

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

INVERSIÓN SÍSMICA Y PETROFÍSICA UTILIZANDO EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por la Br. Ramírez C., Angy R
Para optar al Título
De Ingeniero Geofísico

Caracas, 2011

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

INVERSIÓN SÍSMICA Y PETROFÍSICA UTILIZANDO EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Miguel Bosch

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por la Br. Ramírez C., Angy R
Para optar al Título
De Ingeniero Geofísico

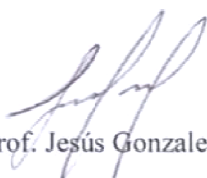
Caracas, 2011

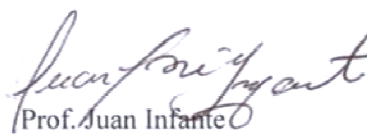
Caracas, noviembre del 2011

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Geofísica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller Angy R Ramírez Camargo, titulado:

**“INVERSIÓN SÍSMICA Y PETROFÍSICA UTILIZANDO EL MÉTODO
DE OPTIMIZACIÓN”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Geofísico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.


Prof. Jesús Gonzalez
Jurado


Prof. Juan Infante
Jurado


Prof. Miguel Bosch
Tutor Académico

DEDICATORIA

Esta investigación está dedicada a Dios el Todopoderoso que todo lo sabe y todo lo ve, mi maestro eterno escribiste en letras torcidas y renglones perfectos la ecuación que yace en lo más profundo de mi ser, al gran Nazareno de San Pablo mi eterno acompañante, siempre guardas una luz de esperanza y mi inquebrantable fe en ti me mantiene de pie eternamente agradecida, a la Virgen de las Mercedes madre con tu infinita sabiduría me concedes luz, por ser la musa de mi inspiración en momentos de silencio, Virgen del Valle por concederme el permiso y la sabiduría para conocer y cuidar tus más preciados tesoros, Virgen de la caridad del Cobre por escuchar mis ruegos y guiar con alegría cada paso de este trabajo, Divino Niño y Santo niño de Atocha por enseñarme a mirar el mundo con inocencia y disfrutar del viaje hacia la meta. A todos los santos, ángeles y arcángeles les dedico esta inspiración en silencio la verdad reposa y florece ante la existencia.

A las matemáticas por ser el camino más transparente, brillante y justo mi constante meditación, eternamente florezco.

A mi madre lo más sagrado y hermoso que tengo en la vida te dedico esta inspiración. Te honro en mi eterno florecer.

Al Profesor Nelson Macquhae mi Mentor, mi mejor amigo y un gran maestro que jamás dejo de tener fe en mí, agradecida y bendecida por tu sabiduría, te honro por la Profunda admiración y respeto que guardas a las matemáticas y al conocimiento.

“Dios no juega a los dados”. Albert Einstein

AGRADECIMIENTOS

Gracias a la Universidad Central de Venezuela máxima casa de estudios por prepararme para optar el título de Ingeniero Geofísico.

Gracias a mi tutor profesor Miguel Bosch por enseñarme y guiarme, por indicarme las respuestas correctas a todas las interrogantes durante todo el proceso de la tesis. A quien Honro por su humilde y profunda admiración hacia las matemáticas y las leyes físicas. Agradecida y Bendecida por su sabiduría.

Gracias a mi madre Carmen por tu infinita paciencia, por confiar en mí, por siempre estar a mi lado, esto es posible gracias a ti.

Gracias a mi hermano Richard por escucharme, por tener fe en mis sueños y ser mi fiel amigo gracias.

Gracias a mi tío Reynaldo y Freddy por apoyarme en los momentos más duros y tener fe en mí para llegar a la meta.

Gracias a mi amiga Sara por tus consejos, por tu apoyo bendecida, agradecida por tus mensajes lo que ayer fue un sueño hoy es una realidad.

Gracias a joselyn por tener fe en mí, guiarme en este camino gracias, a Coro por tener las palabras exactas para llegar a mi corazón cuando decaía.

Gracias al apoyo de mi compañero de laboratorio de simulación e inversión geofísica Ricardo Blanco por ayuda técnica en los gráficos y siempre me traes alegría con tus ocurrencias.

Gracias a José Luis por apoyarme y ayudarme en los últimos momentos de la tesis.

Ramírez C., Angy R

INVERSIÓN SÍSMICA Y PETROFÍSICA UTILIZANDO EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN

**Tutor Académico: Prof. Miguel Bosch. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de
Ingeniería. Escuela de Ingeniería Geofísica. Año 2011, 139 p.**

Palabras Claves: Sísmica-inversión, Petrofísica, Geopresión, Método de Eaton.

Resumen: En este proyecto se aplicó la técnica de inversión, que vincula amplitudes sísmicas, registros de pozo, modelos petrofísicos y de propagación de ondas elásticas para generar una configuración conjunta conformada por parámetros de reservorio y elásticos del medio, tales como saturación de agua, contenido de arcilla, porosidad, velocidad de la onda P, velocidad de la onda S, densidad de la masa. Para la resolución del problema de inversión fue necesario calcular las transformadas petrofísicas y sus respectivos gradientes para el modelo vigente n , simular la data sísmica mediante el método de cálculo de reflectividades y convolución, construir y resolver un sistema de ecuaciones hasta obtener el paso de actualización de los parámetros elásticos y de reservorio utilizando iterativamente el método de Newton. Para la validación con datos sintéticos se propuso una configuración de propiedades de reservorio de prueba y se simuló los datos sísmicos correspondientes; esta data sísmica es utilizada para realizar la inversión y comparar los estimados de propiedades con la configuración de prueba. Además la inversión fue validada con datos reales obtenidos de un reservorio de gas, que consistieron en tres secciones de apilados parciales según ángulos de incidencia. Como resultado de la inversión se estimaron conjuntamente las propiedades de reservorio (porosidad total, arcillosidad y saturación de agua) y elásticas (V_p , V_s y densidad) así como se evaluó la incertidumbre de los datos estimados a través del cálculo de la desviación estándar y la influencia de la información geofísica mediante el cálculo de resolución. También se elaboraron secciones de los módulos elásticos que permiten conocer el medio, de la presión de poro y presión efectiva para evaluar situaciones de riesgo en la planificación de pozos y estabilidad de los mismos.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTOS.....	v
RESUMEN	vi
INDICE GENERAL.....	vii
INDICE DE FIGURAS	x
INDICE DE TABLAS	xv
CAPITULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1 planteamiento del problema.....	1
1.2 Objetivos.....	4
1.2.1 Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos.....	4
CAPITULO II MARCO TEÓRICO	5
2.1. Petrofísica	5
2.1.1. Porosidad	5
2.1.2. Saturación de agua.....	5
2.1.3. Volumen de arcilla	6
2.2. Ondas sísmicas	6
2.2.1. Ondas P o compresionales	6
2.2.2. Ondas S o transversales	6
2.3. Coeficientes de reflexión	7
2.3.1. Aproximaciones de las ecuaciones de Zoeppritz	10
2.3.2. Aproximación de Aki & Richards (1980).....	10
2.3.3. Aproximación de Shuey (1985)	11
2.4. Teorema de convolución.....	12
2.4.1. Convolución discreta	12
2.4.2. Modelo convolucional de la traza sísmica.....	13
2.4.3. Ondícula fuente	13
2.5. Consideraciones petrofísicas.....	13
2.5.1. Modelo mixto arena-arcilla.....	14
2.5.2. Transformada de Wood	15

2.5.3. Transformada de Wyllie	16
2.5.4. Modelo de Gassmann	17
2.5.5. Velocidad de onda de cizalla	18
2.6. Resolución del problema petrofísico	19
2.6.1. Transformación de parámetros.....	19
2.7. Geoestadística	21
2.7.1. Variables aleatorias	21
2.7.2. Función de covarianza	22
2.7.3. Modelado de la función de covarianza	22
2.7.3.1. Modelo independiente	23
2.7.3.2. Modelo coseno amortiguado	23
2.7.3.3. Modelo exponencial	23
2.7.3.4. Modelo Gausiano.....	24
2.7.4. Simulación Gausiana	24
2.8. Inferencia geoestadística.....	25
2.9. Las ecuaciones normales (método de Newton).....	28
2.10. Resolución de sistemas lineales	31
2.10.1. Descomposición LU	31
2.10.2. Descomposición de Cholesky	32
2.11. Módulos elásticos.....	32
2.11.1. Módulo de volumen (Bulk modulus).....	32
2.11.2. Módulo elástico transversal	32
2.11.3. Coeficiente de Poisson.....	33
2.12. Formulación de la presión de poro por Eaton	34
2.12.1. Presión geoestática	34
CAPITULO III MARCO METODOLÓGICO.....	39
3.1. Modelos petrofísicos	41
3.2. Problema directo	42
3.3. Aplicación de las diferencias finitas de la configuración conceptual	45
3.3.1. Diferencias finitas.....	45
3.4. Configuración conceptual.....	46
3.5. Cálculo de la matriz F.....	52

3.6. Cálculo de la matriz G	52
3.7. Problema inverso.....	53
3.8. Cálculo del residuo geofísico.....	56
3.9. Cálculo de incertidumbre y resolución geofísica	56
3.10. Datos Reales.....	58
3.11. Estimación de la presión de poro a partir de las propiedades de la Inversión	61
CAPITULO IV CALIBRACIÓN PETROFÍSICA Y GEOESTADÍSTICA	63
4.1. Modelos petrofísicos	65
4.2. Información estadística previa	70
4.3. Matrices de covarianza	76
4.3.1. Matriz de covarianza de reservorio	76
4.3.2. Matriz de covarianza elástica.....	78
CAPITULO V CONSTRUCCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTETICOS.....	80
5.1. Configuración de prueba.....	80
5.2. Configuración previa.....	82
5.3. Construcción de la matriz F	88
5.4. Construcción de la matriz G	88
5.5. Resultados sintéticos	97
CAPITULO VI VALIDACIÓN CON DATOS REALES	104
6.1. Resultados de inversión	107
6.2. Parámetros elásticos indirectos	120
6.3. Presión de poro.....	123
CONCLUSIONES	130
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	132
APÉNDICE	134

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Rayos reflejados, transmitidos y convertidos generados por un rayo P que incide oblicuamente sobre una interface con contraste de impedancia acústica.....	7
Figura 2.2. Conversion de onda P desde arriba	8
Figura.2.3. Conversion de onda P desde abajo.....	8
Figura.2.4. Mapa de relación de Poisson	34
Figura.3.1. Diagrama para la generación de la traza sísmica	42
Figura 3.2. Digrama de flujo de la generación del sintético de prueba.....	43
Figura 3.3. Diagrama de flujo de la generación de la generación de la traza sísmica de la configuración previa.....	44
Figura 3.4. Configuración conceptual para las propiedades de reservorio	46
Figura 3.5. Configuración conceptual de las propiedades elásticas aplicando el modelo de Wyllie-Wood y Gassmann	47
Figura 3.6. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la Densidad respecto de las propiedades de reservorio	48
Figura 3.7. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Wyllie-Wood.....	49
Figura 3.8. Comparación de la configuración conceptual y las derivadas numéricas centrales de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Gassmann.....	50
Figura 3.9. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la velocidad de la onda S	51
Figura 3.10. Diagrama de flujo del cálculo de la matriz G	52
Figura 3.11. Diagrama de flujo de la resolución del problema inverso	54
Figura 3.12. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión aplicado al caso sintético	55
Figura 3.13. Secciones sísmicas para los diferentes apilados por ángulos de la zona de reservorio de gas	59
Figura 3.14. Ondículas extraídas para los diferentes apilados por ángulo.....	59
Figura 3.15. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión aplicado al caso real	60

Figura 4.1. Pozol suavizado a 4ms de porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua.....	64
Figura 4.2. Gráficos cruzados de las propiedades elásticas en función de la porosidad para la calibración de las propiedades elásticas en la matriz	66
Figura 4.3. Estimación de las propiedades elásticas (Vp, Vs y densidad) con el modelo Wyllie-Wood.....	68
Figura 4.4. Estimación de las propiedades elásticas (Vp, Vs y densidad) con el modelo Gassmann.....	69
Figura 4.5. Configuración de prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de la saturación de agua	71
Figura 4.6. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas del contenido de arcilla	72
Figura 4.7. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de la porosidad.....	72
Figura 4.8. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de las propiedades de reservorio en conjunto	73
Figura 4.9. Comparación de la configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de las propiedades de reservorio en conjunto para diferentes reducciones.....	74
Figura 4.10. Matriz de Covarianza para las propiedades de Reservorio aplicado al caso sintético.....	77
Figura 4.11. Matriz de Covarianza para las propiedades de Reservorio aplicado al caso real.....	78
Figura 4.12. Matriz de Covarianza para las propiedades Elásticas aplicado al caso sintético	79
Figura 4.13. Matriz de Covarianza para las propiedades Elásticas aplicado al caso real.....	79
Figura 5.1. Configuración de reservorio de prueba	80
Figura 5.2. Configuración elástica de prueba estimada con la aplicación del modelo Wyllie-Wood (arriba) y Gassmann (abajo) respectivamente.....	81
Figura 5.3. Configuración previa de reservorio para la inversión caso sintético	82

Figura 5.4. Configuración elástica previa estimada con la aplicación del modelo Wyllie-Wood (arriba) y Gassmann (abajo)	83
Figura 5.5. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la densidad respecto de las propiedades de reservorio	84
Figura 5.6. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Wyllie-Wood	85
Figura 5.7. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Gassmann.....	86
Figura 5.8. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda S respecto de las propiedades de reservorio	87
Figura 5.9. Matriz F aplicando el modelo de Wyllie-Wood (arriba) y aplicando el modelo de Gassmann (abajo).....	89
Figura 5.10. Matriz G.....	90
Figura 5.11. Matriz de derivadas de las propiedades elásticas respecto al ángulo	91
Figura 5.12 Lado izquierdo del sistema de ecuación caso sintético	92
Figura 5.13 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba y la traza sísmica generada por la configuración previa para cada ángulo para la iteración 1	92
Figura 5.14 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba y la traza sísmica generada por la configuración previa para cada ángulo para la iteración 2.....	93
Figura 5.15 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba y la traza sísmica generada por la configuración previa para cada ángulo para la iteración 3.....	93
Figura 5.16 Comparación de la diferencia entre la sísmica calculada y observada por cada iteración	94
Figura 5.17 Matriz de covarianza previa para el caso sintético.....	95
Figura 5.18. Matriz de covarianza previa para el caso real.....	96
Figura 5.19. Resultado de la inversión para la iteración 1	97
Figura 5.20. Resultado de la inversión para la iteración 2	98

Figura 5.21. Resultado de la inversión para la iteración 1	100
Figura 5.22. Resultado de la inversión para la iteración 2	101
Figura 5.23. Estadística de Chi-cuadrado para el residuo de los datos geofísico	103
Figura 6.1. Sección sísmica por apilado cercano.....	104
Figura 6.2. Sección sísmica por apilado medio	104
Figura 6.3. Sección sísmica por apilado lejano	105
Figura 6.4. Configuración previa de las propiedades de reservorio (arriba), de las propiedades elásticas de Wyllie (intermedio) y Gassmann (abajo)	106
Figura 6.5. Inversión obtenida para 3 ángulos (14°, 28°, 41°) de incidencia para las propiedades de reservorio aplicando el modelo Wyllie-Wood	108
Figura 6.6. Inversión obtenida para 3 ángulos (14°, 28°, 41°) de incidencia para las propiedades de elásticas aplicando el modelo Wyllie-Wood.....	109
Figura 6.7. Resultado de la inversión para el CDP 6	112
Figura 6.8. Resultado de la inversión para el CDP 309	113
Figura 6.9. Inversión obtenida para 3 ángulos (14°, 28°, 41°) de incidencia para las propiedades de reservorio aplicando el modelo de Gassmann.....	115
Figura 6.10. Inversión obtenida para 3 ángulos (14°, 28°, 41°) de incidencia para las propiedades de elásticas aplicando el modelo Gassmann	116
Figura 6.11 Resultado de la inversión para el CDP 6	118
Figura 6.12. Resultado de la inversión para el CDP 309	119
Figura 6.13. Sección sísmica del Modulo de volumen y cizalla calculado a partir de las propiedades estimadas por la inversión.....	121
Figura 6.14. Sección sísmica del Modulo de Poisson calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión.....	122
Figura 6.15. Sección sísmica de la relación Vp/Vs calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión.....	123
Figura 6.16. Sección sísmica del gradiente de la presión de poro calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión.....	124
Figura 6.17. Esquema mostrando un caso donde la causa de sobrepresión es causada por la expansión del fluido	125
Figura 6.18. Resultado de la estimación a partir de la inversión para el CDP 06 y 309.....	126

Figura 6.19. Sección sísmica de la Presión de poro y la Presión efectiva calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión	127
---	-----

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Símbolos Básicos.....	40
Tabla 3.2. Encabezado de los datos sísmicos	58
Tabla 4.1. Valores de parámetros petrofísicos.....	67
Tabla 4.2. Valores de parámetros de la función de covarianza para el caso sintético	75
Tabla 4.3. Valores de parámetros de la función de covarianza para el caso real	75
Tabla 5.1. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio con el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood.....	99
Tabla 5.2. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas con el modelo petrofísico integrado de Wyllie-Wood	99
Tabla 5.3. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio con el modelo petrofísico integrado Gassmann	102
Tabla 5.4. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas con el modelo petrofísico integrado de Gassmann	102
Tabla 6.1. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio con el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood.....	114
Tabla 6.2. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas con el modelo petrofísico integrado de Wyllie-Wood	114
Tabla 6.3. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio aplicando Gassmann.....	120
Tabla 6.4. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas aplicando Gassmann	120

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento del problema.

En Geofísica al modelado de la perturbación del medio y su respuesta asociada se le conoce como problema directo. El estudio de este modelo se realiza con el fin de conocer la combinación de parámetros que la producen y una de las técnicas utilizadas para ello es la inversión.

Según Tarantola (1987), el proceso de inversión se define como la inferencia de parámetros o propiedades del medio a partir de datos observados. Existen varias técnicas para generar algoritmos de inversión, como por ejemplo los métodos de optimización por mínimos cuadrados, los cuales son comúnmente usados para estimar las propiedades físicas del medio ajustando los datos geofísicos con modelos no lineales (Bosch, 2004).

En la industria petrolera resulta de fundamental importancia la estimación de propiedades sísmicas y petrofísicas para la caracterización de un yacimiento a partir de modelos matemáticos y petrofísicos que permitan indicar el riesgo mínimo para posicionar pozos de perforación y aprovechamiento del mismo.

En este trabajo se desarrolla la solución del problema inverso aplicando la técnica de optimización, obteniendo así una configuración de 6 propiedades tales como: saturación de agua, contenido de arcilla, porosidad, velocidad de onda compresional, velocidad de onda S y densidad que sea compatibles simultáneamente con la data sísmica observada y la caracterización petrofísica del yacimiento. El algoritmo de inversión se construyo en el lenguaje de programación fortran 95 aplicando el método de optimización de Newton que consisten en mejorar de forma iterativa una configuración de parámetros, para encontrar la maximización de la densidad de probabilidad de una función objetivo

S, La función objetivo propuesta es producto de la combinación de la información petrofísica y de información sísmica. Los modelos petrofísicos que se aplicaron en este trabajo son: la transformada de Wyllie, Wood, modelo Mixto Arena-Arcilla y el modelo de Gassmann.

La construcción del sistema de ecuaciones está basada en la formulación descrita por Bosch (2003) para las ecuaciones normales del método de Newton. Para dicha estructura se desarrollaron los cálculos para la matriz de derivadas parciales de los datos respecto a las propiedades del reservorio, basada en las diferencias finitas centrales de las propiedades elásticas respecto de cada propiedad de reservorio y sujeta al modelo petrofísico seleccionado. También se desarrollaron rutinas para el cálculo de las transformadas petrofísicas.

En esta Investigación fue necesario utilizar trabajos anteriores realizados en el Laboratorio de Simulación e Inversión Geofísica de la UCV. Del trabajo de Torres (2007) se utilizaron las rutinas de cálculo de coeficientes de reflexión mediante las ecuaciones de Zoeppritz para onda sísmica incidente P y simulación de traza sísmica mediante la convolución; también se utilizó las rutinas del cálculo de la matriz de las derivadas parciales de la data sísmica respecto a los parámetros elásticos del medio, necesarias para la construcción del sistema de ecuaciones.

Del trabajo de Tirado (2008), se utilizó el método de simulación geoestadística multivariable desarrollado para calcular las matrices de covarianza y de correlación, tanto en las propiedades elásticas y de reservorio respectivamente necesarias para la construcción del sistema de ecuaciones. También se aplicó el desarrollo de modelos petrofísicos como la transformada del modelo mixto Arena-Arcilla, Wyllie-Wood y la relación de Gassman.

En el presente trabajo, los parámetros del modelo petrofísico como: la velocidad de la onda P, velocidad de la onda S y densidad de la matriz arcilla y arena respectivamente fueron calibradas respecto a la relación de Wyllie-Wood y la relación de Gassman con su respectiva comparación con los registros de pozo.

La técnica se validó con datos sintéticos y luego se aplicó a datos reales. Los datos sintéticos simulan una traza de amplitudes sísmicas generadas a partir de saturaciones, porosidades y contenidos de arcilla de la configuración denominada configuración de prueba. Para validar la técnica se calcularon los coeficientes de correlación de la configuración de prueba con respecto a la configuración previa generado por la inversión. En ambas fases de validación se desarrollaron los cálculos de incertidumbre y la resolución geofísica los cuales permiten cuantificar la importancia relativa de la información geofísica en la estimación del parámetro.

Posteriormente se aplicó el algoritmo desarrollado a datos reales pertenecientes a un yacimiento gasífero. Los datos suministrados constan de tres perfiles de amplitudes sísmicas para apilados de ángulo cercano, medio y lejano respectivamente, además se cuenta con información de dos pozos ubicados dentro del área. Los resultados constan de las secciones de las seis propiedades, cálculos de los coeficientes de correlación de las propiedades generadas con los registros de pozo, cálculos estimados a partir de la inversión como los módulos elásticos que permiten conocer el medio.

Así mismo, estimamos la presión de poro, presión del esfuerzo efectivo basados en el método de Eaton y el principio de Terzaghi con el fin de garantizar exitosas perforaciones y medidas preventivas en la colocación de pozo desde la fase de exploración.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo General

Desarrollar modelos petrofísicos y geofísicos adecuados para estimar la porosidad, saturación de agua y contenido de arcilla a partir de datos sísmicos de reflexión con una técnica de inversión basada en métodos de optimización.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Desarrollar modelos petrofísicos integrados, utilizando para ello el modelo mixto: determinista y estadístico
- Integrar las componentes de simulación petrofísica al método de inversión de datos sísmicos de apertura con optimización de mínimos cuadrados aplicando método Newton
- Validar esta técnica de inversión petrofísica y sísmica de apertura variable con datos sintéticos
- Aplicar esta técnica de inversión petrofísica y sísmica de apertura variable a un juego de datos de campo.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Petrofísica

La petrofísica es una rama de la geología cuyo propósito fundamental es el estudio de las propiedades físicas de las rocas y de los fluidos presentes en ellas a través del análisis de perfiles de pozo y muestras de núcleos, con el único fin de proveer información sobre la prospectividad de un área determinada (Schlumberger, 2005).

2.1.1. Porosidad

Es el espacio poroso por unidad de volumen de roca; en otras palabras, es la fracción del volumen total de una muestra que se encuentra ocupada por espacios vacíos. Se conocen dos tipos de porosidad: efectiva y total, siendo la porosidad total aquella que considera el volumen total de los poros y la efectiva la que toma en cuenta únicamente aquellos poros que se encuentran interconectados y que contribuye al flujo de fluidos en un reservorio. La porosidad efectiva es típicamente menor que la porosidad total (Lárez, 2002).

2.1.2. Saturación de agua

Es la fracción de agua en un espacio poroso. Generalmente se expresa en volumen/volumen ó porcentaje. La saturación de agua es la fracción de agua de formación (agua connata) en la zona virgen; a ésta se le conoce como saturación total de agua, si el espacio poroso referido es la porosidad total y se le denomina saturación de agua efectiva si se refiere a la porosidad efectiva. Si el término se emplea sin ningún calificativo, se suele referir a la saturación de agua efectiva (Schlumberger, 2005).

2.1.3. Volumen de arcilla

Indica el grado de arcillosidad presente en un volumen de roca. Es importante el conocimiento del volumen de arcilla presente en arenas, ya que a medida que se hace mayor, disminuye la calidad de la roca como reservorio (Schlumberger, 2005).

2.2. Ondas sísmicas

Las ondas sísmicas (u ondas elásticas) son la propagación de perturbaciones temporales del campo de esfuerzos que generan pequeños movimientos en un medio. Las ondas sísmicas pueden ser generadas por movimientos telúricos naturales y además pueden ser generadas artificialmente mediante el empleo de explosivos o camiones vibradores (vibroseis). Existen dos tipos de ondas: las internas o de cuerpo y las ondas superficiales.

2.2.1. Ondas P o compresionales

Son ondas sísmicas de cuerpo en las que la dirección del movimiento de las partículas es la misma que la de propagación de la onda (o formando un ángulo de 180° con la misma), y son también llamadas ondas de compresión. La velocidad de las ondas compresionales V_p está relacionada con las constantes elásticas y la densidad (Dobrin 1961). El cálculo está descrito por la siguiente ecuación:

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \left(\frac{4}{3}\mu\right)}{\rho}} \quad (2.1)$$

2.2.2. Ondas S o transversales

Son también ondas sísmicas de cuerpo, pero el movimiento de las partículas en el interior del medio forma ángulo recto con la dirección de propagación de la onda. Como en este caso la deformación consiste esencialmente en un movimiento de cizalla, las ondas transversales son llamadas a veces ondas cortantes. La velocidad V_s de las ondas transversales depende de las constantes elásticas y de la densidad (Dobrin, 1961), denotado en la siguiente expresión:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} . \quad (2.2)$$

2.3. Coeficientes de reflexión

Las ecuaciones de Zoeppritz, resuelven el problema de repartición de energía de una onda P incidente en un medio semi-infinito, isotrópico, homogéneo y elástico, Considerando ondas planas y una interfase plana y uniforme entre los dos medios (González, 1999).

Aki y Richards (1980) hicieron uso de la continuidad de desplazamientos y continuidad de los esfuerzos en la interfaz de reflexión como condiciones de borde para resolver las ecuaciones de Zoeppritz, para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión como función del ángulo de incidencia, apoyándose en los parámetros de los medios elásticos (densidades, tipos de módulos y relación de Poisson), obteniendo como resultado ecuaciones complejas (Castagna 1993).

Cuando una onda P polarizada en un plano vertical incide oblicuamente sobre una interfase, con contraste de parámetros elásticos, ésta puede ser reflejada, transmitida o convertida en ondas S que se encuentran igualmente polarizadas en un plano vertical (figura N° 2.1).

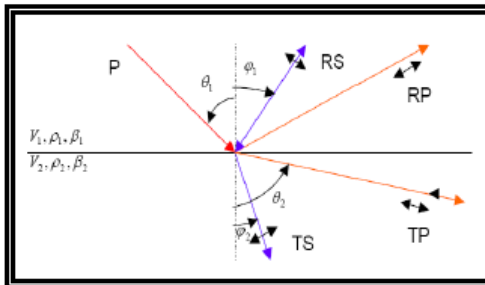


Figura 2.1: Rayos Reflejados, transmitidos y convertidos
Generados por un rayo P que incide oblicuamente sobre una interfase.
Con contraste de impedancia acústica. Tomada de: Cara (2005).

Tomando en cuenta sólo la incidencia de ondas P, existen dos casos de interés en los cuales este tipo de onda puede incidir. Un caso es cuando la onda P incide desde arriba y otro caso en la que incide desde abajo; el coeficiente de reflexión

no es igual en los dos casos y por lo tanto se producen diferentes combinaciones en la conversión de las ondas, como se puede apreciar en las figuras N° 2.2 y 2.3.

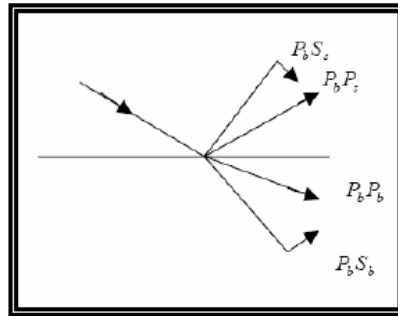


Figura 2.2 Conversión de onda P incidente desde arriba.
Tomada de Aki y Richard (1980)

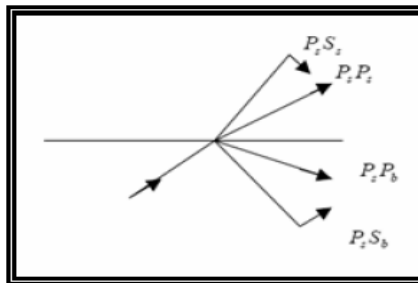


Figura 2.3 Conversión de onda P incidente desde abajo.
Tomada de Aki y Richard (1980)

$PbPs$: Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde arriba y onda P reflejada hacia arriba.

$PbSs$: Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde arriba y onda S reflejada hacia arriba.

$PbPb$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde arriba y onda P transmitida hacia abajo.

$PbSb$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde arriba y onda S transmitida hacia abajo.

$P_s P_s$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde abajo y onda P transmitida hacia arriba.

$P_b S S$: Coeficiente de transmisión de onda P incidente desde abajo y onda S transmitida hacia arriba.

$P S P_b$: Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde abajo y onda P reflejada hacia abajo.

$P S S_b$ Coeficiente de reflexión de onda P incidente desde abajo y onda S reflejada hacia abajo.

Según Aki y Richards (1980), estos coeficientes se calculan a través de las siguientes Ecuaciones:

$$P_b P_s = \frac{\left[\left(b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \right) F - \left(a + d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) H p^2 \right]}{D}. \quad (2.3)$$

Donde,

$$a = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2). \quad (2.4)$$

$$b = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1\beta_1^2 p^2. \quad (2.5)$$

$$c = \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2\beta_2^2 p^2. \quad (2.6)$$

$$d = 2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2). \quad (2.7)$$

$$E = b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} + c \frac{\cos i_2}{\alpha_2}. \quad (2.8)$$

$$F = b \frac{\cos j_1}{\beta_1} + c \frac{\cos j_2}{\beta_2}. \quad (2.9)$$

$$G = a - d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2}. \quad (2.10)$$

$$H = a - d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1}. \quad (2.11)$$

$$D = EF + GH p^2. \quad (2.12)$$

En las expresiones mostradas la velocidad de onda compresional se denota como α_1 para la primera capa y α_2 para la segunda capa, la densidad de la capa 1 denotado por ρ_1 y ρ_2 para la capa 2.

El ángulo de incidencia para la onda P i_1 para la capa 1 y el ángulo de las ondas reflejadas para las ondas S i_2 de la capa 1, el ángulo para las ondas compresionales transmitidas es β_1 y β_2 para las ondas S para la capa 2 respectivamente.

A incidencia normal, es decir en el caso de que la onda P incida perpendicularmente sobre la interface, el coeficiente de reflexión de onda P es:

$$P_{bs} = \frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1} \quad (2.13)$$

El valor de R oscila entre -1 y +1. Un valor negativo de R significa un cambio de Fase de (180°) en el rayo reflejado.

2.3.1. Aproximaciones de las ecuaciones de Zoeppritz

La inversión desde el punto de vista matemático de las ecuaciones de Zoeppritz, es complicada. Es por ello que se han desarrollado un conjunto de aproximaciones para facilitar su manipulación.

2.3.2. Aproximación de Aki & Richards (1980)

Para obtener la aproximación Aki & Richards se basaron en las siguientes

Suposiciones:

- Los cambios porcentuales de las propiedades elásticas del medio son pequeños.
- El coeficiente de reflexión en el caso de incidencia normal es pequeño.

Matemáticamente la aproximación se expresa a través de la siguiente ecuación:

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \theta \right) \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \theta \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad (2.14)$$

Donde $R(\theta)$ representa la amplitud de la onda P reflejada entre la amplitud de la onda Incidente.

2.3.3. Aproximación de Shuey (1985)

Shuey (1985) modificó la aproximación de Aki & Richards (1980), basándose en las siguientes suposiciones:

- Los cambios porcentuales en las propiedades elásticas ($\Delta\alpha/\alpha$, $\Delta\beta/\beta$, $\Delta\rho/\rho$) son pequeños respecto a la unidad.
- El coeficiente de reflexión en el caso de incidencia normal es pequeño. (<0.2)
- En el caso de que la velocidad de onda P de la capa suprayacente sea mayor los ángulos de reflexión deben ser menores a 80° . En el caso contrario los ángulos de reflexión deben ser menores que el ángulo crítico menos 10° .

En la siguiente expresión se denota dicha aproximación:

$$R(\theta) = R_0 + \left(A_0 R_0 + \frac{\Delta \sigma}{(1 - \sigma)^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} (\tan^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.15)$$

Donde:

$$\begin{cases} R_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \\ A = A_0 + \frac{1}{(1 - \sigma)^2} \frac{\Delta \sigma}{R_0} \\ A_0 = B + 2(1 + B) \frac{(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)} \\ B = \frac{\Delta \alpha / \alpha}{\Delta \alpha / \alpha + \Delta \rho / \rho} \end{cases} \quad (2.16)$$

En las ecuaciones anteriores σ representa la relación de Poisson y α la velocidad de onda P. La ecuación (2.13) considera en su primer término incidencia normal y

en el segundo y tercer término ángulos de incidencia menores a 30° y la aproximación de ángulo crítico.

En el caso de que los ángulos de incidencia sean mayores a 30° , la ecuación (2.15) se simplifica a:

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} (\tan^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (2.17)$$

Para ángulos menores a 30° , el último término de la ecuación (2.15) se puede despreciar y suponiendo $\sin^2 \theta \approx \theta$ se obtiene:

$$R(\theta) = R_0 + \left(A_0 R_0 + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2} \right) \theta = R_0 (1 + A\theta). \quad (2.18)$$

2.4. Teorema de Convolución

El Teorema de Convolución es uno de los resultados más importante del análisis de Señales y establece una relación fundamental entre la transformada de Fourier de la convolución entre dos señales, y el producto de las transformadas de Fourier de las señales individuales (Caicedo, 1996). De forma matemática se expresa a través de la siguiente relación:

$$F(f)F(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(v)f(u-v)e^{-i\omega(u)} du dv = \frac{1}{\sqrt{2}} F(f * g). \quad (2.19)$$

2.4.1. Convolución discreta

Cuando se realiza un procesamiento digital de señales, sólo es posible contar con valores discretos en determinados instantes de tiempo, por lo tanto no es posible utilizar de manera estricta la definición integral de la operación de convolución y se hace necesario emplear otro método como la convolución discreta (Cara, 2005).

Es importante destacar que el índice de comienzo de la convolución discreta es la suma de los índices de comienzo de las dos señales. De igual manera la duración de la convolución para señales de duración N y M es $N + M$ muestras (Cara, 2005).

2.4.2. Modelo convolucional de la traza sísmica

La simulación de los desplazamientos producidos en una estación, debido a la onda Sísmica que se propaga a través la de la estructura estratificada de La Tierra, se define como sismograma sintético y para generarlo se emplea, entre otros métodos, el modelo convolucional de la traza sísmica, el cual se describe a través la siguiente relación:

$$X(t) = W(t) * E(t) + N(t) \quad (2.20)$$

Donde $X(t)$ es la traza sísmica generada, $W(t)$ una ondícula fuente, $E(t)$ la serie de Reflectividad y $N(t)$ el ruido aleatorio que puede estar presente en la grabación. Según Yilmaz (1987), este modelo supone que:

- La Tierra está constituida por un conjunto de capas horizontales, con velocidad constante.
- La energía produce ondas compresionales, para el caso en que no se consideran las conversiones en la serie de reflectividad.

2.4.3. Ondícula fuente

La ondícula es un pulso unidimensional, usualmente es una respuesta básica de un reflector. Sus atributos claves son la amplitud, la frecuencia y la fase. La ondícula se genera como un paquete de energía de una fuente. Tiene su origen específico en tiempo y es tomada por los receptores como una serie de eventos distribuidos en tiempo y energía. Algunas ondículas son conocidas por su forma y contenido espectral, por ejemplo la ondícula Ricker de fase cero.

2.5. Consideraciones petrofísicas

Las propiedades petrofísicas del subsuelo tales como la porosidad, saturaciones de hidrocarburos, contenido de arcilla, entre otras, afectan de manera directa la respuesta generada mediante la sísmica de reflexión, es por ello que surge la necesidad de entender relaciones que vinculen las propiedades petrofísicas con las

propiedades elásticas del medio con el único fin de encontrar información de la sísmica (Modelo mixto arena-arcilla, 1995; Wyllie, 1956; Gassmann, 1951), así como también caracterizar los fluidos encontrados en los poros (Wood, 1941).

2.5.1. Modelo mixto arena-arcilla

El Modelo mixto arena-arcilla, propone una formulación para el cálculo de propiedades elásticas de rocas clásticas (mezclas de arena y arcilla) en base a las propiedades elásticas de cada componente y su proporción (arcillosidad). Estas relaciones de aspectos tienen que ver con los factores como la arcilla, cementación, fluido en relajación, presión efectiva, etc, que influyen directamente en la propagación de las ondas elásticas. La parte clave del modelo es la hipótesis de que la influencia de las arcillas en la propagación de las ondas elásticas es diferente al de las arenas, debido al comportamiento particular de la porosidad en cada una de ellas y a las relaciones de aspecto vinculadas (Kuster and Toksoz, 1974). La suma del volumen de poros asociados con los granos de arenas (Φ_s) y arcillas (Φ_c) respectivamente es igual al espacio poroso total del estrato (Mukerji, Mavko, Dvorkin, 1998), dicha relación esta expresada en la siguiente expresión:

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_c, \quad (2.21)$$

Se asume que Φ_s y Φ_c son directamente proporcional al volumen de los granos de arena y contenido de arcilla respectivamente. Por lo tanto las ecuaciones resultan:

$$\Phi_s = V_s \frac{\Phi}{1-\Phi}, \quad (2.22)$$

$$\Phi_c = V_{sh} \frac{\Phi}{1-\Phi}, \quad (2.23)$$

donde Φ se considera la porosidad total y es determinada mediante el uso de registros de pozo de porosidad o resistividad respectivamente (Xu and White, 1995). V_{sh} denota el volumen de arcilla adimensional, el cual puede ser determinado mediante los indicadores de arcilla o combinaciones de éstos.

Para evaluar la velocidad de las ondas elásticas en arenas arcillosas o arcillas arenosas, el tiempo de transito para la onda P u onda S en un estrato mixto puede ser evaluada mediante la ecuación para el tiempo de viaje; por lo tanto las ecuaciones resultan:

$$T_m^p = (1 - V'_{sh})T_g^p + V'_{sh}T_{sh}^p \quad (2.24)$$

$$T_m^s = (1 - V'_{sh})T_g^s + V'_{sh}T_{sh}^s \quad (2.25)$$

La densidad es estimada mediante la fórmula:

$$\rho_m = (1 - V'_{sh})\rho_g + V'_{sh}\rho_{sh} \quad (2.26)$$

T_g^p , T_{sh}^p y T_m^p son los tiempos de transito de la onda P de los granos de arena, minerales de arcilla y de la mezcla respectivamente. T_g^s , T_{sh}^s y T_m^s son los tiempos de transito para la onda S y ρ_g , ρ_{sh} y ρ_m son las densidades de masa correspondiente.

2.5.2. Transformada de Wood

La transformada de Wood es utilizado para poder mejorar y estimar tanto la velocidad compresional como la densidad del fluido, que representa dos parámetros necesarios para la aplicación de la transformada de Wyllie. El modulo de bulk de la mezcla del agua e hidrocarburo esta descrito por Wood (1941), dicho modulo se denota en la siguiente expresión:

$$\frac{1}{k_f} = \frac{S_w}{k_w} + \frac{1-S_w}{k_o} \quad (2.27)$$

donde k_f , k_w y k_o es el modulo del volumen efectivo del fluido, del agua de formación y del hidrocarburo respectivamente, S_w representa la saturación de agua.

La densidad del fluido de la mezcla está calculado por:

$$\rho_f = (S_w)\rho_{br} + (1 - S_w)\rho_{hidro}, \quad (2.28)$$

donde ρ_f , ρ_{br} y ρ_{hidro} representan densidad del fluido, del agua de formación y del hidrocarburo respectivamente, S_w representa la saturación de agua y Φ la porosidad.

En un fluido en suspensión o para la mezcla de un fluido, donde las heterogeneidades son muy pequeñas comparadas con la longitud de la onda, la velocidad del sonido está dada exactamente por la relación de Wood (1955), la siguiente expresión denota dicha relación:

$$V = \sqrt{\frac{k_r}{\rho}}, \quad (2.29)$$

donde K_r es el promedio de los compuestos:

$$\frac{1}{k_r} = \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{k_i}, \quad (2.30)$$

y la ρ es el promedio de la densidad definida por:

$$\rho = \sum_{i=1}^N f_i \rho_i, \quad (2.31)$$

las variables f_i , k_i y ρ_i son fracción de volumen, modulo de Bulk y densidades de las fases respectivamente.

Al considerar la ecuación (2.29) para calcular la velocidad compresional del fluido, mediante la combinación de la ecuación (2.28) y (2.27) se obtiene la siguiente expresión:

$$V_f = \left[\sqrt{(S_w \rho_{br} + (1 - S_w) \rho_{hidro}) \left(\frac{S_w}{V_{br}^2 \rho_{br}} + \frac{1-S_w}{V_{hidro}^2 \rho_{hidro}} \right)} \right]^{-1}. \quad (2.32)$$

Donde V_f , V_{br} y V_{hidro} son la velocidad del fluido, del agua de formación y del hidrocarburo respectivamente.

2.5.3. Transformada de Wyllie

La transformada de Wyllie establece una relación empírica entre la velocidad compresional y la porosidad de las rocas sedimentarias cuando: existe relativa

uniformidad en la mineralogía, la roca debe estar saturada de fluido y la roca debe estar sometida a altas presiones. La relación de Wyllie supone algunas consideraciones; una de ellas es considerar la roca como isotrópica, la utilización de rocas que se encuentren a profundidades mayores de 2700 m (equivalentes a una presión de 30 MPa si el gradiente de presión es 0,5 psi/ft); además considera que estamos ante rocas consolidadas y la porosidad obtenida será la porosidad intermedia (Mukerji et al., 1998). La relación para la velocidad compresional se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{V} = \frac{(1-\Phi)}{V_{\text{mat}}} + \frac{\Phi}{V_{\text{flu}}}. \quad (2.33)$$

Donde V , indica la velocidad de la onda compresional en la roca saturada, V_{flu} la velocidad de la onda en el fluido, V_{mat} la velocidad de la onda en la matriz rocosa y Φ la porosidad.

2.5.4. Modelo de Gassmann

Uno de los más importantes problemas en el análisis de la física de rocas en núcleos, registros y datos sísmicos es la predicción de velocidades sísmicas en rocas saturadas con un fluido ó rocas saturadas con un segundo fluido. Esto es lo que se conoce como el problema de sustitución de fluidos (Mukerji et al., 1998), denotado en la siguiente expresión:

$$\frac{K_{\text{sat}}}{K_0 - K_{\text{sat}}} = \frac{K_{\text{dry}}}{K_0 - K_{\text{dry}}} + \frac{K_{\text{fl}}}{\Phi(K_0 - K_{\text{fl}})}, \quad \mu_{\text{sat}} = \mu_{\text{dry}} \quad (2.34)$$

$$K_{\text{sat}} = K_{\text{dry}} + \frac{\left(1 - \frac{K_{\text{dry}}}{K_0}\right)^2}{\frac{\Phi}{K_{\text{fl}}} + \frac{1-\Phi}{K_0} - \frac{K_{\text{dry}}}{K_0^2}}, \quad (2.35)$$

donde K_{dry} , K_{sat} y K_{fl} es el módulo de volumen efectivo de la roca seca, de la roca con fluido en el poro y del fluido del poro respectivamente. K_0 Es el módulo de volumen del material mineral de la roca y Φ la porosidad. μ_{dry} Y μ_{sat} es el módulo de cizalla efectivo de la roca seca y de la roca con fluido en el poro respectivamente (Mukerji et al., 1998), denotado en la siguiente expresión:

$$K_0 = \rho \left(V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 \right), \quad (2.36)$$

donde V_p y V_s es la velocidad compresional y de cizalla respectivamente, y ρ es la densidad de masa,

$$K_{dry} = \rho V_p^2 (A - \Phi), \quad A=0.6 \quad (2.37)$$

donde Φ es la porosidad, A es la porosidad critica.

$$K_{flu} = V_{Pflu}^2 \rho, \quad (2.38)$$

donde V_{Pflu} es la velocidad de la onda compresional en el fluido y ρ la densidad de masa y K_{flu} es el modulo del volumen del fluido del poro.

Las ecuaciones de Gassmann asumen homogeneidad en el material mineral de la roca, isotropía del espacio poroso; por lo tanto el modelo es libre de asunciones acerca de la geometría de poros, la roca está completamente saturada de fluido y la ecuación es válida para frecuencias suficientemente bajas.

Debido al incremento de la presión del fluido del poro, este induce un esfuerzo a resistir a la deformación volumétrica. El radio de la presión de poro inducida dP , al aplicar un esfuerzo compresivo $d\sigma$, es también llamado *Skempton's coefficient* y puede ser escrito como:

$$\frac{dP}{d\sigma} = \frac{1}{1 + \phi \left(\frac{1}{k_{fl}} - \frac{1}{k_0} \right) \left(\frac{1}{k_{dry}} - \frac{1}{k_0} \right)^{-1}}. \quad (2.39)$$

Donde K_{dry} , K_{fl} es el módulo de volumen efectivo de la roca seca, modulo del volumen efectivo del fluido del poro respectivamente. K_0 Es el módulo de volumen del material mineral de la roca y Φ la porosidad (Mukerji et al., 1998).

2.5.5. Velocidad de Onda de Cizalla

Debido a que la transformada de Wyllie – Wood no permite estimar la velocidad de cizalla, necesaria para el modelo petrofísico central; es decir, el modelo mixto

de Arena-Arcilla, nos basamos en la definición para la velocidad de la onda S, la cual viene dada a través de la siguiente ecuación:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.40)$$

donde G es el módulo de cizalla de la roca y ρ es la densidad de masa total. En vista de que las ondas transversales (ondas S) no se propagan a través del fluido, el modelo empírico para el módulo de cizalla de la roca se describe de la siguiente manera:

$$G = (1 - \Phi)G_{\text{mat}}, \quad (2.41)$$

donde Φ es la porosidad total y G_{mat} es el módulo de rigidez de la matriz de roca descrito por la siguiente expresión:

$$G_{\text{mat}} = \rho_{\text{mat}} V_{s_{\text{mat}}}^2, \quad (2.42)$$

la densidad de la mezcla se denota en la siguiente ecuación:

$$\rho = (1 - \Phi)\rho_{\text{mat}} + \Phi\rho_{\text{flu}}, \quad (2.43)$$

donde ρ es la densidad total; es decir, la densidad de masa total que toma en cuenta la matriz de la roca y los fluidos que la conforman, ρ_{mat} es la densidad de la matriz de roca, ρ_{flu} la densidad del fluido presente en la misma y Φ la porosidad. Sustituyendo (2.41) y (2.43) en la ecuación (2.40) se obtiene la expresión para la velocidad de cizalla, que vincula las propiedades características a utilizar en este trabajo.

2.6. Resolución del problema petrofísico

2.6.1. Transformación de parámetros

En nuestra formulación se describirán las propiedades de reservorio; es decir, la porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua como propiedades logarítmicas. Esta transformación en las propiedades antes mencionadas es

conveniente, debido a que su forma convencional no obedece una distribución Gausiana, condición necesaria en el modelado Gausiano multivariable utilizado en este trabajo; por ende la descripción del medio estará en términos de propiedades logarítmicas. A continuación se muestra la ecuación para la transformación de las propiedades:

$$\psi^* = \text{Ln} \left(\frac{\psi}{(1-\psi)} \right), \quad (2.44)$$

donde ψ representa la propiedad convencional y ψ^* la propiedad logarítmica. Para generar campos gaussianos multivariados se aplica la técnica de la raíz cuadrada de la matriz de la covarianza.

$$\Phi^* = \bar{\Phi}^* + C_{\Phi^*}^{1/2} \Delta x, \quad (2.45)$$

$$Vsh^* = \overline{Vsh}^* + C_{Vsh^*}^{1/2} \Delta y, \quad (2.46)$$

$$S_w^* = \bar{S}_w^* + C_{S_w^*}^{1/2} \Delta z, \quad (2.47)$$

donde $\bar{\Phi}^*$, $\overline{Vsh}^*$ y $\bar{S}_w^*$ corresponden a la media de las propiedades, $C_{\Phi^*}^{1/2}$, $C_{Vsh^*}^{1/2}$ y $C_{S_w^*}^{1/2}$ son las raíces cuadradas de las matrices de correlación de la porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua logarítmica. Δx , Δy y Δz representan un arreglo de números derivados de manera independiente de una distribución Gausiana univariada de varianza unitaria y media cero.

El cálculo de la raíz cuadrada de la matriz de correlación se realizó mediante la aplicación del algoritmo de Cholesky, el cual consiste en construir una matriz inferior $\mathbf{L}$, que cumple:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{A}, \quad (2.48)$$

donde la matriz $\mathbf{L}$ se puede considerar como una raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{A}$. El algoritmo de Cholesky exige como condición que la matriz $\mathbf{A}$ sea simétrica y

positiva; dicha condición se cumple en las matrices de correlación de las propiedades.

Una vez obtenida una realización de porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua logarítmica respectivamente con el método antes descrito, se calcula las propiedades elásticas en cuestión a partir de éstas. Para ello se aplicó de forma separada los dos modelos petrofísicos integrados (Mixto-Wyllie-Wood y Mixto-Gassmann-Wood) Tirado (2008).

2.7. Geoestadística.

La geoestadística es una técnica geofísica, que proporciona una base formal para la descripción, simulación y estimación de la distribución espacial de propiedades de un medio; puede tratarse de propiedades físicas de las rocas como parámetros elásticos o eléctricos, parámetros materiales de un reservorio como por ejemplo las litologías, porosidades o parámetros que describan la geometría de las superficies entre fallas o formaciones (Bosch, 2006).

En este trabajo se busca caracterizar propiedades físicas y petrofísicas tales como la velocidad de la onda compresional (velocidad P), velocidad de la onda de cizalla (velocidad S), densidad de masa, porosidades, saturaciones y contenido de arcilla, de manera que es fundamental ahondar en detalle conceptos básicos de esta ciencia.

2.7.1. Variables Aleatorias

Las propiedades de reservorio y elásticas a considerar en este trabajo son ejemplos de propiedades continuas a lo largo de un volumen. A fines prácticos de simplificar el modelado de éstas, podemos describirlas como variables discretas donde $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, representan las coordenadas espaciales de la propiedad y $\mathbf{u} = \{u(x_1), u(x_2), u(x_3), \dots, u(x_N)\}$ denota el valor de la propiedad en cada uno de los puntos (Bosch, 2006).

Es importante destacar que para caracterizar los valores de las propiedades deseadas debemos suponer que no las conocemos de manera exacta, por lo que se describirán como variables aleatorias multidimensionales cuya forma rige a la distribución de probabilidad de cada una de ellas (Bosch, 2006).

2.7.2. Función de covarianza.

Mide la relación entre dos variables aleatorias. Dados los valores de dos variables, X_n y Y_n , en una población de N datos la covarianza se define como:

$$Cov(U, V) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (u_n - \bar{u})(v_n - \bar{v}), \quad (2.49)$$

donde $Cov(U, V)$ es la covarianza entre las variables, $\bar{u}$ e $\bar{v}$ son los promedios de las variables U y V respectivamente, y N es el número de muestras.

Otro parámetro que es útil en el momento de realizar la caracterización estadística es la correlación que está intrínsecamente relacionada con la covarianza; y se define como la covarianza dividida entre la desviación estándar de cada variable:

$$Corr(U, V) = \frac{Cov(U, V)}{\sigma_u \sigma_v}, \quad (2.50)$$

donde $Corr(U, V)$ es la correlación entre las variables U y V , $Cov(U, V)$ es la covarianza entre las variables señaladas y σ_u y σ_v es la desviación estándar de las variables U e V respectivamente.

Cuando se tienen variables distribuidas espacialmente o temporalmente, podemos calcular la correlación y covarianza según sea la distancia h de separación entre ellas. Para cada distancia h habrá una covarianza, lo que define la covarianza como una función de la separación h entre los dos puntos del espacio.

2.7.3. Modelado de la función de covarianza

Para emplear las funciones de covarianza de los modelos estadísticos, se adoptan modelos paramétricos que se ajustan a la covarianza calculada

experimentalmente, esto se hace con el fin de reducir los errores asociados al limitado muestreo de los datos.

Los modelos más comunes para representar las funciones de covarianza son: el Gausiano, el exponencial, coseno amortiguado y el modelo independiente o nugget. Las combinaciones lineales de funciones de covarianza son una función de covarianza, lo que hace posible estructurar modelos mixtos, que puedan ajustarse a los datos, con un error más bajo.

2.7.3.1. Modelo independiente.

Este modelo considera que la covarianza es nula para distintas distancias entre los puntos (h), lo cual implica que la propiedad es estadísticamente independiente punto a punto. Expresándolo como una función:

$$C(h) = \begin{cases} C(0), & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

esta función hace posible realizar modelados de los efectos de covarianzas que tienen un rango de acción más pequeño que la discretización espacial disponible en el modelo (Bosch, 2006).

2.7.3.2. Modelo coseno amortiguado.

Es utilizado para modelar funciones que tengan un comportamiento cíclico amortiguado, se define por:

$$C(h) = C_0 \exp\left(\frac{-3h}{a_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi h}{a_1}\right). \quad (2.52)$$

2.7.3.3. Modelo exponencial.

Se utiliza para modelar cambios bruscos, por su alta pendiente cerca del origen y se expresa como (Bosch, 2006), denotado en la siguiente expresión:

$$C(h) = C_2 \exp\left(\frac{-3h}{a}\right). \quad (2.53)$$

2.7.3.4. Modelo Gausiano.

Este modelo está definido por dos elementos: el rango (a) y la covarianza para un desplazamiento nulo entre los puntos ($C0$). El rango indica el radio fuera del cual la covarianza es pequeña, inferior a $\exp[-3]$.

Se utiliza para modelar campos suaves (Bosch, 2006), denotado en la siguiente expresión:

$$C(h) = C_3 \exp\left(\frac{-3h^2}{a^2}\right). \quad (2.54)$$

2.7.4. Simulación Gausiana

Existen diversos métodos para generar realizaciones Gaussianas, sin embargo se explicará el método de la raíz cuadrada de la matriz de covarianza. Este método consiste en generar una secuencia o arreglo de números aleatorios entre 0 y 1, derivados de manera independiente de una distribución Gausiana univariada de desviación estandar unitaria, y multiplicar este arreglo por la raíz de la matriz de covarianza (Bosch, 2003). Si tenemos dos variables que se relacionan mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}^{1/2} \mathbf{y}, \quad (2.55)$$

donde $\mathbf{z}$ es una variable Gausiana de covarianza $\mathbf{C}$ y de media cero, tenemos que:

$$f(\mathbf{z}) = c \exp\left(-\frac{(\mathbf{z})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{z})}{2}\right), \quad (2.56)$$

si sustituimos la expresión (2.55) en la ecuación (2.56), podemos demostrar que dada, una variable aleatoria distribuida de manera Gausiana con matriz de covarianza $\mathbf{I}$ (la identidad); es decir, teniendo una muestra de valores Gaussianos independientes de desviación estándar unitaria, entonces la variable $\mathbf{z}$, es una variable Gausiana multivariada de matriz de covarianza $\mathbf{C}$ como puede verse a continuación:

$$f(\mathbf{z}) = c \exp\left(-\frac{\mathbf{y}^T (\mathbf{C}^{1/2})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{1/2} \mathbf{y}}{2}\right) = c \exp\left(\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{y}}{2}\right). \quad (2.57)$$

2.8. Inferencia Geoestadística

El objetivo fundamental de los métodos de inferencia geoestadística se fundamenta en describir el modelo de parámetros que caracteriza un área determinada; en nuestro caso particular, la propagación de las ondas sísmicas describe el medio material. Fijando los parámetros del modelo es posible definir la configuración particular del subsuelo. Las infinitas soluciones que resuelven este problema forman el espacio de parámetros.

El modelado del medio se realiza mediante la definición de probabilidades que describan el espacio de parámetros, a través de las funciones de densidad de probabilidad. Supongamos una densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{m})$, definida en un espacio de parámetros M , siendo $\mathbf{m}$ un arreglo de parámetros del modelo, la probabilidad de que la configuración verdadera del medio se encuentre en un subconjunto cualquiera del espacio de modelos $\Omega \subset M$, se calcula integrando la probabilidad de densidad sobre Ω , denotado en la siguiente expresión:

$$P = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{m}) d\mathbf{m} . \quad (2.58)$$

Por otra parte, la inferencia geoestadística toma en consideración la información del medio obtenida antes de la realización y procesamiento de las observaciones físicas del espacio de parámetros, este conocimiento acerca del medio es definido mediante la densidad de probabilidad previa. Luego de dichas observaciones, definiremos la densidad de probabilidad posterior sobre el espacio de parámetros, donde se observa la combinación de la información previa y los datos geofísicos, como se denota en la siguiente expresión:

$$\sigma(\mathbf{m}) = c L(\mathbf{m})\rho(\mathbf{m}) . \quad (2.59)$$

Donde $\sigma(\mathbf{m})$ es la densidad de probabilidad posterior, $\rho(\mathbf{m})$ la densidad de probabilidad previa, $L(\mathbf{m})$ la función de verosimilitud, c es la constante de normalización y $\mathbf{m}$ el arreglo de parámetros del modelo (Tarantola, 1987).

En este trabajo se analizará diferentes propiedades del subsuelo, las cuales vamos a describir de manera conjunta, estas variables las llamaremos físicas y materiales.

Las primeras se relacionan directamente con los datos geofísicos a través de su relación con las leyes físicas, mientras que las segundas son aquellas relacionadas indirectamente con la respuesta física del modelo, a través de su relación con las propiedades físicas de las rocas por medio de los modelos petrofísicos. Las porosidades, saturaciones, contenido de arcilla (propiedades materiales) y la velocidad P, velocidad S, densidad de masa (propiedades físicas) van a conformar los parámetros del modelo de manera conjunta; es decir $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{\text{fis}}, \mathbf{m}_{\text{geo}}\}$. Utilizando esta descripción del espacio de parámetros podemos reescribir la densidad de probabilidad previa conjunta mediante la siguiente ecuación:

$$\rho(\mathbf{m}) = \pi(\mathbf{m}_{\text{fis}} | \mathbf{m}_{\text{geo}}) \rho(\mathbf{m}_{\text{geo}}), \quad (2.60)$$

donde $\pi(\mathbf{m}_{\text{fis}} | \mathbf{m}_{\text{geo}})$ describe la densidad de probabilidad previa de los parámetros físicos, ésta refleja la dependencia de los mismos con respecto a los parámetros materiales del medio, e $\rho(\mathbf{m}_{\text{geo}})$ indica la densidad de probabilidad previa de los parámetros materiales del medio.

En la densidad de probabilidad previa de los parámetros materiales del medio, utilizamos el modelo Gausiano multivariado, definiendo una distancia a través de la norma cuadrática (Bosch, 2003), denotado a continuación por la expresión:

$$\|\mathbf{m}_{\text{geo}} - \mathbf{m}_{\text{geoprior}}\|^2 = (\mathbf{m}_{\text{geo}} - \mathbf{m}_{\text{geoprior}})^T \mathbf{C}_{\text{geo}}^{-1} (\mathbf{m}_{\text{geo}} - \mathbf{m}_{\text{geoprior}}), \quad (2.61)$$

donde $\mathbf{C}_{\text{geo}}$ es la matriz de covarianza que describe la variabilidad y correlación entre los parámetros materiales del medio, los elementos de la diagonal principal de esta matriz son la varianzas de cada parámetro e indican la variabilidad de las desviaciones del valor central del parámetro, los valores que no pertenecen a esta diagonal son las covarianzas e indican cómo se correlacionan cada par de parámetros en el modelo previo. $\mathbf{m}_{\text{geoprior}}$ es la configuración central o más probable de la información previa. Empleando esta norma la densidad de probabilidad previa de los parámetros materiales queda de la siguiente forma en atención al modelo Gausiano multivariado como:

$$\rho_{\text{geo}}(\mathbf{m}) = c \exp\left(-1/2\|\mathbf{m}_{\text{geo}} - \mathbf{m}_{\text{geo}}\|^2\right), \quad (2.62)$$

donde c es una constante de normalización, y $\rho_{\text{geo}}(\mathbf{m})$ es la densidad de probabilidad previa de los parámetros materiales.

De igual manera se utiliza un modelo Gausiano multivariado para describir la densidad de probabilidad previa de los parámetros físicos. Este término se define en atención a la información petrofísica que relaciona las condiciones materiales de las rocas con sus propiedades físicas, para ello consideramos una función de transformación de la propiedad material a la propiedad física (modelos petrofísico), $\mathbf{f} : \mathbf{m}_{\text{geo}} \rightarrow \mathbf{m}_{\text{fis}}$.

Reescribiendo la densidad de probabilidad previa de los parámetros físicos, tenemos:

$$\pi(\mathbf{m}_{\text{fis}} | \mathbf{m}_{\text{geo}}) = c \exp(-1/2\|\mathbf{m}_{\text{fis}} - \mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{geo}})\|^2), \quad (2.63)$$

hasta ahora se ha descrito por completo la densidad de probabilidad previa conjunta de los datos, la cual se compone como se mencionó anteriormente de una densidad de probabilidad que vincula las propiedades físicas del medio y además de una densidad de probabilidad que toma en consideración las propiedades materiales. A continuación se construirá la densidad de probabilidad posterior, el cual está definido de la siguiente manera:

$$\sigma(\mathbf{m}) = cL(\mathbf{m}_{\text{fis}})\pi(\mathbf{m}_{\text{fis}} | \mathbf{m}_{\text{geo}})\rho_{\text{geo}}, \quad (2.64)$$

donde $L(\mathbf{m}_{\text{fis}})$, es la función de verosimilitud, la cual depende únicamente de los parámetros físicos del medio ya que ellos están relacionados directamente con los datos geofísicos adquiridos; es decir, los parámetros físicos resolverán el problema geofísico deseado a través de una función $\mathbf{g} : \mathbf{m}_{\text{fis}} \rightarrow \mathbf{d}$. Se define entonces la función de verosimilitud para una configuración del modelo del

subsuelo, considerando que los errores debidos a la medición y cálculo de los datos son Gaussianos como:

$$L(\mathbf{m}) = \exp(-1/2 \|\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|^2), \quad (2.65)$$

donde $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ son los datos observados y la distancia cuadrática se define como:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|^2 = (\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}), \quad (2.66)$$

el término $\mathbf{C}_d^{-1}$ de la expresión anterior indica la matriz de covarianza de los datos que describen la variabilidad de los errores.

Sustituyendo los tres factores que componen la densidad de probabilidad posterior obtenemos:

$$\sigma(\mathbf{m}) = c \exp(-S), \quad (2.67)$$

donde S representa la media suma de las normas cuadráticas e indica que cada uno de los términos que la componen proporciona una medida del ajuste o proximidad del modelo a la información geofísica y geoestadística disponible (Bosch, 2003), denotado en la siguiente expresión:

$$S = 1/2 \|\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|^2 + 1/2 \|\mathbf{m}_{\text{fis}} - \mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{geo}})\|^2 + 1/2 \|\mathbf{m}_{\text{geo}} - \mathbf{m}_{\text{geoprior}}\|^2. \quad (2.68)$$

2.9. Las ecuaciones normales (método de Newton).

En los puntos minimales de la función objetivo el gradiente es nulo. Esta condición la usaremos para obtener las ecuaciones normales para el problema de inversión. Así, expandiendo el gradiente de la función S (Bosch, 2003), denotado en la siguiente expresión:

$$\nabla[\mathbf{m}_n+1] \approx \mathbf{H}(S)[\mathbf{m}_{\text{an}}] \Delta \mathbf{m} + \nabla S[\mathbf{m}_n], \quad (2.69)$$

e igualando el lado izquierdo de la igualdad a cero, obtenemos las ecuaciones normales de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(\mathbf{S}) [\mathbf{m}_n] \Delta \mathbf{m} = - \nabla \mathbf{S} [\mathbf{m}_n] . \quad (2.70)$$

En las dos últimas expresiones, $\Delta \mathbf{m}$ es el paso de optimización en el espacio de modelos, $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m}_n^{+1} - \mathbf{m}_n$, adecuado para minimizar la función $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}(\mathbf{S})[\mathbf{m}_n]$ es el Hessiano de $\mathbf{S}$ evaluado en la configuración vigente del modelo, y $\nabla \mathbf{S}[\mathbf{m}_n]$ es el gradiente de $\mathbf{S}$ evaluado en el modelo vigente. Resolviendo $\Delta \mathbf{m}$ en este sistema de ecuaciones lineales podemos calcular el paso óptimo para minimizar la función objetivo.

La expansión de primer orden del gradiente sería exacta si el gradiente fuera una función lineal en el espacio de parámetros, pero como esto en general no se cumple, la configuración actualizada, $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \Delta \mathbf{m}$, es usualmente una configuración más cercana al mínimo pero no la configuración mínima. Por eso el mismo procedimiento se vuelve a repetir iterativamente hasta la convergencia al mínimo.

Aquí multiplicamos del lado izquierdo el sistema de ecuaciones lineales por la matriz de covarianza del modelo previo, produciendo el sistema:

$$\underbrace{\mathbf{C}_m \mathbf{H}(\mathbf{S})[\mathbf{m}_n]}_{\text{curvatura}} \Delta \mathbf{m} = - \underbrace{\mathbf{C}_m \nabla \mathbf{S}[\mathbf{m}_n]}_{\text{dirección de máxima pendiente}} , \quad (2.71)$$

donde la matriz del lado izquierdo es la curvatura de la función objetivo, y el arreglo del lado derecho es la dirección de máxima pendiente. Después de insertar el término de curvatura en la expresión del Hessiano y de la matriz de covarianza conjunta, el sistema de ecuaciones toma la siguiente estructura triangular por bloques:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} + (\mathbf{C}_{\text{phys}|\text{mat}} + \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t) \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{m}_{\text{mat}} \\ \Delta \mathbf{m}_{\text{phys}} \end{pmatrix} = -\mathbf{C}_m \nabla S \quad (2.72)$$

En esta forma, la talla del sistema de ecuaciones lineales conjuntas para parámetros materiales y físicos se reduce a la de dos sistemas de ecuaciones menores, lo cual es conveniente para la resolución del mismo. La segunda línea en la última expresión es un sistema independiente de la primera línea, y que permite resolver $\Delta \mathbf{m}_{\text{phys}}$. Esta solución para el paso de actualización en los parámetros físicos, puede ser usada entonces para resolver $\Delta \mathbf{m}_{\text{mat}}$ en el sistema de la primera línea.

Haciendo las substituciones para la parte derecha del sistema con las expresiones para la dirección de máxima pendiente y la matriz de covarianza conjunta, el paso de optimización para los parámetros físicos del modelo es:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{m}_{\text{phys}} = \mathbf{b}, \quad (2.73)$$

$$\text{con } \mathbf{A} = \mathbf{I} + (\mathbf{C}_{\text{phys}|\text{mat}} + \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t) \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{G}, \quad (2.74)$$

$$\text{y } \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{mat}}) - \mathbf{m}_{\text{phys}}^n + \mathbf{F}(\mathbf{m}_{\text{mat_prior}} - \mathbf{m}_{\text{mat}}) + (\mathbf{C}_{\text{phys}|\text{mat}} + \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t) \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}}^n)). \quad (2.75)$$

Este sistema de ecuaciones puede resolverse por algoritmos convencionales (por ejemplo el método de triangularización de Gauss-Newton, o el método de Gradientes Bi-conjugados). Para la selección del método debe tomarse en cuenta que la parte izquierda de la matriz es en general no simétrica. Nótese que las dimensiones de este sistema son las mismas que las correspondientes a una inversión convencional – por lo que los cálculos no son significativamente más grandes – aunque la formulación incorpora información sobre las propiedades materiales y físicas del medio, y su interdependencia.

Para la actualización de los parámetros materiales del modelo la ecuación que se obtiene de la primera línea del sistema lineal conjunto, ecuación (2.76), es:

$$\Delta \mathbf{m}_{\text{mat}} = \mathbf{m}_{\text{mat_prior}} - \mathbf{m}_{\text{mat}}^n + \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t \mathbf{G}^t \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}}^n) - \mathbf{G} \Delta \mathbf{m}_{\text{phys}}). \quad (2.76)$$

Las expresiones (2.74, 2.75) y (2.76) proporcionan el paso de actualización del modelo para una iteración del proceso de optimización. Como el problema es no lineal, $\mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}})$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$ son dependientes del modelo vigente, es decir, de la iteración. El proceso iterativo puede resumirse como sigue,

1. Calcule $\mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}})$, $\mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{mat}})$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$ para el modelo vigente n
2. Resuelva el sistema de ecuaciones para obtener el paso de actualización de los parámetros físicos del modelo, expresión (2.74 y 2.75)
3. Calcule el paso de actualización de los parámetros materiales del modelo, formula (2.76)
4. Actualice los parámetros físicos y materiales del modelo y regrese al paso 1. Repitiendo este procedimiento hasta la convergencia.

2.10. Resolución de sistemas lineales.

2.10.1. Descomposición LU.

El método de descomposición LU del inglés Lower-Upper es una forma de factorización de una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior. Esta descomposición se usa en el análisis numérico para resolver sistemas de ecuaciones (más eficientemente) o encontrar las matrices inversas.

Supone que una matriz cuadrada, $\mathbf{A}$ puede describirse como el producto de otras dos matrices:

$$\mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{A}, \quad (2.77)$$

donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior y $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior. (Press et al., 1997). Esta descomposición se puede usar para resolver el sistema de ecuaciones, denotado con la siguiente expresión:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{L} \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{L} (\mathbf{U} \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (2.78)$$

resolviendo primero el vector $\mathbf{y}$ como:

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad (2.79)$$

y luego resolviendo:

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (2.80)$$

2.10.2. Descomposición de Cholesky

Es caso especial de la descomposición LU, que se emplea en matrices cuadradas positivas y simétricas. Esta descomposición construye una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ cuya transpuesta $\mathbf{L}^T$ sirve como la matriz triangular superior. Se puede escribir como:

$$\mathbf{L} \mathbf{L}^T = \mathbf{A}; \quad (2.81)$$

La matriz $\mathbf{L}$ se puede considerar como una raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{A}$. (Press et al., 1997).

2.11. Módulos elásticos

2.11.1. Módulo de Volumen (*Bulk modulus*).

Está asociado con los cambios de volumen que experimenta un material bajo la acción de esfuerzos (generalmente compresores) que actúan perpendicularmente a su superficie. No implica cambio de forma, tan solo de volumen Torres (2007). Denotado por la siguiente ecuación:

$$K_0 = \rho \left(V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 \right). \quad (2.82)$$

Donde K_0 es el modulo del volumen, ρ , V_p y V_s representan la densidad, velocidad compresional y la velocidad de la onda S respectivamente.

2.11.2. Módulo elástico transversal.

Está asociado con el cambio de forma que experimenta un material bajo la acción de esfuerzos cortantes. No implica cambios de volumen, tan solo de forma.

También se le llama módulo elástico tangencial y módulo elástico cortante:

$$\mu = \rho V_s^2. \quad (2.83)$$

Donde μ es el modulo elástico transversal, ρ es la densidad y V_s es la velocidad de la onda S.

2.11.3. Coeficiente de Poisson

Una constante elástica que es una medida de la compresibilidad del material perpendicular al esfuerzo aplicado, o la relación latitudinal a la deformación longitudinal. Esta constante elástica es el nombre de Simeón Poisson (1781 a 1840), un matemático francés (Schlumberger, 2005). El coeficiente de Poisson se puede expresar en términos de propiedades que se pueden medir en el campo, incluyendo la velocidad de las ondas P y S-ondas, como se muestra a continuación:

$$\nu = \frac{V_p^2 - 2 V_s^2}{2 (V_p^2 - V_s^2)} \quad (2.84)$$

Donde ν es el coeficiente de Poisson, V_p y V_s son las velocidades de la onda P y S respectivamente.

La relación de Poisson varía con la litología, la porosidad y el fluido contenido en el espacio poroso. Por ejemplo el intervalo de este parámetro para las lutitas oscila entre 0.30 y 0.40; para las areniscas acuíferas, entre 0.25 y 0.30; para las areniscas petrolíferas, entre 0.20 y 0.25; y para las areniscas gasíferas, entre 0.10 y 0.18.

Cuando la litología del yacimiento es constante, la información sobre la relación de Poisson permite diferenciar entre petróleo, gas y agua en formación (Alsos et al., 2002).

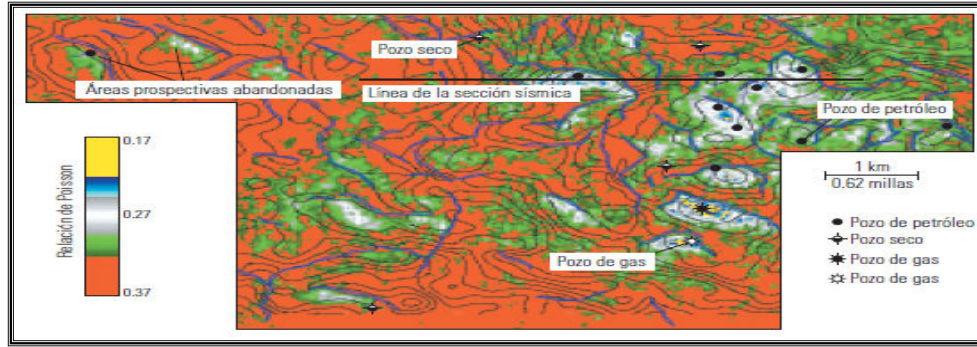


Figura 2.4. Mapa de la relación de Poisson. Se analizaron conjuntamente los datos de ondas P y ondas S para formar un atributo representante de la relación de Poisson del yacimiento. Tomado de (Alsos et al., 2002).

2.12. Formulación de la presión de poro por Eaton (1975).

2.12.1. Presión Geoestática:

Es la presión del peso de sobrecarga o la roca que cubre en una formación también llamada presión litostática (Schlumberger, 2005).

El esfuerzo de sobrecarga o litostático esta causado por la compactación fue descrito clásicamente en el libro de la mecánica de los suelos por Terzaghi y Peck (1948) dicha ecuación de equilibrio fue establecida:

$$S = \sigma + P , \quad (2.85)$$

las variables S , σ y P representan la presión Geoestática, la presión del esfuerzo efectivo y la presión de poro respectivamente expresadas en la unidad pascal.

Donde S incrementa con respecto a la profundidad y el fluido alojado en los poros no puede escapar, por ende soporta la carga litostática y genera aumento en la presión de poro. La presión del esfuerzo efectivo es denotada por σ .

Hubbert y Rubey publicaron un tratamiento comprensivo de esta teoría que relaciona la compactación de las rocas sedimentarias. Ellos explican que el esfuerzo de sobrecarga o litostático incrementa como resultado del enterramiento mientras la porosidad de la roca decrece. Por lo tanto el fluido alojado en los poros dado por el agua de formación, en muchos casos el fluido no logra escapar y por tal ese fluido comienza a sobrepresionarse de acuerdo a la ecuación

(2.85). Esto ocurre en muchas áreas generando zonas de sobrepresión que luego son llamadas zonas de presión anormal o zonas de geopresión.

Considerando las ecuaciones que indican la correlación entre registros de datos reales y medidas de presión son de la siguiente forma:

$$\frac{P}{D} = f \left(\frac{\text{Normal } R_{sh}}{\text{observada } R_{sh}} \right). \quad (2.86)$$

Donde P , D representan la presión de poro y la profundidad total. Mientras *normal* R_{sh} y *observada* R_{sh} representa la resistividad de la arena arcillosa,

$$\frac{P}{D} = f \left(\frac{\Delta t_{sh} \text{ observada}}{\Delta t_{sh} \text{ normal}} \right), \quad (2.87)$$

o

$$\frac{\text{Normal } R_{sh}}{\text{observado } R_{sh}} = f \left(\frac{P}{D} \right), \quad (2.88)$$

y

$$\Delta t_{sh} \text{ observada} - \Delta t_{sh} \text{ normal} = f \left(\frac{P}{D} \right). \quad (2.89)$$

Ahora al incorporar la teoría de Terzaghi, Peck, Hubbert y Rubey donde al aplicar la ecuación (2.85) y resolverla para P , cada una de las variables es dividida por la profundidad quedando de la siguiente forma:

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \frac{\sigma}{D}, \quad (2.90)$$

o

$$\frac{P}{D} = f \left(\frac{S}{D}, \frac{\sigma}{D} \right). \quad (2.91)$$

Donde P es la presión de poro, D es la profundidad total, S es la presión geostática, σ es la presión del esfuerzo efectivo.

Si al combinar la ecuación (2.91) con la ecuación (2.88) y separadamente con la ecuación (2.89) encontramos que los parámetros de los registros están en función de P/D , que a su vez están en función de S/D y σ/D (Eaton et al., 1975).

Una relación empírica fue desarrollada por Hottman y Johnson para predecir presiones anormales,

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - 0.535 \left[\frac{\text{observada Rsh}}{\text{normal Rsh}} \right]^{1.5}, \quad (2.92)$$

la ecuación (2.92) es reducida teóricamente por la ecuación (2.90) cuando asume que el gradiente geoestático es de 1.0 psi/ft, el radio de la resistividad equivale a 1.0 (presión normal), y el gradiente de la presión de poro normal equivale a 0.465 psi/ft.

$$\frac{P}{D} = 1 - 0.535 (1)^{1.5} = 0.465 \frac{\text{psi}}{\text{ft}}, \quad (2.93)$$

donde σ/D está representada por 0.535 psi/ft.

En términos simples la compactación de los sedimentos tiene una matriz de gradiente del esfuerzo equivalente al gradiente geoestática o de sobrecarga menos el gradiente de presión de poro normal.

El gradiente y la presión geoestática puede ser determinado al integrar la densidad de la mezcla total desde la superficie para una profundidad total medida. La relación esta descrita de la siguiente forma:

$$S = \bar{\rho} Z g \quad (2.94)$$

Donde,

ρ = Densidad promedio en kg/m³

g = aceleración de la gravedad m/s²

Z = Profundidad total en m.

S = Presión geoestática en Psi.

Al revisar las ecuaciones 2.85, 2.90, 2.92 y 2.93 nosotros podemos ver que las relaciones de la matriz del gradiente de presión de poro normal esta dado por:

$$\left(\frac{\sigma}{D}\right)_{normal} = \frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D}\right)_{normal} . \quad (2.95)$$

Esto también se muestra en la ecuación (2.92) para las situaciones de poro anormal, entonces la matriz del gradiente del esfuerzo aproximadamente queda así:

$$\left(\frac{\sigma}{D}\right)_{ANORMAL} = 0.535 \left[\frac{observada Rsh}{normal Rsh} \right]^{1.5} . \quad (2.96)$$

La constante de 0.535 en la ecuación (2.96) es realmente el gradiente de la matriz de esfuerzo cuando $S/D = 1$ psi/ft. Por lo tanto al introducir la ecuación (2.95) en la ecuación (2.96) y reemplazando 0.535 como la constante queda la siguiente forma:

$$\left(\frac{\sigma}{D}\right)_{ANORMAL} = \left[\frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D}\right)_{normal} \right] \left[\frac{R_0}{R_n} \right]^{1.5} . \quad (2.97)$$

Donde R_0 significa la resistividad observada en las arenas arcillosas y R_n significa la resistividad de prueba indicado por una línea de tendencia de compactación normal. Mientras P/D significa el promedio de los gradientes de presión de poro normal en formaciones de agua en un área. Este rango usualmente suele estar entre 0.434 psi/ft y 0.465 psi/ft de profundidad. Dicho valor para situaciones de presión normal está definido en la ecuación (2.93).

Entonces el gradiente de la presión de poro puede ser encontrado al igualar la ecuación (2.90) y ecuación (2.97), dicha combinación presenta la siguiente forma:

$$\left(\frac{P}{D}\right) = \frac{S}{D} - \left[\frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D}\right)_{normal} \right] \left[\frac{R_0}{R_n} \right]^{1.5} . \quad (2.98)$$

Finalmente queda:

$$\frac{P}{D} =$$

Gradiente de Presion de formacion
puede ser normal o anormal =

$$\frac{\text{psi}}{\text{ft}}$$

$$\frac{S}{D} - \left[\frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D} \right) \text{normal} \right] \left[\frac{R_0}{R_n} \right]^{1.2}.$$

Gradiente del
esfuerzo Geoestatico - matriz del Gradiente del
Esfuerzo puede ser normal o anormal

$$\text{Psi /ft} - \text{psi/ft} \quad (2.99)$$

También ha sido demostrado que los datos sísmicos y los registros sónicos son validos para calcular las magnitudes para la predicción de la Geopresión de la formación en unidades de psi/ft, para n=3.0 (Eaton et al., 1975), y dicha ecuación se presenta:

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \left[\frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D} \right) \text{normal} \right] \left[\frac{V_{\text{obs}}}{V_n} \right]^{3.0}. \quad (2.100)$$

P/D = equivale al gradiente de la presión de poro en psi/ft.

S/D= equivale al Gradiente Geoestático en psi/ft.

P/D normal= Presión de Poro normal en psi/ft.

V_{obs}= velocidad de la onda P observada en m/s.

V_n= velocidad P de la tendencia de compactación normal en m/s.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Se requiere describir de manera conjunta dos tipos de propiedades del modelo: elásticas y de reservorio. Las propiedades elásticas son aquellas relacionadas explícitamente con los datos a través de leyes físicas, en este caso el modelo resultante de la aplicación de transformadas petrofísicas respectivas. Las propiedades de reservorio, por el contrario, son aquellas relacionadas indirectamente con la respuesta física del modelo, a través de su relación con las propiedades elásticas (como por ejemplo saturación, contenido de arcilla y porosidad), es decir cualquier propiedad correlacionada con las propiedades elásticas.

Es importante aclarar la definición de la configuración del modelo de propiedades de reservorio utilizados en la validación de datos sintéticos y de los datos reales. Para la validación de datos sintéticos se considera la configuración denominada configuración de prueba a partir del cual se calculan los datos sintéticos que se utilizaran como “datos observados” en las pruebas de inversión, mediante la aplicación de los modelos petrofísicos integrados y su respectiva generación de sintéticos descritos en el desarrollo de esta sección.

También se utilizó una configuración previa que tiene por objeto definir el centro de la distribución previa para los campos de cada una de las propiedades de reservorio. Ambas configuraciones están en propiedades logarítmicas debido a las condiciones de simulación gaussiana

Para la validación de datos reales, se toma la sísmica de los datos observados directamente y se tomo las propiedades de reservorio correspondientes del contenido de arcilla y porosidad obtenidas de la resolución del problema

petrofísico desarrollado por Tirado (2008) en función de los datos reales de pozo y la propiedad de saturación fue propuesta como una constante de 0.94.

La Tabla N°3.1 lista los símbolos para las variables y operadores utilizados para la construcción del sistema de ecuaciones para la inversión.

Tabla 3.1 Símbolos básicos

Símbolo	descripción
$\mathbf{m}_{\text{phys}}$	arreglo de parámetros elásticos
$\mathbf{m}_{\text{mat}}$	arreglo de parámetros de reservorio
$\mathbf{m}_{\text{mat prior}}$	arreglo de parámetros de reservorio previo
$\mathbf{m}$	arreglo de parámetros del modelo conjunto
$\mathbf{d}_{\text{obs}}$	datos geofísicos observados
$\mathbf{d}_{\text{cal}}$	datos calculados
$\mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}})$	función que resuelve el problema geofísico directo
$\mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{mat}})$	función que obtiene las propiedades elásticas mediante la transformada petrofísica condicionada a la propiedad material
$\mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}}^n)$	función que resuelve el problema geofísico directo varía por iteración
$\mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{mat}}^n)$	Función que obtiene las propiedades elásticas mediante la transformada petrofísica condicionada a la propiedad material varía por iteración.
$\mathbf{G}$	el gradiente de $\mathbf{g}(\mathbf{m}_{\text{phys}})$
$\mathbf{F}$	el gradiente de $\mathbf{f}(\mathbf{m}_{\text{mat}})$
$\mathbf{C}_{\text{mat}}$	Matriz de covarianza previa para los parámetros de reservorio del modelo
$\mathbf{C}_{\text{phys/mat}}$	Matriz de covarianza previa para los parámetros elásticos del modelo
$\mathbf{C}_{\text{m}}$	Matriz de covarianza previa del modelo conjunto
$\mathbf{I}$	Matriz identidad
$\mathbf{0}$	Matriz nula
∇	Operador gradiente
$\mathbf{H}$	Operador hessiano
$\Delta \mathbf{m}$	Paso de actualización de los parámetros del modelo en la iteración $n+1$

3.1. Modelos Petrofísicos

El modelo petrofísico, que corresponde al modelo mixto de Arena-Arcilla se utiliza en este trabajo para estimar la velocidad P, velocidad S y la densidad de masa ya que éste modelo toma en consideración el contenido de arcilla que es una de las propiedades de reservorio a considerar y además éste modelo responde en parte a las condiciones de ambiente a la cual se encuentra sometida la zona a estudiar en este trabajo.

Para estimar las propiedades antes mencionadas es necesario conocer los valores de estas propiedades tanto en las arenas como en las arcillas; es por ello que se hace uso del modelo de Wyllie-Wood. El modelo de Wood se utiliza para caracterizar la velocidad compresional y la densidad en el fluido respectivamente; parámetros necesarios para el modelo de Wyllie.

El modelo de Wyllie es utilizado en este trabajo para estimar la velocidad P y la densidad de masa en las arenas y las arcillas respectivamente, además éste modelo toma en cuenta las otras dos propiedades de reservorio a estudiar, es decir, la porosidad y los fluidos presentes en la roca.

Por otra parte se utiliza el modelo de Gassmann para estimar de igual manera que en el modelo de Wyllie, el efecto de la porosidad en la velocidad de la onda compresional en las arenas y las arcilla respectivamente. Es por ello que en este trabajo se consideraran dos tipos de modelos petrofísicos integrados: el primero de ellos el modelo Wyllie-Wood y el segundo modelo definido como Gassmann.

Por otra parte se utiliza la definición de la velocidad S explicado en la sección 2.5 (velocidad de onda de cizalla) para estimar la velocidad de cizalla en las arenas y arcillas.

3.2. Problema directo

Para la generación del sintético de la configuración de prueba y la configuración previa es necesario resolver el problema directo el cual fue desarrollado de la misma manera que en el trabajo de Torres (2007) y Tirado (2008), el cual está adaptado al modelado de secciones de ángulo de incidencia constante. Contempla la elaboración de trazas sísmicas, las cuales se obtienen al realizar la convolución de la ondícula con la serie de reflectividad, como se ilustra en la Figura N° 3.1. Las ondículas a utilizar se extrajeron de datos reales de sísmica de reflexión mediante un programa desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Inversión Geofísica. Este programa utiliza métodos convencionales y aplica una regresión por mínimos cuadrados combinando la información de registros de pozo y de los datos sísmicos suministrados.

Los coeficientes de reflexión para la serie de reflectividad son calculados a través de la ecuación de Zoeppritz para la reflexión de onda P. En la figura N° 3.1 se muestra el diagrama para la generación de la traza sísmica.

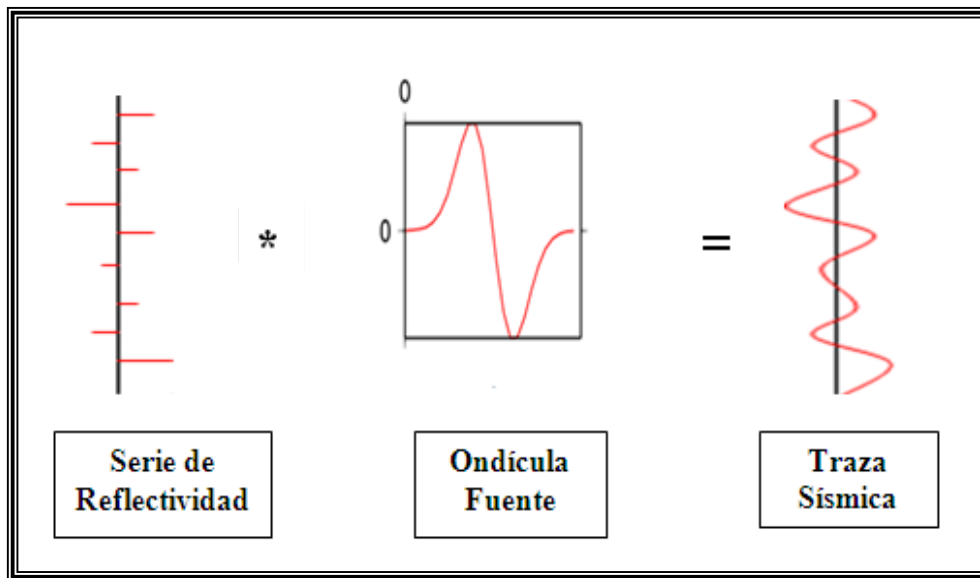


Figura 3.1. Diagrama para la generación de la traza sísmica.

En este trabajo se considera necesario mediante un diagrama de flujo indicar el proceso para la generación del sintético de la configuración de prueba y configuración previa aplicada en la validación de datos sintéticos. En la figura N° 3.2 se muestra el diagrama de flujo de dicho proceso.

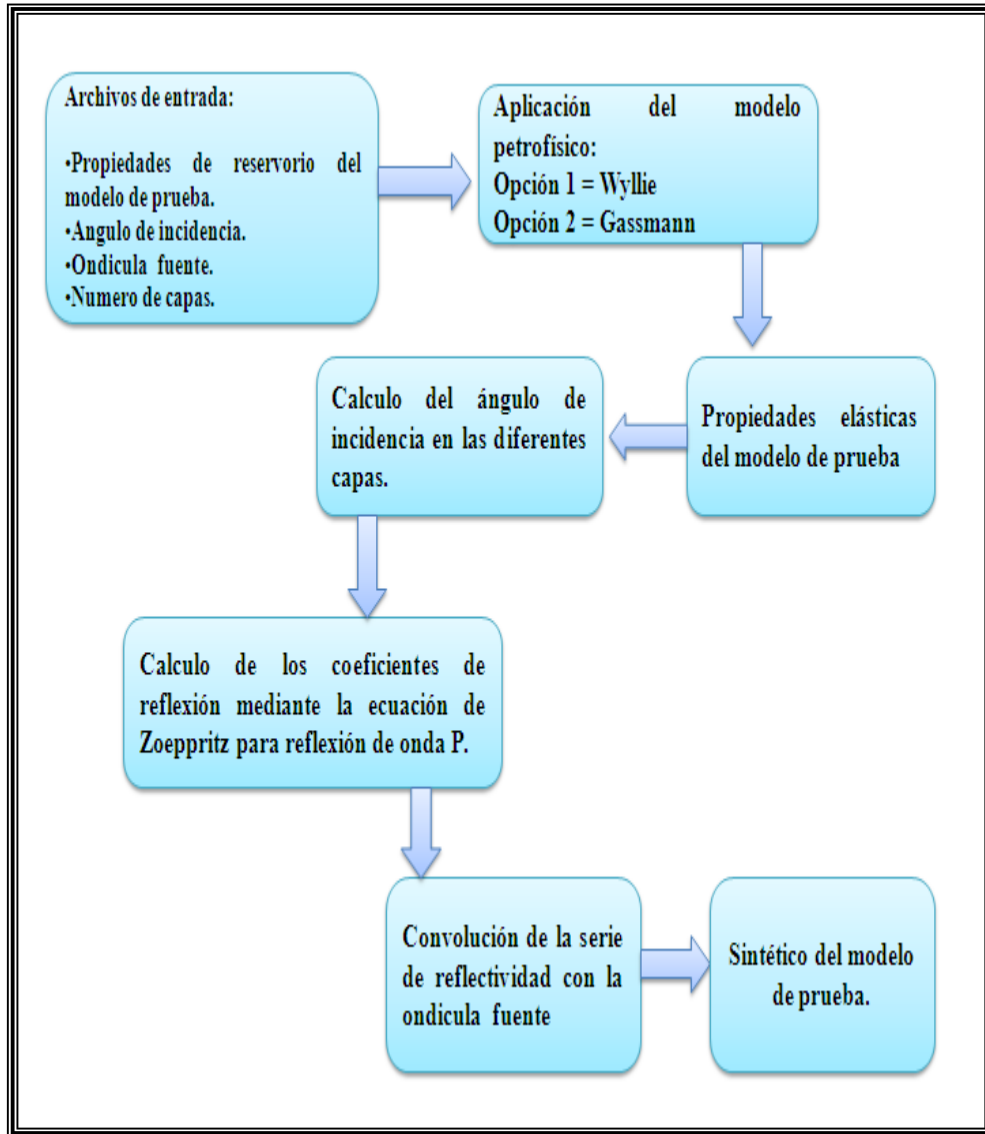


Figura 3.2. Diagrama de flujo de la generación del sintético de prueba.

Para la resolución del algoritmo de inversión parte de una configuración inicial de las propiedades de reservorio; esta configuración se corresponde con la configuración previa diseñada para la prueba. A continuación se muestra en la figura N° 3.3 el proceso para la generación de trazas sísmica de la configuración previa.

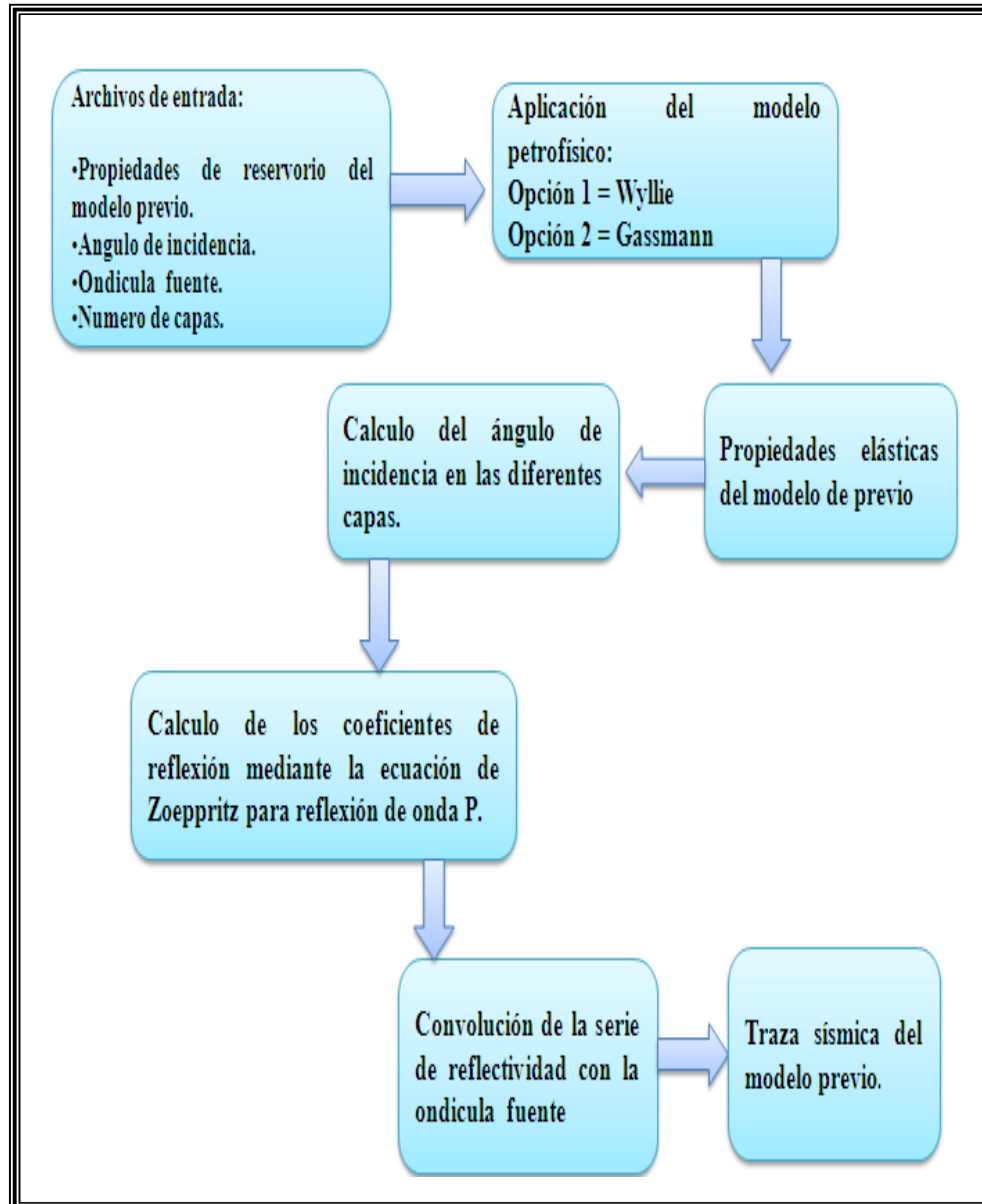


Figura 3.3. Diagrama de flujo de la generación de la traza sísmica de la configuración previa.

3.3. Aplicación de las diferencias finitas de la configuración conceptual

Para validar la aplicación de las derivadas numéricas para el cálculo de la matriz de derivadas parciales de los parámetros elásticos respecto a los parámetros de reservorio, que denotamos F en la ecuación (2.74). Se propuso una configuración conceptual para las propiedades de reservorio de entrada que se observa en la figura N° 3.4 y la respectiva aplicación de las ecuaciones (3.4, 3.5 y 3.6) derivadas de las propiedades elásticas respecto de las propiedades de reservorio y sujetos a la aplicación de los modelos petrofísicos integrados tal como Wyllie-Wood y Gassmann. Luego se selecciono la derivada numérica central y se compara con la derivada analítica de las mismas.

3.3.1. Diferencias finitas.

Una diferencia finita es una expresión matemática de la forma $f(x + b) - f(x + a)$. Si una diferencia finita se divide por $b - a$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales. La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central en los métodos de diferencias finitas del análisis numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales. Sólo se consideran normalmente tres formas: la anterior, la posterior y la central (Ames et al., 1977).

Ahora definido los siguientes operadores:

$$\Delta[f](x), \quad \text{Diferencia anterior} \quad (3.1)$$

$$\nabla[f](x), \quad \text{Diferencia posterior} \quad (3.2)$$

$$[f](x), \quad \text{Diferencia central} \quad (3.3)$$

una diferencia progresiva, adelantada o posterior es una expresión de la forma:

$$\Delta[f](x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (3.4)$$

Dependiendo de la aplicación, el espaciado h se mantiene constante o se toma el limite $h \rightarrow 0$. Una diferencia regresiva, atrasada o anterior es de la forma:

$$\nabla[f](x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h}. \quad (3.5)$$

Finalmente, la diferencia central es la media de las diferencias anteriores y posteriores. Viene dada por:

$$\delta[f](x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}. \quad (3.6)$$

3.4. Configuración conceptual

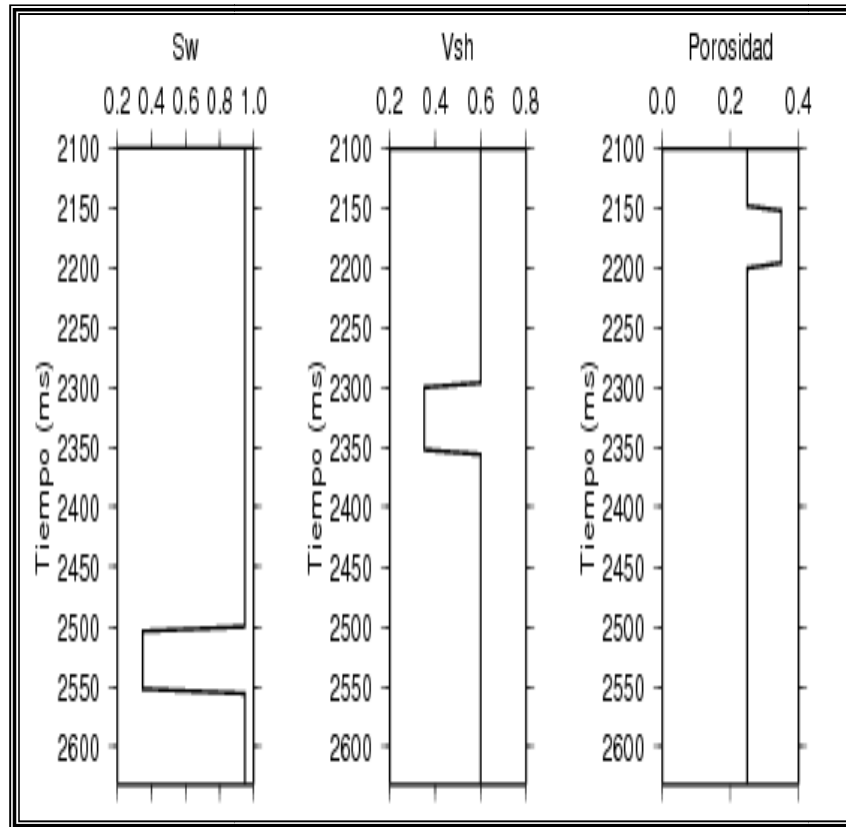


Figura 3.4. Configuración conceptual para las propiedades de reservorio

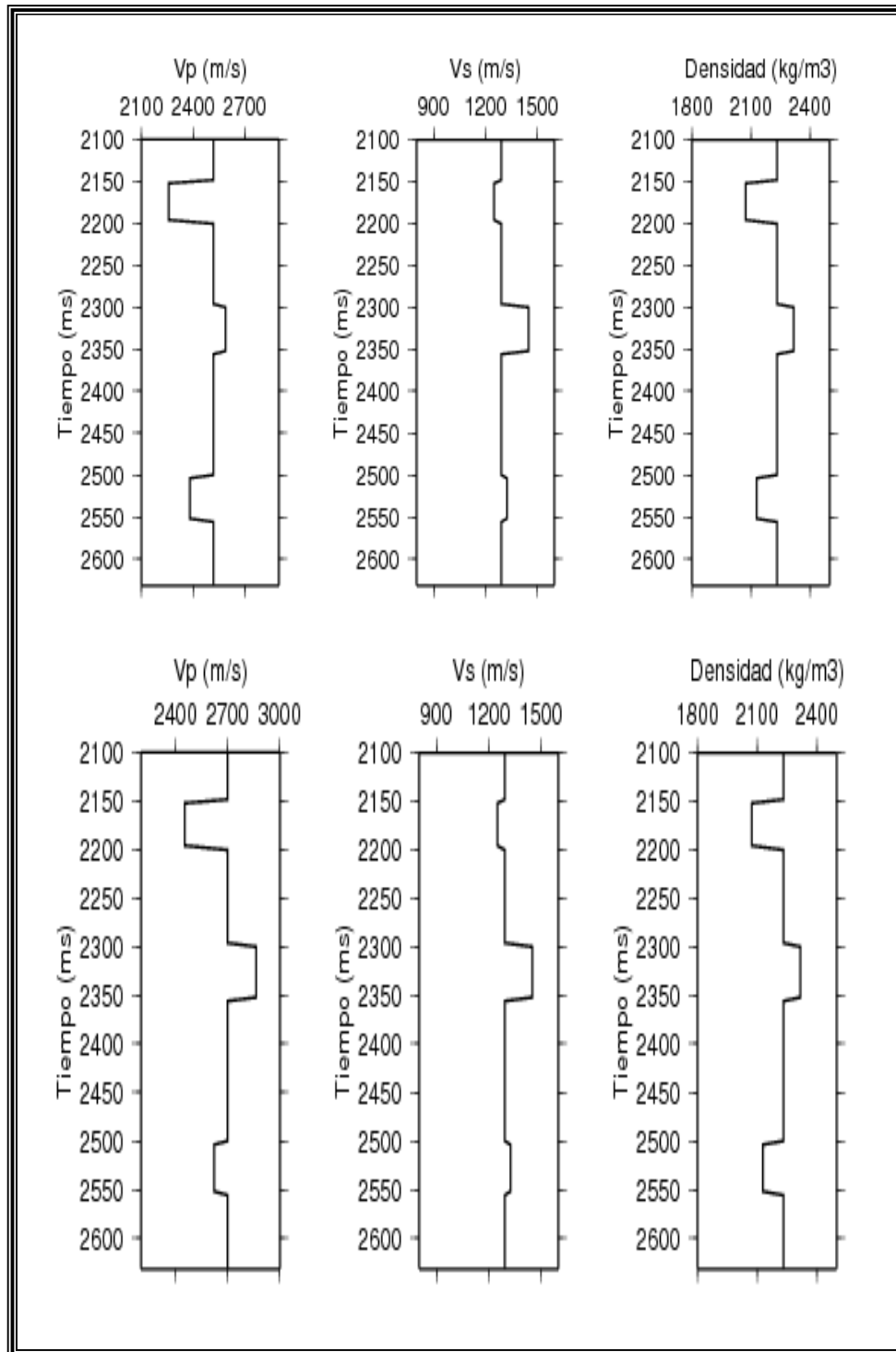


Figura 3.5. Configuración conceptual de las propiedades elásticas aplicando el modelo de Wyllie-Wood (arriba) y Gassmann (abajo).

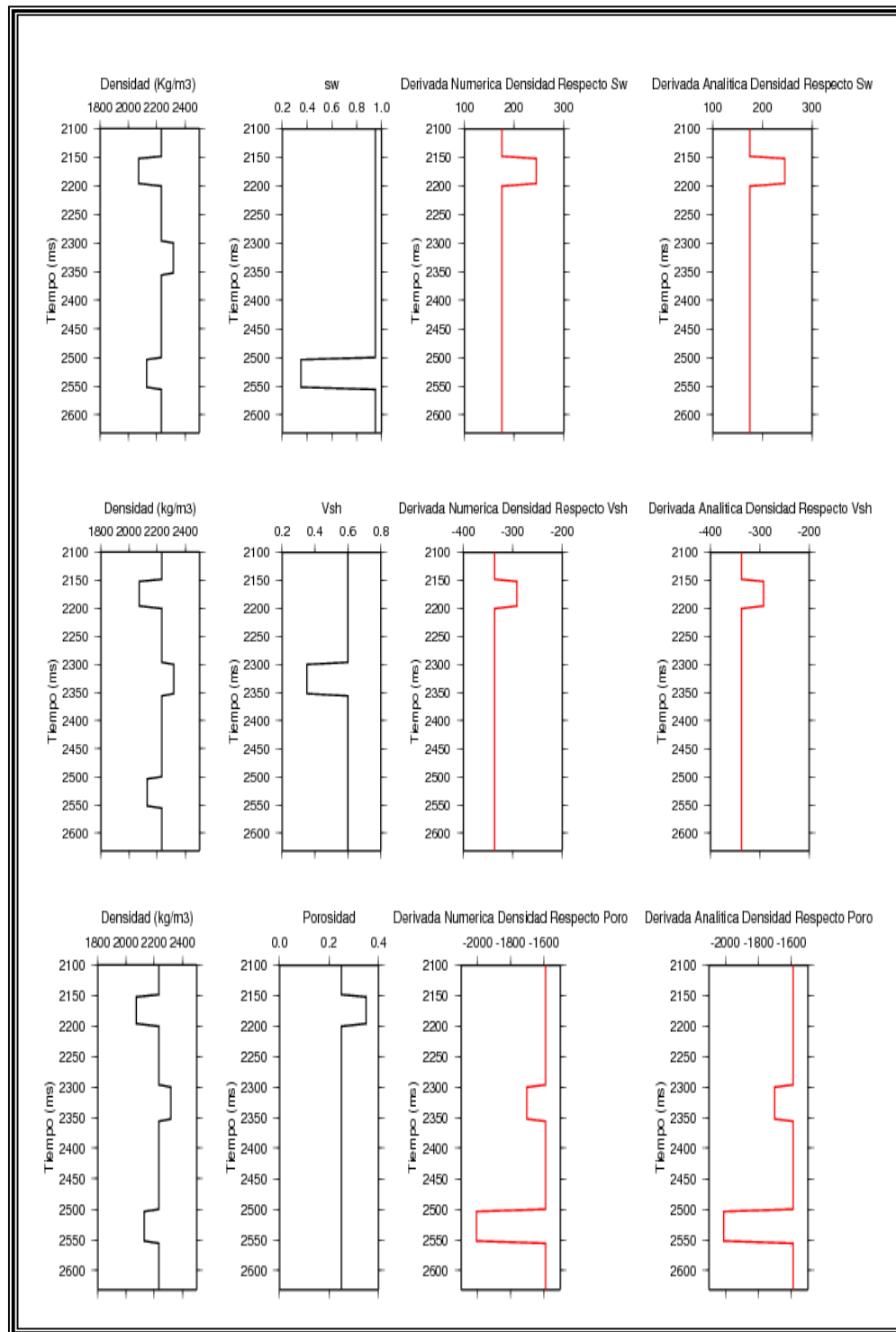


Figura 3.6. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la Densidad respecto de las propiedades de reservorio. Las derivadas de la densidad están expresadas en kilogramos por metros cúbicos.

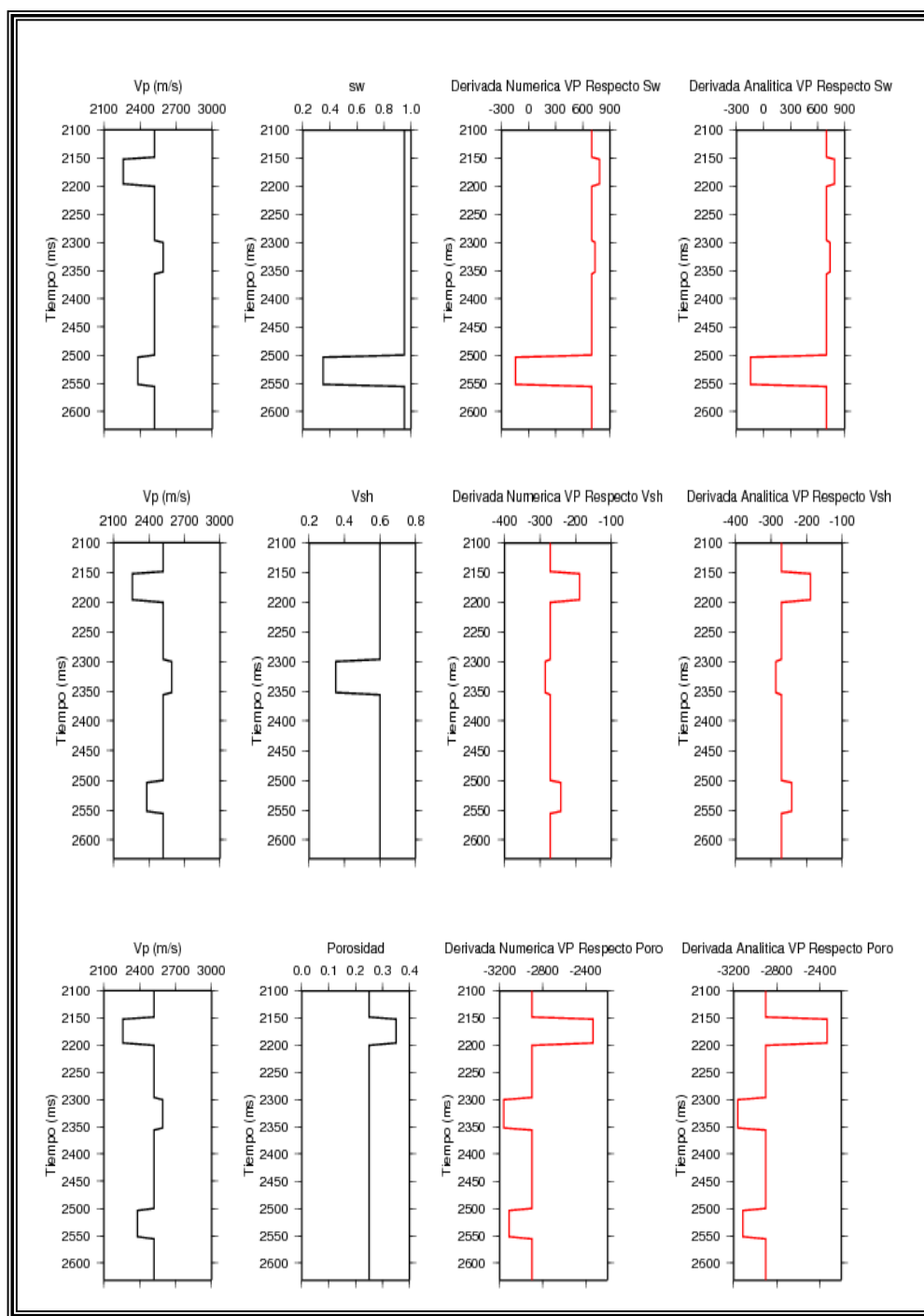


Figura 3.7. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Wyllie-Wood. Las derivadas de la velocidad compresional están expresadas en metros por segundo.

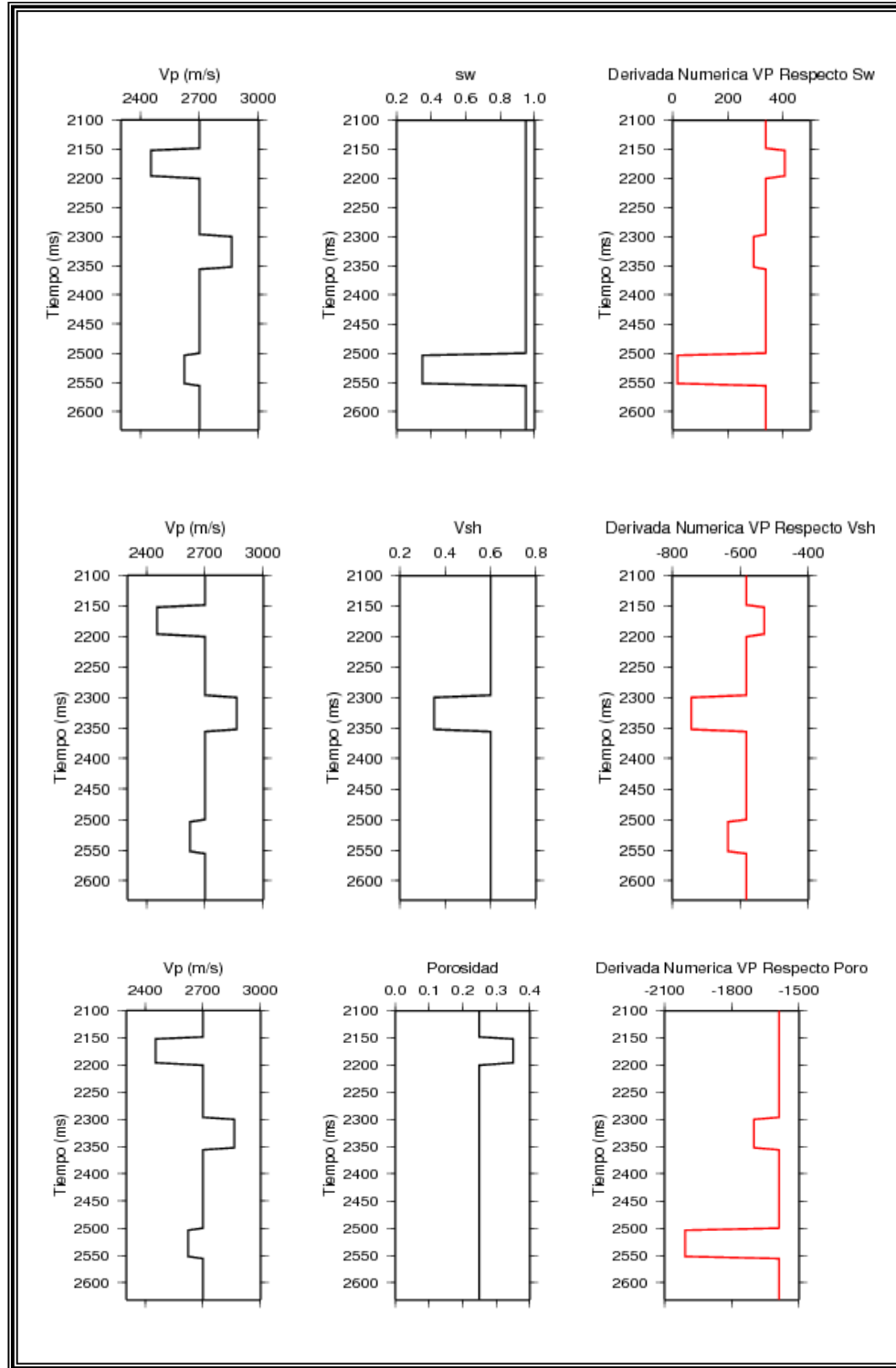


Figura 3.8. Comparación de la configuración conceptual y las derivadas numéricas centrales de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Gassmann. Las derivadas de la velocidad de la onda P están expresadas en metros por segundo.

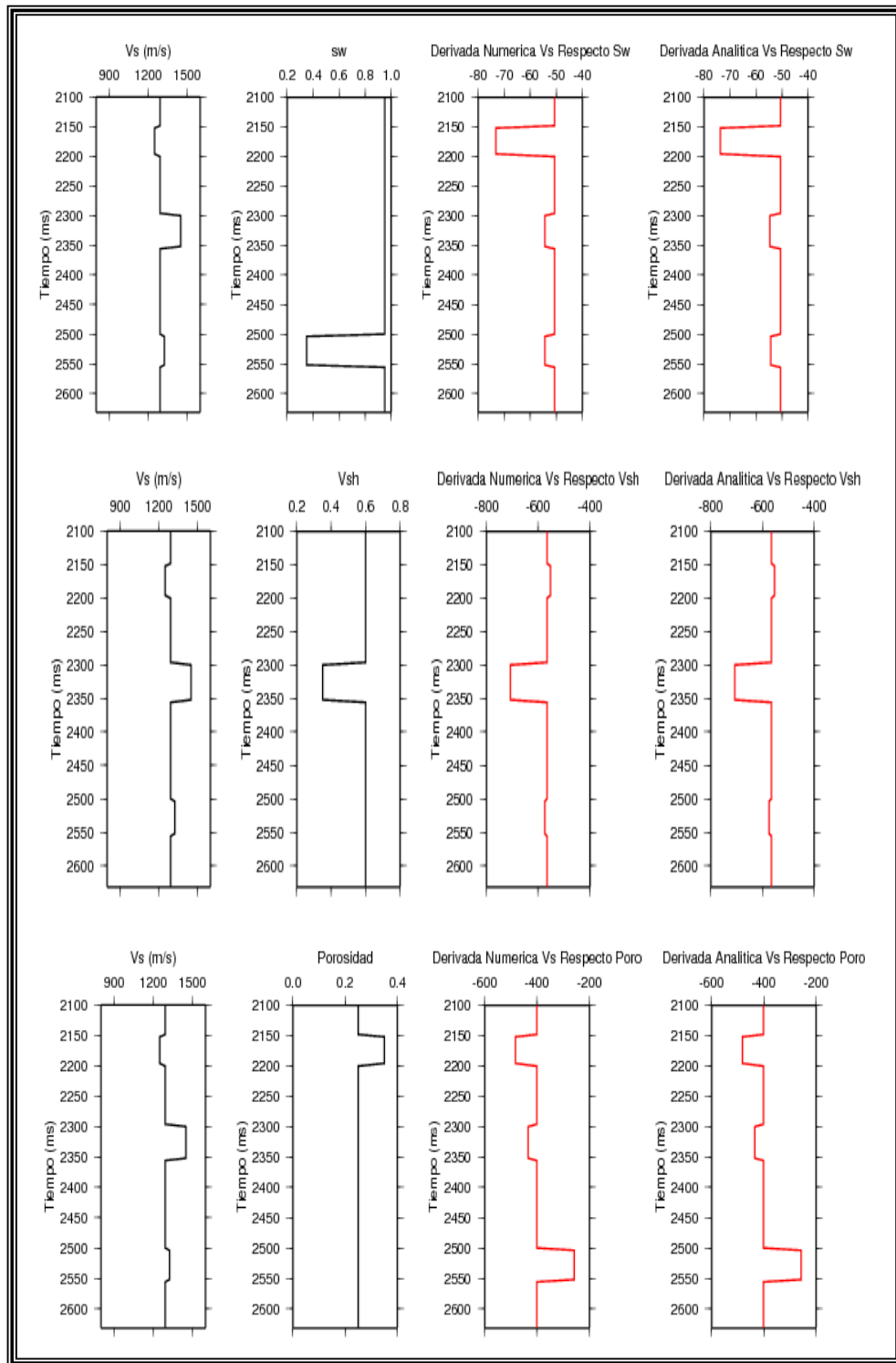


Figura 3.9. Comparación de la configuración conceptual, las derivadas numéricas centrales y analíticas de la velocidad de la onda S respecto de las propiedades de reservorio. Las derivadas de la velocidad de la onda S están expresadas en metros por segundo

3.5. Cálculo de la matriz F

La matriz **F** en la formulación de las ecuaciones normales (2.74), es la matriz de derivadas parciales de los parámetros elásticos respecto a los parámetros de reservorio. Esta contiene nueve derivadas de las propiedades elásticas respecto de las propiedades de reservorio logarítmicas. Dichas derivadas están representadas por las derivadas numéricas centrales demostradas previamente en la sección anterior. La dimensión de esta matriz es el triple, respecto al número de muestras que posee la ventana de tiempo elegida en la inversión (134 muestras).

3.6. Cálculo de la matriz G

Para la construcción de la matriz **G** de derivadas parciales de las amplitudes sísmicas respecto a los parámetros elásticos, necesaria en la formulación de las ecuaciones normales (2.74), se utilizaron las rutinas desarrolladas en el trabajo de Torres (2007). Son las derivadas de la onda sísmica respecto de las propiedades elásticas, que se obtienen mediante el cálculo de coeficientes de reflexión, para lo cual aplico las aproximación de Aki y Richards (1980), y la convolución con una ondícula fuente. En este trabajo es necesario describir el procedimiento aplicado mediante un diagrama de flujo indicado en la figura N° 3.10.

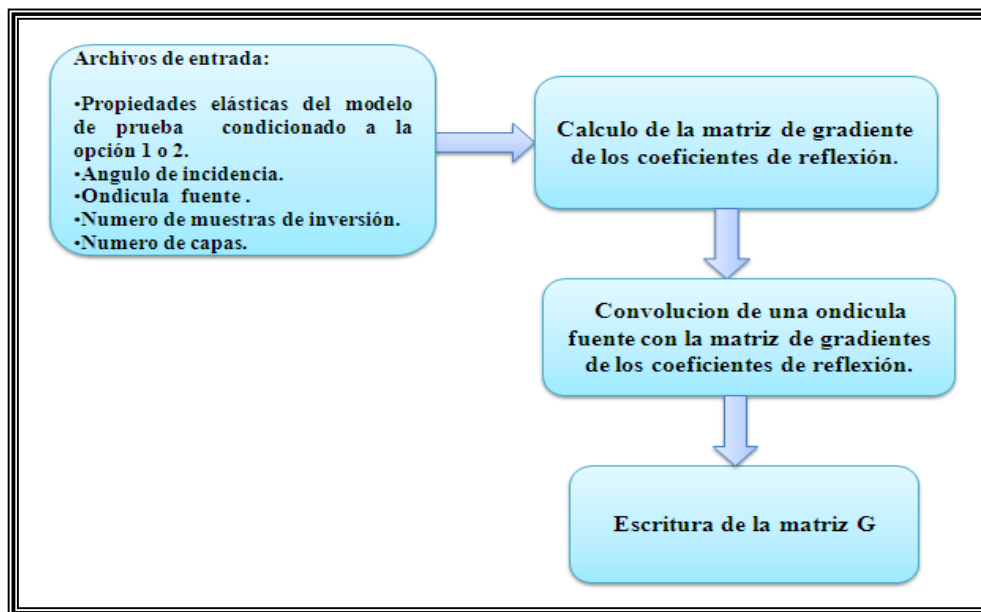


Figura 3.10. Diagrama de flujo del cálculo de la matriz G

3.7. Problema inverso

El problema inverso es resuelto aplicando el método de optimización, que consiste en mejorar de forma iterativa una configuración de parámetros, buscando la maximización de la densidad de probabilidad (minimización de la función objetivo). Para la construcción del sistema de ecuaciones se aplico las ecuaciones normales del método de Newton, descritas en el marco teórico.

El lado izquierdo y derecho del sistema de ecuaciones está basado en la ecuación (2.74) y (2.75) respectivamente. Luego para la resolución del sistema lineal se aplico el método de resolución del sistema lineal descrito en el marco teórico, siendo este un algoritmo convencional, en el cual la matriz del sistema de ecuaciones es descompuesta en el producto de una matriz triangular superior y otra triangular inferior, a partir de las cuales se despeja el paso de actualización, luego actualiza el modelo de las propiedades elásticas, se sustituye en el paso de actualización del modelo de propiedades de reservorio, dicha construcción está basada en la ecuación (2.76), actualiza el modelo de propiedades de reservorio, luego actualiza ambos modelos y logra minimizar la función objetivo conjunta hasta lograr la convergencia respectiva. A continuación en la figura N° 3.11 se muestra un diagrama de flujo de la resolución del problema inverso.

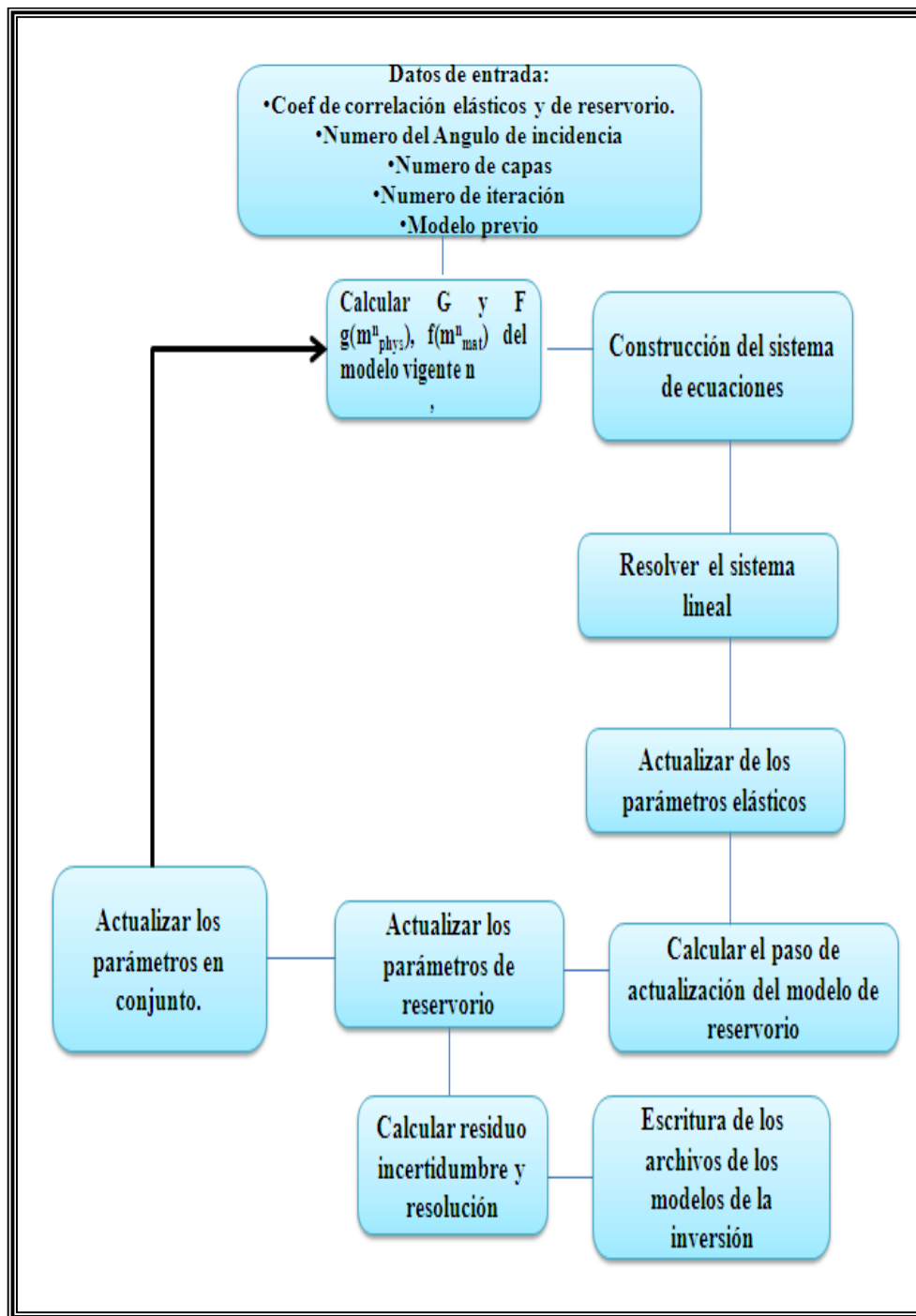


Figura 3.11. Diagrama de flujo de la resolución del problema inverso.

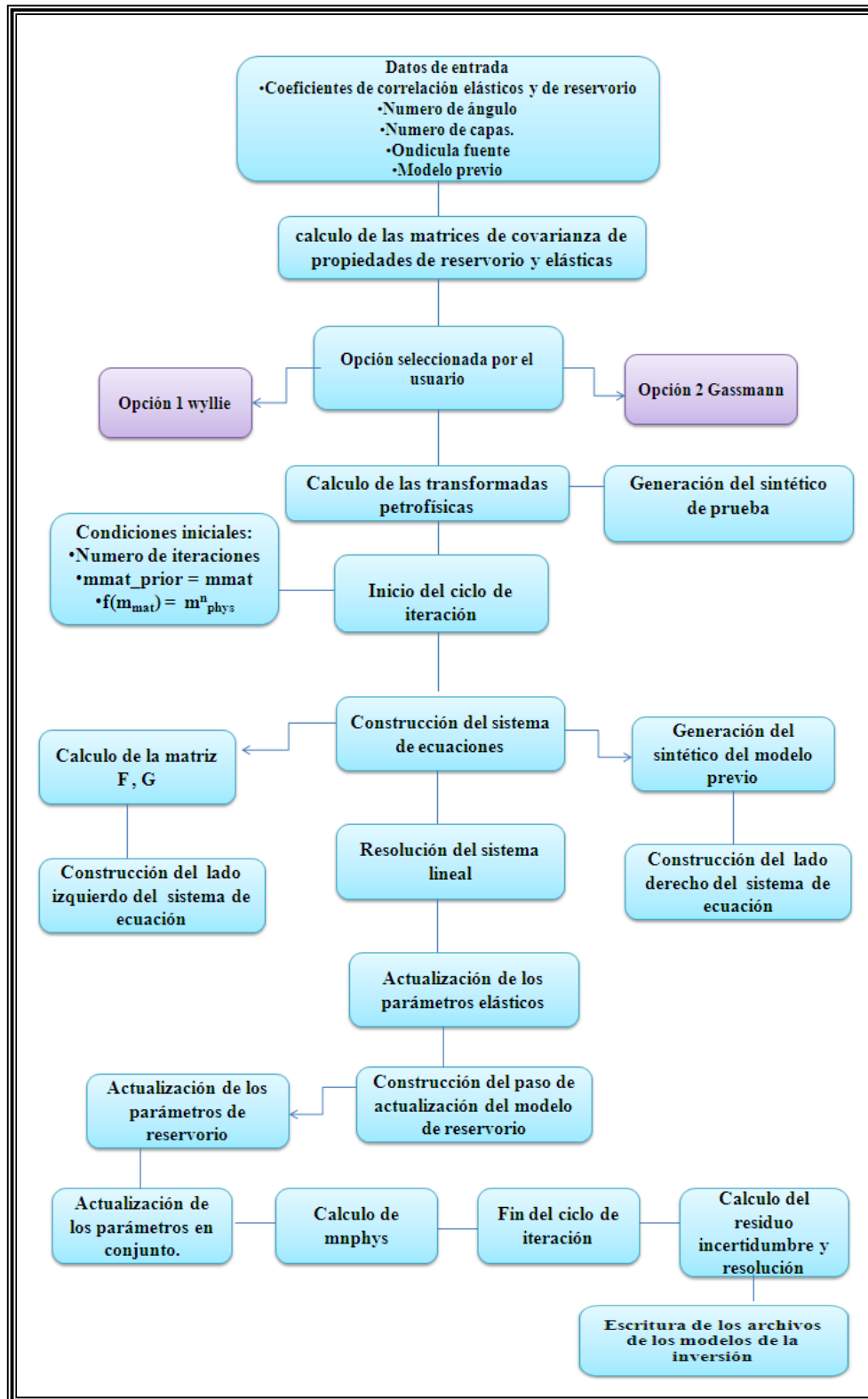


Figura 3.12. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión aplicado al caso sintético

3.8. Cálculo del residuo geofísico

El cálculo del residuo consiste en la comparación entre los datos observados y los datos sísmicos calculados. Por lo cual los modelos de porosidad, contenido de arcilla, saturaciones de agua, velocidad P, velocidad S y densidad de masa generados respectivamente explicaran el ajuste respecto de los datos geofísicos observados.

El residuo se calcula considerando el criterio de Chi-cuadrado cuya expresión es la siguiente:

$$\chi^2 = \frac{1}{N\sigma_d^2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{d}_i^{\text{obs}} - \mathbf{g}(\mathbf{m}_i))^2. \quad (3.7)$$

Donde N representa el número total de datos, y σ_d es la desviación estándar de los datos que fijamos para nuestras ejecuciones como la diferencia entre el rango máximo y mínimo de las amplitudes sísmicas por un factor inferior a la unidad. La expresión utilizada es la siguiente:

$$\sigma_d^2 = c(d_{\max} - d_{\min})^2. \quad (3.8)$$

Donde $d_{\max}$ y $d_{\min}$ es la amplitud máxima y mínima de la traza sísmica respectivamente, y c es una constante que es ingresada por el usuario e influye en la amplitud del modelo de los parámetros estimados. Típicamente para c utilizamos 0,05, es decir desviaciones estándar de los datos en 5% del rango máximo de amplitudes.

3.9. Cálculo de incertidumbre y resolución geofísica

Una vez obtenido el modelo resultante de la inversión para las 6 propiedades de la última iteración, se procedió a calcular los valores de incertidumbre y resolución geofísica con el propósito de cuantificar la influencia de la información de geofísica y previa en cada propiedad. Estos cálculos fueron realizados en ambas fases de validación del programa. La incertidumbre y la resolución de la

información geofísica fueron calculadas aplicando el procedimiento propuesto por Bosch (2005). Las ecuaciones utilizadas en dichos cálculos son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{\text{mod}_{\text{post}}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_{\text{m}} \\ \mathbf{R}_{\text{fis}} = (\mathbf{1} - \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{C}_{\text{m}}^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}_{\text{m}} \mathbf{H}(\mathbf{s})^{-1} \end{cases} \quad , \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz de la curvatura de la función objetivo, $\mathbf{C}_{\text{m}}$ es la matriz de covarianza previa conjunta, $\mathbf{C}_{\text{mod}_{\text{post}}}$ es la matriz de incertidumbre posterior al modelo y $\mathbf{R}_{\text{fis}}$ describe la influencia relativa de la información geofísica complementaria a la matriz de resolución de la información previa (su suma es igual a la unidad). La diagonal de la matriz de resolución geofísica esta en el rango $[0,1]$ y nos permite cuantificar la importancia relativa de la información geofísica en la estimación del parámetro: el valor 1 nos indicara que el parámetro está completamente determinado por la información geofísica y el valor 0 que está completamente determinado por la información previa.

Para la construcción de la matriz de covarianza previa conjunta se basa en la ecuación (3.10) y la ecuación (3.13) indica la matriz de la curvatura de la función objetivo. Dichos cálculos son procedimientos propuestos por Bosch (2003):

$$\mathbf{C}_{\text{m}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{mat}} & \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t \\ \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} & \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t + \mathbf{C}_{\text{phys/mat}} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.10)$$

Dicha curvatura de la función objetivo-matriz a la izquierda de la igualdad en la ecuación (2.71) – está dada por $\mathbf{C}_{\text{m}} \mathbf{H}(\mathbf{S})$, una manera rápida de obtener una expresión compacta del producto anterior es primero expresando el Hessiano de $\mathbf{S}$ en términos de $\mathbf{C}_{\text{m}}$ Bosch (2003):

$$\mathbf{H}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}_{\text{m}}^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{\text{d}}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.11)$$

Entonces la curvatura es:

$$= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{mat}} & \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t \\ \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} & \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t + \mathbf{C}_{\text{phys/mat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{\text{d}^{-1}} \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{C}_m \mathbf{H}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{\text{d}^{-1}} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} + (\mathbf{C}_{\text{phys/mat}} + \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{mat}} \mathbf{F}^t) \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{\text{d}^{-1}} \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

3.10. Datos Reales

El código de programación fue validado con datos de un yacimiento gasífero, que se caracteriza por estar inmerso en un estrato de arena de secuencia clástica. Los datos suministrados constan de tres secciones de sísmica de reflexión apilada a ángulo cercano ($10^\circ - 18^\circ$), medio ($19^\circ - 36^\circ$) y lejano ($37^\circ - 45^\circ$); además se cuenta con información de dos pozos ubicados dentro de la zona en el CDP número 6 y 309 respectivamente. La información de los parámetros de adquisición está contenida en la Tabla N° 3.2.

Tabla 3.2. Encabezado de los datos sísmicos.

Intervalo de la sísmica	2 ms
Número de CDP	321
Distancia entre CDP	25 m
Cobertura	1
Tiempo inicial	2000 ms
Tiempo final	3000 ms

Para dichos datos reales se seleccionó una ventana de tiempo de 536 ms y un suavizado de las propiedades de 4ms para aplicar el programa, la escogencia de la ventana antes mencionada se debe a la existencia del yacimiento de gas dentro de

ésta. Cabe destacar que para la convolución se debe tener en cuenta la ondícula a utilizar ya que es diferente según el apilado. A continuación se muestra las tres ondículas utilizadas en este trabajo y las secciones sísmicas obtenidas según los rangos de ángulos.

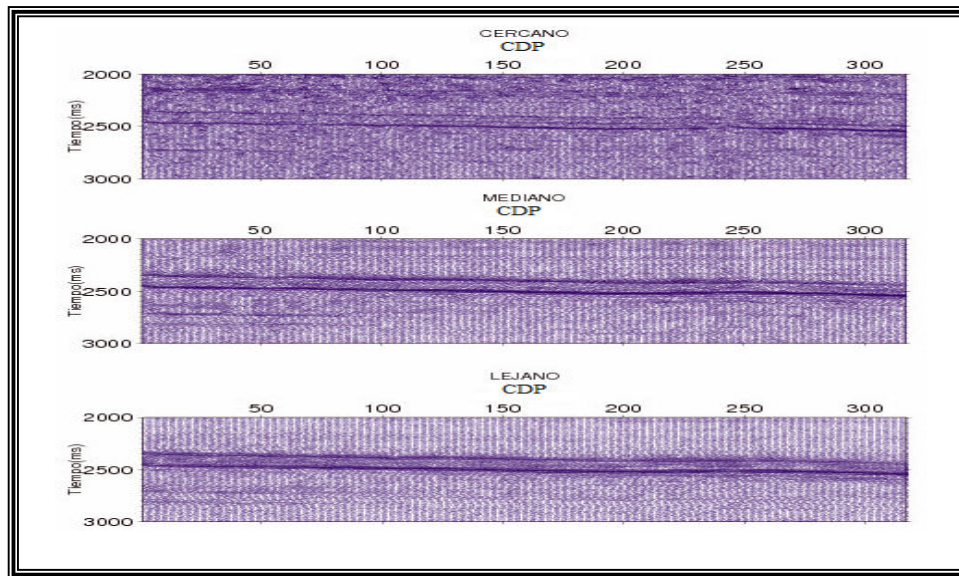


Figura 3.13. Secciones sísmicas para los diferentes apilados por ángulos de la zona de reservorio de gas.

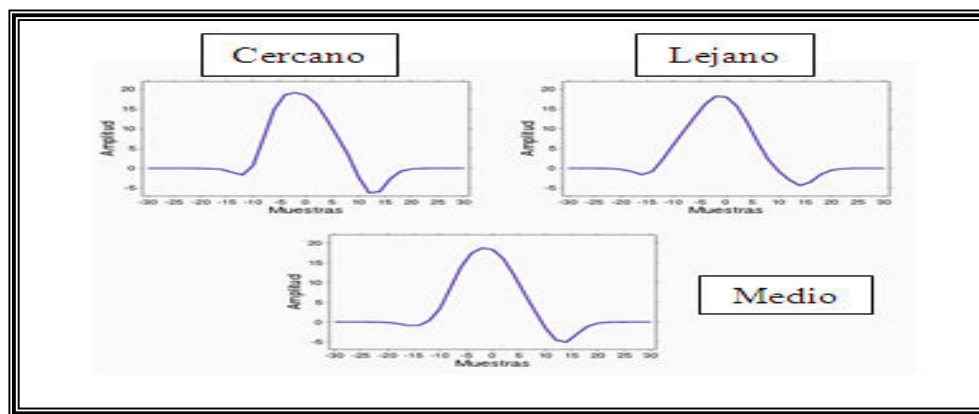


Figura 3.14. Ondículas extraídas para los diferentes apilados por ángulo.

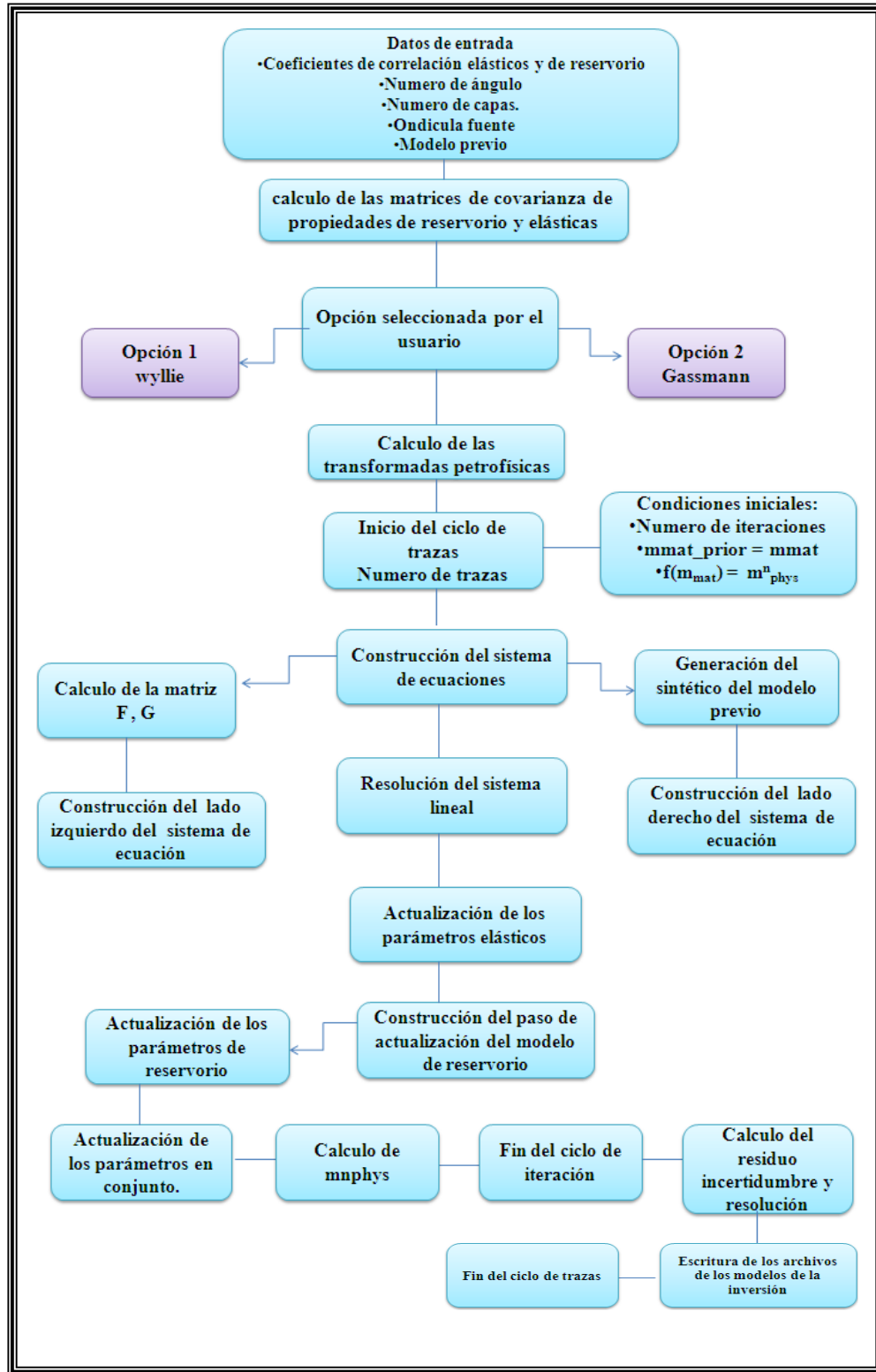


Figura 3.15. Diagrama de flujo del algoritmo de inversión aplicado al caso real.

3.11. Estimación de la presión de poro a partir de las propiedades de la inversión.

La presión geoestática puede ser determinada al integrar la densidad de la mezcla total desde la superficie para una profundidad total Eaton (1975). La relación esta descrita de la siguiente forma:

$$S = \bar{\rho} Z g \quad . \quad (3.14)$$

Donde:

ρ = Densidad promedio en kg/m³

g = aceleración de la gravedad m/s²

Z = Profundidad total en m.

S = Presión geoestática en Psi.

$$1\text{psi/ft} \sim 0,0225 \text{ MPa/m} \quad . \quad (3.15)$$

En esta investigación la presión geoestática detectada corresponde a 50,6 MPa para 2278 metros de profundidad total. El gradiente de la presión geoestático corresponde 0,022 MPa/m, al realizar la conversión de las unidades mediante la ecuación (3.15) para la aplicación correspondiente de la ecuación (3.16).

Para la predicción de la Geopresión de la formación en unidades de psi/ft, para $n=3.0$ a partir de los datos sísmicos descrito por Eaton (1975) en la siguiente ecuación:

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \left[\frac{S}{D} - \left(\frac{P}{D} \right)_{\text{normal}} \right] \left[\frac{V_{\text{obs}}}{V_n} \right]^{3.0} \quad . \quad (3.16)$$

P/D = equivale al gradiente de la presión de poro en unidades psi/ft

S/D = equivale al Gradiente Geoestático en unidades psi/ft

P/D normal= Presión de Poro normal en 0,465 psi/ft

V_{obs} = velocidad de la onda P observada en m/s.

V_n = velocidad de la onda P de la tendencia de compactación normal en m/s.

D = la profundidad total en m.

Al calcular el gradiente de presión de poro se considera la velocidad de la onda P resultante de la inversión como la velocidad observada y la velocidad normal corresponde a la configuración de la media de los pozos reales de tendencia normal conforme a la profundidad.

Para la estimación de la presión del Esfuerzo Efectivo es considerado el principio de Terzaghi (1948), descrito en la siguiente expresión:

$$S = \sigma + P , \quad (3.17)$$

donde S es la presión geoestática, σ la presión del esfuerzo efectivo y P la presión del poro todas presiones expresadas en MPa.

CAPÍTULO IV

CALIBRACIÓN PETROFÍSICA Y GEOESTADÍSTICA

Para aplicar el método de inversión de amplitudes sísmicas, bien sea para el caso sintético o real es indispensable conocer la distribución de las propiedades en el área de estudio. Los registros de porosidad, saturación de agua, contenido de arcilla, velocidad P, velocidad S y densidad de masa, de dos pozos localizados en la zona de exploración suministra la información necesaria para realizar los cálculos de las covarianzas, correlaciones, valores medio y desviaciones estándar de cada propiedad. Adicionalmente mediante los registros de pozo se estimaron las constantes utilizadas en la transformada de Wyllie-Wood, Gassmann y cálculo de Velocidad S; la primera transformada incluye velocidades de la onda compresional y densidades en una matriz de arena y arcilla respectivamente, la segunda incluye estimación de velocidad compresional en arenas y arcillas. Aunado a las dos relaciones mencionadas anteriormente, incluye la estimación de densidades para el agua de formación y el hidrocarburo. Mientras que la tercera relación se refiere a la estimación de velocidades de cizalla en una matriz de arena y arcilla respectivamente.

La figura N° 4.1 muestra los registros de pozo utilizados en éste trabajo suavizado a 4 ms para el pozo 1. Este suavizado se realizó mediante un programa de interpolación desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Inversión Geofísica de la Universidad Central de Venezuela (LSIG-UCV), el cual es descrito en los Trabajos de Grado de Luis Cara (2005) y Juan Rodríguez (2006).

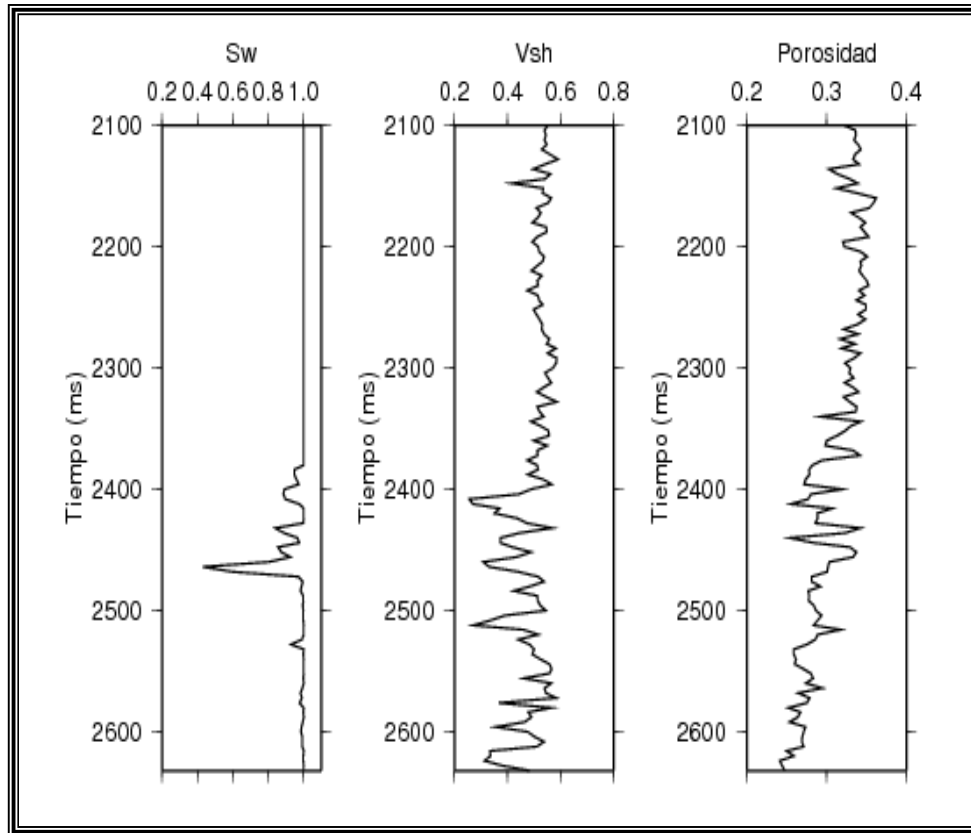


Figura 4.1. Pozo1 suavizado a 4ms de porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua.

La finalidad de trabajar a una resolución menor a la de los pozos (4 milisegundos), es que esta se corresponde con el contenido de frecuencias en la señal sísmica, y por lo tanto con la resolución vertical del modelo elástico equivalente en respuesta sísmica a la configuración real del medio.

4.1. Modelos Petrofísicos

A partir de los registros de pozo suavizados de cada una de las propiedades, se procede a calibrar los parámetros de entrada necesarios para cada uno de los modelos petrofísicos aplicados. Para el caso de la calibración de velocidad P, velocidad S y densidad de masa para la matriz de arena y arcilla se realizaron gráficos cruzados de éstas propiedades en función de la porosidad. Una vez realizada la discriminación y los gráficos cruzados, se hace un ajuste lineal para la dispersión de los datos y finalmente se extrapola a valor cero de porosidad la función lineal para estimar V_p , V_s y densidad en la matriz (ver figura 4.2).

Para la calibración de la densidad y velocidad compresional del hidrocarburo y del agua de formación respectivamente, se consideró el trabajo de Carvajal (2007) el cual desarrolló un programa en el LSIG-UCV, que realiza una regresión de la impedancia en función parámetros petrofísicos, entre ellos los cuatro mencionados anteriormente.

Los valores estimados de velocidades y densidades de la matriz, hidrocarburo y agua de formación para los datos sintéticos y reales se presentan en la Tabla N° 4.1.

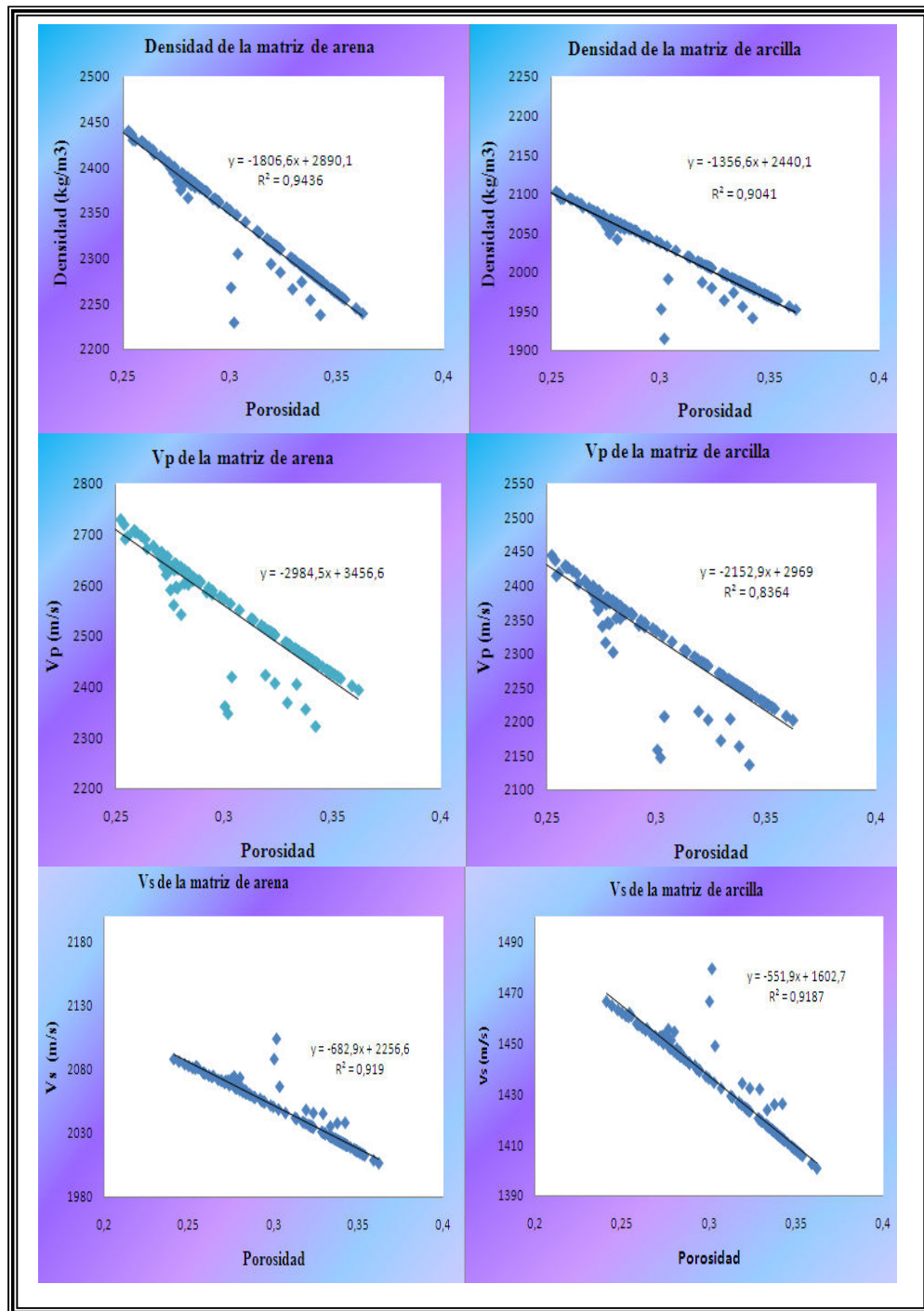
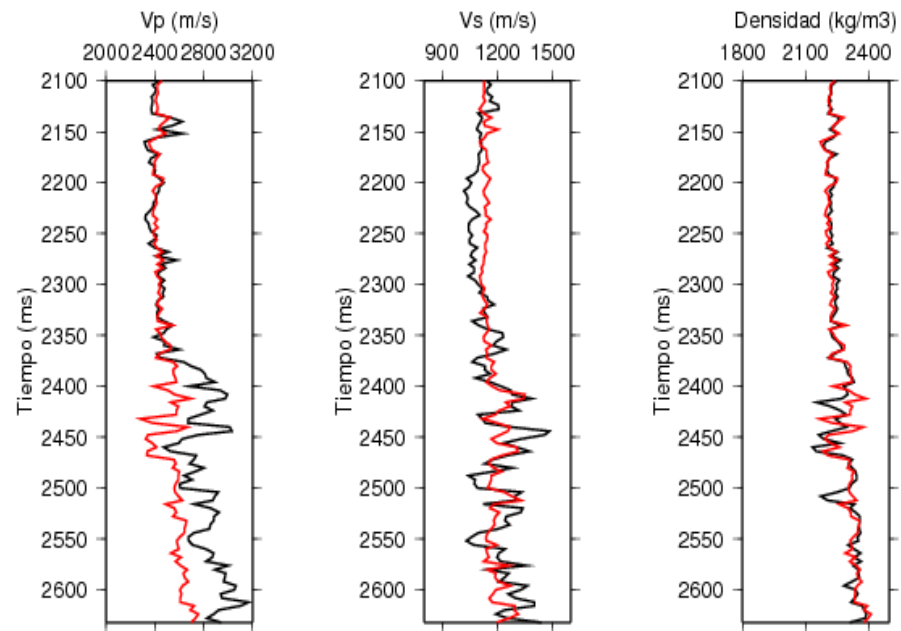


Figura 4.2. Gráficos cruzados de las propiedades elásticas en función de la porosidad para la calibración de las propiedades elásticas de la matriz.

Tabla 4.1. Valores de parámetros petrofísicos.

Velocidad compresional en la matriz de arena (m/s)	4100
Velocidad compresional en la matriz de arcilla (m/s)	3270
Velocidad de cizalla en la matriz de arena (m/s)	1650
Velocidad de cizalla en la matriz de arcilla (m/s)	1200
Velocidad compresional del agua de formación (m/s)	1396.24
Velocidad compresional del hidrocarburo (m/s)	1351.67
Densidad de la matriz de arena (kg/m ³)	2700
Densidad de la matriz de arcilla (kg/m ³)	2900
Densidad del hidrocarburo (kg/m ³)	375.77
Densidad del agua de formación (kg/m ³)	1074.79

Pozo1:



Pozo 2:

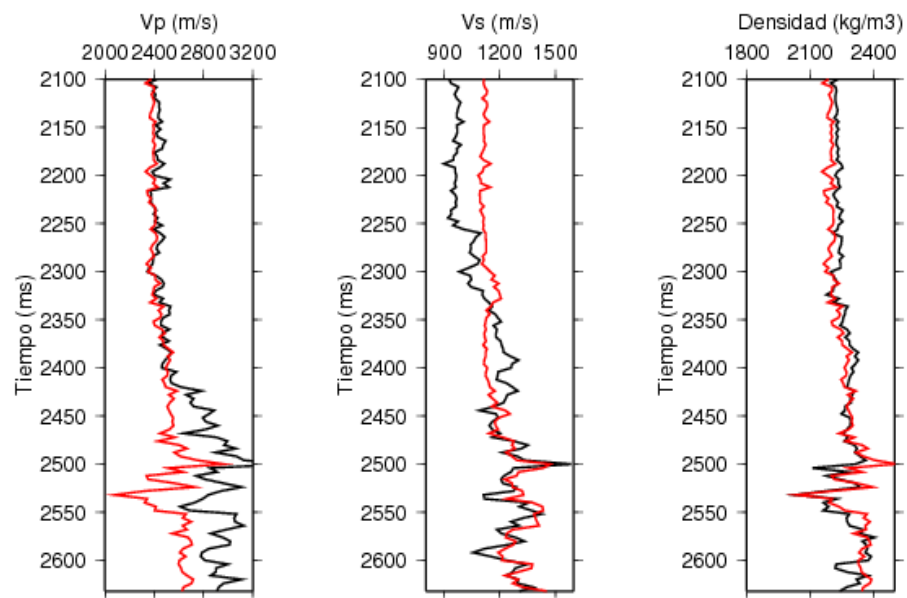
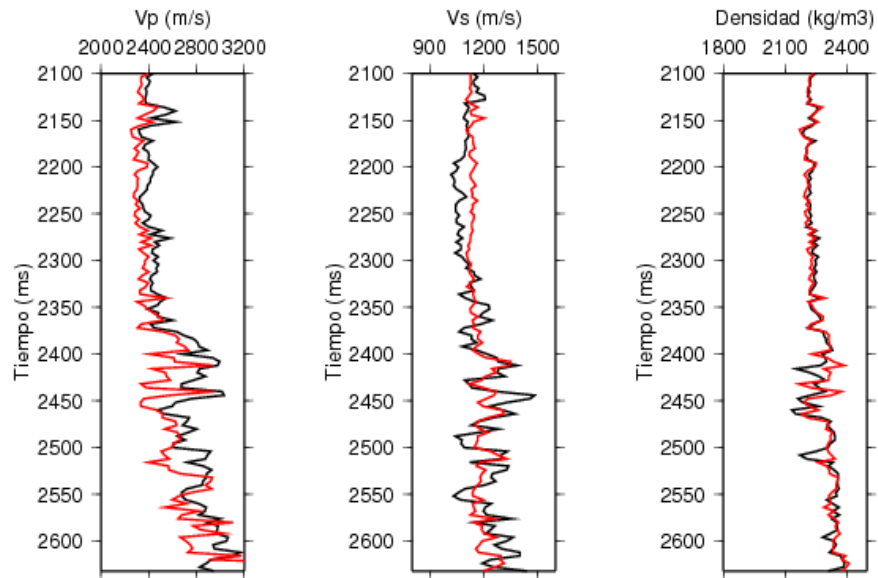


Figura 4.3. Estimación de las propiedades elásticas (V_p , V_s y densidad) con el modelo Wyllie-Wood. En color negro se representan los registros de pozo y en color rojo la estimación con el modelo petrofísico.

Pozo1:



Pozo 2:

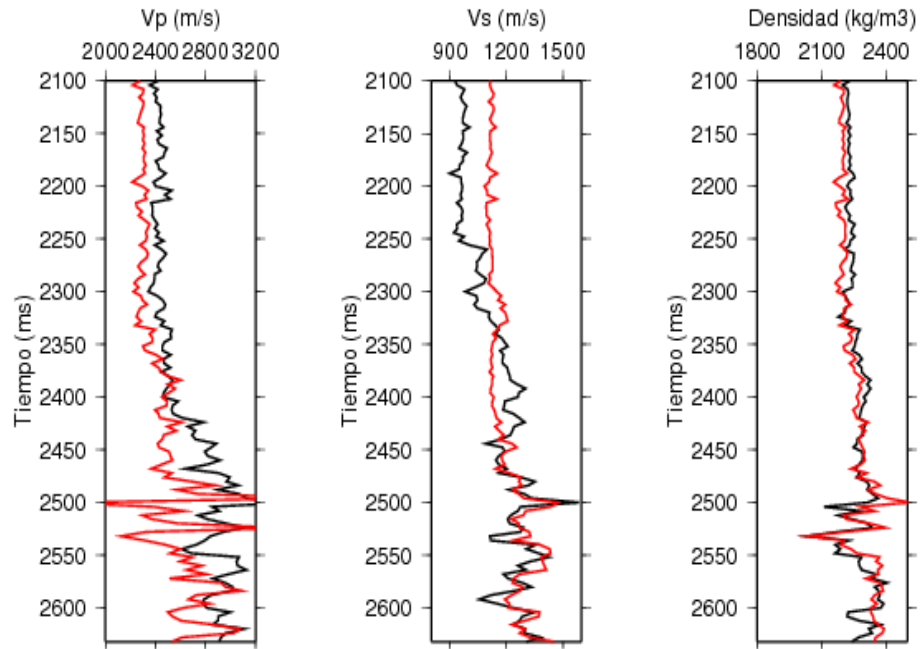


Figura 4.4. Estimación de las propiedades elásticas (Vp, Vs y densidad) con el modelo Gassmann. En color negro se representan los registros de pozo y en color rojo la estimación con el modelo petrofísico.

4.2. Información estadística previa

En esta investigación se utilizó las rutinas desarrolladas por Tirado (2008), para calcular las matrices de covarianza, correlación, tanto para las propiedades de reservorio como para las propiedades elásticas necesarias para la construcción del sistema de ecuaciones. A continuación se describen dichos procedimientos:

La información geoestadística previa permite la descripción de las propiedades utilizadas en la fase de inversión de amplitudes sísmica. La matriz de correlación, modelado de la función de covarianza, valores medio y la desviación estándar representan las herramientas para poder explicar el modelo inicial ó previo del espacio de parámetros, la cual se obtienen mediante los registros de pozos suavizados a cuatro milisegundos.

La función de covarianza de cada propiedad es modelada mediante un programa computacional elaborado en el LSIG-UCV, el cual realiza la regresión de los valores de correlación a partir de las covarianzas de los datos de pozo. La función de covarianza es un modelo compuesto de funciones matemáticas conocidas, y viene expresada de la siguiente manera:

$$C(h) = C_0 + C_1 \exp\left(\frac{-3h^2}{a_1^2}\right) + C_2 \exp\left(\frac{-3h}{a_2}\right) + C_3 \exp\left(\frac{-3h}{a_3}\right) \cos\left(\frac{2\pi h}{a_4}\right), \quad (4.1)$$

donde C_0 indica el efecto nugget, mientras que el segundo, tercero y cuarto término corresponden a la componente Gausiana, exponencial y Coseno amortiguado respectivamente.

En este trabajo se aplicaron los coeficientes de covarianza y rangos de covarianza de las propiedades elásticas (velocidad P, velocidad S y de reservorio (porosidad, contenido de arcilla y saturación de agua) como datos de entrada del trabajo de Tirado (2008) respecto de los datos reales, que a su vez obtuvo la correlación al igual que la regresión a través de un programa previamente realizado en el LSIG-UCV.

Dichos coeficientes de covarianza fueron sometidos a unas pruebas de calibración, para ello se propuso diferentes reducciones sucesivas para los coeficientes de covarianza originalmente caracterizados a partir de los datos de registro de las propiedades elásticas en la búsqueda del ajuste óptimo en la generación de propiedades de reservorio durante la inversión.

La calibración consta de evaluar reducciones sucesivas en los coeficientes de covarianza asociados a la información previa. Se probaron diversas opciones, en particular reducciones en un factor de 10, 16, 25, y 36 unidades. Por ejemplo para el primer caso se considera el coeficiente de covarianza reducido en 10 unidades, mientras las dos propiedades de reservorio restantes quedan sujetas a la configuración de prueba propuesta sin aplicación de la reducción y así sucesivamente se aplica hasta completar tres casos para cada reducción respectivamente. El cuarto caso corresponde a las tres propiedades de reservorio libres o solo con la aplicación del factor de reducción del coeficiente respectivo. A continuación se representa mediante un esquema las pruebas de calibración conformada por cuatro casos, tomando como ejemplo el factor de reducción 16.

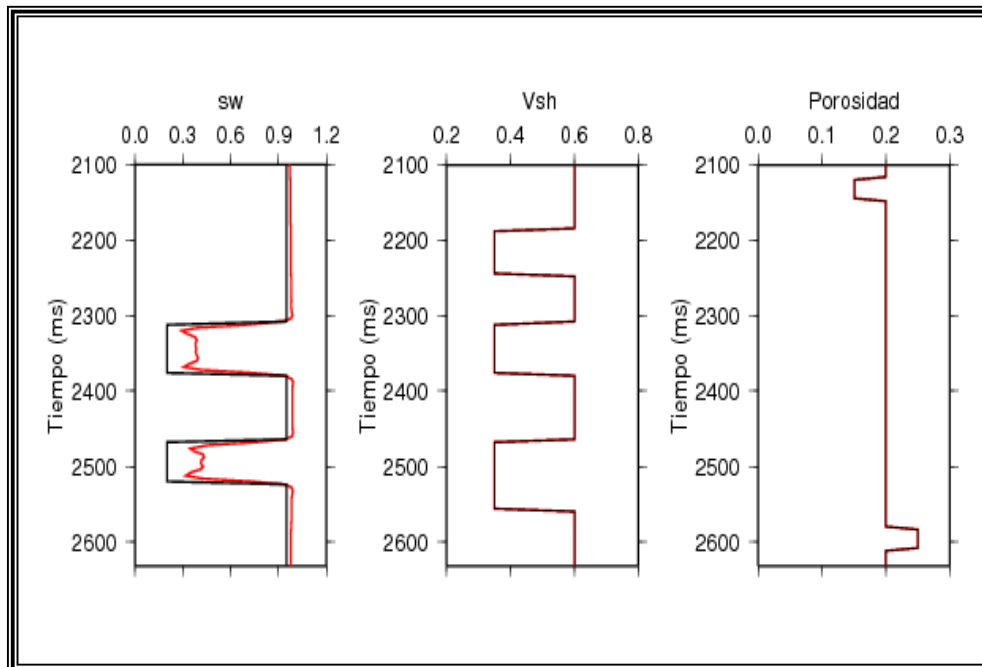


Figura 4.5. Configuración de prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de la saturación de agua caso 2 (tabla 4.2).

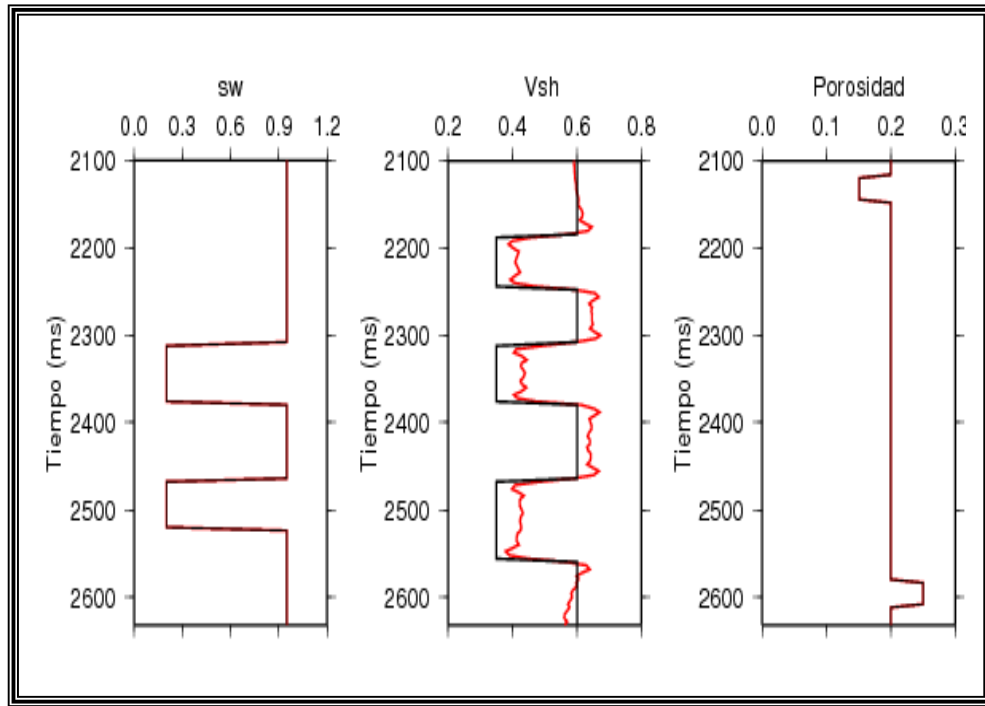


Figura 4.6. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas del contenido de arcilla caso 2 (tabla 4.2)

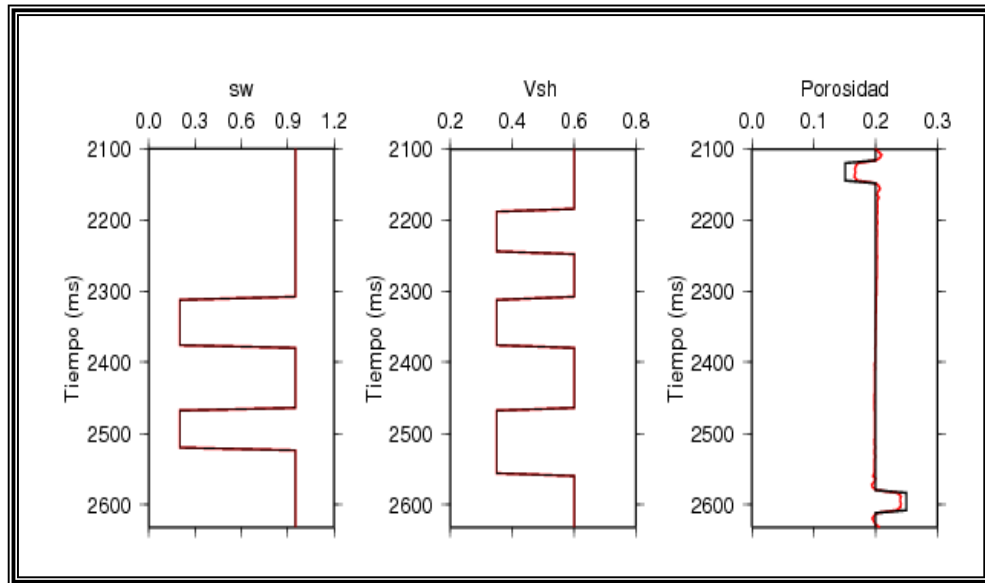


Figura 4.7. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de la porosidad caso 2 (tabla 4.2).

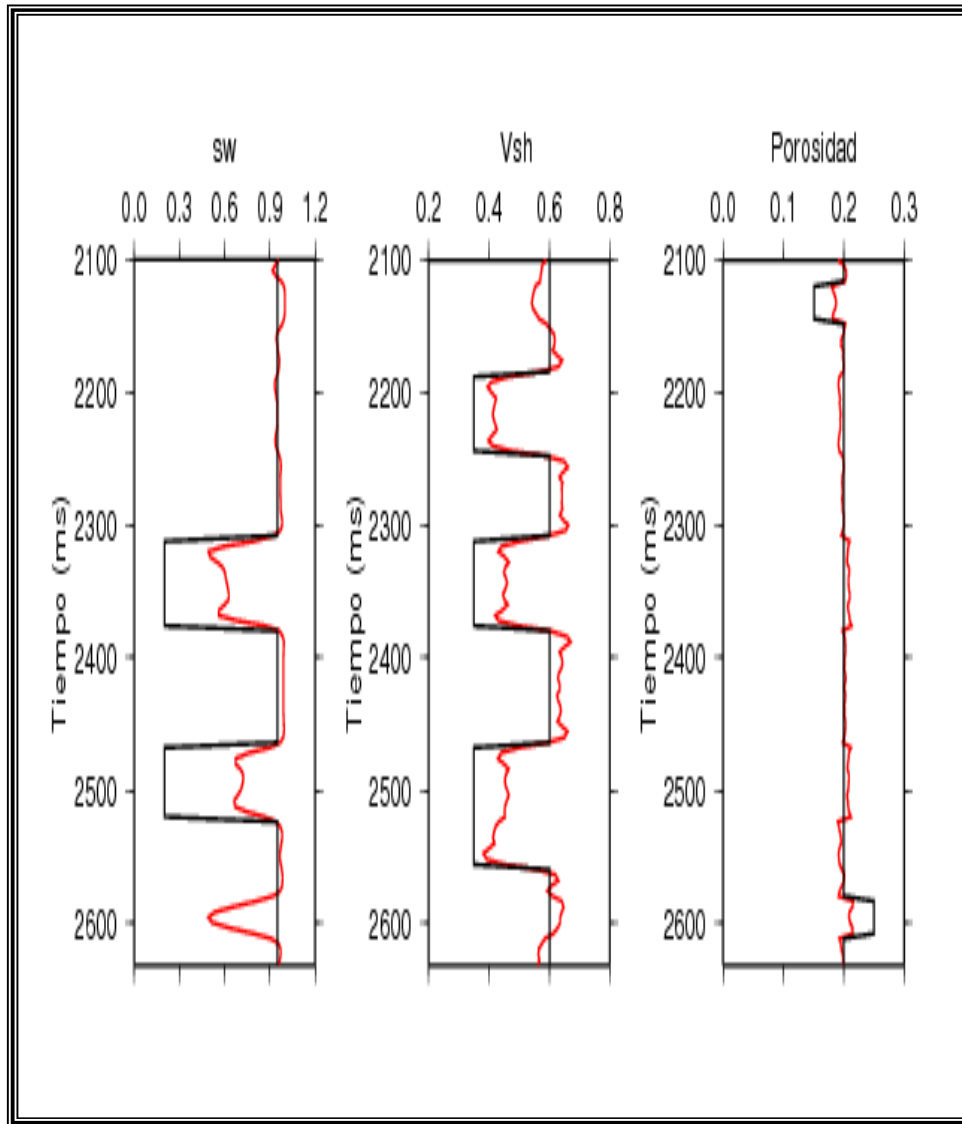


Figura 4.8. Configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de las propiedades de reservorio en conjunto caso 2 (tabla 4.2).

En este trabajo fue seleccionado el factor de reducción 16 más idóneo para lograr el ajuste durante la iteración aplicado al caso sintético.

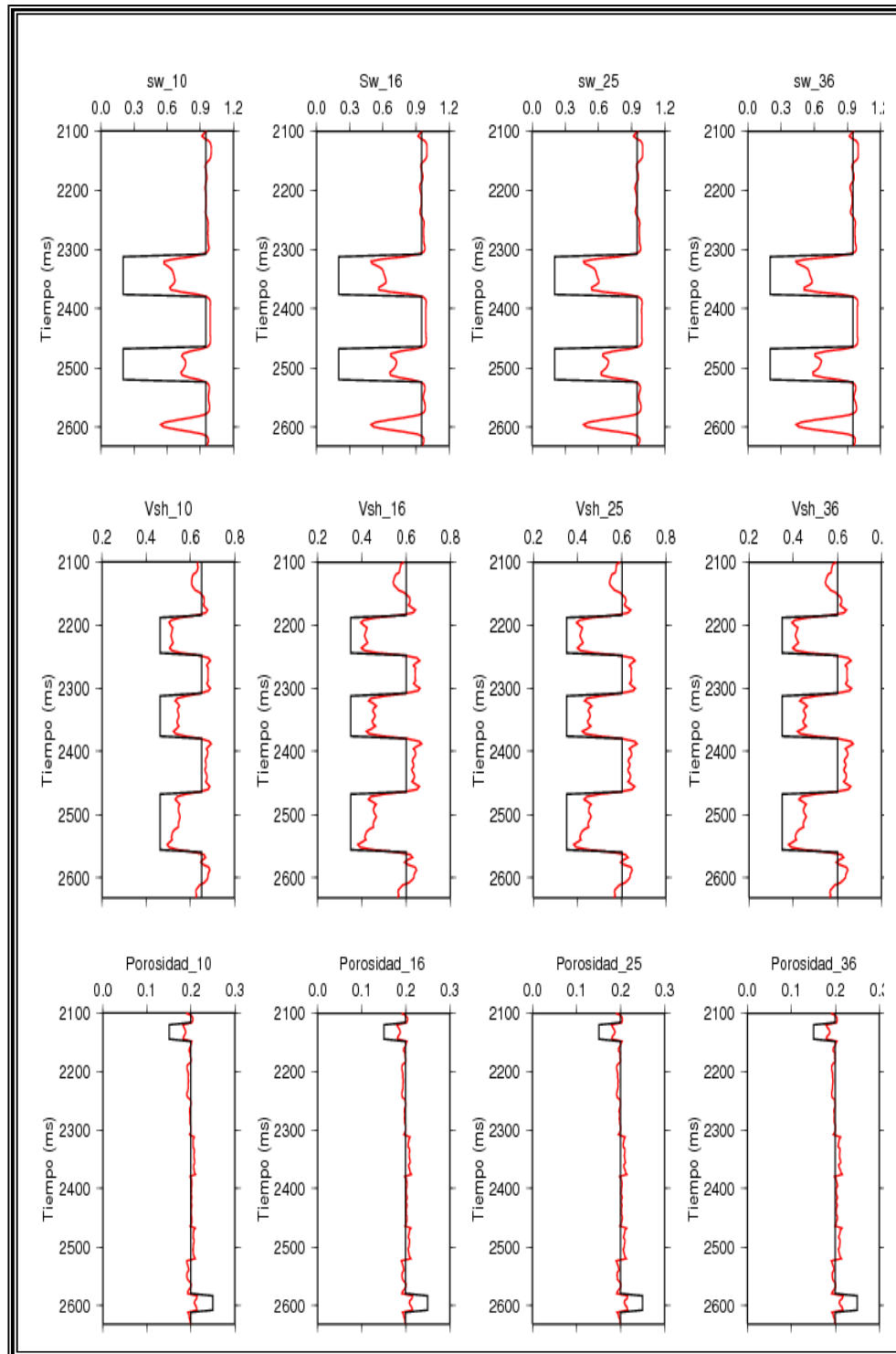


Figura 4.9. Comparación de la configuración de la prueba (línea negra) y estimada con la inversión (línea roja) para las desviaciones previas de las propiedades de reservorio en conjunto para diferentes reducciones.

Los valores de la funciones de las covarianzas de las propiedades generados para el caso sintético se presentan en la Tabla N° 4.2., mientras que la Tabla N°4.3 indica los coeficientes utilizados para el caso real.

Tabla 4.2. Valores de parámetros de la función de covarianza para el caso sintético.

Parámetros	Porosidad	Vsh	Saturación	Vp	Vs	Densidad
C ₀	3.97 x10 ⁻³	5.29x10 ⁻²	0.0	6.24x10 ⁻³	5.35x10 ⁻³	34.75
C ₁	4.52 x10 ⁻³	3.74x10 ⁻²	2.20	1275.4975	0.0	1.181
C ₂	1.0 x10 ⁻³	8.0 x10 ⁻³	0.0	537.7925	0.0	0.0
C ₃	3.06 x10 ⁻³	1.68x10 ⁻²	1.38	0.0	353.5406	20.94
r ₁	9.99 x10 ⁻⁶	8.85	4.93	9.99 x10 ⁻⁶	9.99 x10 ⁻⁶	25.79
r ₂	10.0	15.0	9.99 x10 ⁻⁵	133.0	9.99 x10 ⁻⁶	9.99 x10 ⁻⁶
r ₃	242.55	269.16	212.97	66.06	157.58	165.73
r ₄	120.65	103.58	80.23	9.99 x10 ⁻⁶	114.16	99.85

Tabla 4.3. Valores de parámetros de la función de covarianza para el caso real.

Parámetros	Porosidad	Vsh	Saturación	Vp	Vs	Densidad
C ₀	0.49 x10 ⁻³	1.05x10 ⁻²	0.0	9.9x10 ⁻⁵	986.5	556.09
C ₁	0.56x10 ⁻³	0.74x10 ⁻²	0.34	1275.43	0.0	38.40
C ₂	0.12x10 ⁻³	1.6x10 ⁻³	0.0	537.75	0.0	0.0
C ₃	0.38 x10 ⁻³	1.33x10 ⁻²	0.24	0.0	5656.65	335.04
r ₁	9.99 x10 ⁻⁶	8.85	4.93	9.99x10 ⁻⁶	9.99x10 ⁻⁶	25.79
r ₂	10.0	15.0	9.99x10 ⁻⁵	133.0	9.99x10 ⁻⁶	9.99x10 ⁻⁶
r ₃	242.55	269.16	212.97	66.06	157.58	165.73
r ₄	120.65	103.58	80.23	9.99 x10 ⁻⁶	114.16	99.85

Como se puede observar en la Tabla N° 4.2 y 4.3, los parámetros cruzados para las propiedades de reservorio y las propiedades elásticas no fueron anexados debido a que éstos presentaron correlaciones muy bajas, prácticamente nulas.

4.3. Matrices de covarianza

Para la construcción de las matrices de covarianza de las propiedades de reservorio y propiedades elásticas se utilizó las rutinas de simulación geoestadística desarrollado por Tirado (2008), matrices necesarias para la construcción del sistema de ecuaciones y la inversión respectiva.

Los rangos y coeficientes obtenidos mediante el modelado de la función de covarianza son empleados para la construcción de las matrices de covarianza (correlación).

4.3.1. Matriz de covarianza de reservorio

La porosidad, contenido de arcilla y la saturación de agua integran el espacio de parámetros materiales de nuestro modelo. Al considerar cada una de estas tres propiedades como subespacios complementarios del espacio de parámetros materiales en que está definida la densidad de probabilidad, se tiene:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_M, u_{M+1}, \dots, u_N, u_{N+1}, \dots, u_P\} = \{\Phi, \mathbf{Vsh}, \mathbf{S}_w\}. \quad (4.2)$$

Dada esta partición de la variable aleatoria la matriz de covarianza para las propiedades materiales la podemos representar como,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Phi,\Phi} & \mathbf{C}_{\Phi,Vsh} & \mathbf{C}_{\Phi,S_w} \\ \mathbf{C}_{Vsh,\Phi} & \mathbf{C}_{Vsh,Vsh} & \mathbf{C}_{Vsh,S_w} \\ \mathbf{C}_{S_w,\Phi} & \mathbf{C}_{S_w,Vsh} & \mathbf{C}_{S_w,S_w} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

La matriz está conformada por seis submatrices. Cada submatriz describe la variabilidad y correlación entre los parámetros. Los elementos de la diagonal son las varianzas las cuales indican la variabilidad para las desviaciones del valor central de cada parámetro, mientras que los elementos fuera de la diagonal corresponden a las covarianzas y representan la correlación de los parámetros del medio material.

En la figura N° 4.10 y 4.11 se muestra la matriz de correlación para las propiedades de reservorio utilizada en la simulación e inversión sísmica. La dimensión de la matriz es el triple, respecto al número de muestras que posee la ventana de tiempo elegida en la inversión (134 muestras). La figura permite observar claramente que los valores mayores de correlación se encuentran sobre la diagonal principal de cada submatriz (varianzas) y además se aprecia que a medida que va aumentando la distancia entre los elementos de cada submatriz con respecto a su diagonal principal la correlación disminuye.

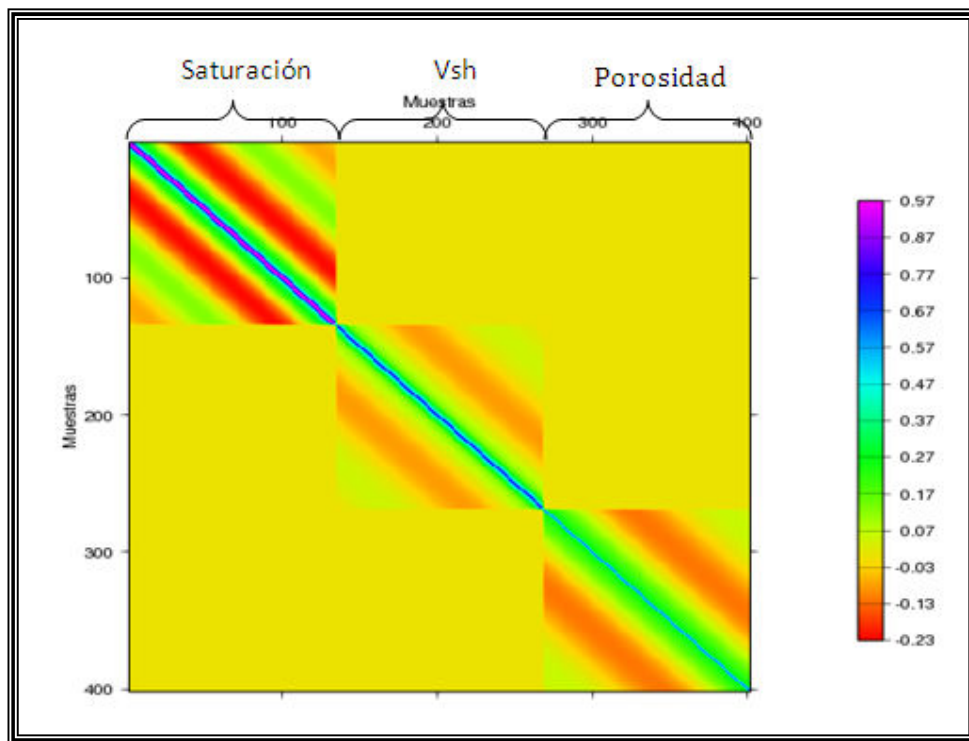


Figura 4.10. Matriz de Covarianza para las propiedades de Reservorio aplicado al caso sintético.

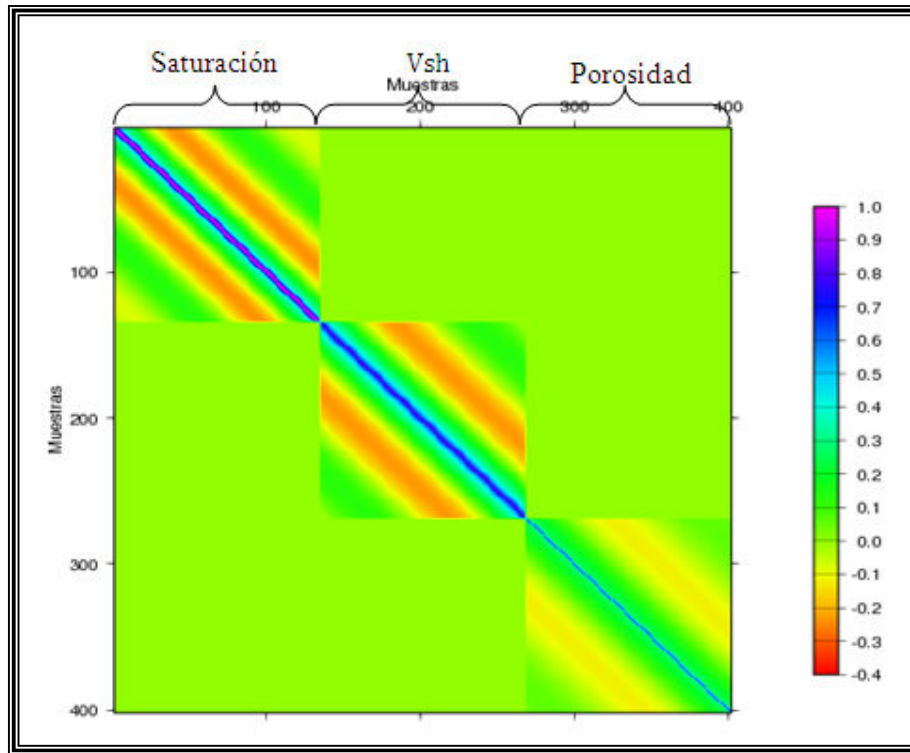


Figura 4.11. Matriz de Covarianza para las propiedades de Reservorio aplicado al caso real.

4.3.2. Matriz de covarianza elástica

Esta matriz representará las desviaciones de las propiedades elásticas respecto a la predicción petrofísica. Para su construcción se sigue un procedimiento análogo al explicado para la matriz de covarianza de reservorio; además de poseer sus mismas características.

A continuación se presenta la matriz de covarianza para las propiedades elásticas, mostrada en la figura N° 4.12 y 4.13.

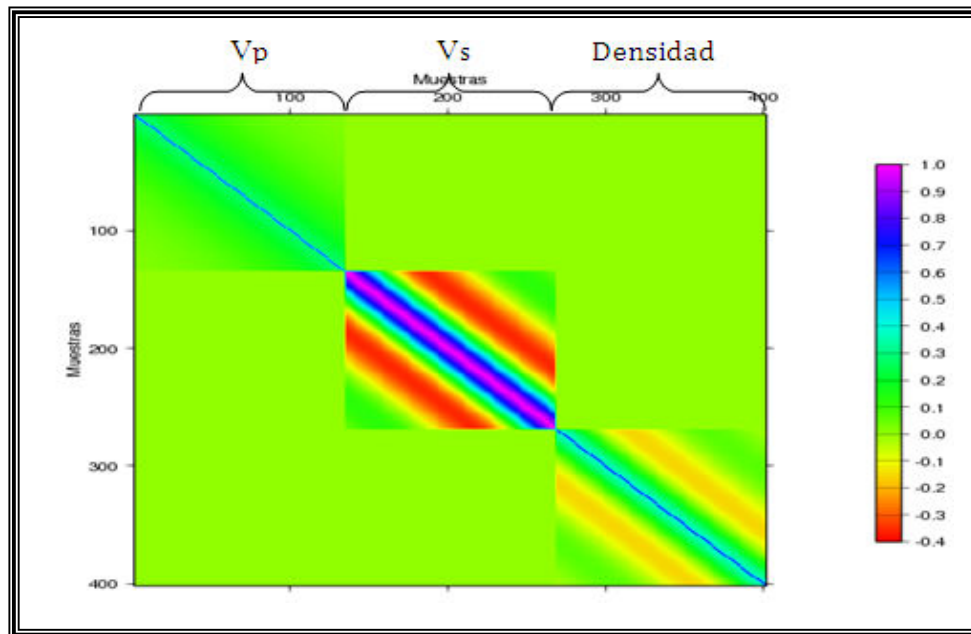


Figura 4.12. Matriz de Covarianza para las propiedades Elásticas aplicado al caso sintético.

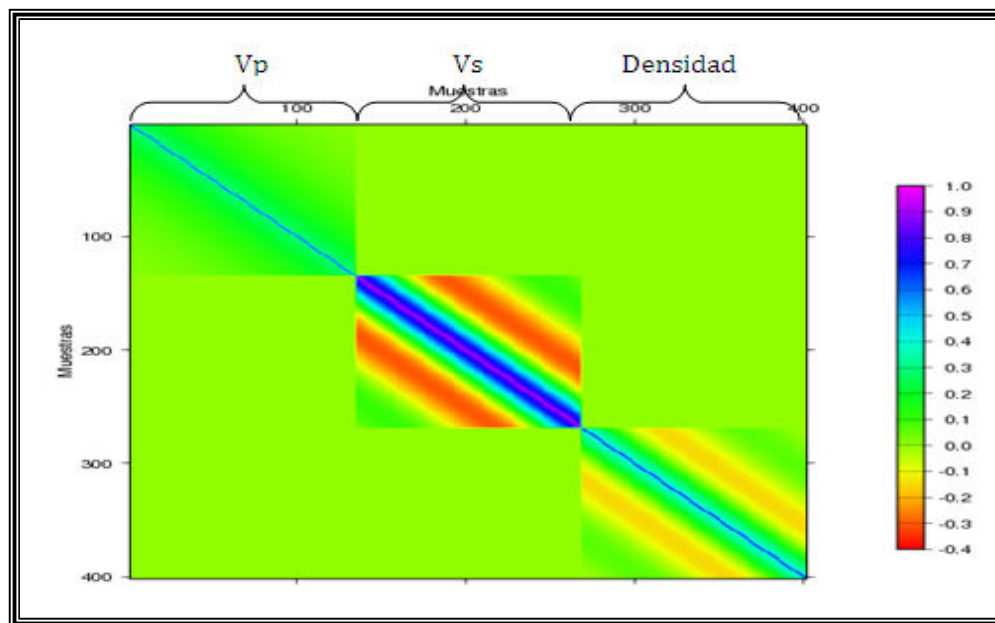


Figura 4.13. Matriz de Covarianza para las propiedades Elásticas aplicado al caso real.

CAPÍTULO V

CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS

5.1. Configuración de prueba

El algoritmo de inversión aplicando el método de optimización fue validado con datos sintéticos, para ello se propuso una configuración de prueba para las propiedades de reservorio, dicha configuración es aplicado en la generación del sintético denominado sintético de prueba. La figura N° 5.1 muestra la configuración de prueba conformado para 134 capas.

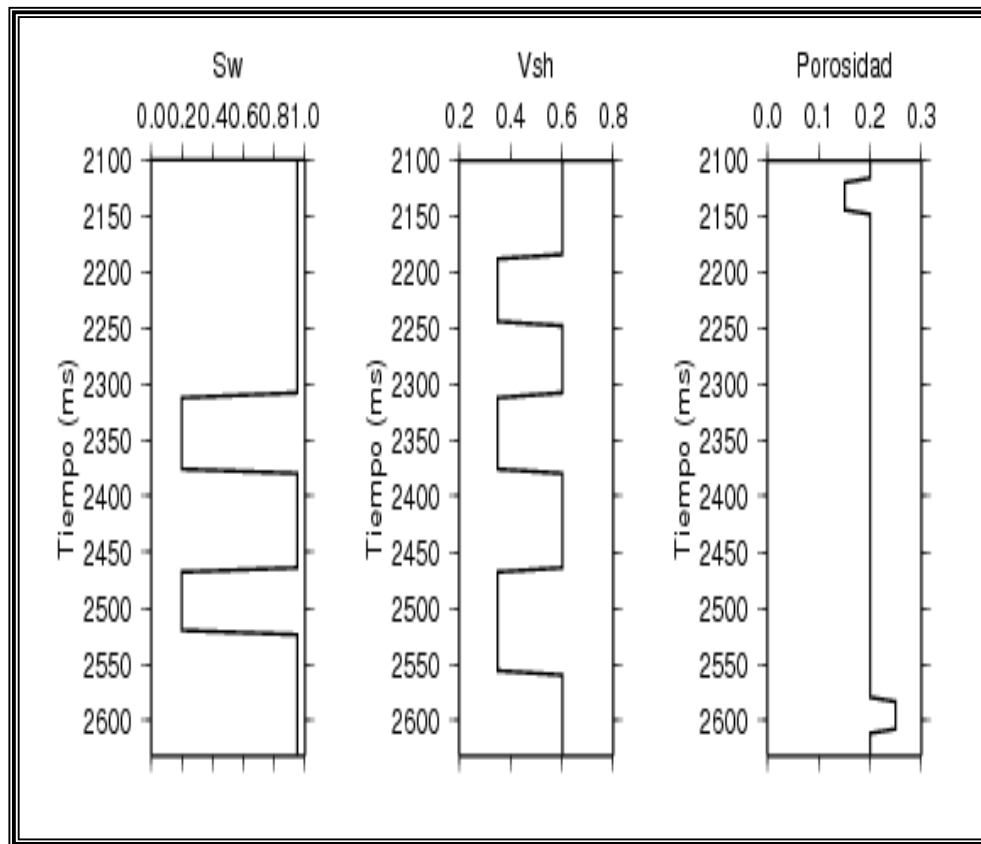


Figura 5.1. Configuración de reservorio de prueba.

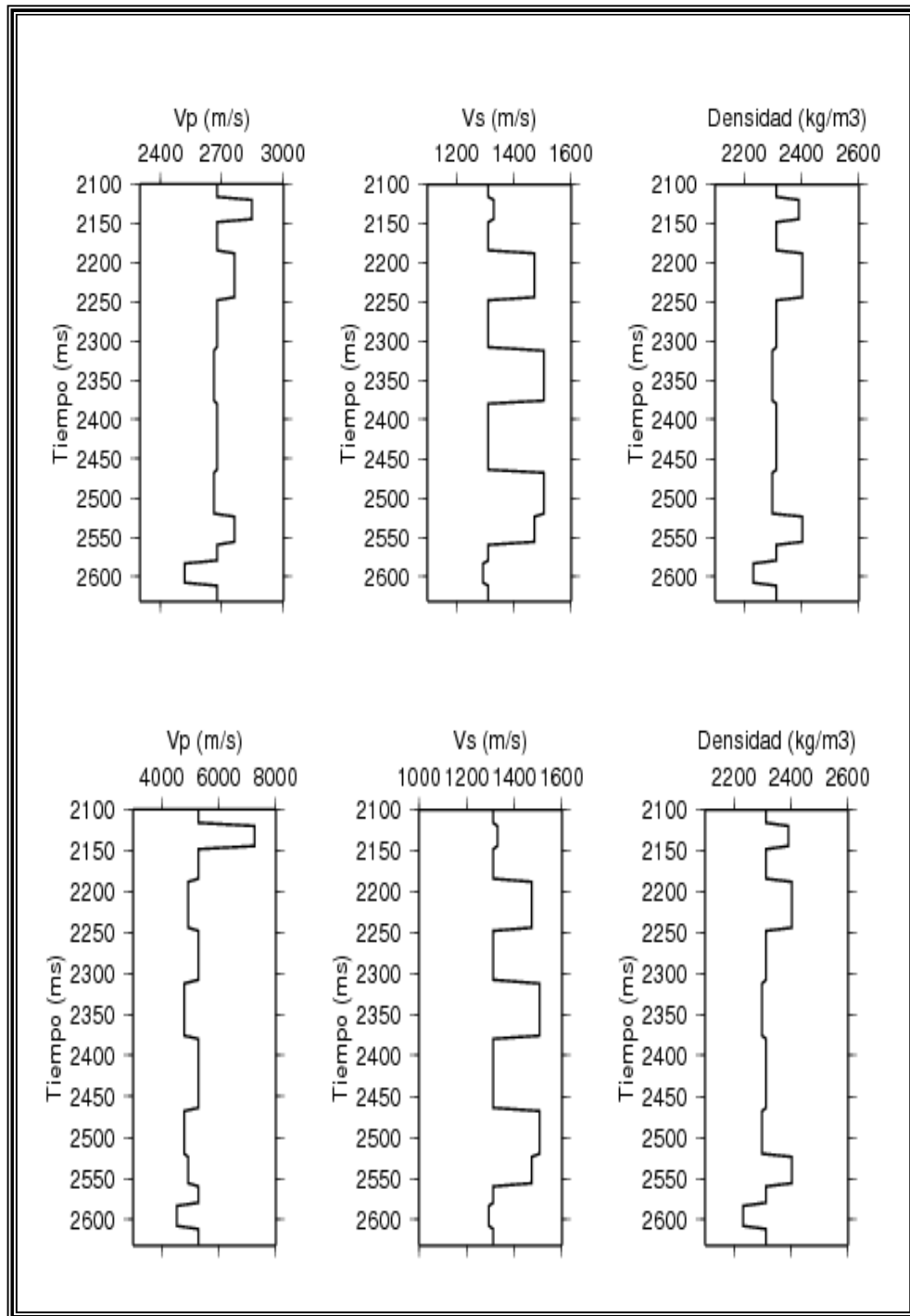


Figura 5.2. Configuración elástica de prueba estimada con la aplicación del modelo Wyllie-Wood (arriba) y Gassmann (abajo) respectivamente.

5.2. Configuración previa

La configuración previa propuesta es un arreglo de parámetros de propiedades de reservorio que comprende 134 capas. A partir de esta configuración se calcula la matriz F, G y los arreglos de los parámetros elásticos que se renuevan por cada iteración con la aplicación de las respectivas transformadas petrofísicas. A continuación se presenta en la figura N° 5.3 la configuración previa para la inversión.

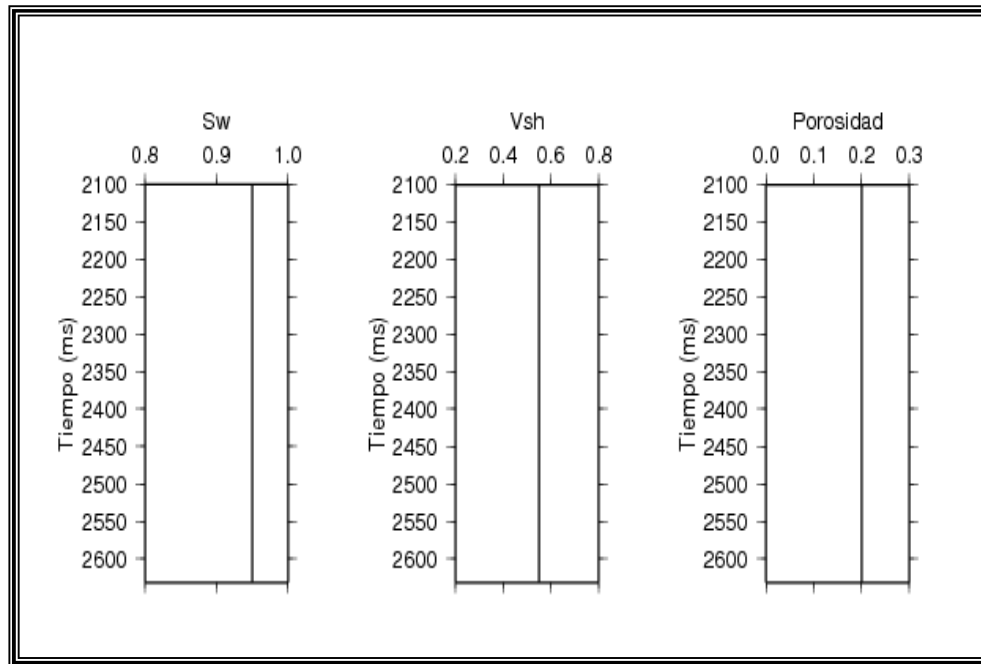


Figura 5.3. Configuración previa de reservorio para la inversión caso sintético.

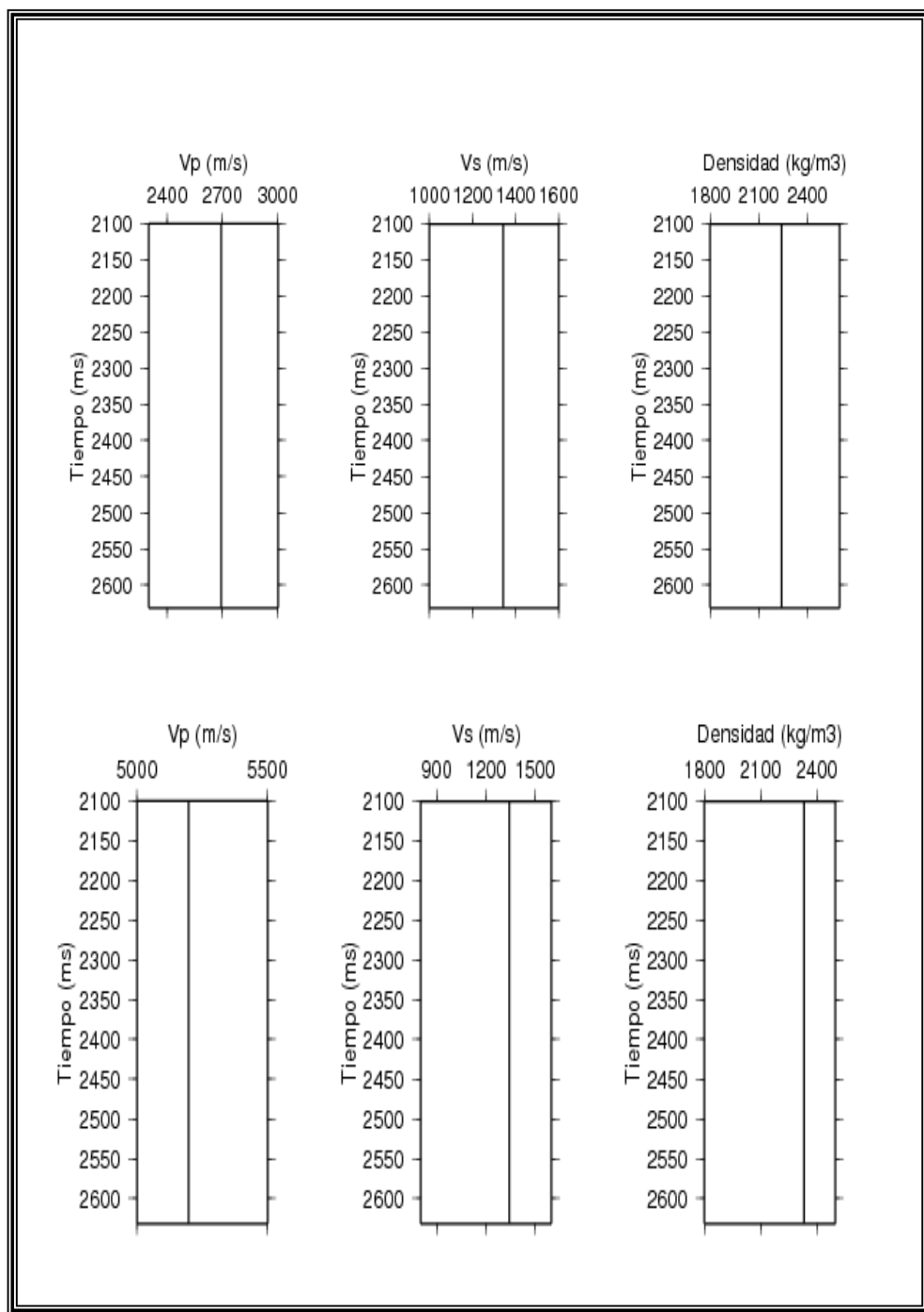


Figura 5.4. Configuración elástica previa estimada con la aplicación del modelo Wyllie-Wood (arriba) y Gassmann (abajo).

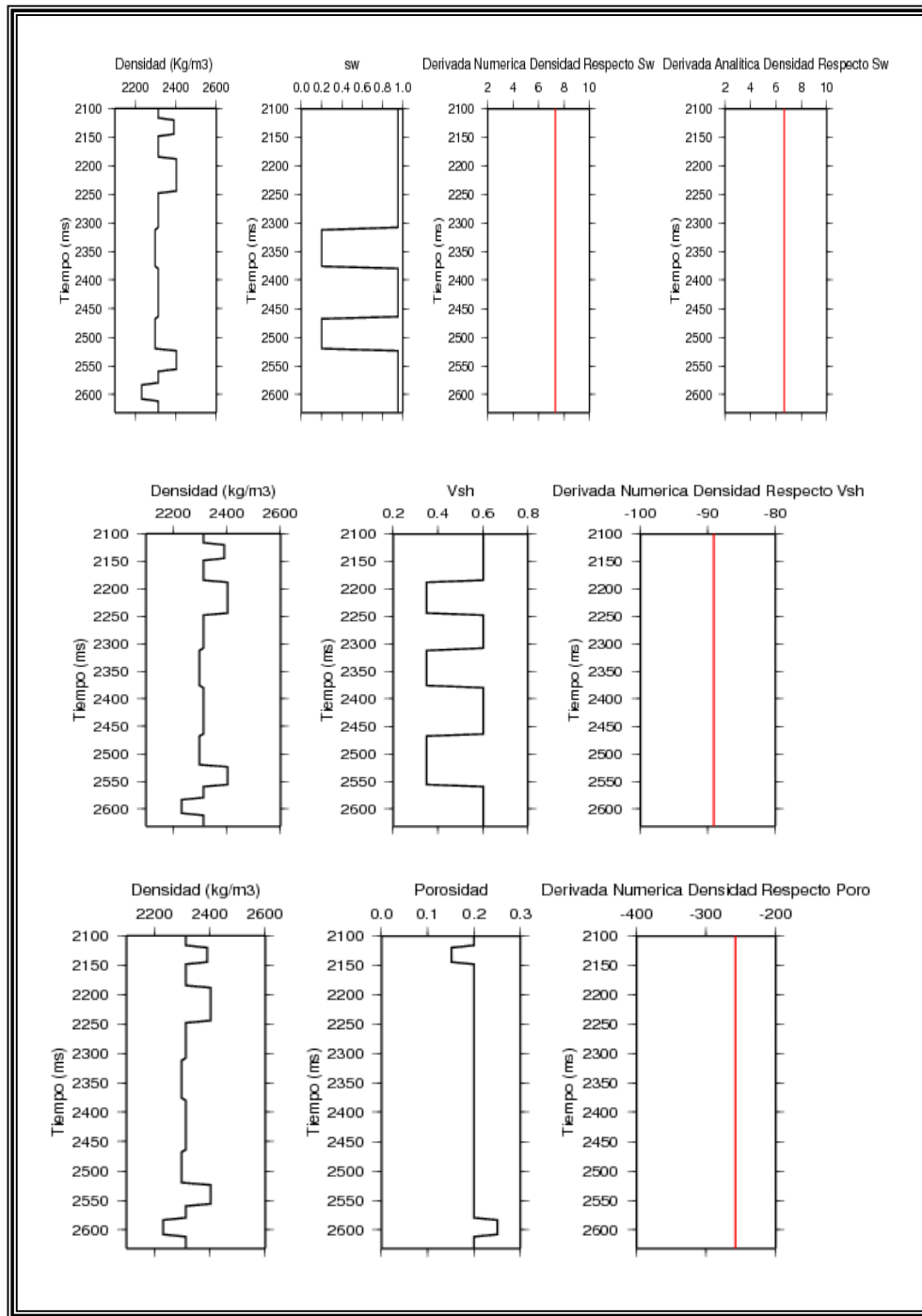


Figura 5.5.Comparacion de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la densidad respecto de las propiedades de reservorio. Las derivadas están expresadas en kilogramo por metro cúbico.

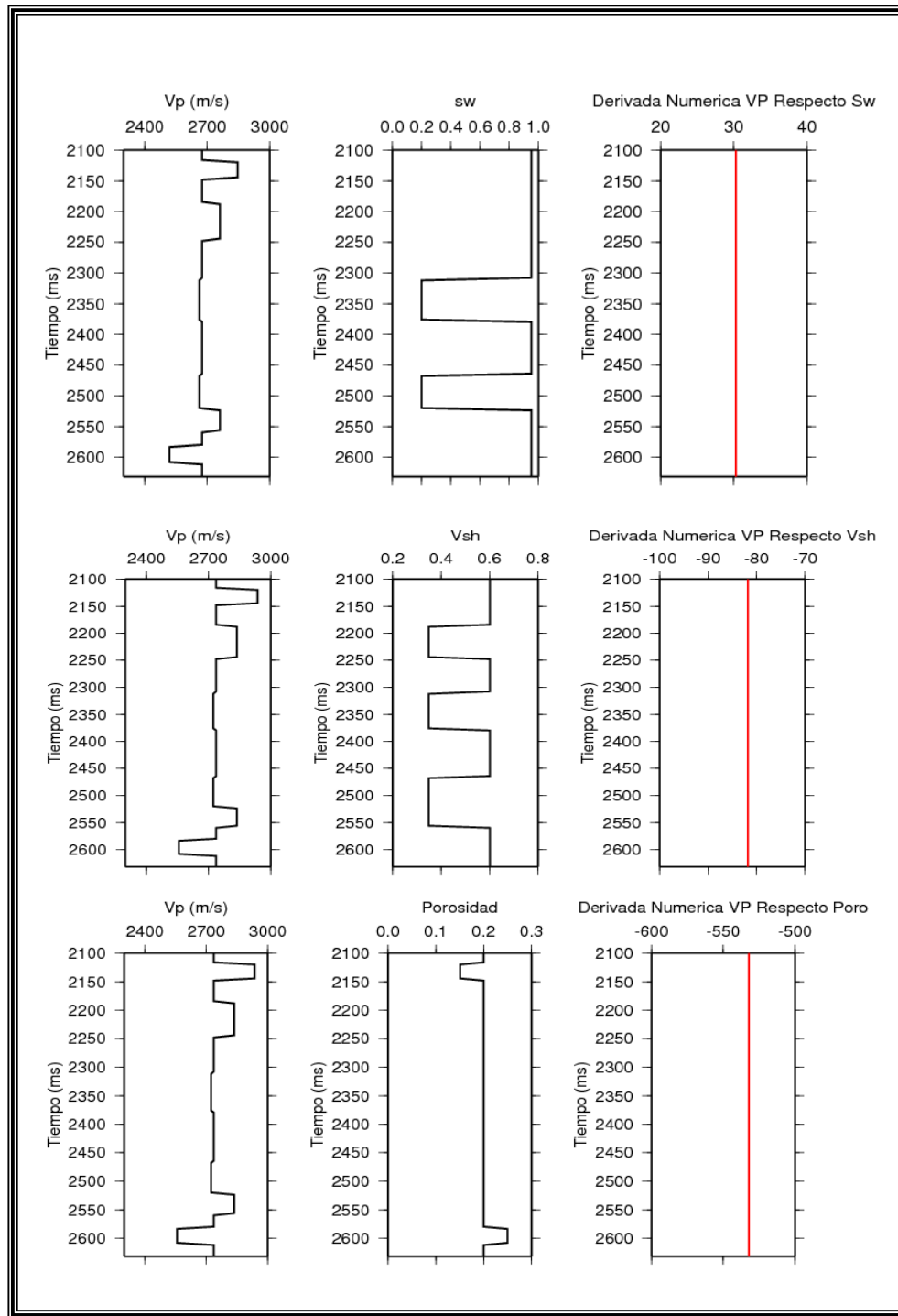


Figura 5.6. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Wyllie-Wood. Las derivadas están expresadas en metros por segundo.

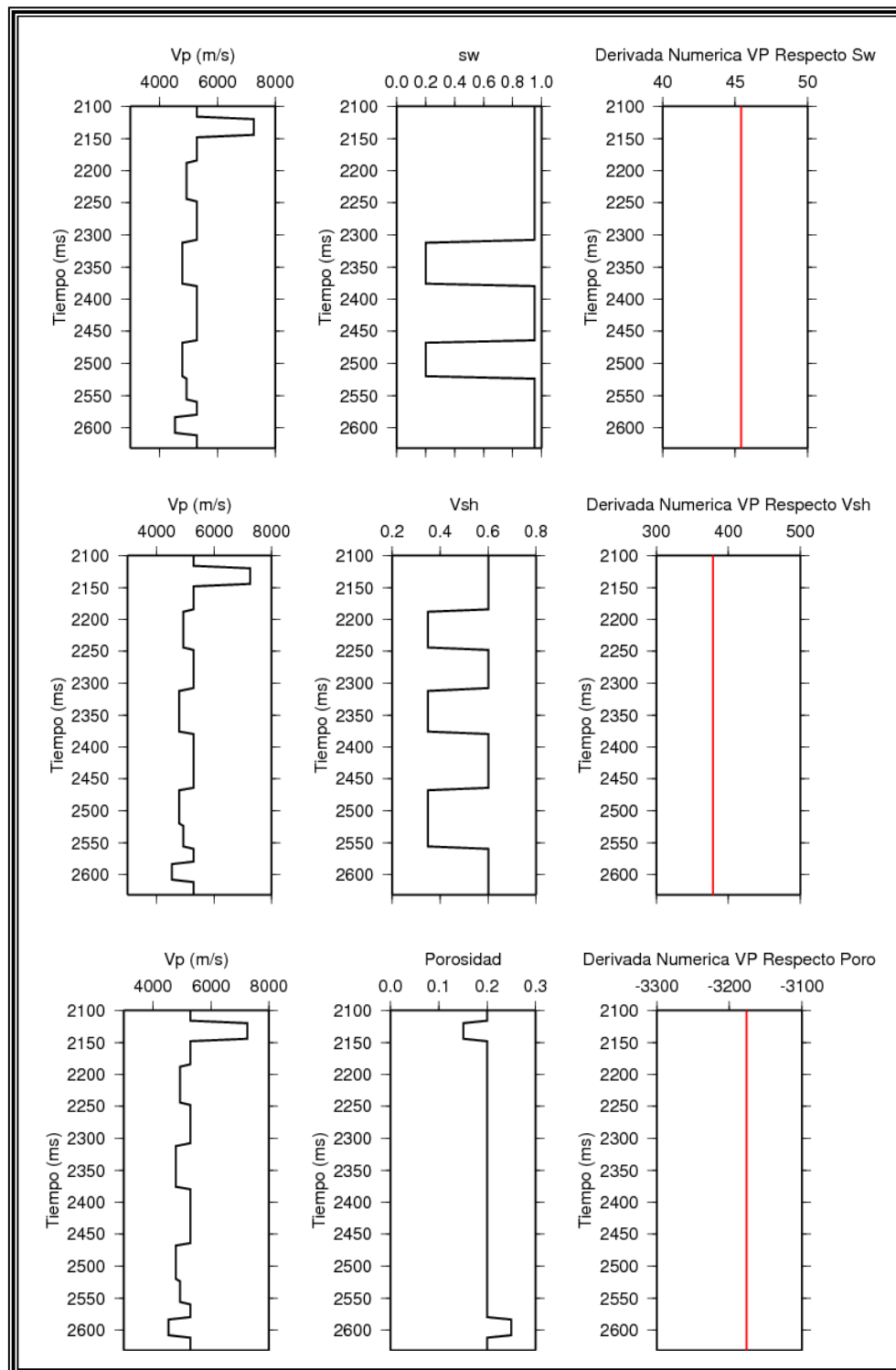


Figura 5.7. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda P respecto de las propiedades de reservorio aplicando Gassmann. Las derivadas están expresadas en metros por segundo.

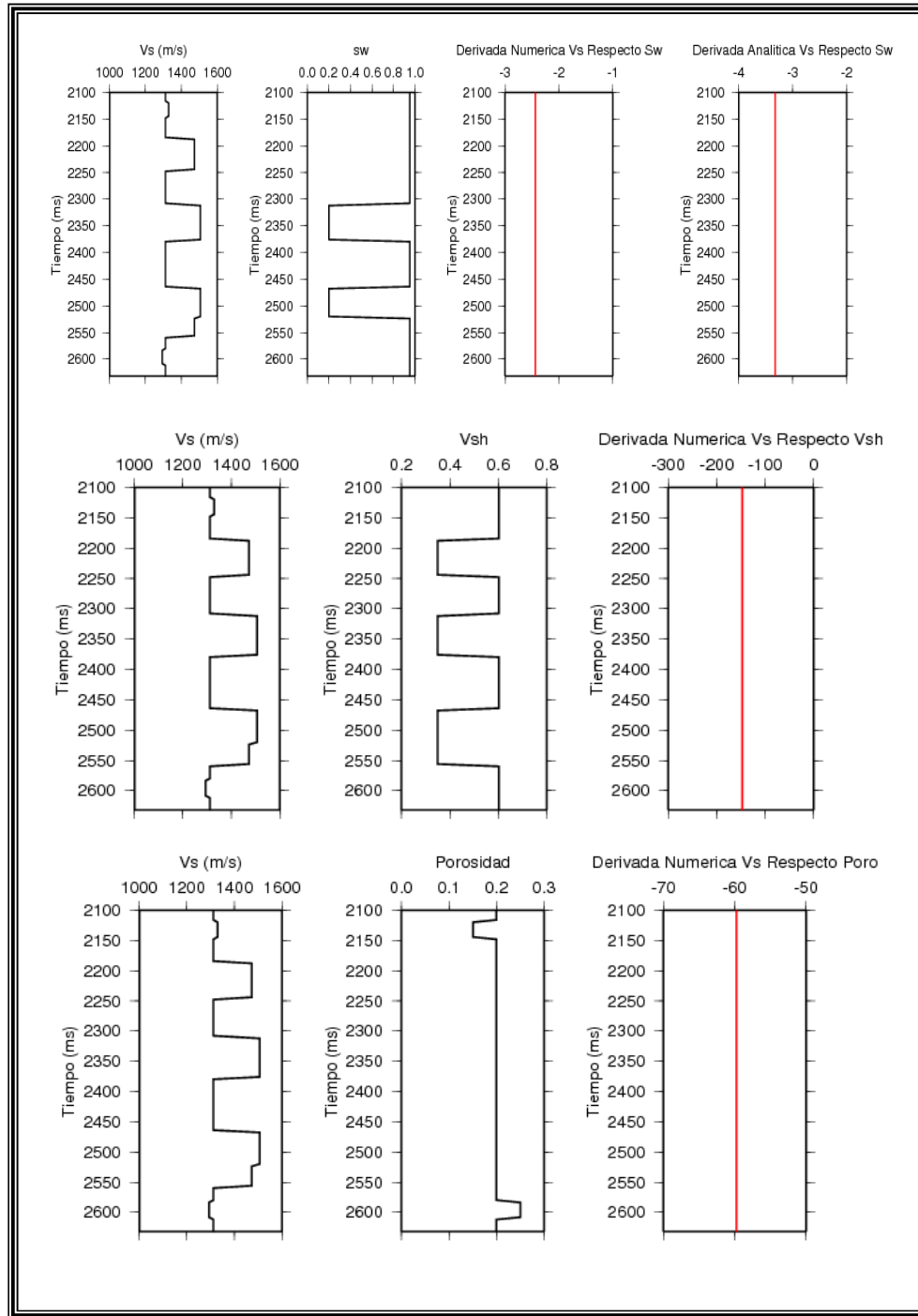


Figura 5.8. Comparación de la configuración de prueba con las derivadas numéricas de la velocidad de la onda S respecto de las propiedades de reservorio. Las derivadas están expresadas en metros por segundo.

5.3. Construcción de la matriz F

La matriz F descrita en la ecuación (2.74), una matriz compuesta por nueve derivadas numéricas centrales en función de las propiedades elásticas con respecto de las propiedades de reservorio logarítmicas. Dicha matriz depende de los modelos petrofísicos integrados Wyllie-Wood y Gassmann y su calibración; Representa un elemento necesario en la construcción del sistema de ecuaciones.

5.4. Construcción de la matriz G

Las rutinas respectivas de la construcción de dicha matriz fueron tomadas del trabajo de Torres (2007) y su respectiva aplicación para cada modelo petrofísico integrado y con tres ángulos de incidencia ($14^\circ, 28^\circ, 41^\circ$).

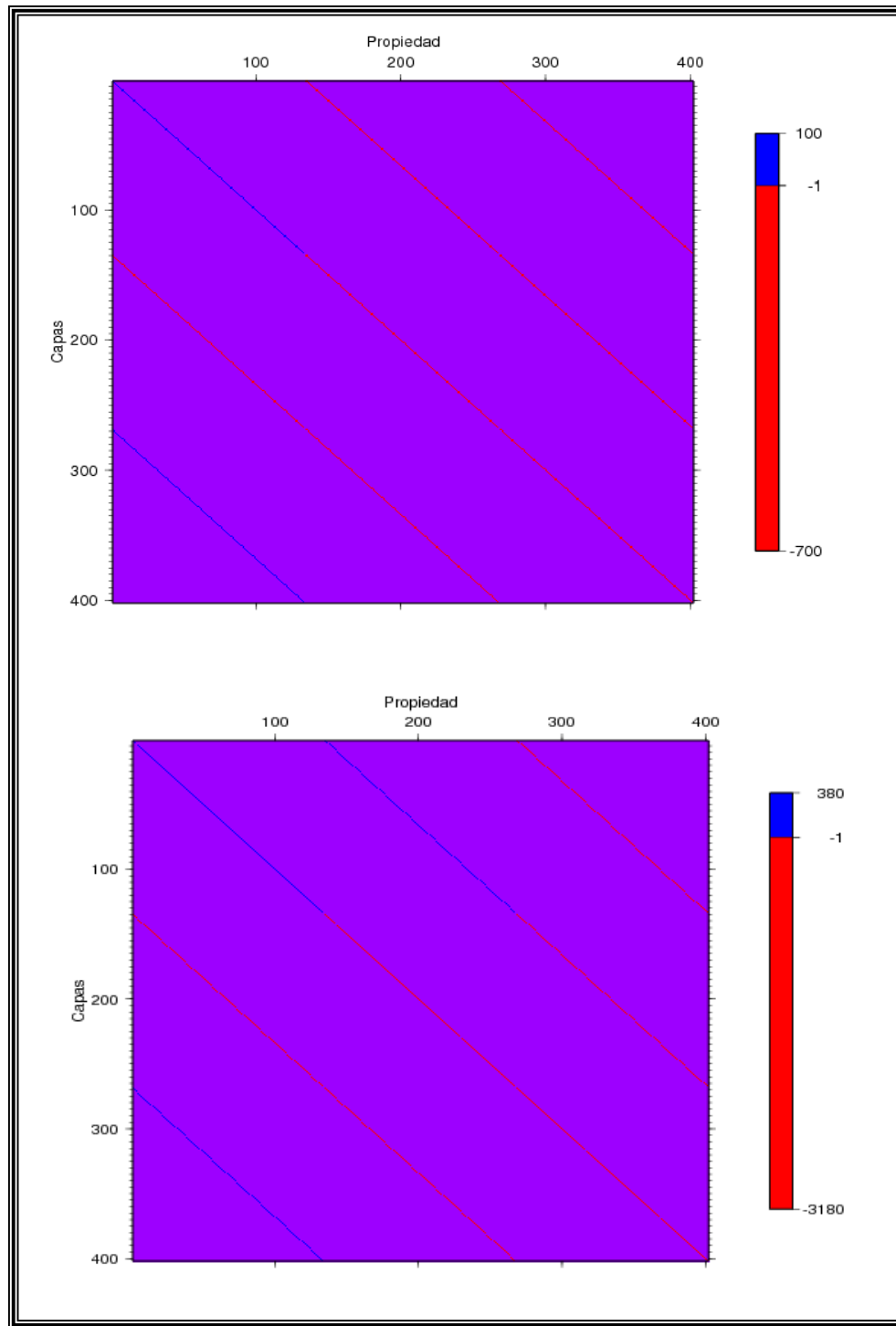


Figura 5.9. Matriz F aplicando el modelo de Wyllie-Wood (arriba) y aplicando el modelo de Gassmann (abajo).

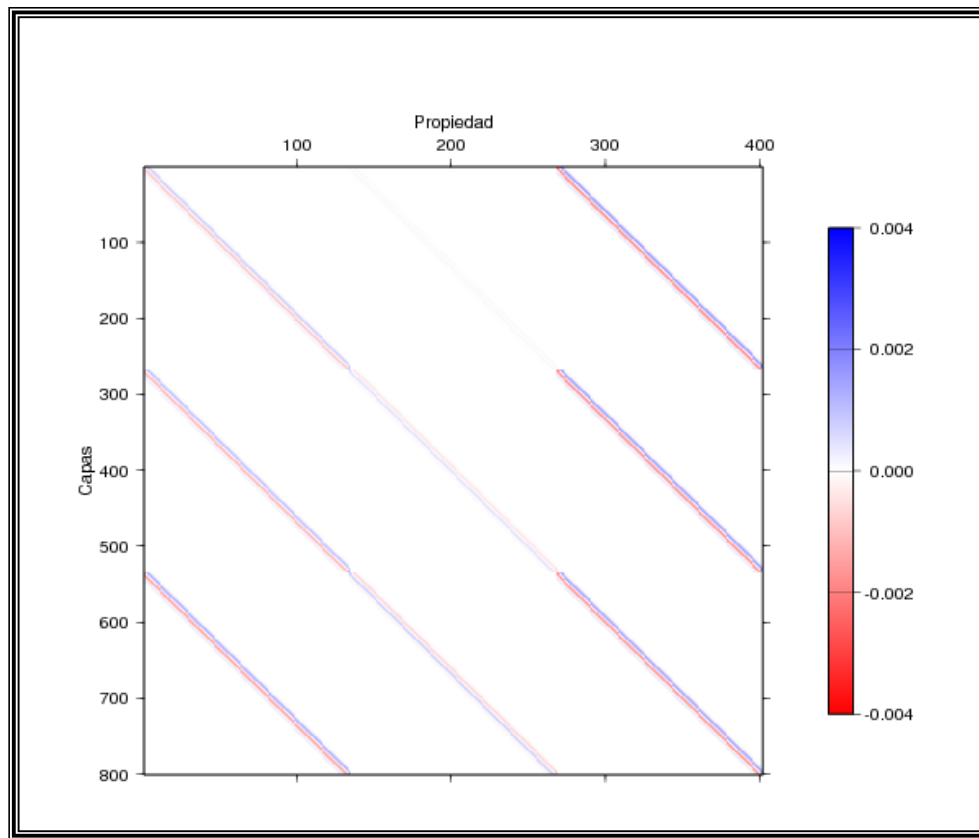


Figura 5.10 Matriz G. Aplicación con tres ángulos de incidencia.

En la figura N° 5.10 se muestra la matriz G, se puede observar en la diagonal principal de cada submatriz ubicada en la primera y tercera columna correspondiente a las derivadas de la velocidad de la onda P y la densidad respectivamente los valores son mayores a 0.002 y -0.002. Mientras los valores de las derivadas de la velocidad de la onda S son menores en comparación con las propiedades anteriormente mencionadas.

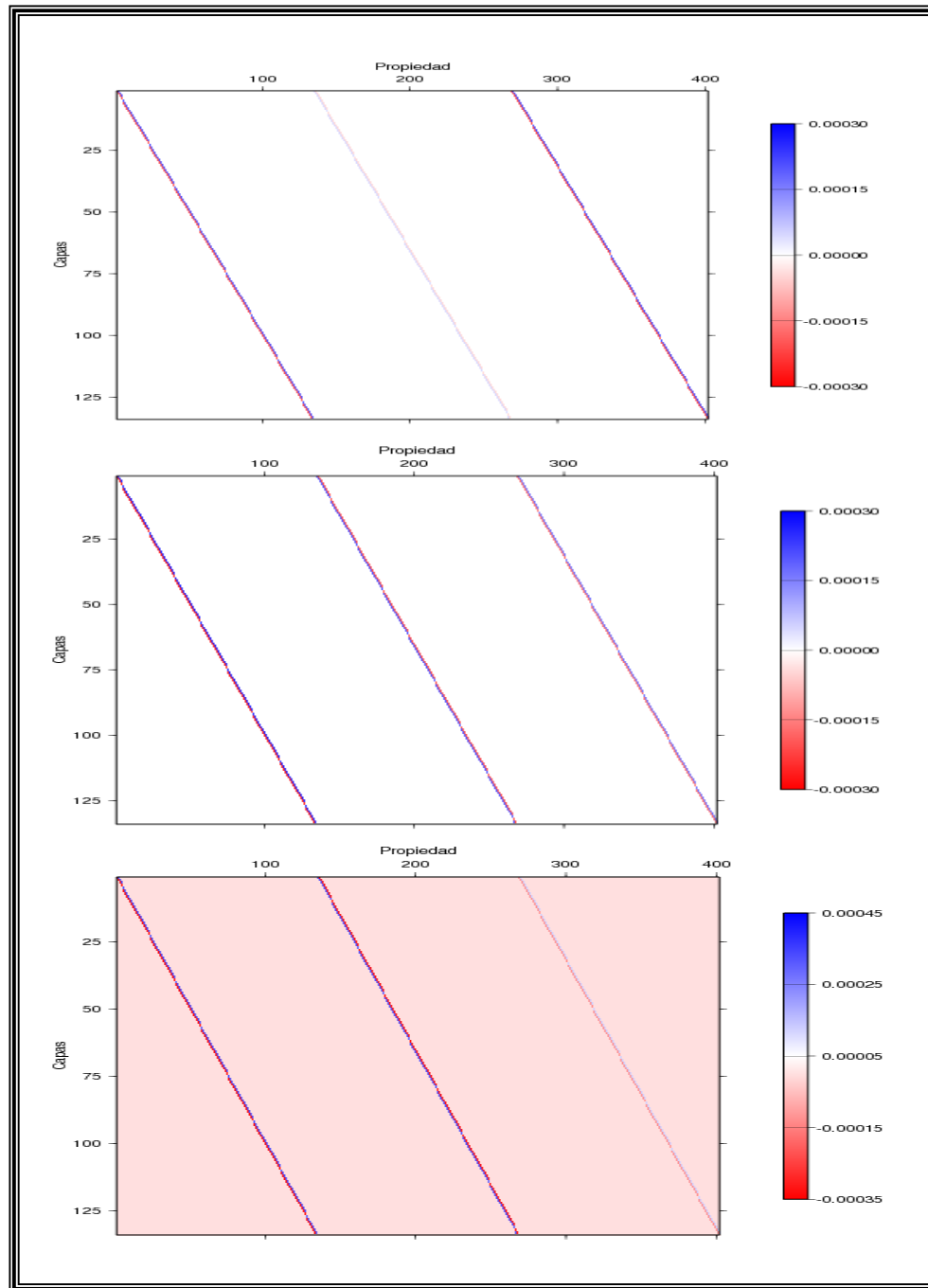


Figura 5.11 Matriz de derivadas de las propiedades elásticas respecto al ángulo. La matriz de la parte superior corresponde al ángulo 1, parte media ángulo 2 y parte inferior ángulo 3.

La figura N° 5.12 muestra el lado izquierdo del sistema de ecuación que representa una matriz correspondiente a la ecuación (2.74). La dimensión de la matriz es el triple, respecto al número de muestras que posee la ventana de tiempo elegida en la inversión para 134 muestras.

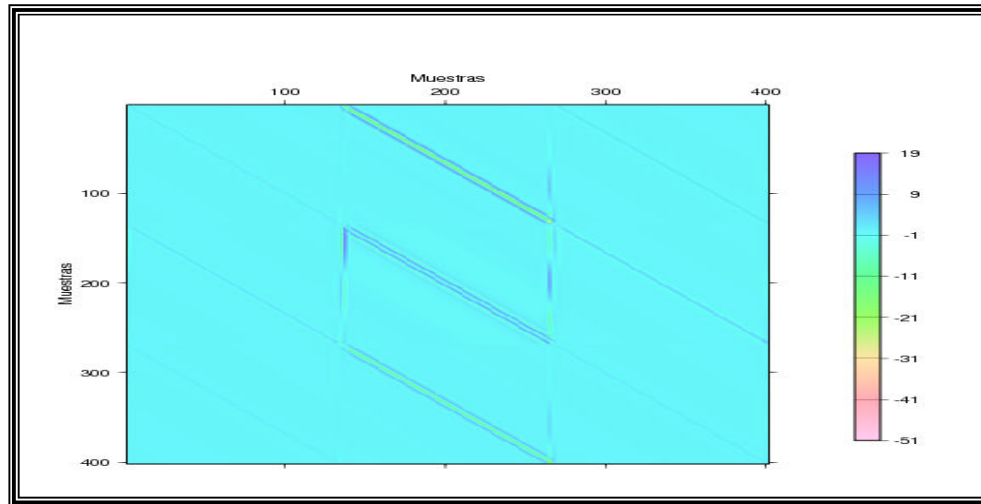


Figura 5.12 Lado izquierdo del sistema de ecuación caso sintético.

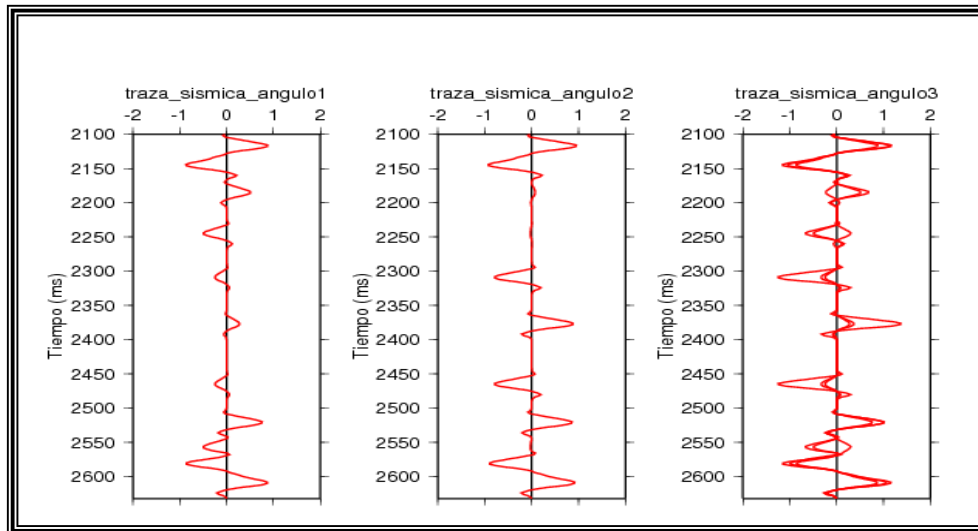


Figura 5.13 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba (línea roja) y la traza sísmica generada por la configuración previa (línea negra) para cada ángulo para la iteración 1.

En la figura N° 5.13 se observa que la traza sísmica generada por la configuración previa es de magnitud cero, ya que no hay contrastes de propiedades.

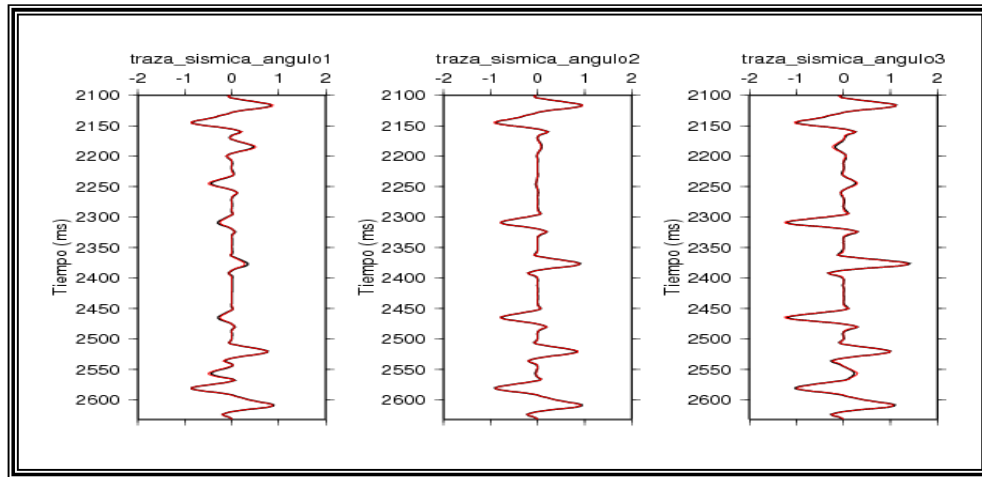


Figura 5.14 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba (línea roja) y la traza sísmica generada por la configuración previa (línea negra) para cada ángulo para la iteración 2.

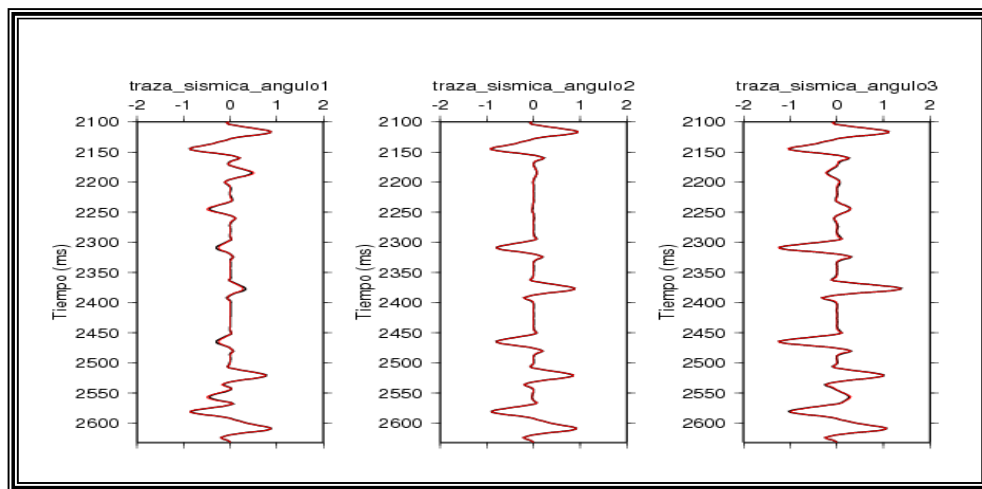


Figura 5.15 Comparación de la traza sísmica generada por la configuración de prueba (línea roja) y la traza sísmica generada por la configuración previa (línea negra) para cada ángulo para la iteración 3.

En la figura N° 5.14 y 5.15 para ambas iteraciones la traza sísmica generada por la configuración previa para la inversión se encuentra sobre la traza sísmica generada por la configuración de prueba lo cual indica que el ajuste entre los datos observados y calculados es absoluto en cada uno de los tres ángulos de incidencia, lo cual garantiza el buen funcionamiento del algoritmo y la estimación proyectada para la inversión respecto de las propiedades elásticas y de reservorio.

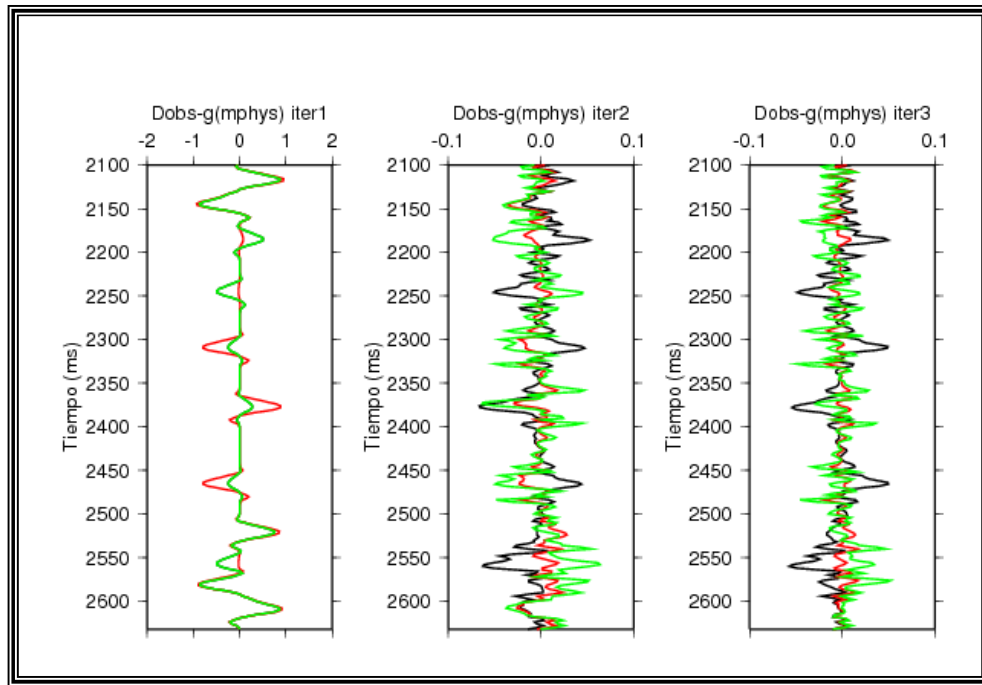


Figura 5.16 Comparación de la diferencia entre la sísmica calculada y observada por cada iteración. La traza del ángulo 1 (línea negra), la traza del ángulo 2 (línea roja) y la traza del ángulo 3 (línea verde) aplicado al caso sintético.

En la figura N° 5.16 se muestra la diferencia entre la traza sísmica que genera la configuración de prueba y la traza sísmica que genera la configuración previa dentro del ciclo de iteración. Esa diferencia está representada en lado derecho del sistema de ecuación y representa un factor clave que corresponde al aporte de la información sísmica para el proceso de inversión.

En la figura N° 5.17 se muestra la matriz de covarianza previa conjunta, en la diagonal principal se observan seis submatrices, siendo las tres primeras correspondientes a saturación, contenido de arcilla y porosidad, mientras las tres posteriores representan la submatriz de velocidad de onda P, velocidad de la onda S y densidad. Se denota que sobre la diagonal de cada submatriz los valores de correlación son altos y tienden a disminuir a medida que aumenta la distancia entre los elementos de cada submatriz.

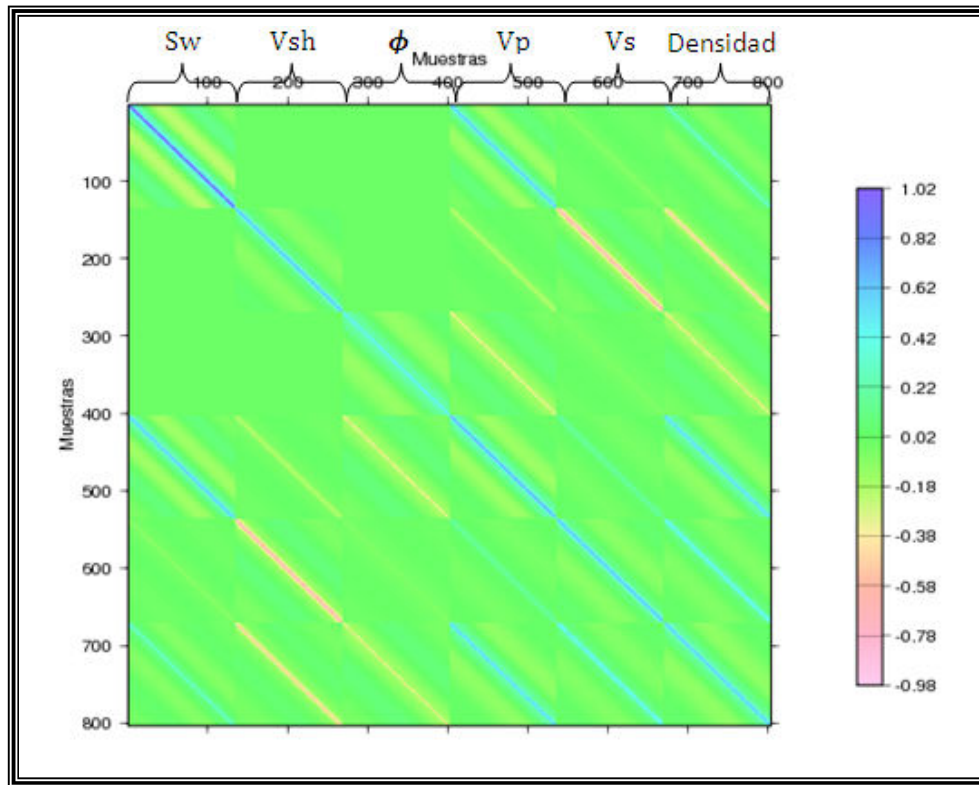


Figura 5.17 Matriz covarianza previa para el caso sintético.

En la figura N° 5.18 se muestra la matriz de covarianza previa del caso real, en la diagonal principal se observan seis submatrices, siendo las tres primeras correspondientes a saturación, contenido de arcilla y porosidad, mientras las tres posteriores representan la submatriz de velocidad de onda P, velocidad de la onda S y densidad. Se denota que sobre la diagonal de cada submatriz los valores de correlación son altos y tienden a disminuir a medida que aumenta la distancia entre los elementos de cada submatriz. La dimensión de la matriz es 6 veces,

respecto al número de muestras que posee la ventana de tiempo elegida en la inversión correspondiente a 134 muestras.

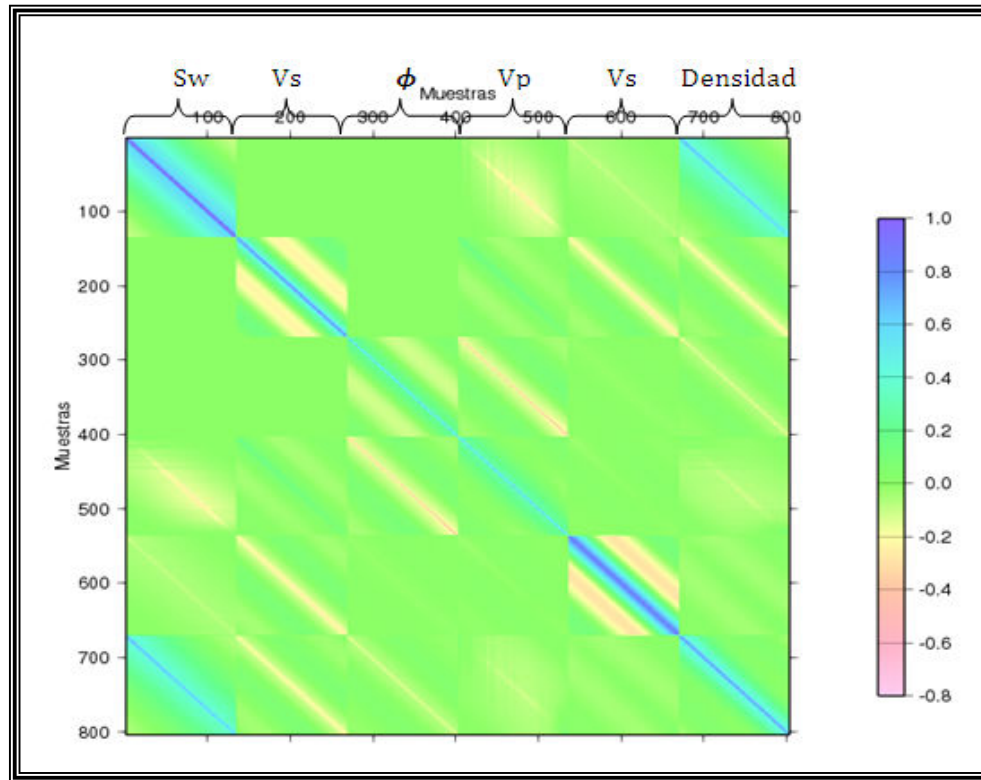


Figura 5.18. Matriz de covarianza previa para caso real.

5.5. Resultados sintéticos

El algoritmo de inversión aplicando el método de optimización se valido realizando pruebas sintéticas a partir de la configuración de prueba. Los resultados de la inversión para las propiedades elásticas y de reservorio aplicando el modelo de Wyllie-Wood son representados en la figura N° 5.19 y 5.20.

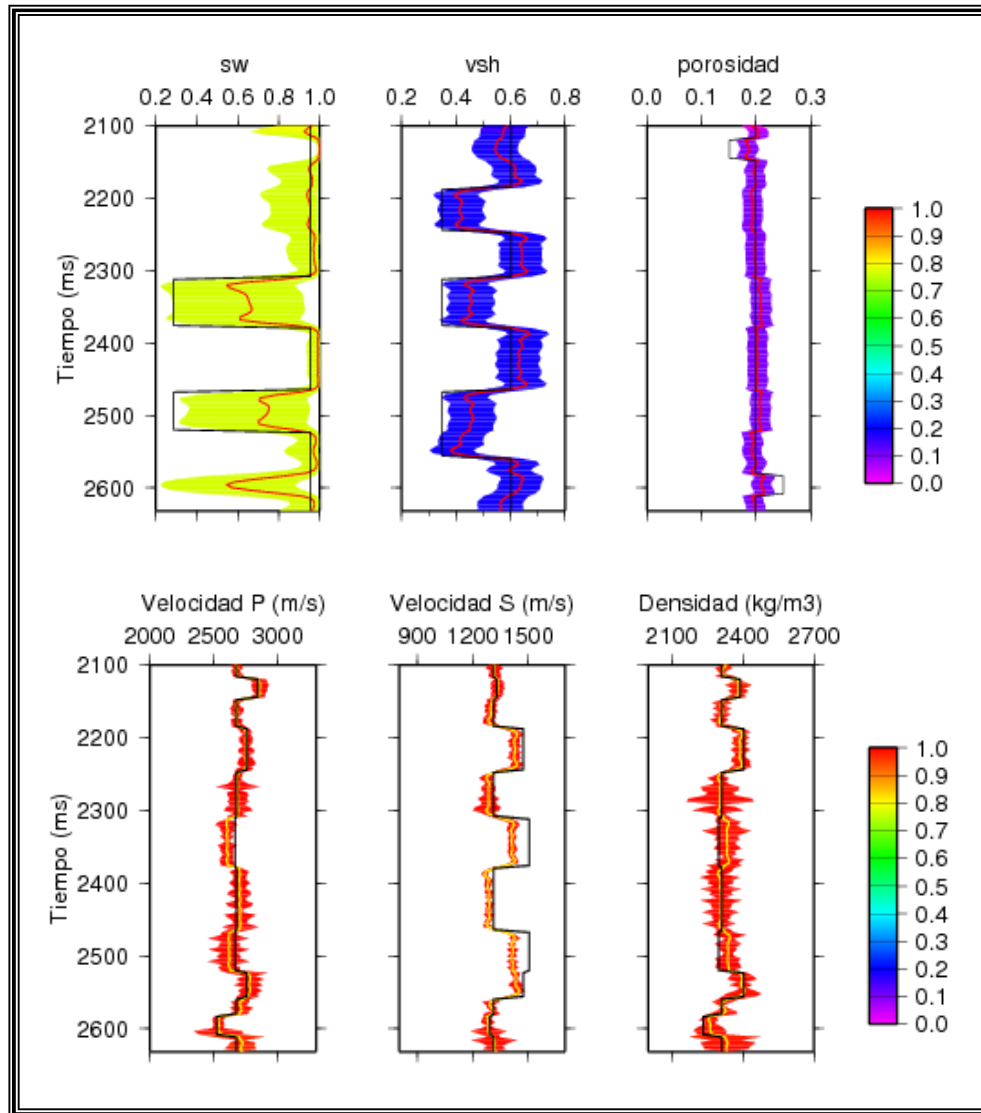


Figura 5.19. Resultado de la inversión para la iteración 1. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados para las propiedades de reservorio (línea roja) y para las propiedades elásticas (línea amarilla) En color negro se muestra la configuración de prueba.

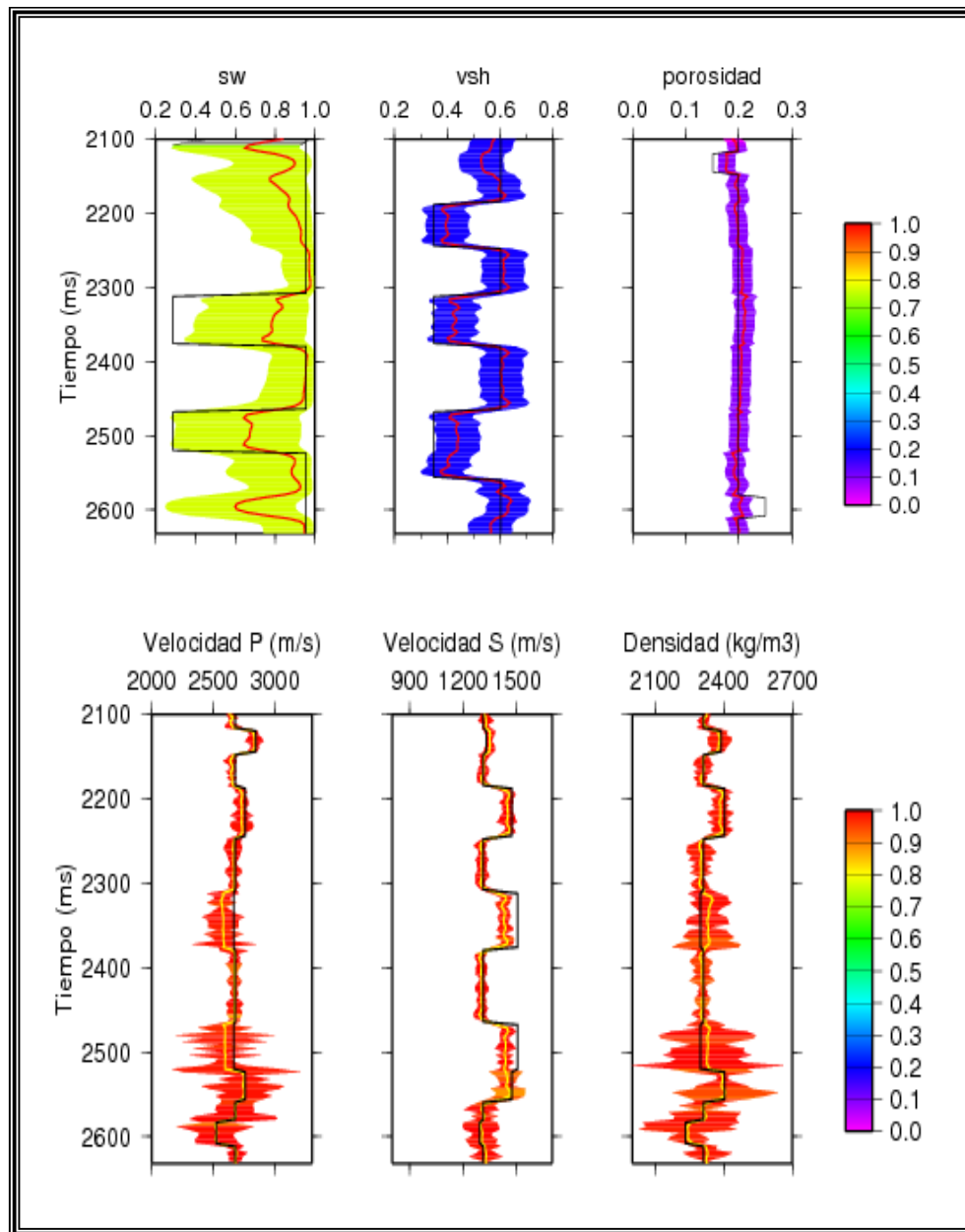


Figura 5.20. Resultado de la inversión para la iteración 2. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados para las propiedades de reservorio (línea roja) y para las propiedades elásticas (línea amarilla) En color negro se muestra la configuración de prueba.

Tabla 5.1. Coeficientes de correlación entre las propiedades de reservorio estimadas con la inversión sísmica y las correspondientes estimadas con registros de pozo con el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood.

Coeficientes de Correlación	Porosidad	Contenido de Arcilla	Saturación de Agua
Iteración 1	0.64	0.94	0.78
Iteración 2	0.56	0.95	0.60

Tabla 5.2. Coeficientes de correlación entre las propiedades de elásticas estimadas con la inversión sísmica y las correspondientes estimadas con registros de pozo con el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood.

Coeficientes de Correlación	Velocidad P	Velocidad S	Densidad
Iteración 1	0.90	0.95	0.89
Iteración 2	0.90	0.96	0.90

Las figuras N° 5.19 y 5.20 muestran los resultados de la inversión para la primera y segunda iteración; en ambas figuras se observa una buena estimación de las propiedades elásticas. Respecto del aporte de la información Geofísica se obtiene un 100% para las propiedades elásticas y se observa para las propiedades de reservorio que la información geofísica es de mayor peso en la saturación con valores del 80%, mientras la porosidad y el contenido de arcilla indican valores inferiores del 40% porque es mayor el peso de la información estadística. Para cuantificar la similitud de los valores estimados respecto de los valores de la configuración de prueba, se realizaron cálculos de los coeficientes de correlación mostrados en las Tablas N° 5.1 y 5.2; observando altos valores para las propiedades elásticas en ambas iteraciones, y las propiedades de reservorio presentan valores superiores a 0.6 lo cual indica que el algoritmo tiene un buen funcionamiento y garantiza el acercamiento entre la configuración previa propuesta respecto de la configuración de prueba.

En la figura N° 5.21 y 5.22 se presentan las propiedades de reservorio y elásticas resultantes de la inversión con la aplicación del modelo petrofísico de Gassmann para la iteración 1 y 2 respectivamente.

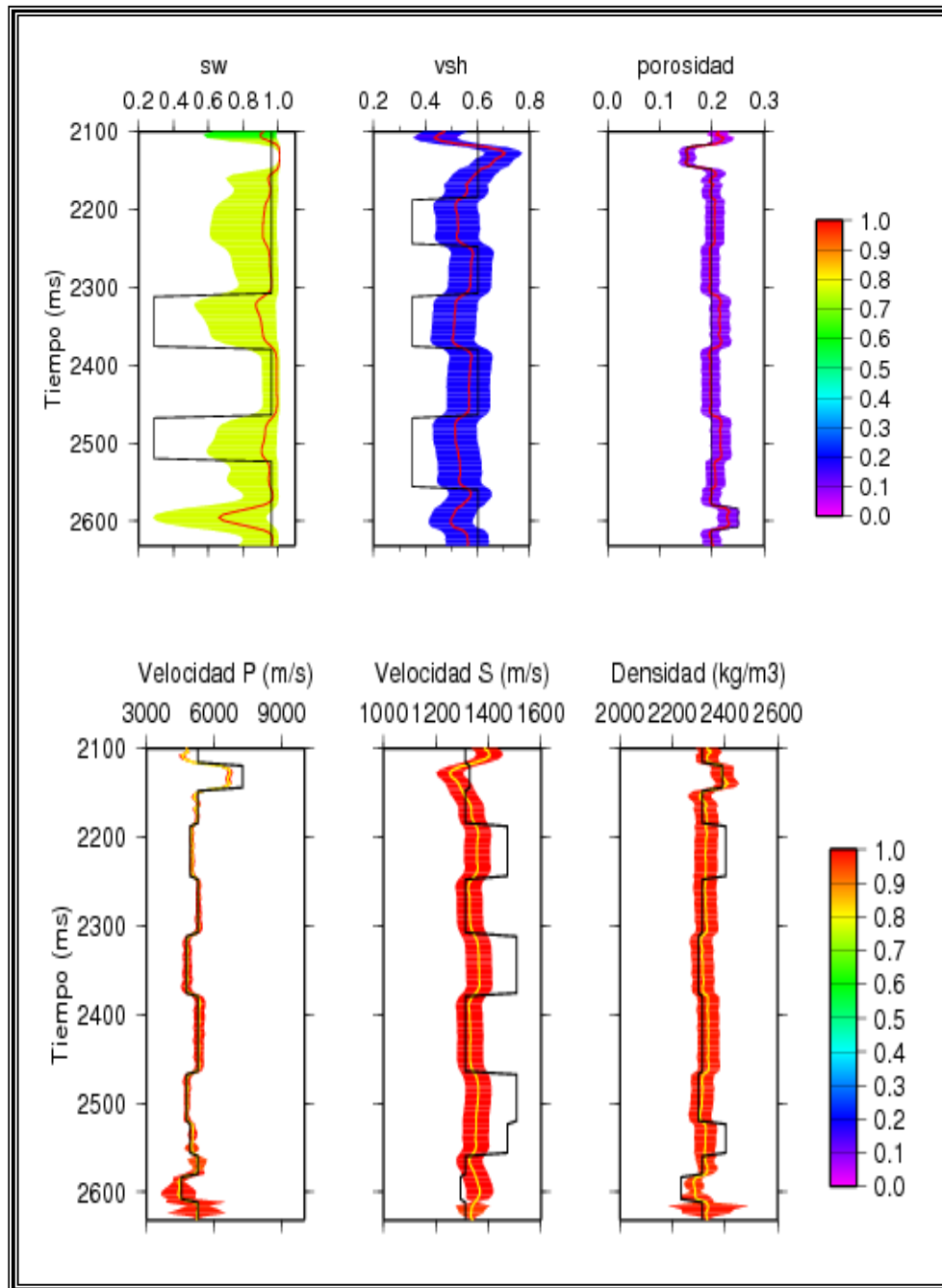


Figura 5.21. Resultado de la inversión para la iteración 1. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados para las propiedades de reservorio (línea roja) y para las propiedades elásticas (línea amarilla) En color negro se muestra la configuración de prueba.

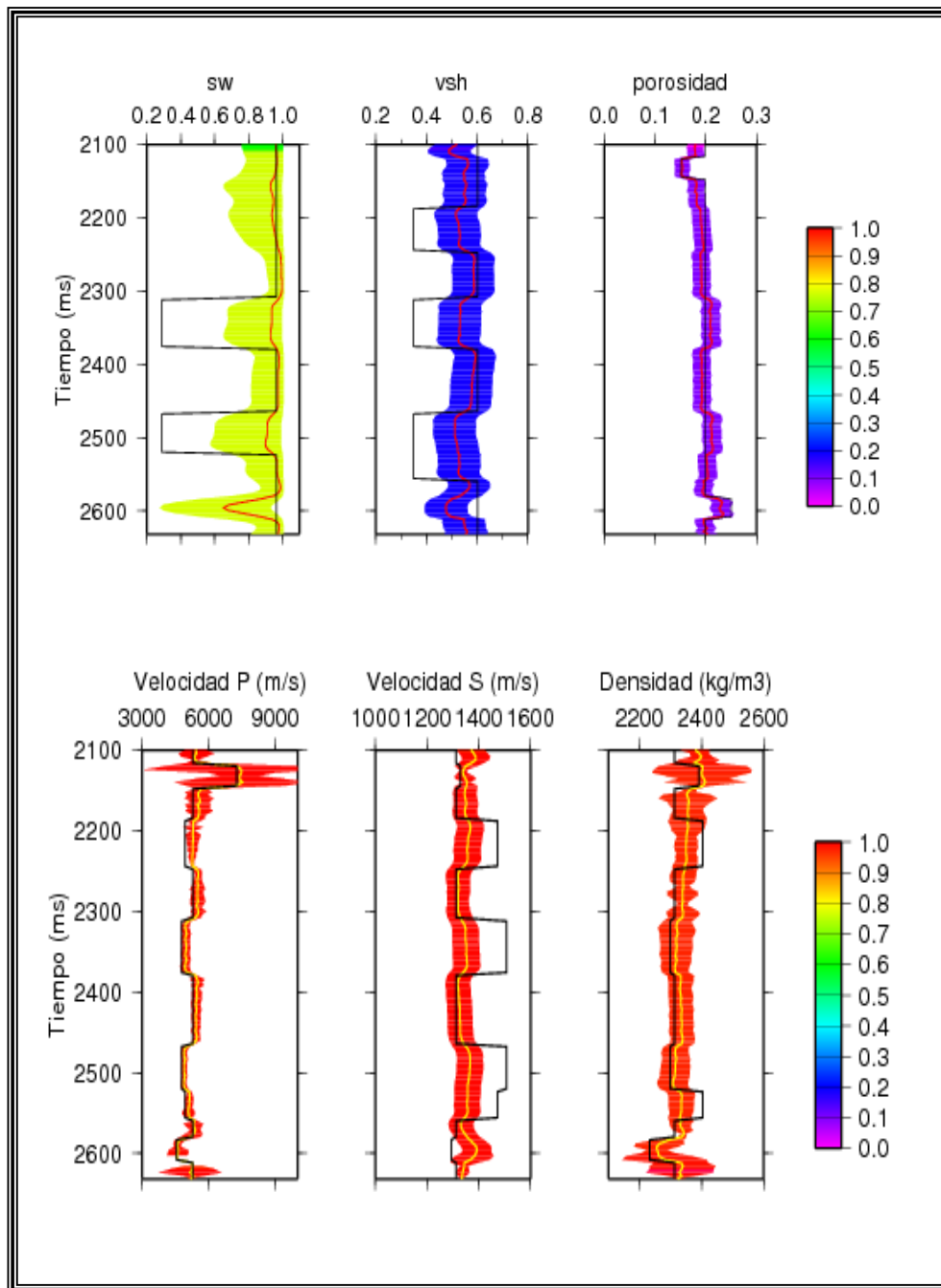


Figura 5.22. Resultado de la inversión para la iteración 2. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados para las propiedades de reservorio (línea roja) y para las propiedades elásticas (línea amarilla) En color negro se muestra la configuración de prueba.

Tabla 5.3. Coeficientes de correlación entre las propiedades de reservorio estimadas con la inversión sísmica y las correspondientes estimadas con registros de pozo con el modelo petrofísico integrado Gassmann.

Coeficientes de Correlación	Porosidad	Contenido de Arcilla	Saturación de Agua
Iteración 1	0.82	0.99	0.35
Iteración 2	0.80	0.52	0.20

Tabla 5.4. Coeficientes de correlación entre las propiedades de elásticas estimadas con la inversión sísmica y las correspondientes estimadas con registros de pozo con el modelo petrofísico integrado Gassmann.

Coeficientes de Correlación	Velocidad P	Velocidad S	Densidad
Iteración 1	0.94	0.50	0.54
Iteración 2	0.98	0.39	0.62

Las figuras N° 5.21 y 5.22 muestran los resultados de la inversión para la primera y segunda iteración; se observa que la segunda iteración tiende a ajustarse más a la configuración de prueba. Se observa que el aporte de la información geofísica para la velocidad de la onda P, la velocidad de la onda S y la densidad es superior al 90% indicando la influencia de la información sísmica. También se puede observar en las propiedades de reservorio la información Geofísica es de mayor peso se presenta en la saturación con valores del 80%, mientras la porosidad y el contenido de arcilla indican valores inferiores del 40% porque es mayor el peso de la información estadística. Para cuantificar la similitud de los valores estimados respecto de los valores de la configuración de prueba, se realizaron cálculos de los coeficientes de correlación mostrados en las Tablas N° 5.3 y 5.4; se observa que los valores obtenidos de las propiedades elásticas son altos indicando que la configuración previa se parece a la configuración de prueba. También se observan valores altos para las propiedades de reservorio, solo la saturación muestra un contraste respecto de la configuración de prueba.

La figura N° 5.23 muestra el progreso del residuo de los datos sísmicos, medido en la estadística Chi-cuadrado, con las iteraciones del algoritmo de inversión, para el caso de la combinación de tres ángulos de incidencia. Se puede observar que el valor del residuo disminuye a partir de la segunda iteración, garantizando la

existencia del ajuste entre los datos observados y el modelo calculado de la inversión.

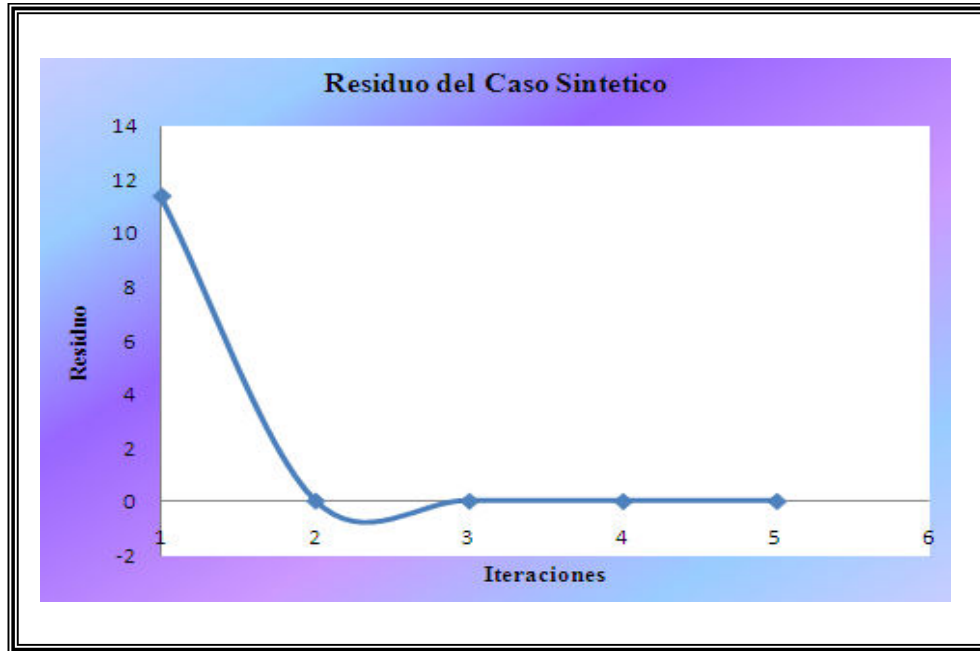


Figura 5.23. Estadística de Chi-cuadrado para el residuo de los datos geofísicos. Para el caso de la inversión de datos sísmicos con 3 ángulos de incidencia.

CAPITULO VI

VALIDACIÓN CON DATOS REALES

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la inversión realizada al conjunto de datos reales descritos en la sección 3.10 del marco metodológico. Para generar las secciones de las 6 propiedades se utilizó 3 ángulos de incidencia para la inversión; cada uno asociado a un apilado determinado (14° , 28° , 41°). Las figuras N° 6.1, 6.2 y 6.3 muestran las secciones por ángulo cercano, mediano y lejano para los datos sísmicos que fueron utilizados en la inversión.

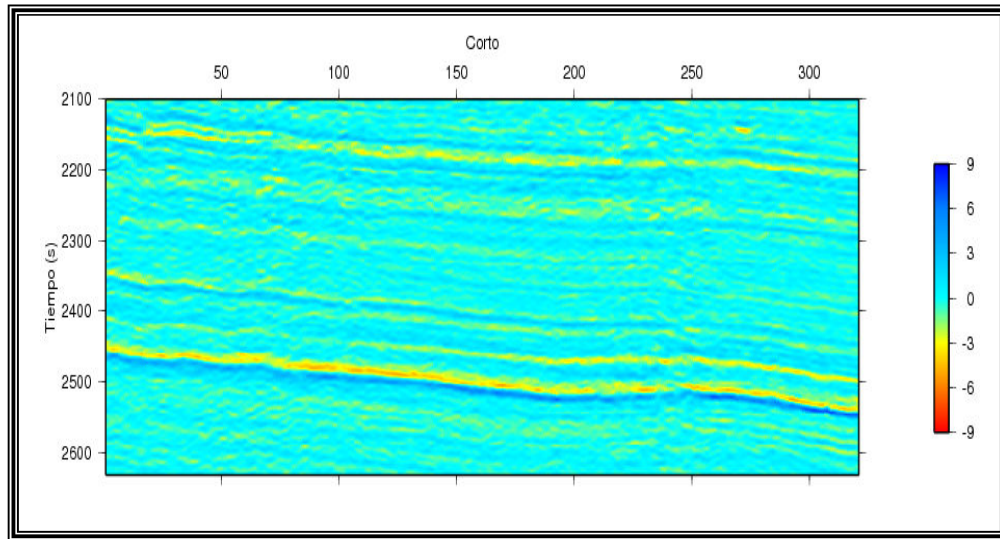


Figura 6.1. Sección sísmica por apilado cercano

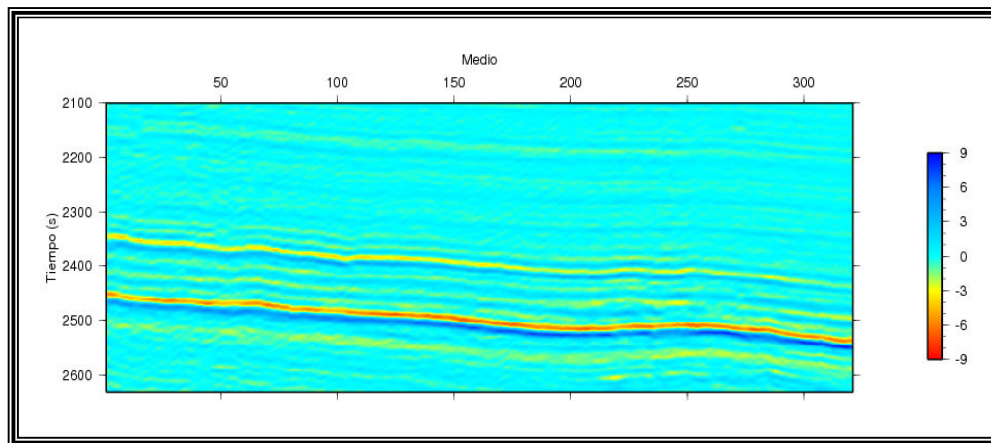


Figura 6.2. Sección sísmica por apilado medio.

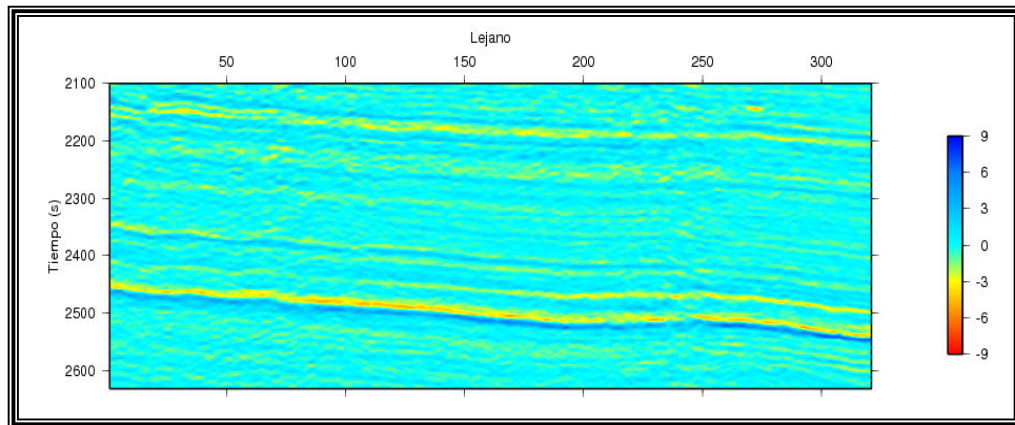


Figura 6.3. Sección sísmica por apilado lejano.

En las secciones de amplitudes sísmicas mostradas anteriormente se puede apreciar claramente la presencia de dos eventos de mayor amplitud; uno ubicado a los 2360 ms para el primer CDP hasta los 2450 ms respecto al último CDP. De manera análoga el segundo evento (el inferior) se ubica aproximadamente a los 2450 ms hasta los 2550 ms.

Es de conocimiento previo por la empresa que facilitó los datos que el evento superior se debe a un cambio litológico y el evento inferior se produce por presencia de gas en el mismo.

En la figura N° 6.4 se observa la configuración previa de los parámetros de reservorio y elásticas respectivamente.

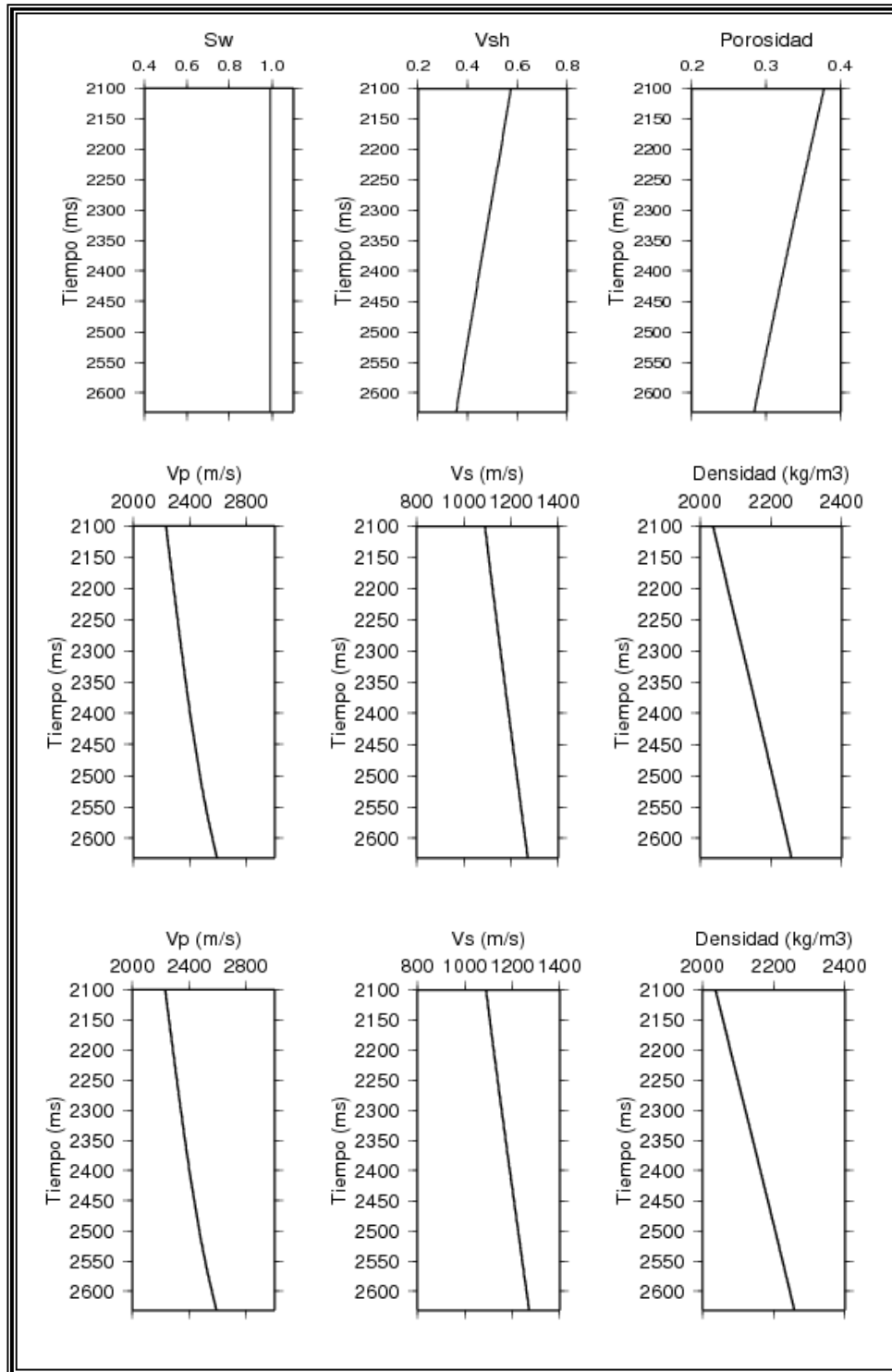


Figura 6.4. Configuración previa de las propiedades de reservorio (arriba), de las propiedades elásticas de Wyllie (intermedio) y Gassmann (abajo).

6.1. Resultados de inversión

A continuación se presentan las secciones obtenidas para el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood con la inversión de datos sísmicos aplicando el método de Optimización (figura N° 6.5 y 6.6) para la porosidad, contenido de arcilla, saturación de agua, velocidad P, velocidad S y densidad de masa; superpuestos a éstas se encuentran ubicados los dos pozos realizados en la zona (CDP 6 y CDP 309).

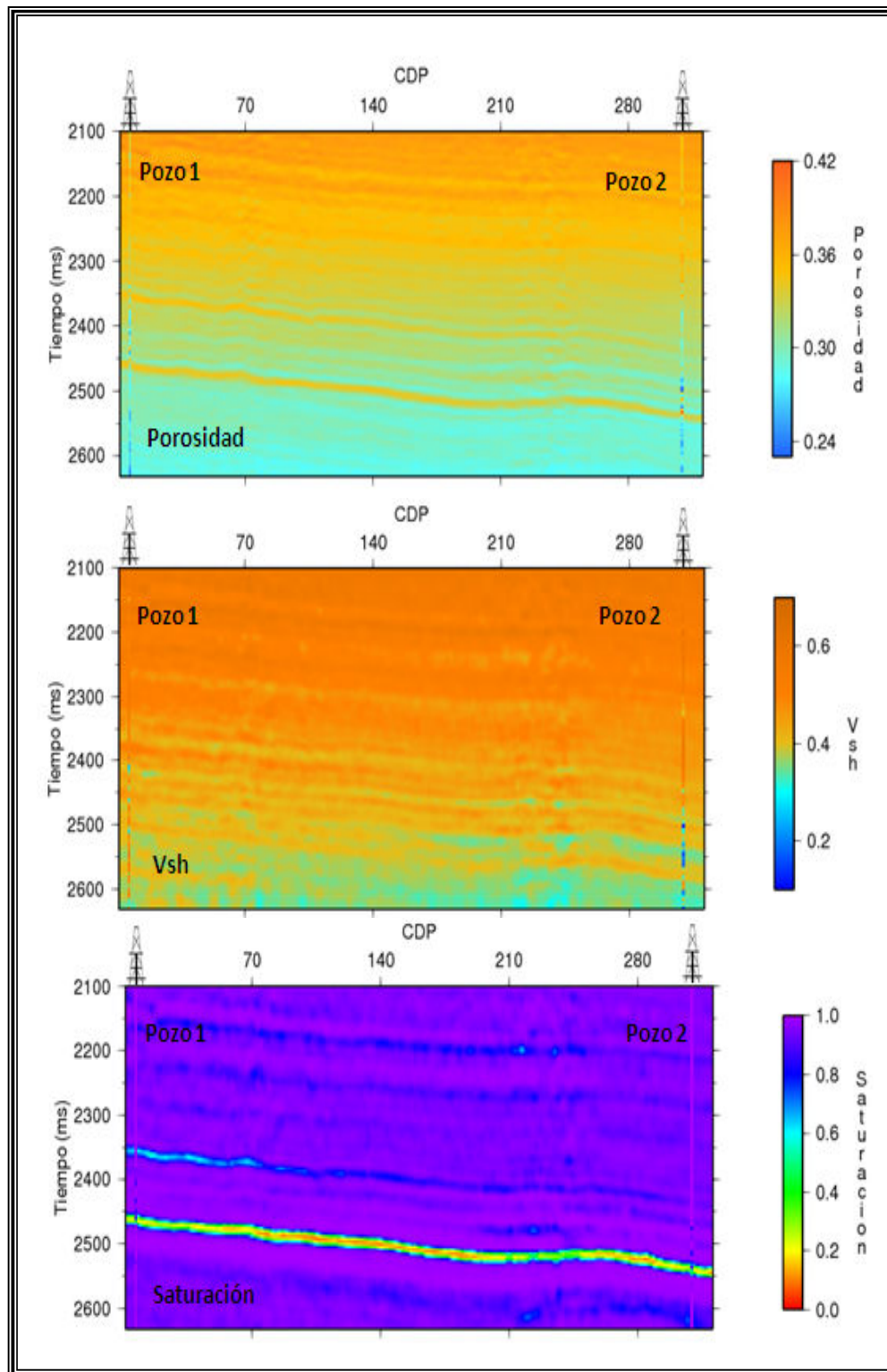


Figura 6.5. Inversión obtenida para 3 ángulos (14° , 28° , 41°) de incidencia para las propiedades de reservorio aplicando el modelo Wyllie-Wood. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

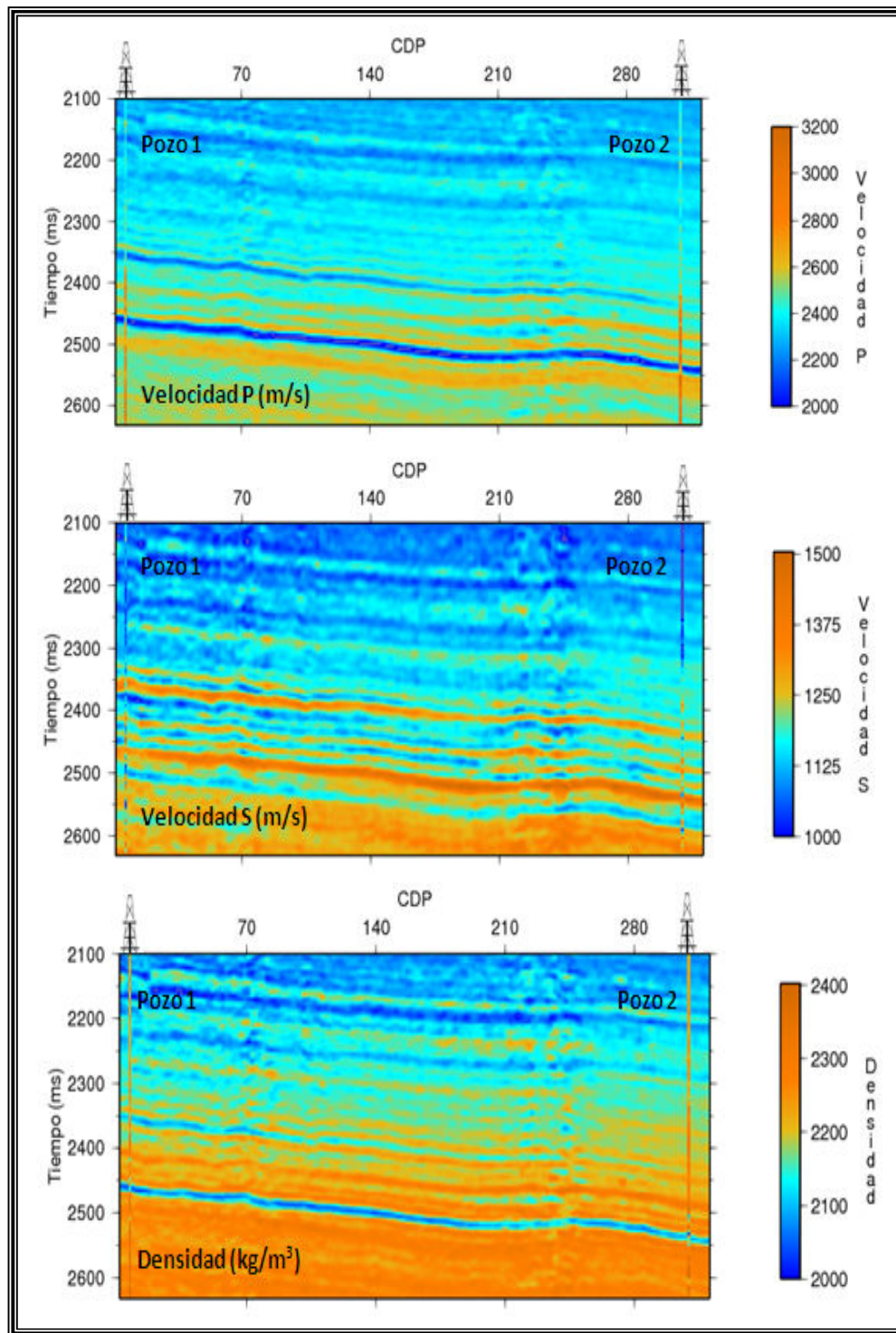


Figura 6.6. Inversión obtenida para 3 ángulos (14° , 28° , 41°) de incidencia para las propiedades elásticas aplicando el modelo Wyllie-Wood. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

De la figura N° 6.5 para la sección de la porosidad se puede observar que para el evento de interés (zona de gas), ésta propiedad varía entre 0.30 y 0.36. Con respecto a la región suprayacente al primer evento se puede observar una distribución caracterizada por valores iguales y superiores a 0.36, el cual puede asociarse a una lutita (Mavko et al., 1998). Respecto a la región infrayacente al segundo evento se puede notar una distribución de la porosidad comprendida entre 0.30 y valores inferiores a éste, el cual puede estar asociado a una arenisca saturada de agua (Mavko et al., 1998).

Con respecto a la sección del contenido de arcilla se puede observar en la capa suprayacente al primer evento valores superiores a 0.5. Respecto al segundo evento donde la continuidad de la capa no se aprecia completamente, sin embargo indica una disminución de la propiedad en cuestión, el cual es de esperarse este comportamiento ya que el reservorio de gas se encuentra en un estrato arenoso.

Con respecto a la sección de la saturación de agua se puede observar en toda el área altos valores de la propiedad, exceptuando una capa que presenta niveles bajos de agua connata. Dicha capa indica una zona de sustitución de fluido (Agua-gas).

En la figura N° 6.6 para la sección de velocidad P se puede observar que en la zona de interés ocurre una disminución de la velocidad con valores inferiores 2100 m/s lo cual evidencia el efecto del aumento de porosidad y la presencia del fluido intersticial corresponde a gas. Otro punto importante es que para el primer evento se observan velocidades de la onda P de altas a moderadas, indicando la presencia de capas saturadas de agua por lo expuesto anteriormente.

La sección para la velocidad S, muestra una distribución de la propiedad que aumenta conforme a la profundidad, y en la zona de interés alcanza un máximo de la misma.

Finalmente para la sección de densidad de masa. Para el primer evento se observa una disminución de la densidad de masa comprendida entre 2200 y 2150 (Kg/m^3) respectivamente; mientras que para el segundo evento (zona de gas) la propiedad varía a valores inferiores a 2100 kg/m^3 . Mientras la capa suprayacente e infrayacente a la misma indican valores superiores a 2300 kg/m^3 .

A continuación se presentan los gráficos de los resultados de inversión de las 6 propiedades para los CDP 6 y CDP 309.

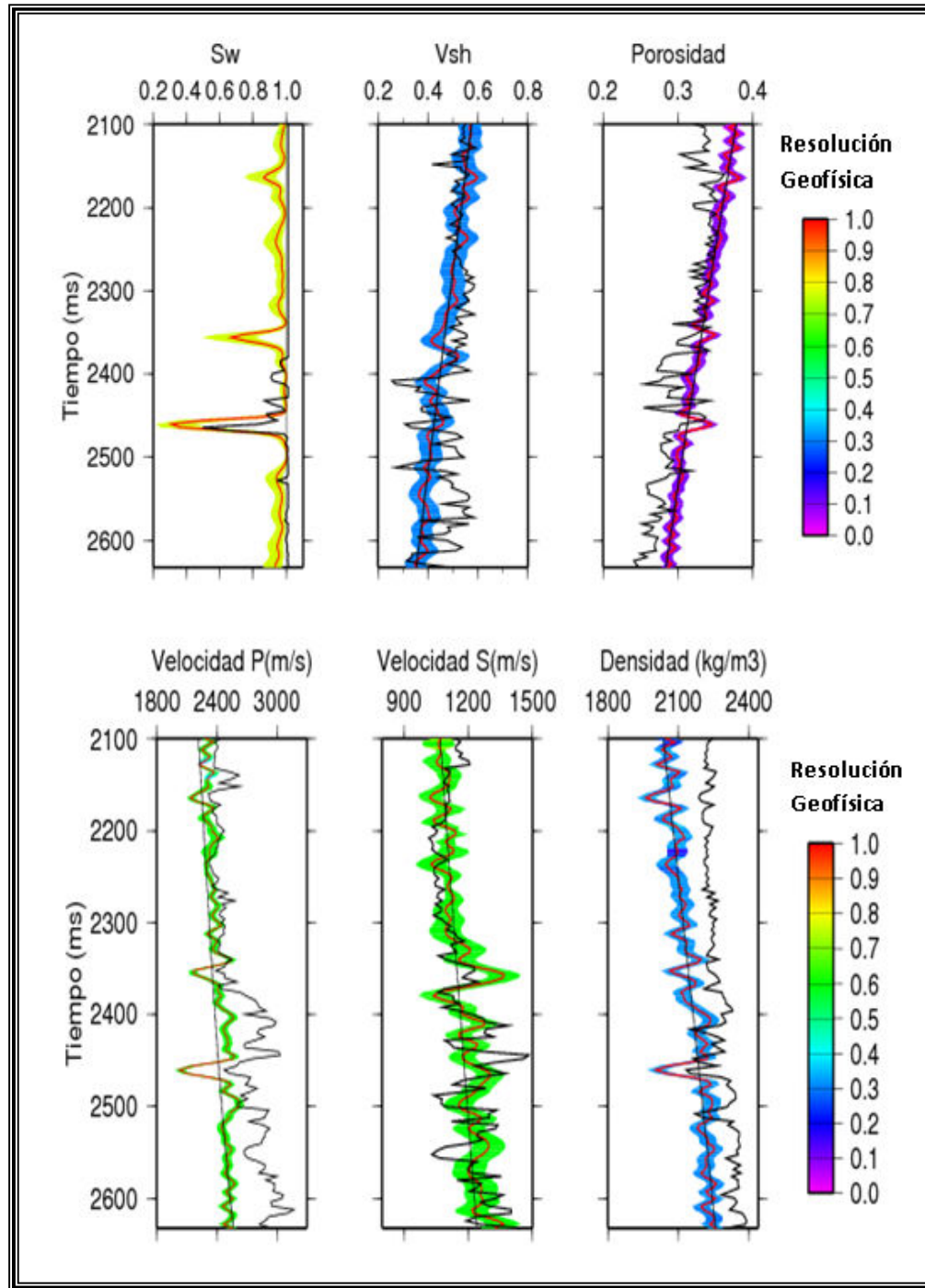


Figura 6.7. Resultado de la inversión para el CDP 6, correspondiente a la localización del pozo 1. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados con color rojo y los registros de pozos suavizados y la media en color negro.

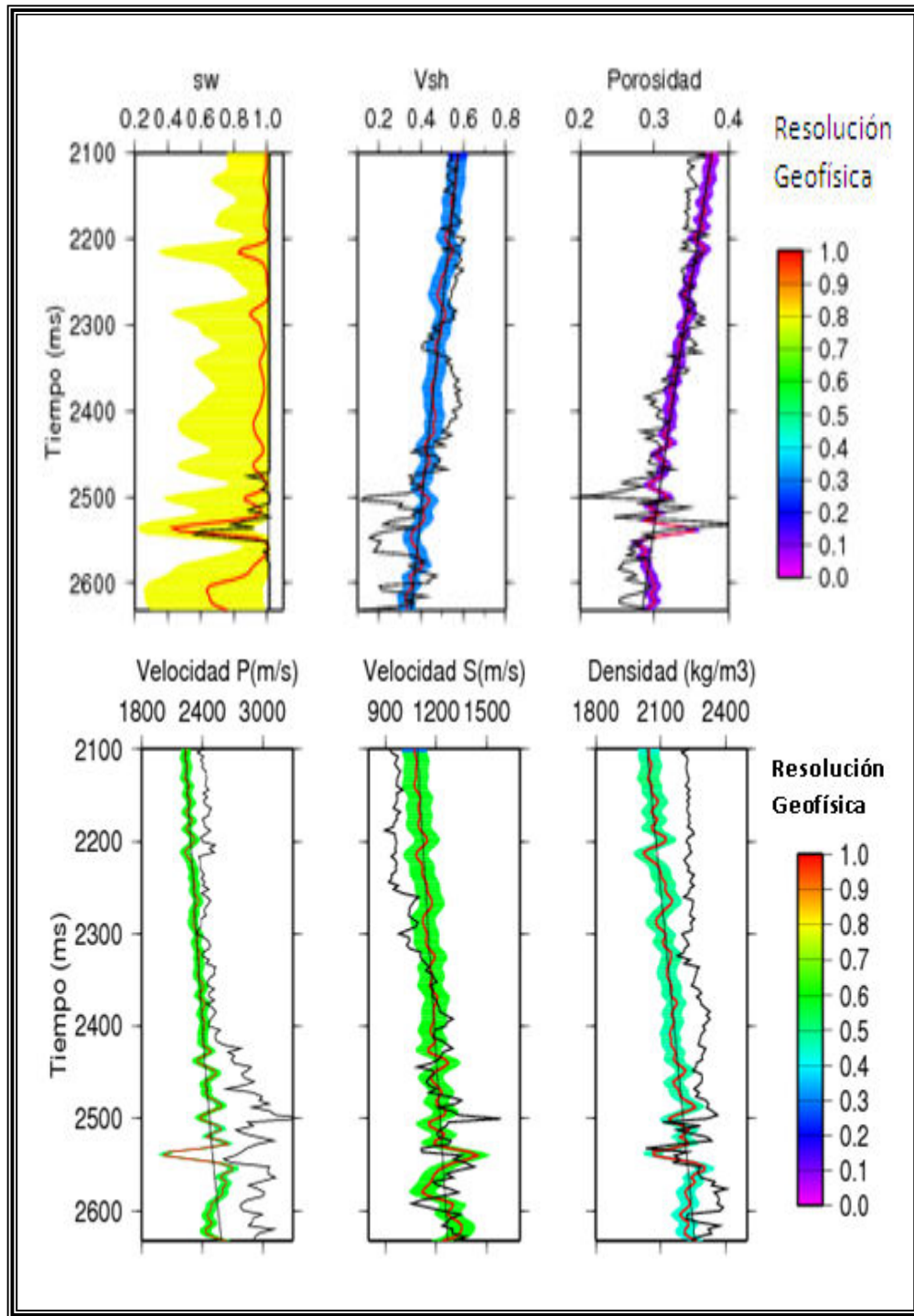


Figura 6.8. Resultado de la inversión para el CDP 309, correspondiente a la localización del pozo 2. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados con color rojo y los registros de pozos suavizados y la media en color negro.

Tabla 6.1. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio con el modelo petrofísico integrado Wyllie-Wood.

Coeficientes de Correlación	Porosidad	Contenido de Arcilla	Saturación de Agua
CDP 6	0.83	0.43	0.64
CDP 309	0.78	0.73	0.66

Tabla 6.2. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas con el modelo petrofísico integrado de Wyllie-Wood.

Coeficientes de Correlación	Velocidad P	Velocidad S	Densidad
CDP 6	0.72	0.55	0.72
CDP 309	0.70	0.66	0.52

Las figuras N° 6.7 y 6.8 muestran los resultados de la inversión para los dos CDP de la zona donde se realizaron registros de pozo; en ambas figuras se observa una mejor estimación de la velocidad de la onda P y la velocidad de la onda S en comparación con la densidad. El aporte de la información geofísica para la velocidad de la onda P, y para la velocidad de la onda S corresponde al 70%, mientras la densidad presenta valores que oscilan entre el 40% y 60% indicando influencia de la información estadística, según Debski y Tarantola (1995) la densidad generalmente esta menos restringida por la información contenida en la forma de onda que las impedancias y las velocidades. También se puede observar para las propiedades de reservorio que la información geofísica de mayor peso se presenta en la saturación con valores del 80%, mientras la porosidad y el contenido de arcilla indican valores inferiores del 40% porque es mayor el peso de la información estadística. Para cuantificar la similitud de los valores estimados respecto de los valores verdaderos, se realizaron cálculos de los coeficientes de correlación mostrados en las Tablas N° 6.1 y 6.2; observando altos valores para todas las propiedades indicando así que la inversión obtenida para las propiedades elásticas y de reservorio es la esperada respecto de la configuración real.

En las figuras N° 6.9 y 6.10 se presentan las secciones obtenidas con el segundo modelo petrofísico (Gassmann) con la inversión de datos sísmicos aplicando el método de optimización.

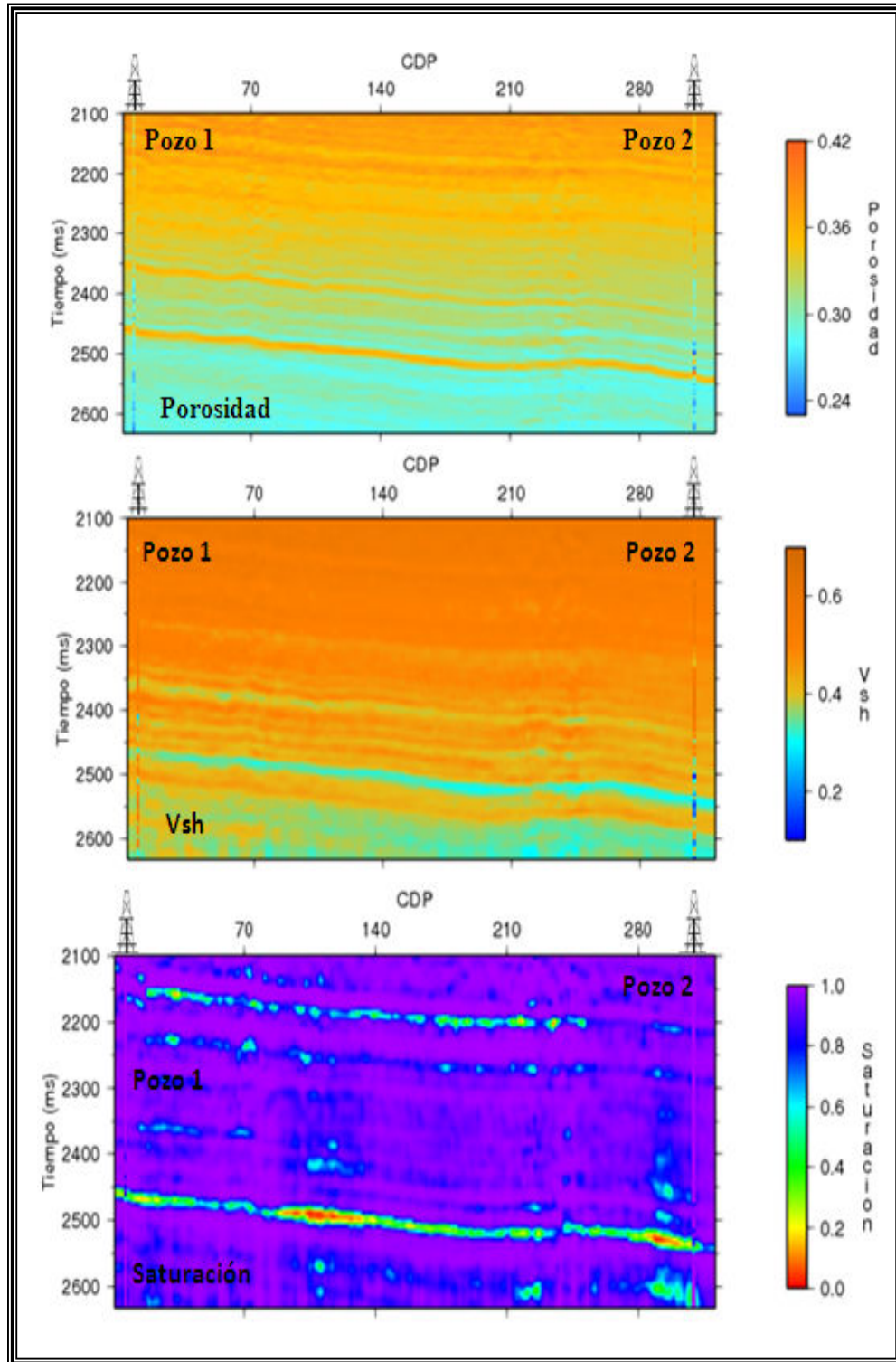


Figura 6.9. Inversión obtenida para 3 ángulos (14° , 28° , 41°) de incidencia para las propiedades de reservorio aplicando el modelo de Gassmann. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

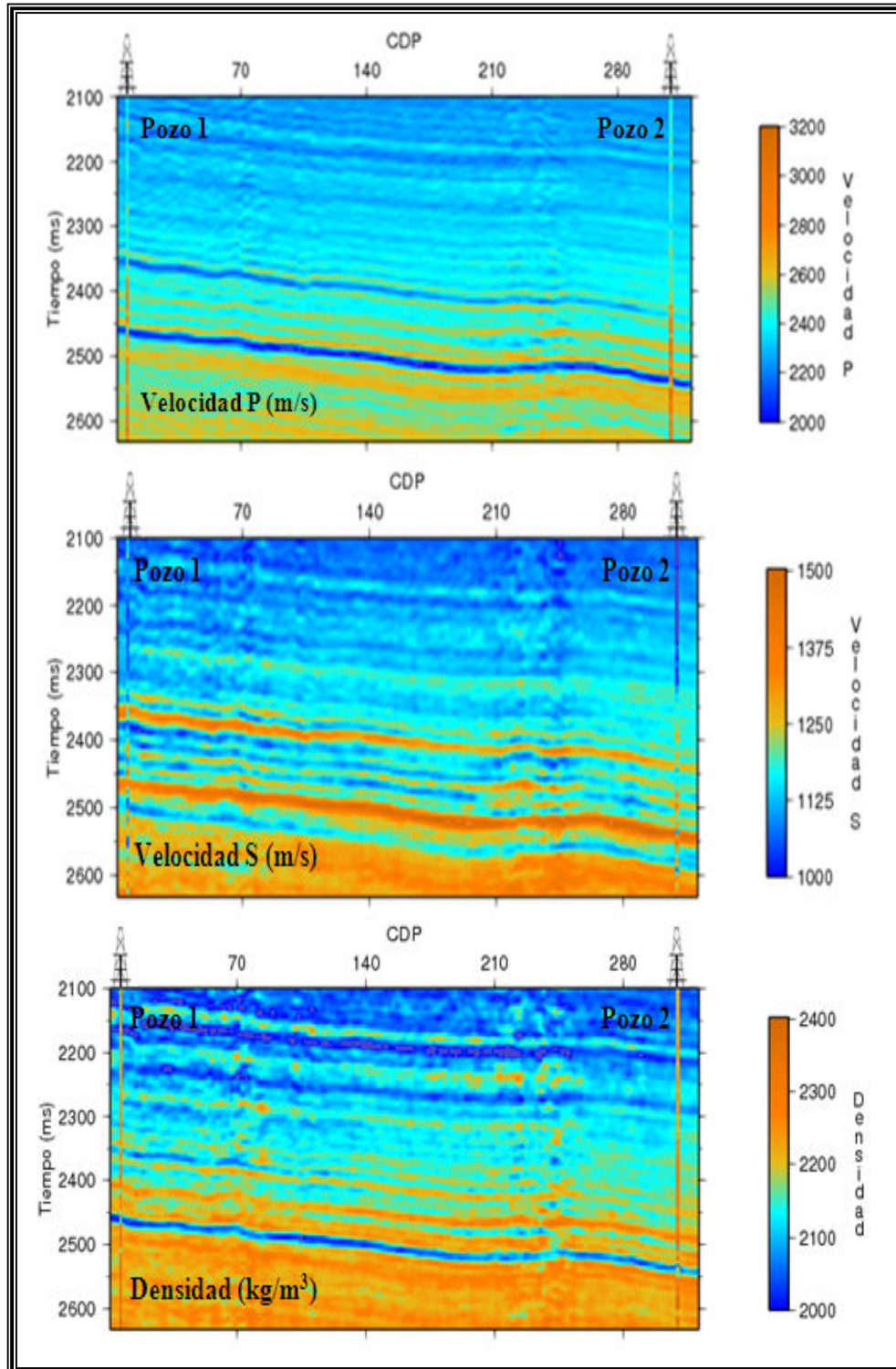


Figura 6.10. Inversión obtenida para 3 ángulos (14° , 28° , 41°) de incidencia para las propiedades elásticas aplicando el modelo Gassmann. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

De la figura N° 6.9 para la sección de la porosidad se puede observar que para el evento de interés (zona de gas), ésta propiedad varía entre 0.36 y 0.42. Con respecto a la región suprayacente al primer evento se puede observar una distribución caracterizada por valores iguales y superiores a 0.36, Respecto a la región infrayacente al segundo evento se puede notar una distribución de la porosidad con valores inferiores a 0.30, también se aprecia un comportamiento similar al observado en la sección de la porosidad aplicando el modelo de Wyllie-Wood.

En la sección para el contenido de arcilla se aprecia buena correspondencia con la sección obtenida con el primer modelo petrofísico integrado hasta la región correspondiente al primer evento de interés (cambio litológico); con respecto al segundo evento se observan una disminución de la propiedad como lo indican los registros de pozos (datos reales) y la continuidad de la capa que permite delimitar y ubicar la zona gasífera en comparación con el modelo de Wyllie-Wood.

Para la sección de saturación de agua se observa una buena estimación de la propiedad en toda la sección indicando la disminución de los niveles de saturación solo en la zona donde se encuentra el gas.

La figura N° 6.10 el cual muestra las secciones obtenidas para las propiedades elásticas, se puede apreciar para la sección de velocidad de onda S y la densidad un comportamiento similar al obtenido con el primer modelo petrofísico integrado; con respecto a la sección de la velocidad de la onda P el modelo de Gassmann implica porosidades y permeabilidades altas con el propósito de asegurar el equilibrio total del flujo de fluido de poro (Gassmann et al., 1951), por lo cual se observa en el segundo evento de interés una capa con valores inferiores a 2100 m/s donde el fluido intersticial es gas.

A continuación se presentan los gráficos de los resultados de la inversión de las 6 propiedades para los CDP 6 Y CDP 309.

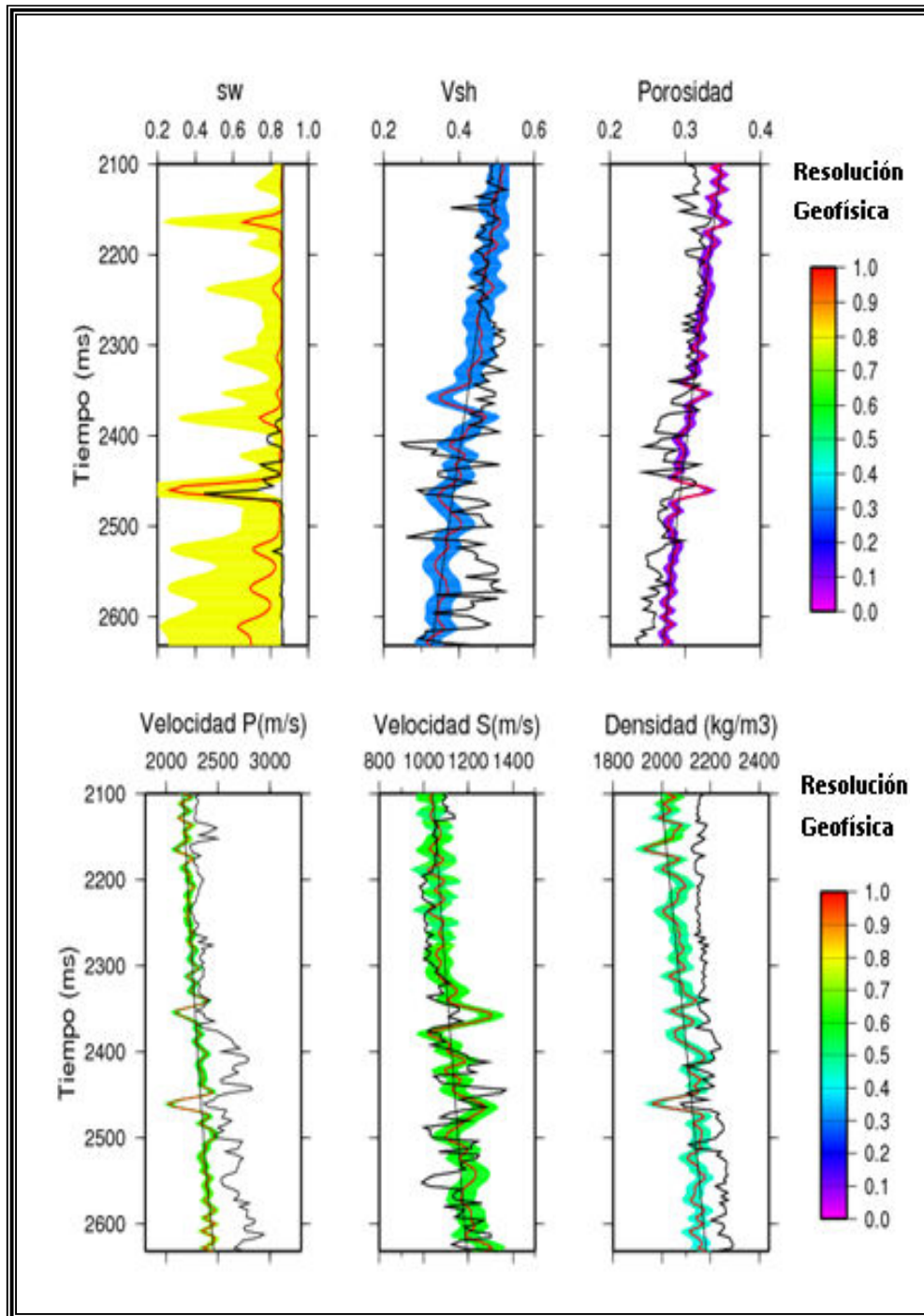


Figura 6.11 Resultado de la inversión para el CDP 6, correspondiente a la localización del pozo 1. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados con color rojo y los registros de pozos suavizados y la media en color negro.

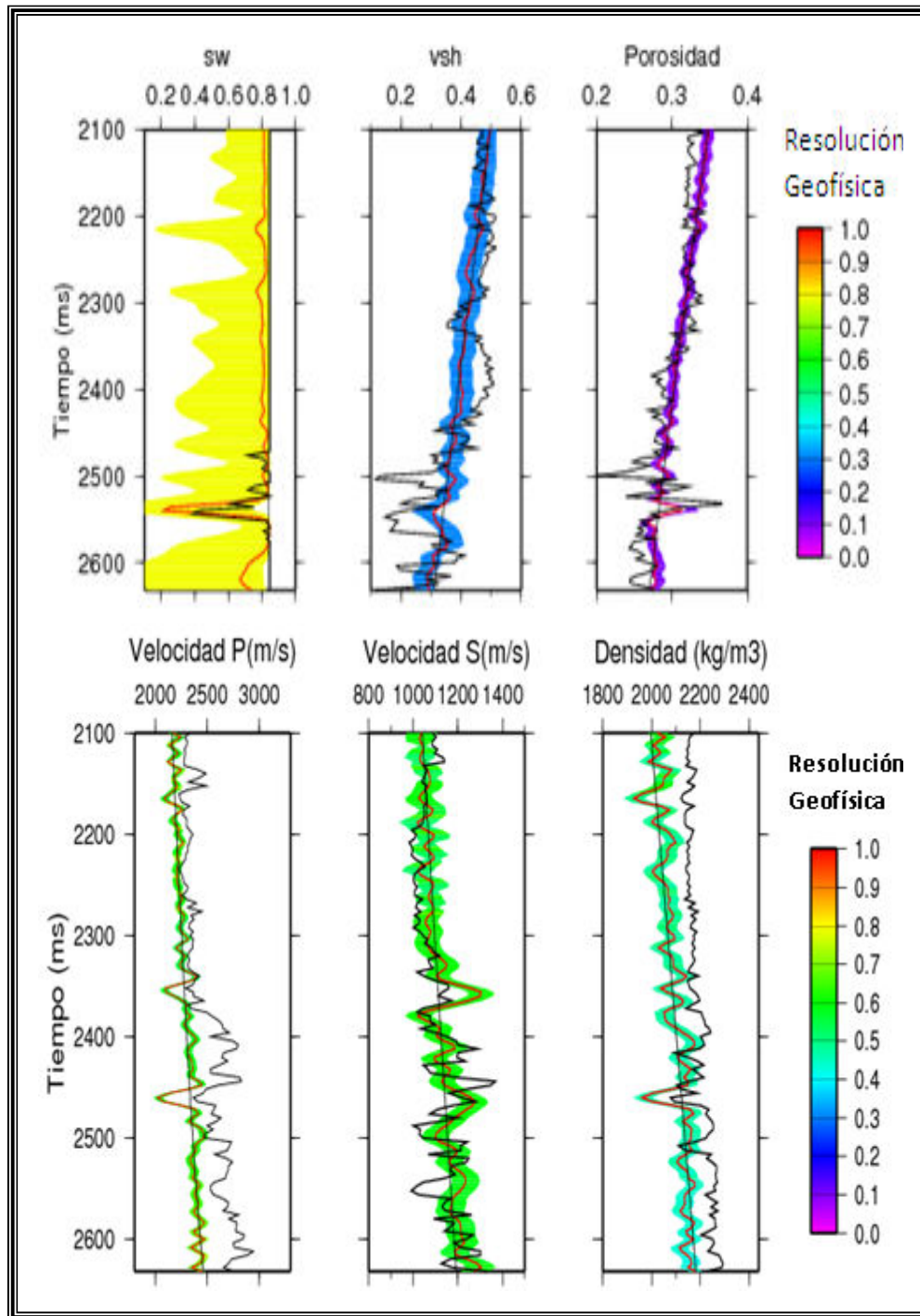


Figura 6.12. Resultado de la inversión para el CDP 309, correspondiente a la localización del pozo 2. La incertidumbre es representada por una banda de color del tamaño de la desviación estándar y la resolución geofísica por una barra de colores. Los resultados de la inversión son representados con color rojo y los registros de pozos suavizados y la media en color negro.

Tabla 6.3. Coeficientes de correlación para las propiedades de reservorio aplicando Gassmann.

Coeficientes de Correlación	Porosidad	Contenido de Arcilla	Saturación de Agua
CDP 6	0.82	0.45	0.55
CDP 309	0.78	0.75	0.70

Tabla 6.4. Coeficientes de correlación para las propiedades de elásticas aplicando Gassmann.

Coeficientes de Correlación	Velocidad P	Velocidad S	Densidad
CDP 6	0.77	0.55	0.68
CDP 309	0.71	0.66	0.50

Las figuras N° 6.11 y 6.12 muestran los resultados de la inversión para los dos CDP de la zona donde se realizaron registros de pozo; en ambas figuras se observa una mejor estimación de la velocidad de la onda P y la velocidad de la onda S en comparación con la densidad, se observa que la influencia de información geofísica de mayor peso corresponde a la velocidad P y S, mientras en la densidad el peso de la información previa es mayor observándose un comportamiento similar al aplicar el modelo Wyllie-Wood. También se puede observar para las propiedades de reservorio como la porosidad y contenido de arcilla indican mayor influencia de la información previa, mientras la saturación influye con mayor peso la información geofísica. Para cuantificar la similitud de los valores estimados respecto de los valores verdaderos, se realizaron cálculos de los coeficientes de correlación mostrados en las Tablas N° 6.3 y 6.4; observando altos valores para todas las propiedades indicando así que la inversión obtenida para las propiedades elásticas y de reservorio es buena.

6.2. Parámetros elásticos indirectos

A continuación se presentan los módulos elásticos calculado a partir de las propiedades elásticas resultantes de la inversión con sus respectivos CDP de la zona que permiten describir el comportamiento elástico del medio.

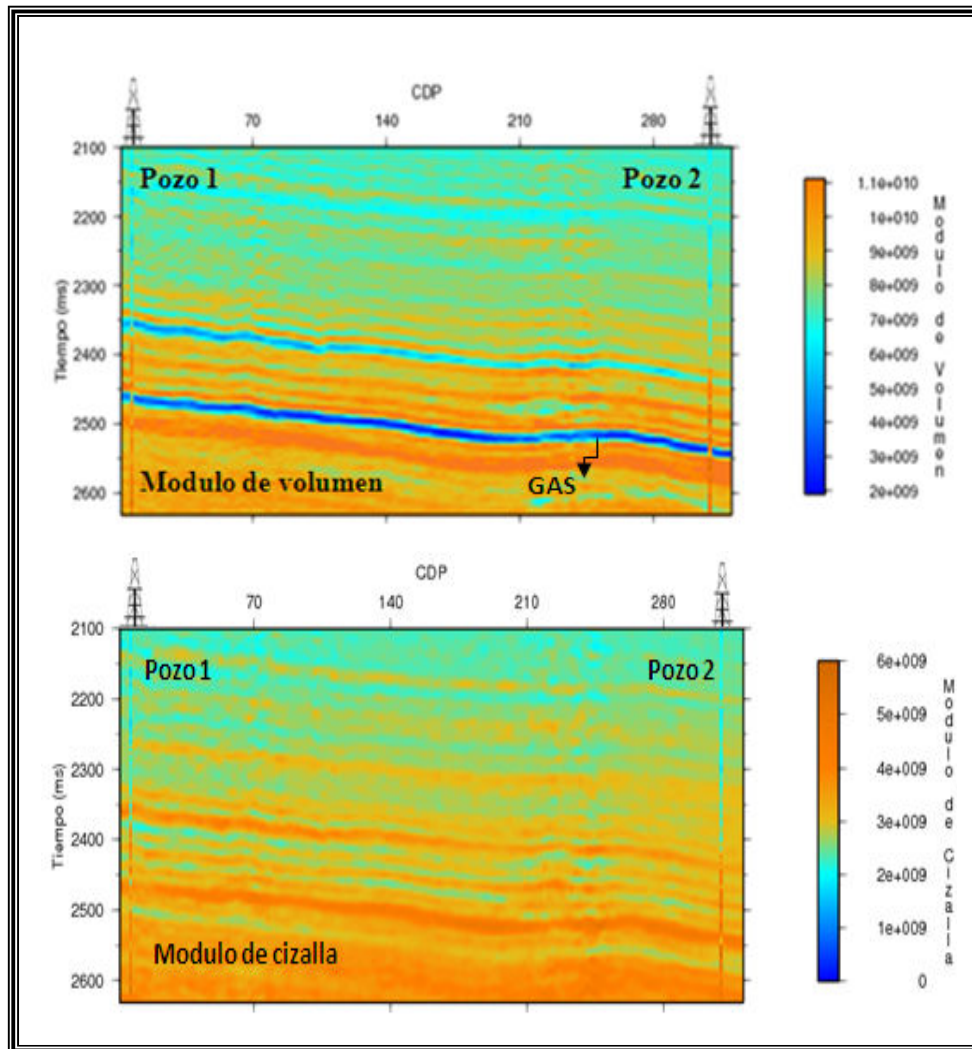


Figura 6.13. Sección sísmica del Modulo de volumen y cizalla a partir de las propiedades estimadas por la inversión. Los módulos están expresados en Pa. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

Con respecto a la figura N° 6.13 la sección de modulo de volumen se puede observar a los 2450 ms hasta los 2550 ms que los valores de dicho modulo disminuyen alcanzando un mínimo de 3 GPa, lo cual evidencia e identifica el evento gasífero y respecto de la sección del modulo de cizalla es similar al comportamiento observado en la sección resultante de la velocidad de la onda S donde se puede apreciar en el segundo evento valores superiores a 4 GPa.

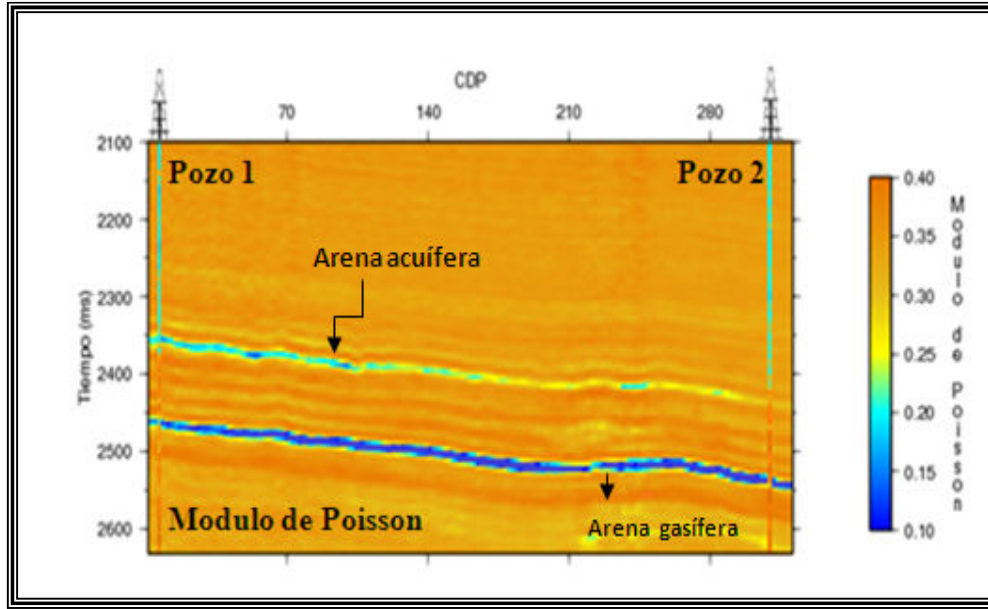


Figura 6.14. Sección sísmica del Modulo de Poisson a partir de la inversión. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

Para la figura N° 6.14 se observa en toda la sección una distribución de valores mayores a 0.30 que suele asociarse a lutitas y para el primer evento podríamos ubicarlo como una capa de areniscas acuíferas con valores que oscilan entre 0.25 y 0.20, y para el segundo evento una capa de areniscas gasíferas entre 0.10 y 0.18. La importancia del modulo de Poisson es que permite identificar el contenido intersticial de los poros entre petróleo, gas y agua en la formación (Alsos et al., 2002).

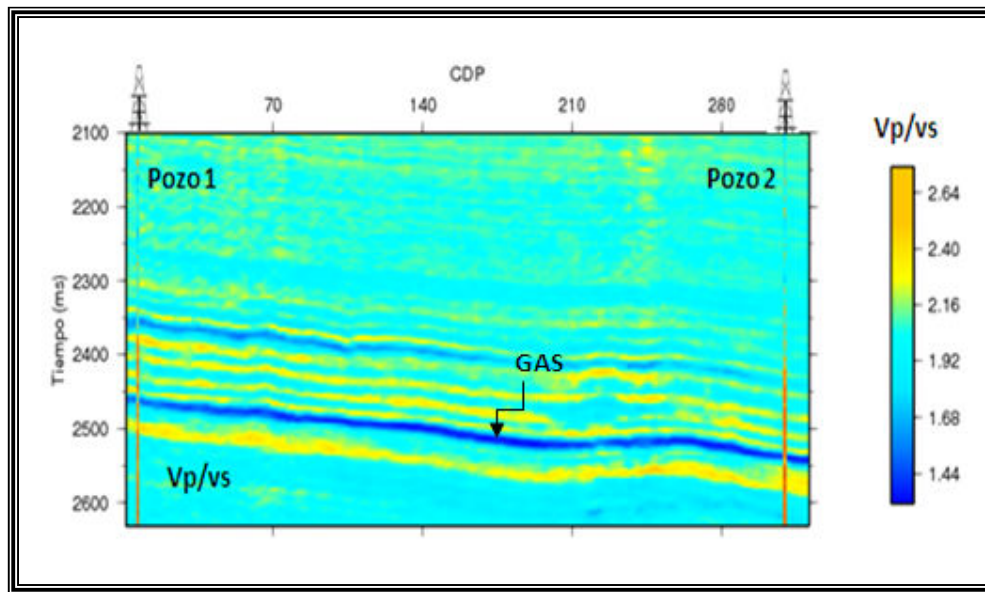


Figura 6.15. Sección sísmica de la relación V_p/V_s calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2.

La figura N° 6.15 de la sección de la relación V_p/V_s se puede observar que los valores solo disminuyen considerablemente en la zona de interés, siendo un indicador de una capa de gas, ya que la relación de V_p/V_s varía con respecto a la litología, porosidad y el fluido contenido en el espacio poroso.

Al observar una baja relación V_p/V_s permite descartar que las zonas de alta presión de poro calculadas en esta investigación sean areniscas de flujo de aguas someras que aumentan las probabilidades de riesgos de perforación, y evidencia la presencia de reservorio de gas. Cuando V_p y V_s disminuyen al aumentar la fluidez, pero V_s disminuye mucho más rápido y cae a cero en el agua. Por tal razón la relación teóricamente se acerca al infinito a medida que los sedimentos se hacen más fluidos (Kok et al., 2001).

6.3. Presión de poro.

En la figura N° 6.16 se muestra la sección del Gradiente de la presión de poro estimado a partir de las propiedades resultantes de la inversión y basado en el método de Eaton.

En esta investigación se considero que la estimación de la presión de poro a partir de la inversión concede el aporte para prevenir riesgos geológicos desde la fase de exploración hecho que se atribuye al encuentro de una presión de formación inesperada anormalmente alta. La evaluación de dichos riesgos en la actualidad se ha convertido en el factor clave para la planificación de pozos y la estabilidad de los mismos. Si se desconoce la presión de la formación y el peso del lodo es alto y se presentan presiones altas esto conlleva a una fractura y si el peso del lodo es bajo y la presión de la formación es baja se produce que la columna de perforación se tuerce o conlleva a los reventones ya que la arenisca puede fluir fuera del mismo (Sarker et al, 2008). Los tramos de las columnas perforadoras, los fluidos, el tiempo de equipo de perforación, los activos de capital de gran escala están expuestos a estos riesgos (Alsos et al., 2002). A demás del medio ambiente que es escenario de dicho proceso y coloca en riesgo fauna, flora tanto en tierra firme como en costa afuera. El costo de dicha estimación desde la fase de exploración es despreciable respecto de los costos atribuidos a perdidas.

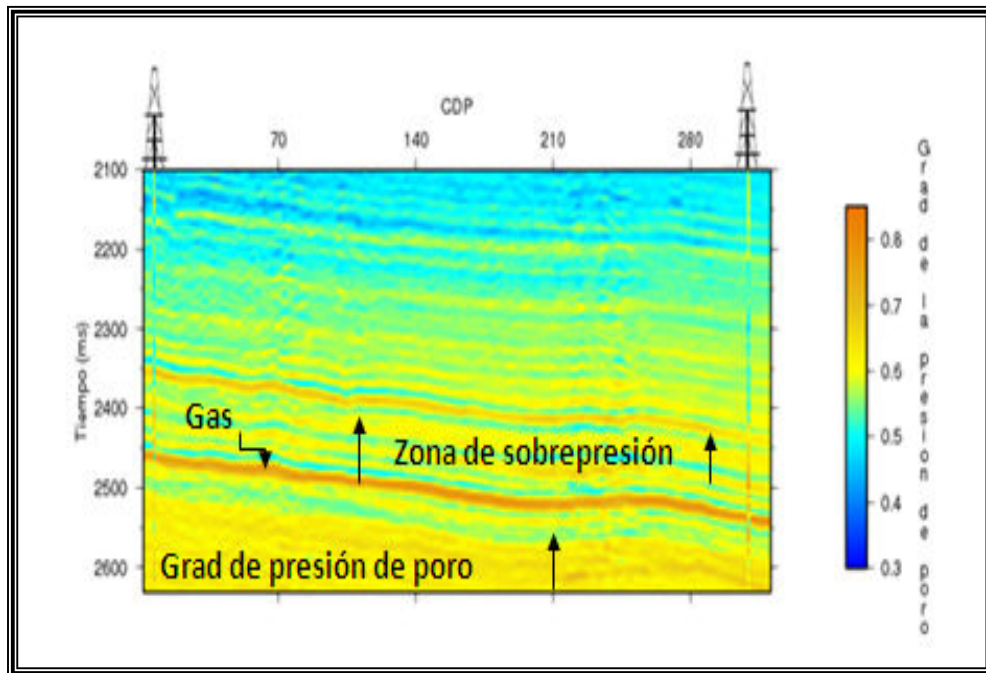


Figura 6.16. Sección sísmica del gradiente de la presión de poro calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2. El gradiente esta expresado en psi/ft.

En la figura N° 6.16 se muestra la sección del gradiente de la presión de poro, se considera que las formaciones de presión normal generalmente presentan una presión de poro equivalente a la presión hidrostática del agua intersticial (Barriol et al., 2005). En esta investigación la densidad del fluido es de magnitud 1074 kg/m^3 , lo cual establece un gradiente de presión normal de 0.465 psi/ft . Basado en las definiciones anteriores se considera que la desviación por exceso o por defecto al gradiente de presión normal indica zonas de sobrepresión anormal o presiones subnormales respectivamente. En esta sección se puede apreciar zonas a partir de los 2400 ms magnitudes superiores a 0.58 psi/ft y un máximo de 0.75 psi/ft como característica de las regiones productoras de petróleo, en este caso evidencia la presencia de gas. Siendo la causa principal de esta geopresión el desequilibrio de la compactación. Mientras en la región superior de la sección se puede apreciar con un máximo 0.6 psi/ft en la capa de los 2350 ms debido a la capa saturada de agua sobrepresionada por la causa ya descrita.

En esta investigación las profundidades de los registros reales aplicados indican un tope de 6000 m y una base de 8278 m. Y se considero como modelo de tendencia normal de compactación la media de ambos pozos reales, obteniéndose una presión geoestática de 50.6 MPa correspondiente a un gradiente de 0.022 MPa/m , dichos cálculos están descritos en la sección 3.11 para una columna de 2278 m.

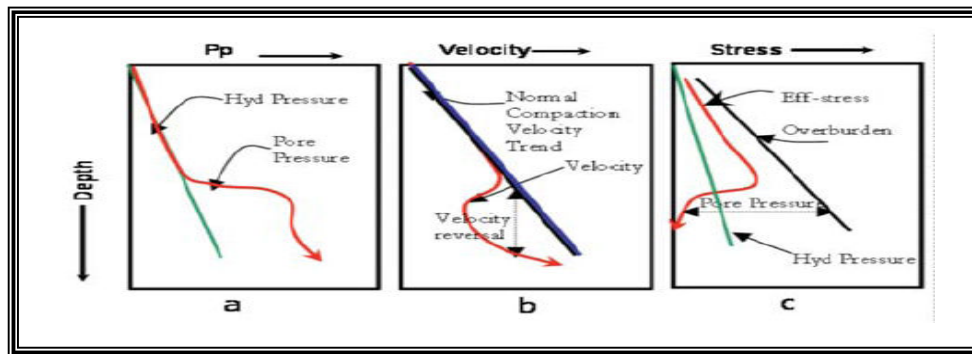


Figura 6.17. Esquema mostrando un caso donde la sobrepresión es causada por la expansión del fluido. Leyendo la curva sobreestimada y subestimada de Pp, la dirección de las flechas sobre la curva roja indica la dirección del esfuerzo del incremento de la fuerza de confinamiento tomado de (Bowers 1995).

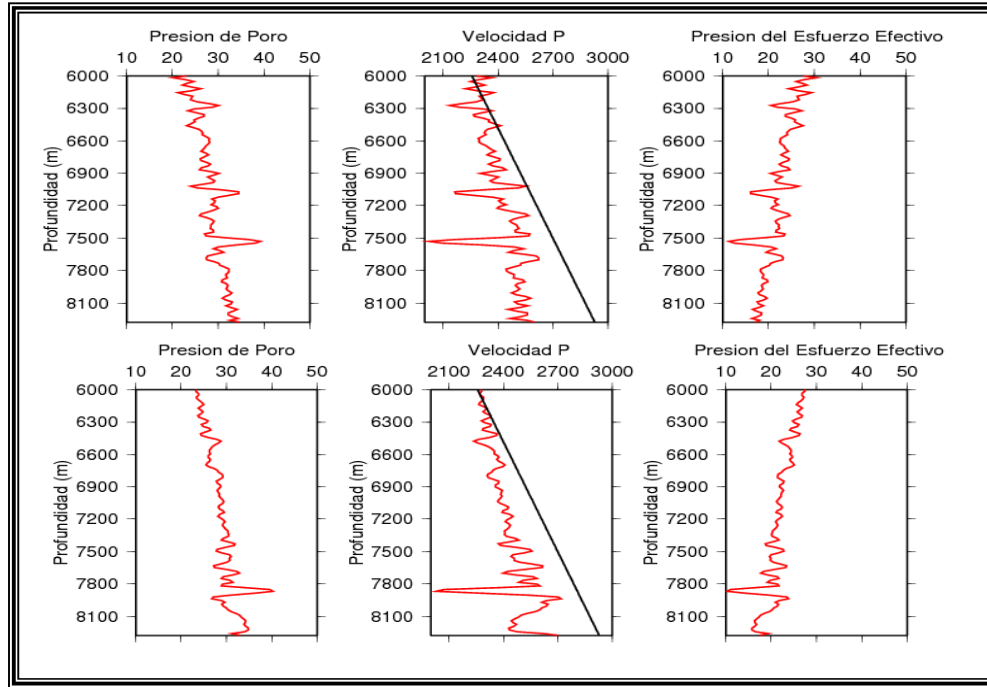


Figura 6.18. Resultado de la estimación a partir de la inversión para el CDP 06 y 309. En color rojo están representados los resultados de la estimación y en color negro la media del pozo real.

En la figura N° 6.18 se muestran las estimaciones resultantes de la presión de poro, velocidad de la onda P y la presión del esfuerzo efectivo para el CDP 06 y 309, se observa en ambas figuras que existe una relación entre la presión de poro y la velocidad de la onda compresional ya que a partir de los 7105 m de profundidad las presiones de poro son mayores de 30 MPa, mientras la velocidad de la onda P se desvía de la tendencia compactación normal y por lo tanto la carga real se detiene en ese punto y la presión del esfuerzo efectivo deja de aumentar con valores menores de 23 MPa.

Las magnitudes de las presiones estimadas son efectivamente correspondientes a las rocas que se encuentran a profundidades mayores de 2700m equivalente a una presión de 30 MPa (Mavko et al., 1998).

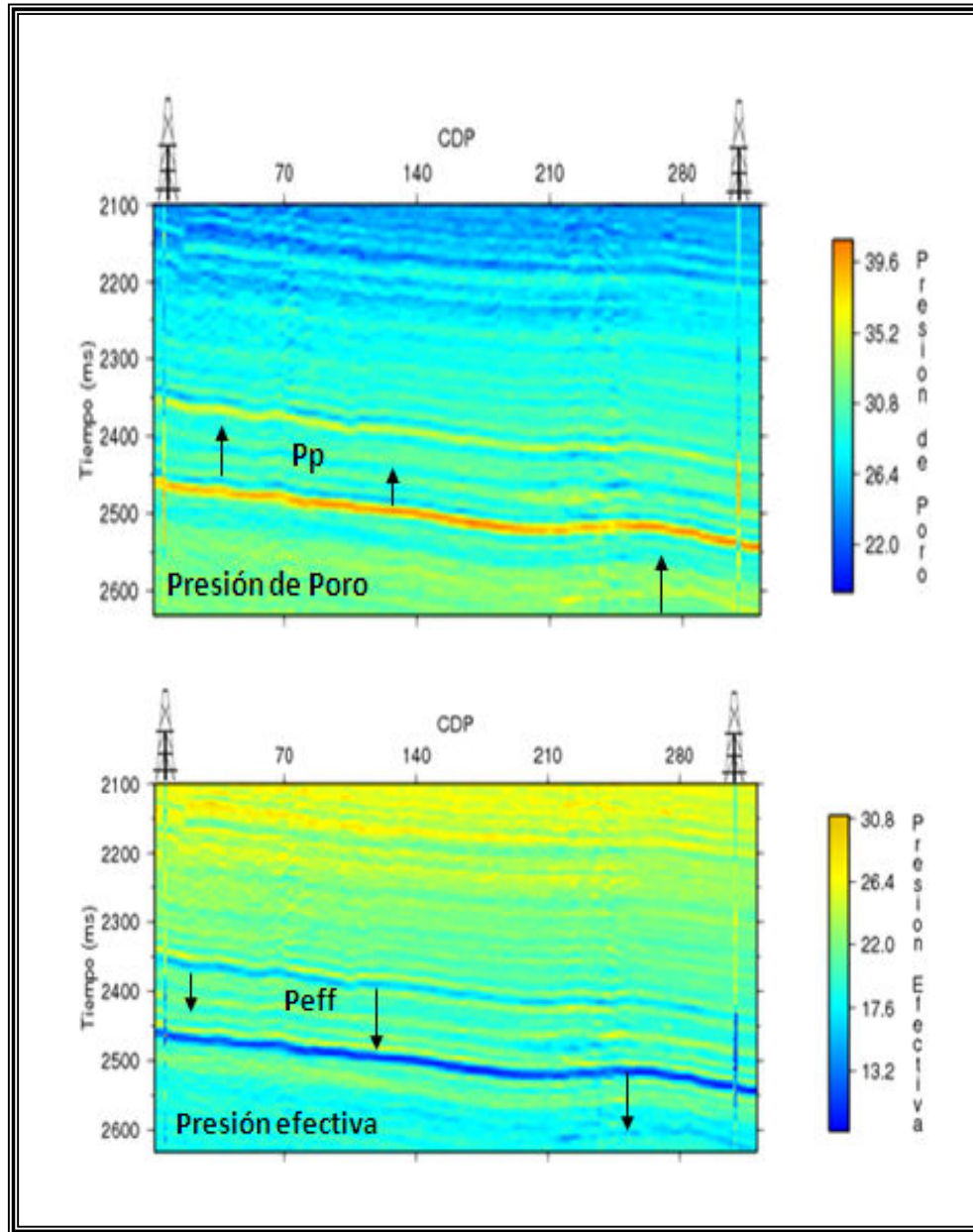


Figura 6.19. Sección sísmica de la Presión de poro y la Presión del esfuerzo efectivo calculada a partir de las propiedades estimadas por la inversión. Se superponen las correspondientes propiedades estimadas en registros de pozos para los pozos 1 y 2. Las presiones están expresadas en MPa.

En la figura N° 6.19 respecto de la sección de presión de poro se puede apreciar a partir de los 2350 ms presiones mayores a 30 MPa, presentando la capa de gas ubicada entre los 2450 ms y 2550 ms presiones con un máximo de 38 MPa. Siendo el desequilibrio de la compactación una de las causas principales que

genera dichas presiones, debido a la rápida sedimentación de finos impide, que el agua se escape del volumen de los sedimentos, lo cual mantiene un gran volumen poroso. Cuando el agua queda en el sedimento que luego es enterrado, el peso de masa sobreyacente es sustentado no solo por el contacto entre los granos, sino también en parte por el agua entrampada en los espacios porosos, lo cual genera una alta presión de poro. También se puede apreciar en la capa de gas que los valores de la densidad son menores a 2100 kg/m^3 y los valores de la velocidad de la onda P son inferiores a 2100 m/s , debido al efecto de las altas porosidades pero posiblemente un deficiente contacto entre granos, características que evidencian el fenómeno del desequilibrio de compactación. Las secciones estimadas permiten conocer el reservorio con mayor extensión, ya que la evaluación de riesgo respectiva permite indicar las medidas correspondientes al peso del lodo en función de la presión de poro detectada y las evaluaciones posteriores que consideren los Geocientíficos correspondiente a la fase de perforación. Favoreciendo la industria petrolera y la ecología tanto en tierra firme como en costa afuera y respaldando la responsabilidad ingenieril.

Uno de los efectos generados por la sobrepresión de poro es la reducción de la presión del esfuerzo efectivo, por lo cual en esta investigación se considero de importancia cuantificar la presión del esfuerzo efectivo que controla estas propiedades en función de la diferencia entre la presión Geoestática o de sobrecarga, y la presión de poro (Terzaghi et al., 1948).

En la figura N° 6.19 de la sección de presión del esfuerzo efectivo se puede apreciar que a partir de 2350 ms se reduce la presión a valores menores de 20 MPa, detectándose en la capa de gas una presión mínima de 12 MPa, este se produce por la expansión en la presión del fluido del poro, el cual se incrementara a un ritmo más rápido que el esfuerzo de sobrecarga y en este caso el esfuerzo efectivo disminuye a medida que aumenta la profundidad. es importante destacar que la descompactación en sí misma no causa la reducción del esfuerzo efectivo (Sarker et al., 2008). Se observa que a partir de los 2360 ms la carga real se detiene en este punto y la presión del esfuerzo efectivo deja de aumentar debido al aumento de la presión de poro. La información respecto de la presión del esfuerzo

efectivo es un indicador solo para la fase de exploración de utilidad para los geomecánicos en la planificación de pozos ya que la actividad de perforación perturba el equilibrio inicial de los esfuerzos presentes en la región vecina al pozo (Cook et al.,2008).

El esfuerzo y la presión de poro están intrínsecamente ligados. En los espacios porosos de las formaciones, el esfuerzo se transmite a los líquidos o a los gases en forma de presión. La magnitud de la presión aplicada en cualquier dirección es la misma para todas las direcciones. Si es comprimido, un fluido reacciona ejerciendo una presión equivalente y opuesta hacia afuera. Bajo presión, los fluidos alojados en los poros a menudo absorben parte del esfuerzo impuesto sobre una formación. Por eso, la presión de poro es un componente importante del esfuerzo neto aplicado a un cuerpo de roca (Cook et al., 2008).

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una técnica de inversión que permite obtener una configuración conjunta conformada por las propiedades de reservorio y las propiedades elásticas; basado en una formulación unificada del problema inversión y en el método de optimización de Newton. El método de Newton utiliza información sobre pendientes y curvaturas de la función objetivo. Se busca iterativamente minimizar la función objetivo y encontrar la configuración que simultáneamente explique los datos geofísicos, petrofísicos y la información geoestadística.

El problema de inversión resuelto por método de optimización, se validó con datos sintéticos con el fin de asegurar el buen funcionamiento del algoritmo con tres ángulos de incidencia para obtener la configuración de seis propiedades y sus respectivos cálculos de incertidumbre y resolución como influencia de la información geofísica. En comparación a los resultados obtenidos durante la fase de validación de datos sintéticos desarrollados en el trabajo de Tirado (2008), se verificó la compatibilidad en las propiedades de reservorio y propiedades elásticas al aplicar tres ángulos de incidencia.

Con respecto a la validación con datos reales se obtuvo secciones para la configuración de propiedades de reservorio y para las propiedades elásticas; para cada modelo petrofísico integrado tal como: el modelo Wyllie-Wood y Gassmann. Las secciones obtenidas con el modelo Wyllie-Wood presentaron una buena estimación de las propiedades; ya que responden teóricamente a lo esperado, además se puede observar la continuidad de la zona de interés (zona de gas) en toda el área de estudio, así como también la continuidad del evento superior (excepto la sección del contenido de arcilla). Por otra parte los coeficientes de covarianza indican en cada una de las propiedades, una buena estimación de las mismas debido a los altos valores de éstos. Con respecto a secciones de propiedades de reservorio y elásticas estimadas en la aplicación del modelo de Gassmann se obtuvo satisfactoriamente los valores esperados y la continuidad de las capas tanto en el evento superior como en el inferior, el cual contribuye a

identificar la presencia del reservorio. El modelo de Gassmann es considerado superior respecto al de Wyllie ya que este modelo del fluido efectivo permite calcular dichas fases descritos en el marco teórico Gassmann (1951).

En la validación de los datos reales se observa que las secciones del contenido de arcilla y velocidad de la onda S en este trabajo presentan una clara definición de sus capas que permite identificar los eventos presentes, en particular el modelo de Gassmann, lo cual genera una diferencia al compararse con el trabajo de Tirado (2008). En general respecto de las propiedades restantes de reservorio y elásticas estimadas por la inversión no hay contrastes significativos al comparar con el trabajo de Tirado (2008).

La solución del problema inverso mediante la aplicación del método de la optimización, permite calcular los cambios óptimos, para que paso a paso la configuración del modelo de propiedades del medio vaya convergiendo a un máximo de la densidad de probabilidad posterior, y permite ahorrar tiempo de cómputo ya que con dos iteraciones se obtiene el modelo de configuración conjunta. Como diferencia con este enfoque de optimización, el método de Monte Carlo presenta un muestreo del espacio de soluciones y una colección de configuraciones conjuntas equiprobables.

La estimación de la incertidumbre y la resolución permiten cuantificar la influencia de la información geofísica en cada una de las propiedades, dicho aporte contribuye en la inversión.

La estimación de los módulos elásticos en función de las propiedades obtenidas de la inversión permite conocer el comportamiento elástico del medio y la estimación de las geopresiones en función de las propiedades obtenidas de la inversión que permite conocer el reservorio desde la sísmica, indicando para este caso un reservorio que desde los 2450 ms hasta los 2550 ms evidencia la presencia de gas, como una zona sobrepresionada donde la presión de poro es de 38 MPa debido al desequilibrio de la compactación, indicando la reducción de la velocidad de la onda P y a su vez la reducción de la presión del esfuerzo efectivo. Dicha información contribuye a proporcionar información respecto de las situaciones de riesgo en la planificación de pozos y estabilidad de los mismos para la fase de perforación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aki, K., y Richards, P.G. (1980). Quantitative seismology: Theory and methods, (2nded.). Sausalito, California.
- Alsos T, Astratti D, Benabentos M, Boer L, Livingstone M, Nickel M, Schlaf J, Schoepfer P, Sigismondi M y Stronen L. (2002). Aplicación sísmica a lo largo de la vida productiva del yacimiento. Obtenido el 28 de enero del 2010. <http://www.slb.com/OilfieldReview/otoño2002.htm>.
- Barriol Y, Bartman B, corbiell R, Eriksen K, Laidlaw J, Manin Y, Morrison K, Sayers C, Romero Martin y Volokitin Y. (2005). Las Presiones de las Operaciones de Perforación y Producción. Obtenido el 13 de enero del 2010. [http://www.SLB.com/Oilfield Review/inverno2005/2006.htm](http://www.SLB.com/OilfieldReview/inverno2005/2006.htm).
- Bosch, M. (2003). Inferencia estadística de porosidad e impedancia a partir de ondas sísmicas vía métodos de Monte Carlos y Optimización. Trabajo de Ascenso, Universidad Central de Venezuela, Caracas.
- Bosch, M. (2005). inversion of travelttime data under a statistical model for seismic velocities and layers interfaces: Geophysics, v.70, p. 35.
- Bowers, GL (1995). Pore Pressure estimation form velocity Data: Accounting for overpressure mechanism besides undercompaction. SPE, p. 89-95.
- Cook J, frederiksen R, Green S, Herwanger J, Koutsabeloulis N, Stage M y Phuat C. (2007). Las Rocas Importan: Realidades de la Geomecanica. Obtenido el 28 de enero del 2010. de <http://www.slb.com/oilfieldreview/inverno2007-2008.htm>.
- Dobrin, M. (1961). Introducción a la Prospección Geofísica. Ediciones Omega. Barcelona
- Eaton, B. (1972). A Theory on The Effect of Overburden Stress on Geopressure Prediction from Well Logs, society of petroleum engineers of AIME, SPE-5544.11 p.
- González, P. (1999). Análisis AVO en datos 2D área Torunos Estado Barinas. Trabajo de Grado no publicado. Universidad Simón Bolívar, Sartenejas.
- Hottman, C. y Johnson, R.K. (1965). Estimation of Formation Pressure From Log-Derived Shale Properties. Journal of petroleum technology. 713-722 p.

- Hubbert, M. y Rubey, W.W. (1959). Role of Fluid Pressure in the Mechanics of Overthrust Faulting, GSA Bulletin(70): 167-206.
- Kok R, Dutta N, Khan M y Mallick S. (2001). Deepwater Geohazard Analysis Using Prestack Inversion. resúmenes expandidos. Exposición Internacional y 71ª Reunión Anual de la SEG 2001, San Antonio, Texas, EUA. (9 al 14 de septiembre 2001):613-616.
- Lárez, O. (2002). Caracterización petrofísica de las arenas L2M, L2L y O2L de la formación Oficina. Campo Trico – Yopales. Cuenca Oriental de Venezuela, Estado Anzoátegui. Trabajo de Grado publicado, Universidad de Oriente, Anzoátegui.
- Mavko G, Mukerji T y Dvorkin J. (1998). The Rock Physics Handbook Tools for Seismic Analysis in Porous Media. EUA. Cambridge University. 329 p
- Sarker, R y Batzle, M. (2008). Effective Stress Coefficient in Shales and its Applicability to Eaton's Equation. Obtenido el 08 de agosto del 2011. <http://www.Segdl.org/The Leading Edge/june2008.htm>.
- Schlumberger, (2005). Oilfield Glossary. Documento en línea.
- Shuey, R.T. (1985). A simplification of the Zoeppritz equations. Geophysics, 50, (4), 609-614.
- Tarantola, A. (1987). Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation. New York: Elsevier.
- Terzaghi, K y Peck, R.B. (1948). Soils Mechanics in Engineering Practice, John Wiley & sons, Inc., New York. 566 p.
- Tirado, W. (2008). Inversión petrofísica en base sísmica de apertura variable. Trabajo de Grado no publicado, Universidad Central de Venezuela, Caracas.
- Torres, A. (2007). Inversión de datos sísmicos a apertura variable mediante un método de optimización. Trabajo de Grado no publicado, Universidad Simón Bolívar, Sartenejas.

APÉNDICE

Apéndice A. Aproximaciones a las ecuaciones de Zoeppritz

Las ecuaciones de Zoeppritz son difíciles de invertir para calcular los valores de los parámetros elásticos del medio, es por ello que varios autores han propuesto aproximaciones, que consisten en ecuaciones sencillas de invertir, con las que se pueden obtener información de la litología. Entre las aproximaciones más conocidas se encuentran la aproximación de Shuey, Aki & Richards, Hiltermann, Pan & Gardner y Bortfeld, entre otras.

Aproximación de Hiltermann

Es una simplificación de la ecuación de Shuey, mediante una serie de suposiciones:

- Los coeficientes de reflexión para incidencia normal son pequeños (menores a 0.15)
- Las densidades de los dos medios son iguales.

$$R(\theta) = R_0 \cos^2(\theta) + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2} \sin^2\theta. \quad (1)$$

Se puede observar que ésta es una aproximación lineal.

Aproximación de Pan & Gardner

Esta aproximación fue derivada para relacionar el coeficiente de reflexión con los parámetros del medio, con el fin de describir la presencia de fluidos, expresando las velocidades de onda p y s en función de los módulos de onda compresional y de cizalla (módulo de rigidez), simplificando las ecuaciones de Zoeppritz a una forma cuadrática.

$$R(\theta)\cos^2\theta = +\frac{1}{4}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta M}{M}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\rho}{\rho} + 4\frac{\Delta\mu}{M}\right]\sin^2\theta + 2\left[\frac{\Delta\mu}{M}\right]\sin^4\theta \quad (2)$$

$$M = \frac{M1+M2}{2} \quad \rho = \frac{\rho1+\rho2}{2} \quad \mu = \frac{\mu1+\mu2}{2}$$

M =Módulo de onda de compresión

μ =Módulo de cizalla

La forma descrita por la ecuación es de una parábola, lo cual facilita su análisis.

Apéndice B. Rutina de la descomposición de Cholesky.

```
subroutine cholesky(a,n,np,p)
integer::n,np,i,j,k
real:: a(np,np),p(n),sum
do i=1,n
  do j=i,n
    sum=a(i,j)
    do k=i-1,1,-1
      Sum=sum-a (i, k)*a (j, k)
    end do
    if(i.eq.j) then
      if (sum.le.0.) pause 'cholesky failed'
      p(i)=sqrt(sum)
    else
      a(j,i)=sum/p(i)
    end if
  end do
end do
end subroutine cholesky.
```

Apéndice C. Rutina de la descomposición LU.

```
SUBROUTINE ludcmp(a,n,np,indx,d)
  INTEGER n,np,indx(n),NMAX
  REAL d,a(np,np),TINY
  !   PARAMETER (NMAX=500,TINY=1.0e-20)
  PARAMETER (TINY=1.0e-20)
  INTEGER i,imax,j,k
  REAL aamax,dum,sum,vv(np)
  d=1.
  do 12 i=1,n
    aamax=0.
    do 11 j=1,n
      if (abs(a(i,j)).gt.aamax) aamax=abs(a(i,j))
11 continue
    if (aamax.eq.0.) pause 'singular matrix in ludcmp'
    vv(i)=1./aamax
12 continue
    do 19 j=1,n
      do 14 i=1,j-1
        sum=a(i,j)
        do 13 k=1,i-1
          sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
13 continue
        a(i,j)=sum
14 continue
      aamax=0.
      do 16 i=j,n
        sum=a(i,j)
        do 15 k=1,j-1
          sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
15 continue
        a(i,j)=sum
```

```

    dum=vv(i)*abs(sum)
    if (dum.ge.aamax) then
        imax=i
        aamax=dum
    endif
16 continue
    if (j.ne.imax)then
    do 17 k=1,n
        dum=a(imax,k)
        a(imax,k)=a(j,k)
        a(j,k)=dum
17 continue
        d=-d
        vv(imax)=vv(j)
    endif
    indx(j)=imax
    if(a(j,j).eq.0.)a(j,j)=TINY

    if(j.ne.n)then
        dum=1./a(j,j)
        do 18 i=j+1,n
            a(i,j)=a(i,j)*dum
18 continue
        endif
19 continue
    return
END

```

```

SUBROUTINE ludcmp(a,n,np,indx,d)

INTEGER n,np,indx(n),NMAX
REAL d,a(np,np),TINY
!   PARAMETER (NMAX=500,TINY=1.0e-20)

```

```

    PARAMETER (TINY=1.0e-20)
    INTEGER i,imax,j,k
    REAL aamax,dum,sum,vv(np)
    d=1.
    do 12 i=1,n
        aamax=0.
        do 11 j=1,n
            if (abs(a(i,j)).gt.aamax) aamax=abs(a(i,j))
11 continue
            if (aamax.eq.0.) pause 'singular matrix in ludcmp'
            vv(i)=1./aamax
12 continue
        do 19 j=1,n
            do 14 i=1,j-1
                sum=a(i,j)
                do 13 k=1,i-1
                    sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
13 continue
                a(i,j)=sum
14 continue
                aamax=0.
            do 16 i=j,n
                sum=a(i,j)
                do 15 k=1,j-1
                    sum=sum-a(i,k)*a(k,j)
15 continue
                a(i,j)=sum
                dum=vv(i)*abs(sum)
                if (dum.ge.aamax) then
                    imax=i
                    aamax=dum

```

```

endif
16 continue
  if (j.ne.imax)then
    do 17 k=1,n
      dum=a(imax,k)
      a(imax,k)=a(j,k)
      a(j,k)=dum
17 continue
      d=-d
      vv(imax)=vv(j)
    endif
    indx(j)=imax
    if(a(j,j).eq.0.)a(j,j)=TINY

    if(j.ne.n)then
      dum=1./a(j,j)
      do 18 i=j+1,n
        a(i,j)=a(i,j)*dum
18 continue
      endif

19 continue
Return
END

```