe *anularse*.

Expresemos el siguiente corchete de poisson $\{q_j, p_k\}$ para todas las combinaciones posibles entre j y k, usando (2.8) tendremos:

$$\{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \tag{3.12}$$

Resaltemos que todas las ecuaciones anteriores son validas para *cualquier* sistema de coordenadas en espacio de configuración y la descripción de la dinámica del sistema físico, será en todos los casos la misma.

3.2. El problema de la cuantización

En los inicios de la teoría cuántica, los sistemas físicos en consideración eran modelados clásicamente salvo que se les restringía a satisfacer algunas reglas de cuantización, este fue el caso de el átomo de hidrogeno en el modelo de Bohr, el cual fue considerado como un problema de kepler. Y los estados estacionarios de la radiación electromagnética en equilibrio en una cavidad fueron considerados como si el sistema fuera un oscilador clásico; a pesar del éxito en estos casos, no se podía establecer como una teoría general (Véase [18]). Con el advenimiento de la mecánica cuántica todo esto cambió, aunque todavía son usados los modelos clásicos para proponer algún tipo de cuantización de los sistemas físicos que tengan algún equivalente en mecánica clásica, (claro está ateniéndose a los postulados de la mecánica cuántica), si la cuantización tiene éxito entonces la dinámica de los *valores medios* de los observables en un cierto límite es idéntica a la dinámica clásica. Generalmente en física el método usual para cuántizar estos sistema es la cuantización cánonica. Si el espacio es euclídeo el método funciona, en general, en una amplia gama de problemas, sin embargo *sólo si se usan coordenadas cartesianas.* En este sección analizaremos esta forma de cuantizar en el espacio euclídeo y se propondrá otro método el cual es independiente de coordenadas.

3.2.1. Cuantización canónica

Schroedinger escribió su famosa ecuación en un intento por encontrar la dinámica de las “ondas de materia” propuesta por de Broglie en su trabajo, este fue el primer gran paso en el desarrollo de la mecánica cuántica, incluso en su formulación rigurosa esta ecuación forma parte de sus postulados, y gobierna la dinámica de los sistemas físicos:

$$-i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \tag{3.13}$$

Donde $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ es un vector normalizado para todo t, y $\hat{H}$ es el operador de Hámiltón el cual es un observable del sistema físico. En representación r, en la cual esta escrita la ecuación de Schroendinger, (esta representación del espacio de Hilbert del sistema considera a sus elementos las funciones a valores complejos y de cuadrado integrable de dominio $\mathbb{R}^3$ ó algún subconjunto, depende del problema, ver por ejemplo [11]. Existen otras representaciones de $\mathcal{H}$ todas isomorfas entre si) el operador de Hámilton que determina la dinámica de una partícula de masa m inmersa en un potencial que no depende explicitamente de t se escribe generalmente como:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \tag{3.14}$$

Donde ∇^2 es el operador de Laplace en $\mathbb{R}^3$ y $V(\mathbf{r})$ es generalmente un potencial derivado de alguna fuerza conservativa, para el caso del átomo de hidrógeno por ejemplo $V(\mathbf{r})$ será el potencial Coulombiano de la electrostática. Aquí el potencial $V(\mathbf{r})$ es clásico, lo que sugiere que para el átomo de hidrógeno la "naturaleza cuántica" del campo electromagnético es despreciable.

Determinar la autoadjunticidad del operador expresado en (3.14) es en general una cuestión delicada (recuérdese que esta propiedad es vital para que el operador $\hat{H}$ represente un observable) y debe precisarse para que dominio denso en $\mathcal{H}$ esto es cierto; generalmente debe estudiarse el término cinetico y potencial simultaneamente, y en muchos casos se consigue alguna restricción adicional sobre los elementos que pertenecen al dominio de $\hat{H}$. En la literatura física usual esto generalmente no se toma en consideración.

Es común en la literatura expresar los operadores asociados a los observables del sistema (como el caso de $\hat{H}$) en función de un algebra irreducible de operadores que corresponden con los observables momento y posición $\hat{p}_i$ y $\hat{q}_i$ con $i = 1, 2, 3$. Esto se logra de la siguiente manera: se sustituye en la expresión clásica del observable cada una de las variables canónicas (por ejemplo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$) por su correspondiente operador simetrizado $\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ (véase [14]). Así el problema se reduce a encontrar expresiones para los observables momento y posición. La cuantización canónica propone la siguiente regla:

En representación r el operador Posición actúa sobre los elementos de $\mathcal{H}$ como el operador multiplicación:

$$\hat{q}_i\Psi(\mathbf{q}) = q_i\Psi(\mathbf{q}) \tag{3.15}$$

y el operador momento actúa sobre $\mathcal{H}$ como una derivación:

$$\hat{p}_i\Psi(\mathbf{q}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}\Psi(\mathbf{q}) \tag{3.16}$$

Con $i = 1, 2, 3$; este método de cuantización se debe a Dirac, y su justificación según sus propias palabras es la siguiente: "El problema de hallar las condiciones cuánticas se reduce al problema de determinar los corchetes de Poisson en mecánica cuántica. La gran analogía entre los corchetes cuánticos de Poisson (esto es, $1/i\hbar$ veces el conmutador) y los corchetes clásicos de Poisson nos lleva a pensar que los corchetes cuánticos de Poisson, o al menos los mas importantes de ellos, tienen las mismas expresiones que los corchetes clásicos de Poisson". De hecho si calculamos el conmutador entre el operador posición y el operador momento dados en (3.15) y (3.16) (recuérdese que el conmutador es un operador que actúa sobre algún elemento de $\mathcal{H}$) obtenemos:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{3.17}$$

La cual según la interpretación anterior sería el análogo de (3.12), los otros análogos de los que se habla tienen que ver con la ecuación (3.11) la cual expresa las cantidades físicas $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ que son constantes de movimiento en la dinámica clásica, al cuántizar generalmente estas cantidades son observables y además cumplen con la propiedad de que conmutan con el operador de Hámilton:

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0 \tag{3.18}$$

aunque la interpretación es distinta, en mecánica cuántica los observables que conmuten con $\hat{H}$ pueden ser simultáneamente medidos con la energía. Sin embargo, el proceso de cuantización canónica solo da resultados consistentes en coordenadas cartesianas. Intentemos cuantizar canónicamente el sistema mas simple de la mecánica clásica: la partícula libre en espacio euclídeo, pero usando coordenadas cilíndricas.

Cuantización canónica de la partícula libre

Partamos de la función langragiana del sistema, al no haber interacción el único término es la energía cinética:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{V}.\mathbf{V}$$

con $\mathbf{V}$ el vector velocidad de la partícula. En coordenadas cilíndricas L será:

$$L(\dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \tag{3.19}$$

Efectuando la transformación de legendre y usando las ecuaciones (3.5) obtenemos la función de Hámilton:

$$H(p_\rho, p_\phi, p_z) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) \tag{3.20}$$

Entonces al cuantizar este sistema usando la cuantización canónica sustituimos en la expresión (3.20) las variables p_ρ, p_ϕ, p_z por los operadores:

$$\hat{p}_\rho = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\rho} \qquad \hat{p}_\phi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

obtenemos:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{3.21}$$

Obviamente la ecuación (3.21) **no** es la expresión del hamiltoniano de la partícula libre el cual viene dado haciendo cero el término $V(\mathbf{r})$ de la ecuación (3.14), tomando el laplaciano en cilíndricas la expresión correcta del hamiltoniano en estas coordenadas será:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{3.22}$$

Entonces el método de cuántización canónica da resultados diferentes para distintas coordenadas. Se podrá pensar que esto se resuelve cuantizando canónicamente en cartesianas. Sin embargo, esto privilegia las coordenadas cartesianas sin ninguna razón ya que la clásica (la cual es un límite de la cuantica) no las privilegia. Además, ¿cómo se procede si se tiene un espacio curvo, un sistema con vinculos o un sistema con infinitos grados de libertad que generalmente tiene vinculos? (en estos casos no es obvio quien juega el papel de cooordenadas cartesianas). En la siguiente sección veremos, en espacio euclideo, como cuantizar sin privilegiar sistemas de coordenadas.

3.2.2. Cuantización geométrica de la partícula libre en $\mathbb{R}^n$

Dado el espacio de estados $\mathcal{H}$ de la partícula libre en espacio euclídeo (el cual es un sistema físico localizable, lo que significa que el operador posición esta determinado) una isometría G en el espacio euclídeo (como por ejemplo una rotación ó una traslación) induce una transformación en los elementos de $\mathcal{H}$

$$|E\rangle \xrightarrow{G} |E_G\rangle \tag{3.23}$$

sin embargo las propiedades físicas del sistema no deben cambiar (por ejemplo la probabilidad de transición) en particular este hecho se debe a las propiedades del espacio: homogeneidad e isotropía. Así

$$|\langle E|F\rangle|^2 = |\langle E_G|F_G\rangle|^2 \tag{3.24}$$

Entonces las acción de la isometría espacial en el espacio de estados $\mathcal{H}$ debe venir expresada por operadores unitarios ó antiunutarios $\hat{U}_G$ (Teorema de Wigner):

$$|E_G\rangle = \hat{U}_G|E\rangle \qquad \text{con} \qquad \hat{U}_G\hat{U}_G^\dagger = 1 \tag{3.25}$$

Donde $\hat{U}_G^\dagger$ es el adjunto de $\hat{U}_G$ el cual coincide con su inversa. Estos operadores forman una representación del grupo de isometrías la cual es un grupo de lie conectado (ya que nos restringimos a la parte conectada) por ejemplo para el caso de rotaciones y traslaciones en el espacio euclídeo, su acción sobre el espacio de estados $\mathcal{H}$ vendrá representada respectivamente por los siguientes operadores unitarios (Por ejemplo ver [19]):

$$\hat{U}_{(\mathbf{n},\theta)} = \exp(-i\theta\mathbf{n}.\hat{\mathbf{L}}/\hbar) \qquad \hat{U}_{(\mathbf{a})} = \exp(-i\mathbf{a}.\hat{\mathbf{p}}/\hbar) \tag{3.26}$$

aquí θ es el ángulo de rotación alrededor del eje generado por el vector unitario $\mathbf{n}$ en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{a}$ es la traslación efectuada al sistema. Los operadores $\hat{\mathbf{L}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$ son los **generadores** infinitesimales de los operadores $\hat{U}_{(\mathbf{n},\theta)}$ y $\hat{U}_{(\mathbf{a})}$ respectivamente.

Cada traslación del sistema puede descomponerse a lo sumo en tres traslaciones independientes (por ejemplo en tres traslaciones en dirección a tres ejes mutuamente ortogonales) de esta manera el operador traslación es:

$$\hat{U}_{(\mathbf{a})} = \exp(-ia_1\hat{p}_1/\hbar)\exp(-ia_2\hat{p}_2/\hbar)\exp(-ia_3\hat{p}_3/\hbar) \tag{3.27}$$

En el caso de la rotaciones si tomamos por ejemplo cada rotación alrededor de los tres ejes mutuamente ortogonales escogidos anteriormente obtenemos tres operadores que representan un conjunto de rotaciones independientes entre si:

$$\hat{U}_{(\mathbf{n_1},\theta_1)} = \exp(-i\theta_1\hat{L}_1/\hbar) \qquad \hat{U}_{(\mathbf{n_2},\theta_2)} = \exp(-i\theta_2\hat{L}_2/\hbar) \qquad \hat{U}_{(\mathbf{n_3},\theta_3)} = \exp(-i\theta_3\hat{L}_3/\hbar) \tag{3.28}$$

Donde $\hat{p}_i = \mathbf{n_i}.\hat{\mathbf{p}}$ y $\hat{L}_i = \mathbf{n_i}.\hat{\mathbf{L}}$ con $i = 1, 2, 3$. Cada una de las seis transformaciones anteriores es una *representación* de un subgrupo monoparamétrico del grupo conectado de isometrías en el espacio euclídeo actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de la partícula, y de hecho la relación entre cada una de estas isometrías y el correspondiente operador unitario es unívoca. Así ambas transformaciones deben tener los mismos **generadores** (claro esta, aunque ambas son distintas representaciones de una misma propiedad del sistema). Recuérdese (sección 2.3.4) que los generadores del grupo de isometrías son el conjunto de campos vectoriales de killing y que con cada subgrupo monoparamétrico de isometrías viene asociado un campo vectorial de killing independiente. Así el conjunto de generadores $(\hat{p}_i, \hat{L}_i)$ debe ser en representación r, salvo alguna constante multiplicativa, un conjunto linealmente independientes de campos vectoriales de killing (el dominio de los campos vectoriales puede extenderse de tal manera que actúe sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en representación r).

Hagamos explicitamente el cálculo de los vectores de killing en espacio euclídeo tridimensional usando coordenadas cilíndricas, el tensor métrico en estas coordenadas viene dado por:

$$\mathsf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

calculando los símbolos de Christoffel obtenemos de (2.40) un conjunto de seis ecuaciones que deben satisfacer las componentes del campo:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi^z}{\partial z} = 0 \qquad\qquad \rho\frac{\partial \xi^\phi}{\partial \phi} + \xi^\rho = 0 \\ \frac{\partial \xi^\rho}{\partial z} + \frac{\partial \xi^z}{\partial \rho} = 0 \qquad\qquad \rho^2\frac{\partial \xi^\phi}{\partial z} + \frac{\partial \xi^z}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial \xi^\rho}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho^2\xi^\phi)}{\partial \rho} - 2\rho\xi^\phi = 0 \end{gathered} \tag{3.30}$$

La solución mas general a este conjunto de ecuaciones puede expresarse de la siguiente manera:

$$\xi^\rho = (Cz + D)\cos\phi - (Bz - E)sen\phi \tag{3.31}$$

$$\xi^\phi = A - (Bz - E)\frac{\cos\phi}{\rho} - (Cz + D)\frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho} \tag{3.32}$$

$$\xi^z = F + B\rho\operatorname{sen}\phi - C\rho\cos\phi \tag{3.33}$$

Donde A, B, C, D, E, F son constantes cualesquiera, el hecho de que sean seis no es casualidad, ellas pueden considerarse como el parámetro de cada subgrupo monoparamétrico de isometrías. Asi agrupando cada término que tenga la misma constante obtenemos cualquier campo vectorial de Killing en $\chi(\mathbb{R}^3)$ en función de seis campos vectoriales linealmente independientes. Es decir a partir de:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}} = \xi^\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \xi^\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \xi^z\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.34}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\xi}} &= B\left(\rho\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial z} - z\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{z\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ &+ C\left(z\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{z\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} - \rho\cos\phi\frac{\partial}{\partial z}\right) + A\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ &+ D\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\operatorname{sen}\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + E\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + F\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{3.35}$$

Entonces estos campos de Killing linealmente independientes expresados en coordenadas cilindricas corresponden al conjunto de generadores de cada subgrupo de isometrías en su representación unitaria al multiplicar por la unidad imaginaria (salvo por una constante real). Denotemos la ecuación (3.35) por:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}} = A\vec{\boldsymbol{\xi}}_1 + B\vec{\boldsymbol{\xi}}_2 + C\vec{\boldsymbol{\xi}}_3 + D\vec{\boldsymbol{\xi}}_4 + E\vec{\boldsymbol{\xi}}_5 + F\vec{\boldsymbol{\xi}}_6 \tag{3.36}$$

Si expresamos los vectores $\vec{\boldsymbol{\xi}}_i$ en coordenadas cartesianas, obtenemos: $i/\hbar$ veces los operadores momento, y momento angular de una partícula según el formato de la cuantización canónica los cuales son observables del sistema (un estudio de la autoadjunticidad de estas expresiones puede verse por ejemplo en [11]). Sin embargo, los campos vectoriales de killing son objetos geométricos independientes de coordenadas; así hemos obtenido un método de cuantización que no depende de esta elección.

Así simplemente obtendremos los observables momento angular, y momento de la partícula en cualquier sistema de coordenadas a partir de:

$$\hat{L}_i = -i\hbar\vec{\boldsymbol{\xi}}_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.37}$$

$$\hat{p}_i = -i\hbar\vec{\boldsymbol{\xi}}_i \quad \text{con} \quad i = 4, 5, 6 \tag{3.38}$$

La cuestión de establecer los dominios de estos operadores como subconjuntos de $\mathcal{H}$ es mas delicada; sin embargo puede demostrarse que existe un dominio denso en $\mathcal{H}$ en el cual ellos son autoadjuntos, por lo que pueden representan observables, es espacio euclídeo resulta ser el caso. En este punto es bueno recordar que las isometrías vienen representadas por operadores unitarios de manera natural en $\mathcal{H}$ ya que usamos el elemento volumen (2.11) el cual esta directamente asociado a la métrica. Asi que el método de cuantización geométrica nos proporciona, como debe ser, el espacio $\mathcal{H}$.

Notemos que la afirmación de que cualquier observable del sistema físico se puede construir a partir de su expresión clásica (esto es,sustituir la expresión clásica en función de las variables canónicas por sus correspondiente operadores momento y posición) es en general sólo cierta en coordenadas cartesianas. Expresiones como $\hat{L}_\rho$ ó $\hat{p}_\phi$, las cuales podrían interpretarse respectivamente como:

$$\hat{L}_\rho = -i\hbar(\xi_1^\rho + \xi_2^\rho + \xi_3^\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}$$

y como

$$\hat{p}_\phi = -i\hbar(\xi_4^\phi + \xi_5^\phi + \xi_6^\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$$

no tienen ningún sentido en mecánica cuántica ya que en general no son generadores de algún subgrupo monoparamétrico de isometrías y tampoco representan a ningún observable (a diferencia de los operadores expresados en las ecuaciones (3.37) y (3.38) los cuales si representan observables físicos). De hecho si se intenta construir el operador $\hat{H}$ a partir de la función de Hamilton en coordenadas cilíndricas (3.20) obtenemos un resultado erróneo.

Para construir el operador de Hamilton $\hat{H}$ de una manera geométrica, debemos tener en cuenta que toda constante de movimiento debe conmutar con el operador $\hat{H}$ (ver (3.18)). En particular, este es el caso del conjunto de observables expresados en las relaciones (3.37) y (3.38) (estos observables se derivan de las simetrías del espacio, y ellas inducen clásicamente cantidades conservadas para la partícula libre, que corresponden con estos observables) los cuales, como se vio en el capitulo anterior, son una base para el espacio vectorial $\chi(\mathbb{R}^3)$ el cual es un álgebra de lie. Todo operador que conmute con todos los elementos del álgebra de lie (ó lo que es lo mismo con todos los elementos de la base) se denomina operador de *Casimir*, por lo tanto $\hat{H}$ será un operador de este tipo. En particular, al efectuar los conmutadores entre los operadores expresados en (3.37) y (3.38) obtenemos las siguientes expresiones:

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \tag{3.39}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{3.40}$$

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k \tag{3.41}$$

Con ϵ_{ijk} el simbolo de levi-civita. Generalmente dadas las expresiones anteriores características del álgebra puede demostrarse que los operadores de Casimir (en general hay mas de uno) serán expresiones cuadráticas de los elementos que generan el álgebra de lie. En nuestro caso habrá dos posibles operadores de Casimir $\hat{K}_1$ y $\hat{K}_2$:

$$\hat{K}_1 = \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i^2 \tag{3.42}$$

$$\hat{K}_2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i\hat{p}_i \tag{3.43}$$

si se calcula $\hat{K}_2$ resulta ser que da cero, por lo que $\hat{H}$ debe corresponder con el primer operador de Casimir, de hecho $\hat{K}_1$ coincide exactamente con $-\hbar^2\nabla^2$ con ∇^2 el laplaciano en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{K}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{3.44}$$

Si trabajamos explicítamente en coordenadas cilíndricas por ejemplo, obtenemos la expresión (3.22). Cuando el sistema físico es del tipo mostrado en (3.14) (es decir con una función potencial la cual expresa una "interacción clásica") los operadores $\hat{p}_i$ y $\hat{L}_i$ no cambian de forma y seguirán determinando a $\hat{H}$, sin embargo dicha interacción puede romper alguna de las simetrías, y en general $\hat{H}$ ya no será un operador de Casimir del álgebra de lie $\chi(\mathbb{R}^3)$ (o lo que es lo mismo los observables representados por los elementos del álgebra $\chi(\mathbb{R}^3)$ no podrán ser medidos simultáneamente con la energía). Sin embargo puede resultar que siga siendo el operador de Casimir de alguna sub-álgebra de $\chi(\mathbb{R}^3)$ y esto determina, en general, otros observables importantes del sistema físico.

Así se ha obtenido una manera de cuantizar la partícula libre en espacio euclideo de una forma tal que es independiente de coordenadas. Este método de cuantización lo usaremos a continuación en espacio esférico donde no hay un analogo de coordenadas cartesianas intrinsecas.

Capítulo 4

Cuantización en el espacio esférico

En el capitulo 2 se estudió el espacio esférico el cual representa localmente una geometría no euclídea y que además es una variedad maximalmente simétrica; esto implica que si se considera al espacio físico dotado con la misma estructura del espacio esférico entonces, al igual que en el caso euclídeo, las simetrías determinan propiedades fundamentales del sistema físico. En este capitulo estudiaremos la partícula libre en el espacio esférico de la misma forma como se hizo en el espacio euclídeo, con el fin de establecer la forma de los observables asociados a los generadores del grupo de isometrias en este espacio. Sin embargo, en espacio esférico esta cuestión es mas delicada ya que la topología introduce algunas particularidades, principalmente algunos de los campos vectoriales obtenidos (los cuales son los generadores **infinitesimales** de las isometrías) no están definidos globalmente;por lo que, deben imponerse condiciones explicitas sobre los elementos del dominio de estos operadores para garantizar la autoadjunticidad de los observables que de estos campos se derivan. Solo mencionamos esta problemática y como generalmente hace el físico haremos la vista gorda sobre el asunto, ya que no afectará ninguno de nuestros resultados. Además estudiaremos una importante cuestión que no se tomó en cuenta en los capítulos anteriores: ¿Cómo determinar el operador posición en el espacio esférico?. Mas adelante, los resultados obtenidos nos serán de gran utilidad al cuantizar sistemas de una partícula con alguna interacción dependiente de la posición.

4.1. Partícula libre en el espacio esférico

4.1.1. Mecánica clásica

Estudiemos brevemente el sistema compuesto por una partícula libre de masa m en $\mathbb{S}^n$, el lagrangiano en tal caso solo tendrá el término cinético (el formalismo desarrollado en la sección (3.1) del capitulo 3 es en general válido en cualquier espacio métrico que sea una variedad diferencial ya que el principio de mínima acción o lo que es lo mismo el cálculo variacional puede desarrollarse naturalmente para sistemas físicos en estos espacios. Además, las propiedades homogeneidad e isotropía son comunes al espacio esférico y al euclideo por lo que la función lagrangiana de un sistema físico aislado debe tener la forma (3.2) en este espacio). Al escoger cualquier sistema de coordenadas, obtenemos las n ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales determinan la dinámica de la partícula. Este conjunto de n ecuaciones se encuentran acopladas (al menos para las coordenadas cartesianas y esféricas en $\mathbb{S}^n$) y su resolución aún en el caso de $\mathbb{S}^2$ no es de ningún modo trivial.

Sin embargo para subvariedades regulares de $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbb{S}^n$ es una espacio de este tipo) existe un método mas simple. Usando el vinculo holonómico que restringe a la partícula a vivir en $\mathbb{S}^n$ (generalmente para cualquier subvariedad regular el vinculo será la ecuación que la define; la cual en algún sistema de coordenadas, que en este caso siempre existe, se obtiene al hacer una de las coordenadas constante. En $\mathbb{S}^n$ obviamente será la coordenada radial de las coordenadas esféricas) se implementa este vinculo en la función de lagrange como si fuera una función potencial. En nuestro caso esto es:

$$L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}^2 - \lambda(\|\mathbf{X}\|^2 - 1) \tag{4.1}$$

con λ un multiplicador de lagrange. Aquí se trata el problema como si el espacio fuera $\mathbb{R}^{n+1}$, vemos que la función que juega el papel del potencial puede interpretarse como una función derivada de una fuerza restauradora en dirección radial la cual siempre tenderá a mantener a la partícula en la esfera. Si además en la solución que obtengamos imponemos como condición inicial que la partícula este en la esfera y que su velocidad radial sea nula, obtendremos la dinámica de la partícula libre en $\mathbb{S}^n$. Las ecuaciones de euler-lagrange serán entonces:

$$\ddot{\mathbf{X}} + \frac{2\lambda}{m}\mathbf{X} = 0 \tag{4.2}$$

y con las condiciones iniciales anteriormente especificadas obtenemos como solución las curvas que describen el movimiento de la partícula, cuya imagen denominada trayectoria coincide con los círculos máximos en $\mathbb{S}^n$ ó sus geodésicas. Así al igual que en el caso euclídeo la partícula se moverá en geodésicas a rapidez constante.

4.1.2. Cuantización de la partícula libre en espacio esférico

Seguiremos el mismo procedimiento de cuantización efectuado en la sección (3.2.2) pero aplicado al espacio esférico, ya que al igual que en espacio euclídeo, los generadores infinitesimales del grupo de isometrías determinarán la forma de los observables fundamentales del sistema físico.

En particular los postulados de la mecánica cuántica serán los mismos, y una representación del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema sera el conjunto de funciones a valores complejos sobre $\mathbb{S}^n$ y de cuadrado integrable denotado como $L^2(\mathbb{S}^n)$ (ver [11]) es decir:

$$L^2(\mathbb{S}^n) = \left\{ \psi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{S}^n} |\psi(\mathbf{q})|^2 \, d^n q < \infty \right\} \tag{4.3}$$

Donde la función $\psi(\mathbf{q})$ esta expresada en algún sistema de coordenadas de $\mathbb{S}^n$ y por lo tanto $d^n q$ sera el elemento diferencial de volumen dado en (2.11).

Este espacio de funciones esta dotado de un producto escalar $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ el cual en representación $L^2(\mathbb{S}^n)$ es realizado por:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{S}^n} \overline{\psi(\mathbf{q})} \varphi(\mathbf{q}) \, d^n q \tag{4.4}$$

Con $\overline{\psi(\mathbf{q})}$ el complejo conjugado de la función $\psi(\mathbf{q})$; los otros postulados se desarrollan sin ningún inconveniente.

Así determinaremos el conjunto de observables fundamentales que actúan sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^n)$ del sistema. Específicamente estudiaremos los tres casos: $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, y $\mathbb{S}^3$. En estos tres casos usaremos coordenadas esféricas por simplicidad. Pero téngase en cuenta que el método es válido para **todos** los sistemas de coordenadas que cubren a estos espacios.

Partícula en $\mathbb{S}^1$

El tensor métrico en $\mathbb{S}^1$ en coordenadas esféricas es simplemente $g_{\phi\phi} = 1$ entonces la única ecuación que determina las componentes del campo vectorial de Killing en estas coordenadas será (véase (2.40)):

$$\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} = 0 \qquad , \qquad 0 < \phi < 2\pi \tag{4.5}$$

cuya solución es simplemente:

$$\xi^\phi = A \qquad \text{con} \qquad \vec{\boldsymbol{\xi}} = A\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{4.6}$$

donde $\xi^\phi = \xi_\phi$, esta globalmente definido salvo su expresión en coordenadas, entonces según el esquema de cuantización tendremos que el generador de importancia será:

$$\hat{L} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{4.7}$$

Podría pensarse que el esquema de la cuantización canónica funciona es este caso. Sin embargo, como veremos mas adelante, surge un problema al determinar el observable posición y es que de ninguna manera el ángulo ϕ puede representar un observable posición. Puede demostrarse que la expresión del generador (4.7) es un observable al exigir condiciones de borde periódicas en los extremos (esto es, que sus autofunciones cumplan con esa condición de borde), véase [11].

$$\psi(0) = \psi(2\pi) \tag{4.8}$$

$$\frac{d\psi}{d\phi}(0) = \frac{d\psi}{d\phi}(2\pi) \tag{4.9}$$

El operador de Hamilton, el cual es el único (salvo constantes) operador de casimir será:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{4.10}$$

el cual también es autoadjunto y debe cumplir con condiciones de borde periódicas.

Particula en $\mathbb{S}^2$

El tensor métrico expresado en coordenadas esféricas de $\mathbb{S}^2$ es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Entonces el conjunto de ecuaciones (2.40) serán:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + \operatorname{sen}\theta \cos\theta \xi_\theta &= 0 \\
\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\xi_\phi &= 0
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

se puede ver que $\xi_\theta = \xi^\theta$ y que $\xi_\phi = \operatorname{sen}^2\theta \xi^\phi$ y la solución mas general del conjunto de ecuaciones anteriores que son las componentes del campo vectorial de killing en coordenadas esféricas será:

$$
\begin{aligned}
\xi^\theta &= A\cos\phi + B\operatorname{sen}\phi \\
\xi^\phi &= -\cot\theta\,(A\operatorname{sen}\phi - B\cos\phi) + C
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Reagrupando cada término con la misma constante entonces la solución mas general puede escribirse en función de tres campos vectoriales de killing linealmente independientes:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\xi}} = A&\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
+ B&\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + C\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

entonces siguiendo el formato de cuantización desarrollado en el capitulo anterior tendremos que los observables derivados de las simetrías del espacio serán:

$$\hat{M}_1 = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{4.15}$$

$$\hat{M}_2 = -i\hbar\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{4.16}$$

$$\hat{M}_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{4.17}$$

habría que demostrar que estos operadores son autoadjuntos, en general para $\mathbb{S}^n$ puede demostrarse que para todos los operadores derivados de las simetrías del espacio siempre existe una única extensión de dominio perteneciente a $L^2(\mathbb{S}^n)$ la cual hace de estos operadores autoadjuntos debido a la medida de integración invariante y por lo tanto ellos representan observables del sistema físico (recuérdese que originalmente el dominio de estos operadores era el conjunto de funciones C^∞ sobre la variedad, las cuales no son ni complejas, ni tienen que ser de cuadrado integrable).

Como también se vió estos tres operadores son una base linealmente independiente del álgebra de lie $\chi(\mathbb{S}^2)$ correspondiente al grupo de lie conformado por el grupo isometrías $SO(3)$ y además puede verificarse que satisfacen:

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{M}_k \qquad \text{con los indices} \qquad i; j; k = 1, 2, 3 \tag{4.18}$$

La ecuación anterior es suficiente para determinar el operador de casimir del álgebra $\chi(\mathbb{S}^2)$ el cual, por los mismos argumentos propuestos en el capitulo anterior, debe corresponder con el hamiltoniano $\hat{H}$ de la partícula libre. En este caso solo hay una posibilidad:

$$\hat{K} = \sum_{i=1}^{3} \hat{M}_i^2 \tag{4.19}$$

efectuando el cálculo explícitamente obtenemos al hamiltoniano:

$$\frac{1}{2m}\hat{K} = \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{4.20}$$

Notemos que en $\mathbb{S}^2$ no se puede definir globalmente un campo vectorial, en particular, de killing. A diferencia de $\mathbb{S}^1$ donde hay uno (esto no tiene que ver con coordenadas y es topológico). Sin embargo, basta, en este caso, con la independencia local para construir los tres observables autoadjuntos asociados a las simetrías que generan los vectores de Killing como hemos ya mencionado.

Partícula en $\mathbb{S}^3$

Para finalizar obtendremos los observables derivados de las simetrías del espacio y el operador de hamilton de la partícula libre en $\mathbb{S}^3$ usando coordenadas esféricas $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. El tensor métrico en este caso se expresa como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

lo cual de (2.40) lleva al siguiente conjunto de seis ecuaciones que deben satisfacer las componentes de cualquier elemento de $\chi(\mathbb{S}^3)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta_1} = 0 && \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta_3} + \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \xi_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \xi_1 = 0 \\
&\frac{\partial \xi_2}{\partial \theta_2} + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \xi_1 = 0 && \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta_1} - 2\cot\theta_1 \xi_2 = 0 \\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta_1} - 2\cot\theta_1 \xi_3 = 0 && \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta_2} - 2\cot\theta_2 \xi_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Aquí la notación es diferente a la usada en los dos casos anteriores: ξ^i corresponde a la componente θ_i del campo vectorial de killing, donde $\xi_1 = \xi^1$; $\xi_2 = \operatorname{sen}^2\theta_1 \xi^2$; $\xi_3 = \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 \xi^3$. La solución general para cada una de las componentes puede escribirse de la siguiente forma:

$$\xi^1 = C\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2(-A\cos\theta_3 + B\operatorname{sen}\theta_3) \tag{4.23}$$

$$\xi^2 = \frac{\cos\theta_2}{\tan\theta_1}(-A\cos\theta_3 + B\operatorname{sen}\theta_3) - C\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\tan\theta_1} + (D\cos\theta_3 + E\operatorname{sen}\theta_3) \tag{4.24}$$

$$\xi^3 = \cot\theta_2(E\cos\theta_3 - D\operatorname{sen}\theta_3) + \frac{\cot\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}(B\cos\theta_3 + A\operatorname{sen}\theta_3) + F \tag{4.25}$$

Agrupando cada término con la misma constante obtenemos, como en los casos anteriores, la solución mas general al conjunto de ecuaciones (4.22) en función de seis campos vectoriales de killing linealmente independientes. Multiplicando cada una de estos campos por la constante compleja $-i\hbar$ obtenemos un conjunto de observables que actuán sobre algún subconjunto denso del espacio de hilbert $L^2(\mathbb{S}^3)$. Y escogiendo una notación adecuada que de alguna forma caracterize y simplifique las expresiones de esta álgebra de lie, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\hat{N}_1 &= -i\hbar\left(\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cot\theta_1\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cot\theta_1\csc\theta_2\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\\
\hat{N}_2 &= -i\hbar\left(-\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \cot\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cot\theta_1\csc\theta_2\operatorname{sen}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\\
\hat{N}_3 &= -i\hbar\left(\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \cot\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\\
\hat{M}_1 &= -i\hbar\left(\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \cot\theta_2\operatorname{sen}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\\
\hat{M}_2 &= -i\hbar\left(\operatorname{sen}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cot\theta_2\cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\\
\hat{M}_3 &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta_3}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Notemos que en $\mathbb{S}^3$ solo pueden ser definidos globalmente solo tres campos vectoriales linealmente independientes. Sin embargo, como antes, es suficiente la independencia local para construir los seis observables. Puede verificarse, directamente de (4.26), que estas expresiones satisfacen:

$$
\begin{aligned}
[\hat{N}_i, \hat{N}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{M}_k\\
[\hat{M}_i, \hat{M}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{M}_k\\
[\hat{M}_i, \hat{N}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{N}_k
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Con los indices $i; j; k = 1, 2, 3$. Del conjunto de ecuaciones anteriores puede calcularse los operadores de casimir del álgebra $\chi(\mathbb{S}^n)$; los cuales tendrán las siguientes expresiones:

$$\hat{K}_1 = \sum_{i=1}^{3}(\hat{M}_i^2 + \hat{N}_i^2) \tag{4.28}$$

$$\hat{K}_2 = \sum_{i=1}^{3}\hat{M}_i\hat{N}_i \tag{4.29}$$

el segundo casimir si se calcula explícitamente da cero, así el operador de hamilton de la particula libre en $\mathbb{S}^3$ vendrá dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{K}_1 \tag{4.30}$$

El cual si se calcula explícitamente da:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\operatorname{sen}^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\operatorname{sen}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_3^2}\right\} \tag{4.31}$$

La expresión anterior coincide exactamente con:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{LB} \tag{4.32}$$

Donde ∇^2_{LB} es el conocido operador de Laplace-Beltrami, el cual es una generalización del laplaciano para variedades riemanianas y pseudoriemanianas. De alguna manera la descripción al hacer mecánica cuántica en espacio esférico es similar a la descripción en espacio euclídeo (al menos en la forma del hamiltoniano) y sería tentador postular, en vista de esta coincidencia, que para cualquier variedad riemaniana el hamiltoniano de la partícula libre coincide con (4.32); en realidad el problema de la partícula libre en espacio esférico inicialmente fue planteado de esta forma (ver [21]). Este coincidencia se debe a que ambos espacios son representaciones de dos geometrías totalmente consistentes, y al gran número de simetrías que presentan estos espacios. De hecho nuestra construcción esta basada en estas simetrías fundamentales. En general la ecuación (4.32) puede generalizarse a cualquier variedad riemaniana pero la autoadjunticidad no esta garantizada. La forma explicita del operador Laplace-Beltrami en una variedad riemaniana ó pseudoriemaniana n dimensional en una carta $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ viene dado por:

$$\nabla^2_{LB} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{4.33}$$

Con g^{ij} las componentes de la inversa del tensor métrico y $|g|$ el determinante de la matriz que expresa al tensor métrico en la carta. Este problema ha sido formulado de diferentes maneras: cabe mencionar por ejemplo la cuantización canónica para sistemas con vínculos de segunda clase, donde se obtiene como solución del hamiltoniano de la partícula libre el operador Laplace-Beltrami mas una constante dependiente de la curvatura del espacio. Pero del método de Dirac no se especifica como construir el espacio de Hilbert. Además, la existencia de una constante debe descartarse por varias consideraciones físicas (ver [21]). Es bueno señalar que la aparición de dicha constante aditiva se ha obtenido por varios métodos de cuantización y algunos autores (veáse [21], [20] y [22]) han propuesto que su aparición es de carácter fundamental, propiamente debido a la curvatura del espacio. Algunos incluso lo han comparado con el conocido efecto Aharonov-Bohm. Esta cuestión no deja aun hoy de causar polémica. Nuestra cuantización tiene la ventaja de tomar en cuenta las simetrías del espacio, y de ser geométrica, es decir, vale para cualquier sistema de coordenadas.

4.2. El Observable posición

Como vimos en el capitulo anterior, en espacio euclídeo, el formato de la cuantización canónica propone como regla que el observable posición, en representación r, actúe como el operador multiplicación, ver (3.15). Suponiendo el caso unidimensional, la acción de $\hat{X}$ sobre los elementos de $\mathcal{H}$ es la multipicación por la coordenada x (la generalización al caso tridimensional es obvia). Para el caso de la partícula libre en una dimensión, los dos problemas usuales de interés son: La partícula en una caja (la coordenada x esta restringida al siguiente rango $x \in (a, b)$ con a y b números reales) y la partícula libre en la recta real ($x \in (-\infty, \infty)$) en ambos problemas el operador posición $\hat{X}$ es autoadjunto y representa un observable (ver [11]).

Al considerar la partícula libre en $\mathbb{S}^1$ el problema pareciera ser idéntico a la partícula en una caja (El observable momento coincide, ver (4.7), y la coordenada ϕ esta restringida a un abierto de $\mathbb{R}$, esto es $\phi \in (0, 2\pi)$). Sin embargo ϕ no es una coordenada global a diferencia de x y el problema esencialmente es distinto: la partícula libre en la caja no puede pasar continuamente de un extremo a otro, en cambio esto si ocurre de forma natural en $\mathbb{S}^1$, además la coordenada ϕ es discontinua en los extremos y por lo tanto no expresa esta importante propiedad (esto tiene que ver con la topología de $\mathbb{S}^1$ que es distinta a la de $\mathbb{R}$). Generalmente esto se resuelve proponiendo como observable alguna función periódica en ϕ; este problema aún hoy en día es discutido ampliamente en la literatura, ver por ejemplo [20], y esencialmente tiene que ver con la cuestión de si es posible cuantizar coordenadas. Como hemos visto no debe ser el caso.

Para abordar este problema consideremos un observable $\hat{A}$ el cual por simplicidad se supondrá que posee solo espectro discreto S_p (este espectro será el conjunto de posibles valores obtenidos al medir el observable $\hat{A}$). Además los estados posibles del sistema serán estados puros; entonces uno de los postulados de la mecánica cuántica (ver [14]) establece que dado un estado $|\psi\rangle$, después de una medición del valor $\lambda_n \in S_p$, el estado del sistema será:

$$|\psi_n\rangle = \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle} \tag{4.34}$$

donde $\hat{P}_n$ es el proyector en el subespacio vectorial m-dimensional $\mathcal{M}^{(n)}$ correspondiente al valor $\lambda_n \in S_p$ (ver [11]). En este subespacio vectorial se pueden escoger m

vectores ortonormales $|\psi_n^i\rangle$ vía el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt con $i = 1, 2, \ldots, m$. Ademas se dice que estos vectores están degenerados y deben cumplir con:

$$\hat{A}|\psi_n^i\rangle = \lambda_n|\psi_n^i\rangle \tag{4.35}$$

Una vez obtenidos estos vectores, el proyector $\hat{P}_n$ puede escribirse como:

$$\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{m} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i| \tag{4.36}$$

Para ver las propiedades de los proyectores véase [11]. Uno de los rasgos mas distintivos de estos proyectores es que una vez conocido cada proyector asociado a cada $\lambda_n \in S_p$ es posible expresar el operador $\hat{A}$ de la siguiente manera:

$$\hat{A} = \sum_n \lambda_n \hat{P}_n \tag{4.37}$$

La ecuación (4.37) determina al operador $\hat{A}$, inclusive puede generalizarse al caso en que el espectro del operador autoadjunto $\hat{A}$ no sea discreto, ver [13]. Consideremos por ejemplo el caso en que el espectro del operador $\hat{A}$ sea solamente continuo (por ejemplo S_c son los reales $\mathbb{R}$) considerando los estados como no degenerados, la generalización de (4.37) será:

$$\hat{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\hat{E}_\lambda \tag{4.38}$$

Con $d\hat{E}_\lambda = d\lambda\, |\lambda\rangle\langle\lambda|$ una generalización de (4.36) y las $|\lambda\rangle$ son las denominadas "autofunciones"del continuo del operador $\hat{A}$. En particular dada una función real φ bien comportada, y de dominio algún subconjunto tipo Borel de S_c, puede definirse el operador $\varphi(\hat{A})$ como:

$$\varphi(\hat{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \varphi(\lambda)\, |\lambda\rangle\langle\lambda| \tag{4.39}$$

Si la función es del tipo exigido el operador definido en (4.39) será autoadjunto (Ver [13]). Se puede estar interesado, por ejemplo, en determinar la probabilidad de que el resultado de una medición se encuentre en algún subconjunto de Borel de S_c, para ello se usa la conocida función característica $\chi_{\mathcal{A}} : S_c \to \mathbb{R}$ con el subconjunto $\mathcal{A} \subset S_c$; definida así:

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \in S_c - \mathcal{A} \end{cases} \tag{4.40}$$

El operador asociado a la función característica $\chi_{\mathcal{A}}$ el cual, puede demostrarse, es un proyector y tiene la siguiente expresión (ver (4.39)):

$$\hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{A}) = \int_{\lambda \in S_c \cap \mathcal{A}} d\lambda \, |\lambda\rangle\langle\lambda| \tag{4.41}$$

Así por ejemplo dado el estado ψ la probabilidad de que la medición del observable $\hat{A}$ este en el conjunto $\mathcal{A}$ será:

$$P_{\hat{A},\psi}(\mathcal{A}) = \|\hat{E}_{\hat{A}}(\mathcal{A})\psi\|^2 = \int_{\lambda \in S_c \cap \mathcal{A}} d\lambda \, |\langle\lambda|\psi\rangle|^2 \tag{4.42}$$

Es importante remarcar que las expresiones anteriores son validas para cualquier operador autoadjunto, en particular, para el operador posición en $\mathbb{R}^n$. Así en una variedad riemanniana, al hacer mecánica cuántica, una de las preguntas fundamentales es si el sistema es localizable. De ser este el caso se podrá determinar la probabilidad de localizar al sistema en cualquier subconjunto abierto de la variedad. Y de esta forma existirá un observable posición cuyo espectro se identifique con los puntos de la variedad. En general, al no existir coordenadas globales, por razones topológicas, la localización se hará con la familia de operadores dada por (4.41) con $\mathcal{A}$ un Borel en la variedad. Es evidente que esta construcción del observable posición, cuando es posible, es independiente del sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo consideremos el caso de la partícula en el espacio unidimensional $\mathbb{R}$; para este problema es conocido el observable posición. Las autofunciones del continuo de $\hat{X}$ serán en la representación usual:

$$|\lambda\rangle \rightarrow \psi_\lambda(x) = \delta(x - \lambda) \tag{4.43}$$

Con $\delta(x - \lambda)$ la delta de Dirac y punto singular en $x = \lambda$. Así efectuemos la operación de $\hat{X}$ con algún estado $\psi(x)$ del sistema, usando (4.38) se obtiene:

$$\hat{X}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \lambda\delta(x - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - \lambda)\psi(x') \, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \lambda\psi(\lambda)\delta(x - \lambda) \tag{4.44}$$

Lo que finalmente (usando las propiedades de la delta) se reduce a:

$$\hat{X}\psi(x) = x\psi(x) \tag{4.45}$$

Así, el espectro del operador posición debe poder caracterizar *todos* los puntos del espacio ya que, en principio, la partícula podrá ser localizada en cualquier punto de la variedad. Para el caso de la recta real, la coordenada x es global y caracteriza todos los puntos de este espacio. Entonces es de esperar que esta coordenada determine todo el espectro del operador. Para el caso de $\mathbb{R}^3$ las autofunciones del continuo del operador posición serán generalizaciones de la delta de Dirac en tres dimensiones $\delta(\mathbf{R} - \boldsymbol{\lambda})$; sin embargo cualquier otro conjunto de coordenadas distintas de las cartesianas no serán coordenadas globales y por lo tanto la expresión (4.38) no podrá ser desarrollada, ya que siempre faltara algún punto del espectro (en este caso puntos de $\mathbb{R}^3$). Esta descripción no es aplicable a cualquier variedad, ya que como hemos comentado, en una variedad puede no existir coordenadas globales (tal es el caso del espacio esférico) y por lo tanto tampoco una generalización de la ecuación (4.45). En tales casos conviene usar como observable posición la familia de operadores expresada en (4.41) la cual siempre estará definida para cualquier subconjunto del abierto en la cual se defina la carta ó sistema de coordenadas.

Algunos autores (ver [20]) proponen como cuantización de la coordenada angular ϕ no el operador multiplicación, sino el operador multiplicación por las funciones periódicas $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\phi$. En particular, salvo la coordenada radial, estas dos funciones concuerdan con las coordenadas cartesianas x y y los cuales son coordenadas globales de $\mathbb{R}^2$, y determinan el espectro del operador posición en todo el plano (en particular también en algún subconjunto donde la coordenada radial sea una constante). Luego, esta solución no es deseable por que supone a $\mathbb{S}^1$ embebida en otro espacio (un artefacto) además de ser dependiente de coordenadas.

4.2.1. Reglas canónicas de conmutación en la esfera

Hemos visto que no es posible definir, de forma equivalente a como se hace en espacio euclídeo, un observable posición en la esfera, y aunque exista en este espacio un "analogo.ªl observable momento, tampoco se define de la manera usual las reglas canónicas de conmutación y mucho menos establecer un principio de incertidumbre entre ambos observables. (incluso el equivalente de los "momentos" en la esfera no es total, de las relaciones (4.27) vemos que los "momentos" $\hat{N}_i$ ni siquiera conmutan entre si. Algo que si ocurre de manera natural en espacio euclídeo). Por supuesto, una noción de localización existe sobre la esfera a través de (4.41) en lugar de operador posición.

Consideremos el ejemplo mas simple: el espacio esférico unidimensional $\mathbb{S}^1$. Aquí el observable $\hat{L}$ de la ecuación (4.7) representa el generador del conjunto de isometrías en este espacio. Tomaremos como observable posición la familia de operadores definida en la ecuación (4.41), la cual en este caso escribiremos como:

$$\hat{E}_{\hat{Q}}(a,b) = \int_{\lambda\in(a,b)} d\lambda\,|\lambda\rangle\langle\lambda| \tag{4.46}$$

Donde (a,b) representa un conjunto abierto ó Borel de $\mathbb{S}^1$ y usando la parametrización local usual del círculo tendremos que $0 < a < b < 2\pi$. Aquí λ corresponde a la localización en un abierto de $\mathbb{S}^1$. En representación posición, en estas coordenadas locales, al igual que en (4.43) las "autofunciones" del continuo serán deltas de Dirac. Aquí esta noción de delta es local ya que $\lambda \in (a,b)$ Así la acción de $\hat{E}_{\hat{Q}}(a.b)$ sobre un estado $\psi(\phi)$ será:

$$\hat{E}_{\hat{Q}}(a,b)\psi(\phi) = \int_{\lambda\in(a,b)} d\lambda\,|\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle = \int_{\lambda\in(a,b)} d\lambda\,\psi(\lambda)\delta(\lambda-\phi) = \psi(\phi)\chi_{(a,b)}(\phi) \tag{4.47}$$

con $\chi_{(a,b)}(\phi)$ la conocida función característica definida en (4.40); para evitar cuestiones de dominio efectuemos el siguiente conmutador, el cual siempre estará definido para cualquier elemento de $\mathcal{H}$:

$$[\hat{U}_\alpha, \hat{E}_{\hat{Q}}(a,b)] = \left\{\chi_{(a,b)}(\phi-\alpha) - \chi_{(a,b)}(\phi)\right\}\hat{U}_\alpha \tag{4.48}$$

Donde $\hat{U}_\alpha = \exp(-i\alpha\hat{L}/\hbar)$ es el operador unitario que representa a la isometría actuando en el espacio de Hilbert y $\chi_{(a,b)}(\phi-\alpha)$ representa la acción de $\hat{U}_\alpha$ sobre $\chi_{(a,b)}$ (la cual, aunque este escrita en coordenadas esfericas, no depende de coordenadas de manera obvia y es un objeto globalmente definido). Si se desea obtener el conmutador con $\hat{L}$ se puede lograr considerando el limite de $\alpha \to 0$ y resolviendo la ecuación anterior, pero teniendo en cuenta para que dominio se obtiene esto. Esta ecuación vendría a ser el equivalente de las relaciones de conmutación en el circulo, y expresa a grandes rasgos la no simultaneidad en las medidas de localización y del "momento" generalizado de una partícula (no efectuaremos semejante análisis aquí). Lo verdaderamente importante es que de ninguna manera puede generalizarse la ecuación (3.17) a la hora de cuantizar un sistema físico en $\mathbb{S}^1$. Para ahondar mas a fondo sobre esta cuestión véase por ejemplo [13]. Sin embargo, es bueno señalar que aun hoy en día existen publicaciones arbitradas de reglas de conmutación indebidas, como por ejemplo, fase y momento en $\mathbb{S}^1$.

Capítulo 5

El problema de Kepler en $\mathbb{S}^3$

A partir de aquí consideraremos la resolución de sistemas físicos compuestos de una partícula con alguna interacción dependiente solo de la posición y la cual, como los problemas usuales en espacio euclídeo, viene representada por una función potencial $V(\mathbf{r})$. Dicha interacción será considerada "clásica" en el sentido de que su expresión es exactamente la misma que al formular la dinámica del sistema mediante la mecánica clásica (recuérdese que hemos planteado el problema en representación r ó posición). Muchos de los problemas usuales en mecánica cuántica en espacio euclídeo son de este tipo. Como dicha interacción no depende del tiempo t el problema se reduce (ver (3.14)) a resolver la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\nabla^2_{LB}\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{5.1}$$

Donde E es el espectro de energías del sistema el cual, debido a la topología de $\mathbb{S}^3$, será solamente discreto a diferencia de los espacios euclídeos e hiperbólicos. Aquí también deseamos observar el efecto que tiene sobre el espectro la curvatura del espacio, la cual es el inverso del radio R al cuadrado y es introducida de forma natural con las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^4$ (entonces los elementos de $\mathbb{S}^3$ serán, según esta nueva consideración, todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ con norma R) El primer caso que se estudiará será el problema de Kepler en $\mathbb{S}^3$ el cual es el análogo del átomo de hidrógeno en espacio esférico. Se analizará someramente la versión clásica de este problema para justificar el potencial $V(\mathbf{r})$ que será usado. Entre los tratamientos de este problema citamos por ejemplo [26], [23]. En las referencias [27] y [28] se cuantizan los observables fundamentales partiendo de las simetrías dinámicas del sistema y se resuelve el problema de otra forma.

5.1. Mecánica clásica

Como vimos en el capitulo 4, las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio esférico garantizan que la función lagrangiana de un sistema físico conformado por una partícula de masa m con alguna interacción sea del tipo (3.2). En algún conjunto de coordenadas (q^1, q^2, q^3) la expresión del lagrangiano, con una interacción que dependa de la posición (tal como nuestro problema) se podrá escribir explícitamente como:

$$L(q^1, q^2, q^3) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)) \tag{5.2}$$

Con g_{ij} las componentes del tensor métrico de $\mathbb{S}^3$ en estas coordenadas. Así dado un potencial el problema se reduce a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estamos interesados en ver cual es el análogo en espacio esférico del potencial de Kepler. Para ello (ver [27]) se usa la conocida transformación Gnómica la cual es biyectiva y transforma el hiperplano tridimensional $x^i = 0$ en el abierto $x^i > 0$ de $\mathbb{S}^3$, con $i = 1, 2, 3, 4$ (véase el apartado de las coordenadas cartesianas en la sección **2.3.3.**). Dicha transformación se denota como $\nu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ y se escribe como:

$$\nu(\vec{x}) = \frac{\vec{x} + R\hat{e}_i}{\|\vec{x} + R\hat{e}_i\|} \tag{5.3}$$

con $\vec{x}$ las coordenadas del hiperplano tridimensional. Lo importante aquí además de haber obtenido un nuevo conjunto de coordenadas locales, es que todo movimiento en el abierto de $\mathbb{S}^3$ se proyecta en el hiperplano, por ejemplo las geodésicas de $\mathbb{S}^3$ son *rectas* en el nuevo espacio, ver [27]. Puede demostrarse que un potencial tipo:

$$V(\mathbf{r}) = -\alpha \|\vec{x}\|^{-1} \tag{5.4}$$

con α una constante, hará que una partícula se mueva en órbitas cerradas en el hiperplano. Consideraremos entonces este problema como el análogo del potencial central en espacio esférico. De la definición de transformación gnómica vemos que el vector $\vec{x} + R\hat{e}_i \in \mathbb{R}^4$ forma un ángulo θ_i respecto del eje generado por $\hat{e}_i$, dicho ángulo es el mismo que el de las coordenadas esféricas. Vemos también que $\vec{x}$ y $\hat{e}_i$ son ortogonales. Tomando todo esto en consideración y eligiendo $i = 1$ tenemos que:

$$\|\vec{x}\| = R \tan \theta_1 \tag{5.5}$$

Por lo tanto el potencial $V(\mathbf{r})$ que usaremos en la ecuación (5.1) será:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Kq^2}{R}\cot\theta_1 \tag{5.6}$$

Este potencial es la escogencia usual (ver p.e. [27])

5.2. El átomo de hidrógeno en $\mathbb{S}^3$

Escribamos la ecuación (5.1) con el potencial (5.6) explicitamente. Vemos que es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\operatorname{sen}^2\theta_1\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\operatorname{sen}\theta_2\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial\theta_2}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r})}{\partial\theta_3^2}\right] - \frac{Kq^2}{R}\cot\theta_1\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{5.7}$$

efectuemos el procedimiento de resolución usual en estos casos: separación de variables. Como solución general propondremos:

$$\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = A(\theta_1)B(\theta_2)C(\theta_3) \tag{5.8}$$

se puede ver que el procedimiento de separación para las variables θ_2 y θ_3 es idéntico que en el caso del átomo de hidrógeno en espacio euclídeo. De hecho se llega a las mismas ecuaciones y las soluciones tendrán en tal caso la misma forma, siempre y cuando se impongan condiciones de borde periódicas en los extremos de θ_3:

$$B(\theta_2)C(\theta_3) = Y_l^m(\theta_2,\theta_3) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta_2)e^{im\theta_3} \tag{5.9}$$

con $-l \leq m \leq l$. Los valores permitidos para l serán determinados luego, sin embargo la soluciones anteriores tienen sentido solo para l natural incluido el cero. Aquí $P_l^m(\cos\theta_2)$ son las conocidos funciones asociadas de Legendre. La ecuación diferencial que debe satisfacer la función $A(\theta_1)$ es el equivalente a la ecuación radial presente en el átomo de hidrogeno en espacio euclídeo. Dicha ecuación tiene la siguiente forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1}\left\{\frac{d}{d\theta_1}\left(\operatorname{sen}^2\theta_1\frac{dA(\theta_1)}{d\theta_1}\right)-l(l+1)A(\theta_1)\right\}-\frac{Kq^2}{R}\cot\theta_1 A(\theta_1) = EA(\theta_1) \tag{5.10}$$

multiplicando la ecuación anterior por $-2mR^2/\hbar^2$ y redefiniendo obtenemos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1}\frac{d}{d\theta_1}\left(\operatorname{sen}^2\theta_1\frac{dA(\theta_1)}{d\theta_1}\right)+\left[\lambda-\frac{l(l+1)}{\operatorname{sen}^2\theta_1}+\beta\cot\theta_1\right]A(\theta_1)=0 \tag{5.11}$$

Donde:

$$\lambda=\frac{2mR^2E}{\hbar^2} \qquad y \qquad \beta=\frac{2Kq^2Rm}{\hbar^2}$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Para obtener la solución general por los métodos usuales es necesario "complejificarla". Sin embargo conviene efectuar un cambio de variable adecuado. Sea $\omega=\cot\theta_1$; este cambio de variable es ejemplar, debido a que la función $\cot\theta_1$ es bien comportada y ademas monótona decreciente en el intervalo $0<\theta_1<\pi$, lo que hace que el cambio sea una biyección. La nueva variable esta definida en el intervalo $-\infty<\omega<\infty$. Si se procede a efectuar el cambio de variable, la ecuación (5.11) es equivalente a:

$$\frac{d^2\Psi(\omega)}{d\omega^2}+\left[\frac{\lambda+\beta\omega}{(1+\omega^2)^2}-\frac{l(l+1)}{1+\omega^2}\right]\Psi(\omega)=0 \tag{5.12}$$

La ecuación (5.12) es la que se procederá a "complejificar". Tomando en consideración que β es una constante real, que los únicos valores de λ que son de interés son reales (ya que λ, salvo una constante real, coincide con el espectro de energías del sistema, el cual necesariamente es real), y que la constante $l(l+1)$ es también real; se demuestra que la ecuación anterior es una EDOL definida en todo el plano complejo con tres puntos regulares singulares (ver p.e [11]) los cuales están ubicados en $\omega=+i,-i,\infty$. Este tipo de ecuación siempre tiene solución y se denomina ecuación de Riemann-Papperitz (Ver [29]). En particular, para conseguir las soluciones, se efectúa un cambio de variable biyectivo que "arrastre" los puntos regulares singulares a las posiciones $z=0,1,\infty$; esto se hace con la finalidad de expresar las soluciones de la ecuación mediante relaciones que involucren a la conocida función hipergeométrica. En nuestro caso escogemos el cambio de variable (coincidiendo con [26]):

$$z=-\frac{2i}{\omega-i} \tag{5.13}$$

Dicho cambio es una transformación de möbius la cual, ademas de arrastrar las singularidades a los puntos deseados, tiene la ventaja de que facilita el estudio sobre el comportamiento de la solución. La ecuación (5.12) al efectuar este cambio de variable queda como:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\varphi}{dz}-\left[\frac{1}{4}\frac{(\lambda-i\beta)}{z-1}+\frac{1}{4}(\lambda+i\beta)-\frac{l(l+1)}{z}\right]\frac{\varphi}{z(z-1)}=0 \tag{5.14}$$

Vemos que la expresión anterior es idéntica a la ecuación Riemann-Papperitz el cual se escribe (ver [29]):

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dz^2}-\left[\frac{\alpha+\alpha'-1}{z}+\frac{\mu+\mu'-1}{z-1}\right]\frac{d\varphi}{dz}\\ -\left[\frac{\alpha\alpha'}{z}-\frac{\mu\mu'}{z-1}+\nu(\alpha+\alpha'+\mu+\mu'+\nu-1)\right]\frac{\varphi}{z(z-1)}=0\end{aligned} \tag{5.15}$$

y una de las soluciones se expresa como:

$$\varphi_1(z)=Az^{\alpha}(z-1)^{\mu}F(\alpha+\mu+\nu,1-\nu-\alpha'-\mu',\alpha-\alpha'+1;z) \tag{5.16}$$

al comparar las ecuaciones (5.14) y (5.15) obtenemos los coeficientes que determinan a la solución (5.16) los cuales se escriben como:

$$a=\alpha+\mu+\nu=l+1+\frac{\sqrt{(1+\lambda)-i\beta}+\sqrt{(1+\lambda)+i\beta}}{2} \tag{5.17}$$

$$b=1-\nu-\alpha'-\mu'=l+1+\frac{\sqrt{(1+\lambda)-i\beta}-\sqrt{(1+\lambda)+i\beta}}{2} \tag{5.18}$$

$$c=\alpha-\alpha'+1=2l+2 \tag{5.19}$$

Donde:

$$\alpha=l \qquad \alpha'=-1-l \tag{5.20}$$

$$\mu=\frac{1+\sqrt{(1+\lambda)-i\beta}}{2} \qquad \mu'=\frac{1-\sqrt{(1+\lambda)-i\beta}}{2} \tag{5.21}$$

$$\nu=\frac{1+\sqrt{(1+\lambda)+i\beta}}{2} \tag{5.22}$$

Téngase en cuenta que la elección del conjunto de ecuaciones (5.16)-(5.22) no es única; en realidad existe un total de 8 posibles combinaciones; nuestra escogencia no atiende a ninguna consideración en particular. Como la constante $1-c$ es un entero se tiene que conseguir la segunda solución por medio de la formula de Liouville (ver [11]); sin embargo esta solución debe descartarse debido a que en $\omega \to \infty$ (o lo que es lo mismo en $z \to 0$) se comporta de la siguiente manera:

$$\lim_{\omega\to\infty} \varphi_2(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \varphi_1(\omega) \int^{\omega} \frac{d\omega'}{[\varphi_1(\omega')]^2} \simeq \lim_{\omega\to\infty} \omega^{l+1} \to \infty \tag{5.23}$$

Donde hemos usado el hecho de que $F(a, b, c; z) \xrightarrow[z\to 0]{} 1$. Una de las restricciones que garantiza la autoadjunticidad del operador (5.7) es que los elementos de su dominio cumplan con la condición de finitud en los extremos. Así en $\theta_1 \to 0$ ($\omega \to \infty$) la solución $\varphi_2(\omega)$ diverge y debe descartarse. Por lo tanto la primera solución es la solución general. En términos de ω (5.16) queda como:

$$\varphi(\omega) = A(\omega - i)^{-\alpha-\mu}(\omega + i)^{\mu} F\left(a, b, c; -\frac{2i}{\omega - i}\right) \tag{5.24}$$

Dicha solución es siempre finita en los extremos; para el caso en que $\omega \to \infty$ vemos que $\varphi(\omega) \simeq \omega^{-l} \to 0$, la misma tendencia se presenta en $\omega \to -\infty$. Queda por encontrar el comportamiento de la solución general en todo el intervalo $\omega \in (-\infty, \infty)$. Esto se reduce al estudio de la función hipergeométrica $F(a, b, c; z)$ en la ecuación (5.16); su desarrollo en serie para $|z| < 1$ generalmente es dado en la literatura. Así la solución (5.24) esta totalmente determinada en la región:

$$\left|\frac{2i}{\omega - i}\right| < 1 \tag{5.25}$$

que en el plano complejo, siendo ω la variable, corresponde a la región exterior del circulo de radio igual a 2 y centro en i. Puede verse que la recta real (es decir los $\omega \in (-\infty, \infty)$, la cual es la región de interés) corta al circulo en $\omega = \pm\sqrt{3}$ y de (5.25) es obvio que la solución (5.24) es totalmente conocida en la región $\omega \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Queda entonces por determinar el comportamiento en la región $\omega \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Lo que equivale a estudiar el comportamiento de la solución en el circulo $\left|\frac{2i}{\omega-i}\right| = 1$ y en la región interior.

La solución (5.24) es divergente en el circulo $\left|\frac{2i}{\omega-i}\right| = 1$ siempre que se cumpla con la condición

$$Re(a + b - c) \geq 1 \tag{5.26}$$

y a o b no sean enteros negativos o cero (ver [32]). Si este es el caso la solución (5.24) no admite una continuación analítica en la región $\omega \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ y por lo tanto debe ser descartada. Estudiemos para que casos se obtiene la restricción $Re(a + b - c) \geq 1$.

De las ecuaciones (5.17)-(5.19) se obtiene que esto es equivalente a que se cumpla:

$$[Re(\sqrt{(1+\lambda)-i\beta})]^2 = \frac{(1+\lambda)+\sqrt{(1+\lambda)^2+\beta^2}}{2} \geq 1 \tag{5.27}$$

Usando los valores de λ y β en (5.11) y resolviendo obtenemos que la solución debe descartarse cuando:

$$E \geq -\frac{1}{2}\frac{K^2q^4m}{\hbar^2} = E_o \tag{5.28}$$

El valor E_o corresponde a la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno en espacio euclídeo. Para espacios de curvatura negativa y constante (Ver [10]) vemos que la energía del estado fundamental también coincide con E_o.

De este hecho vemos que la solución (5.24) debe descartarse para $E \geq E_o$ a menos que a o b sean enteros no negativos o cero. Por lo tanto, $E \geq E_o$ solo es posible cuando una de las constantes a o b, o ambas, es un entero negativo o cero. Puede verse que b es complejo; por lo que esta condición debe recaer sobre la constante a; es decir:

$$a = l + \mu + \nu = -n' \qquad \text{Con} \qquad n' = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{5.29}$$

Si definimos $n = n' + 1 + l$ donde $n = 1, 2, 3\ldots$ pero cumpliendo con la restricción $n \geq l + 1$ (la cual garantiza que las funciones F sean polinomios) y usando (5.17) obtenemos:

$$-n = \sqrt{\frac{(1+\lambda)+\sqrt{(1+\lambda)^2+\beta^2}}{2}} \tag{5.30}$$

lo cual resolviendo se reduce a:

$$\lambda = n^2 - 1 - \frac{\beta^2}{4n^2} \tag{5.31}$$

Entonces el espectro de energías del átomo de hidrógeno en espacio esférico para $E \geq E_o$ será:

$$E_n = (n^2-1)\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}\frac{K^2q^4m}{n^2\hbar^2} \tag{5.32}$$

Vemos como la energía del estado fundamental ($n = 1$) coincide con E_o por lo que se cumple (5.28). Es fácil chequear que las soluciones (5.24) son de cuadrado integrable para todo n. Si esta ecuación es transformada a la forma de Sturm-Liouville y calculando su peso (ver [11]) esto se reduce a estudiar la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_a^\infty |\varphi(\omega)|^2 \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega \tag{5.33}$$

con a un numero real. También es necesario considerar (5.33) con limites de integración $(-\infty, a)$ pero esto es equivalente a asegurar la convergencia de (5.33). Así usando el comportamiento asintótico de la F en $\omega \to \infty$ la integral se reduce a:

$$\int_a^\infty |(\omega - i)^{-l-\mu}(\omega + i)^\mu|^2 \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega = \int_a^\infty \frac{1}{|\omega|^{2l+4}}\, d\omega \;<\; +\infty \tag{5.34}$$

la misma tendencia ocurre en $\omega \to -\infty$, este comportamiento es valido para todo λ incluidos los valores obtenidos en (5.31); luego el conjunto de soluciones escritas en función de la variable original θ_1 son:

$$\varphi_{n,l}(\theta_1) = A \operatorname{sen}^l \theta_1 e^{-\frac{\beta\theta_1}{2n} + i(l+1-n)\theta_1} F(l+1-n, l+1+\frac{i\beta}{2n}, 2l+2; 1-e^{2i\theta_1}) \tag{5.35}$$

se corresponde con las autofunciones del problema de Sturm-Liouville para $E \geq E_o$ planteado inicialmente . Aquí A es una constante de normalización que debe ser calculada. Este conjunto de ecuaciones junto con el conjunto (5.8) representan estados del sistema. La degeneración ocurre de manera equivalente a como ocurre en espacio euclídeo, además los tres números cuánticos n, l, m cumplen con las restricciones:

$$n = 1, 2, 3, 4 \ldots \tag{5.36}$$

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{5.37}$$

$$-l \leq m \leq l \qquad \text{Con} \qquad m \qquad \text{entero} \tag{5.38}$$

El caso $E < E_o$, no lo estudiaremos, según la referencia [26] no es posible. Estudiemos el espectro de energías, puede verse que la parte $E < 0$ del espectro es obtenida aproximadamente hasta que el entero n (el cual debido a las constantes fundamentales puede considerarse grande en comparación con 1) cumple con:

$$n \simeq \frac{q}{\hbar}\sqrt{kmR} \tag{5.39}$$

el cual nos dice que esta parte del espectro es finita (tiene finitos valores). Si $R \to \infty$ (el cual corresponde con el limite en el espacio euclídeo) vemos que n necesariamente debe tender a infinito, o lo que es lo mismo, que la parte negativa del espectro tenga infinitos valores menores que $E = 0$ (en concordancia con el espectro discreto del átomo de hidrógeno en espacio euclideo) es mas si en la ecuación (5.32) tomamos n finito (incluso tan grande como se quiera pero siempre finito) vemos que la energía del estado n-ésimo corresponde con el estado n-ésimo en espacio euclídeo es decir:

$$\lim_{R\to\infty} E_n \to -\frac{1}{2}\frac{k^2 q^4 m}{n^2\hbar^2} \qquad \text{Con} \qquad n < \infty \tag{5.40}$$

El estudio del limite $n \to \infty$ junto con el de $R \to \infty$, cuando $E > 0$, es delicado y no lo concideraremos en este trabajo (es decir, no analizaremos el límite euclídeo del espectro para $E > 0$).

Capítulo 6

El péndulo cuántico en $\mathbb{S}^1$

En este capitulo analizaremos otro problema físico el cual es posible discutir tanto clásica (tratado extensamente en la literatura ver p.e [15]) como cuánticamente. Es el péndulo cuántico. Aunque la obtención de la ecuación de movimiento del péndulo es un ejercicio sencillo, su solución exacta no es de ninguna manera obtenida con los métodos de rutina. Y es que esta ecuación es no lineal. Sin embargo, cuánticamente, la ecuación que rige la dinámica del sistema es lineal (recuérdese que uno de los rasgos distintivos de la mecánica cuántica es el ser una teoría lineal, y este hecho esta expresado de manera fundamental en los operadores que representan a los observables del sistema). Una resolución de este problema esta en [35]; en cambio en [36] se resuelve parcialmente usando métodos aproximados y teoría de perturbaciones. Nosotros revisaremos los resultados obtenidos en [35] y haremos algunas precisiones.

6.1. El péndulo clásico

Procederemos a bosquejar rápidamente los principales resultados obtenidos en este problema clásico: una partícula restringida a vivir en $\mathbb{S}^1$ bajo la acción de la fuerza gravitatoria, el cero de la energía potencial gravitatoria se escoge en el centro del circulo y con ϕ medido respecto al eje y negativo. La función de lagrange del sistema viene dada por:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 l^2 + mgl\cos\phi \qquad , \qquad \phi \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

y la ecuación de euler-lagrange se reduce a:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\phi = 0 \tag{6.2}$$

La cual determina la dinámica del sistema, vemos como la ecuación (6.2) es no lineal, sin embargo admite una solución exacta. Si efectuamos la respectiva transformación de legendre y usando (3.5) la función de hamilton será:

$$H(\phi, p_\phi) = \frac{1}{2ml^2}p_\phi^2 - mgl\cos\phi \tag{6.3}$$

escribiendo esta ecuación en términos de la energía del sistema, queda como:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 l^2 - mgl\cos\phi \tag{6.4}$$

Aquí es obvio que la energía es una constante de movimiento. Puesto que en algún momento la partícula alcanza $\phi = 0$, en general, en ese instante si definimos para ese ángulo la velocidad angular como w_0, la energía adquiere el valor de:

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 l^2 - mgl \tag{6.5}$$

sustituyendo (6.5) en (6.4) puede obtenerse la dinámica del sistema por medio de:

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 - 4\frac{g}{l}\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2} \tag{6.6}$$

Dependiendo de la energía del sistema, se obtienen tres diferentes regímenes en los cuales la partícula efectúa un movimiento distinto. Para ver las soluciones exactas veáse [35].

Caso 1 $E < mgl$

En este caso la partícula se mueve siempre periódicamente con un determinado periodo T, y su movimiento está restringido en la región $\phi \in (-\phi_0, \phi_0)$ de $\mathbb{S}^1$ donde $0 < \phi_0 < \pi$. En el limite de pequeñas oscilaciones (correspondería con energiás bajas) se obtiene un movimiento armónico simple en la variable ϕ. El periodo viene dado por la resolución de la siguiente integral elíptica:

$$T = 4\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{4g}{l}\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}}} \tag{6.7}$$

Este régimen se presenta cuando se suelta a la partícula desde el reposo con un ángulo ϕ_0.

Caso 2 $E > mgl$

Este caso corresponde con el régimen no ligado del péndulo: la partícula tiene la suficiente energía como para recorrer el circulo una y otra vez en un perpetuo movimiento circular no uniforme. Sin embargo el movimiento es periódico, ver [35].

Caso 3 $E = mgl$

Este régimen representa un caso límite entre los dos anteriores. Y corresponde con una trayectoria circular en un tiempo infinito ya que en esencia la partícula no tiene la suficiente energía para repetir su trayectoria, pero si la adecuada para completarla. Puede pensarse como un estado particular entre los casos uno y dos.

6.2. El péndulo cuántico

A la hora de plantear la situación cuánticamente se procede a resolver el problema de encontrar los autovalores y autofunciones para el hamiltoniano $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$ donde $\hat{T}$ viene dado por (4.8) con las condiciones de borde periódicas. Al ser un problema unidimensional, la cuestión se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria. Aquí el potencial viene dado por $U(\phi) = -mgl\cos\phi$ el cual como los problemas usuales en mecánica cuántica se considera del respectivo problema clásico. Entonces al usar (4.8) obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2ml^2}\frac{d^2}{d\phi^2}\psi(\phi) - mgl\cos\phi\psi(\phi) = E\psi(\phi) \qquad , \qquad 0 < \phi < 2\pi \tag{6.8}$$

El termino potencial $U(\phi) = -mgl\cos\phi$ es un operador acotado (ver [11]) mientras que el operador correspondiente a la "energía cinética" no lo es. Entonces puede demostrarse que las condiciones de borde autoadjuntas del operador no acotado se imponen sobre el operador suma. Como se dice en el capitulo 4 esto es que las autofunciones del operador cumplan con condiciones de borde periódicas en los extremos. Es decir:

$$\psi(2\pi) = \psi(0) \tag{6.9}$$

$$\frac{d\psi}{d\phi}(2\pi) = \frac{d\psi}{d\phi}(0) \tag{6.10}$$

La ecuación (6.8) corresponde con la conocida ecuación de Mathieu:

$$\frac{d^2}{dv^2}\psi(v) + (p - 2q\cos 2v)\psi(v) = 0 \tag{6.11}$$

Donde:

$$\phi = 2v \tag{6.12}$$

$$p = \frac{8Eml^2}{\hbar^2} \tag{6.13}$$

$$q = -\frac{4m^2gl^3}{\hbar^2} \tag{6.14}$$

Las soluciones de esta ecuación son conocidas y se encuentran en la literatura (ver, p.e., [33]). Nos restringimos ademas solo a las soluciones que son periódicas en los extremos y ademas que tengan periodo π en υ (periodo 2π en ϕ). Son una parte de las conocidas funciones de mathieu de primer tipo:

$$ce_{2n}(\upsilon, q) \tag{6.15}$$

$$se_{2n+2}(\upsilon, q) \tag{6.16}$$

Las cuales son funciones pares e impares respectivamente. Ambas serían el análogo de las funciones cos y sen, de hecho en el limite $q \to 0$ obtenemos estas funciones explicitamente. Vemos que el coeficiente q es negativo por lo que las autofunciones normalizadas correspondientes se reescriben de la siguiente forma (Ver [34]):

$$\psi_0^{(e)}(\phi, q) = (2\pi)^{-1/2} ce_0((\pi - \phi)/2, |q|) \tag{6.17}$$

$$\psi_{2n}^{(e)}(\phi, q) = (\pi)^{1/2}(-1)^n ce_{2n}((\pi - \phi)/2, |q|) \tag{6.18}$$

$$\psi_{2n}^{(0)}(\phi, q) = (\pi)^{1/2}(-1)^{n+1} se_{2n}((\pi - \phi)/2, |q|) \tag{6.19}$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$, las cuales forman un conjunto ortonormal en $L^2(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} \psi_{2n}^{(e)}(\phi, q)\psi_{2n}^{(0)}(\phi, q) = 0 \tag{6.20}$$

$$\int_0^{2\pi} \psi_{2m}^{(0)}(\phi, q)\psi_{2n}^{(0)}(\phi, q) = \int_0^{2\pi} \psi_{2m}^{(e)}(\phi, q)\psi_{2n}^{(e)}(\phi, q) = \delta_{mn} \tag{6.21}$$

Puede demostrarse que el conjunto de soluciones (6.17)-(6.19) satisfacen (6.9) y (6.10). Además cumplen con la condición de finitud en lo extremos y también son funciones suaves en el intervalo $(0, 2\pi)$. Todo esto garantiza que sean funciones de cuadrado integrable, y el hecho de que la ecuación (6.11) sea un problema de Sturm-Liouville regular asegura la completitud de las autofunciones. Faltaria ver que estas son todas las autofumnciones. Un argumento sencillo nos hace ver que esto es así. En efecto si tomamos el limite $q \to 0$ obtenemos la base de Fourier (que es obviamente completa). Ademas estas autofunciones son no degeneradas, por lo que cada una tiene asociada una única energía o un p diferente. Notemos que q no es una variable (ver (6.14)) por lo que las autofunciones son conocidas y en adelante se sobrentiende que ya hemos escogido q. Queda por determinar el espectro. Para ello existen varios métodos en la literatura, expondremos el usado en [35]. El conjunto de soluciones son periódicas, por lo que admiten un desarrollo en series de Fourier. Puede verse que para las autofunciones pares $\{\psi_{2n}^{(e)}\}$, incluido el caso $n = 0$ obtenemos:

$$\psi_{2n}^{(e)} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)} \cos(j\phi) \tag{6.22}$$

y las funciones impares se pueden escribir:

$$\psi_{2n}^{(0)} = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}^{(2n)} \operatorname{sen}[(j+1)\phi] \tag{6.23}$$

Si introducimos (6.22) en (6.8) obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 A_{2j}^{(2n)} \cos(j\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p_n}{4} - \frac{q}{2}\cos\phi\right) A_{2j}^{(2n)} \cos(j\phi) \tag{6.24}$$

y usando:

$$2\cos\phi\cos(j\phi) = \cos[\phi(j+1)] + \cos[\phi(j-1)] \tag{6.25}$$

obtenemos una ecuación que relaciona los coeficientes del desarrollo (6.22) la cual puede escribirse como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)} \frac{p_n - 4j^2}{q} \cos(j\phi) - \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2n)} \{\cos[\phi(j+1)] + \cos[\phi(j-1)]\} = 0 \tag{6.26}$$

Tomando en cuenta que cada $\cos(j\phi)$ es linealmente independiente, Obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia para la autofunción n-ésima:

$$A_2^{(2n)} = \frac{p_n}{q} A_0^{(2n)} \tag{6.27}$$

$$A_4^{(2n)} = \frac{p_n - 4}{q} A_2^{(2n)} - 2A_0^{(2n)} \tag{6.28}$$

$$A_{2j+2}^{(2n)} = \frac{p_n - 4j^2}{q} A_{2j}^{(2n)} - A_{2j-2}^{(2n)} \qquad \text{para} \qquad j \geq 2 \tag{6.29}$$

Sin embargo recordemos que p_n es desconocido, Así que no se tiene todavía la energía asociada a la autofunción $\psi_{2n}^{(e)}$, para ello se reescribe la ecuación (6.28) de la siguiente forma:

$$2\frac{A_0^{(2n)}}{A_2^{(2n)}} = \frac{p_n - 4}{q} - \frac{A_4^{(2n)}}{A_2^{(2n)}} \tag{6.30}$$

para $j = 2$ (6.29) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\frac{A_2^{(2n)}}{A_4^{(2n)}} = \frac{p_n - 16}{q} - \frac{A_6^{(2n)}}{A_4^{(2n)}} \tag{6.31}$$

el cual puede sustituirse en (6.30) y lleva a:

$$2\frac{A_0^{(2n)}}{A_2^{(2n)}} = \frac{p_n - 4}{q} - \cfrac{1}{\cfrac{p_n - 16}{q} - \cfrac{A_6^{(2n)}}{A_4^{(2n)}}} \tag{6.32}$$

si se repite el procedimiento para (6.29) con $j = 3$ obtenemos:

$$2\frac{A_0^{(2n)}}{A_2^{(2n)}} = \frac{p_n - 4}{q} - \cfrac{1}{\cfrac{p_n - 16}{q} - \cfrac{1}{\cfrac{p_n - 36}{q} - \cfrac{A_8^{(2n)}}{A_6^{(2n)}}}} \tag{6.33}$$

Así repitiendo el procedimiento para todo j obtenemos una fracción continuada, la cual en una notación mas compacta pasa a ser:

$$0 = -2\frac{1}{V_0^n} + V_2^n - \frac{1}{V_4^n -}\frac{1}{V_6^n -}\frac{1}{V_8^n -}\cdots\frac{1}{V_{2j}^n -}\cdots \tag{6.34}$$

Donde se tiene que

$$V_{2j}^n = \frac{p_n - (2j)^2}{q} \tag{6.35}$$

Como se dijo anteriormente cada autofunción $\psi_{2n}^{(e)}$ tiene una única energía asociada, e independientemente de la autofunción que se use, se obtiene que todo p asociado al conjunto $\{\psi_{2n}^{(e)}\}$ cumple con la relación (6.34). Por lo tanto el problema de hallar el espectro se reduce a determinar cuando $f(p_n)$ se anula con:

$$f(p_n) = -2\frac{1}{V_0^n} + V_2^n - \frac{1}{V_4^n -}\frac{1}{V_6^n -}\frac{1}{V_8^n -}\cdots\frac{1}{V_{2j}^n -}\cdots \tag{6.36}$$

Dichas soluciones pueden ser halladas mediante métodos numéricos, así una vez conocida la energía, se puede proceder a encontrar los coeficientes del desarrollo (6.22). Para el caso del conjunto de autofunciones impares $\{\psi_{2m}^{(0)}\}$ se repite el procedimiento anterior, las relaciones de recurrerencia para la autofunción m-ésima vienen dadas por:

$$\frac{B_4^{(2m)}}{B_2^{(2m)}} = \frac{p_n - 4}{q} \tag{6.37}$$

$$B_{2j+2}^{(2m)} = B_{2j}^{(2m)}\frac{p_n - 4j^2}{q} - B_{2j-2}^{(2m)} \qquad \text{Para} \qquad j \geq 3 \tag{6.38}$$

Y se puede determinar que los autovalores correspondientes a estas autofunciones son los ceros de $g(p_n)$ definida como:

$$g(p_n) = V_2^n - \frac{1}{V_4^n -} \frac{1}{V_6^n -} \frac{1}{V_8^n -} \cdots \frac{1}{V_{2j}^n -} \cdots \tag{6.39}$$

Donde V_{2j}^n viene dada por (6.35).

Capítulo 7

Discusión

En este trabajo hemos afrontado la problemática de como formular la mecánica cuántica de un sistema físico compuesto por una partícula sin espin en un espacio no euclídeo; en particular, en los espacios esféricos $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^3$. Tal sistema físico siempre es el pilar para tratar con otros sistemas físicos mas complicados en esas geometrías.

La obtención de los observables fundamentales del sistema, que corresponde con lo que se conoce como cuantización, se realiza de manera geométrica (independiente de coordenadas). En este caso, como en el euclídeo, la construcción de los observables se realiza tomando en consideración las propiedades de simetría del espacio esférico (en particular, a partir de los generadores del grupo monoparamétrico de isometrías o vectores de killing). Sin embargo, esta construcción en el espacio esférico, a diferencia de los casos euclídeo e hiperbólico, es mas delicada ya que el número de campos vectoriales definidos en *todo* el espacio esférico es limitado. Puede verse que algunos de los campos vectoriales de killing obtenidos en el capitulo 4 se anulan en algunos puntos de la región en que están definidas las coordenadas esféricas y por lo tanto estos campos no pueden ser extendidos a todo el espacio esférico. Esto no es un problema de coordenadas sino una cuestión topológica bien conocida. Sin embargo, nuestro interés radica solo en la construcción de los observables asociados a estos generadores, y la autoadjunticidad de los operadores que representan dichos observables puede garantizarse al imponer algunas condiciones especificas. Un trabajo mas riguroso podría tomar esta problemática, tomando en cuenta los dominio de los operadores, sin ningún cambio básico a nuestros resultados.

De los resultados obtenidos en esta tesis y en la referencia [10], uno concluye que se puede evitar la cuantización canónica para sistemas de muchas partículas (a través de productos tensoriales) en esta geometría. Luego la cuantización canónica debería evitarse en otros sistemas mas complicados como en teoría clásica de campos con vínculos en espacio tiempo curvo o plano. La cuantización tiene que ser formulada en términos geométricos (no debe depender de coordenadas).

La comparación de nuestro método de cuantización con el muy frecuentemente usado método de cuantización de Dirac con vínculos es muy clara. Primero que nada el procedimiento de Dirac nunca proporciona el espacio de Hilbert (y por lo tanto, no hay cuantización realmente), mientras que en el nuestro es conocido debido a que las isometrías vienen dadas unitariamente con la acción natural de ellas sobre la esfera. La teoría de Dirac solo construye el hamiltoniano, supuestamente, por que no especifica el espacio de sobre el que actúa. En efecto, tanto la "posición" como el "momento" no son observables físicos en esta construcción, debido a que dependen del espacio de "encajamiento" (ya que son construidos a partir de la cinemática clásica formulada en un solo tipo de coordenadas no intrínsecas al espacio esférico). Este "encajamiento" es un artificio para la introducción de las reglas de conmutación euclidianas. En cambio, nuestra construcción, además de ser intrínseca, es geométrica (independiente de coordenadas). Mas aun, por lo discutido no es claro hablar de un operador posición en $\mathbb{S}^n$ de la misma manera que no existe un sistema de coordenadas global sobre $\mathbb{S}^n$. En el caso de $\mathbb{S}^n$, la cuantización de Dirac con vinculos ha sido discutida en [21]. En particular, no se obtienen las relaciones (4.27).

Para el caso del problema del átomo de hidrogeno en $\mathbb{S}^3$, se siguieron los procedimiento usuales del problema por separación de variables. Es decir, reduciendo la solución a tres problemas tipo Sturm-Liouville; verificando ciertos resultados establecidos en [26]. Sin embargo, la justificacíon en [26] por la cual no se puede continuar analiticamente a la región de interés es insatisfactoria. Por otro lado, para $E \geq E_o$ usamos un argumento claro para asegurar la posibilidad de una continuación analítica de la función hipergeométrica en el circulo unitario y por lo tanto en toda la región de interés. Además, se analizó el limite de la curvatura y su influencia en el espectro; obteniendo los estados ligados del átomo de hidrógeno en espacio euclídeo. Notemos que en el espacio esférico todo el espectro es discreto, lo cual era de esperarse por la compacidad de $\mathbb{S}^3$. Es de hacerse notar que si la curvatura es muy pequeña (pero positiva) las correciones son despreciables para ser medidas de manera directa. No obstante, podría medirse algún efecto indirecto y justificar entonces una geometría esférica en lugar de la euclidea.

Por último, se estudió el péndulo cuántico. Nuestra exposición no difiere en esencia de [35], salvo que las condiciones de borde periódicas en los extremos de las autofunciones deben ser también satisfechas por su derivada. Sin embargo, se llegan a los mismos resultados (por que esta condición implicitamente es usada) tanto en el espectro como en las autofunciones.

Bibliografía

[1] Isham C.I., Penrose R. & Sciama D.W. *An Introduction to Quantum Gravity, Quantum Gravity: An oxford symposium* Oxford, clarendon 1975.

[2] Bleuer K., Petry H.R. & Reetz A. *A Quantum Field Theory in a Curve Space-time, a general mathematical framework, proceeding of the Bonn conference on differential geometrical methods in mathematical physics* New York, Springer-Verlag 1978.

[3] Isham C.I., Penrose R. & Sciama D.W. *Quantum Gravity an Overview, Quantum Gravity II: A second Oxford symposium* Oxford, Clarendon 1981.

[4] Boyer Carl, *A History of Mathematics.* Jhon Wiley & Sons, Inc, 2nd ed 1991.

[5] Ratcliffe Jhon G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Springer, 2nd ed 2006.

[6] Coxeter H.S.M., *Non-Euclidean Geometry.* Mathematical Association Of America, 6th ed 1998.

[7] W. Tu Loring, *A Introduction to Manifolds.* Springer, 2nd ed 2010.

[8] Wald Robert M., *General Relativity.* The University of Chicago Press, 1984

[9] Bär Christian, *Elementary Differential Geometry* Cambridge University Press, 2010.

[10] Sequera Ling, *Mecánica Cuántica en el Espacio de Lobachevski.* Tesis de grado, UCV, Facultad de Ciencias, 2009.

[11] Torres P.L., *Curso en Métodos de la Física Teórica.* Facultad de Ciencias UCV, 2000

[12] Spivak Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol I.* Publish of Perish Inc, 3er ed 1999.

[13] Galindo A. & Pascual P., *Quantum Mechanics I.* Springer-Verlag, 1990.

[14] Cohen-Tannoudji C. & Diu B. & Laloe F., *Quantum Mechanics Vol I.* Wiley, 1977.

[15] Goldstein H. & Poole C. & Safko J., *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 3er ed, 2000.

[16] Landau L.D. & Lifshitz E.M., *Mechanics.* Butterworth-Heinenann, vol I, 3er ed, 1977

[17] Abraham R. & Marsden J., *Foundations of Mechanics.* Addison-Wesley, 2nd ed, 1987

[18] Eisberg R., *Fundamentals of Modern Physics.* John Wiley & Sons, Inc. 3er ed, 1963

[19] Van der Waerden B., *Group Theory and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, 1974

[20] Kastrup H.A., *Quantization of the Canonically Conjugate Pair Angle and Orbital Angular Momentum* Phys. Rev. A 73, 052104 (2006) [26 pages]. ArXiv: quant-ph/0510234, 2006.

[21] Kleinert H & Shabanov S.V *Proper Dirac Quantization of Free Particle on D-Dimensional Sphere* Phys.Lett. A232 (1997) 327-332. ArXiv: quant-ph/9702006v1, 1971.

[22] Liu Q.H., Tang L.H. & Xun D.M *Geometric Momentum: the Proper Momentum for a Free Particle on a Two-dimensional Sphere* Phys. Rev. A. 2011 (to appear). arXiv:1109.5223v1 [quant-ph] 2011.

[23] Nieto L.M. & Rosu H.C. & Santander M. *Hydrogen Atom as an Eigenvalue Problem in 3D Spaces of Constant Curvature and Minimal Length* Mod. Phys. Lett. A 14 (35) (1999) 2463-2469 [quant-ph/9911010 v3]

[24] Schrödinger E., *A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions*, Proc. R.I.A., A 46 (1940), 9-16.

[25] Infeld L. Schild A., *A Note on the Kepler Problem in a Space of Constant Negative Curvature*, Phys. Rev., 67 (1945), 121-122.

[26] Stevenson A. F., *Note on the Kepler Problem in a Spherical Space, and the Factorization Method of Solving Eigenvalue Problems* Phys. Rev., 59 (1941), 842-843.

[27] P.W. Higgs, *Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry I* J.Phys. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 3, 1979. 309-323.

[28] Leemon H.I., *Dynamical Symmetries in a Spherical Geometry II* J.Phys. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 4, 1979. 489-501.

[29] Morse Phillip M. & Feshbach Herman, *Methods of Theoretical Physics Vol I*, New York, Mc Graw Hill, 1953.

[30] Whittaker E. Watson G., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1963.

[31] Abramowitz M. & Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standars Applied Mathematics Series 55. 1964.

[32] Bateman H. and Staff, *Higher Trascendental Functions Vol I*, Mcgraw-Hill Book Company, INC. 1953.

[33] Bateman H. and Staff, *Higher Trascendental Functions Vol III*, Mcgraw-Hill Book Company, INC. 1953.

[34] Gradshteyn I.S. & Ryzhik I.M., *Table of Integrals, Series, and Products* Academic Press 2007.

[35] Aldrovandi R. & Ferreira L., *Quantum Pendulum* Am. J. Phys Vol 48 nº 8,Issue 8, pp. 660, 1980.

[36] Doncheski M. A. & Robinett R. W., *Wave Packet Revivals and the Energy Eigenvalue Spectrum of the Quantum Pendulum*, Annals of Physics (to appear). quant-ph /0307079v1 2003.