



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Funciones Convexas, Cuasi-Convexas, Lipschitz y la Desigualdad de Simpson

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por
el **Br. Jesús E. Materano C.** para optar al
título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson J. Merentes D.

Caracas, Venezuela

Mayo, 2015

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Desigualdad de Simpson para Funciones Cuasi Convexas y Funciones Lipschitzianas**”, presentado por el **Br. Jesús E. Materano C.**, titular de la Cédula de Identidad **17.147.241**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes

Tutor

Dr. José Luis Sánchez

Jurado

Dr. Hugo Leiva

Jurado

Dedicado primeramente a Dios, y a mi familia, pues con su ayuda es que este trabajo pasó de ser un sueño, a una meta realizada.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primeramente a Dios, pues sin Él, este trabajo no hubiese sido posible, como dice su palabra Juan 15:5 “...Separados de mí nada podéis hacer” y 1 Tesalonicenses 5:18 “Dad gracias en todo, porque ésta es la voluntad de Dios para con vosotros en Cristo Jesús”.

A mis padres, Yudith Chique y Néstor Materano y hermanos, Massiel y Néstor David, que han sido apoyo incondicional durante el trayecto de la licenciatura, gracias mami, papá y hermanos.

A mi apreciada “Casa que vence las sombras” la UCV por abrirme sus puertas, y llenarme de conocimientos y vivencias inolvidables.

Al Profesor Nelson Merentes, tutor de este trabajo, por su valioso apoyo, colaboración, guía y paciencia durante la elaboración de este trabajo.

A ti Jackdin Hernández, porque fuiste motor principal para empezar, continuar y finalizar esta tesis, gracias flaquita. TAMDLQP.

A la señorita Mejía, Mariita y Ronaldys, quienes me prestaron su valiosa colaboración con la búsqueda de la bibliografía, escritura, y conocimientos básicos de LATEX, sin olvidar los momentos agradables y cómicos que vivimos.

A todo el personal del Banco Central de Venezuela por su gran ayuda y colaboración.

Al “Topo-Medida team” la señorita Daniella Fuentes, y el Sr. Ivan Zea por esos días,

esas noches, fines de semanas, y conocimientos compartidos que vivimos durante gran parte de la carrera.

También quiero agradecer a Gari Roa, Leonardo Prato, Alejandro Quintero, Irving Márquez, Sahid Leal, Yarot Avendaño por los gratos momentos vividos en la facultad y fuera de ella.

A todos GRACIAS TOTALES!!!

1	Preliminares	12
1.1	Funciones Convexas	14
1.1.1	Continuidad y Diferenciabilidad	22
1.1.2	Teorema de separación para funciones Convexas (Teorema del Sandwich)	33
1.1.3	Desigualdad de Jensen	36
1.1.4	Desigualdad de Tipo Hermite-Hadamard	39
1.2	Funciones Cuasi-Convexas	42
1.2.1	Teorema de Separación para Funciones Cuasi-Convexas (Teorema del Sandwich).	45
1.3	Operaciones con Funciones Convexas	53
2	Desigualdad de Simpson	62
2.1	Interpolación	62
2.2	Integración numérica y cuadratura	63
2.3	Fórmulas de integración de tipo interpolatorio	65
2.4	Fórmulas básicas de integración numérica	66
2.5	Desigualdad de Simpson	77

2.5.1	Desigualdad de Simpson para Funciones Cuasi-Convexas	84
2.5.2	Desigualdad de Simpson para funciones Lipschitzianas	100
2.6	Aplicaciones para Medias Especiales	111
2.6.1	Media Aritmética	111
2.6.2	Media Armónica	112
2.6.3	Media Geométrica	113
2.6.4	Media Logarítmica	114
Conclusiones y Recomendaciones		118
Bibliografía		120

Este Trabajo Especial de Grado, está enmarcado en una de las líneas de investigación que concurren en el seminario permanente que se realiza en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

El trabajo es de carácter expositivo e intradisciplinar, ya que en él, participan diferentes nociones y tópicos matemáticos tales como: convexidad, variación acotada, interpolación de polinomios, cuadraturas, integración numérica y otros. El objetivo principal del Trabajo Especial de Grado es exponer resultados sobre la **desigualdad de Simpson** para funciones convexas, cuasi-convexas y Lipschitz.

En análisis numérico, la **regla o método de Simpson**, nombrada así en honor a Thomas Simpson (y a veces llamada regla de Kepler), es un método de integración numérica para obtener el valor aproximado de integrales definidas; específicamente es la aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

La fórmula fué utilizada por primera vez por Evangelista Torricelli (1608-1647), pero debe su nombre al matemático Thomas Simpson (1710-1761), corresponde a la regla del tonel que el astrónomo y matemático Johannes Kepler (1571-1630), ya había formulado en 1615.

Uno de los resultados mejor conocido en la integración numérica es la desigualdad de Simpson

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^5$$

donde la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se asume cuatro veces continuamente diferenciable sobre el intervalo (a, b) y la cuarta derivada acotada en (a, b) , es decir

$$\|f^{(4)}\|_{\infty} := \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}| < \infty.$$

En este trabajo (capítulo 2) la noción de **cuadratura** juega un importante rol.

Se entiende por cuadratura el cálculo de integrales definidas de funciones de una variable, esto es, el cálculo del valor

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

La idea básica de la cuadratura numérica es aproximar el valor de $I(f)$ por la integral interpolante,

$$I(f) \approx \int_a^b p(x)dx,$$

bien sea este el polinomio interpolador de f asociado a ciertos nodos, bien un interpolante a trozos asociado a una partición Δ de $[a, b]$. En el primer caso, la aproximación da lugar a lo que se conoce como fórmulas de cuadratura; e el segundo caso a las fórmulas de cuadratura compuesta.

La aproximación numérica de la integral definida se conoce como la integración o cuadratura numérica. El segundo nombre procede de la antigüedad, en relación con el cálculo de las áreas de las figuras curvas, cuyo ejemplo más notorio es el problema de la cuadratura del círculo (encontrar el cuadrado de área coincidente con la de un círculo dado) [8]. En el capítulo 2 nos ocuparemos brevemente del cálculo aproximado del área bajo la curva $f(x)$, definida sobre un intervalo $[a, b]$, de la recta real, es decir

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

La integración numérica es una herramienta de gran utilidad para obtener valores aproximados de integrales definidas, que no pueden calcularse analíticamente, ya sea porque el integrando no tiene primitiva expresable analíticamente, o bien, porque dicho integrando no se conoce en forma analítica, sino en forma discreta (tabulada).

Cuadratura es un término matemático histórico que significa el determinio de una área. El estudio de cuadratura ha servido como una de las principales fuentes de problemas para el análisis matemático.

Los matemáticos de la antigua Grecia, de acuerdo con la doctrina pitagórica, entendían la determinación del área de una figura, como el proceso de construcción geométrica de un cuadrado que tiene la misma área (cuadratura). Así este proceso obtuvo el nombre de cuadratura. Los geómetras griegos no siempre tuvieron éxito, pero continuaron realizando cuadraturas de algunas figuras cuyos lados no eran otra cosa que los segmentos de línea; como por ejemplo, el Lune de Hipócrates y la cuadratura del segmento parabólico desarrollada por Arquímedes. Por tradición griega, estas construcciones tenían que llevarse a cabo utilizando solamente un compás y una regla.

Para una cuadratura de un rectángulo con los lados a y b es necesario construir un cuadrado con el lado $x = \sqrt{ab}$ (la media geométrica de a y b). Para este propósito, es posible utilizar el siguiente hecho; si se dibuja el círculo con un diámetro que resulta del hecho de unir segmentos de línea de longitudes a y b , entonces la altura del segmento de línea dibujada perpendicularmente al diámetro, a partir de el punto de su conexión con el punto donde cruza el círculo, es igual a la media geométrica de a y b . Una construcción geométrica similar resuelve los problemas de cuadratura de un paralelograma y de un triángulo. El área de un segmento de parábola es $\frac{4}{3}$ del área de un cierto triángulo inscrito en ella.

Los problemas de la cuadratura de figuras curvilíneas son mucho más difíciles que los anteriores. La cuadratura del círculo con regla y compás se había demostrado en el

siglo XIX que es imposible. Sin embargo, para algunas cifras (por ejemplo un Lune de Hipócrates) se puede realizar una cuadratura. Las cuadraturas de la superficie de una esfera y un segmento de parábola descubierta por Arquímedes se convirtió en el más alto logro de análisis en la antigüedad.

El área de la superficie de una esfera es igual a cuadruplicar el área del círculo formado por un gran círculo de esta esfera.

El área de un segmento de una parábola determinada por una línea recta, es $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo inscrito en este segmento.

Para la prueba de estos resultados Arquímedes de Siracusa utilizó el método de exhausción [9] de Eudoxo.

Este Trabajo Especial de Grado está organizado en dos capítulos, el capítulo 1 está dedicado a la noción de convexidad, y sus propiedades.

Se estudia la desigualdad de Hermite Hadamard y la desigualdad de Jensen.

En el capítulo 2 se introduce brevemente la regla de cuadratura de Simpson y nociones de interpolación. También se estudia la regla trapezoidal.

Se exponen de manera detallada algunos resultados de Mahomad Alomari en [3] y Sever Silvestru Dragomir en [13] sobre la desigualdad de Simpson sobre funciones cuasi-convexas y lipschitzianas respectivamente.

Se dará una generalización, de la Desigualdad de Simpson para funciones cuasi-convexas en términos, de la tercera derivada, así como la estimación del error para la fórmula de cuadratura de Simpson en funciones Lipschitzianas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se dará una breve introducción de la noción de convexidad y sus propiedades como continuidad, diferenciabilidad entre otras. Desigualdad de Hölder y Hermite-Hadamard así como también se presentarán algunas definiciones, proposiciones, teoremas y ejemplos, que ayudarán a comprender mejor este trabajo especial de grado. En la vida diaria la noción de convexidad está presente de varias maneras, el ejemplo más sencillo; es nuestra posición cuando nos mantenemos de pie, que se fija siempre en la proyección vertical de nuestro centro de gravedad, y se encuentra dentro del arco de los pies, el cual tiende a ser convexo. Además, la convexidad tiene un gran impacto en nuestra vida cotidiana a través de numerosas aplicaciones en distintas áreas del conocimiento como Finanzas, Economía, Ingeniería, Computación entre otros.

Los estudios realizados sobre teoría de convexidad tienen una larga historia; en el famoso libro “Los Elementos de Euclides”(300 A.C.) aparecen varias contribuciones a esa materia, relativas, principalmente, a propiedades de los polígonos y los poliedros. Sin embargo, fué Arquímedes de Siracusa (278-212 A.C.) el primero en dar una definición precisa de lo que se entendía por una curva o una superficie convexa (en su libro “Sobre la esfera y el cilindro”). Entre las propiedades obtenidas por Arquímedes, merecen especial mención los postulados y resultados referentes al centro de gravedad de conjuntos planos

y su descripción de los trece poliedros semi regulares, (entiéndase por un poliedro convexo semi regular si sus caras son polígonos regulares de, al menos, dos tipos, y el grupo de isometrías es transitivo sobre los vértices), también conocidos como sólidos arquimedianos que fueron redescubiertos muy posteriormente por Johannes Kepler (1571-1630) en su libro “Harmonices Mundi” (1619), quién demostró que efectivamente solo podían existir trece.

Por lo que podemos saber, fué el matemático griego Zenodorus (200 A.C.) el autor del primer trabajo conocido sobre el famoso problema isoperimétrico, (el cual data del año 810 A.C.). Él demuestra que todos los n -ágonos convexos de perímetro dado, y el n -ágono regular encierra la mayor área (suponiendo la existencia de tal n -ágono maximal).

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX se trabaja en el tema de convexidad por varios matemáticos, entre ellos, el alemán Otto Hölder [30]. El cual, en 1889 demostró la forma discreta de la llamada desigualdad de Jensen, bajo una hipótesis con un mayor grado de regularidad para la función f' , es decir, que la segunda derivada es no negativa en su dominio, lo que quiere decir que, $f''(x) > 0$ para todo $x \in Dom f$.

Además de contribuciones, a finales del siglo XIX, aparecieron diversos resultados de gran importancia en convexidad gracias a destacados matemáticos como H. Brunn o H. Minkowski, sin embargo; el interés real sobre la geometría convexa es relativamente reciente, pues un primer estudio sistemático no lo encontramos hasta 1934, en el libro de T. Bonnesen y W. Fenchel “Theorie der Konvex Körper”. A lo largo de los años 40 y 50 se descubrieron numerosas aplicaciones importantes de los conjuntos convexos, principalmente en el campo de la optimización geométrica, lo que acrecentó el interés de esta teoría.

Adicionalmente se obtuvieron varios resultados significativos en el Análisis Funcional Geométrico, la Economía Matemática y Análisis Convexo. El estudio de las funciones convexas fué tomando auge al punto que apareció el libro de G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Polya [28] titulado “Inequalities”.

Uno de los resultados más importantes de las funciones convexas es la llamada de-

sigualdad de Hermite-Hadamard que fué dada por Jaques Hadamard [27] en 1983, para el caso de las funciones con derivadas creciente en un intervalo cerrado de la recta real. En esa época la noción de función convexa estaba en proceso de construcción. En 1883 la parte derecha de la desigualdad la demostró Charles Hermite por lo que hoy en día se llama desigualdad de Hermite-Hadamard, y viene dada de la siguiente manera

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Una forma más generalizada del concepto de función convexa, la introdujo Edwin Bekenbach [6] en 1937 en el trabajo "Generalized Convex Functions", reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas pertenecientes a una familia de funciones de dos parámetros. Las funciones generalizadas son obtenidas de muchas de las propiedades conocidas para la función convexa clásica, como se puede ver en los trabajos de Edwin Beckenbach, Mihály Bessenyi y Kazimierz Nikodem [6], [7], [43], respectivamente, o el libro titulado "Convex Functions", de A. W. Roberts, D. E. Varberg [51].

Dada funciones f y g definidas sobre un espacio vectorial a valores reales, uno de los problemas de interés en la matemática es determinar condiciones necesarias y suficientes sobre f y g para que exista una función h que separe a f y g ($f \leq h \leq g$) y que cumpla cierta condición; por ejemplo, continuidad, convexidad, cuasi-convexidad, cuasi-concavidad, monotonía, etc. K. Baron, J. Matkowski y K. Nikodem [5] muestran resultados diferentes a esta clase de problemas. Zs. Páles, en [40], obtiene resultados similares para funciones cuasi-convexas y cuasi-cóncavas.

1.1 Funciones Convexas

El concepto de función convexa es una noción básica en la geometría, que también se usa ampliamente en otras áreas de las matemáticas y las ciencias; como en la Teoría de la Optimización y la Teoría de las desigualdades, del análisis funcional, la programación matemática y la Teoría de Juegos, la Teoría de números, el cálculo variacional y otras ramas de las matemáticas aplicadas que utilizan este concepto de manera fundamental.

su interrelación con estas ramas que se muestra día a día más profunda y fructífera.

En 1893 el francés Jaques Hadamard [31], [32] logró una desigualdad para aquellas funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$. Johan Ludwig William Jensen utiliza la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad (1.1)$$

para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de resultados el cual junto con la desigualdad (1.1) implica la continuidad de f .

A continuación se enunciará la definición de función convexa, la cual constituye la noción fundamental de este trabajo

Definición 1. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es convexa si y sólo si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (1.2)$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Si la desigualdad es estricta cuando $x \neq y$ y $t \in (0, 1)$, se dice que f es estrictamente convexa.

Luego, el matemático Johan Jensen uso la desigualdad que lleva su nombre para enunciar la siguiente definicion de función convexa [36].

Definición 2. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y convexo. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa si y sólo si satisface la desigualdad funcional de Jensen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

para todo $a, b \in I$. Si la desigualdad es estricta para $x \neq y$, entonces la función f es llamada estrictamente convexa.

Geoméricamente, la definición de una función convexa f significa que para cualesquiera dos puntos $(x, f(x)), (y, f(y)) \in Graf(f)$ donde $Graf(f)$ es el gráfico de

f , la cuerda que los une nunca está por debajo de la gráfica de la función; esta idea la generaliza el matemático estadounidense E. Beckenbach [6] en 1937, reemplazando los segmentos por el gráfico de funciones continuas que pertenecen a una familia de funciones \mathcal{F} de dos parámetros, como se muestra a continuación en la Figura 1.1

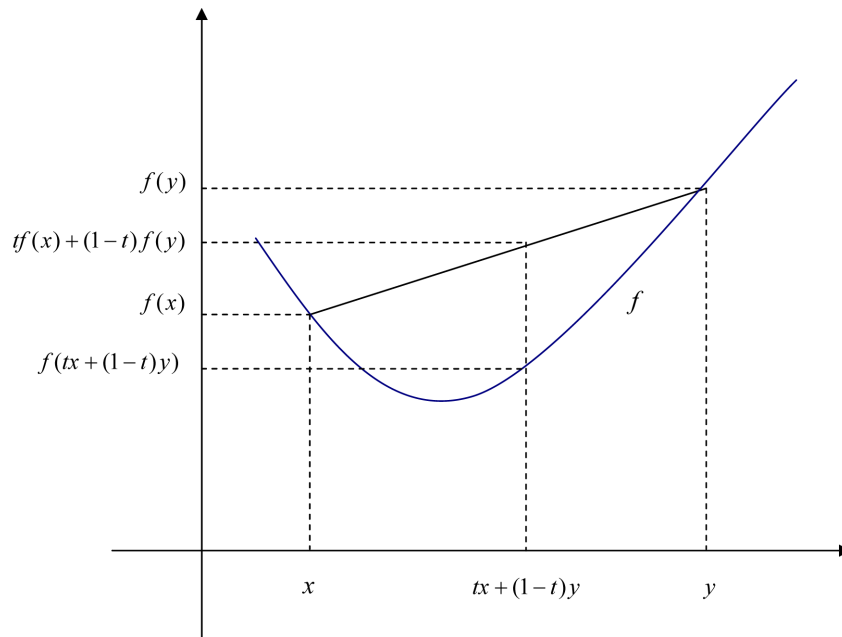


Figura 1.1: Función convexa, $I = [x, y]$

Sean $x, y \in I, x < y$ y considérese la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x)), (y, f(y))$, es decir

$$r(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - y) + f(y), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si

$$z = tx + (1 - t), \quad t \in (0, 1),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 r(z) = r(tx + (1-t)y) &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(tx + (1-x)y - y) + f(y) \\
 &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t(x - y)) + f(y) \\
 &= t(f(x) - f(y)) + f(y) \\
 &= tf(x) - (1-t)f(y).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $r(z) = tf(x) + (1-t)f(y)$; así, el punto $(z, r(z))$ está sobre el segmento de recta que une los puntos $(x, f(x)), (y, f(y))$.

Además, como f es una función convexa, se verifica

$$\begin{aligned}
 f(z) = f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\
 &= r(z).
 \end{aligned}$$

En consecuencia $f(z) = r(z)$ para todo $z \in [x, y]$, de donde se concluye que el segmento de recta que une los puntos $(x, f(x)), (y, f(y))$ nunca está por debajo de la gráfica de la función.

Para ilustrar esta definición tenemos la siguiente Figura 1.2.

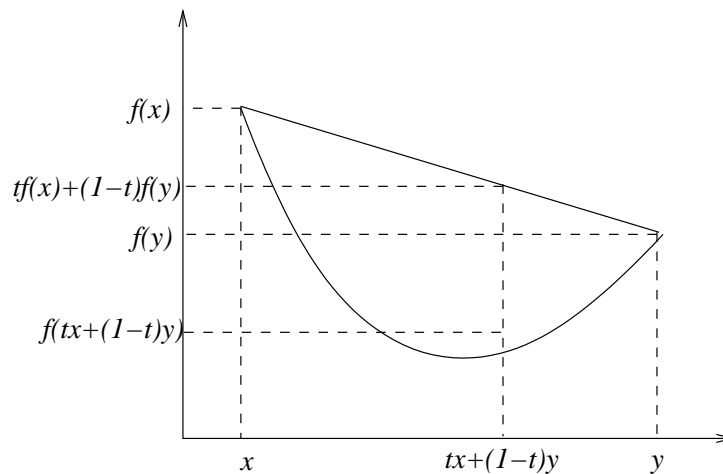


Figura 1.2: Función convexa, $I = [x_2, x_1]$

Análogamente, si se invierte la desigualdad (1.2), se dice que f es cóncava. La función es estrictamente cóncava si la desigualdad es estricta cuando $x \neq y$ y $t \in (0, 1)$.

La interpretación geométrica de una función cóncava establece que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava, entonces la cuerda que une los puntos $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{Graf}(f)$ nunca está por arriba de la gráfica de f , como lo ilustra la figura 1.3

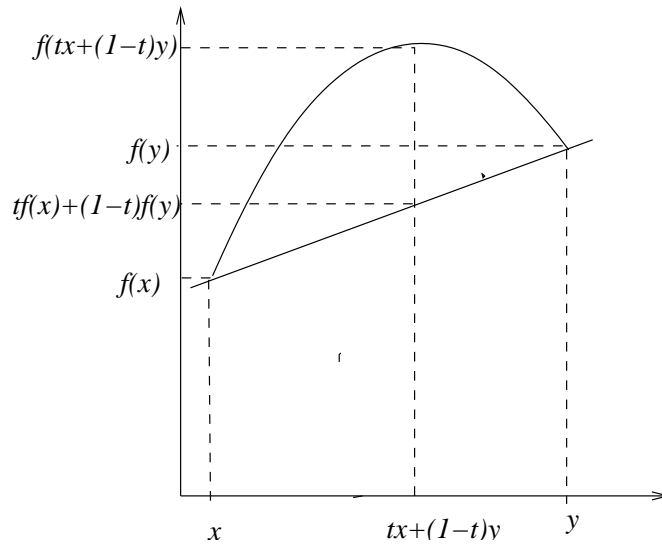


Figura 1.3: Función cóncava, $I = [x, y]$

Ahora consideraremos algunos ejemplos de funciones convexas para ilustrar la definición.

Ejemplo 1. $f(x) = |x|$ sobre $I = \mathbb{R}$.

Veamos que $f(x) = |x|$ es convexa.

$$\begin{aligned}
 f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \\
 &\leq |tx| + |(1-t)y| \\
 &= t|x| + (1-t)|y| \\
 &= tf(x) + (1-t)f(y)
 \end{aligned}$$

así f es convexa.

Ejemplo 2. $g(x) = x^2$ sobre $I = \mathbb{R}$.

Sea $t \in [0, 1]$; para comprobar que la función $g(x) = x^2$ es convexa se tiene que verificar que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

es decir

$$\begin{aligned}
 0 &\leq t(1-t)(x-y)^2 \\
 &= t(1-t)(x^2 - 2xy + y^2) \\
 &= tx^2(1-t) + y^2(1-t) - 2t(1-t)xy \\
 &= tx^2(1-t) + y^2(1-t)(1-1+t) - 2t(1-t)xy \\
 &= tx^2(1-t) + y^2(1-t)(1-(1-t)) - 2t(1-t)xy \\
 &= tx^2 + (1-t)y^2 - t^2x^2 - (1-t)^2y^2 - 2t(1-t)xy \\
 &= tx^2 + (1-t)y^2 - (t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + 2t(1-t)xy) \\
 &= tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2
 \end{aligned}$$

en efecto $g(x) = x^2$ es convexa.

Ejemplo 3. $h(x) = \frac{1}{x}$ sobre $I = (0, \infty)$.

Demostremos que h es una función convexa. En efecto $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$, entonces:

Demostremos, que h es convexa

$$\begin{aligned} \frac{1}{tx + (1-t)y} &\leq t\frac{1}{x} + (1-t)\frac{1}{y} \\ xy &\leq ty(tx + (1-t)y) + (1-t)x(tx + (1-t)y) \\ xy &\leq ty(tx + y - ty) + (1-t)x(tx + y - ty) \\ xy &\leq t^2xy + ty^2 - t^2y^2 + tx^2 + xy - txy - t^2x^2 - txy + t^2xy \\ 0 &\leq t^2xy + ty^2 - t^2y^2 + tx^2 + xy - txy - t^2x^2 - txy + t^2xy \quad t > 0 \\ 0 &\leq 2txy + x^2 + y^2 - tx^2 - 2xy - ty^2 \\ 0 &\leq 2xy(t-1) + x^2(1-t) + y^2(1-t) \\ 0 &\leq (t-1)(2xy + x^2 + y^2) \\ 0 &\leq (1-t)(x+y)^2 \quad (1-t) > 0 \\ 0 &\leq (x+y)^2 \end{aligned}$$

lo cual es cierto; por lo tanto, h es convexa.

El lema que sigue se usará luego para la demostración del Teorema 3.

Lema 1 (Ver [48]). Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es convexa si y sólo si

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

para todo $x, y, z \in I$ tal que $x < z < y$.

Demostración: Para verificar la primera desigualdad, consideremos

$$z = x + \lambda(y - x), \quad \lambda \in (0, 1),$$

con $\lambda = \left(\frac{z-x}{y-x}\right)$. Dado que f es convexa, se verifica

$$f(z) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)),$$

de donde

$$f(z) - f(x) \leq \frac{z-x}{y-x}(f(y) - f(x)),$$

y en consecuencia

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x},$$

en el cual se cumple el lado izquierdo de la desigualdad. Ahora sea $z = \lambda(x-y)$, entonces, $\frac{z-y}{x-y} = \lambda \in (0, 1)$ y de la convexidad de la función f se tiene

$$f(z) \leq f(y) + \lambda(f(x) - f(y)),$$

de donde se obtiene inmediatamente

$$\frac{f(z) - f(y)}{z-y} \geq \frac{f(x) - f(y)}{x-y},$$

donde $z-y < 0$, cumpliéndose así el lado derecho de la desigualdad. Recíprocamente, supóngase que f verifica las desigualdades del Lema 1 con $x < z < y$, y sea $\lambda \in [0, 1]$ tal que $z = x + \lambda(y-x)$. Obsérvese que $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$. Por la primera desigualdad resulta que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.$$

Luego

$$f(z) \leq f(x) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)(f(y) - f(x)).$$

Es decir

$$f(x + \lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)),$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$; así f es una función convexa.

1.1.1 Continuidad y Diferenciabilidad

En esta sección se estudiarán las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de las funciones convexas. Se iniciará con una proposición que expresa que toda función convexa definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ es acotada.

Proposición 1 (Ver [51]). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces es acotada.*

Demostración: Sea $M = \max\{f(a), f(b)\}$ y $z \in [a, b]$. Entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $z = ta + (1 - t)b$, y como f es una función convexa, se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= f(ta + (1 - t)b) \\ &\leq tf(a) + (1 - t)f(b) \\ &\leq tM + (1 - t)M \\ &= M. \end{aligned}$$

Es decir, f es acotada superiormente.

Para ver que f es acotada inferiormente se escogerá $t \in \mathbb{R}$, de tal forma que los puntos

$$x = \frac{a+b}{2} - t, \quad y = \frac{a+b}{2} + t,$$

están en $[a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m. \end{aligned}$$

Como cualquier punto en $[a, b]$ se puede escribir en la forma $\frac{a+b}{2} + t$, para algún t debidamente seleccionado, se deduce que f es acotada inferiormente.

En conclusión, para todo $z \in [a, b]$ se verifica que

$$m \leq f(z) \leq M,$$

donde $M = \max\{f(a), f(b)\}$ y $m = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$ y por lo tanto f es acotada. \square

Observación 1. *Es indispensable que el intervalo en el que está definida la función sea cerrado y acotado ya que en caso contrario puede suceder que la función no sea acotada. Como ejemplos de estos se tienen las funciones $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-1}$ y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, que son convexas pero no son acotadas superiormente.*

A continuación enunciaremos la definición de función Lipschitz.

Definición 3. *Se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición Lipschitz en el intervalo I si para todo $x, y \in I$ existe una constante $K > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

La constante K se denomina constante de Lipschitzidad.

En el siguiente teorema demostraremos que toda función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, donde I es un intervalo, satisface una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado contenido en I^0 (el interior de I).

Teorema 1 (Ver [51]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f satisface una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset I^0$ y, por lo tanto, f es continua en el interior de I .*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ tal que $a - \epsilon$ y $b + \epsilon$ estén en I , y sean M y m las cotas inferior y superior de f en el intervalo $[a - \epsilon, b + \epsilon]$. Sean $x, y \in [a, b]$, con $x \neq y$.

Como

$$\left| \frac{1}{|y-x|}(y-x) \right| = 1,$$

resulta que

$$z = y + \frac{\epsilon}{|y-x|}(y-x) \in [a-\epsilon, b+\epsilon],$$

luego,

$$y = \frac{|y-x|}{\epsilon+|y-x|}z + \frac{\epsilon x}{\epsilon+|y-x|}.$$

En consecuencia, si consideramos

$$\lambda = \frac{|y-x|}{\epsilon+|y-x|} \in (0,1),$$

se tiene que

$$y = \lambda z + (1-\lambda)x,$$

y como f es convexa se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x) \\ &= \lambda[f(z) - f(x)] + f(x). \end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \lambda(M-m) \\ &< \frac{|y-x|}{\epsilon}(M-m) = k|y-x|, \end{aligned}$$

donde $k = \frac{(M-m)}{\epsilon}$. Por lo tanto para $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, se deduce que

$$|f(y) - f(x)| < k|y-x|$$

y así f es Lipschitz en cualquier intervalo $[a, b] \subset I^0$. De cualesquiera sea el intervalo $[a, b]$, se concluye que f es continua en el interior de I . \square

Observación 2. *El teorema que se acaba de demostrar establece que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, es convexa, entonces es continua en el interior del intervalo I . Pero no se aclara la situación en los puntos extremos del intervalo I . Con el fin de aclarar esto, considérese la función $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 1) \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Esta función es convexa, continua en $x = -1$ y discontinua en $x = 1$.

En lo que sigue de esta sección se tratará la diferenciabilidad de funciones convexas en términos de derivadas laterales.

Definición 4. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces las derivadas laterales se definen para $x \in I$ en caso de existir tal como sigue

derivada por la izquierda

$$f'_-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y derivada por la derecha

$$f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Demostraremos a continuación que las derivadas laterales de una función convexa existen, son monótonas y crecientes en I^0 (Interior de I).

Teorema 2 (Ver [48]). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa [estrictamente convexa] entonces en cada $x \in I^0$ existen las derivadas laterales y las funciones $f'_-(x)$ y $f'_+(x)$ son crecientes [estrictamente crecientes] en I^0 .

Demostración: Considérese cuatro puntos $w, x, y, z \in I^0$ tales que $w < x < y < z$ y sean

$$P = (w, f(w)), Q = (x, f(x)), R = (y, f(y)) \text{ y } S = (z, f(z)).$$

(Ver Figura 1.4);

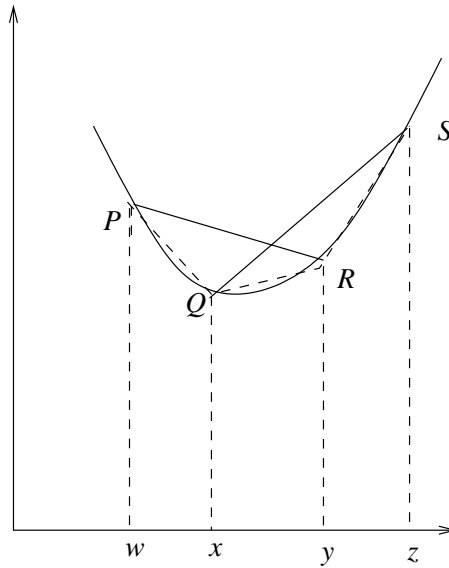


Figura 1.4: Relación entre las pendientes.

Se considera la siguiente notación para la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B tal como sigue $pendiente(AB) = pend(AB)$. Con esta notación se obtiene

$$pend(PQ) \leq pend(PR) \leq pend(QR) \leq pend(QS) \leq pend(RS) \quad (1.3)$$

con desigualdades estrictas si f es estrictamente convexa. Esto equivale a las siguientes desigualdades

$$\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \leq \frac{f(w) - f(y)}{w - y} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \quad (1.4)$$

de la segunda desigualdad de (1.4) se obtiene que

$$\frac{f(w) - f(y)}{w - y} \text{ es creciente en } w \text{ (} w < y \text{)} \quad (1.5)$$

de la desigualdad (1.4) y (1.5) se tiene

$$\frac{f(w) - f(y)}{w - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

es decir,

$$\frac{f(w) - f(y)}{w - y} \text{ está acotado superiormente por } \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad (1.6)$$

para cualquier $z > y$.

De (1.5) y (1.6) resulta que,

$$\lim_{w \uparrow y} \frac{f(w) - f(y)}{w - y}$$

existe y

$$\lim_{w \uparrow y} \frac{f(w) - f(y)}{w - y} = \sup_{w < y} \frac{f(w) - f(y)}{w - y}$$

por lo tanto, si $y \in I^0$, existe la derivada lateral $f'_-(y)$.

De manera similar, se comprueba que existe derivada lateral $f'_+(x)$, para todo $x \in I^0$

y

$$f'_+(x) = \lim_{z \downarrow x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \inf_{z > x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$$

además de las cuatro desigualdades de (1.4) se obtiene que

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$

y por lo tanto $f'_-(x) \leq f'(x)$ para todo $x \in I^0$ y f'_-, f'_+ son funciones crecientes. \square

Observación 3. *Considérese los tres puntos $w, x, y \in I^0$, tales que $w < x < y$. Como la función derivada lateral f'_+ es monótona, existe el límite de $f'_+(x)$ cuando $x \downarrow w$. Además la desigualdad*

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y de la continuidad de f se puede inferir que

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+(x) \leq \lim_{x \downarrow w} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(w)}{y - w}.$$

Si se hace $y \downarrow w$ afirmaremos que

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+(x) \leq \lim_{y \downarrow w} \frac{f(y) - f(w)}{y - w} = f'_+(w).$$

Esto implica que

$$\lim_{x \downarrow w} f_+(x) \leq f'_+(w) \quad (1.7)$$

por otra parte, como $w < x$, la monotonía de f'_+ implica que $f'_+(w) \leq f'_+(x)$ y por lo tanto

$$f'_+(w) \leq \lim_{x \downarrow w} f'_+(x) \quad (1.8)$$

de (1.7) y (1.8) se deduce que

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+(x) = f'_+(w).$$

Supóngase ahora que los tres puntos $x, y, w \in I^0$ son tales que $y < x < w$. Dado que la función f'_+ es monótona creciente se verifica

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_+(x)$$

y de la continuidad de f se tiene

$$\lim_{x \uparrow w} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim_{x \uparrow w} f'_+(x)$$

si ahora se hace que $y \uparrow w$, se obtiene

$$\lim_{y \uparrow w} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim_{x \uparrow w} f'_+(x),$$

es decir,

$$f'_-(w) \leq \lim_{x \uparrow w} f'_+(x) \quad (1.9)$$

además, como $x < w$, la monotonía de las derivadas laterales implica que $f'_+(x) \leq f'_-(w)$ y en consecuencia

$$\lim_{w \uparrow w} f'_+(x) \leq f'_-(w) \quad (1.10)$$

de (1.9) y (1.10) se obtiene que

$$\lim_{x \uparrow w} f'_+(x) = f'_-(w).$$

El próximo teorema presenta una forma de reconocer las funciones convexas como integrales de funciones crecientes.

Teorema 3 (Ver [51]). *Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa (estrictamente convexa) si y sólo si existe una función creciente (estrictamente creciente) $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $c \in (a, b)$, tales que para todo $x \in (a, b)$*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt. \quad (1.11)$$

Demostración: Supóngase que la relación (1.11) es cierta con g creciente y sean α, β , números positivos tales que $\alpha + \beta = 1$. Entonces, para todo $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$, se tiene $x < \alpha x + \beta y < y$. Luego

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) - (\alpha + \beta)f(\alpha x + \beta y) \\ &= \beta(f(y) - f(\alpha x + \beta y)) - \alpha(f(\alpha x + \beta y) - f(x)) \\ &= \beta \int_{\alpha x + \beta y}^y g(t)dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(t)dt \quad \text{por (1.11) y } g \text{ creciente} \\ &\geq \beta \int_{\alpha x + \beta y}^y g(\alpha x + \beta y)dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(\alpha x + \beta y)dt \quad (A) \\ &= \beta g(\alpha x + \beta y)(y - (\alpha x + \beta y)) - \alpha g(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y - x) \\ &= g(\alpha x + \beta y)(\beta(y - (\alpha x + \beta y)) - \alpha(\alpha x + \beta y - x)) \\ &= g(\alpha x + \beta y)(\beta y - \beta(\alpha x + \beta y) - \alpha(\alpha x + \beta y) + \alpha x) \\ &= g(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y - (\alpha + \beta)(\alpha x + \beta y)) \\ &= g(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y - (\alpha x + \beta y)) = 0 \end{aligned}$$

esto implica que

$$\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) \geq 0 \quad (1.12)$$

para todo $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \in (a, b)$. Por lo tanto f es convexa. Además como g es una función creciente se verifican

$$x < t < \alpha x + \beta y \Rightarrow g(t) \leq g(\alpha x + \beta y)$$

$$\alpha x + \beta y < t < y \Rightarrow g(\alpha x + \beta y) \leq g(t)$$

y si g es estrictamente creciente estas desigualdades son estrictas, y por lo tanto la desigualdad (A) es estricta, donde la desigualdad (1.12) también es estricta y así la función f es estrictamente creciente.

Recíprocamente, supóngase que f es una función convexa (estrictamente convexa) por el Teorema 2 se sabe que la derivada lateral f'_+ existe y es creciente (estrictamente creciente). Consideremos una partición $\Pi = \{c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x\}$ del intervalo $[c, x]$. Cómo $x_{k-1} < x_k$ para todo $1 \leq k \leq n$, se tiene de acuerdo con el Lema 1 y el Teorema 2 que

$$f'_+(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_+(x_k)$$

de donde se obtiene

$$f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k) - f(x_{k-1}) \leq f'_+(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

sumando sobre k , se tiene

$$\sum_{k=1}^n f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_n) - f(x_0) \leq \sum_{k=1}^n f'_+(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Las dos sumas de estas últimas desigualdades son las sumas de Riemann de la función f'_+ asociadas a la partición Π y verifican las desigualdades independientemente de la partición del intervalo $[c, x]$ que se considere. Como la función f'_+ es creciente, entonces es Riemann-integrable y al considerar el supremo de la suma izquierda y el ínfimo de la suma de la derecha sobre todas las particiones se obtiene por definición de integral de Riemann que

$$\int_c^x f'_+(t) dt \leq f(x) - f(c) \leq \int_c^x f'_+(t) dt$$

es decir

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t) dt$$

y así podemos asegurar que $g(t) = f'_+(t)$. La función f'_- también se puede usar en lugar de f'_+ ya que ambas funciones son crecientes (estrictamente crecientes) cuando f es convexa (estrictamente convexa). \square

El teorema anterior demuestra que para una función diferenciable, la convexidad implica que la derivada es creciente. A continuación se presenta otra manera de ver la convexidad de una función.

Teorema 4 (Ver [51]). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b) . Entonces f es convexa, (estrictamente convexa), si y sólo si f' es una función creciente (estrictamente creciente).*

Demostración: Supóngase que f' es una función creciente (estrictamente creciente), entonces el teorema fundamental del cálculo asegura que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt \quad (1.13)$$

para cualquier $c \in (a, b)$, en virtud del Teorema 4 se tiene que f es convexa. Recíprocamente, si la derivada f' es creciente (estrictamente creciente) y existe en todos los puntos del dominio de la función f , entonces de acuerdo con la relación (1.13) y de la aplicación del Teorema 3 con $g(t) = f'(t)$ para todo $t \in (a, b)$, se concluye que f es convexa (estrictamente convexa). \square

Antes de demostrar el próximo teorema se dará la siguiente definición.

Definición 5. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f tiene soporte lineal en $x_0 \in I$ si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que la función afín $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ verifica que $A(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. La función A se conoce como la función (o recta) de soporte f en x_0 .*

Como lo ilustra la Figura 1.5, cada punto del interior de su dominio tiene soporte.

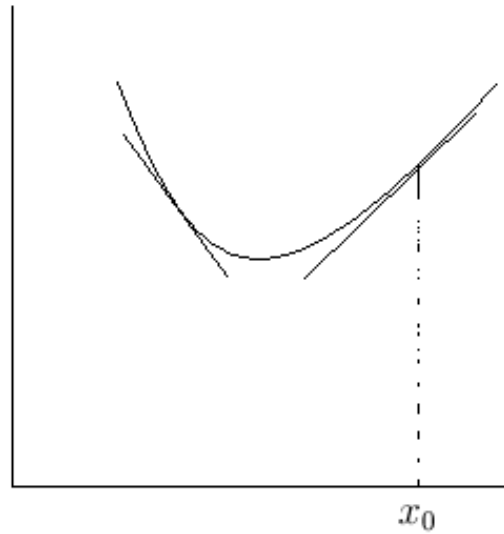


Figura 1.5: Recta de soporte de f en x_0

El próximo teorema provee una demostración de este hecho.

Teorema 5 (Ver [51]). *Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, si y sólo si existe al menos una recta de soporte para cada $x_0 \in (a, b)$.*

Demostración: Supongamos que f es convexa, entonces para cada $x_0 \in (a, b)$ podemos escoger $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Si $x \in (a, b)$ es tal que $x_0 < x$, entonces

$$f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

de donde

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0).$$

Por otra parte, si $x < x_0$ se verifica

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$$

y como $x - x_0 < 0$ resulta

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$$

en cualquier caso se cumple que

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) = A(x)$$

y así A es una recta de soporte de f en x_0 . Supongamos ahora que f tiene una recta de soporte en cada punto de (a, b) y sean $x, y \in (a, b)$. Si $x_0 = tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]$, y $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ la recta de soporte f en x_0 , entonces

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= f(x_0) = A(x_0) = A(tx + (1 - t)y) \\ &= tA(x) + (1 - t)A(y) \\ &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) \end{aligned}$$

es decir

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

para todo $x, y \in (a, b)$ y $t \in [0, 1]$. Por lo tanto f es convexa. \square

Definición 6. Sea f una función definida en el intervalo I , f tiene el soporte en $x_0 \in I$, si existe una función afín $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ que pasa por $(x_0, f(x_0))$, tal que $A(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. La función afín A es llamada recta soporte de f en x_0 .

1.1.2 Teorema de separación para funciones Convexas (Teorema del Sandwich)

Dadas dos funciones definidas en un intervalo I tal que $f \leq g$. Un problema de interés es determinar si existe una función convexa $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ que separe a f y a g , es decir tal que $f \leq h \leq g$. Existen situaciones donde este problema tiene respuesta negativa como son los casos que se muestran a continuación [49] y [19]

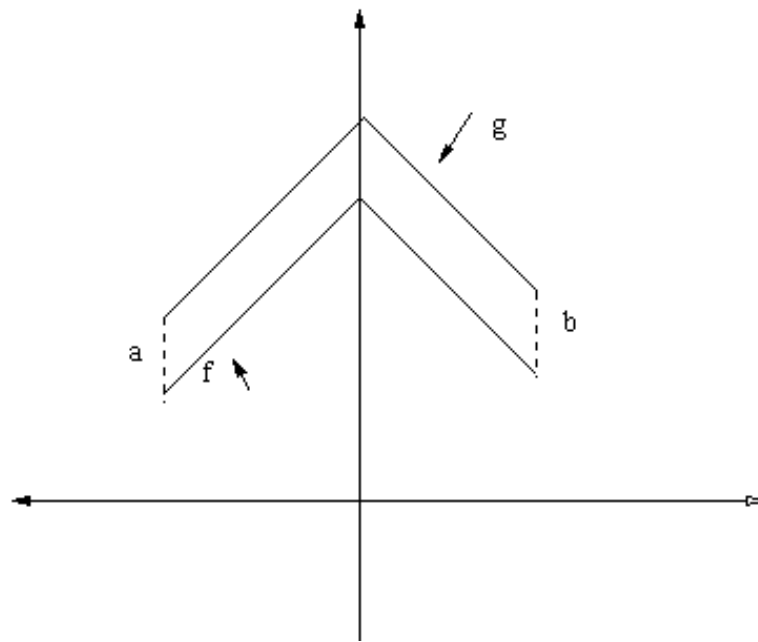


Figura 1.6:

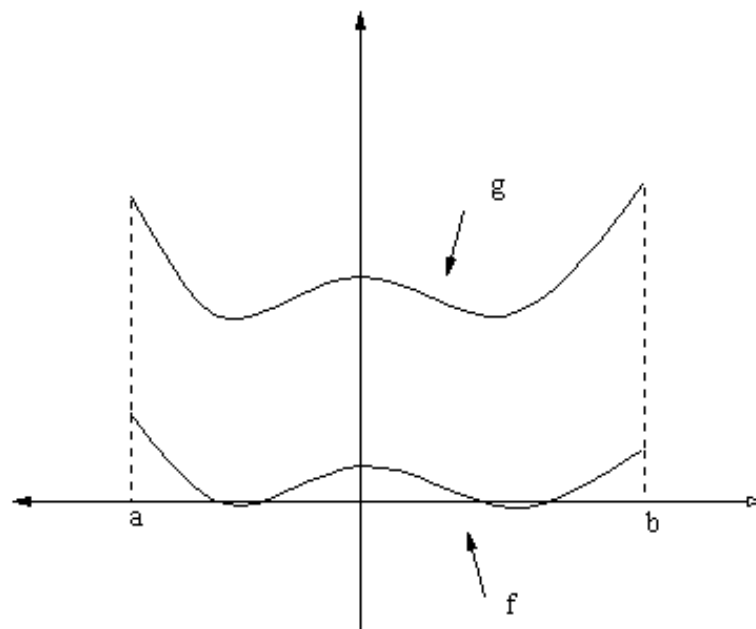


Figura 1.7:

Una situación como la mostrada en la Figura 1.7 ocurre cuando se considera $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 - |x|$ y $g(x) = 2 - |x|$. Si existiese $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa tal que $f \leq h \leq g$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f\left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1\right) \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1\right) \\ &\leq \frac{1}{2}h(-1) + \frac{1}{2}h(1) \\ &\leq \frac{1}{2}g(-1) + \frac{1}{2}g(1) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(-|-1| + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-|1| + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción; por lo tanto, no existe una función convexa que separe a las funciones f y g . Por supuesto, también existen casos donde la función h existe, por ejemplo si f y g son convexas o en una situación como en la ilustrada en la Figura 1.8

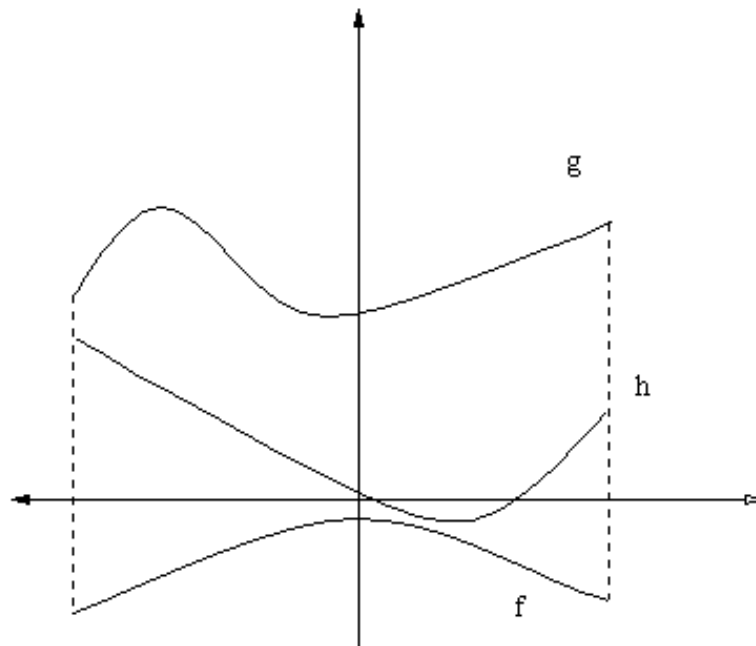


Figura 1.8:

La respuesta del problema que se plantearon fué dada por Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem en el año 1994 [5], quienes dieron una caracterización de las funciones reales que pueden ser separadas por funciones convexas. Para detalles de la demostración se refiere al lector a [5].

1.1.3 Desigualdad de Jensen

A continuación se presenta la desigualdad de Jensen, la cual es una generalización de (1.1).

Teorema 6 (Desigualdad de Jensen, ver [31] y [32]). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f es convexa si y sólo si*

$$f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^n t_i f(x_i) \quad (1.14)$$

para todo $x_i \in I, t_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ tales que $t_i + \dots + t_n = 1$.

Demostración:

Para $n = 2$ la relación (1.14) es la desigualdad que define la convexidad clásica de f en (1.2).

Supongamos que la desigualdad (1.14) para $i = n - 1$ por hipótesis inductiva.

Demostraremos que se cumple para $i = n$, por lo que sin pérdida de generalidad supondremos que $t_n < 1$, luego $1 - t_n > 0$ y entonces

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f(t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n) \\
 &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1}}{1 - t_n}\right) + (t_n x_n)\right) \\
 &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n x_n\right) \\
 &\leq (1 - t_n) f\left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n f(x_n) \\
 &= (1 - t_n) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1 - t_n}\right).
 \end{aligned}$$

Por convexidad

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n x_n\right) \\
 &\leq (1 - t_n) f\left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n f(x_n) \\
 &= (1 - t_n) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1 - t_n}\right)
 \end{aligned}$$

por hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i\right) &= (1 - t_n) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1 - t_n}\right) \\
 &\leq (1 - t_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1 - t_n} f(x_i) + t_n f(x_n) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + t_n f(x_n) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

llegando a lo que se quería demostrar. \square

A continuación se enuncia y demuestra un teorema análogo al teorema de Jensen relativo a la forma integral.

Teorema 7 (Ver [39]). *Sean $(\mathbb{X}, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad, I un intervalo abierto y $\varphi : \mathbb{X} \rightarrow I$ una función integrable Lebesgue. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces*

$$f\left(\int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_{\mathbb{X}} f(\varphi(x)) d\mu.$$

Demostración: Sea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de la forma $g(x) = a(x - m) + f(m)$ que soporta a f en m e integrando sobre \mathbb{X} en ambos lados de la desigualdad $f(\varphi(x)) \geq g(\varphi(x))$ para todo $x \in \mathbb{X}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{X}} f(\varphi(x)) d\mu &\geq \int_{\mathbb{X}} g(\varphi(x)) d\mu \\
 &= \int_{\mathbb{X}} a(\varphi(x) - m) d\mu + \int_{\mathbb{X}} f(m) d\mu \\
 &= a \int_{\mathbb{X}} (\varphi(x) - m) d\mu + f(m) \int_{\mathbb{X}} d\mu
 \end{aligned}$$

usando el hecho de que \mathbb{X} es un espacio de probabilidad, entonces $\int_{\mathbb{X}} d\mu = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} f(\varphi(x))d\mu &\geq a \left(\int_{\mathbb{X}} \varphi(x)d\mu \int_{\mathbb{X}} d\mu \right) + f(m) \\ &= a(m - m) + f(m) \\ &= f(m) \end{aligned}$$

reescribiendo la última desigualdad y sustituyendo $m = \int_{\mathbb{X}} \varphi(x)d\mu$

$$f \left(\int_{\mathbb{X}} \varphi(x)d\mu \right) \leq \int_{\mathbb{X}} f(\varphi(x))d\mu.$$

1.1.4 Desigualdad de Tipo Hermite-Hadamard

En esta sección se definirá uno de los resultados fundamentales que se deducen de la noción de funciones convexas, la desigualdad de Hermite-Hadamard.

Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces la función f satisface la siguiente desigualdad

$$f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (1.15)$$

para todo $x, y \in I, x < y$.

El lado izquierdo de (1.15) fué demostrado por Jacques Hadamard en 1983 antes de que las funciones convexas fuesen formalmente introducidas. Para funciones con derivadas crecientes en un intervalo cerrado, es algunas veces llamado Desigualdad de Hadamard y el lado derecho, la desigualdad de Jensen. En 1985, D. S. Mitrinovic y I. B. Lackovic en [40] señalan que la desigualdad (1.15) es debido a Charles Hermite quien la obtiene en los años 1883, diez años antes que Hadamard. Esta desigualdad clásica de Hermite-Hadamard juega un rol importante en el análisis de la convexidad y tienen una amplia literatura que trata sus aplicaciones, generalizaciones y refinamientos ver [7][15][41]; También se conoce que si f es continua, entonces la desigualdad de Hermite-Hadamard caracterizan la convexidad de f .

Teorema 8. (Ver [27]) Si una función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (1.16)$$

para todo $x, y \in I, x < y$. Inversamente, si f es continua y satisface el lado derecho o izquierdo de (1.16) para todo $x, y \in I, x < y$, entonces es convexa.

Demostración: El lado derecho de la desigualdad (1.16) se obtiene de integrar la desigualdad (1.2) en el intervalo $[0, 1]$ con respecto a t , tal como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt &\leq \int_0^1 tf(x)dt + \int_0^1 (1-t)f(y)dt \\ &\leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable $s = tx + (1-t)y$ en la integral

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt = \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds$$

se obtiene el lado derecho de la desigualdad (1.16)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds &= \frac{1}{x-y} \left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s)ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s)ds \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s_1)ds_1 + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s_2)ds_2 \right) \end{aligned}$$

haciendo los siguientes cambios de variables $s_1 = \frac{x+y-t(x-y)}{2}$ y

$s_2 = \frac{x+y+t(x-y)}{2}$ en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right) + f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right) \right] dt,$$

ahora usando la convexidad de la función se llega a la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right) + f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right) \right] dt &\geq \int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right) dt \\ &= f\left(\frac{x+y}{2}\right), \end{aligned}$$

se obtiene el lado izquierdo de la desigualdad (1.16)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y} \int_x^y f(s)ds$$

llegando a lo que se quería demostrar. □

A continuación se darán varios ejemplos sobre la desigualdad de Hermite-Hadamard.

Ejemplo 4. Sea $f(x) = e^x$, con $x \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $f(x)$ en la desigualdad (1.16) se obtiene

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^b + e^a}{2} \quad \text{para } a \neq b \in \mathbb{R}$$

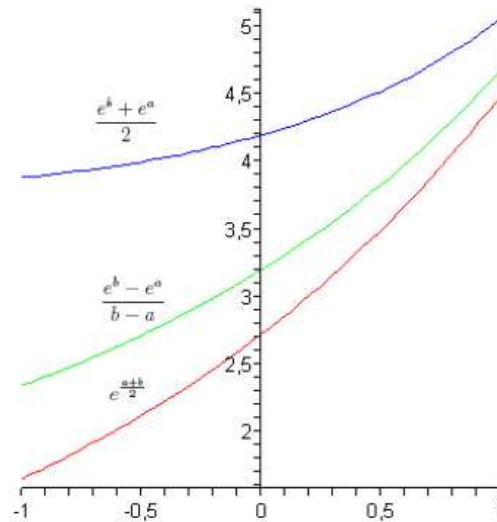


Figura 1.9: $f(x) = \frac{e^b - e^a}{b - a}$

y si se hace un cambio de variable $a = \ln(y)$ y $b = \ln(x)$ queda de la siguiente manera,

$$\sqrt{xy} < \frac{x - y}{\ln(x) - \ln(y)} < \frac{x + y}{2} \quad \text{para } x \neq y \in (0, \infty).$$

1.2 Funciones Cuasi-Convexas

Esta sección la dedicamos al estudio de las funciones cuasi-convexas, mediante definiciones y algunos ejemplos.

Muchos teoremas que involucran funciones convexas han aparecido desde el trabajo pionero de J. Jensen [31], recientemente se han obtenido algunos resultados para una clase más amplia de funciones, y estas son las cuasi convexas. Las funciones cuasiconvexas aparecen en la literatura en 1949, por B. D. Finetti (ver [22]). Para sentar una formulación más precisa del estudio de B. D. Finetti, seguimos los estudios de W. Fenchel [20] y algunas de sus observaciones, acerca de los conjuntos de nivel, para una función (no necesariamente convexa), estas funciones no toman su nombre actual sino hasta 1953. La cuasiconvexidad es una propiedad más débil que la convexidad, de ahí que algunas propiedades de estas últimas no se cumplen para las primeras.

Otros conceptos como el de función cuasi-convexa introducido en 1928 en un trabajo sobre teoría de juegos, por el matemático Jhon Von Neumann, es de mucha utilidad en los problemas de economía y optimización.

Definición 7. Sean D y \mathbb{X} conjuntos contenidos en los reales, una función $f : D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ en un subconjunto convexo \mathbb{X} es cuasi-convexa si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (1.17)$$

y f es cuasi-cóncava si $f(tx + (1 - t)y) \geq \max\{f(x), f(y)\} \quad t \in (0, 1)$.

De la Definición 7, se desprende la siguiente proposición.

Proposición 2. Una función f es cuasi-convexa si y sólo si $-f$ es cuasi-cóncava.

Demostración: Sea f una función convexa, si la multiplicamos por -1 ambos lados se obtiene

$$-f(tx + (1 - t)y) \geq -tf(x) - (1 - t)f(y)$$

es decir

$$(-f)(tx + (1-t)y) \geq t(-f)(x) + (-f)(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$ esto permite deducir que f es convexa si y sólo si $-f$ es cóncava. \square

Ejemplo 5. *La siguiente gráfica es una función cuasi-convexa*

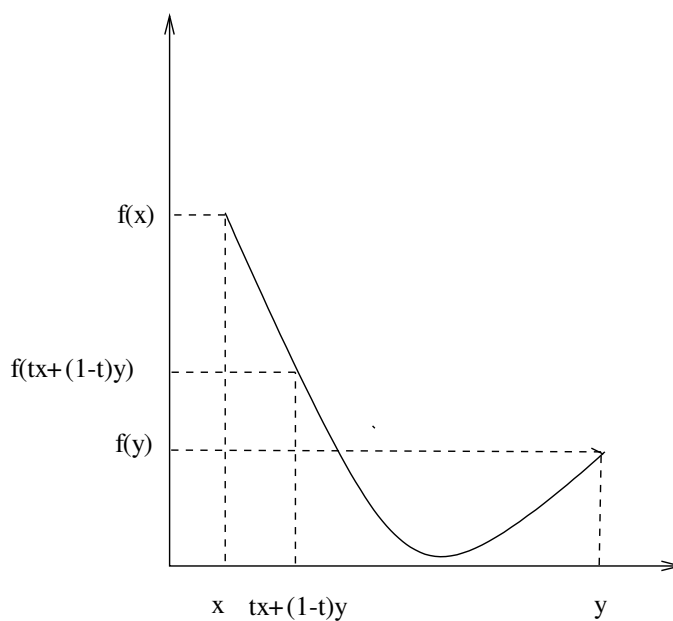
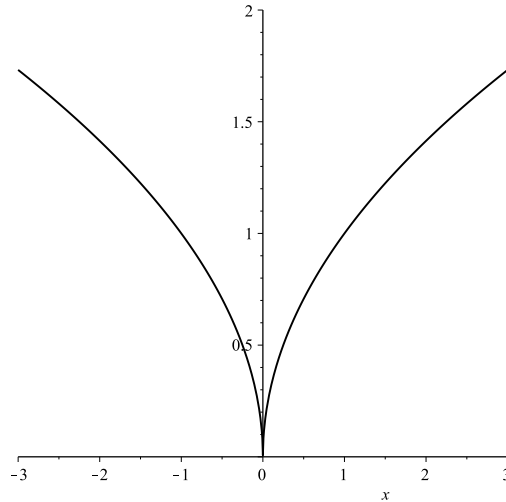


Figura 1.10: Función cuasi-convexa

Ejemplo 6. *La siguiente gráfica es igualmente una función cuasi-convexa*

Figura 1.11: $f(x) = \sqrt{|x|}$

A continuación se presenta una proposición que se deriva de la definición de cuasi-convexidad.

Proposición 3. *Toda función f convexa o monótona es cuasiconvexa.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, consideremos $x, y \in I$ tal que $x \leq y$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, supongamos que f es monótona creciente para $t \in [0, 1]$ entonces

$$x \leq tx + (1 - t)y \leq y$$

así mismo

$$\min\{f(x), f(y)\} = f(x) \leq f(tx + (1 - t)y) \leq f(y) = \max\{f(x), f(y)\} \quad (1.18)$$

luego por (1.18) se cumple que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

por lo que en consecuencia f es cuasiconvexa.

Para el caso en que f es cóncava, la demostración es análoga. \square

1.2.1 Teorema de Separación para Funciones Cuasi-Convexas (Teorema del Sandwich).

En el año 1996, Wolfgang Förg Rob, Kazimierz Nikodem y Zsolt Páles en [50] generalizan el Teorema del Sandwich para funciones cuasi-convexas, caracterizando las funciones reales definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A continuación demostraremos un teorema de separación para funciones cuasi convexas.

Teorema 9. (Ver [50]) Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario y $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dadas. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) Existe una función monótona $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.

(b) Existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi cóncava, h_2 -cuasi convexa, tal que $f \leq h_1 \leq g$ y $f \leq h_2 \leq g$.

(c) Existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi cóncava, h_2 -cuasi convexa, tal que $f \leq h_1 \leq h_2 \leq g$.

(d) Para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$, las siguientes desigualdades se cumple

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq \max\{g(x), g(y)\} \\ g(tx + (1-t)y) &\geq \min\{f(x), f(y)\} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Demostración:

(a) \Rightarrow (d)

Resulta del hecho de que toda función monótona es cuasi-cóncava y cuasi-convexa como se demostró en proposición(3).

(d) \Rightarrow (c)

Consideremos las funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(u) := \sup\{\mbox{mín}\{f(x), f(y)\} : x \leq u \leq y, \quad x, y \in I\} \quad (1.20)$$

$$h_2(u) := \mbox{ínf}\{\mbox{máx}\{g(x), g(y)\} : x \leq u \leq y, \quad x, y \in I\}. \quad (1.21)$$

Por la desigualdad (1.19) $h_1(u), h_2(u)$ están bien definidas y

$$\begin{aligned} f(u) &\leq h_2(u) \\ h_1(u) &\leq g(u) \end{aligned} \quad (1.22)$$

para todo $u \in I$.

Por otra parte, $f \leq h_1$ y $h_2 \leq g$. Demostraremos que $h_1 \leq h_2$, h_1 es cuasi-cóncava y h_2 es cuasi-convexa. Supongamos lo contrario, que existe $w \in I$ tal que $h_1(w) > h_2(w)$. Entonces existirá $x \leq w \leq y$ y $u \leq w \leq v$ tal que

$$\mbox{mín}\{f(x), f(y)\} > \mbox{máx}\{g(u), g(v)\} \quad (1.23)$$

Si $x \leq u$, entonces de (1.20) y (1.23) se deduce que

$$h_1(u) \geq \mbox{mín}\{f(x), f(y)\} > g(u)$$

lo que contradice a (1.22). Esas contradicciones muestran que $h_1 \leq h_2$. Ahora demostraremos que h_2 es cuasi-convexa (la demostración de cuasi-concavidad de h_1 es análoga) supongamos que es falso.

Entonces existe $x \leq u \leq y$ tal que $h_2(u) > \max\{h_2(x), h_2(y)\}$. Por las definiciones de h_2 conseguiremos $\alpha \leq x \leq \beta$ y $\gamma \leq y \leq \delta$ tal que

$$h_2(u) > \max\{g(\alpha), g(\beta), g(\gamma), g(\delta)\} \quad (1.24)$$

sin embargo $\alpha \leq u \leq \delta$, lo que implica que

$$h_2(u) \leq \max\{g(\alpha), g(\delta)\}$$

esto contradice (1.24) y demuestra que h_2 es cuasi-convexa.

(c) \Rightarrow (b)

Por hipótesis se tiene que $f \leq h_1 \leq h_2 \leq g$ entonces $f \leq h_1 \leq g$ y también satisface para $f \leq h_2 \leq g$, es decir, que existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi-cóncava y h_2 -cuasi-convexa, tal que $f \leq h_1 \leq g$ y $f \leq h_2 \leq g$.

(b) \Rightarrow (a)

Asumamos primero que $\sup\{f(z) : z \leq x\} < \infty$ y $\inf\{g(z) : z \leq x\} > -\infty$ para cada $x \in I$. Definamos $m_1, m_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$m_1 := \sup\{f(z) : z \leq x\}$$

$$m_2 := \inf\{g(z) : z \leq x\}.$$

Es evidente que $f \leq m_1$, $m_2 \leq g$, m_1 es no decreciente y m_2 es no creciente. Vamos a demostrar que al menos una de estas funciones separa a las funciones f y g .

Asumamos lo contrario, entonces existen $a, b \in I$ tal que $m_1(a) > g(a)$ y $m_2(b) < f(b)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \leq b$. Sea

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{m_1(a) - g(a), f(b) - m_2(b)\}. \quad (1.25)$$

Por la definición de m_1, m_2 , existen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq a$, $x_2 \leq b$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_1) &> m_1(a) - \epsilon \\ g(x_2) &< m_2(b) + \epsilon. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Si $x_1 \leq x_2$, entonces $x_2 \in [x_1, b]$ por hipótesis (1.25) y (1.26) se tiene

$$h_1(x_2) \leq g(x_2) < m_2(b) + \epsilon$$

$$h_2(a) \leq g(a) < g(a) + \epsilon$$

y

$$h_2(x_1) \geq f(x_1) > m_1(a) - \epsilon > g(a) + \epsilon,$$

lo que contradice la cuasi-convexidad de h_2 sobre $[x_2, a]$.

Así en cualquier caso se llega a la contradicción que demuestra que al menos una de las funciones m_1, m_2 separa a las funciones f y g .

Ahora vamos a tratar con la existencia de las funciones m_1, m_2 . Como f está acotada superiormente por h_2 y por lo tanto también está acotado superiormente por el $\text{máx}\{h_2(\alpha), h_2(\beta)\}$ en cada intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subset I$ (y de manera similar g por h_1 inferiormente), la única posibilidad para la inexistencia de m_1 (o m_2) se da si f (respectivamente g) es no acotado por el lado izquierdo de I . Debemos considerar los siguientes tres casos

(i) Supongamos que

$$\sup\{f(z) : z \leq x\} = \infty$$

y

$$\inf\{g(z) : z \leq x\} = -\infty$$

para algún $x \in I$. Entonces, por los argumentos antes mencionados, para cualquier $y \leq x$ se tiene que

$$\sup\{f(z) : z \leq y\} = \infty$$

y

$$\inf\{g(z) : z \leq y\} = -\infty.$$

Por lo tanto hay un punto $z_1 \leq x$ tal que $f(z_1) > 0$. Además podemos conseguir un punto $z_2 < z_1$ tal que $g(z_2) < 0$ y un punto $z_3 < z_2$ tal que $f(z_3) > 0$. Como $f < h_1 < g$, esto es una contradicción para la cuasi convexidad de h_1 .

(ii) Supongamos que el $\sup\{f(z) : z \leq x\} = \infty$ para algún $x \in I$ y m_2 existe. Fijamos $x_0 \in I$ y elegimos $y_0 < x_0$ tal que $f(y_0) > g(x_0)$. Para cualquier $y \in I$, $y \leq y_0$ es posible restringir m_2 al intervalo $[y, \infty] \cap I$ y definir m_1 como lo hicimos anteriormente en este intervalo, ya que $y_0 < x_0$ y $f(y_0) > g(x_0)$, la función m_1 no puede separar a las funciones f y g , así solamente la restricción de m_2 funciona como una separación sobre $[y, \infty] \cap I$. Luego esto es válido para cualquier $y \in I$, $y \leq y_0$, concluyendo que m_2 separa a las funciones f y g sobre I .

(iii) El caso donde m_1 existe pero el $\inf\{g(z) : z \leq x\} = -\infty$ para algún $x \in I$ puede ser tratado como en (ii).

A continuación mostraremos algunos contraejemplos de que una función cuasi-convexa no necesariamente será convexa.

Ejemplo 7. La función f definida de la siguiente manera

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

es cuasi-convexa y no es convexa ni monótona.

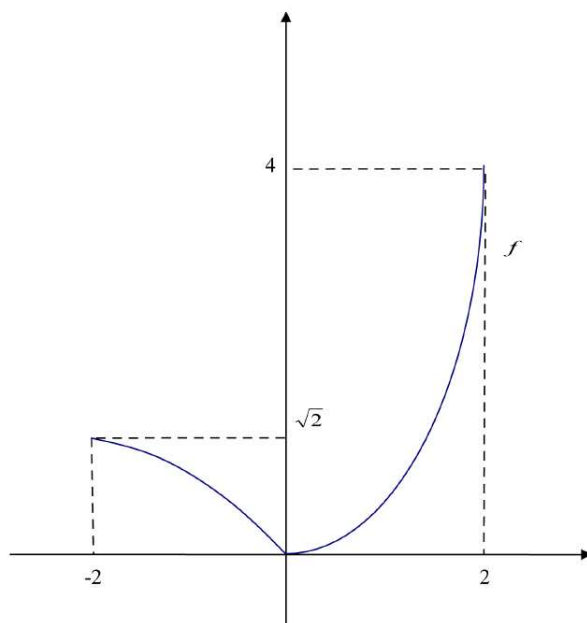


Figura 1.12: f es cuasi-convexa y no es convexa ni monótona

Ejemplo 8. La función $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

es monótona, cuasi-convexa y no es convexa porque tiene una discontinuidad en el interior de su dominio.

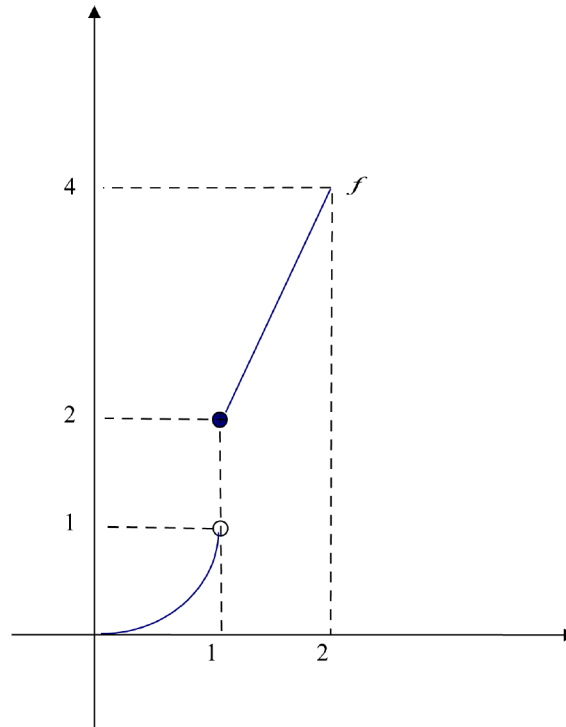


Figura 1.13: f es cuasi-convexa, monótona y no es convexa.

En la siguiente proposición se expone una caracterización de las funciones cuasi-convexas en términos de los conjuntos de nivel.

Proposición 4. *Una función $f : D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasi-convexa, si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{x : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

es un conjunto convexo.

Demostración: Supongamos que f es cuasi-convexa, y sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x, y \in L_{\alpha}(f) = \{x : f(x) \leq \alpha\}$, entonces

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha, \quad t \in (0, 1),$$

así resulta que $L_{\alpha}(f)$ es convexo.

Recíprocamente, asumamos que $L_{\alpha}(f)$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos $x, y \in \mathbb{X}$ entonces $x, y \in L = L_{\max\{f(x), f(y)\}}(f)$, luego $tx + (1 - t)y \in L$, con $t \in (0, 1)$. De donde resulta que f es cuasi-convexa. \square

Para una función $f : D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, los conjuntos $L_{\alpha}(f), \alpha \in \mathbb{R}$ se denominan conjuntos de nivel.

Ejemplo 9. Conjunto de nivel de la función $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

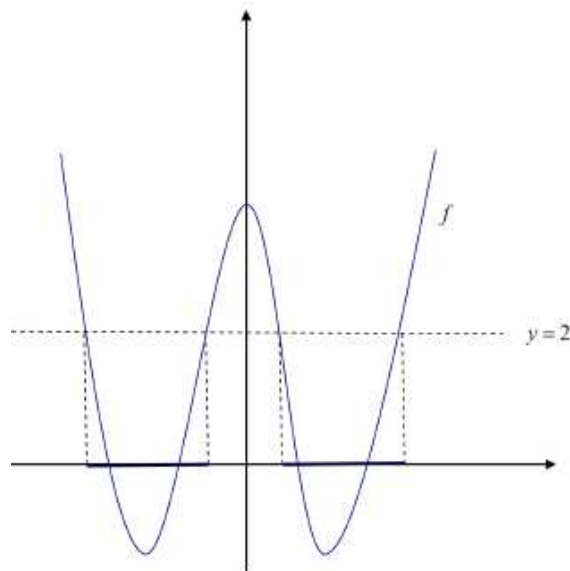


Figura 1.14: La función $L_2(f)$ no es convexa

1.3 Operaciones con Funciones Convexas

En esta sección se verán las formas de reconocer estas funciones convexas a partir de operaciones que preservan la convexidad. Por ejemplo, será posible reconocer que la función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^{-1} + t^3$ es convexa, porque es una suma de funciones convexas y como se verificará la suma de funciones es una operación que preserva convexidad.

El siguiente teorema establece que la suma de funciones convexas, y el producto de una constante no negativa por una función convexa son funciones convexas.

Teorema 10. (Ver[26]) *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas y $\alpha \geq 0$, entonces $f + g$ y αf son funciones convexas sobre I .*

Demostración: Sean $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} (f + g)(tx + (1 - t)y) &= f(tx + (1 - t)y) + g(tx + (1 - t)y) \\ &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) + tg(x) + (1 - t)g(y) \\ &= t(f(x) + g(x)) + (1 - t)(f(y) + g(y)) \\ &= t(f + g)(x) + (1 - t)(f + g)(y) \end{aligned}$$

es decir

$$(f + g)(tx + (1 - t)y) \leq (f + g)(x) + (1 - t)(f + g)(y)$$

y por lo tanto $f + g$ es convexa.

También se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha f)(tx + (1 - t)y) &= \alpha f(tx + (1 - t)y) \\ &\leq \alpha(tf(x) + (1 - t)f(y)) \\ &= t\alpha f(x) + (1 - t)\alpha f(y) \\ &= t(\alpha f)(x) + (1 - t)(\alpha f)(y) \end{aligned}$$

y por consiguiente αf es convexa.

Ejemplo 10. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2$ entonces $(f + g)(x) = |x| + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es convexa, porque f y g son convexas.

Ejemplo 11. Como la función $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^{-1}$ es convexa tenemos que la función $(3h)(x) = 3x^{-1}$ definida sobre $(0, \infty)$ también es convexa.

Corolario 1. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexas. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a $f(x)$ para cada $x \in I$, entonces f es una función convexa sobre I .

Demostración: Sea $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como sigue:

$$g_n(x) = \begin{cases} f_1(x) & n=1, \text{ para todo } x \in I \\ f_1(x) + f_2(x) & n=2, \text{ para todo } x \in I \\ f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x) & n=m \end{cases}$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \quad \text{para todo } x \in I.$$

Luego, para todo $t \in [0, 1]$ y $x, y \in I$ se verifica

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(tx + (1-t)y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (tg_n(x) + (1-t)g_n(y)) \\ &= t \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) + (1-t) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

lo cual implica que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es convexa. □

En el siguiente teorema se presentan las condiciones para que su composición sea una función convexa o cóncava.

Teorema 11. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Entonces:

- 1) Si f es convexa y g es convexa y creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.
- 2) Si f es cóncava y g es convexa y decreciente, entonces $g \circ f$ es convexa.
- 3) Si f es cóncava y g es cóncava y creciente, entonces $g \circ f$ es cóncava.
- 4) Si f es convexa y g es cóncava y decreciente, entonces $g \circ f$ es cóncava.

Demostración: Sean $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned}
 1)(g \circ f)(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) \\
 &\leq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \quad f \text{ es convexa y } g \text{ creciente} \\
 &\leq tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \quad \text{ya que } g \text{ es convexa} \\
 &= t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2)(g \circ f)(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) \\
 &\leq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \quad f \text{ es cóncava y } g \text{ decreciente} \\
 &\leq tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \quad \text{ya que } g \text{ es convexa} \\
 &= t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3)(g \circ f)(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) \\
 &\geq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \quad f \text{ es cóncava y } g \text{ es creciente} \\
 &\geq tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \quad \text{ya que } g \text{ es cóncava} \\
 &= t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4)(g \circ f)(tx + (1-t)y) &= g(f(tx + (1-t)y)) \\
 &\geq g(tf(x) + (1-t)f(y)) \quad f \text{ convexa y } g \text{ decreciente} \\
 &\geq tg(f(x)) + (1-t)g(f(y)) \quad \text{porque } g \text{ es cóncava} \\
 &= t(g \circ f)(x) + (1-t)(g \circ f)(y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones definidas por $f(x) = x^{-1}$ y $g(x) = x^3$ entonces $(g \circ f)(x) = x^{-3}$ es convexa sobre $(0, \infty)$ porque f es convexa y g es convexa y creciente.

Ejemplo 13. Como las funciones $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^{-1}$ son tales que f es cóncava y g es convexa y decreciente se concluye que la función $(g \circ f)(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ es convexa sobre $(0, \infty)$.

Ejemplo 14. Si $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \ln(x)$ entonces $(g \circ f)(x) = \ln(\sqrt{x})$ es cóncava sobre $(0, \infty)$ pues f es cóncava y g es cóncava y creciente.

En el próximo teorema se exhiben las condiciones bajo las cuales el producto de funciones convexas, es una función convexa.

Teorema 12. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no negativas, crecientes y convexas, entonces la función $h = f \cdot g$ es no negativa, creciente y convexa.

Demostración Si f y g son crecientes y no negativas, se tiene que para cualesquiera $x, y \in I$ tales que $x < y$ se verifica

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

y

$$0 \leq g(x) \leq g(y)$$

entonces

$$0 \leq h(x) = f(x)g(x) \leq f(y)g(y) = h(y)$$

y por lo tanto h es creciente y no negativa.

Para demostrar la convexidad se usa el hecho de que si $x < y$ se verifica

$$(f(x) - f(y))(g(y) - g(x)) \leq 0$$

es decir

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y).$$

Usando esta desigualdad se tiene que para todo $t \in [0, 1]$ y $x, y \in I$ se cumple

$$\begin{aligned} h(tx + (1-t)y) &= f(tx + (1-t)y)g(tx + (1-t)y) \\ &\leq (tf(x) + (1-t)f(y))(tg(x) + (1-t)g(y)) \\ &= t^2f(x)g(x) + t(1-t)(f(x)g(y) + f(y)g(x)) + (1-t)^2f(y)g(y) \\ &\leq t^2f(x)g(x) + t(1-t)(f(x)g(x) + f(y)g(y)) + f(y)g(y) \\ &\quad - 2tf(y)g(y) + t^2f(y)g(y) \\ &= t^2f(x)g(x)tf(x)g(x) + tf(y)g(y) - t^2f(x)g(x) - t^2f(y)g(y) \\ &\quad + f(y)g(y) - 2f(y)g(y) + t^2f(y)g(y) \\ &= tf(x)g(x) + f(y)g(y) - tf(y)g(y) \\ &= tf(x)g(x) + (1-t)f(y)g(y) \\ &= th(x) + (1-t)h(y) \end{aligned}$$

Esto implica que

$$h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

por lo que $h = f \circ g$ es convexa. □

El teorema que anunciaremos a continuación establece bajo que condiciones el supremo de una familia arbitraria de funciones convexas, es una función convexa.

Teorema 13. *Sea $\{f_\alpha\}$ una familia arbitraria de funciones convexas definidas sobre el intervalo I , y sea $f(x) = \sup f_\alpha(x)$. Si $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ es un conjunto no vacío, entonces J es un intervalo y f es una función convexa sobre J .*

Demostración: Si $t \in [0, 1]$ y $x, y \in J$ es decir $f(x) < \infty$ y $f(y) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &= \sup f_\alpha(tx + (1 - t)y) \\ &\leq \sup(tf_\alpha(x) + (1 - t)f_\alpha(y)) \\ &\leq t \sup f_\alpha(x) + (1 - t) \sup f_\alpha(y) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(y) < \infty. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es convexa sobre J y además que si $x, y \in J$, entonces $f(tx + (1 - t)y) < \infty$, lo cual significa que $tx + (1 - t)y \in J$ y por lo tanto J es un intervalo. \square

En el teorema que sigue, se dan condiciones para que la inversa de una función sea cóncava o convexa.

Teorema 14. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona. Sea $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ la función inversa de f . Entonces

- 1) Si f es convexa y creciente, entonces f^{-1} es cóncava.
- 2) Si f es convexa y decreciente, entonces f^{-1} es convexa.
- 3) Si f es cóncava y creciente, entonces f^{-1} es convexa.
- 4) Si f es cóncava y decreciente, entonces f^{-1} es cóncava.

Demostración: Sean $x, y \in f(I)$ y $t \in [0, 1]$. Si $u = f^{-1}(x)$ y $v = f^{-1}(y)$, entonces:

- 1) Como f es convexa se verifica

$$\begin{aligned} f(tu + (1 - t)v) &\leq tf(u) + (1 - t)f(v) \\ &= tx + (1 - t)y, \end{aligned}$$

y por ser f^{-1} creciente, así se tiene que

$$f^{-1}(f(tu + (1 - t)v)) \leq f^{-1}(tx + (1 - t)y)$$

luego

$$tu + (1 - t)v \leq f^{-1}(tx + (1 - t)y)$$

es decir

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \leq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

y en consecuencia f^{-1} es cóncava.

2) De la convexidad de f

$$f(tu + (1-t)v) \leq tx + (1-t)y,$$

y como f^{-1} es decreciente, se verifica

$$f^{-1}(f(tu + (1-t)v)) \geq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

luego

$$tu + (1-t)v \geq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

es decir

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \geq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

por lo tanto f^{-1} es convexa.

3) De la concavidad de f

$$tf(u) + (1-t)f(v) \leq f(tu + (1-t)v)$$

y por ser f^{-1} creciente, se tiene que

$$f^{-1}(tf(u) + (1-t)f(v)) \leq f^{-1}(f(tu + (1-t)v))$$

luego

$$f^{-1}(tf(u) + (1-t)f(v)) \leq tu + (1-t)v$$

es decir

$$f^{-1}(tx + (1-t)y) \leq tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)$$

por lo tanto f^{-1} es convexa.

4) Como f es cóncava se cumple lo siguiente

$$tf(u) + (1-t)f(v) \leq f(tu + (1-t)v)$$

y como f^{-1} es decreciente

$$f^{-1}(tf(u) + (1-t)f(v)) \geq f^{-1}(f(tu + (1-t)v))$$

así

$$f^{-1}(tx + (1-t)y) \geq tu + (1-t)v$$

es decir

$$f^{-1}(tx + (1-t)y) \geq tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)$$

por lo tanto f^{-1} es cóncava. □

Ejemplo 15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x$ es convexa y creciente, su inversa $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \ln(x)$ es cóncava.

Además, por ser la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{-x}$ convexa y decreciente, su inversa $g^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g^{-1}(x) = -\ln(x)$ es convexa

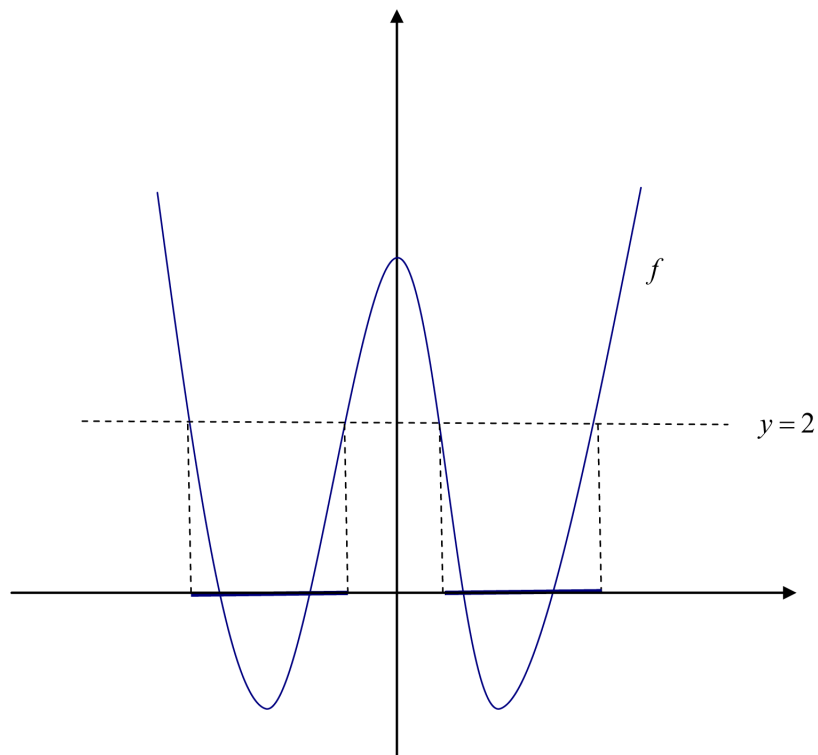


Figura 1.15: La función $L_2(f)$ no es convexa

Otros resultados de interés de caracterizaciones de funciones cuasi-convexas diferenciables, demostrado por el premio Nobel de economía del año 1972, K. J. Arrow y A. C. Enthoven se pueden verificar en [4].

Un problema que se presenta con frecuencia en las ciencias experimentales y de ingeniería es tratar de construir una función (denominada “función interpolante”) de la que se conoce una serie de datos (denominados “datos de interpolación”). Estos datos pueden ser fruto de las observaciones realizadas en un determinado experimento en el que se relacionan dos o más variables e involucran valores de una función o de sus derivadas. Por su sencillez y operatividad los polinomios se usan frecuentemente como funciones interpolantes.

2.1 Interpolación

Supongamos que hay dos magnitudes x, y de los que se conocen $n + 1$ valores relacionados $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, por ejemplo, datos obtenidos en una experimentación. Con la condición $x_i \neq x_j$, si $i \neq j$.

Nos planteamos si existe una función p tal que

$$p(x_k) = y_k \quad k = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

es decir, queremos una función cuya gráfica “pase” por los puntos del plano dados. Si p

verifica (2.1) diremos que p interpola los datos dados, p es una función de interpolación para los datos $(x_k, y_k), k = 0, \dots, n$.

Este tipo de problemas suele darse cuando tenemos datos obtenidos por experimentación y sabemos que hay una función f que rige el proceso pero que desconocemos y queremos trabajar con una función alternativa p que represente bien a esos datos de la muestra. Si f rige el proceso entonces $f(x_k) = y_k$ luego exigiremos a la función p ese mismo requisito, esto nos proporciona condiciones que imponer a p con las que trataremos de obtenerla y una vez conseguido nos permitiría conocer o predecir que habrá pasado en otros x en los que no se ha experimentado.

Supongamos que existe la función f tal que $f(x_k) = y_k, k = 0, \dots, m$. Caben varias preguntas:

- 1 La función p que interpola los datos dados ¿de qué tipo ha de ser? ¿polinómica, trigonométrica, racional? La respuesta vendrá dada por los datos y_k .
 - 1.1 Si se observa que los datos presentan periodicidad entonces buscaremos a p dentro de las funciones trigonométricas.
 - 1.2 Si los datos presentan asíntotas entonces p debería ser una función racional.
 - 1.3 Si los y_k presentan un comportamiento polinomial, entonces p se escogería de tipo polinómico.
- 2 Una vez escogido el tipo de función habrá que responder dos cuestiones, ¿Existe p del tipo escogido que interpole los datos dados? Y si existe, ¿es única?
- 3 ¿Es la función polinómica escogida una buena aproximación de la función original f en los puntos x que no son de la muestra?

2.2 Integración numérica y cuadratura

Uno de los problemas más antiguos es el del cálculo del área que encierra una curva.

La integral resuelve el problema de calcular el área bajo la gráfica de una función positiva definida sobre un intervalo cerrado. Como sabemos, la regla de Barrow resuelve el problema de calcular la integral de una función en un intervalo $[a, b]$, mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

siendo F una primitiva de la función f en el intervalo $[a, b]$, es decir, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Sin embargo, en muchos casos, esto no es posible, dado que

- Para ciertas funciones no es posible calcular dichas primitiva, a pesar de saber que existe. Por ejemplo, para las funciones

$$f(x) = e^{x^2}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(x) = \sqrt{x^5 + 1}$$

no es posible encontrar una primitiva expresable en término de funciones elementales.

- En muchos problemas que se plantean, a la hora de integrar funciones, están relacionados con funciones definidas en forma de tabla de valores o gráficas y no se conoce una expresión analítica de $f(x)$.

En ambos casos se precisa de fórmulas de integración numérica (también llamadas fórmulas de cuadratura), que nos van a permitir calcular un valor aproximado de la integral de la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

donde los x_i , con $i = 0, 1, \dots, n$ son puntos del intervalo $[a, b]$ y los coeficientes a_i , con $i = 0, \dots, n$, son números reales elegidos convenientemente.

2.3 Fórmulas de integración de tipo interpolatorio

Para obtener fórmulas de integración numérica seguiremos, básicamente, el procedimiento basado en calcular el polinomio de interpolación de la función f en algunos puntos del intervalo $[a, b]$ y aproximar el valor de la integral de la función por el valor de la integral del polinomio de interpolación. En concreto,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx,$$

donde

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \quad x \in [a, b]$$

es el polinomio de interpolación de f en los $n+1$ puntos distintos, x_i con $i = 0, \dots, n$, del intervalo $[a, b]$. Integrando esta expresión en $[a, b]$ obtenemos

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i),$$

siendo

$$c_i = \int_a^b L_i(x)dx,$$

para $i = 0, 1, \dots, n$. Nótese que los coeficientes c_i , con $i = 0, 1, \dots, n$, son independientes de f y, por tanto, una vez calculados, proporcionan una fórmula que se puede que se puede aplicar a cualquier función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Además será necesario estudiar el **error** que se comete en este tipo de fórmulas, es decir, el valor de

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b E_n(x)dx,$$

con $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, en [10], el estudio del error de interpolación se prueba que si $f \in \mathbf{C}^{n+1}([a, b])$, se tiene que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} P_i(x),$$

con $\Pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ y donde ξ_x es un punto intermedio entre x_0, x_1, \dots, x_n, x . Entonces, en este caso el error de integración que se comete es

$$R_n(f) = \int_a^b E_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \Pi_n(x) dx.$$

Para determinar una expresión explícita del error de integración $R_n(f)$, resulta de utilidad el siguiente resultado conocido como teorema del valor medio generalizado:

Teorema 15. (Ver[10]) Sean $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y supongamos que g no cambia de signo en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b h(x)g(x)dx = h(\xi) \int_a^b g(x)dx,$$

donde ξ es un punto del intervalo (a, b) .

Por otro lado, es obvio que si f es un polinomio de grado menor o igual que n , entonces f coincidirá con su polinomio de interpolación. En consecuencia, las fórmulas de tipo interpolatorio sobre $n + 1$ puntos distintos son exactas para todos los polinomios de grado menor o igual que n , en el sentido de que

$$R_n(f) = 0.$$

La próxima sección (2.4) está basada básicamente en las siguientes referencias [23], [34], [52].

2.4 Fórmulas básicas de integración numérica

Fórmula del rectángulo

La fórmula de integración más sencilla es aquella que utiliza el valor de la función f en

un solo punto $x_0 \in [a, b]$. En este caso el polinomio de interpolación de la función f es de grado, es decir, $P_0(x) = f(x_0)$, por lo que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = f(x_0)(b-a).$$

Si $x_0 = a$ se obtiene la fórmula del rectángulo izquierdo dado por

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a). \quad (2.2)$$

Si la función $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$, el error cometido al usar la fórmula (2.2) es

$$R_0(f) = \int_a^b f'(\xi_x)(x-a)dx = f'(\xi) \int_a^b (x-a)dx = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2,$$

con $\xi \in (a, b)$. Para deducir esta fórmula del error hemos utilizado el **Teorema 15** puesto que la función $\Pi_0(x) = (x-a)$ no cambia de signo en $[a, b]$.

Observación 4. • *Un resultado similar se obtiene si $x_0 = b$, en este caso la fórmula de integración se denomina fórmula del rectángulo derecho,*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f(b)(b-a),$$

$$R_0(f) = -\frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2.$$

- *Geoméricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el valor de $\int_a^b f(x)dx$ se aproxima por el área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(a)$ o $f(b)$.*

En el caso de que $x_0 = \frac{a+b}{2}$, se obtiene la fórmula del punto medio dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \quad (2.3)$$

Para obtener una expresión explícita del error de integración que se comete usando esta fórmula, suponemos que la función $f \in \mathbf{C}^2([a, b])$ y hacemos uso del siguiente desarrollo de Taylor de la función f en el punto $\frac{a+b}{2}$,

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Integrando ambos miembros y usando la fórmula (2.3), se obtiene que

$$R_0(f) = \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

con $\xi \in (a, b)$. De nuevo para deducir esta fórmula del error hemos utilizado el **Teorema 15** usando en esta ocasión que la función $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ no cambia de signo en $[a, b]$.

la fórmula (2.3) es especialmente interesante, puesto que si observamos el término que nos da el error, podemos comprobar que se trata de una fórmula de integración de orden uno, debido a que $f''(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, si f es un polinomio de grado menor o igual que uno.

Fórmula del trapecio

Se trata de una fórmula de integración con dos puntos. en este caso el polinomio de interpolación de la función f es de grado uno. En concreto, si consideramos los puntos $x_0, x_1 \in [a, b]$, el polinomio de interpolación de la función f será

$$P_1(x) = f(x_0)f[x_0, x_1](x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Podemos entonces obtener la siguiente fórmula de integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b \left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \right) dx.$$

Para el caso particular $x_0 = a, x_1 = b$ se obtiene la fórmula del trapecio que viene dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \quad (2.4)$$

Además, si suponemos que $f \in \mathbf{C}^2([a, b])$ y dado que la función $\Pi_1(x)(x-a)(x-b)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, entonces la aplicación del Teorema 15 nos proporciona

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3.$$

donde ξ es un punto del intervalo (a, b) .

Observación 5. • *La expresión del error asegura que la fórmula (2.4) es exacta para, polinomios de grado no mayor que uno.*

- *Geoméricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la fórmula del trapecio aproxima el valor de $\int_a^b f(x) dx$ por el área del trapecio resultante de unir los puntos $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$.*

Fórmula de Simpson Se trata de una fórmula para tres puntos, pero consigue exactitud para los polinomios de grado menor o igual que tres, considerando los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. Por integración del polinomio de interpolación, se deduce fácilmente que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (2.5)$$

La deducción del error en la fórmula (2.5) es un poco más laboriosa. Para ello, hay que suponer que $f \in \mathbf{C}^4([a, b])$, integrar el desarrollo de Taylor de orden tres de la función f en el punto x_1 y aplicar el **Teorema 15**, obteniéndose que

$$R_2(f) = -\frac{f^4(\xi)}{2880} (b-a)^5,$$

con $\xi \in (a, b)$.

Observación 6. • *La fórmula de Simpson es una de las fórmulas de integración numérica más usadas en la práctica.*

- *En cuanto a la precisión, la expresión del error $R_2(f)$, en términos de la derivada cuarta de f , confirma que la fórmula es exacta para los polinomios de grado menor o igual que tres. Sin embargo, se obtiene a partir de la integración de un polinomio de grado dos. La fórmula (2.5) tiene pues un grado más de exactitud.*

Definición 8. (Fórmula de cuadratura) Sean $\{x_0 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$, $n + 1$ puntos distintos y $f \in \mathbf{C}^0([a, b])$ una función dada. Una fórmula de cuadratura I_n con $n + 1$ nodos (**puntos de cuadratura**) es de la forma

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k) \quad (2.6)$$

donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$, son los **pesos de cuadratura**, y $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, n$ son los nodos de cuadratura.

Definición 9. (Error) Llamaremos $E(f) = I(f) - I_n(f)$ el error en una fórmula de cuadratura.

Definición 10. (Orden) Diremos que una fórmula de cuadratura es de orden $m \in \mathbb{N}$ si

$$p(t) = \begin{cases} E(p) = 0 & \text{para cada } p \in \mathbb{P}_m[x] \\ E(q) \neq 0 & \text{para algún } q \in \mathbb{P}_{m+1}[x]. \end{cases}$$

.

Observación 7. Debido a la linealidad de la integral (??) y la linealidad de la suma (2.6), se tiene que el error $E[\cdot]$ es un funcional lineal. Luego, podemos definir el orden de una fórmula de cuadratura de forma equivalente como sigue: Una fórmula de cuadratura es de orden $m \in \mathbb{N}$ si

$$\begin{cases} E(x^k) = 0 & \text{para } k = 0, \dots, m \\ E(x^{m+1}) \neq 0. \end{cases}$$

.

Ejemplo 16. Fórmula de cuadratura de punto medio

$$I_0(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

es exactamente de orden 1. En efecto, aplicando la fórmula anterior se tiene

$$E(1) = 0 \Leftrightarrow I(1) - I_0(1) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b dx - (b - a) = 0;$$

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow I(x) - I_0(x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b x dx - (b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right) = 0;$$

$$E(x^2) = 0 \Leftrightarrow I(x^2) - I_0(x^2) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b x^2 dx - (b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \neq 0.$$

Ejemplo 17. *Fórmula de cuadratura de Simpson*

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

es exactamente de orden 3.

Algoritmo de Lagrange Fijados un soporte de $n+1$ puntos distintos $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ y unos valores reales $(y_i)_{i=0}^n$ cualesquiera, el **algoritmo de Lagrange** de construcción del polinomio de interpolación consiste en buscar el polinomio de interpolación $p_n \in \mathbb{P}_n[x]$ de la forma

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x), \quad (2.7)$$

donde $L_i \in \mathbb{P}_n[x]$, $L_i(x_i) = 1$ y $L_i x_j = 0$ para cada $j \neq i$, (es decir, L_i es un polinomio de interpolación asociado a los valores canónicos $\{0, \dots, 1, \dots, 0\}$). Usando la unicidad del polinomio de interpolación, se puede comprobar que L_i es de la forma

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}, \quad (2.8)$$

con $i = 0, \dots, n$ y que (2.7) es el polinomio de interpolación buscado.

El conjunto de polinomios $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ se llama la **base de Lagrange** asociado a los puntos $(x_i)_{i=0}^n$. Se trata de una base del espacio vectorial de polinomios de interpolación asociados a dicho soporte. Identificando el polinomio de interpolación con los valores $(y_i)_{i=0}^n$, la base de Lagrange son los polinomios de interpolación correspondientes a la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} .

Observación 8. *Una ventaja del algoritmo de Lagrange, es que para el mismo soporte $S = (x_i)_{i=0}^n$ y distintos valores $(y_i)_{i=0}^n$, basta calcular la base de Lagrange una sola vez*

(los L_i solo dependen de S). Esto permitiría calcular varios polinomios de interpolación asociados al mismo soporte S y a distintos valores $(y_i)_{i=0}^n$.

Además, si el soporte S es equidistante, haciendo el cambio de variable afín $x \in [a, b] \leftrightarrow t \in [0, n]$, los polinomios L_i de la base de Lagrange se transforman en polinomio l_i que solo dependen del número de puntos de soporte (y no de la posición de los puntos). En efecto,

$$L_i(x) \equiv l_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} = \frac{(-1)^{n-i}}{n!} \binom{n}{i} \prod_{j=0, j \neq i}^n (t-j), i = 0, \dots, n \quad (2.9)$$

En caso de añadir un punto más al soporte hay que volver a calcular toda la base de Lagrange asociada.

Definición 11. (Fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio (f.c.t.i.)) Sean $f \in \mathbf{C}^0([a, b])$, $S = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$ un soporte de puntos distintos y $p_n(x)$ el polinomio de interpolación asociado a f y a S . Diremos que una fórmula de cuadratura I_n con $n+1$ nodos es de tipo interpolatorio si

$$I_n(f) \equiv I(p_n) = \int_a^b p_n(x) dx \quad (2.10)$$

Los puntos de interpolación $x_k, k = 0, \dots, n$ son los nodos de la f.c.t.i. Veamos cómo se pueden calcular los pesos. Debido a (2.7), sabemos que el polinomio de interpolación p_n se expresa respecto de la base de Lagrange como sigue:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k, \quad (2.11)$$

donde los L_k vienen dados por (2.8). Luego, teniendo en cuenta a (2.11) en (2.10), deducimos que

$$\int_a^b p_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x),$$

en consecuencia, una f.c.t.i. es un caso particular de fórmula de cuadratura asociada a los nodos de interpolación y a los pesos

$$\alpha_k = \int_a^b L_k(x) dx, k = 0, \dots, n. \quad (2.12)$$

Ejemplo 18. Sea $n = 1, x_0 = a$ y $x_1 = b$. Busquemos los pesos α_0 y α_1 para que la fórmula de cuadratura $I_1(f) = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b)$ sea del tipo interpolatorio. Usando (2.12) y que

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - b}{x - a}, L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a},$$

tenemos

$$\alpha_0 = \int_a^b \frac{x - b}{x - a} dx = \frac{b - a}{2},$$

$$\alpha_1 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{b - a}{2},$$

de donde obtenemos la fórmula del trapecio

$$I_1(f) = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Para $n = 2, x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ haciendo cálculos similares se obtiene la fórmula de Simpson

$$I_2(f) = \frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Dado que una integral es el límite de una suma infinita, es natural que su aproximación consista en una suma finita de muestras, ponderadas con pesos w_i , del integrando $f(x_i)$. Dicha suma se denomina fórmula de cuadratura.

Nota Histórica En el año 1615 Johannes Kepler establece la llamada regla del tonel y sobre la historia de su surgimiento, Kepler la describe en la dedicatoria de su publicación (Nova Stereometria doliorum vinariorum). Después de que la primera esposa de Kepler había muerto en Praga en 1611, Kepler se casó nuevamente y para la

boda compró algunos toneles de vino; con el vino en la bodega, el vendedor, con una vara de medir, determinó el contenido de los barriles sin calcular, utilizando un método, que consiste en introducir una vara de metal, y medir a través del barril, en diagonal hacia los bordes del fondo de los barriles de vino, la marca en la vara arrojaba la medida del volúmen del contenido. Kepler se sorprendió de que una diagonal a través del medio del barril pudiera dar una medida sobre el volúmen y puso en duda la exactitud de este método debido a que, por ejemplo, un barril muy bajo que tuviera una base algo más ancha y por eso un volúmen mucho menor, podría tener el mismo radio a la vista.

A raíz de esto, Kepler formuló el escrito de un nuevo cálculo del contenido de barriles en el que buscaba métodos verificables para la medición de los toneles de vino. Para ello la metodología que empleó fué la siguiente.

Consideró en primer lugar el caso de los barriles cilíndricos, considera λ a la distancia ND que hay entre el hoyo de llenado y el talón de los fondos, $2x$ a la altura AB del barril y $2y$ al diámetro AD del barril.

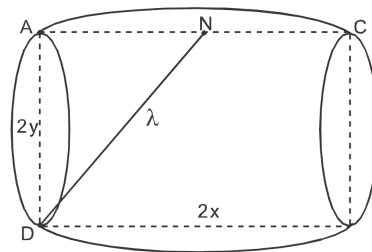


Figura 2.1: Medidas del barril

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que $x^2 + 4y^2 = \lambda^2$. Por tanto, el volúmen del barril podría ser calculado, de la siguiente manera

$$V = \pi r^2 h = \pi y^2 2x = \frac{1}{2} \pi x (\lambda^2 - x^2).$$

La observación crucial hecha por Kepler fué entonces que todos los barriles austriacos se fabricaban con la misma razón entre la altura y el diámetro.

En efecto, considerando la razón $t = \frac{x}{y}$ y empleando las dos expresiones anteriores, se tiene

$$V = 2\pi\lambda^3 t(4 + t^2)^{\frac{-2}{3}}.$$

De esta fórmula se observa, que el volúmen V de un barril cilíndrico depende de λ y la razón $t = \frac{x}{y}$ no se determina solamente conociendo el valor de λ . Para que se pueda utilizar el método de medición de los toneles austriacos, los barriles tendrían que fabricarse con una relación t fija.

Debido a los estudios publicados por Kepler, Thomas Simpson (1710-1761) realiza investigaciones posteriores y con el conocimiento de cálculo diferencial realizado por el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) sobre la función, e integral y en 1743 encuentra una aproximación para el cálculo de área la cual se denominará Regla de Simpson en el intervalo $[a, b]$ y se denota de la siguiente forma

$$\int f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\frac{a+b}{2} + f(b) \right].$$

Para efectos de la demostración del método de Simpson, se asume cada sub área como un pequeño arco de la parábola de la forma $f(x) \approx ax^2 + bx + c$ con límite inferior a y límite superior b por ende la mitad del de la pequeña sub área es $\frac{a+b}{2}$ (Ver Figura 2.2)

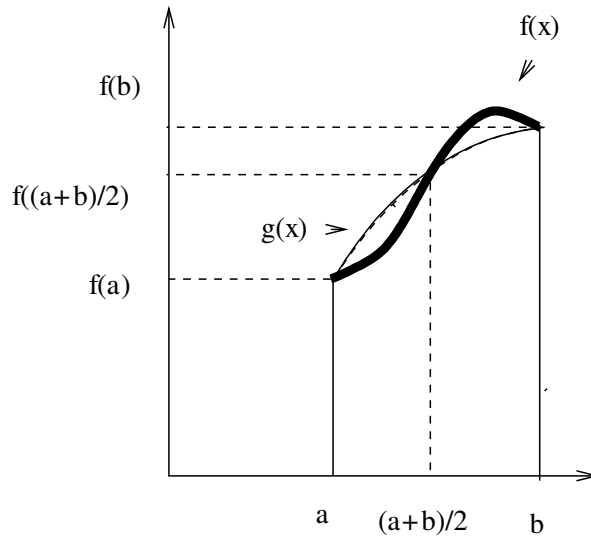


Figura 2.2: Representación geométrica de la Desigualdad de Simpson

La aproximación de una función $f(x)$ a ser integrada usando la regla de Simpson (cálculo de valor cuadrático), $g(x)$.

Esta última aproximación se puede generalizar evaluando la función en un intervalo de tal forma que la función $f(x)$ se evalúa en los extremos a, b y un punto central $\frac{a+b}{2}$.

La ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b))$ y viene dada por

$$g(x) \approx \frac{(x - \frac{a+b}{2})}{(b-a)(\frac{b-a}{2})} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{b-a}{2})(\frac{a-b}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b-a)(\frac{b-a}{2})} f(b)$$

resultando de la siguiente forma:

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

La simple inspección visual de esta figura y la que describe el procedimiento de los trapecios o los rectángulos, confirma que el método de Simpson deberá ser mucho más exacto que los procedimientos mencionados.

Ahora, se sabe que el área que se desea encontrar sería la sumatoria de todas las sub áreas que se calculen. Al igual que los métodos de la regla trapezoidal y de la regla rectangular, entre más sub áreas tenga la integral a calcular, más exacto será el valor encontrado.

En la siguiente sección se estudiarán dos desigualdades de tipo Simpson para la función cuasi-convexa, en términos de la tercera derivada, como también aplicaciones de la regla de cuadratura numérica de Simpson.

Además se estudiará la desigualdad de Simpson para funciones Lipschitzianas y se aplicará a medias especiales tales como media aritmética, media geométrica, media armónica y media logarítmica.

2.5 Desigualdad de Simpson

En los últimos años varios autores han considerado desigualdades, que dan de manera explícita, cotas de errores para fórmulas de cuadraturas ya conocidas y nuevas. Por ejemplo la desigualdad de Simpson de una cota del error para la bien conocida, regla de cuadratura de Simpson.

Como se estableció en la introducción del trabajo, el siguiente teorema es bien conocido [17].

Teorema 16. *Supóngase que f es una función cuatro veces continuamente diferenciable sobre (a, b) y*

$$\|f^{(4)}\|_{\infty} := \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}(x)| < \infty.$$

Entonces la siguiente desigualdad

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} \quad (2.13)$$

se satisface, y en la literatura es conocido como la desigualdad de Simpson.

En caso de que f no sea cuatro veces diferenciable ni su cuarta derivada es acotada en (a, b) , entonces no podemos aplicar la fórmula clásica de la desigualdad de Simpson.

La desigualdad (2.13) se define como la desigualdad de Simpson, donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se supone es cuatro veces continuamente diferenciable en el intervalo (a, b) y la cuarta derivada es acotada sobre (a, b) , es decir,

$$\|f^{(4)}\|_{\infty} := \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}(x)|.$$

Durante los últimos años, muchos autores han establecido varias generalizaciones de la desigualdad de Simpson, (2.13) para las funciones de variación acotada y funciones Lipschitzianas, monótonas y funciones absolutamente continuas. Para contrapartes, refinamientos y generalizaciones de la desigualdad de Simpson verificar [1], [2], [13], [14], [16], [17], [18], [21], [24] y [45], el cual es el resultado principal de este capítulo.

En el año 2000 J. Pec̃aric y S. Varořanec en [45] desarrolló la desigualdad de Simpson para funciones cuya n -ésima derivada con $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ es de variación acotada. A continuación se dará el enunciado de la definición de variación acotada y dicho resultado.

Definición 12. Sea $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Para cada partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$, definimos

$$\bigvee_a^b(f) := \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |u(t_i) - u(t_{i-1})|,$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones π del intervalo $[a, b]$. Si $\bigvee_a^b < \infty$, decimos que f tiene variación acotada. Se denota por $B \bigvee_a^b$ a la familia de todas las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$.

Teorema 17. Sea $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ y f una función real sobre $[a, b]$ tal que $f^{(n)}$ es de variación acotada. Entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq Cn(b-a)^{n+1} \bigvee_a^b(f^{(n)}) \quad (2.14)$$

donde,

$$C_0 = \frac{1}{3}; C_1 = \frac{1}{24}; C_2 = \frac{1}{324}; C_3 = \frac{1}{1152}$$

y $\bigvee_a^b(f^{(n)})$ es la variación total de $f^{(n)}$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Se puede notar que en la desigualdad (2.14) cuando $n = 0$, el resultado fué probado en el año 1999 por Dragomir en [14]. Ghizzeti en el año 1970 en [24] probó que si f''' es una función absolutamente continua con variación total $\bigvee_a^b(f)$, entonces (2.14) se cumple también para $n = 3$.

Uno de los resultados que demostró S. S. Dragomir en el año 2002 en [18] es que si existe una división del intervalo $[a, b]$ y $\alpha_i (i = 0, \dots, k + 1)$ sea $k + 2$ puntos de modo que $\alpha_0 = a, \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = 1, \dots, k)$ y $\alpha_{k+1} = b$. I que si además f es de variación acotada entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^k (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(x_i) \right| \\ & < \left[\frac{1}{2} \nu(h) + \max \left\{ \left| \alpha_{i+1} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right|, i = 0, \dots, k - 1 \right\} \right] \bigvee_a^b(f) \\ & < \nu(h) \bigvee_a^b(f) \end{aligned}$$

donde $\nu(h) := \max\{h_i | i = 0, \dots, k - 1\}, h_i := x_{i+1} - x_i, (i = 0, \dots, k - 1)$ y $\bigvee_a^b(f)$ es la variación total de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Otro resultado que podemos verificar en [53] que demostró E. Set en el año 2012 es el siguiente, el cual afirma que si tenemos una función diferenciable f sobre el interior de I y además $|f'|$ cuasi-convexa se obtiene el siguiente resultado

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{5(b-a)}{36} \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}.$$

Asi mismo se puede verificar en [1] que si f' es una función absolutamente continua sobre el interior de I y $|f''|^q$ es cuasi-convexa sobre $[a, b]$ entonces la siguiente desigualdad

se cumple

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{162} \left[\left(\max \left\{ \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q, |f''(b)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\max \left\{ \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q, |f''(a)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

Otro resultado interesante sobre la desigualdad de Simpson, para funciones acotadas, que se demostró en [17] y [45] el cual asegura que si f es una función de variación acotada se va a cumplir la siguiente desigualdad

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{1}{3}(b-a) \bigvee_a^b(f)$$

donde \bigvee_a^b denota la variación total de f sobre el intervalo $[a, b]$. La constante $\frac{1}{3}$ es la mejor posible.

Por otra parte I. Fedotov, y S. S. Dragomir en el año 1999 argumentó en [21] que si f es una función diferenciable en el interior de I y $a, b \in \text{int}(I)$ con $a < b$, y si $f' \in L_1[a, b]$ y además $\gamma < f' < \Gamma$ para todo $x \in [a, b]$ la siguiente desigualdad se cumple

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & < \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Ahora si asumimos que $I_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y f está por encima, entonces tenemos la fórmula clásica de la cuadratura de Simpson la cual se define de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x)dx = A_s(f, I_n) + R_s(f, I_n) \tag{2.15}$$

donde $A_s(f, I_n)$ es la regla de Simpson

$$A_s(f, I_n) =: \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] h_i + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i \tag{2.16}$$

y el término residuo $R_s(f, I_n)$ que se define de la siguiente forma

$$|R_{s,n}(f, I_n)| = -\frac{b-a}{4!5!} \|f^{(4)}\| \quad (2.17)$$

satisface el estimado

$$|R_s(f, I_n)| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^5 \quad (2.18)$$

donde $h_i = x_{i+1} - x_i$ para $i = 0, \dots, n-1$.

Ahora cuando tenemos una partición equidistante de $[a, b]$ dada por

$$I_n : x_i := a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0, \dots, n; \quad (2.19)$$

entonces tenemos la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = A_{s,n}(f) + R_{s,n}(f) \quad (2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{s,n}(f) &= \frac{b-a}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) + f\left(a + \frac{b-a}{n}(i+1)\right) \right] \\ &\quad + \frac{2(b-a)}{3n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \frac{2i+1}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y el resto satisface la estimación

$$|R_{s,n}(f)| \leq \frac{1}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4} \|f^{(4)}\|_\infty \quad (2.22)$$

Teorema 18. (Ver [56]) Sea $f \in \mathbf{C}^4([a, b], \mathbb{R})$, con $h = \frac{(b-a)}{2}$ y $X_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = b$. Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que

$$E(f) := \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$$

Notemos que en algunos sitios de la literatura, la acotación es escrita en términos de $(b-a)$ como

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(x)$$

Demostración

Definamos $F(t) = f(x(t))$. Entonces $dx = hdt$, y

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h \int_{-1}^1 F(\tau)d\tau$$

En términos de esta función el error de integración se escribe como

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) = h \left(\int_{-1}^1 F(\tau)d\tau - \frac{1}{3}(F(-1) + 4F(0) + F(1)) \right).$$

Definimos

$$G(t) = \int_{-t}^t F(\tau)d\tau - \frac{1}{3}(F(-t) + 4F(0) + F(t))$$

para $t \in [-1, 1]$. En particular, $h(G(1))$ es el error de integración que estamos tratando de estimar. Consideremos la función

$$H(t) = G(t) - t^5 G(1).$$

Como $H(0) = H(1) = 0$ por el teorema de Rolle existe $\xi_1 \in (0, 1)$ tal que $H'(\xi) = 0$, Como $H'(0) = 0$, entonces existe $\xi_2 \in (0, 1)$ tal que $H^{(2)}(\xi_2) = 0$. Como $H^{(2)}(0) = H^{(3)} = 0$, se puede aplicar el Teorema de Rolle repetidamente para encontrar que existe $\mu \in (0, 1)$ tal que

$$H^{(3)}(\mu) = 0.$$

Notemos que la tercera derivada de G es dada por $G^{(3)}(t) = -\frac{t}{3}(F^{(3)}(t) - F^{(3)}(-t))$, por lo que

$$H^{(3)}(\mu) = -\frac{\mu}{3}(F^{(3)}(\mu) - F^{(3)}(-\mu)) - 60\mu^2 G(1) = 0.$$

Reescribiendo esta ecuación como

$$-\frac{2}{3}\mu^2 \frac{F^{(3)}(\mu) - F^{(3)}(-\mu)}{(\mu - (-\mu))} = \frac{2}{3}\mu^2 90G(1).$$

Usando que $\mu \neq 0$, se puede dividir por ambos lados por $\frac{2\mu^2}{3}$. Y por el Teorema del valor medio, existe $x \in (-\mu, \mu)$ tal que

$$90G(1) = -F^{(4)}(\xi),$$

de donde se obtiene el error, después de multiplicar por h ,

$$hG(1) = -\frac{h}{90}F^{(4)}(\xi).$$

Ahora nótese que haciendo un cambio de variables $x = x_1 + th$

$$F^{(4)}(t) = \frac{d^4}{dt^4}f(x) = \frac{d^4}{dt^4}(x_1 + ht) = h^4 f^{(4)}(x).$$

□

De aquí se desprende que la cota del error

$$E_2(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - I_2(f) \right| \leq \frac{1}{90}h^5 M_4,$$

donde M_4 es la cota superior sobre el valor absoluto de la cuarta derivada sobre el intervalo $[a, b]$.

A continuación enunciaremos la siguiente definición que nos ayudará a demostrar el la desigualdad de Simpson para funciones cuasi-convexas, el cual es uno de los resultados principales, y se encuentra en [3] de este Trabajo Especial de Grado.

Definición 13. Una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se llama absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a, b]$ tal que $\sum_{k=i}^n (b_i - a_i) < \delta$ se cumple la desigualdad $\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$

2.5.1 Desigualdad de Simpson para Funciones Cuasi-Convexas

Lema 2. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en I^0 tal que $f''' \in L[a, b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'''|$ es cuasi-convexa en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = (b-a)^4 \int_0^1 p(t)f'''(ta + (1-t)b)dt$$

donde

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^2(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \frac{1}{6}(t-1)^2(t - \frac{1}{2}) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

.

Demostración: Sean I, I_1 e I_2 definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 p(t)f'''(ta + (1-t)b)dt \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'''(ta + (1-t)b)dt \\ &\quad + \frac{1}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'''(ta + (1-t)b)dt \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) f''(ta - (1-t)b)dt$$

e

$$I_2 = \frac{1}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) f'''(ta + (1-t)b)dt. \quad (2.23)$$

para resolver I_1 por partes, consideremos el siguiente cambio de variables

$$u = t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

entonces

$$du = (3t^2 - t)dt$$

y

$$dv = f'''(ta + (1-t)b)dt$$

luego

$$v = \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b}$$

realicemos otro cambio de variables dado por

$$u_1 = ta + (1-t)b$$

así

$$du_1 = (a-b)dt$$

reescribiendo

$$\frac{du_1}{a-b} = dt$$

además

$$dv_1 = f''(ta + (1-t)b)$$

y

$$v_1 = \frac{1}{a-b} f''(ta + (1-t)b)$$

$$\text{luego } I_1 = \frac{1}{6} \left(t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{a-b} \int_0^{\frac{1}{2}} f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - t) dt \right] \right).$$

Definamos \hat{I}_1 de la siguiente manera

$$\hat{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - t)}{a-b} dt$$

calculemos I_1' por partes haciendo un cambio de variable con

$$u_2 = 3t^2 - t$$

$$du_2 = (6t - 1)dt$$

y

$$\begin{aligned} dv_2 &= f''(ta + (1-t)b) \\ v_2 &= \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \\ \hat{I}_1 &= \frac{(3t^2 - t)f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(6t-1)f'(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right] \end{aligned}$$

a continuación consideremos la siguiente notación de \hat{I}_2

$$\hat{I}_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(6t-1)f'(ta + (1-t)b)}{a-b} dt$$

calculamos \hat{I}_2 por partes haciendo el cambio de variable

$$u_3 = 6t - 1$$

$$du_3 = 6dt$$

y

$$\begin{aligned} dv_3 &= f'(ta + (1-t)b)dt \\ v_3 &= \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\hat{I}_2 = \frac{(6t-1)f(ta + (1-t)b)}{a-b} - \frac{6}{a-b} \int_0^{\frac{1}{2}} f(ta + (1-t)b)dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{6} \left[t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{a-b} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - t)dt \right] \right] \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{1}{a-b} \left[\frac{(3t^2 - t)f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(6t-1)f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(a-b)^2} (3t^2 - t)f'(ta + (1-t)b) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[\frac{(6t-1)f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} - \left[\frac{6}{(a-b)^3} \int_0^{\frac{1}{2}} f(ta + (1-t)b)dt \right] \right] \end{aligned}$$

multiplicando distributivamente por $\frac{1}{6}$

$$I_1 = \frac{1}{6} t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} (3t^2 - t) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ + \left(t - \frac{1}{6} \right) \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt.$$

Ahora bien, calculando I_2 de igual manera y resolviendo por partes se obtiene que

$$I_2 = \frac{1}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) f'''(ta + (1-t)b) dt$$

considerando el cambio de variable

$$r = (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

$$dr = (3t^2 - 5t + 2) dt$$

$$s = \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b}$$

y

$$ds = f'''(ta + (1-t)b) dt$$

se obtiene que

$$I_2 = \frac{1}{6} \left[(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - 5t + 2)}{a-b} dt \right]$$

denotemos por

$$\hat{I}_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - 5t + 2)}{a-b} dt.$$

calculando I_2' por partes, se considera el siguiente cambio de variables, sea

$$r_1 = 3t^2 - 5t + 2$$

$$dr_1 = (6t - 5) dt$$

y

$$s_1 = \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b}$$

$$ds_1 = f''(ta + (1-t)b).$$

Consideremos la siguiente notación \hat{I}_3 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f''(ta + (1-t)b)(3t^2 - 5t + 2)}{a-b} dt \\ &= \frac{(3t^2 - 5t + 2)f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f'(ta + (1-t)b)(6t-5)}{(a-b)^2} dt.\end{aligned}$$

Sea

$$\hat{I}_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f'(ta + (1-t)b)(6t-5)}{(a-b)^2} dt$$

Integrando I_2 por partes, consideremos el siguiente cambio de variable

$$r_2 = 6t - 5$$

$$dr_2 = 6dt$$

y

$$s_2 = \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b}$$

$$ds_2 = f'(ta + (1-t)b)$$

ahora definiremos \hat{I}_4 como sigue

$$\begin{aligned}\hat{I}_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f'(ta + (1-t)b)(6t-5)}{(a-b)^2} dt \\ &= (6t-5) \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 6 \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{6}(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{(a-b)} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{6}(3t-2)(t-1) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &\quad + \frac{(6t-5)f(ta + (1-t)b)}{6(a-b)^3} + \frac{4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt \\
 &= \frac{1}{6}(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \frac{f''(ta + (1-t)b)}{(a-b)} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{6}(3t-2)(t-1) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{(a-b)^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &\quad + \left(t - \frac{5}{6} \right) \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{2}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt \\
 &= -\frac{1}{24} \frac{f'(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} + \frac{2}{6} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^3} + \frac{1}{6} \frac{f(b)}{(a-b)^3} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt \\
 &\quad + \frac{1}{24} \frac{f'(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} + \frac{1}{6} \frac{f(a)}{(a-b)^3} + \frac{2}{6} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^3} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(ta + (1-t)b)}{(a-b)^3} dt.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $x = ta + (1-t)b$ y $dx = (a-b)dt$, se tiene el siguiente resultado

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = (b-a)^4 \int_0^1 p(t)f'''(ta + (1-t)b)dt$$

el cual da la representación deseada. \square

Del resultado anterior podemos asegurar el siguiente teorema.

Teorema 19. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en I^0 tal que $f''' \in L[a, b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'''|$ es cuasi-convexa en $[a, b]$, entonces*

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| &\leq \frac{(b-a)^4}{1152} \left[\max \left\{ |f'''(a)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{(b-a)^4}{1152} \left[\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|, |f'''(b)| \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Demostración: Por la definición de cuasi-convexidad y el Lema 2 se obtiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq (b-a)^4 \int_0^1 |p(t)f'''(ta + (1-t)b)|dt$$

si $p(t)$ está definido por

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \frac{1}{6}(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Se obtiene la siguiente

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq (b-a)^4 \int_0^1 |p(t)f'''(ta + (1-t)b)|dt \\ = & \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \\ & + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \end{aligned}$$

por propiedad del valor absoluto

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \\ & + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \\ \leq & \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \left(\frac{1}{2} - t\right) \max \left\{ |f'''(b)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right\} dt \\ & + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2}\right) \right|, |f'''(a)| \right\} dt. \end{aligned}$$

Resolviendo la integral

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \left(\frac{1}{2} - t\right) dt$$

se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(t^2 - t^3)dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} t^3 dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt \\
 &= -\frac{t^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{t^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}t^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{3} \\
 &= -\left(\frac{1}{16}\right) \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right) \frac{1}{3} = -\frac{1}{64} + \frac{1}{48} \\
 &= \frac{1}{192}.
 \end{aligned}$$

Ahora se resuelve la integral

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2t+t^2) \left(t - \frac{1}{2}\right) dt &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right) dt \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 t^3 dt - \frac{5}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^2 dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \\
 &= \frac{t^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{5}{2} \frac{t^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + 2 \frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{t^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{5}{6}t^3\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4} - \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} \right) \right] + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{16}\right) \frac{1}{4} - \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{8}\right) \frac{1}{3} \right) \right] + 1 - \left(\frac{1}{4}\right) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{64} - \left[\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) \right] + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{15}{64} - \frac{35}{48} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{45 - 140 + 96}{192} \\
 &= \frac{1}{192}.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 & \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \left(\frac{1}{2} - t\right) \max \left\{ |f'''(b)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} dt \\
 & + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|, |f'''(a)| \right\} dt \\
 = & \frac{(b-a)^4}{6} \frac{1}{192} \max \left\{ |f'''(b)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} + \frac{(b-a)^4}{6} \frac{1}{192} \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|, |f'''(a)| \right\} \\
 = & \frac{(b-a)^4}{1152} \max \left\{ |f'''(b)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} + \frac{(b-a)^4}{1152} \max \left\{ |f'''(a)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} \\
 = & \frac{(b-a)^4}{1152} \left[\max \left\{ |f'''(a)|, \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right\} + \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|, |f'''(b)| \right\} \right]
 \end{aligned}$$

llegando al resultado que se quería demostrar, completando la demostración.

□

A continuación demostraremos las desigualdades de Young y Hölder que nos ayudará a comprender mejor la demostración del siguiente teorema, además de enunciar un teorema de la desigualdad de Hadamard para aplicaciones cuasi-convexas.

Teorema 20. (ver[42]) Sean ϕ una función continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0, c]$, con $c > 0$, tal que $\phi(0) = 0$. Si ψ es la función inversa de ϕ , entonces

$$xy \leq \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)dt.$$

para todo $x \in [0, c]$ y $y \in [0, \phi(c)]$ la igualdad se cumple si y sólo si $y = \phi(x)$.

Demostración Comencemos por demostrar que para todo $x \in [0, c]$

$$x\phi(x) = \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^{\phi(s)} \psi(t)dt. \tag{2.24}$$

Si $x = 0$ el caso es el trivial. Supongamos $x > 0$. A cada entero $n \geq 1$ se le puede asociar la partición $P_n = \{0, \frac{x}{n}, 2\frac{x}{n}, \dots, i\frac{x}{n}, (i+1)\frac{x}{n}, \dots, x\}$ del intervalo $[0, x]$ lo cual nos

da n sub-intervalos $\left[i\frac{x}{n}, (i+1)\frac{x}{n}\right]$, $(i = 0, \dots, n-1)$ cada uno de longitud $\frac{x}{n}$. A P_n le corresponde la suma inferior de Riemann de ϕ

$$\mathbf{I}(P_n, \phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(i\frac{x}{n}\right) \frac{x}{n} = \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(i\frac{x}{n}\right).$$

Además, al mismo entero n se le puede corresponder la partición

$P'_n = \{0 = \phi(0), \phi\left(\frac{x}{n}\right), \phi\left(2\frac{x}{n}\right), \dots, \phi\left(i\frac{x}{n}\right), \phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right), \dots, \phi(x)\}$ del intervalo $[0, \phi(x)]$, a la cual corresponde la suma superior de Riemann de la función ψ

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(P'_n, \psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} \psi\left(\phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right)\right) \left(\phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right) - \phi\left(i\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \left(\phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right) - \phi\left(i\frac{x}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que para todo n

$$\mathbf{I}(P_n, \phi) + \mathbf{S}(P'_n, \psi) = x\phi(x) \quad (2.25)$$

ya que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \phi\left(i\frac{x}{n}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \left(\phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right) - \phi\left(i\frac{x}{n}\right)\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} i\phi\left(i\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \phi\left(j\frac{x}{n}\right) + n\phi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} i\phi\left(i\frac{x}{n}\right) = n\phi(x). \end{aligned}$$

Por ser ϕ continua en $[0, x]$ también lo es ψ en $[0, \psi(x)]$. Por consiguiente existen las integrales $\int_0^x \phi(s)ds$, $\int_0^{\phi(x)} \psi(t)dt$. Además debido a la continuidad uniforme de ϕ en $[0, x]$, cuando n tiende a infinito, la longitud de cada subintervalo de la forma $\left[\phi\left(i\frac{x}{n}\right), \phi\left((i+1)\frac{x}{n}\right)\right]$, $(i = 0, \dots, n-1)$ tiende a cero, de modo que en virtud de la definición de la integral de Riemann se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{I}(P_n, \phi) = \int_0^x \phi(s)ds, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}(P'_n, \psi) = \int_0^{\phi(x)} \psi(t)dt$$

de lo cual se deduce, utilizando (2.25), la fórmula (2.24).

De (2.24) resulta que para demostrar el teorema basta establecer que si $y \neq \phi(x)$, entonces

$$xy < \int_{\phi(x)}^y \psi(t)dt > x(y - \phi(x)),$$

de lo cual resulta que

$$\begin{aligned} xy &= x\phi(x) + x(y - \phi(x)) \\ &< \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^{\phi(x)} \psi(t)dt + \int_{\phi(x)}^y \psi(t)dt \\ &= \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)dt \end{aligned}$$

por lo que se concluye que

$$xy < \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)dt.$$

Si $y < \phi(x)$, entonces

$$\int_y^{\phi(x)} \psi(t)dt < x(\phi(x) - y)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} xy &= x\phi(x) - x(\phi(x) - y) \\ &< \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^{\phi(x)} \psi(t)dt - \int_y^{\phi(x)} \psi(t)dt \\ &= \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)dt \end{aligned}$$

en consecuencia

$$xy < \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)dt.$$

llegando así a lo que se quería demostrar □

Teorema 21. (Desigualdad de Hölder) Sea $(\mathbf{X}, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(\mathbf{X}, \mathfrak{F}, \mathbb{C})$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int_{\mathbf{X}} |f||g|d\mu \leq \left(\int_{\mathbf{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}. \quad (2.26)$$

Demostración Denotemos por α y β a los factores que están al lado derecho de (2.26)

$$\alpha := \left(\int_{\mathbf{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \beta := \left(\int_{\mathbf{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f = 0$ en casi todas partes, y la desigualdad (2.26) se convierte en la igualdad trivial $0 = 0$. De manera similar se considera el caso cuando $g = 0$. Si $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\alpha = \infty$ o $\beta = \infty$, entonces el lado derecho de (2.26) es ∞ , y (2.26) se cumple de manera trivial.

Consideremos el caso principal cuando $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Denotemos por u y v a las funciones f y g normalizadas de la siguiente manera

$$u := \frac{f}{\alpha}, \quad v := \frac{g}{\beta}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbf{X}} |u|^p d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int_{\mathbf{X}} |f|^p d\mu = 1, \quad \int_{\mathbf{X}} |v|^q d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int_{\mathbf{X}} |g|^q d\mu = 1.$$

Para todo $x \in \mathbf{X}$ aplicamos la desigualdad de Young a los números $|u(x)|$ y $|v(x)|$

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{|u(x)|^p}{p} + \frac{|v(x)|^q}{q},$$

luego integramos ambos lados sobre \mathbf{X} respecto a la medida μ

$$\int_{\mathbf{X}} |uv| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

esto es,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{X}} |fg| d\mu &\leq \alpha\beta \\ &= \int_{\mathbf{X}} |fg| d\mu \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

llegando al resultado deseado. □

Teorema 22. Sea $f'' : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en I^0 tal que $f''' \in L[a, b]$, donde $a < b$. Si $|f'''|^q$, $q = \frac{p}{p-1}$, es cuasi-conveja en $[a, b]$, para algún $p > 1$, entonces la siguiente desigualdad se cumple:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \\ & \leq \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left[\left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\} \right)^{1/q} \right] \\ & \quad + \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left[\left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\} \right)^{1/q} \right] \end{aligned}$$

Sacando factor común se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left[\left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\} \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\} \right)^{1/q} \right] \\ & = \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} (B(p+1, 2p+1))^{1/p} \left[\left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\} \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\} \right)^{1/q} \right]. \end{aligned}$$

Demostración: Por el Lema 2 y la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq (b-a)^4 \int_0^1 |p(t)f'''(ta + (1-t)b)|dt$$

por propiedad de valor absoluto

$$\begin{aligned} (b-a)^4 \int_0^1 |p(t)f'''(ta + (1-t)b)|dt & \leq \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \\ & \quad + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)|dt \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Hölder se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)| dt + \\ & + \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)| dt \\ \leq & \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^2 \left(\frac{1}{2} - t \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\ & + \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

como f es cuasi-convexa, y usando la desigualdad de Hermite-Hadamard, se tiene que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \leq \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\},$$

y

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q \leq \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^2 \left(\frac{1}{2} - t \right) \right]^p dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (t^2)^p \left(\frac{1}{2} - t \right)^p dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{2p} \left(\frac{1}{2} - t \right)^p dt \end{aligned}$$

como $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ entonces $0 \leq 2t \leq 1$ consideremos el siguiente cambio de variable, $u = 2t$ entonces $2dt = du$ y $dt = \frac{du}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{u}{2} \right)^{2p} \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2} \right)^p \frac{du}{2} &= \int_0^1 \frac{u^{2p}}{2^{2p}} \frac{(1-u)^p}{2^p} \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2^{2p} 2^p 2} \int_0^1 u^{2p} (1-u)^p du \end{aligned}$$

sumando y restando 1 a los exponentes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{3p+1}} \int_0^1 u^{(2p+1)-1} (1-u)^{(p+1)-1} du &= \frac{1}{2^{3p+1}} B(2p+1, p+1) \\ &= \frac{1}{2^{3p+1}} \frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)}. \end{aligned}$$

Calculando de nuevo la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^{2p} \left(t - \frac{1}{2} \right)^p dt$$

como $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ entonces $0 \leq 2t - 1 \leq 1$, realizando el cambio de variable $2t - 1 = u$ entonces $2dt = du$ luego $dt = \frac{du}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{u+1}{2} - 1 \right)^{2p} \left(\frac{u+1}{2} - \frac{1}{2} \right)^p \frac{du}{2} &= \int_0^1 \left(\frac{u-1}{2} \right)^{2p} \left(\frac{u}{2} \right)^p \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2^{2p} 2^p 2} \int_0^1 (u-1)^{2p} u^p du \\ &= \frac{1}{2^{3p+1}} \int_0^1 (u-1)^{2p} u^p du \end{aligned}$$

sumando y restando 1 a los exponentes, como en el caso anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{(3p+1)}} \int_0^1 (u-1)^{(2p+1)-1} u^{(p+1)-1} du &= \frac{1}{2^{(3p+1)}} B(2p+1, p+1) \\ &= \frac{1}{2^{(3p+1)}} \frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \end{aligned}$$

luego por definición de $p(t)$, $f''' \in L[a, b]$ y la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} &\frac{(b-a)^4}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)| dt \\ &+ \frac{(b-a)^4}{6} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| (t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| |f'''(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^2 \left(\frac{1}{2} - t \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\ &+ \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

resolviendo la integral se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 & \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^2 \left(\frac{1}{2} - t \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 & + \frac{(b-a)^4}{6} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(t-1)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 = & \frac{(b-a)^4}{6} \left(\frac{1}{2^{3p+1}} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 & + \frac{(b-a)^4}{6} \left(\frac{1}{2^{3p+1}} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 = & \frac{(b-a)^4}{6} \left(\frac{1}{2^{3p/2}} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 & + \frac{(b-a)^4}{6} \left(\frac{1}{2^{3p/2}} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 = & \frac{(b-a)^{4 \cdot 2^{-1/p}}}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
 & + \frac{(b-a)^{4 \cdot 2^{-1/p}}}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q}
 \end{aligned}$$

como f es cuasi-convexa y por la desigualdad de Hermite-Hadamard se tiene

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \leq \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\}$$

y

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta + (1-t)b)|^q dt \leq \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\}$$

entonces sacando factor común

$$\begin{aligned}
& \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta+(1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
& + \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'''(ta+(1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \\
= & \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} |f'''(ta+(1-t)b)|^q dt \right] \\
\leq & \frac{2^{-1/p}(b-a)^4}{48} \left(\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(3p+2)} \right)^{1/p} \left[\left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(b)|^q \right\} \right)^{1/q} \right. \\
& \left. + \left(\max \left\{ \left| f''' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, |f'''(a)|^q \right\} \right)^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

llegando a lo que se quería demostrar. □

2.5.2 Desigualdad de Simpson para funciones Lipschitzianas

En esta sección se presentará la definición y propiedades de las funciones Lipschitzianas, para luego realizar un estudio de la cuadratura de Simpson para este tipo de funciones.

Las funciones Lipschitzianas se le conoce por ese nombre gracias al matemático Rudolph Lipschitz, quien fué un matemático alemán, y profesor en las universidades de Breslau y Bonn. Estudió las invariantes diferenciales, las propiedades de los subespacios de Riemann, las series de Fourier, y la teoría de números.

Lipschitz también estaba muy interesado en las cuestiones fundamentales de la investigación matemática y de la instrucción matemática en las universidades. Reunió sus estudios sobre estos temas en los dos volúmenes de Análisis de Grundtagen. Hasta entonces un trabajo de este tipo nunca había aparecido en alemán, aunque existían tales libros en francés. El trabajo comienza con la teoría de los números enteros racionales y pasa a las ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones. La fundación de matemáticas

también se considera en términos de sus aplicaciones. En el análisis básico, Lipschitz descubrió una condición que lleva su nombre, que es hoy día tan importantes para pruebas de existencia y singularidad como la teoría de la aproximación. Si f es una función definida en el intervalo $[a, b]$, entonces se dice que f satisface la condición de Lipschitz con el exponente α y el coeficiente M , si para cualquier par de valores x, y en $[a, b]$, la condición $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, con $\alpha > 0$ se cumple, la cual es una generalización de la siguiente definición

Definición 14. *Se dice que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz en el intervalo I si para todo $x, y \in I$ existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|.$$

La condición se consideró por primera vez por Lipschitz en [38] en su estudio de la convergencia de la serie de Fourier de una función periódica f .

Observación 9. *Cualquier función Lipschitz con $L < 1$ es, por definición, L -contractiva. es decir, es aquella que contrae las distancias con una razón de contracción estrictamente menor que la unidad.*

A continuación se darán varios ejemplos de funciones que son Lipschitzianas y otras que no lo son.

Ejemplo 19. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, es Lipschitz en toda la recta real. Para demostrarlo basta observar que $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| < |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 20. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no es Lipschitz en toda la recta real. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que es Lipschitz en \mathbb{R} para alguna constante $L > 0$. Entonces, $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, como la función es derivable en \mathbb{R} , sabemos que $\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(x)|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ combinando la desigualdad de la condición Lipschitz con la identidad anterior, obtenemos*

que $L > |f'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ lo cual es imposible, pues la derivada no está acotada:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f'(x)| = 2 \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| = \infty.$$

Proposición 5. Sea un I un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I , derivable en el $\text{int}(I)$ y tal que su derivada es acotada. Entonces f es Lipschitz continua en I .

Proposición 6. Sea $f \in C^1([a, b])$, esto es, f es derivable en $[a, b]$ y f' es continua en $[a, b]$. Entonces f es Lipschitz continua en $[a, b]$.

Definición 15. (Integral de Riemann-Stieltjes) Dadas $g, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si existe $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \mathbf{S}(P, g, F) = I$, diremos que la integral Riemann-Stieltjes de g respecto a F en el intervalo existe y vale I .

Notación: $\int_a^b g dF = \int_a^b g(x) dF(x)$.

Observación 10. En el caso particular en que $F(x) = x$, la definición coincide con la definición de integral de Riemann en $[a, b]$

Teorema 23. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función L -Lipchiziana sobre $[a, b]$. Entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{5}{36} L(b-a)^2.$$

Demostración Usando la fórmula de integración por partes de Riemann-Stieltjes se tiene

$$\int_a^b s(x) df(x) = \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \int_a^b f(x) dx$$

donde

$$s(x) := \begin{cases} x - \frac{5a+b}{6}, & x \in [a, \frac{a+b}{2}); \\ x - \frac{a+5b}{6}, & x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)df(x) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) df(x) + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+5b}{6}\right) df(x) \\
&= \left[\left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f(x)\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\left(x - \frac{a+5b}{6}\right) f(x)\right]_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_a^b f(x)dx \\
&= \left[\left(\frac{a+b}{2} - \frac{5a+b}{6}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(a - \frac{5a+b}{6}\right) f(a)\right] \\
&\quad + \left[\left(b - \frac{a+5b}{6}\right) f(b) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+5b}{6}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)dx \\
&= \left[\frac{3(a+b) - (5a+b)}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{6a - (5a+b)}{6}\right) f(a)\right] \\
&\quad + \left[\frac{6b - (a+5b)}{6} f(b) - \left(\frac{3(a+b) - (a+5b)}{6}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)dx \\
&= \left[\frac{3a + 3b - 5a - b}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{6a - 5a - b}{6}\right) f(a)\right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{6b - a - 5b}{6} f(b)\right) - \left(\frac{3a + 3b - a - 5b}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right] - \int_a^b f(x)dx \\
&= \left[\left(\frac{2b - 2a}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - \left(\frac{a - b}{6} f(a)\right)\right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{b - a}{6} f(b)\right) - \left(\frac{2a - 2b}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right] - \int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{b-a}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{b-a}{6} f(b) + \frac{b-a}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\Delta_n : a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{n-1}^n < x_n^n = b$ es una secuencia de divisiones con $V(\Delta_n) \mapsto 0$ cuando $n \mapsto \infty$ donde $V(\Delta_n) := \max_{\{i \in \{0, \dots, n-1\}\}} (x_{i+1}^n - x_i^n)$ y $\xi^n \in [x_i^n - x_{i+1}^n]$. Si $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre $[a, b]$ y $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipchiziana sobre $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b p(x)dv(x) \right| = \left| \lim_{v(\Delta_n) \mapsto 0} \sum_{i=0}^{n-1} p(\xi_i^n) [v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)] \right|$$

por definición de valor absoluto

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b p(x) dv(x) \right| &= \left| \lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} p(\xi_i^n) [v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)] \right| \\ &\leq \lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |p(\xi_i^n)| (x_{i+1}^n - x_i^n) \left| \frac{v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n} \right| \end{aligned}$$

como v es Lipschitziana entonces

$$\begin{aligned} \lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |p(\xi_i^n)| (x_{i+1}^n - x_i^n) \left| \frac{v(x_{i+1}^n) - v(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n} \right| &\leq \lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |p(\xi_i^n)| (x_{i+1}^n - x_i^n) \\ &= L \int_a^b |p(x)| dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

realizando el cambio de variable $p(x) = s(x)$, $v(x) = f(x)$ se obtiene

$$\left| \int_a^b s(x) df(x) \right| \leq L \int_a^b |s(x)| dx$$

calculando

$$\begin{aligned} \int_a^b |s(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| x - \frac{5a+b}{6} \right| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| x - \frac{a+5b}{6} \right| dx \\ &= \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6} - x \right) dx + \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6} \right) dx \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6} - x \right) dx + \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left(x - \frac{a+5b}{6} \right) dx \end{aligned}$$

definamos I_1 I_2 I_3 e I_4 de la siguiente forma

$$I_1 = \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6} - x \right) dx$$

$$I_2 = \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6} \right) dx$$

$$I_3 = \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6} - x \right) dx$$

$$I_4 = \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left(x - \frac{a+5b}{6} \right) dx$$

procedemos a resolver I_1

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6} - x \right) dx &= \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \frac{5a+b}{6} dx - \int_a^{\frac{5a+b}{6}} x dx \\ &= \frac{5a+b}{6} x \Big|_a^{\frac{5a+b}{6}} - \frac{x^2}{2} \Big|_a^{\frac{5a+b}{6}} \\ &= \left[\left(\frac{5a+b}{6} \right) \left(\frac{5a+b}{6} \right) - \left(\frac{5a+b}{6} \right) a \right] - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{5a+b}{6} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \left(\frac{5a+b}{6} \right)^2 - \frac{(5a^2+ab)}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{5a+b}{6} \right)^2 + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{25a^2+10ab+b^2}{36} - \frac{5a^2+ab}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{25a^2+10ab+b^2}{36} \right) + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{25a^2+10ab+b^2}{36} \right) - \frac{5a^2+ab}{6} + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{25a^2+10ab+b^2-60a^2-12ab+36a^2}{72} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{72} \\ &= \frac{(a-b)^2}{72} \end{aligned}$$

ahora de igual forma

$$I_2 = \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6} \right) dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6} \right) dx &= \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} x dx - \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \frac{5a+b}{6} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} - \frac{5a+b}{6} x \Big|_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \\
 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{5a+b}{6} \right)^2 \right] \\
 &\quad - \left[\left(\frac{5a+b}{6} \right) \left(\frac{a+b}{2} \right) - \left(\frac{5a+b}{6} \right) \left(\frac{5a+b}{6} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2} \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{(5a+b)^2}{36} \right] - \left[\frac{1}{12} (5a^2 + 5ab + ab + b^2) - \frac{1}{36} (5a+b)^2 \right] \\
 &= \left[\frac{1}{8} (a+b)^2 - \frac{1}{72} (5a+b)^2 \right] - \left[\frac{1}{12} (5a^2 + 6ab + b^2) - \frac{1}{36} (5a+b)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{8} (a+b)^2 - \frac{1}{72} (5a+b)^2 - \frac{1}{12} (5a^2 + 6ab + b^2) + \frac{1}{36} (5a+b)^2 \\
 &= \frac{1}{8} (a+b)^2 - \frac{1}{12} (5a^2 + 6ab + b^2) + \left(\frac{2(5a+b)^2 - (5a+b)^2}{72} \right) \\
 &= \frac{1}{8} (a+b)^2 - \frac{1}{12} (5a^2 + 6ab + b^2) + \frac{(5a+b)^2}{72} \\
 &= \frac{9(a+b)^2 - 6(5a^2 + 6ab + b^2) + (5a+b)^2}{72} \\
 &= \frac{9(a^2 + 2ab + b^2) - 6(5a^2 + 6ab + b^2) + (25a^2 + 10ab + b^2)}{72} \\
 &= \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 - 30a^2 - 36ab - 6b^2 + 25a^2 + 10ab + b^2}{72} \\
 &= \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{72} \\
 &= \frac{4(a^2 - 2ab + b^2)}{72} \\
 &= \frac{(a-b)^2}{18}.
 \end{aligned}$$

continuando con I_3

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6} - x \right) dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \frac{a+5b}{6} dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} x dx \\
 &= \frac{a+5b}{6} x \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} - \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \\
 &= \left[\frac{a+5b}{6} \left(\frac{a+5b}{6} \right) - \frac{a+5b}{6} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a+5b}{6} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \left[\frac{1}{36} (a+5b)^2 - \frac{1}{12} (a^2 + ab + 5ab + 5b^2) \right] \\
 &\quad - \left[\frac{1}{72} (a+5b)^2 - \frac{1}{8} (a+b)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{36} (a+5b)^2 - \frac{1}{12} (a^2 + 6ab + 5b^2) - \frac{1}{72} (a+5b)^2 + \frac{1}{8} (a+b)^2 \\
 &= \frac{1}{8} (a+b)^2 - \frac{1}{12} (a^2 + 6ab + 5b^2) + \frac{2(a+5b)^2 - (a+5b)^2}{72} \\
 &= \frac{9(a+b)^2 - 6(a^2 + 6ab + 5b^2) + (a+5b)^2}{72} \\
 &= \frac{9(a^2 + 2ab + b^2) - 6(a^2 + 6ab + 5b^2) + (a^2 + 10ab + 25b^2)}{72} \\
 &= \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 - 6a^2 - 36ab - 30b^2 + a^2 + 10ab + 25b^2}{72} \\
 &= \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{72} \\
 &= \frac{4(a^2 - 2ab + b^2)}{72} \\
 &= \frac{(a-b)^2}{18}.
 \end{aligned}$$

Procediendo igualmente con I_4

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left[x - \left(\frac{a+5b}{6} \right) \right] dx &= \int_{\frac{a+5b}{6}}^b x dx - \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \frac{a+5b}{6} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{a+5b}{6}}^b - \frac{a+5b}{6} x \Big|_{\frac{a+5b}{6}}^b \\
 &= \left[\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a+5b}{6} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{a+5b}{6} \right) b - \left(\frac{a+5b}{6} \right) \left(\frac{a+5b}{6} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{b^2}{2} - \frac{1}{72} (a+5b)^2 \right] - \left[\frac{1}{6} (ab+5b^2) - \frac{1}{36} (a+5b)^2 \right] \\
 &= \frac{b^2}{2} - \frac{1}{72} (a+5b)^2 - \frac{1}{6} (ab+5b^2) + \frac{1}{36} (a+5b)^2 \\
 &= \frac{b^2}{2} - \frac{1}{6} (ab+5b^2) + \frac{(a+5b)^2}{72} \\
 &= \frac{36b^2 - 12ab - 60b^2 + a^2 + 10ab + 25b^2}{72} \\
 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{72} \\
 &= \frac{(a-b)^2}{72}
 \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |s(x)| dx &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
 &= \frac{(a-b)^2}{72} + \frac{(a-b)^2}{18} + \frac{(a-b)^2}{18} + \frac{(a-b)^2}{72} \\
 &= \frac{2(a-b)^2}{72} + \frac{2(a-b)^2}{18} \\
 &= \frac{(a-b)^2}{36} + \frac{(a-b)^2}{9} \\
 &= \frac{(a-b)^2 + 4(a-b)^2}{36} \\
 &= \frac{5(a-b)^2}{36}
 \end{aligned}$$

ahora usando la desigualdad (2.27)

$$\left| \int_a^b s(x) df(x) \right| \leq L \int_a^b |s(x)| dx$$

y la identidad

$$\int_a^b s(x)df(x) = \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \int_a^b f(x)dx$$

se deduce el resultado deseado

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{5}{36}L(b-a)^2. \quad \square$$

Corolario 2. *Supongamos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable cuya derivada está acotada en (a, b) , es decir*

$$\|f'\|_\infty := \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| \leq \infty$$

entonces se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{5}{36}\|f'\|_\infty(b-a)^2. \quad (2.28)$$

Demostración: Por definición $f' = \lim_{a \rightarrow b} \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$, por hipótesis, como la derivada es acotada en (a, b) existe $L \in \mathbb{R}$ finito tal que $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq L$ así mismo $f(a) - f(b) \leq L|a - b|$ es decir, f es una función Lipschitz, como f' es acotada, la misma tiene supremo, por lo que $f(a) - f(b) \leq L|a - b| \leq \sup |f'| |a - b|$ por lo tanto

$$L|a - b| \leq \|f'\|_\infty |a - b| \quad (2.29)$$

así por (2.29) y el teorema anterior, se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{5}{36}\|f'\|_\infty(b-a)^2. \quad \square$$

Corolario 3. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitziana sobre $[a, b]$ e I_h una partición de $[a, b]$. Entonces se tiene por la desigualdad de Simpson y la fórmula (2.15) que el término resto $R_s(f, I_h)$ satisface la estimación:*

$$|R_s(f, I_h)| \leq \frac{5}{36}L \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2. \quad (2.30)$$

Comentario 1. Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no es cuatro veces diferenciable ni la cuarta derivada es acotada en (a, b) , entonces no podemos aplicar la estimación clásica en la fórmula de Simpson usando la cuarta derivada.

Se dan una clase de funciones que son Lipschitz y tienen cuarta derivada en el intervalo dado. Sea $f_p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_p := (x - a)^p$ donde $p \in (3, 4)$. Entonces como f es diferenciable podemos asegurar que

$$f'_p := p(x - a)^{p-1}, \quad x \in (a, b)$$

es la constante de lipchizidad, procederemos a comprobarlo por definición de función Lipschitz se tiene que

$$\begin{aligned} |f_p(b) - f_p(a)| &= |-(b - a)^p| \\ &= (b - a)^p \\ &= (b - a)(b - a)^{p-1} \\ &\leq (b - a)(b - a)^{p-1}p \\ &= (b - a)L \end{aligned}$$

y

$$f_p^{(4)}(x) = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{(x-a)^{4-p}}, \quad x \in (a, b).$$

Se puede notar que f_p es Lipchiziana con la constante

$$L = p(b - a)^{p-1} < \infty$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f_p^{(4)} = +\infty.$$

por lo tanto se demuestra que no se puede usar la desigualdad de Simpson, ya que la función no está acotada.

2.6 Aplicaciones para Medias Especiales

En esta sección se presentarán algunas aplicaciones para medias especiales; que podrían considerarse extensiones de la media aritmética, media geométrica, media armónica, media logarítmicas y media logarítmica generalizadas para los números reales positivos.

Definición 16. Consideremos \mathbb{R}_+ el conjunto de los números reales positivos. Una función continua de dos variables, $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida sobre \mathbb{R}_+ si

$$\min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max\{x, y\} \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

2.6.1 Media Aritmética

La media aritmética denotada por A (también llamada promedio o simplemente media) de un conjunto finito de números, es el valor característico de una serie de datos cuantitativos, objetos de estudio que parte del principio de la esperanza matemática, y se obtiene a partir de la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

Expresada de forma más intuitiva, podemos decir que la media aritmética es la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales entre cada observación.

Una de las limitaciones de la media aritmética es que es una medida muy sensible a los valores extremos; valores muy grandes tienden a aumentarla, mientras que valores muy pequeños tienden a reducirla, lo que implica que puede dejar de ser representativa de la población.

La media aritmética se calcula sumando todos los componentes y dividiendo el resultado entre el número de componentes. El resultado es la media aritmética.

Dados los números $a, b > 0$ la media aritmética viene dada por

$$A = A(a, b) = \frac{a + b}{2}.$$

Algunas de las propiedades de la media aritmética son las siguientes

Propiedades

1. La suma de las desviaciones con respecto a la media aritmética es cero.
2. La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variables con respecto a una constante cualquiera se hace mínima cuando dicha constante coincide con la media aritmética.
3. Si a todos los valores de la variable se le suma una misma cantidad, la media aritmética queda aumentada en dicha cantidad.
4. Si todos los valores de la variable se multiplican por una misma constante, la media aritmética queda multiplicada por dicha constante.
5. La media aritmética de un conjunto de números positivos siempre es igual o superior a la media geométrica es decir

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

6. La media aritmética está comprendida entre el valor máximo y el valor mínimo del conjunto de datos

$$\min\{a, b\} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a, b\}.$$

2.6.2 Media Armónica

La media armónica, denotada por H , de una cantidad finita de números es igual al recíproco, o inverso, de la media aritmética de los recíprocos de dichos valores.

Así, dados números a, b positivos la media armónica será igual a

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

La media armónica es una de las tres medias de Pitágoras. Para todos los conjuntos de datos positivos que contienen al menos un par de valores distintos, la media armónica es siempre la menor de las tres medias, mientras que la media aritmética es siempre la mayor de las tres y la media geométrica siempre está en el medio de ellas dos.

Algunas de las propiedades de la media armónica son las siguientes

Propiedades

1. La inversa de la media armónica es la media aritmética de los inversos de los valores de la variable.
2. Siempre se puede pasar de una media armónica a una media aritmética transformando adecuadamente los datos.
3. La media armónica siempre es menor o igual que la media aritmética, ya que para cualesquiera números reales positivos $a, b > 0$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a + b}{2}.$$

2.6.3 Media Geométrica

La media geométrica denotada por G , de ciertos números positivos a, b , es la raíz cuadrada del producto de dichos números, es recomendado para datos de progresión geométrica, para promediar razones, interés compuesto y números índices, el cual viene dado de la siguiente manera

$$G = \sqrt{ab}.$$

Relación con la media aritmética de logaritmos

Se puede obtener el mismo resultado de la media geométrica, usando el método que involucra logaritmos. Mediante el uso de identidades logarítmicas para transformar la fórmula, las multiplicaciones se pueden expresar como una suma, y las potencias como una multiplicación.

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \right].$$

Una de las aplicaciones de la media geométrica es el crecimiento proporcional, donde se verifica que la media geométrica es más apropiada que la media aritmética para describir el crecimiento proporcional y el crecimiento exponencial. En temas de negocios, la media geométrica de crecimiento, es conocida como tasa de crecimiento anual compuesta.

Algunas propiedades de esta media son las siguientes:

Propiedades

1. El logaritmo de la media geométrica es igual a la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable.
2. La media geométrica de un conjunto de números positivos es siempre menor o igual que la media aritmética

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

2.6.4 Media Logarítmica

La media logarítmica denotada por L , de número positivos a, b , está definido por

$$L(a, b) = \frac{ba - ab}{\ln a - \ln b}, \quad a \neq b.$$

$$L(a, a) = a.$$

De esta manera L es simétrica en a y b y continua en $a = b$.

Recientemente ha sido motivo de intensas investigaciones ya que la media logarítmica tiene aplicaciones importantes en la física, economía e incluso la meteorología. (Ver [33], [46], [47]). Kählig y Matkowski estudia-ron una variante de la ecuación funcional de Jensen que implica la media logarítmica, el cual aparece en un problema de conducción del calor.

Propiedades

1. La media logarítmica separa a la media geométrica y a la media aritmética.

$$G(x, y) \leq L(x, y) \leq A(x, y). \quad (\text{Ver [11]}).$$

2. Si x y y son números positivos, entonces

$$L(x, y) = \prod_{m=1}^{\infty} \alpha_m(x, y)$$

$$\text{donde } \alpha_m(x, y) = \frac{x^{2^{-m}} + y^{2^{-m}}}{2}. \quad (\text{Ver [11]})$$

3. La media logarítmica también puede ser representada mediante la integral de la siguiente forma (Ver [44])

$$L(x, y) = \int_0^1 x^t y^{1-t} dt.$$

De igual manera la diferencia de temperatura de media logarítmica es usada para determinar la fuerza que impulsa la transferencia de calor en el sistema de flujo, particularmente en intercambio de calor.

Sabemos que L_p es monótona no decreciente con $p \in \mathbb{R}$ definiendo a $L_{-1} := L$ y $L_0 := I$. En particular, se tiene las siguientes desigualdades

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

En lo que sigue, haciendo uso del Teorema 23 mostraremos nuevas desigualdades que fueron mencionadas anteriormente:

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < b$), $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; entonces

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = L_p(a, b)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A^p(a, b),$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = A(a^p, b^p),$$

donde

$$\|f'\|_\infty = \delta_p(a, b) := \begin{cases} pb^{p-1}, & \text{si } p \geq 1; \\ |p|a^{p-1}, & \text{si } p \in (-\infty, 1) \setminus \{-1, 0\}. \end{cases}$$

Usando la desigualdad (2.28) se tiene

$$\left| L_p^p(a, b) - \frac{1}{3}A(a^p, b^p) - \frac{2}{3}A^p(a, b) \right| \leq \frac{5}{35}\delta_p(a, b)(b-a).$$

2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < b$), $f(x) = \frac{1}{x}$; entonces

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = L^{-1}(a, b),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A^{-1}(a, b).$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = H^{-1}(a, b), \quad \|f'\|_\infty = \frac{1}{a^2}.$$

Usando la desigualdad (2.28) se obtiene

$$|3HA - LA - 2LH| \leq \frac{5}{12} \cdot \frac{b-a}{a^2} LAH.$$

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < b$), $f(x) = \ln x$, entonces

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \ln I(a, b),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln A(a, b),$$

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = \ln A(a, b), \quad \|f'\|_\infty = \frac{1}{a}.$$

Usando la desigualdad (2.28) se tiene que

$$\left| \ln \left[\frac{I}{G^{1/3} A^{2/3}} \right] \right| \leq \frac{5}{36} \left(\frac{b-a}{a} \right).$$

Observación 11. *Otras medias de gran importancia y utilidad son la media de Stolarsky y la media de Ginni, la cual mencionaremos a continuación (Ver [54],[55]):*

a) Media Stolarsky

Consideremos $r, s \in \mathbb{R}$ y sean $a, b > 0$. La media Stolarsky denotada por $E_{r,s}(a, b)$ de orden (r, s) de a, b con $a \neq b$ se define como

$$E_{r,s} = \begin{cases} \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{b^s - a^s}{b^r - a^r} \right), & rs(r-s) \neq 0; \\ \exp \left(-\frac{1}{r} + \frac{a^r \ln a - b^r \ln b}{a^r - b^r} \right), & r = s \neq 0; \\ \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{b^r - a^r}{\ln b - \ln a} \right), & r \neq 0, s = 0; \\ \sqrt{ab}, & r = s = 0. \end{cases}$$

con $E_{r,s}(a, a) = a$.

b) Media Ginni

Consideremos $r, s \in \mathbb{R}$ y sean $a, b > 0$. La media Ginni denotada por $G_{r,s}(a, b)$ de orden (r, s) de a, b con $a \neq b$ se define como

$$G_{r,s}(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{a^s + b^s}{a^r + b^r} \right)^{1/(s-r)}, & r \neq s; \\ \exp \left(\frac{a^r \ln a + b^r \ln b}{a^r + b^r} \right), & r = s \neq 0; \\ \sqrt{ab}, & r = s = 0. \end{cases}$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo especial de grado se realizó un estudio sobre la noción de funciones convexas; basado en algunas de sus propiedades de regularidad y diferenciabilidad; además de sus resultados tales como la desigualdad de Jensen (para el caso discreto y el caso continuo), la desigualdad de Hermite-Hadamard y el Teorema del Sandwich.

Se estudiaron las funciones cuasi-convexas como un caso particular de las funciones convexas, destacando algunas caracterizaciones y generalizaciones tales como que toda función convexa es cuasi-convexa, pero el recíproco no siempre es cierto, también pudimos verificar las distintas operaciones con funciones convexas, cuasi-convexas y Teorema del Sandwich.

Luego como punto neurálgico de este trabajo, se estudió la desigualdad de Simpson y los distintos resultados, conocidos en la literatura para algunos espacios de funciones, como lo es para funciones de variación acotada con primera y segunda derivada el cual lo demostró S. S. Dragomir en el año 1999.

Se desarrolló la Desigualdad de Simpson para funciones cuasi-convexas, con tercera

derivada.

Finalmente se realizó un estudio de la estimación del término residuo para la fórmula de cuadratura de Simpson sobre funciones Lipschitzianas. Además utilizando dichos resultados se presentaron algunas aplicaciones para medias especiales.

En el desarrollo de las investigaciones de este Trabajo Especial de Grado han surgido diversos problemas, posiblemente problemas abiertos; a continuación expondremos una selección de aquellos que resultan más relevantes en el contexto de la tesis esperando que determine futuras investigaciones:

- 1 Estudiar las posibilidades de conseguir estimaciones del error de la aproximación de la desigualdad de Simpson, donde la tercera derivada es una:
 - 1.1 Función de variación acotada generalizada en el sentido de Wiener, Riesz, Young, Waterman, Koremblum, Schramm, etc.
 - 1.2 Funciones fuertemente convexas o cóncavas con módulo c , fuertemente cuasi-convexas o cuasi-cóncavas con módulo c , y fuertemente cóncava o convexa conjunto valuada con módulo c .
- 2 Estudiar el comportamiento de las posibles estimaciones dadas en el punto anterior para obtener aplicaciones en las distintas medias especiales vistas en el capítulo 2.

- [1] M. Alomari, M. Darus, *On some inequalities Simpson-type via quasi-convex function with applications*, Tran. J. Math. Mech., 2 (2010), 15-24.
- [2] M. Alomari, M. Darus, U. S. Kirmaci, *Refinements of Hadamard-type inequalities for cuasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means*, Computers an Mathematics with applications, 59 (2010), 225-232.
- [3] M. Alomari, S. Hussain, *Two inequalities of Simpson type for quasi-convex functions and applications*, Applied Mathematics E-Notes, 11 (2011), 110-117.
- [4] K. J. Arrow, K. J. Enthoven, *Quasi-concave programming*, *Econometrica*, 29 (1961) 779-800.
- [5] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity*, Math. Pannonica 5/1 (1994), 139-144.
- [6] E. F. Beckenbach, R. H. Bing, *On generalized convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 220-230.
- [7] M. Besenyei, Zs Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Math Inequal. Appl 6/3 (2003), 379-392.

-
- [8] F. Bombal, *La cuadratura del círculo: Historia de una obsesión*, Rev. Real Acad. Exact. Fis. Nat. (Esp). Vol. 105, N° 2, 241-258. (2012).
- [9] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, 2nd ed. rev. by Uta C. Merzbach, New York, Wiley 1989.
- [10] R. L. Burden, J. Douglas Faires, *Análisis numérico*, Thomson Learning, 2014.
- [11] B. C. Carlson, *The logarithmic mean*. Am Math monthly 79, 615-618 (1972).
- [12] D. Cruz-Uribe, C. J. Neugebauer, *Sharp error bounds for the trapezoidal rule and Simpson's rule*, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, Vol. 3, Issue 4, Article 49, 2002.
- [13] S. S. Dragomir, *On Simpson's quadrature formula for lipchitzian mappings and applications*, Soochow Journal of Mathematics, Vol. 25, No.2 (1999) 175-180.
- [14] S. S. Dragomir, *On Simpson's quadrature formula for mappings of bounded variation and applications*, Tamkang J. Math., 30(1)(1999), 53-58.
- [15] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2002.(ON-LINE:HTTP://rgmia.uv.edu.au/monographs/).
- [16] S. S. Dragomir, J. E. Pecãric, S. Wang, *The unified treatment of trapezoid, Simpson and Ostrowski type inequalities for monotonic mappings and applications*, J. of Inequal. Appl., 31(2000), 61-70.
- [17] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, P. Cerone, *On Simpson's inequality and applications*, J. of Inequal. Appl., 5 (2000), 533-579.
- [18] S. S. Dragomir, Th. M. Rassias, (Eds) *Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

-
- [19] B. C. Escobar, *Algunos Teoremas de Separación de Funciones*, Tesis de Grado, Universidad Nacional Abierta, Vicerectorado Académico, Caracas, 2001.
- [20] W. Fenchel, *convex cones, sets and functions, (mimeographed lecture notes)* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
- [21] I. Fedotov, S. S. Dragomir, *An inequality of Ostrowski type and its applicationn for Simpson ´s rule and special means*, Preprint, RGMIA Res. Rep. Coll., 2 (1999), 13-20. <http://matilda.vu.edu.au/rgmia>.
- [22] B. De Finetti, *Sulle stratificazioni convesse*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, [4]30 (1949), 173-183.
- [23] F. García, A. Nevot, *Métodos numéricos*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1997.
- [24] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Quadrature formulae*, International series of numerical mathematics, Vol. 13, Birkhäuser Verlag Basel-Stuttgart, 1970.
- [25] H. J. Greenberg, W. P. Pierskalla, *A Review of quasi-convex functions*, Reprinted from operations research, Vol. 19, No. 7, 1971.
- [26] J. González, J. Ortega, *Cálculo V (Análisis Numérico)*, Universidad Nacional Abierta, Caracas, 1984.
- [27] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, *J. Math. Pures Appl.* 58 (1893), 171-215.
- [28] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, Mathematical Library, 2nd Edition, 1952, Reprinted 1988.
- [29] P. J. H. Herrera, *La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental*, *La Gaceta de la RSME*, Vol. 15, (2012) 335-354.
- [30] O. Hölder, *Über einen Mittelwertsatz*, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, (1889), 38-47.

-
- [31] J. L. Jensen, *Om konvexe Funktioner og Uligheder imellem Middlevaerdier*, Nyt Tidsskr. Math. 16B (1905), 49-69.
- [32] J. L. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Math. 30 (1906), 175-193.
- [33] P. Kahlig, J. Matkowski, *Functional Equations involving the logarithmic mean*. Z. Angew Math Mech 76(7), 385-390.
- [34] D. Kincaid, W. Cheney, *Análisis Numérico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Willmington, 1994.
- [35] P. K. Kythe, M. R. Schäferkötter, *Handbook of computational methods for integration*, Chapman and Hall/CRC. 2005.
- [36] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality* PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.
- [37] G. F. Kuncir, *Algorithm 103: Simpson's Rule Integrator*, Communications of the ACM, Vol. 5, (1962) 347.
- [38] R. Lipschitz, *De explicatione per series trigonometricas isttuenda functionum unius variabilis arbitrarium, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum habent infinitum disquisitio*, J. Reine Angew. Math, 63 (1864) 296-308.
- [39] N. Merentes, N. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequationes Mathematicae, no.1-2, 80 (2010), 193-199.
- [40] D. S. Mitrivic, I. B. Lackovic, *Hermite and convexity*, Aequationes Math. 28 (1985), 229-232.

-
- [41] C. P. Niculescu, L. E. Person, *Convex Functions and their Applications*, A Contemporary Approach CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [42] J. Nieto, *Una demostración sencilla y elemental de la desigualdad de Young*, Revista Colombiana de Matemáticas, (1974) 177-182.
- [43] K. Nikodem, Zs. Páles, *Generalized convexity and separation theorems*, J. Conv. Anal. 14/2 (2007), 239-247.
- [44] C. E. M. Pearce, J. Pecaric, V. Simic *On Weighted generalized logarithmic means* University of Houston, vol. 24, No. 3 (1998).
- [45] J. Pecaric, S. Varosanec, *A note of Simpsons inequality for functions of bounded variation*, Tamkang J. Math (2000), 239-242.
- [46] A. O. Pittenger, *The logarithmic mean in n variables*. Am math Monthly. 92(2), 99-104 (1985).
- [47] G. Pólya, G. Szego, *Isoperometric inequalities in mathematical physics*. Princeton University, Press. Princeton (1951).
- [48] H. R. Romero, *Funciones Convexas*, Trabajo Especial de Grado, Universidad Nacional Abierta (1999).
- [49] G. Roa, *Funciones Fuertemente Convexas y Fuertemente Midconvexas*, Trabajo Especial de Grado Universidad Central De Venezuela (2011).
- [50] W. F. Rob, K. Nikodem, Z. Páles, *Separation by monotonic functions* Mathematica Pannonica 7/2 (1996), 191-196.
- [51] A. W. Roberts, D. E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, New York-London, 1973.

-
- [52] J. M. Quesada, C. Sánchez, J. Jódar, J. Martínez, *Análisis y métodos numéricos*, Publicaciones de la Universidad de Jaén, Jaén, 2004.
- [53] E. Set, M. E. Özdemir, M. Z. Sarikaya, *On New Inequalities of Simpson's type for quasi-convex functions with applications*, Tamkang Journal Of Mathematics, Vol. 43, No. 3, (2012), 357-364.
- [54] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag. 48 (1975), 87-92.
- [55] K. B. Stolarsky, *The power and generalized logarithmic means*, Amer. Math. Monthly, 87 (1980), 545-548.
- [56] E. Süilly, D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, University of Oxford, 2003.
- [57] W. H. Young, *On classes of Summable Functions and their Fourier Series* Preceedings, Series B, No. 581, 1912.