



Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Derivados Sobre Riesgo de Catástrofe

Autor: Maikel Pereira
Tutor: Mercedes Arriojas

Trabajo de Grado
Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
LICENCIADO
en Matemáticas

Caracas, 11/05/2015

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Derivados Sobre Riesgo de Catástrofe**”, presentado por el **Br. Maikel Pereira**, titular de la Cédula de Identidad **V-20.489.884**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mercedes Arriojas
Tutora

Dra. Mairene Colina
Jurado

MSc. Angie Pineda
Jurado

Contenido

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Espacio de Probabilidad	7
1.2. Variables Aleatorias	8
1.3. Funciones de Distribución y Densidades	9
1.4. Ejemplos de distribuciones	13
1.4.1. Función Generadora de Momentos de una Variable Aleatoria Gumbel	20
1.5. Procesos Estocásticos	22
1.6. Martingalas	25
2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	27
2.1. Problema	27
2.2. Integral de Itô	29
3. Derivados Financieros y Transformada de Esscher	33
3.1. Derivados	33
3.1.1. Opciones sobre Activos Financieros	34
3.1.2. Valoración de Opciones	35
3.2. Derivados sobre índices de catástrofe	37
3.2.1. Opciones sobre índices PCS	37
3.3. Transformada de Esscher	40
3.3.1. Fórmula de Valoración	42
3.3.2. Ejemplo de Valoración Usando la Transformada de Esscher	44
3.4. Teoría de Valores Extremos	45
4. Valoración de Derivados de Catástrofe	49
4.1. Marco general	49
4.2. Distribución para los Montos de los Reclamos	50
4.3. Fórmula de Valoración para opciones a compra PCS	53
Conclusión	55

Bibliografia

Introducción

En tiempos recientes se han producido una gran cantidad de acontecimientos catástroficos los cuales han generado pérdidas tanto materiales como humanas. Una de las razones por la cual estos eventos causan tantos daños es que para los mismos no se pueden predecir su magnitud, ocurrencia e incidencia sobre la población. Uno de los sectores más afectados por esta clase de eventos es el sector asegurador, en múltiples ocasiones al ocurrir una catástrofe las compañías aseguradoras han presentado dificultad en pagar las pólizas a sus asegurados y en muchos casos las compañías han caído en bancarrota. Por ejemplo, en Marzo del 2011 uno de los terremotos más fuertes registrado en la historia ocurrió en Japón, lo cual ocasionó tsunamis y accidentes nucleares, este evento dejó 15,538 personas fallecidas, 5,686 personas heridas y 7,060 personas desaparecidas, además las pérdidas para la economía oscilaban entre \$200 y \$300 billones de dólares, de las cuales entre \$22 y \$39 billones fueron cubiertas por las compañías aseguradoras. A consecuencia de esto un gran número de ellas se declararon en bancarrota después del evento debido a la falta de capital para cumplir con la totalidad del pago a sus asegurados. Tanto este evento como muchos otros sirven para mostrar que, para compañías aseguradoras, la insolvencia después de un evento catastrófico es un problema tan grave como recurrente. Para afrontar este problema el sector asegurador ha buscado el mercado de valores como una alternativa para proteger su capital de tal manera que le sea posible responder de manera eficiente ante un evento de esta magnitud. Debido a la gran magnitud de las pérdidas, el mercado de valores constituye el único lugar en que el retorno por una inversión pueda responder ante las pérdidas de un evento catastrófico.

Intentando responder ante las pérdidas masivas por una catástrofe y la insolvencia que se generaban en las compañías aseguradoras surgieron las compañías reaseguradoras. Las compañías reaseguradoras tenían como objetivo asegurar a las compañías aseguradoras, sin embargo, a pesar de este hecho aún se podían generar insolvencias ante una catástrofe de gran magnitud. A principios del año 1995 el sector asegurador acudió por primera vez al mercado de valores cotizando unos instrumentos financieros los cuales no tuvieron mucho éxito debido a la manera en la cual eran modelados, acto seguido a finales de 1995 se empezaron a cotizar los “Derivados sobre Índices PCS”, los cuales son derivados cuyo subyacente es un índice específico relacionado con las posibles pérdidas por catástrofe. Los Derivados sobre índices PCS siguen cotizandose hasta nuestros días y permiten dispersar el riesgo de insolvencia por una catástrofe debido a que atraen a inversionistas fuera del sector asegurador, lo cual provee a este sector de una mayor capacidad de respuesta debido al aumento de capital.

Debido a las características del subyacente los derivados por riesgo de catástrofe no pueden ser valorados con los mismos métodos empleados para los derivados tradicionales. Se presentará un método de valoración de derivados sobre índices, para ello estudiaremos brevemente el uso del cálculo estocástico como herramienta para la valoración de opciones sobre activos financieros tradicionales y a partir de esto se deriva la fórmula de Black-Scholes. Finalmente, se presenta una manera de valorar los derivados sobre índices PCS que resulta más general que los métodos tradicionales que conducen a la fórmula de Black-Scholes.

En el capítulo 1 se presentan algunas distribuciones importantes para nuestro estudio, la definición de un proceso estocástico y algunos procesos estocásticos de importancia. En el capítulo 2 definiremos las ecuaciones diferenciales estocásticas y la integral de Itô. En el capítulo 3 presentaremos los conceptos básicos para entender las opciones sobre activos financieros, mostraremos la obtención de la fórmula de Black-Scholes utilizando las herramientas vistas en el capítulo 2. Hablaremos de como se cotizan los “Derivados sobre índices PCS” en el mercado y su diferencia respecto a los derivados tradicionales para esto, presentaremos la transformada de Esscher y la teoría de valores extremos que serán fundamentales para estudiar los Derivados sobre índices PCS. Finalmente, en el capítulo 4 se obtiene la fórmula de valoración de los Derivados sobre índices PCS.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacio de Probabilidad

En la práctica, cuando se realiza un experimento aleatorio nos interesará saber si ciertos subconjuntos de un espacio muestral Ω (conjunto de resultados), ocurren o no. A estos subconjuntos de interés los llamamos eventos o sucesos.

Un evento $A \subseteq \Omega$ ocurre, al realizar un experimento aleatorio, si el resultado ω obtenido es tal que $\omega \in A$. Denotaremos a la familia de subconjuntos de Ω formada por los eventos, como \mathcal{A} . Cabe destacar que en general no todos los subconjuntos de un espacio muestral son eventos. El conjunto \mathcal{A} , de los eventos, posee las siguientes propiedades:

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, es decir que la realización del experimento produce un resultado. Al conjunto Ω lo llamaremos evento cierto o seguro, ya que este evento siempre ocurre.
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, es decir, si A es un evento entonces no ocurre A también es un evento.
- (iii) $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1, 2, \dots$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, es decir que la unión numerable de eventos es un evento.

Note que al realizar un experimento, la unión de eventos ocurre si el resultado pertenece a alguno de los eventos que integran la unión.

Definición 1.1. Una familia de \mathcal{A} de subconjuntos de Ω que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) se denomina σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Definición 1.2. Sea Ω un espacio muestral y \mathcal{A} una familia de eventos de Ω . Una medida de probabilidad o probabilidad sobre Ω , es una función \mathbb{P} definida sobre \mathcal{A} que satisface los siguientes axiomas:

- (I) \mathbb{P} es no negativa, es decir para todo evento $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
- (II) \mathbb{P} es contablemente aditiva o σ -aditiva, es decir si $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

- (III) El evento cierto tiene probabilidad 1: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se denomina un espacio de probabilidad, el valor $\mathbb{P}(A)$ se denomina probabilidad de A.

Así como el espacio muestral Ω se define de acuerdo con la situación que se desea modelar, la asignación de probabilidades a los eventos considerados sobre Ω , esto es, la definición de una medida de probabilidad para un problema dado, también depende de la situación particular estudiada.

1.2. Variables Aleatorias

Definición 1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad discreto. Una variable aleatoria o variable aleatoria real es una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

que a cada $\omega \in \Omega$ le asocia un único valor real $X(\omega)$.

Definición 1.4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria o variable aleatoria real es una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisface la propiedad de que para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto:

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A},$$

es decir, $X^{-1}(I)$ es un evento.

El conjunto $X^{-1}(I)$ se denomina preimagen de I por la función X ; por lo que se dice que la función X es una variable aleatoria si la preimagen de cualquier intervalo es un evento.

Definición 1.5. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Definimos la σ -álgebra generada por X como:

$$\mathcal{A}_X = X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\},$$

donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} . \mathcal{A}_X es la menor σ -álgebra que hace medible a X .

Definición 1.6. Una variable aleatoria se denomina discreta, si su rango es un conjunto discreto (finito ó numerable). En este caso existe un conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ (conjunto de valores de X) tal que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$.

En particular, las variables aleatorias definidas sobre espacios de probabilidad discretos son discretas. Sin embargo una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad no discreto también puede ser discreta.

Definición 1.7. Dada una variable aleatoria discreta X cuyo conjunto de valores es un conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$, la función

$$p : \{x_n\}_{n \geq 1} \rightarrow [0, 1].$$

$$x_n \mapsto p(n) = p_n = \mathbb{P}(X = x_n).$$

Se denomina función de probabilidad de la variable aleatoria X ó función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X . Esta función satisface la condición

$$\sum_{n \geq 1} p_n = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = x_n) = 1.$$

1.3. Funciones de Distribución y Densidades

Definición 1.8. Si X es una variable aleatoria, se define la función de distribución de X como la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada $y \in \mathbb{R}$,

$$F_X(y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq y\}) = \mathbb{P}(X \leq y).$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ entonces se define

$$F_X(x) = \sum_{\{n : x_n \leq x\}} p_n,$$

donde $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Teorema 1.1. Si F es la función de distribución de una variable aleatoria X , entonces:

1. $0 \leq F(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$

2. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
3. $F(a) \leq F(b)$ si $a < b$ (no decreciente)
4. $\lim_{t \rightarrow a^+} F(t) = F(a)$ (continua a la derecha)
5. $\lim_{t \rightarrow a^-} F(t) = F(a) - \mathbb{P}(X = a)$
6. $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$

Definición 1.9. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de densidad sobre \mathbb{R} si y sólo si f satisface las condiciones siguientes:

- i Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- ii $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Definición 1.10. Una variable aleatoria X es continua ó absolutamente continua si existe una función de densidad f tal que para todo $a \in \mathbb{R}$

$$F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(u)du.$$

En este caso F se denomina función de distribución de probabilidad de X .

Definición 1.11. La esperanza o media de una variable aleatoria X , denotada por $E[X]$, esta definida por:

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \\ \sum_x x\mathbb{P}\{X = x\} & \text{si } X \text{ es discreta} \end{cases}$$

La esperanza tiene todas las propiedades de linealidad de una integral, es decir, si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias con esperanza finita y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$E[\alpha X + Y] = \alpha E[X] + E[Y].$$

Definición 1.12. Si X es una variable aleatoria con media $E[X] = \mu$, entonces la varianza de X , denotada $Var[X]$, se define como:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2].$$

La varianza de X es una medida de la dispersión de los valores de X alrededor de la media.

Usando la linealidad de la esperanza obtenemos una expresión equivalente para $Var[X]$,

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X].$$

Definición 1.13. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \subset \Omega$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B denotada por $\mathbb{P}(A|B)$ es:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si definimos $\mathbb{Q} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A|B),$$

\mathbb{Q} es una función de probabilidad.

Definición 1.14. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea $B \subset \Omega$, entonces la esperanza de X dado B , denotada por $E(X|B)$ es:

$$E_{\mathbb{Q}}(X) = E(X|B) = \frac{E(XI_B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad (1.1)$$

donde:

$$I_B = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{si } \omega \notin B \end{cases},$$

Si X es una variable aleatoria discreta con valores x_1, x_2, \dots , entonces (1.1) equivale a:

$$\begin{aligned} E(X|B) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_k\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k | B) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{Q}(X = x_k). \end{aligned}$$

Si X es continua y tiene densidad f_X entonces (1.1) equivale a:

$$\begin{aligned} E(X|B) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{-\infty}^{\infty} x I_B(x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B x f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Definición 1.15. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con $E[X] < \infty$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta y $A_i \subset \Omega$, donde $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$ con $i \in \mathbb{N}$ donde $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se define la esperanza condicional de X dada Y , denotada por $E(X|Y)$, como la variable discreta:

$$E(X|Y)(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|A_i)I_{A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|Y = y_i)I_{\{Y=y_i\}}.$$

Definición 1.16. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias, se define la esperanza condicional de X dada Y , denotada por $E(X|Y)$, como la variable aleatoria Z que satisface:

1. Z es Y -medible, es decir, medible respecto a la σ -álgebra generada por Y .
2. Para todo conjunto Y -medible B se cumple:

$$E[XI_B] = E[E(X|Y)I_B].$$

Proposición 1.1. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con $E[X] < \infty$ y $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria, entonces:

$$E[X] = E[E(X|Y)].$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[XI_{\Omega}(\omega)] \\ &= E[E(X|Y)I_{\Omega}(\omega)] \quad (\text{por la definición 1.16}) \\ &= E[E(X|Y)]. \end{aligned}$$

■

Propiedades de la Esperanza Condicional:

- La Esperanza Condicional es lineal. Sean Y , X_1 y X_2 variables aleatorias y c_1, c_2 constantes, entonces:

$$E[c_1X_1 + c_2X_2|Y] = c_1E[X_1|Y] + c_2E[X_2|Y].$$

- Sean X y Y variables aleatorias independientes, entonces:

$$E[X|Y] = E[X].$$

- Sean X , Y y Z variables aleatorias, tales que X es medible respecto a Y entonces:

$$E[XZ|Y] = XE[Z|Y].$$

1.4. Ejemplos de distribuciones

A) Distribución de Poisson: Sea X una variable aleatoria que tiene el conjunto de valores $\{0, 1, 2, \dots\}$ se dice que X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ , si la función de probabilidad de X está dada por:

$$p_i = P_0(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

La función P_0 define una medida de probabilidad ya que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_0(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1, \quad (p_i \geq 0),$$

donde $\lambda \in (0, \infty)$ es la esperanza de la variable aleatoria X .

La distribución de Poisson se utiliza, entre otras cosas para modelar situaciones en las que eventos ocurren un cierto número de veces en intervalos (usualmente de tiempos) dados.

B) Distribución Normal: Una variable aleatoria X se dice que tiene distribución normal o que esta normalmente distribuida, con parámetros μ y σ^2 ($\sigma > 0$), si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}.$$

La función de distribución de una variable aleatoria normal es

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

C) Distribución Gamma: Una variable aleatoria X se dice que tiene distribución gamma con parámetros (t, λ) , donde $t > 0$ y $\lambda > 0$, si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

donde

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{t-1} dy.$$

Las siguientes tres funciones de distribución serán consideradas posteriormente en este trabajo. En vista de esto exploraremos sus parámetros característicos con mayor detalle.

D) Distribución de Fréchet: Una variable aleatoria X tiene distribución Fréchet si su función de distribución es la siguiente:

$$\Phi_\alpha(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t^{-\alpha}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Donde $\alpha > 0$. Y tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x^{(-\alpha-1)} e^{-x^{-\alpha}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La esperanza de X está dada por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t \left(\alpha t^{(-\alpha-1)} e^{-t^{-\alpha}} \right) dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} t^{-\alpha} e^{-t^{-\alpha}} dt \end{aligned} \tag{1.2}$$

haciendo $y = t^{-\alpha}$ tenemos que:

$$\begin{cases} t \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$t = y^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{1.3}$$

$$dy = -\alpha t^{(-\alpha-1)} dt \quad (\text{despejando } dt)$$

$$dt = -\frac{1}{\alpha} t^{(\alpha+1)} dy$$

$$dt = -\frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} dy \tag{1.4}$$

luego, al sustituir (1.3) y (1.4) en (1.2) tenemos:

$$E[X] = \alpha \int_{\infty}^0 y e^{-y} \left(-\frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} \right) dy$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\infty}^0 y e^{-y} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} dy \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y} y^{(1-\frac{1}{\alpha})-1} dy \\
&= \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $E[X] = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$. La varianza de X está dada por:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - E^2[X] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \int_0^{\infty} x^2 \left(\alpha x^{(-\alpha-1)} e^{-x^{-\alpha}}\right) dx - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \alpha \int_0^{\infty} x^{(-\alpha+1)} e^{-x^{-\alpha}} dx - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{1.5}
\end{aligned}$$

haciendo $y = x^{-\alpha}$ tenemos que:

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$x = y^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{1.6}$$

$$dy = -\alpha x^{(-\alpha-1)} dx \text{ (despejando } dx)$$

$$dx = -\frac{1}{\alpha} x^{(\alpha+1)} dy$$

$$dx = -\frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} dy \tag{1.7}$$

luego, al sustituir (1.6) y (1.7) en (1.5) tenemos:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= \alpha \int_{\infty}^0 y^{1-\frac{1}{\alpha}} e^{-y} \left(-\frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}}\right) dy - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \int_0^{\infty} y^{(1-\frac{2}{\alpha})-1} e^{-y} dy - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$= \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Por lo tanto $Var[X] = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

E) Distribución de Weibull: Una variable aleatoria X tiene distribución de Weibull si su función de distribución es la siguiente:

$$\Psi_{\alpha}(t) = F(t) = \begin{cases} e^{-(-t)^{\alpha}} & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Donde $\alpha > 0$. Y tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(-x)^{(\alpha-1)}e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La esperanza de X está dada por:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 t(\alpha(-t)^{(\alpha-1)}e^{-(-t)^{\alpha}}) dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^0 (-t)^{\alpha}e^{-(-t)^{\alpha}} dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

haciendo $y = (-t)^{\alpha}$ tenemos que:

$$\begin{cases} t \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$t = -y^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.9}$$

$$dy = -\alpha(-t)^{(\alpha-1)}dt \text{ (despejando } dt)$$

$$dt = -\frac{1}{\alpha}(-t)^{(1-\alpha)}dy$$

$$dt = -\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy \tag{1.10}$$

luego, al sustituir (1.9) y (1.10) en (1.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \alpha \int_{-\infty}^0 ye^{-y} \left(-\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) dy \\
&= - \int_{-\infty}^0 ye^{-y} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy \\
&= - \int_{-\infty}^0 e^{-y} y^{(1+\frac{1}{\alpha})-1} dy \\
&= - \int_0^{\infty} e^{-y} y^{(1+\frac{1}{\alpha})-1} dy \\
&= \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $E[X] = \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$. La varianza de X está dada por:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - E^2[X] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \int_0^{\infty} t^2 (\alpha(-t)^{(\alpha-1)} e^{-(-t)^\alpha}) dt - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \alpha \int_0^{\infty} (-t)^2 (-t)^{(\alpha-1)} e^{-(-t)^\alpha} dt - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \alpha \int_0^{\infty} (-t)^{(\alpha+1)} e^{-(-t)^\alpha} dt - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \tag{1.11}
\end{aligned}$$

haciendo $y = (-t)^\alpha$ tenemos que:

$$\begin{cases} t \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$t = -y^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.12}$$

$$dy = -\alpha(-t)^{(\alpha-1)} dt$$

$$dy = -\alpha y^{(1-\frac{1}{\alpha})} dt \text{ (despejando } dt)$$

$$dt = -\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy \quad (1.13)$$

luego, al sustituir (1.12) y (1.13) en (1.11) tenemos:

$$\begin{aligned} Var[X] &= \alpha \int_0^{-\infty} e^{-y} \left(-y^{\frac{1}{\alpha}}\right) \left(-\frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}\right) dy - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \int_0^{-\infty} e^{-y} y^{(1+\frac{2}{\alpha})-1} dy - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

haciendo $u = -y$ tenemos que:

$$\begin{cases} y \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= -\alpha \int_0^{\infty} e^u (-u)^{(1+\frac{2}{\alpha})-1} du - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^u (-u)^{(1+\frac{2}{\alpha})-1} d(-u) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $Var[X] = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$.

F) Distribución de Gumbel: Se dice que una variable aleatoria Z tiene distribución de Gumbel cuando su función de distribución es:

$$F(t) = e^{-e^{-(t-\mu)/\beta}}.$$

Y su función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-(x-\mu)/\beta} e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}.$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$.

Se dice que X es una variable aleatoria de Gumbel distribuida de forma estándar cuando $\mu = 0$ y $\beta = 1$, así la función de distribución queda como:

$$\Lambda(t) = F(t) = e^{-e^{-t}}.$$

Y su función de densidad:

$$f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}.$$

Sea X una variable aleatoria Gumbel estándar entonces, la esperanza de X es:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}e^{-e^{-x}}dx, \end{aligned}$$

haciendo $u = e^{-x}$ tenemos que:

$$\begin{cases} u \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \\ u \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u = e^{-x} \Rightarrow dx = -\frac{du}{u} \\ u = e^{-x} \Rightarrow x = -\ln(u) \end{cases}$$

de esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\infty}^0 -\ln(u)ue^{-u}\frac{du}{u} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u}\ln(u)du \\ &= \gamma \approx 0,5772\dots \end{aligned}$$

La constante γ se denomina constante de Euler-Masheroni. Sea Z una variable aleatoria Gumbel de parámetros μ y β tenemos que:

$$Z = \mu + \beta X.$$

Luego:

$$E[Z] = E[\mu + \beta X] = \mu + \beta E[X] = \mu + \beta\gamma.$$

Ahora para calcular la varianza se puede utilizar el método de los cumulantes descrito en [22] y obtenemos que:

$$Var[Z] = \frac{\pi^2}{6}\beta^2.$$

El siguiente resultado nos será de utilidad más adelante:

1.4.1. Función Generadora de Momentos de una Variable Aleatoria Gumbel

Sea X una variable aleatoria Gumbel distribuida de manera estándar. Su función generadora de momentos esta dada por:

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x})^{-t} e^{-e^{-x}} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

haciendo $y = e^{-x}$ tenemos que:

$$-dy = e^{-x} dx$$

$$\begin{cases} x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \end{cases} .$$

Así:

$$\begin{aligned} M(t) &= - \int_{\infty}^0 y^{-t} e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} y^{(1-t)-1} e^{-y} dy \\ &= \Gamma(1-t). \end{aligned}$$

Ahora si Z es una variable aleatoria Gumbel de parámetros μ y β tenemos que $Z = \beta X + \mu$, por lo tanto la función generadora de momentos de Z es:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\ &= E[e^{t(\beta X + \mu)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[e^{t\mu} e^{\beta t X}] \\
&= e^{t\mu} E[e^{(\beta t) X}] \\
&= e^{t\mu} \Gamma(1 - \beta t).
\end{aligned}$$

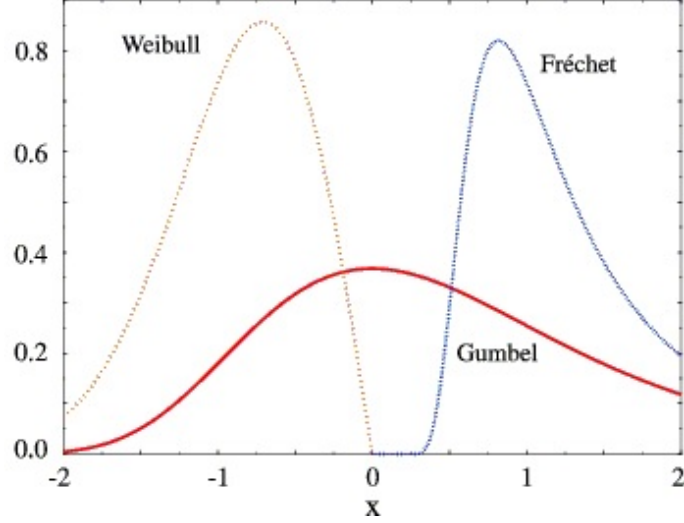


Figura 1.1: Densidades de Weibull, Fréchet y Gumbel.

Las últimas tres funciones de distribución serán consideradas posteriormente en este trabajo, existe una manera de agrupar estas tres distribuciones mediante un parámetro (ξ), tal que:

- $\xi = \alpha^{-1} > 0$. Corresponde a la función de distribución de Fréchet Φ_α .
- $\xi = 0$. Corresponde a la función de distribución de Gumbel Λ .
- $\xi = -\alpha^{-1} < 0$. Corresponde a la función de distribución de Weibull Ψ_α .

De esta manera definimos la generalización de las funciones de distribución de Fréchet, Gumbel y Weibull (H_ξ) como:

$$H_\xi(t) = \begin{cases} e^{-(1+\xi t)^{-\frac{1}{\xi}}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-t}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} .$$

donde $1 + \xi t > 0$.

1.5. Procesos Estocásticos

Definición 1.17. Un proceso estocástico X es una colección parametrizada de variables aleatorias

$$\{X_t\}_{t \in T},$$

definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donde T es usualmente un intervalo de la forma: $T = [a, b]$, $[a, b)$ o $[a, \infty)$ para $a < b$.

Nota 1.1. Un proceso estocástico X es una función de dos variables. Para un instante fijo de tiempo t , es una variable aleatoria:

$$X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega.$$

Para un evento elemental fijo $\omega \in \Omega$, es una función del tiempo:

$$X_t = X_t(\omega), t \in T$$

Para cada ω , se dice que la función $X_t(\omega)$ es una trayectoria del proceso X .

Definición 1.18. Un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de conteo si N_t representa el número total de eventos que han ocurrido en $[0, t]$. Por lo tanto un proceso de conteo N_t debe satisfacer:

- i $N_t \geq 0$.
- ii N_t posee valores únicamente enteros.
- iii Si $s < t$ entonces $N_s \leq N_t$.
- iv Para $s < t$, $N_t - N_s$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(s, t]$.

Definición 1.19. Sean $N = \{N_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo, N tiene incrementos independientes si para el conjunto $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ con $t_1 < \dots < t_n$ y $n \geq 1$,

$$N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}},$$

son variables aleatorias independientes.

En el caso en que N es un proceso de conteo el número de eventos que ocurren en dos intervalos disjuntos de tiempo son independientes. Esto implica que, el número de eventos que han ocurrido al momento t (el cual es N_t) debe ser independiente del número de eventos que ocurren entre los tiempos t y $t + s$ (el cual es $N_{t+s} - N_t$).

Definición 1.20. Sean $N = \{N_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo entonces N tiene incrementos estacionarios si:

$$N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t+h} - N_{s+h}, \text{ (para todo } t, s \in T \text{ y } t+h, s+h \in T),$$

donde $\stackrel{d}{=}$ representa igualdad en distribución de los procesos.

En el caso en que N es un proceso de conteo el número de eventos que ocurre en cualquier intervalo de tiempo finito depende únicamente de la longitud del intervalo. En otras palabras, el proceso tiene incrementos estacionarios si el número de eventos en el intervalo $(t_1 + s, t_2 + s]$ (el cual es, $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$) tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo $(t_1, t_2]$ (el cual es $N_{t_2} - N_{t_1}$), para todo $t_1 < t_2$ y $s > 0$.

Definición 1.21. Se dice que un proceso de conteo $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de media λ , $\lambda > 0$, si:

1. $N_0 = 0$.
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t está distribuido como una variable aleatoria Poisson con media λt , es decir, para todo $s, t \geq 0$

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Definición 1.22. Un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson compuesto, si puede ser representado, para $t \geq 0$, por:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

donde $\{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con media λ y $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que es independiente del proceso $\{N_t, t \geq 0\}$.

Si $\{X_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto, entonces se dice que X_t es una variable aleatoria de Poisson compuesta.

Definición 1.23. Un proceso estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ es un movimiento Browniano (estándar) si las siguientes condiciones se satisfacen:

- Comienza en cero: $B_0 = 0$.
- Tiene incrementos estacionarios e independientes.

- Para cada $t > 0$, B_t tiene una distribución normal $N(0, t)$.
- Tiene trayectorias continuas.

Definición 1.24. Sea X_t un movimiento Browniano con media $\mu \geq 0$ y varianza σ^2 . El proceso estocástico definido por:

$$S_t = e^{X_t},$$

es llamado movimiento Browniano geométrico.

Proposición 1.2. Sean $B_t - B_s$ y B_{t-s} movimientos Brownianos, donde $s < t$. $B_t - B_s$ y B_{t-s} tienen una distribución $N(0, t - s)$.

Demostración: Esto es una consecuencia de que el Movimiento Browniano tiene incrementos estacionarios, en efecto:

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s} - B_{s-s} \stackrel{d}{=} B_{t-s} - B_0 \stackrel{d}{=} B_{t-s},$$

donde B_{t-s} es normal con media cero y varianza $t - s$.

■

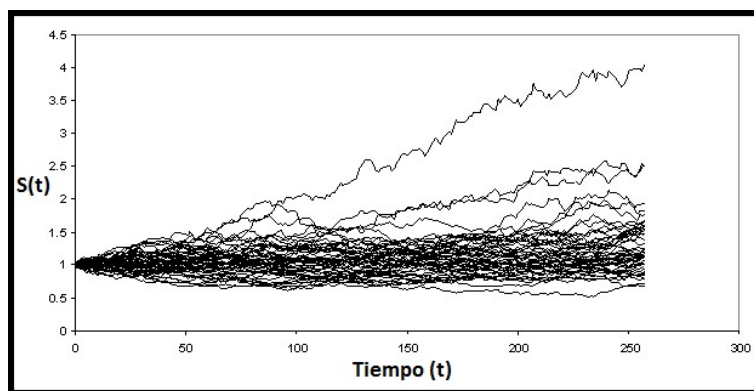


Figura 1.2: 50 diferentes gráficas de un Movimiento Browniano Geométrico, donde $S_0 = 1$, $\mu = 0,001$ y $\sigma = 0,02$.

Por ser el Movimiento Browniano Geométrico un proceso a valores no negativos, es usado para modelar procesos de precios.

1.6. Martingalas

Definición 1.25. Un proceso estocástico $\{Z_n, n \geq 1\}$ se dice que es un proceso Martingala si

$$E[|Z_n|] < \infty$$

y

$$E[Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = Z_n. \quad (1.14)$$

Una martingala es una versión generalizada de juego justo. Si interpretamos Z_n como la fortuna de un apostador en la n -ésima apuesta, entonces lo anterior expresa que su fortuna esperada a la $(n+1)$ -ésima vez es igual a su fortuna esperada después de la n -ésima apuesta sin importar que ocurriera anteriormente. Tomando esperanza de lo anterior tenemos:

$$E[Z_{n+1}] = E[Z_n]. \quad (1.15)$$

De donde:

$$E[Z_n] = E[Z_1] \text{ (para todo } n\text{).}$$

Las martingalas poseen la propiedad de ser un “juego justo”, ya que con ellas nadie gana y nadie pierde, si vemos (1.14) y suponemos que el proceso Z_n modela la ganancia de una inversión para el tiempo n la esperanza condicional al $n+1$ -ésimo tiempo dado que han ocurrido Z_1, Z_2, \dots, Z_n que es la ganancia que existe al tiempo n -ésimo. Si vemos (1.15) tenemos que la esperanza es siempre constante, esto quiere decir para el mismo ejemplo, que al pasar el tiempo siempre tenemos esperanza de ganar la cantidad que teníamos inicialmente.

Ejemplo 1.1. Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes con media 0 y sea $Z_n = \sum_{t=1}^n X_t$. Entonces $\{Z_n, n \geq 1\}$ es un martingala, pues:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] &= E[Z_n + X_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \\ &= E[Z_n | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] + E[X_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \\ &= Z_n + E[X_{n+1}] \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes con media 1 y sea $Z_n = \prod_{t=1}^n X_t$. Entonces $\{Z_n, n \geq 1\}$ es una martingala, pues:

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \dots, Z_n] &= E[Z_n X_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \\ &= Z_n E[X_{n+1}] \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

2.1. Problema

Si consideramos los coeficientes de una ecuación diferencial como variables aleatorias usualmente obtenemos un modelo matemático más realista de la situación.

Problema 1 Consideremos el modelo de simple de crecimiento poblacional

$$\frac{dX}{dt} = \alpha(t)X(t), X(0) = X_0 \text{ (constante)}. \quad (2.1)$$

Donde $X(t)$ es el tamaño de la población al tiempo t , y $\alpha(t)$ es la tasa de crecimiento relativa al tiempo t . Podría pasar que $\alpha(t)$ no sea completamente conocido, es decir, que este sujeto a algunos efectos aleatorios, de esta manera podemos tomar a $\alpha(t)$ como:

$$\alpha(t) = r(t) + \text{“ruido”}$$

El término “ruido” representa una cantidad que no podemos medir ni cuantificar con precisión. La función $r(t)$ se asume como no aleatoria.

Si suponemos que el “ruido” está representado por un proceso estocástico W_t , al incorporar esta información a la ecuación del problema 1 obtenemos:

$$\frac{dX}{dt} = r(t)X(t) + X(t) \cdot W_t. \quad (2.2)$$

Es razonable asumir que W_t tiene al menos aproximadamente estas propiedades:

- i $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$ y W_{t_2} son independientes.
- ii $\{W_t\}$ es estacionaria, es decir, la función de distribución de $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$ no depende de t .

iii $E[W_t] = 0$ para todo t .

Podemos tratar de reescribir la ecuación (2.2) en una forma que sugiera el reemplazo de W_t por un proceso estocástico con trayectorias continuas que además cumpla las condiciones anteriores. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ y considere una versión discreta de (2.2):

$$X_{k+1} - X_k = r(t_k)X_k \Delta t_k + X_k W_k \Delta t_k, \quad (2.3)$$

donde:

$$X_j = X(t_j), W_k = W_{t_k}, \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Ahora reemplazamos $W_k \Delta t_k$ por $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$ donde $\{V_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico adecuado para sustituir a W_t , luego las suposiciones (i),(ii) y (iii) sobre W_t sugieren que V_t debería tener incrementos estacionarios independientes con media 0. Un proceso que cumple con estas condiciones es el movimiento Browniano B_t . De esta manera hacemos $V_t = B_t$ y obtenemos de (2.3):

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} r(t_j)X_j \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} X_j \Delta B_j. \quad (2.4)$$

Tomando $\Delta t_j \rightarrow 0$ y usando la notación usual de integral obtenemos:

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s)X_s ds + \text{“} \int_0^t X_s dB_s \text{”}. \quad (2.5)$$

Podemos asumir como convención que (2.2) realmente se refiere a que $X_t = X_t(\omega)$ es un proceso estocástico que satisface (2.5).

Así, como parte importante de esto esta el probar la existencia, en algún sentido, de

$$\text{“} \int_0^t f(s, \omega) dB_s \text{”},$$

donde $B_t(\omega)$ es un movimiento Browniano unidimensional, para una clase de funciones $f : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2. Integral de Itô

Supongamos que $0 \leq S < T$ y $f(t, \omega)$ es dada. Queremos definir

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega). \quad (2.6)$$

Es razonable comenzar con una definición para una clase de funciones simples f y luego extender por un proceso de aproximación. Así, primero asumamos que f tiene la forma:

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot \mathfrak{X}_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1)2^{-n})}(t), \quad (2.7)$$

donde \mathfrak{X} denota la función indicadora y n es un número natural. Para tales funciones es apropiado definir:

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega), \quad (2.8)$$

Donde:

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k \cdot 2^{-n} & \text{si } S \leq k \cdot 2^{-n} \leq T \\ S & \text{si } k \cdot 2^{-n} < S \\ T & \text{si } k \cdot 2^{-n} > T \end{cases}.$$

Sin embargo, el no imponer condiciones adicionales sobre las sumas (2.8) $e_j(\omega)$ lleva a dificultades, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Tomemos:*

$$\phi_1(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{j \cdot 2^{-n}}(\omega) \cdot \mathfrak{X}_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1)2^{-n})}(t)$$

$$\phi_2(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{(j+1)2^{-n}}(\omega) \cdot \mathfrak{X}_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1)2^{-n})}(t).$$

Entonces:

$$E \left[\int_0^T \phi_1(t, \omega) dB_t(\omega) \right] = \sum_{j \geq 0} E[B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = 0, \quad (2.9)$$

Ya que $\{B_t\}$ tiene incrementos independientes. Pero:

$$\begin{aligned}
E \left[\int_0^T \phi_2(t, \omega) dB_t(\omega) \right] &= \sum_{j \geq 0} E[B_{t_{j+1}} \cdot (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{j \geq 0} E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} + B_{t_j})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{j \geq 0} E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{j \geq 0} E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = T.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por lo tanto, pese a que ϕ_1 y ϕ_2 parecen ser aproximaciones razonables para la integral estocástica de $f(t, \omega) = B_t(\omega)$, la cual acuerdo a (2.9) y (2.10) no están para nada cercanas la una de la otra, sin importar que tan grande se tome n .

En general es natural aproximar una función dada $f(t, \omega)$ por

$$\sum_j f(t_j^*, \omega) \cdot \mathfrak{X}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

donde los puntos t_j^* pertenecen a los intervalos $[t_j, t_{j+1}]$, y luego definimos $\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$ como el límite de $\sum_S^T f(t_j^*, \omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, el ejemplo anterior nos muestra que, a diferencia de la integral de Riemann-Stieljes, marca diferencia que punto t_j^* escojamos.

Si escogemos $t_j^* = t_j$ (extremo izquierdo de los intervalos) esto nos lleva a la Integral de Itô, desde ahora denotada por:

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega).$$

Definición 2.1. Sea $B_t(\omega)$ un movimiento Browniano n dimensional. Luego definimos

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$$

como la σ -álgebra generada por las variables aleatorias $\{B_i(s)\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq s \leq t}$. En otras palabras, \mathcal{F}_t es la σ -álgebra mas pequeña que contiene todos los conjuntos de la forma:

$$\{\omega; B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

donde $t_j \leq t$ y $F_j \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos de Borel, $j \leq k = 1, 2, \dots$ (Asumimos que todos los conjuntos de medida cero están incluidos en \mathcal{F}_t)

La integral estocástica debería estar definida para una familia de funciones razonablemente amplia de lo contrario podría ser de poca utilidad. Se presentará la familia de funciones sugeridas como integrables en este nuevo contexto.

Definición 2.2. Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ una familia creciente de σ -álgebras de subconjuntos de Ω . Un proceso $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que f es \mathcal{F}_t -adaptada si para cada $t \geq 0$ la función

$$\omega \rightarrow f(t, \omega),$$

es \mathcal{F}_t -medible.

Definición 2.3. Una filtración (en (Ω, \mathcal{F})) es una familia $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ tal que:

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

es decir $\{\mathcal{M}_t\}$ es creciente.

Definición 2.4. Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera y sean \mathcal{A} y \mathcal{C} dos σ -álgebras de subconjuntos de X e Y respectivamente. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice medible (\mathcal{A} -medible) si y solo si:

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A},$$

es decir:

$$A \in f^{-1}(\mathcal{C}) \Rightarrow A \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.5. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ el conjunto formado por las funciones

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que:

- i $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible, donde \mathcal{B} denota la σ -álgebra de Borel en $[0, \infty)$.
- ii $f(t, \omega)$ es \mathcal{F}_t -adaptada.
- iii $E \left[\int_S^T f(t, \omega) dt \right] < \infty$.

Sea $f \in \mathcal{V}$ una función, definiremos la integral de Itô:

$$\mathcal{I}[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega), \quad (2.11)$$

donde B_t es el movimiento Browniano.

La idea para definir la integral de Itô es natural, primero definimos $\mathcal{I}[f]$ para la clase de funciones simples ϕ . Ahora para aproximar $f \in \mathcal{V}$, primero tomamos $g \in \mathcal{V}$ tal que $g(\cdot, \omega)$ es continua y acotada para cada ω luego esta es aproximada por una sucesión de funciones simples, segundo aproximamos funciones $h \in \mathcal{V}$ acotadas por una sucesión de funciones $g_n \in \mathcal{V}$ acotadas las cuales son $g_n(\cdot, \omega)$ continuas para todo ω , finalmente para $f \in \mathcal{V}$ tomamos una sucesión de funciones $h_n \in \mathcal{V}$ tal que h_n es acotada para cada n y se cumple (2.11), además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T h_n(t, \omega) dB_t(\omega) < \infty \text{ (para todo } n \text{)}.$$

Para mayor detalle en esta demostración ver [17, pág 26].

Definición 2.6. Sea $f \in \mathcal{V}(S, T)$. Entonces la integral de Itô de f (de S a T) esta definida como:

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega), \quad (2.12)$$

donde $\{\phi_n\}$ es una secuencia de funciones simples tales que:

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Definición 2.7. Sea B_t un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un proceso de Itô es un proceso estocástico X_t en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forma:

$$dX_t = udt + vdB_t, \quad (2.13)$$

donde u y v son \mathcal{F}_t -adaptadas.

La ecuación (2.13) se interpreta como la forma diferencial de la integral de itô definida en (2.5).

Proposición 2.1. (Fórmula de Itô) Sea X_t un proceso estocástico en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dado por:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

donde u y v son \mathcal{F}_t -adaptadas. Sea $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Entonces para $Y_t = g(t, X_t)$ tenemos:

$$dY_t = g_t(t, X_t) + g_x(t, X_t)dX_t + g_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

donde $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ y además:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

Capítulo 3

Derivados Financieros y Transformada de Esscher

3.1. Derivados

En las últimas décadas, las compañías de seguros han enfrentado cuantiosas pérdidas debidas a siniestros de gran magnitud cuya ocurrencia no es predecible, como por ejemplo, catástrofes naturales o ataques terroristas. Estos riesgos son difíciles de medir, debido a su rara ocurrencia, además que estos eventos generan grandes pérdidas en compañías aseguradoras. Como resultado, en las décadas de los 80 y 90, observamos múltiples compañías aseguradoras caer en bancarrota después de un desastre natural, como por ejemplo, en el año 1992, el huracán Andrew causó una pérdida en aseguradoras de \$16 billones y más de 16 compañías mostraron insolvencia. Para ello las compañías aseguradoras han buscado la manera de solventar estas pérdidas y de esto surgió la industria reaseguradora en el año 1990 de manera oficial, la cual se encarga de asegurar a las compañías aseguradoras. Esta industria proporciona medios para diversificar el riesgo a través de la acumulación de capital de múltiples compañías aseguradas en todo el mundo. Este mecanismo de transferencia de riesgo provee de liquidez al mercado de las compañías aseguradoras y reduce el riesgo de insolvencia en las mismas. Sin embargo, existen costos asociados por seguros y reaseguros, como por ejemplo el costo por las transacciones y además se genera riesgo de insolvencia por parte de las compañías reaseguradoras. En necesidad por medios alternativos para dispersar el riesgo por eventos catastróficos el sector privado ha explorado el potencial en los instrumentos financieros como los derivados, los cuales fueron seleccionados debido a que tienen un costo menor de transacción comparados a los contratos por reaseguro, ya que estos poseen términos y condiciones que son negociados individualmente dependiendo de las necesidades del asegurado y estos cambian a lo largo del tiempo, lo cual hace el proceso de negociación por reaseguro menos inmediato.

3.1.1. Opciones sobre Activos Financieros

En los últimos años, los mercados financieros de capitales han experimentado un enorme auge, hasta el punto de convertirse en una de las industrias de mayor crecimiento. Este período de apogeo ha impulsado el estudio riguroso de estos mercados mediante modelos matemáticos. Uno de los principales problemas en las finanzas modernas es el de colocar un precio a los cada vez más numerosos y sofisticados productos financieros.

Entre estos instrumentos financieros se encuentran los derivados. Un derivado es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo, o esta derivado del valor de otro instrumento financiero o producto. El activo del que depende toma el nombre de *activo subyacente*. Los subyacentes utilizados pueden ser muy diferentes, acciones, índices bursátiles, valores de renta fija, tipos de interés o también materias primas.

Un ejemplo importante de derivado financiero está dado por las opciones. Una opción es un contrato que da a su poseedor el derecho (no la obligación) de comprar o vender algo (llamado subyacente) en un instante futuro (*fecha de expiración o ejercicio*) a un precio estipulado (*precio de ejercicio*). Las opciones pueden ser de varios tipos,:

1. **Call:** Derecho de compra.
2. **Put:** Derecho de venta.

A su vez las opciones a compra o a venta se clasifican en opciones de tipo:

1. **Europeas:** Sólo pueden ejercerse en la fecha de expiración.
2. **Americanas:** Pueden ejercerse en cualquier instante desde la compra hasta la fecha de expiración de la opción.

Veamos algunos conceptos financieros de utilidad:

El subyacente (S): el tipo de activo que puede ser comprado o vendido, del subyacente depende el precio de la opción (a compra o a venta) a ser escrita, por ejemplo, si tomamos una opción sobre las acciones de una compañía, el activo subyacente para esta opción son las acciones de la compañía. Su precio en el mercado en un instante t se denotará por S_t .

El precio de ejercicio (K): el precio al que el subyacente debe ser comprado o vendido si la opción se ejerce.

La fecha de expiración (T): La fecha en que la opción expira, es decir, la fecha a partir de la cual se pierde el derecho a comprar o vender el subyacente.

La prima: Es el precio que el comprador de una opción a compra o a venta paga al vendedor, a cambio del derecho a comprar o vender el subyacente. El vendedor de la opción siempre cobra la prima, con independencia de que se ejerza o no la opción.

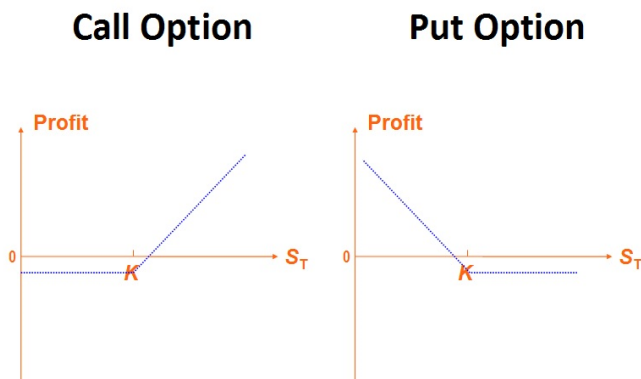


Figura 3.1: Representación de la evolución del precio de opciones Call y Put.

Una de las herramientas matemáticas ampliamente usadas para valorar estos instrumentos financieros es la fórmula de Black-Scholes, la cual nos proporciona el valor teórico de una opción Call o Put europea a partir de los siguientes datos: *el tiempo hasta la fecha de expiración, el precio actual del subyacente, la tasa de interés libre de riesgo, el precio de ejercicio de la opción y la volatilidad del subyacente*. Para la obtención de esta fórmula suponemos ausencia de *arbitraje*, es decir, excluimos la posibilidad de obtener beneficios sin riesgo.

Si C_t y P_t son los precios de las opciones a compra y venta respectivamente para el instante de tiempo t y r es el tipo de interés anual, entonces se define la **Paridad Put-Call** como:

$$C_t - P_t = S_t - e^{-r(T-t)}K.$$

La fórmula de Paridad Put-Call define la relación del precio entre una opción a compra de tipo europea y una opción a venta de tipo europea, ambas con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración. La paridad Put-Call será de utilidad pues al obtener (a través de la fórmula de Black-Scholes) el precio de una opción a compra de tipo europea, podemos obtener el precio de una opción a venta de tipo europea.

3.1.2. Valoración de Opciones

Sean B_t un movimiento Browniano, $\mu, \sigma > 0$ (constantes) y t el tiempo. Sea $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$ (para $t \geq 0$) un movimiento Browniano geométrico, entonces usando la

Fórmula de Itô [12, pág 118] se tiene que S_t resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Suponemos que el precio de una Opción a compra de tipo europea (C) es una función de S y t (para $0 \leq t < T$), esto tiene sentido pues S modela el precio del subyacente del cual depende la opción y el valor de la misma varía en el tiempo, así:

$$C = C(S_t, t).$$

Usando la fórmula de Itô obtenemos:

$$dC = C_S dS_t + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} (dS_t)^2, \quad (3.1)$$

donde C_S y C_t son derivadas parciales de C respecto a S y a t, respectivamente y C_{SS} es la segunda derivada parcial de C respecto a S. Como:

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \\ &= \mu^2 S_t^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S_t^2 dt dB_t + \sigma^2 S_t^2 (dB_t)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 (dB_t)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt, \end{aligned}$$

de esta manera podemos escribir (3.1) como:

$$dC = C_S dS_t + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S_t^2 dt, \quad (3.2)$$

la ecuación diferencial estocástica anterior con las condiciones:

$$\begin{cases} C(S_T, 0) = \max\{S_T - K, 0\} \\ C(0, T) = 0 \end{cases}$$

tiene como solución ([21], [2]) la fórmula cerrada:

$$C_t = F(d_1) S_t - e^{-r(T-t)} K F(d_2), \quad (3.3)$$

donde F es la función de distribución de una variable aleatoria normal $N(0, 1)$ y:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Ahora para una opción a venta Put (P_t), de la Paridad Put-Call tenemos:

$$\begin{aligned} C_t - P_t &= S_t - e^{-r(T-t)}K \\ P_t &= C_t - S_t + e^{-r(T-t)}K \end{aligned} \quad (3.4)$$

sustituyendo (3.3) en (3.4) tenemos:

$$\begin{aligned} P_t &= -S_t[1 - F(d_1)] + e^{-r(T-t)}K[1 - F(d_2)] \quad (\text{Usando la simetría de } N(0,1)) \\ P_t &= -S_tF(-d_1) + e^{-r(T-t)}KF(d_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2. Derivados sobre índices de catástrofe

Los derivados sobre índices de catástrofe son derivados financieros los cuales poseen como subyacente un índice, el cual modela la cantidad de pérdidas sobre propiedades aseguradas en una región determinada, sobre este índice se realizan opciones a compra y opciones a venta. Mediante este tipo de instrumentos financieros las compañías aseguradoras y reaseguradoras pueden proteger su capital ante catástrofes al invertir el mismo y además les permite aumentar su capital pues estos instrumentos atraen a inversionistas externos al campo asegurador, lo cual le provee de una mayor liquidez en caso de catástrofe.

Los primeros instrumentos financieros por catástrofe fueron cotizados en la CBoT (Chicago Board of Trade). Para estos instrumentos financieros se utilizó un índice subyacente que fue modelado como un movimiento Browniano geométrico más un proceso de Poisson con cantidades de pérdida fijas. Como no había aleatoriedad en los tamaños de los saltos, este modelo podía ser enmarcado en el trabajo realizado por Black-Scholes [2]. Estos futuros y derivados sobre futuros no generaron suficiente interés y dejaron de ser cotizados en 1995. Fueron reemplazados por opciones llamadas opciones sobre índices PCS.

3.2.1. Opciones sobre índices PCS

Las opciones PCS fueron introducidas en la CBoT en 1995, estos contratos eran opciones Call y Put como las vimos anteriormente, la diferencia esta en que estos contratos tienen como subyacente un índice llamado “índice de pérdida” el cual provee diariamente PCS (<http://www.verisk.com/property-claim-services.html>), la cual es una empresa norteamericana que estima daños a propiedades por catástrofe desde 1949. Los índices PCS

reflejan estimaciones de pérdidas que, para un periodo específico, afectarían a los tenedores de pólizas. Este tipo de opciones fueron introducidos por la necesidad de medios alternativos para transferir el riesgo por eventos catastróficos.

Los estimados de PCS sobre el daño en una propiedad asegurada se realizan a través de varios procedimientos entre los cuales se toma en cuenta un resumen general de los asegurados y en los lugares en donde sea necesario realizan su propia investigación de campo, también toman en cuenta tanto la pérdida en dólares como el número de reclamos que serán presentados. PCS define como una catástrofe a un evento natural o causado por el hombre que causa un exceso de \$25 millones en daños a propiedades aseguradas y afecta un significativo número de dueños de pólizas y compañías aseguradoras, PCS al identificar el evento como catástrofe le asigna un número serial (“PCS Identified Catastrophe”), este número serial identifica a la catástrofe de manera única para que los inversionistas consulten sus datos pertinentes, el número serial es dado al público dentro de 24-48 horas después de la ocurrencia de una catástrofe identificada por PCS. Si una catástrofe causa más de \$250 millones en daños, por su poca frecuencia PCS realizará estudios con mayor detalle para determinar si el estimado del índice debe ser ajustado. Generalmente, PCS completa esta investigación y presenta los datos finales dentro de los primeros seis meses de la ocurrencia de una catástrofe de esta índole.

Las opciones PCS ofrecen flexibilidad, primero de acuerdo a la ubicación geográfica (ya que cambia la cantidad de riesgos incluidos), segundo en la elección del periodo de tiempo en el cual se produce la catástrofe según el contrato, llamado periodo de pérdida y por último en la escogencia de la fecha de expiración de los contratos. PCS provee nueve diversos índices a la CBoT: un Índice Nacional, cinco índices de cobertura regionales que cubren las zonas Este, Noreste, Sureste, Medio Oeste y Oeste y tres índices estatales que cubren Florida, Texas y California.

La CBoT clasifica las opciones PCS como contratos de: “Pequeña Capitalización” (Small cap contracts) los cuales limitan el monto de pérdida que puede ser incluido en el contrato a \$20 mil millones, y de “Gran Capitalización” (large cap contracts) los cuales incluyen pérdidas desde \$20 mil millones a \$50 mil millones. Después del periodo de pérdida especificado en el contrato, los usuarios de la opción PCS pueden escoger un periodo de maduración de seis o doce meses. El tiempo de maduración es el tiempo durante el cual PCS estima y reestima las catástrofes que ocurrieron a lo largo del periodo de pérdida y continúan afectando el índice PCS. El contrato finaliza al terminar el periodo de maduración escogido y debe pagarse en efectivo si se decide ejecutar la opción, aunque los estimados de pérdida PCS continúen cambiando debido a que se van obteniendo datos más precisos de los daños ocasionados por la catástrofe. Las opciones PCS son de tipo europeas, la siguiente tabla muestra la estructura de tiempo de los contratos:

Cuadro 3.1: Estructura de tiempos PCS

Mes del Contrato	Periodo de Pérdida	Periodo de Maduración		Fecha de Expiración	
		6-Meses	12-Meses	6-Meses	12-Meses
Marzo	Ene - Mar	Abr 1 - Sep 30	Abr 1 - Mar 31	sep-30	mar-31
Junio	Abr - Jun	Jul 1 - Dic 31	Jul 1 - Jun 30	dic-31	jun-30
Septiembre	Jul - Sep	Oct 1 - Mar 31	Oct 1 - Sep 30	mar-31	sep-30
Diciembre	Oct - Dic	Ene 1 - Jun 30	Ene 1 - Dic 31	jun-30	dic-31
Anual	Ene - Dic	Ene 1 - Dic 30	Ene 1 - Dic 31	jun-30	dic-31

Cada índice de pérdida representa la suma del estimado vigente de PCS para pérdidas catastróficas de los asegurados en un área determinada y el periodo de pérdida dividido por \$100 millones. Los índices son citados en puntos y décimas de puntos y cada punto del índice equivale a \$200 en efectivo.

Cuadro 3.2: Valor en efectivo de las opciones PCS.

Valor del índice PCS	Opcion PCS (Eqv. en Efectivo)	Pérdida eqv. en la industria aseguradora	
0.1	\$20	\$10 millones	
1.0	\$200	\$100 millones	
50.0	\$10,000	\$5billones	
200.0	\$40,000	\$20 billones	(Limite small cap)
250.0	\$50,000		
350.0	\$70,000		
500.0	\$100,000	\$50 billones	(Limite large cap)

La mayoría de los modelos matemáticos propuestos en matemáticas financieras asumen continuidad en la evolución de los precios, es decir, el riesgo del subyacente es predecible. Bajo las condiciones de que los activos no pagan dividendos, que no existen costos en las transacciones de compra y venta del activo o de la opción ni por impuestos y que no existen portunidades de arbitraje la fórmula de Black-Scholes, permite determinar los precios de derivados. Sin embargo, cuando se es expuesto a un riesgo por catástrofe, como un terremoto o una inundación, uno necesariamente tiene que incluir movimientos impredecibles en el índice que refleja el riesgo. Esto nos lleva de manera natural a la clase de procesos estocásticos que incluyen saltos en intervalos de tiempo aleatorios.

En el contexto de riesgo por catástrofe, el proceso para modelar los precios de estos derivados resulta ser distinto al considerado para derivar la fórmula de Black-Scholes, en este caso los activos del subyacente están explícitamente definidos, mientras que en el

contexto de catástrofe actual el subyacente es un índice, el cual no cotiza en el mercado. Debido a esto se hacen necesarias técnicas matemáticas que permitan considerar procesos más generales que los que modelan los activos subyacentes para opciones financieras tradicionales.

3.3. Transformada de Esscher

La transformada de Esscher es una función que nos permite modificar la función de densidad de una variable aleatoria, tiene importantes aplicaciones en la valoración de ciertos activos financieros, en especial cuando el modelo de subyacente posee incrementos independientes y estacionarios, lo cual permitirá su uso en la valoración de opciones sobre índices PCS.

Notación: Sea $M(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x) dx$ donde f es una función de densidad de probabilidad y $h \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1. Sea f una función de densidad de probabilidad, sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $M(h)$ existe. Se define la Transformada de Esscher de parámetro h de la función de densidad f como:

$$f(x, h) = \frac{e^{hx} f(x)}{M(h)}.$$

Veamos que $f(x, h) = \frac{e^{hx} f(x)}{M(h)}$ es una función de densidad de probabilidad. $M(h) > 0$ para todo $h \in \mathbb{R}$ pues M esta definida como la integral del producto de dos funciones positivas, así:

1. Como $f(x)$ es función de densidad entonces $f(x) \geq 0$, por lo tanto:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{hx} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{hx} f(x)}{M(h)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x, h) \geq 0.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, h) dx &= \frac{1}{M(h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{M(h)} M(h) = 1. \end{aligned}$$

Notación: para fines prácticos en la próxima proposición denotemos F como la función de distribución para un t fijo de la variable X_t del proceso $\{X_t\}$, es decir,

$$F(x, t) = \mathbb{P}(X_t \leq x).$$

Nota 3.1. Si f es una función tal que: $f(x + y) = f(x)f(y)$ entonces:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} \\
 &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\
 &= f(x)f'(0)
 \end{aligned}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0),$$

esta última ecuación diferencial tiene como solución:

$$f(x) = a^x,$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.1. Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes. Sea $M(z, t) = E[e^{zX_t}]$, donde $X_0 = 0$ y $M(z, t)$ es continua para $t = 0$. Sea F la función de distribución de X , entonces:

$$M(z, t) = (M(z, 1))^t.$$

Demostración: Veamos que:

$$M(z, t) = a^t \text{ para algún } a \in \mathbb{R},$$

reescribiendo X_{t+s} tenemos:

$$X_{t+s} = (X_{t+s} - X_s) + (X_s - X_0),$$

usando esto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 M(z, t+s) &= E[e^{zX_{t+s}}] \\
 &= E[e^{z((X_{t+s}-X_s)+(X_s-X_0))}] \\
 &= E[e^{z(X_{t+s}-X_s)}e^{z(X_s-X_0)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[e^{z(X_{t+s}-X_s)}]E[e^{z(X_s-X_0)}] \quad (\text{pues } X \text{ tiene incrementos independientes}) \\
&= E[e^{zX_t}]E[e^{zX_s}] \quad (\text{pues } X \text{ tiene incrementos estacionarios}) \\
&= M(z, t)M(z, s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$M(z, t) = a^t$$

De donde, haciendo $t = 1$ tenemos que:

$$a = M(z, 1).$$

■

3.3.1. Fórmula de Valoración

Para $t > 0$, denotaremos como $S(t)$ el valor de un activo en el tiempo t . Supongamos que existe un proceso estocástico, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con incrementos independientes y estacionarios, $X_0 = 0$, tal que:

$$S_t = S_0 e^{X_t}. \quad (3.6)$$

Sea:

$$M(z, t) = E[e^{zX_t}],$$

la función generadora de momentos de X_t . Asumiendo que $M(z, t)$ es continua para $t = 0$, como ya vimos:

$$M(z, t) = [M(z, 1)]^t. \quad (3.7)$$

Supongamos que el proceso X_t tiene densidad:

$$f(x, t) = \frac{d}{dx} F(x, t), \quad t > 0;$$

Entonces:

$$M(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t) dx.$$

Definición 3.2. Sea h un número real para el cual $M(h, t)$ existe. La transformada de Esscher (de parámetro h) del proceso $\{X_t\}$ que posee función de densidad $f(x, t)$ es:

$$\begin{aligned} f(x, t, h) &= \frac{e^{hx} f(x, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} f(y, t) dy} \\ &= \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)}. \end{aligned}$$

Esta $(f(x, t, h))$ es la función de densidad modificada de X_t , la cual es la transformada de Esscher de la función de densidad original $(f(x, t))$. La función generadora de momentos correspondiente es:

$$\begin{aligned} M(z, t, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t, h) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \frac{e^{hx} f(x, t)}{M(h, t)} dx \\ &= \frac{1}{M(h, t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(z+h)x} f(x, t) dx \\ &= \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)}. \end{aligned}$$

Por (3.7):

$$M(z, t, h) = [M(z, 1, h)]^t. \quad (3.8)$$

El criterio para determinar el precio de un activo financiero se establece encontrando h^* , de forma que el proceso de precios $\{e^{-\delta t} S_t\}$ sea una martingala (juego justo) con respecto a la transformada de Esscher correspondiente, donde δ es la tasa de interés libre de riesgo, entonces:

$$\begin{aligned} S_0 &= E^*[e^{-\delta t} S_t] \\ &= e^{-\delta t} E^*[S_t] \end{aligned} \quad (3.9)$$

por (3.6), el parámetro h^* es la solución de la ecuación (3.9), luego:

$$1 = e^{-\delta t} E^*[e^{X_t}]$$

$$e^{\delta t} = M(1, t, h^*) = (M(1, t, h^*))^t,$$

por (3.8), haciendo $t = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} e^{\delta} &= M(1, 1, h^*), \\ \delta &= \ln[M(1, 1, h^*)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Llamamos a la transformada de Esscher de parámetro h^* como la transformada de Esscher neutral al riesgo. Para valorar un derivado, calculamos la esperanza del proceso $\{e^{-\delta t}(S(T) - K)_+\}$ respecto a la medida de Esscher neutral al riesgo, es decir:

$$E^*[e^{-\delta T}(S(T) - K)_+].$$

donde $x_+ = x$ si $x > 0$ y $x_+ = 0$ si $x \leq 0$.

3.3.2. Ejemplo de Valoración Usando la Transformada de Esscher

Consideremos una opción europea a compra (Call) con precio de ejercicio K y fecha de ejercicio T , el valor de esta opción (para $t = 0$) es:

$$V(0) = E^*[e^{-\delta T}(S(T) - K)_+]. \tag{3.11}$$

Por otra parte:

$$(S(T) - K)_+ = (S(0)e^{X_T} - K)_+ = \begin{cases} S(0)e^{X_T} - K & \text{cuando : } S(0)e^{X_T} - K > 0 \\ 0 & \text{cuando : } S(0)e^{X_T} - K \leq 0 \end{cases}$$

luego para $S(0)e^{X_T} - K > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} (S(T) - K)_+ &= S(0)e^{X_T} - K, \text{ cuando: } S(0)e^{X_T} - K > 0 \\ &= S(0)e^{X_T} - K, \text{ cuando: } S(0)e^{X_T} > K \\ &= S(0)e^{X_T} - K, \text{ cuando: } X_T > \ln\left(\frac{K}{S(0)}\right). \end{aligned}$$

Sea $\kappa = \ln\left(\frac{K}{S(0)}\right)$, luego (3.11) se convierte en:

$$\begin{aligned}
V(0) = E^*[e^{-\delta T}(S(T) - K)_+] &= e^{-\delta T} \int_{\kappa}^{\infty} (S(0)e^{X_T} - K)f(x, T, h^*)dx \\
&= e^{-\delta T} \int_{\kappa}^{\infty} S(0)e^{X_T} f(x, T, h^*)dx - e^{-\delta T} K(1 - F(\kappa, T, h^*)).
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
e^{X(T)} f(x, T, h^*) &= e^{X_T} \frac{e^{h^* X_T}}{M(h^*, T)} \\
&= \frac{e^{(h^*+1)X_T}}{M(h^*, T)} \\
&= \frac{M(h^* + 1, T)}{M(h^*, T)} f(x, T, h^* + 1) \\
&= M(1, T, h^*) f(x, T, h^* + 1) \\
&= e^{\delta T} f(x, T, h^* + 1),
\end{aligned}$$

de lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
V(0) &= e^{-\delta T} S(0) \int_{\kappa}^{\infty} e^{\delta T} f(z, T, h^* + 1) dz - e^{-\delta T} K(1 - F(\kappa, T, h^*)) \\
&= S(0)(1 - F(\kappa, T, h^* + 1)) - e^{-\delta T} K(1 - F(\kappa, T, h^*)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de una opción a compra europea con precio de ejercicio K y fecha de ejercicio T es:

$$S(0)(1 - F(\kappa, T, h^* + 1)) - e^{-\delta T} K(1 - F(\kappa, T, h^*)). \quad (3.12)$$

Cuando tenemos que X_t es un movimiento Browniano geométrico y F una función de distribución normal estándar obtenemos de (3.12) la fórmula de Black-Scholes.

3.4. Teoría de Valores Extremos

La teoría de valores extremos nos ofrece herramientas para modelar eventos poco comunes, como inundaciones extremas, grandes pérdidas en compañías aseguradoras, grandes

incendios, fallas por corrosión en tuberías, también puede ser aplicada para modelar los tiempos más rápidos que puede llegar un ser humano en una carrera de 100 metros planos, es decir, podemos modelar con esta teoría eventos en que los valores muy grandes de las variables pueden ocurrir con probabilidad, relativamente alta. El siguiente teorema es un teorema límite similar al teorema central del límite sólo que en vez de aproximar sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas aproxima máximos de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Teorema 3.1. (Fisher, Tippet y Gnedenko) Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $M_n := \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq y \right) = H(y),$$

donde H es una función no degenerada, entonces H es una función de distribución de tipo Weibull, Fréchet o Gumbel.

La función H del teorema anterior corresponde a la función generalizada (H_ξ) mencionada en la sección (1.4). Recordemos que:

$$H_\xi(t) = \begin{cases} e^{-(1+\xi t)^{-\frac{1}{\xi}}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-t}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Donde $1 + \xi t > 0$ y

- $\xi = \alpha^{-1} > 0$. Corresponde a la función de distribución de Fréchet Φ_α .
- $\xi = 0$. Corresponde a la función de distribución de Gumbel Λ .
- $\xi = -\alpha^{-1} < 0$. Corresponde a la función de distribución de Weibull Ψ_α .

Estas funciones son adecuadas para modelar reclamos a compañías de seguro al ocurrir catástrofes, ya que en estos casos el total de reclamos estará muy por encima de los reclamos generados en condiciones normales, no sólo por los montos de las pérdidas sino también por el número de siniestros que se pueden presentar al mismo tiempo.

Es importante que tengamos claro para que valores de ξ obtenemos las distribuciones de Gumbel, Fréchet o Weibull, en efecto, para $\xi = 0$ obtenemos la función de distribución de Gumbel. Veamos que ocurre para $\xi = \alpha^{-1} > 0$. Como $\alpha > 0$ entonces $\xi \neq 0$ y así:

$$H_\xi(t) = H_{\frac{1}{\alpha}}(t) = e^{-(1+\frac{t}{\alpha})^{-\alpha}}.$$

Haciendo $z = 1 + \frac{t}{\alpha} > 0$ tenemos:

$$H_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(z-1)) = \Phi_\alpha(z) = e^{-z^{-\alpha}} \quad (\text{para } z > 0).$$

Por lo tanto:

$$H_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(z-1)) = \Phi_{\alpha}(z) \text{ (para } z > 0\text{)}.$$

Ahora veamos que ocurre para $\xi = -\alpha^{-1} < 0$. Como $\alpha > 0$ entonces $\xi \neq 0$ y así:

$$H_{\xi}(t) = H_{-\frac{1}{\alpha}}(t) = e^{-(1-\frac{t}{\alpha})^{\alpha}}.$$

Haciendo $z = \frac{t}{\alpha} - 1 \leq 0$ tenemos:

$$H_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(z+1)) = \Psi_{\alpha}(z) = e^{-(-z)^{\alpha}} \text{ (para } z \leq 0\text{)}.$$

Por lo tanto:

$$H_{\frac{1}{\alpha}}(\alpha(z+1)) = \Psi_{\alpha}(z) \text{ (para } z \leq 0\text{)}.$$

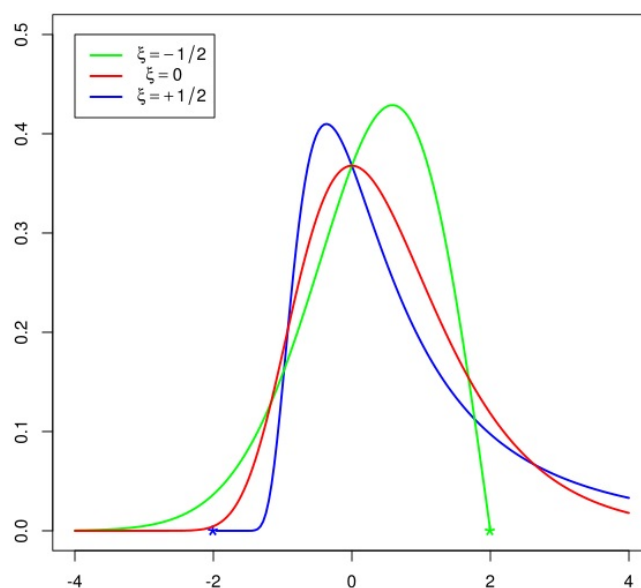


Figura 3.2: Densidad de H_{ξ} para distintos valores de ξ

Un parámetro que permite en algunos casos distinguir y seleccionar una distribución de manera más conveniente para un caso de estudio específico es el sesgo. El sesgo es una medida de asimetría respecto a la media de una función de distribución de una variable aleatoria con valores reales. El valor del sesgo puede ser positivo, negativo e incluso puede no estar definido. Dado que, en el presente caso, usaremos el sesgo como criterio para la selección de la distribución adecuada, consideramos a continuación un estimador de este parámetro frecuentemente utilizado.

Definición 3.3. Sea X una variable aleatoria, se define el coeficiente de sesgo de X como:

$$ses_X = \frac{E[(X - E(X))^3]}{[Var(X)]^{3/2}}. \quad (3.13)$$

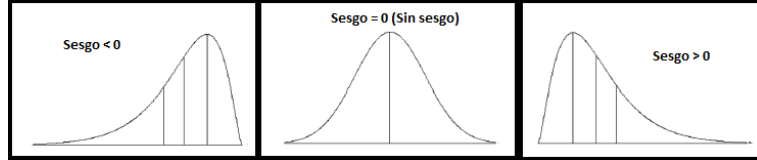


Figura 3.3: Graficas de valores distintos para el sesgo.

Proposición 3.2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución H_ξ , entonces el sesgo (ses_X) es igual a cero para $\xi = \xi_0 \simeq -2,8$. Por otra parte, $ses_X > 0$ para $\xi > \xi_0$ y $ses_X < 0$ para $\xi < \xi_0$. Además, para la distribución de Gumbell, $ses_X \simeq 1,14$.

Para el valor de ses_X se obtiene un valor aproximado si X tiene distribución H_ξ , pues para calcular la expresión $E[(X - E(X))^3]$ en (3.13), se utiliza el método de los cumulantes [22], esto debido a que si se calcula directamente la expresión $E[(X - E(X))^3]$ se obtiene una integral para la cual no puede calcularse una primitiva.

Capítulo 4

Valoración de Derivados de Catástrofe

4.1. Marco general

Veremos en esta sección como modelar el subyacente de los derivados de catástrofe, *el índice de pérdida*, el cual representa la cantidad de reclamos, en caso de catástrofe, sobre todas las propiedades aseguradas en una región específica.

Primero, sea t el tiempo y denotemos por $\{L_t, t > 0\}$, el proceso de los índices de pérdida. Fijamos $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ como el espacio de probabilidad subyacente.

Siguiendo el modelo del índice PCS existente, el proceso de pérdida tiene dos periodos como vimos en la tabla 3.1 aplicables al tipo de opciones que propone:

- Un periodo de pérdida $[0, t_1]$: donde t_1 representa el instante de maduración de la opción de una opción a compra de tipo Europea, debido a esto al final de este periodo el nivel del índice debe ser mayor al precio de ejercicio para que la opción tenga un pago eventual.
- Un periodo de maduración $[t_1, t_2]$: ya que el monto real generado por una catástrofe no puede ser evaluado en el momento, un período de extensión es dejado para que PCS realice investigaciones pertinentes de tal manera que el índice muestre el monto exacto de pérdidas en propiedades aseguradas debido a la catástrofe ocurrida entre $[0, t_1]$. Esto es beneficioso para las compañías de seguros debido a que permite que no se estimen mas reclamos de lo debido, es decir, que si la estimación de la catástrofe modelara más daño del que realmente existe esto generaría un gasto mayor al necesario para cubrir los reclamos. Las catástrofes ocurridas entre $[t_1, t_2]$ no son consideradas pues la opción habrá alcanzado su madurez después de t_1 . En caso de que la opción tenga valor mayor a cero en la fecha t_1 el pago ocurrirá en t_2 .

Si comparamos los daños causados por diferentes catástrofes, notamos que su incidencia en el entorno varía. También, su ocurrencia parece ser aleatoria. El índice PCS, por ejemplo, muestra algunos saltos ocurriendo aleatoriamente a lo largo del eje del tiempo. Por lo tanto, modelamos el índice de pérdida como:

$$L_t = L_0 e^{X_t}, \quad (4.1)$$

donde L_0 es el valor actual del índice de pérdida y sea X_t un proceso estocástico que representa el monto total de reclamos por catástrofe en el periodo $[0, t_1]$ y que modelaremos como un Proceso de Poisson Compuesto, dado por:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (4.2)$$

donde N_t es un Proceso de Poisson de media λ que representa la cantidad de catástrofes que ocurren para el tiempo menor a t , Y_i las variables aleatorias que modelan el monto de los reclamos por las catástrofes con $1 \leq i \leq N_t$. Por lo tanto la suma $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N_t}$ es el monto total de reclamos (modelados por el índice) que debe cubrir la institución. Hasta el momento no se ha hecho ninguna suposición sobre la distribución de las Y_i , nuestra única hipótesis es que sean independientes e idénticamente distribuidas.

Sea \mathfrak{F} la filtración generada por el Proceso de Poisson Compuesto X_t y sea \mathfrak{F}_t la σ -álgebra generada por los procesos X_s para $s \leq t$, es decir, $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$.

4.2. Distribución para los Montos de los Reclamos

Algunas evidencias científicas muestran que la ocurrencia de uno o varios terremotos pueden provocar un agujero en la tierra. Este evento es seguido por el proceso de cierre del mismo, el cual ocurre a través de otra serie de terremotos. Si el terremoto original tiene una gran magnitud entonces los terremotos siguientes (replicas) tienen una alta probabilidad de ocurrencia, es decir, un gran terremoto puede generar muchos otros. Si suponemos que un conjunto de variables aleatorias modelan la cantidad de reclamos que se presentan por un conjunto de catástrofes y que estas variables son independientes e idénticamente distribuidas, estaríamos suponiendo algo incorrecto debido a que la ocurrencia de estos eventos puede ser dependiente (un terremoto tiene alta probabilidad de tener replicas), mientras que las magnitudes de los reclamos por estos se mantienen independientes (pues las replicas pueden ser mayores al primer terremoto). Además el índice PCS toma en consideración muchos desastres no solamente terremotos, así los tamaños de los desastres son independientes como también pueden generarse por causas diferentes. Por ejemplo, los tamaños de los reclamos por huracanes son diferentes a los de terremotos, pues los

huracanes permiten a la población prepararse lo cual puede evitar ciertas pérdidas materiales, mientras que un terremoto toma a la población por sorpresa y dependiendo de su magnitud podría causar aún más daños. Por esto, la probabilidad de tener varios picos (modelados por el índice) de magnitud considerable (debido a los reclamos) a lo largo de un intervalo $[t_i, t_j]$, $i \neq j$ (donde t_i es el instante de tiempo en el cual se produce el evento catástrofico) es alta, debido a que el índice modela pérdidas por diversas catástrofes al mismo tiempo.

Como vimos en el capítulo anterior, la Teoría de Valores Extremos (TVE) nos ofrece algunas herramientas útiles para evaluar cual de las distribuciones de valores extremos pueden ser utilizadas para modelar los reclamos por catástrofe, se podrían tomar los datos por reclamos y realizar pruebas estadísticas, sin embargo, este conjunto de datos no esta disponible al público. Es por esto que se consideran otros parámetros de las distribuciones que nos ayuden a escoger la más apropiada.

Una distribución con sesgo positivo no sería apropiada para modelar los reclamos por catástrofe ya que implica que las pérdidas catastroficas están concentradas cerca de la cola de la distribución, es decir, los daños por catástrofe tienen poca probabilidad de ser considerablemente más costosos que los reclamos regulares por siniestros, lo cual no es cierto en la realidad ya que los reclamos por una catástrofe son mayores a los reclamos que ocurren en siniestros normales. Una distribución con sesgo negativo por otra parte nos dice que reclamos muy grandes tienen mayor probabilidad de ocurrir mientras que los siniestros menores tienen una pequeña probabilidad de ocurrir. Así, una distribución debería estar entre estos dos casos extremos con un sesgo cercano a cero.

Como vimos en la proposición 3.2 la distribución de Fréchet tiene mayor probabilidad de tener sesgo positivo. Modelar Y_t por una Fréchet es equivalente a suponer que los valores que pueden alcanzar los daños generados son muy cercanos a los daños usualmente causados, mientras que en la realidad estos valores no estan concentrados cerca del área de la cola izquierda de la distribución.

Por el mismo razonamiento, la distribución de Weibull asigna una alta probabilidad a los valores catástroficicos y presenta algunas veces colas infinitas. Esto es irreal ya que las ondas de un terremoto dejan de propagarse después de una cierta distancia, esto limita la cantidad de afectados y por lo tanto las pérdidas, de lo contrario Y_t no tendría cota.

Por otra parte la distribución de Gumbell entre las tres es la que tiene un sesgo más cercano a 0 y además ofrece cierta uniformidad. Tomando todo lo anterior en cuenta, escogemos la distribución de Gumbel entre las tres distribuciones para modelar Y_t .

Ahora calcularemos la función generadora de momentos del proceso X_t . Sea $z \in \mathbb{R}$ y se define la función generadora de momento de X_t como:

$$M(z, t) = E [e^{zX_t}],$$

$$\begin{aligned}
E [e^{zX_t}] &= E [E [e^{zX_t} | N_t]] \quad \text{como } \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_t = k\} \\
&= E \left[\sum_{k=1}^{\infty} E [e^{zX_t} | N_t = k] I_{\{N_t=k\}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E [E [e^{zX_t} | N_t = k] I_{\{N_t=k\}}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E [e^{zX_t} | N_t = k] E [I_{\{N_t=k\}}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E [e^{zX_t} | N_t = k] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E [e^{z \sum_{i=1}^k Y_i}] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E [e^{(zY_1 + zY_2 + \dots + zY_k)}] \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (E [e^{zY_1}])^k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (\text{pues las } Y_i \text{ son iid.}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_Y(z))^k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t \varphi_Y(z))^k}{k!} \right) e^{-\lambda t} \\
&= e^{\lambda t \varphi_Y(z)} e^{-\lambda t} \\
&= e^{\lambda t (\Gamma(1-\beta z) e^{\mu z} - 1)},
\end{aligned}$$

donde $\varphi_Y(z)$ es la función generadora de momentos de las Y_t que están distribuidas como Gumbel con parámetros β, μ y

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

La función generadora de momento de Esscher está definida como:

$$\begin{aligned}
M(z, t, h) &= \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)} \\
&= \frac{e^{\lambda t(\Gamma(1-\beta(z+h))e^{\mu z}e^{\mu h}-1)}}{e^{\lambda t(\Gamma(1-\beta h)e^{\mu h}-1)}} \\
&= e^{\lambda t[\Gamma(1-\beta(z+h))e^{\mu z}e^{\mu h}-1-\Gamma(1-\beta h)e^{\mu h}+1]} \\
&= e^{\lambda t e^{\mu h}[\Gamma(1-\beta(z+h))e^{\mu z}-\Gamma(1-\beta h)]}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Por otra parte, queremos modificar nuestra distribución de tal manera que la medida de probabilidad resultante convierta el proceso $\{e^{-\delta t}L_t\}$ en una martingala. Ahora como $\delta = \ln[M(1, 1, h^*)]$ tenemos que:

$$\delta = \lambda e^{\mu h^*} (\Gamma [1 - \beta (1 + h^*)] e^{\mu} - \Gamma(1 - \beta h^*)). \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) aparentemente no tiene una solución cerrada para h^* , sin embargo, en [11] se presenta como calcular un valor numérico aproximado para h^* usando (4.4) y el método de Newton-Raphson.

4.3. Fórmula de Valoración para opciones a compra PCS

Ahora para presentar la fórmula de valoración supongamos que:

1. No existen gastos por las transacciones o impuestos.
2. La ausencia de arbitraje.
3. La constante de interés libre de riesgo esta dada por (3.10).

De esta manera, el precio de una opción a compra (C) sobre el índice de pérdida (L_t) con un precio de ejercicio K se puede calcular como:

$$C = E^* [e^{-\delta t}(L_{t_1} - K)_+],$$

donde:

$$(L_{t_1} - K)_+ = (L_0 e^{X_{t_1}} - K)_+ = \begin{cases} L_0 e^{X_{t_1}} - K & \text{cuando : } L_0 e^{X_{t_1}} - K > 0 \\ 0 & \text{cuando : } L_0 e^{X_{t_1}} - K \leq 0 \end{cases}$$

luego para $L_0e^{X_{t_1}} - K > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} (L_{t_1} - K)_+ &= L_0e^{X_{t_1}} - K, \text{ cuando: } L_0e^{X_{t_1}} - K > 0 \\ &= L_0e^{X_{t_1}} - K, \text{ cuando: } X_{t_1} > \ln\left(\frac{L_0}{K}\right). \end{aligned}$$

Sea $\Psi = \ln\left(\frac{L_0}{K}\right)$, entonces:

$$\begin{aligned} C &= E[e^{-\delta t}(L_{t_1} - K)^+] \\ C &= e^{-\delta t_1} \int_{\Psi}^{\infty} (L_{t_1} - K)f(x, t_1, h^*)dx \\ C &= e^{-\delta t_1} \int_{\Psi}^{\infty} L_0e^x f(x, t_1, h^*)dx - \int_{\Psi}^{\infty} e^{-\delta t_1} K f(x, t_1, h^*)dx, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} e^x f(x, t_1, h^*) &= e^x \frac{e^{h^*x}}{M(h^*, t_1)} \\ &= \frac{e^{(h^*+1)x}}{M(h^*, t_1)} \\ &= \frac{M(h^* + 1, t_1)}{M(h^*, t_1)} f(x, t_1, h^* + 1) \\ &= M(1, t_1, h^*) f(x, t_1, h^* + 1) \\ &= e^{\delta t_1} f(x, t_1, h^* + 1), \end{aligned}$$

de esta manera:

$$\begin{aligned} C &= e^{-\delta t_1} L_0 \int_{\Psi}^{\infty} e^{\delta t_1} f(x, t_1, h^* + 1)dx - e^{-\delta t_1} K \int_{\Psi}^{\infty} f(x, t_1, h^*)dx \\ C &= L_0 \int_{\Psi}^{\infty} f(x, t_1, h^* + 1)dx - e^{-\delta t_1} K \left(1 - \int_{-\infty}^{\Psi} f(x, t_1, h^*)\right) dx \\ C &= L_0(1 - F(\Psi, t_1, h^* + 1)) - e^{-\delta t_1} K(1 - F(\Psi, t_1, h^*)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) constituye una fórmula de valoración de la opción a compra sobre el índice de catástrofe y para la opción a venta se usa la fórmula de paridad Put-Call.

Conclusión

Debido al riesgo al cual se exponen las compañías aseguradoras ante una catástrofe, estas han recurrido al mercado de valores como alternativa para responder ante estas pérdidas masiva. El mercado de valores posee grandes cantidades de capital que puede ser utilizado para responder ante un evento de tal magnitud, debido a esto el sector asegurador ha hecho uso de instrumentos financieros como los derivados. Los derivados utilizados en el sector asegurador (Derivados de Catástrofe) difieren a los derivados tradicionales en que los primeros basan su valor en un índice conocido como Índice de Pérdida, mientras que los segundos basan su valor sobre un bien tangible, lo cual hace que la manera en que se valoran estos sean distintas.

Haciendo uso del cálculo estocástico podemos valorar los derivados financieros tanto los derivados tradicionales como los derivados por catástrofe. En el caso de los derivados tradicionales haciendo uso unicamente de esta herramienta podemos obtener la fórmula de Black-Scholes. Sin embargo, en otros casos como los Derivados Sobre Riesgo de Catástrofe no solo es necesario el uso del cálculo estocástico si no también de la Transformada de Esscher y la Teoría de Valores Extremos con la cual podemos generar para estos derivados fórmulas de valoración cerradas como la fórmula de Black-Scholes para los derivados tradicionales.

Al final, el hecho de que estos instrumentos sean cotizados en el mercado de valores y exista una manera de modelar el precio por opciones sobre estos instrumentos permite tanto al sector asegurador mantenerse en el negocio como a los asegurados mantener sus bienes aún más protegidos ante una catástrofe de cierta magnitud, lo cual genera una situación en la cual ambas partes son beneficiadas.

Bibliografía

- [1] ARRIOJAS M. (2004) *Teoría de las Probabilidades*. (23/04/2015)
(<http://www.matematica.ciens.ucv.ve/>)
- [2] BLACK F. y SHOLES M. (1973) *The pricing of options an corporate liabilities*.
Journal of Political Economy 81, 637-659.
- [3] COX J., ROSS S. y RUBINSTEIN M. (1979) *Option Pricing: A Simplified Aproach*.
Journal of Financial Economy 7, 229-263.
- [4] DOANE D. y SEWARD L. (2011) *Measuring Skewness: A Forgotten Statistic?*. Journal
of Statistics Education, Volume 19.
- [5] ELLIOTT R. y KOPP E. (1940) *Mathematics of Financial Markets*. Segunda Edición.
- [6] EMBRECHTS P. KLDUPPELBERG C. y MIKOSCH T. (1997) *Modeling Extremal
Events for Insurance and Finance*.
- [7] FRAGA I. y NEVES C. *Extreme Value Distributions*. Universidad de Lisboa.
- [8] GALAMBOS J., LECHNER J. y SIMIU E. (1994) *Extreme Value Theory and Applica-
tions*. National Institute of Standards and Technology, Vol 3.
- [9] GERBER H. y SHIU E. (1994) *Option Pricing by Esscher Transforms*. Transactions
of Society of Actuaries, Vol 46.
- [10] MARKOSE S. y ALENTORN A. (2010) *The Generalized Extreme Value (GEV) Dis-
tribution, Implied Tail Index and Option Pricing*. The Journal of Derivatives.
- [11] MEHDI B. y MASAMITSU O. (2014) *Catastrophe Risk Derivatives: A New Approach*.
Journal of Mathematical Finance.
- [12] MIKOSH T. (1998) *Elementary Stochastic Calculus*. Universidad de Groningen.
- [13] MIRÁS CALVO M. *Matemáticas en Wall Street: la fórmula de Black-Scholes*.
- [14] MUERMANN A. *Catastrophe Derivatives*.

- [15] MUERMANN A. (2002) *Pricing Catastrophe Insurance Derivatives*. London School of Economics.
- [16] MUERMANN A. (2003) *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives*. University of Pennsylvania.
- [17] OKSENDAL B. (1985) *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Sexta edición, Universidad de Oslo.
- [18] ROSS S. (1996) *Stochastic Processes*. Segunda Edición, John Wiley & Sons, INC.
- [19] RIETHMULLER S. *The Gumbel Distribution*. (14/04/2015)
<http://www.samriethmuller.com.au/Blog/2011/11/30/the-gumbel-distribution/>.
- [20] ROUAH F.D. *Four Derivations of the Black-Scholes Formula*. (www.FRouah.com).
- [21] TOMAS M. y SHUKLA R. *Black-Scholes Option Pricing Formula*.
- [22] WATKINS J. *Moments and Generating Functions*. University of Arizona.
(<http://math.arizona.edu/~jwatkins/>)